Các mô hình ngẫu nhiên và ứng dụng
Ngày 11 tháng 4 năm 2022

Bài tập tuần 7

Học viên: Đinh Văn Tuân
Ngày sinh $\alpha = 18$
Tháng sinh $\beta = 01$

Câu 1:
Cho xích Markov ma trận xác suất chuyển có các trạng thái $\mathbb{I} = \{0, 1, 2\}$

$$\mathbb{P} = \begin{bmatrix} 1/2 & 1/2 & 0 \\ 1/3 & 1/3 & 1/3 \\ 1/6 & 1/2 & 1/3 \end{bmatrix}$$

Tìm phân phối dừng của xích Markov.
Giải:
Gọi $\lambda = (\lambda_0, \lambda_1, \lambda_2)$ là phân phối dừng của xích Markov.
Với: $\lambda = \lambda\mathbb{P}$ và $\sum\limits_{i\in\mathbb{I}} \lambda_i = 1$. Ta có hệ phương trình:

$$\begin{cases} (\lambda_0, \lambda_1, \lambda_2) = (\lambda_0, \lambda_1, \lambda_2) \begin{bmatrix} 1/2 & 1/2 & 0 \\ 1/3 & 1/3 & 1/3 \\ 1/6 & 1/2 & 1/3 \end{bmatrix} \\ \lambda_0 + \lambda_1 + \lambda_2 = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda_0 = (1/2)\lambda_0 + (1/3)\lambda_1 + (1/6)\lambda_2 \\ \lambda_1 = (1/2)\lambda_0 + (1/3)\lambda_1 + (1/2)\lambda_2 \\ \lambda_2 = (1/3)\lambda_1 + (1/3)\lambda_2 \\ \lambda_0 + \lambda_1 + \lambda_2 = 1 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (-1/2)\lambda_0 + (1/3)\lambda_1 + (1/6)\lambda_2 = 0 \\ (1/2)\lambda_0 + (-2/3)\lambda_1 + (1/2)\lambda_2 = 0 \\ (1/3)\lambda_1 + (-2/3)\lambda_2 = 0 \\ \lambda_0 + \lambda_1 + \lambda_2 = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (-1/2)\lambda_0 + (1/3)\lambda_1 + (1/6)\lambda_2 = 0 \\ (1/2)\lambda_0 + (-2/3)\lambda_1 + (1/2)\lambda_2 = 0 \\ \lambda_0 + \lambda_1 + \lambda_2 = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda_0 = \frac{5}{14} \\ \lambda_1 = \frac{3}{7} \\ \lambda_2 = \frac{3}{14} \end{cases}$$

Vậy: $\lambda = \left(\frac{5}{14}, \frac{3}{7}, \frac{3}{14}\right)$

Câu 2:
Cho xích Markov ma trận xác suất chuyển có các trạng thái $\mathbb{I} = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6\}$

$$\mathbb{P} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \alpha\% & 0 & 0 & 0 & 1-\alpha\% \\ 0 & 1-\beta\% & 0 & 0 & \beta\% & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.8 & 0 & 0 & 0.2 & 0 \\ 0 & 0.3 & 0.4 & 0.3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0.5 & 0 & 0 & 0.2 & 0 & 0.3 \\ 0 & 0 & \alpha\% & 0 & 0 & 1-\alpha\% & 0 \\ 0 & 0.5 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.5 \end{bmatrix}$$

