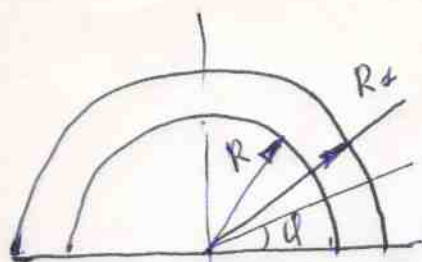


# Двумерный вариант уравнения энергии для стенки.

(Вывод, применяя метод Гаусса к общей системе уравнений)



Уравнение с гранич., где  $z = \frac{r}{R_1}$  имеет вид

$$c \frac{\partial T}{\partial t} = \frac{1}{R_1^2 z} \frac{\partial}{\partial z} \left( z \lambda \frac{\partial T}{\partial z} \right) + \frac{1}{R_1^2 z^2} \frac{\partial}{\partial \varphi} \left( \lambda \frac{\partial T}{\partial \varphi} \right) - q, \quad (1)$$

$$z = \frac{R}{R_1}, \quad -\frac{\lambda}{R_1} \frac{\partial T}{\partial z} = F_p(\varphi, t), \quad (2)$$

$$z = 1, \quad -\frac{\lambda}{R_1} \frac{\partial T}{\partial z} = \alpha (T - T_{oc}) + F_3, \quad (3)$$

$$\varphi = 0, \quad \frac{\partial T}{\partial \varphi} = 0, \quad (4)$$

$$\varphi = \pi, \quad \frac{\partial T}{\partial \varphi} = 0. \quad (5)$$

$$t = 0, \quad T(r, \varphi, 0) = T_{\text{нар}}(r, \varphi) = T_0 = \text{const} \quad (6)$$

Вводим новые

$$F_r = -\lambda \frac{\partial T}{\partial r} = -\frac{\lambda}{R_1} \frac{\partial T}{\partial z},$$

$$F_\varphi = -\lambda \cdot \frac{1}{r} \frac{\partial T}{\partial \varphi} = -\frac{\lambda}{R_1 z} \frac{\partial T}{\partial \varphi}$$

Далее перейдем к квазиравномерной сетке по  $z$ :

$$z = 1 + \frac{1}{a} \operatorname{arctg}[(x-1) \cdot y_m],$$

$$\text{где } a = \frac{\pi/2 - \theta'}{1 - \frac{R}{R_1}}, \quad y_m = \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2} - \theta'\right).$$

$$\underline{x = 0 \dots 1.}$$

При этом имеем

$$\frac{\partial}{\partial z} = \frac{\partial}{\partial x} \tilde{p}, \quad dz = \frac{dx}{\tilde{p}},$$

$$\text{где } \tilde{p} = \frac{a}{y_m} [1 + (x-1)^2 y_m^2].$$

Потому

$$F_r = -\frac{1}{R_1} \frac{\partial T}{\partial x} \tilde{p},$$

Теперь уравнение энергии запишем в следующем виде

$$c \frac{\partial T}{\partial t} = \frac{1}{R_1 z} \frac{\partial}{\partial x} \left( z \frac{1}{R_1} \frac{\partial T}{\partial x} \tilde{p} \right) \tilde{p} + \frac{1}{R_1 z} \frac{\partial}{\partial \varphi} \left( \frac{1}{R_1 z} \frac{\partial T}{\partial \varphi} \right) - q,$$

или эквивалентно

$$c \frac{\partial T}{\partial t} = -\frac{1}{R_1 z} \frac{\partial}{\partial x} (z F_r) \tilde{p} - \frac{1}{R_1 z} \frac{\partial F_\varphi}{\partial \varphi} - q = 0. (6')$$

Выбираем сетку

Стрелки радиально сетку, выбираем на сетке шаблон и ячейку (заштрихована)

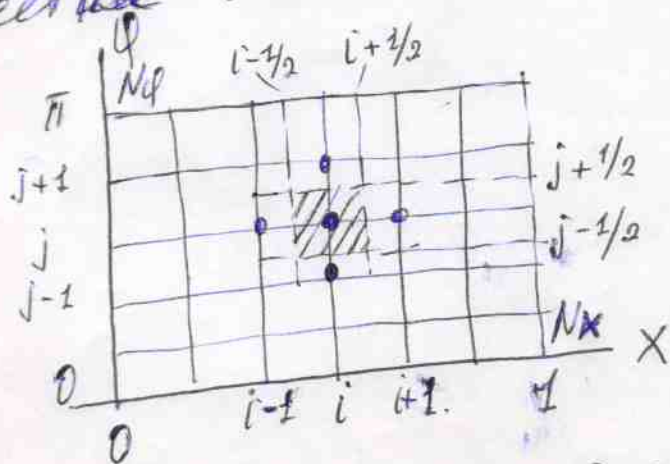


Рис. 1.

