Các mô hình ngẫu nhiên và ứng dụng
Ngày 27 tháng 4 năm 2022

Bài tập tuần 8

Học viên: Đinh Văn Tuân

Câu 1:
Cho xích Markov ma trận xác suất chuyển có các trạng thái $\mathbb{I} = \{0, 1, 2, 3\}$

$$\mathbb{P} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0.2 & 0.4 & 0.2 & 0.2 \\ 0.3 & 0.3 & 0.2 & 0.2 \\ 0.5 & 0 & 0.3 & 0.2 \end{bmatrix}$$

(a) Tính h_1^0, h_2^0
(b) Tính k_1^0, k_2^0

Giải:

(a) Áp dụng công thức $h_i^A = \sum_{j \in I} p_{ij} h_j^A$, với $i \notin A$, $A = \{0\}$.
Ta có:

$$\begin{cases} h_1^0 = p_{10}h_0^0 + p_{11}h_1^0 + p_{12}h_2^0 + p_{13}h_3^0 \\ h_2^0 = p_{20}h_0^0 + p_{21}h_1^0 + p_{22}h_2^0 + p_{23}h_3^0 \\ h_3^0 = p_{30}h_0^0 + p_{31}h_1^0 + p_{32}h_2^0 + p_{33}h_3^0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (p_{11} - 1)h_1^0 + p_{12}h_2^0 + p_{13}h_3^0 = -p_{10}h_0^0 \\ p_{21}h_1^0 + (p_{22} - 1)h_2^0 + p_{23}h_3^0 = -p_{20}h_0^0 \\ p_{31}h_1^0 + p_{32}h_2^0 + (p_{33} - 1)h_3^0 = -p_{30}h_0^0 \end{cases}$$

Từ ma trận xác suất chuyển $\mathbb{P}$ và $h_0^0 = 1$, ta thay số vào hệ phương trình trên được:

$$\begin{cases} -0.6h_1^0 + 0.2h_2^0 + 0.2h_3^0 = -0.2 \\ 0.3h_1^0 - 0.8h_2^0 + 0.2h_3^0 = -0.3 \\ 0.3h_2^0 - 0.8h_3^0 = -0.5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} h_1^0 = 1 \\ h_2^0 = 1 \\ h_3^0 = 1 \end{cases}$$

(b) Áp dụng công thức $k_i^A = 1 + \sum_{j \notin A} p_{ij} k_j^A$, với $A = \{0\}$.
Ta có:

$$\begin{cases} k_1^0 = 1 + p_{11}k_1^0 + p_{12}k_2^0 + p_{13}k_3^0 \\ k_2^0 = 1 + p_{21}k_1^0 + p_{22}k_2^0 + p_{23}k_3^0 \\ k_3^0 = 1 + p_{31}k_1^0 + p_{32}k_2^0 + p_{33}k_3^0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (p_{11} - 1)k_1^0 + p_{12}k_2^0 + p_{13}k_3^0 = -1 \\ p_{21}k_1^0 + (p_{22} - 1)k_2^0 + p_{23}k_3^0 = -1 \\ p_{31}k_1^0 + p_{32}k_2^0 + (p_{33} - 1)k_3^0 = -1 \end{cases}$$

Từ ma trận xác suất chuyển $\mathbb{P}$, ta thay số vào hệ phương trình trên được:

$$\begin{cases} -0.6k_1^0 + 0.2k_2^0 + 0.2k_3^0 = -1 \\ 0.3k_1^0 - 0.8k_2^0 + 0.2k_3^0 = -1 \\ 0.3k_2^0 - 0.8k_3^0 = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} k_1^0 = \frac{500}{141} \\ k_2^0 = \frac{150}{47} \\ k_3^0 = \frac{115}{47} \end{cases}$$

Câu 2:
Cho xích Markov ma trân xác suất chuyển:

$$\mathbb{P} = \begin{bmatrix} \mathbb{I} & \mathbb{O} \\ \mathbb{R} & \mathbb{Q} \end{bmatrix}$$