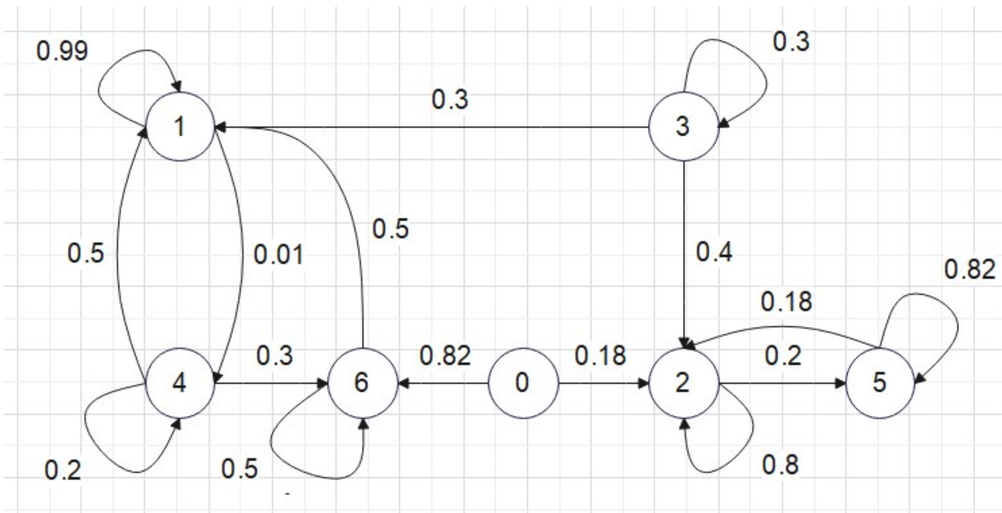
(a) Phân lớp các trạng thái của xích Markov theo tính liên thông
(b) Tìm chu kỳ của các trạng thái $d(i)$, $i \in \mathbb{I}$

Giải:

Thay $\alpha = 18$ và $\beta = 1$ ta được ma trận xác suất chuyển

$$\mathbb{P} = \begin{array}{c} \\ 0 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \end{array} \!\!\begin{array}{c} \begin{array}{ccccccc} 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0.18 & 0 & 0 & 0 & 0.82 \\ 0 & 0.99 & 0 & 0 & 0.01 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.8 & 0 & 0 & 0.2 & 0 \\ 0 & 0.3 & 0.4 & 0.3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0.5 & 0 & 0 & 0.2 & 0 & 0.3 \\ 0 & 0 & 0.18 & 0 & 0 & 0.82 & 0 \\ 0 & 0.5 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.5 \end{bmatrix} \end{array}$$

Ta vẽ biểu đồ:



(a) $p_{14} = 0.01 > 0$ và $p_{41} = 0.5 > 0 \Rightarrow 1 \leftrightarrow 4$,
$p_{46} = 0.3 > 0$ và $p_{64}^{(2)} \geq p_{61}p_{14} = 0.5 \times 0.01 = 0.005 \Rightarrow p_{64}^{(2)} > 0 \Rightarrow 4 \leftrightarrow 6$,
$\Rightarrow \{1, 4, 6\}$ tạo thành một lớp.
$p_{i0}^{(n)} = 0,\ \forall n \geq 1,\ i \in \mathbb{I} \Rightarrow \{0\}$ là một lớp.
$p_{i3}^{(n)} = 0,\ \forall n \geq 1,\ i \in \mathbb{I}\backslash\{3\} \Rightarrow \{3\}$ là một lớp.
$p_{25} = 0.2 > 0$ và $p_{52} = 0.18 > 0 \Rightarrow \{2, 5\}$ tạo thành một lớp.

(b) Ta có $p_{11} = 0.99 > 0 \Rightarrow d(1) = 1$. Mà $\{1, 4, 6\}$ tạo thành một lớp nên $d(1) = d(4) = d(6) = 1$.
$p_{22} = 0.8 > 0 \Rightarrow d(2) = 1$. Mà $\{2, 5\}$ tạo thành một lớp nên $d(2) = d(5) = 1$.
$p_{33} = 0.3 > 0 \Rightarrow d(3) = 1$.
Vì $p_{00}^{(n)} = 0, \forall n \geq 1 \Rightarrow d(0) = \infty$

Câu 3:

Một người dân mua dịch vụ viễn thông sẽ chọn một trong hãng (A, B, C, D). Xác suất trong một tháng tiếp theo họ chọn lại hãng viễn thông quý này đã mua lần lượt tương ứng là $2\beta\%, \beta\%, 3\beta\%, (1 - 6\beta\%)$. Nếu người dân không mua dịch vụ viễn thông của hãng tháng này đã chọn thì tháng sau họ chọn một trong ba hãng còn lại với xác suất như nhau. Hãy tìm

(a) Phân phối thị phần của hãng viễn thông tháng tiếp theo nếu phân phối quý này là $\lambda = (0.1, 0.3, 0.4, 0.2)$

(b) Phân phối dừng thị phần của dân cư trong tương lai xa xôi.

