Các mô hình ngẫu nhiên và ứng dụng
Ngày 17 tháng 2 năm 2022

Bài tập tuần 1

Học viên: Đinh Văn Tuân
Ngày sinh $\alpha = 18$
Tháng sinh $\beta = 01$

Câu 1:
Cho xích Markov $(X_n)_{n\geq 0}$ với không gian trạng thái $\mathbb{I} = \{0, 1, 2, 3\}$ và ma trận xác suất chuyển

$$\mathbb{P} = \begin{bmatrix} 0.5 & 0.3 & 0.2 & 0 \\ \alpha\% & 0.7-\alpha\% & 0.2 & 0.1 \\ 0.2 & 0.3 & 0.4 & 0.1 \\ 0 & 0.3 & 0 & 0.7 \end{bmatrix}$$

(a) Tính $P(X_2 = 0|X_0 = 1)$
(b) Tính $\mathbb{P}^{(n)}$ với $n = 2, 3, 4$

Giải:

Thay $\alpha = 18$ ta được ma trận xác suất chuyển $\mathbb{P} = \begin{bmatrix} 0.5 & 0.3 & 0.2 & 0 \\ 0.18 & 0.52 & 0.2 & 0.1 \\ 0.2 & 0.3 & 0.4 & 0.1 \\ 0 & 0.3 & 0 & 0.7 \end{bmatrix}$

(a) Ta có $\mathbb{P}^{(2)} = \mathbb{P}^2 = \begin{bmatrix} 0.344 & 0.366 & 0.24 & 0.05 \\ 0.2236 & 0.4144 & 0.22 & 0.142 \\ 0.234 & 0.366 & 0.26 & 0.14 \\ 0.054 & 0.366 & 0.06 & 0.52 \end{bmatrix}$. Vậy $P(X_2 = 0|X_0 = 1) = p_{10}^{(2)} = 0.2236$

(b) Ta có: $\mathbb{P}^{(2)} = \mathbb{P}^2 = \begin{bmatrix} 0.344 & 0.366 & 0.24 & 0.05 \\ 0.2236 & 0.4144 & 0.22 & 0.142 \\ 0.234 & 0.366 & 0.26 & 0.14 \\ 0.054 & 0.366 & 0.06 & 0.52 \end{bmatrix}$

$$\mathbb{P}^{(3)} = \mathbb{P}^3 = \begin{bmatrix} 0.28588 & 0.38052 & 0.238 & 0.0956 \\ 0.230392 & 0.391168 & 0.2156 & 0.16284 \\ 0.23488 & 0.38052 & 0.224 & 0.1606 \\ 0.10488 & 0.38052 & 0.108 & 0.4066 \end{bmatrix}$$

$$\mathbb{P}^{(4)} = \mathbb{P}^4 = \begin{bmatrix} 0.2590336 & 0.3837144 & 0.22848 & 0.128772 \\ 0.22872624 & 0.38605696 & 0.210552 & 0.1746648 \\ 0.2307336 & 0.3837144 & 0.21268 & 0.172872 \\ 0.1425336 & 0.3837144 & 0.14028 & 0.333472 \end{bmatrix}$$

Câu 2:
Cho xích Markov có không gian trạng thái $\mathbb{I} = \{0, 1, 2, 3\}$ và ma trận xác suất chuyển

$$\mathbb{P} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0.2 & 0.4 & \alpha\% & 0.4-\alpha\% \\ 0.3 & 0.3 & 0.2 & 0.2 \\ 0.5 & 0 & 0.3 & 0.2 \end{bmatrix}$$

(a) Phân loại các trạng thái theo tính liên thông.
(b) Lớp nào trong các lớp phân loại là lớp đóng.
(c) Có trạng thái nào là trạng thái hút không.

Giải:
Thay $\alpha = 18$ ta được ma trận xác suất chuyển

$$\mathbb{P} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0.2 & 0.4 & 0.18 & 0.22 \\ 0.3 & 0.3 & 0.2 & 0.2 \\ 0.5 & 0 & 0.3 & 0.2 \end{bmatrix}$$

(a) Ta có:
$p_{00} = 1 > 0$
$p_{12} = 0.18 > 0$ và $p_{21} = 0.3 > 0 \Rightarrow 1 \leftrightarrow 2$ (1)
$p_{23} = 0.2 > 0$ và $p_{32} = 0.3 > 0 \Rightarrow 2 \leftrightarrow 3$ (2)
(1), (2) $\Rightarrow 1 \leftrightarrow 3$
Vậy xích Markov có 2 lớp liên thông là $\{0\}$ và $\{1,2,3\}$

(b) $\{0\}$ là lớp đóng

(c) 0 là trạng thái hút vì $p_{00} = 1$

Câu 3:
Cho xích Markov có không gian các trạng thái $\mathbb{I} = \{0, 1\}$ và ma trận xác suất chuyển

$$\mathbb{P} = \begin{bmatrix} \alpha\% & 1-\alpha\% \\ 1-\beta\% & \beta\% \end{bmatrix}$$

Tìm $\mathbb{P}^n$ với $n \in \mathbb{N}$.
Giải:
Thay $\alpha = 18$ và $\beta = 01$ ta được ma trận xác suất chuyển

$$\mathbb{P} = \begin{bmatrix} 0.18 & 0.82 \\ 0.99 & 0.01 \end{bmatrix}$$

Tìm các trị riêng của ma trận $\mathbb{P}$. Phương trình đặc trưng:

$$|\mathbb{P} - \lambda I| = (0.18-\lambda)(0.01-\lambda) - 0.8118 = \lambda^2 - 0.19\lambda - 0.81 = 0$$