Với $\mathbb{I}$ là ma trận đơn vị, $\mathbb{O}$ là ma trận **O**; $\mathbb{R}$ và $\mathbb{Q}$ là các ma trận khác không. Tìm $\mathbb{P}^n$ với $n = 1, 2, 3$.
Giải:
Với $n = 1$: $\mathbb{P}^1 = \mathbb{P} = \begin{bmatrix} \mathbb{I} & \mathbb{O} \\ \mathbb{R} & \mathbb{Q} \end{bmatrix}$
Với $n = 2$: $\mathbb{P}^2 = \mathbb{P}\mathbb{P} = \begin{bmatrix} \mathbb{I} & \mathbb{O} \\ \mathbb{R} & \mathbb{Q} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbb{I} & \mathbb{O} \\ \mathbb{R} & \mathbb{Q} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbb{I}\mathbb{I} + \mathbb{O}\mathbb{R} & \mathbb{I}\mathbb{O} + \mathbb{O}\mathbb{Q} \\ \mathbb{R}\mathbb{I} + \mathbb{Q}\mathbb{R} & \mathbb{R}\mathbb{O} + \mathbb{Q}\mathbb{Q} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbb{I} & \mathbb{O} \\ \mathbb{R} + \mathbb{Q}\mathbb{R} & \mathbb{Q}^2 \end{bmatrix}$

Với $n = 3$: $\mathbb{P}^3 = \mathbb{P}^2\mathbb{P} = \begin{bmatrix} \mathbb{I} & \mathbb{O} \\ \mathbb{R} + \mathbb{Q}\mathbb{R} & \mathbb{Q}^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbb{I} & \mathbb{O} \\ \mathbb{R} & \mathbb{Q} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbb{I} & \mathbb{O} \\ \mathbb{R} + \mathbb{Q}\mathbb{R} + \mathbb{Q}^2\mathbb{R} & \mathbb{Q}^3 \end{bmatrix}$

Tổng quát:

$$\mathbb{P}^n = \begin{bmatrix} \mathbb{I} & \mathbb{O} \\ (\mathbb{I} + \mathbb{Q} + \cdots + \mathbb{Q}^{n-1})\mathbb{R} & \mathbb{Q}^n \end{bmatrix}$$

Câu 3:

Một mê cung 3×3 trong đó ô đầu tiên bên trên phía trái là ô số 1, ô cuối cùng bên phải phía dưới là ô bẫy số 9. Một con chuột vào mê cung ở ô đầu tiên. Mỗi bước di chuyển con chuột di chuyển sang ô bên cạnh với xác suất như nhau. Gọi X_n là số ô mà con chuột ở bước thứ n.

(a) $(X_n)_{n\geq 0}$ có phải là xích Markov không?
(b) Nếu là xích Markov hãy tìm ma trận xác suất chuyển
(c) Nếu là xích Markov hãy tìm thời gian trung bình con chuột rơi vào bẫy

Giải:

1	2	3
4	5	6
7	8	9

(a) Vì số ô tiếp theo mà con chuột sẽ di chuyển đến chỉ phụ thuộc vào số ô hiện tại nên $(X_n)_{n\geq 0}$ là xích Markov.

(b) Giả sử con chuột đang ở ô số 5 thì nó sẽ có thể di chuyển đến một trong các ô số trong tập $\{2, 4, 6, 8\}$ với xác suất là như nhau và bằng 0.25. Tương tự như vậy đối với các trường hợp con chuột ở các ô số khác. Ta tìm được ma trận xác suất chuyển là:

$$\mathbb{P} = \begin{bmatrix} 0 & 1/2 & 0 & 1/2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1/3 & 0 & 1/3 & 0 & 1/3 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & 0 & 0 & 0 & 1/2 & 0 & 0 & 0 \\ 1/3 & 0 & 0 & 0 & 1/3 & 0 & 1/3 & 0 & 0 \\ 0 & 1/4 & 0 & 1/4 & 0 & 1/4 & 0 & 1/4 & 0 \\ 0 & 0 & 1/3 & 0 & 1/3 & 0 & 0 & 0 & 1/3 \\ 0 & 0 & 0 & 1/2 & 0 & 0 & 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1/3 & 0 & 1/3 & 0 & 1/3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