Giải:

(a) Gọi X_n là hãng dịch vụ viễn thông mà người dân mua ở quý thứ n. Ta thấy dãy $(X_n)_{n\geq 0}$ là xích Markov có không gian trạng thái $\mathbb{I} = \{A, B, C, D\}$ và ma trận xác suất chuyển

$$\mathbb{P} = \begin{bmatrix} 2\beta\% & (1-2\beta\%)/3 & (1-2\beta\%)/3 & (1-2\beta\%)/3 \\ (1-\beta\%)/3 & \beta\% & (1-\beta\%)/3 & (1-\beta\%)/3 \\ (1-3\beta\%)/3 & (1-3\beta\%)/3 & 3\beta\% & (1-3\beta\%)/3 \\ 2\beta\% & 2\beta\% & 2\beta\% & (1-6\beta\%) \end{bmatrix}$$

Thay $\beta = 1$ ta được ma trận xác suất chuyển

$$\mathbb{P} = \begin{array}{c} \\ A \\ B \\ C \\ D \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} A & B & C & D \end{array} \\ \begin{bmatrix} 0.02 & 49/150 & 49/150 & 49/150 \\ 33/100 & 0.01 & 33/100 & 33/100 \\ 97/300 & 97/300 & 0.03 & 97/300 \\ 0.02 & 0.02 & 0.02 & 0.94 \end{bmatrix} \end{array}$$

Gọi phân phối thị phần của hãng viễn thông tháng tiếp theo là $\lambda^{(k)}, k \in \mathbb{N}$.

$$\lambda^{(k)} = \lambda\mathbb{P} = (0.1, 0.3, 0.4, 0.2) \begin{bmatrix} 0.02 & 49/150 & 49/150 & 49/150 \\ 33/100 & 0.01 & 33/100 & 33/100 \\ 97/300 & 97/300 & 0.03 & 97/300 \\ 0.02 & 0.02 & 0.02 & 0.94 \end{bmatrix} = (0.234333, 0.169, 0.147667, 0.449)$$

(b) Gọi $\lambda = (\lambda_A, \lambda_B, \lambda_C, \lambda_D)$ là phân phối dừng thị phần của dân cư trong tương lai xa xôi.
Với: $\lambda = \lambda\mathbb{P}$ và $\sum\limits_{i\in\mathbb{I}} \lambda_i = 1$. Ta có hệ phương trình:

$$\begin{cases} (\lambda_A, \lambda_B, \lambda_C, \lambda_D) = (\lambda_A, \lambda_B, \lambda_C, \lambda_D) \begin{bmatrix} 0.02 & 49/150 & 49/150 & 49/150 \\ 33/100 & 0.01 & 33/100 & 33/100 \\ 97/300 & 97/300 & 0.03 & 97/300 \\ 0.02 & 0.02 & 0.02 & 0.94 \end{bmatrix} \\ \lambda_A + \lambda_B + \lambda_C + \lambda_D = 1 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \lambda_A = 0.02\lambda_A + (33/100)\lambda_B + (97/300)\lambda_C + 0.02\lambda_D \\ \lambda_B = (49/150)\lambda_A + 0.01\lambda_B + (97/300)\lambda_C + 0.02\lambda_D \\ \lambda_C = (49/150)\lambda_A + (33/100)\lambda_B + 0.03\lambda_C + 0.02\lambda_D \\ \lambda_D = (49/150)\lambda_A + (33/100)\lambda_B + (97/300)\lambda_C + 0.94\lambda_D \\ \lambda_A + \lambda_B + \lambda_C + \lambda_D = 1 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (49/150)\lambda_A - 0.99\lambda_B + (97/300)\lambda_C + 0.02\lambda_D = 0 \\ (49/150)\lambda_A + (33/100)\lambda_B - 0.97\lambda_C + 0.02\lambda_D = 0 \\ (49/150)\lambda_A + (33/100)\lambda_B + (97/300)\lambda_C - 0.06\lambda_D = 0 \\ \lambda_A + \lambda_B + \lambda_C + \lambda_D = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda_A = 0.05172358 \\ \lambda_B = 0.05120112 \\ \lambda_C = 0.05225681 \\ \lambda_D = 0.84481849 \end{cases}$$

Vậy: $\lambda = (0.05172358, 0.05120112, 0.05225681, 0.84481849)$