Các trị riêng tương ứng: $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = -0.81$
Giải hệ phương trình $(\mathbb{P} - \lambda_i I)x = 0$ để tìm các véc tơ riêng tương ứng:
Với $\lambda_1 = 1$, ta xét:

$$\left[\begin{array}{cc|c} -0.82 & 0.82 & 0 \\ 0.99 & -0.99 & 0 \end{array}\right] \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = t \\ x_2 = t \end{cases} \Leftrightarrow (x_1, x_2) = t_1(1,1), \text{với } t_1 \neq 0$$

Với $\lambda_2 = -0.81$, ta xét:

$$\left[\begin{array}{cc|c} 0.99 & 0.82 & 0 \\ 0.99 & 0.82 & 0 \end{array}\right] \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = -0.83t_2 \\ x_2 = \quad\; t_2 \end{cases} \Leftrightarrow (x_1, x_2) = t_2(-0.83, 1), \text{với } t_2 \neq 0$$

Chéo hóa $\mathbb{P}$:
Ma trận U làm chéo hóa $\mathbb{P}$:

$$U = \begin{bmatrix} 1 & -0.83 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Khi đó,

$$D = U^{-1}\mathbb{P}U = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -0.81 \end{bmatrix}$$

Tính $\mathbb{P}^n$:

$$D = U^{-1}\mathbb{P}U \Rightarrow \mathbb{P} = UDU^{-1} \Rightarrow \mathbb{P}^n = (UDU^{-1})^n = UD^nU^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & -0.83 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & (-0.81)^n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -0.83 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}^{-1}$$

Câu 4:
Cho xích Markov có không gian các trạng thái $\mathbb{I} = \{0, 1, 2\}$ và ma trận xác suất chuyển

$$\mathbb{P} = \begin{bmatrix} \alpha\% & 0.5-\alpha\% & 0.5 \\ 0.3 & 0.5 & 0.2 \\ 0.4 & 0.1 & 0.5 \end{bmatrix}$$

Tìm $\mathbb{P}^n$ với $n \in \mathbb{N}$.

Giải:

Thay $\alpha = 18$ ta được ma trận xác suất chuyển

$$\mathbb{P} = \begin{bmatrix} 0.18 & 0.32 & 0.5 \\ 0.3 & 0.5 & 0.2 \\ 0.4 & 0.1 & 0.5 \end{bmatrix}$$

Tìm các trị riêng của ma trận $\mathbb{P}$. Phương trình đặc trưng:

$$|\mathbb{P} - \lambda I| = -\lambda^3 + 1.18\lambda^2 - 0.114\lambda - 0.066 = 0$$

Các trị riêng tương ứng: $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = \frac{9+\sqrt{741}}{100}$, $\lambda_3 = \frac{9-\sqrt{741}}{100}$

Giải hệ phương trình $(\mathbb{P} - \lambda_i I)x = 0$ để tìm các véc tơ riêng tương ứng:

Với $\lambda_1 = 1$:

$$(x_1, x_2, x_3) = t_1(1, 1, 1), \text{với } t_1 \neq 0$$

Với $\lambda_2 = \frac{9+\sqrt{741}}{100}$:

$$(x_1, x_2, x_3) = t_2 \left(\frac{-547 + 21\sqrt{741}}{610}, \frac{-313 - 23\sqrt{741}}{610}, 1 \right), \text{với } t_2 \neq 0$$

Với $\lambda_3 = \frac{9-\sqrt{741}}{100}$:

$$(x_1, x_2, x_3) = t_3 \left(\frac{-547 - 21\sqrt{741}}{610}, \frac{-313 + 23\sqrt{741}}{610}, 1 \right), \text{với } t_3 \neq 0$$

Chéo hóa $\mathbb{P}$:

Ma trận U làm chéo hóa $\mathbb{P}$:

$$U = \begin{bmatrix} 1 & -1.83385 & 0.0404059 \\ 1 & 0.513263 & -1.53949 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Khi đó,

$$D = U^{-1}\mathbb{P}U = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -0.182213 & 0 \\ 0 & 0 & 0.362213 \end{bmatrix}$$

Tính $\mathbb{P}^n$:

$$D = U^{-1}\mathbb{P}U \Rightarrow \mathbb{P} = UDU^{-1}$$

$$\Rightarrow \mathbb{P}^n = (UDU^{-1})^n = UD^nU^{-1}$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & -1.83385 & 0.0404059 \\ 1 & 0.513263 & -1.53949 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -0.182213 & 0 \\ 0 & 0 & 0.362213 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -1.83385 & 0.0404059 \\ 1 & 0.513263 & -1.53949 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}^{-1}$$

Câu 5:

Cho $X_0, X_1, ..., X_n, ...$ là các biến ngẫu nhiên độc lập có cùng phân phối $P(X_n = -1) = \alpha\%; P(X_n = 1) = 1 - \alpha\%$. Đặt $Z_n = X_n \times X_{n+1}$. $(Z_n)_{n\geq 0}$ có là xích Markov không, tại sao?

Giải:

Ta có: $P(Z_{n+1} = z_{n+1} | Z_n = z_n, Z_{n-1} = z_{n-1}, ..., Z_0 = z_0) = P(X_{n+1} \times X_{n+2} = z_{n+1} | X_n \times X_{n+1} = z_n, X_{n-1} \times X_n = z_{n-1}, ..., X_0 \times X_1 = z_0) = P(X_{n+1} \times X_{n+2} = z_{n+1} | X_n \times X_{n+1} = z_n) = P(Z_{n+1} = z_{n+1} | Z_n = z_n)$.

Do đó dãy $(Z_n)_{n\geq 0}$ có tính Markov. Vậy $(Z_n)_{n\geq 0}$ là xích Markov.