(c) Vì con chuột vào mê cung ở ô số 1, nên thời gian trung bình nó rơi vào bẫy là $k_1^{\{9\}}$. Áp dụng công thức $k_i^A = 1 + \sum_{j \notin A} p_{ij} k_j^A$, với $A = \{9\}$. Ta dùng ký hiệu k_i thay cho $k_i^{\{9\}}$
Ta có:

$$\begin{cases} k_1 = 1 + p_{11}k_1 + p_{12}k_2 + p_{13}k_3 + p_{14}k_4 + p_{15}k_5 + p_{16}k_6 + p_{17}k_7 + p_{18}k_8 \\ k_2 = 1 + p_{21}k_1 + p_{22}k_2 + p_{23}k_3 + p_{24}k_4 + p_{25}k_5 + p_{26}k_6 + p_{27}k_7 + p_{28}k_8 \\ \ldots \\ k_8 = 1 + p_{81}k_1 + p_{82}k_2 + p_{83}k_3 + p_{84}k_4 + p_{85}k_5 + p_{86}k_6 + p_{87}k_7 + p_{88}k_8 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (p_{11}-1)k_1 + p_{12}k_2 + p_{13}k_3 + p_{14}k_4 + p_{15}k_5 + p_{16}k_6 + p_{17}k_7 + p_{18}k_8 = -1 \\ p_{21}k_1 + (p_{22}-1)k_2 + p_{23}k_3 + p_{24}k_4 + p_{25}k_5 + p_{26}k_6 + p_{27}k_7 + p_{28}k_8 = -1 \\ ... \\ p_{81}k_1 + p_{82}k_2 + p_{83}k_3 + p_{84}k_4 + p_{85}k_5 + p_{86}k_6 + p_{87}k_7 + (p_{88}-1)k_8 = -1 \end{cases}$$

Từ ma trận xác suất chuyển $\mathbb{P}$, ta thay số vào hệ phương trình trên được

$$\begin{cases} -k_1 + 0.5k_2 + 0.5k_4 = -1 \\ (1/3)k_1 - k_2 + (1/3)k_3 + (1/3)k_5 = -1 \\ (1/2)k_2 - k_3 + (1/2)k_6 = -1 \\ (1/3)k_1 - k_4 + (1/3)k_5 + (1/3)k_7 = -1 \\ (1/4)k_2 + (1/4)k_4 - k_5 + (1/4)k_6 + (1/4)k_8 = -1 \\ (1/3)k_3 + (1/3)k_5 - k_6 = -1 \\ (1/2)k_4 - k_7 + (1/2)k_8 = -1 \\ (1/3)k_5 + (1/3)k_7 - k_8 = -1 \end{cases}$$

Dùng Python để giải hệ này:

```
import numpy as np
a = np.array([[-1, 0.5, 0, 0.5, 0, 0, 0, 0], [1/3, -1, 1/3, 0, 1/3, 0, 0, 0], [0, 1/2, -1,0,0,1/2,0,0],[1/3,0,0,-1,1/3,0,1/3,0],[0,1/4,0,1/4,-1,1/4,0,1/4], [0,0,1/3,0,1/3,-1,0,0], [0,0,0,1/2,0,0,-1,1/2],[0,0,0,0,1/3,0,1/3,-1]])
b = np.array([-1, -1, -1, -1,-1, -1, -1, -1])
x = np.linalg.solve(a, b)
print(x)
```

Kết quả: x = [18. 17. 15. 17. 15. 11. 15. 11.]

Vậy thời gian trung bình để con chuột rơi vào bẫy là $k_1^{\{9\}} = 18$ (đơn vị thời gian)

Câu 4:

Một người chơi trò chơi là gieo một con xúc sắc lặp đi lặp cho đến khi tích của hai lần gieo liên tiếp có tổng bằng 10 thì dừng. Tìm số lần gieo trung bình con xúc sắc của người chơi?

Giải: