Các mô hình ngẫu nhiên và ứng dụng
Ngày 22 tháng 2 năm 2022

Bài tập tuần 4

Học viên: Đinh Văn Tuân
Ngày sinh $\alpha = 18$
Tháng sinh $\beta = 01$

Câu 2:
Cho xích Markov với không gian trạng thái $\mathbb{I} = \{0, 1, 2\}$ có phân phân phối ban đầu $\lambda = (0.3, 0.5, 0.2)$ và ma trận xác suất chuyển

$$\mathbb{P} = \begin{bmatrix} 0.5 & 0.5 & 0 \\ 0.6 & \alpha\% & 0.4 - \alpha\% \\ 0.6 & 0.2 & 0.2 \end{bmatrix}$$

(a) Tìm $\mathbb{P}^{(n)}, 2 \leq n \in \mathbb{N}$
(b) Tìm phân phối của xích sau n bước, $\lambda^{(n)},\ 2 \leq n \in \mathbb{N}$

Giải:

Thay $\alpha = 18$ ta được ma trận xác suất chuyển $\mathbb{P} = \begin{bmatrix} 0.5 & 0.5 & 0 \\ 0.6 & 0.18 & 0.22 \\ 0.6 & 0.2 & 0.2 \end{bmatrix}$

(a) Tìm các trị riêng của ma trận $\mathbb{P}$. Phương trình đặc trưng:

$$|\mathbb{P} - \lambda I| = -\lambda^3 + 0.88\lambda^2 + 0.118\lambda + 0.002 = 0$$

Các trị riêng tương ứng: $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = -0.1, \lambda_3 = -0.02$
Giải hệ phương trình $(\mathbb{P} - \lambda_i I)x = 0$ để tìm các véc tơ riêng tương ứng:
Với $\lambda_1 = 1$, ta có:

$$(x_1, x_2, x_3) = t_1(1, 1, 1), \text{với } t_1 \neq 0$$

Với $\lambda_2 = -0.1$, ta có:

$$(x_1, x_2, x_3) = t_2\left(-\frac{5}{6}, 1, 1\right), \text{với } t_2 \neq 0$$

Với $\lambda_3 = -0.02$, ta có:

$$(x_1, x_2, x_3) = t_3\left(-\frac{55}{98}, \frac{143}{245}, 1\right), \text{với } t_3 \neq 0$$

Chéo hóa $\mathbb{P}$:
Ma trận U làm chéo hóa $\mathbb{P}$:

$$U = \begin{bmatrix} 1 & -5/6 & -55/98 \\ 1 & 1 & 143/245 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Khi đó,

$$D = U^{-1}\mathbb{P}U = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -0.1 & 0 \\ 0 & 0 & -0.02 \end{bmatrix}$$

Tính $\mathbb{P}^n$:

$$D = U^{-1}\mathbb{P}U \Rightarrow \mathbb{P} = UDU^{-1}$$

$$\Rightarrow \mathbb{P}^n = (UDU^{-1})^n = UD^nU^{-1}$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & -5/6 & -55/98 \\ 1 & 1 & 143/245 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & (-0.1)^n & 0 \\ 0 & 0 & (-0.02)^n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -5/6 & -55/98 \\ 1 & 1 & 143/245 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}^{-1}$$

(b) $\lambda^{(n)} = \lambda\mathbb{P}^{(n)} = (0.3, 0.5, 0.2)\mathbb{P}^{(n)}$. Với $\mathbb{P}^{(n)}$ đã tìm được ở (a).

Câu 3:
Phân lớp và kiểm tra tính tối giản của xích Markov bằng quan hệ liên thông với $\mathbb{I} = \{0, 1, 2, 3\}$ và ma trận xác suất chuyển

(a) $\mathbb{P}_1 = \begin{bmatrix} 0.5 & 0.5 & 0 & 0 \\ 0.5 & 0.5 & 0 & 0 \\ 0 & 0.5 & 0 & 0.5 \\ 0.5 & 0 & 0 & 0.5 \end{bmatrix}$

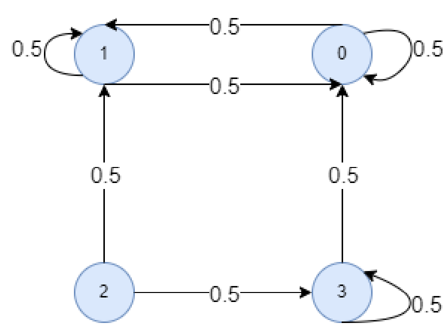
(b) $\mathbb{P}_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0.5 & 0.5 & 0 & 0 \\ 0.25 & 0.25 & 0.25 & 0.25 \end{bmatrix}$

Giải:

(a) Phân lớp:

$$\mathbb{P}_1 = \begin{array}{c} \\ 0 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} 0 & 1 & 2 & 3 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 0.5 & 0.5 & 0 & 0 \\ 0.5 & 0.5 & 0 & 0 \\ 0 & 0.5 & 0 & 0.5 \\ 0.5 & 0 & 0 & 0.5 \end{bmatrix} \end{array}$$

Ta vẽ biểu đồ:

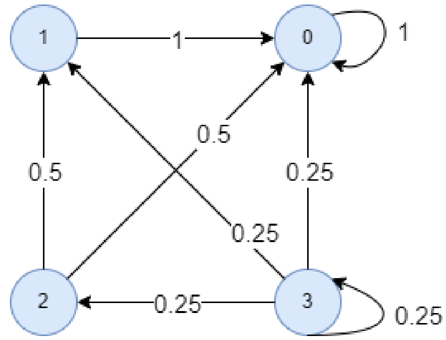


$p_{01} = 0.5 > 0$ và $p_{10} = 0.5 > 0 \Rightarrow 0 \leftrightarrow 1$ (1)
$p_{j2} = 0, j \in \mathbb{I}$ (2) $\Rightarrow \{2\}$ là một lớp
$p_{j3} = 0, j \in \mathbb{I}, j \neq 2, 3$. Kết hợp với (2) $\Rightarrow \{3\}$ là một lớp
Vậy xích Markov có 3 lớp liên thông là {0,1}, {2} và {3}.
Xích này không tối giản.

(b) Phân lớp:

$$\mathbb{P}_2 = \begin{array}{c} \\ 0 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} 0 & 1 & 2 & 3 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0.5 & 0.5 & 0 & 0 \\ 0.25 & 0.25 & 0.25 & 0.25 \end{bmatrix} \end{array}$$

Ta vẽ biểu đồ:



$p_{00} = 1 \Rightarrow \{0\}$ là một lớp
$p_{j3} = 0, j \in \mathbb{I}, j \neq 3 \Rightarrow \{3\}$ là một lớp (1)
Giả sử $1 \leftrightarrow 2 \Rightarrow \exists k \in \mathbb{N} : p_{12}^{(k)} > 0$. Mà $p_{12} = 0 \Rightarrow \exists j \in \{0, 3\} : p_{j2} > 0$. Dễ thấy $j = 3$ là duy nhất.
Khi đó $\exists m \in \mathbb{N} : p_{13}^{(m)} > 0$. Thêm vào đó $p_{31} = 0.25 > 0$ nên $1 \leftrightarrow 3$, mâu thuẫn với (1). Do đó $1 \not\leftrightarrow 2$.
Vậy xích Markov có 4 lớp liên thông là $\{0\}$, $\{1\}$, $\{2\}$ và $\{3\}$.
Xích này không tối giản.