Интегрируем по ячейке уравнение (6'), для чего предварительно упростим все члены уравнения на  $z dz \cdot d\varphi \cdot dt = z \cdot \frac{dx}{\tilde{p}} d\varphi \cdot dt$ ,



начиная

$$\int_{x_{i-1/2}}^{x_{i+1/2}} \frac{dx}{\rho} \int_{\varphi_{j-1/2}}^{\varphi_{j+1/2}} d\varphi \cdot \int_t^{t+\tau} c \cdot \frac{\partial T}{\partial t} dt = - \frac{1}{R_1} \int_t^{t+\tau} dt \int_{\varphi_{j-1/2}}^{\varphi_{j+1/2}} d\varphi \int_{x_{i-1/2}}^{x_{i+1/2}} \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial x} (z \cdot F_r) \tilde{\rho} \cdot z \frac{dx}{\rho} -$$

$$- \frac{1}{R_1} \int_t^{t+\tau} dt \int_{x_{i-1/2}}^{x_{i+1/2}} \frac{dx}{\rho} \int_{\varphi_{j-1/2}}^{\varphi_{j+1/2}} z \cdot \frac{1}{z} \cdot \frac{\partial F_\varphi}{\partial \varphi} d\varphi - \int_t^{t+\tau} dt \int_{x_{i-1/2}}^{x_{i+1/2}} \frac{dx}{\rho} \int_{\varphi_{j-1/2}}^{\varphi_{j+1/2}} d\varphi \cdot g,$$

$$\int_{x_{i-1/2}}^{x_{i+1/2}} \frac{dx}{\rho} \int_{\varphi_{j-1/2}}^{\varphi_{j+1/2}} d\varphi \cdot \hat{c} (\hat{T} - T) = - \frac{1}{R_1} \int_t^{t+\tau} dt \int_{\varphi_{j-1/2}}^{\varphi_{j+1/2}} d\varphi (z_{i+1/2} \cdot F_{r,i+1/2} - z_{i-1/2} \cdot F_{r,i-1/2}) -$$

$$- \frac{1}{R_1} \int_t^{t+\tau} dt \int_{x_{i-1/2}}^{x_{i+1/2}} \frac{dx}{\rho} (F_{\varphi,j+1/2} - F_{\varphi,j-1/2}) - z_i \frac{h_x \cdot h_\varphi}{\tilde{\rho}_i} \cdot \hat{g}_{ji},$$

$$\frac{z_i}{\tilde{\rho}_i} \cdot h_x \cdot h_\varphi \cdot \hat{c}_{ji} (\hat{y}_{ji} - y_{ji}) = \frac{1}{R_1} (z_{i-1/2} \cdot \hat{F}_{r,j-1/2} - z_{i+1/2} \cdot \hat{F}_{r,j+1/2}) h_\varphi \cdot \tau +$$

$$+ \frac{1}{R_1} \frac{h_x \cdot \tau}{\tilde{\rho}_i} (\hat{F}_{\varphi,j-1/2,i} - \hat{F}_{\varphi,j+1/2,i}) + \frac{z_i}{\tilde{\rho}_i} h_x \cdot h_\varphi \cdot \hat{g}_{ji} \cdot \tau \quad (7)$$

Получаем

$$\hat{F}_{r,j,i+1/2} = \frac{\hat{\lambda}_{j,i+1/2}}{R_1 \cdot h_x} \cdot \tilde{\rho}_{i+1/2} (\hat{y}_{ji} - \hat{y}_{j,i+1}),$$

$$\hat{F}_{r,j,i-1/2} = \frac{\hat{\lambda}_{j,i-1/2}}{R_1 \cdot h_x} \cdot \tilde{\rho}_{i-1/2} (\hat{y}_{j,i-1} - \hat{y}_{ji}),$$

$$\hat{F}_{\varphi,j+1/2,i} = \frac{\hat{\lambda}_{j+1/2,i}}{R_1 \cdot z_i} (\hat{y}_{j,i} - \hat{y}_{j+1,i}),$$

$$\hat{F}_{\varphi,j-1/2,i} = \frac{\hat{\lambda}_{j-1/2,i}}{R_1 \cdot z_i} (\hat{y}_{j-1,i} - \hat{y}_{ji}).$$

Подставляя выражения для погрешков в (7), получим следующую разностную схему.

$$\begin{aligned}
 & \frac{Z_i}{\tilde{P}_i} \cdot h_x \cdot h_y \cdot \hat{C}_{ji} (\hat{y}_{ji} - y_{ji}) = \\
 & = \frac{1}{R_1} \left[ \frac{Z_{i-1/2}}{R_1 \cdot h_x} \cdot \frac{\hat{\lambda}_{j,i-1/2}}{R_1 \cdot h_x} \cdot \tilde{P}_{i-1/2} (\hat{y}_{j,i-1} - \hat{y}_{j,i}) - \right. \\
 & \quad \left. - Z_{i+1/2} \cdot \frac{\hat{\lambda}_{j,i+1/2}}{R_1 \cdot h_x} \tilde{P}_{i+1/2} (\hat{y}_{ji} - \hat{y}_{j,i+1}) \right] h_y \cdot \tau + \\
 & \quad + \frac{1}{R_1} \frac{h_y \cdot \tau}{\tilde{P}_i} \left[ \frac{\hat{\lambda}_{j-1/2,i}}{R_1 \cdot Z_i} (\hat{y}_{j-1,i} - \hat{y}_{j,i}) - \frac{\hat{\lambda}_{j+1/2,i}}{R_1 \cdot Z_i} (\hat{y}_{j,i} - \hat{y}_{j+1,i}) \right] - \\
 & \quad - \frac{Z_i}{\tilde{P}_i} h_x \cdot h_y \cdot \hat{g}_{ji} \cdot \tau \quad (8).
 \end{aligned}$$

Раскроем скобки:

$$\begin{aligned}
 & \frac{Z_i}{\tilde{P}_i} \cdot h_y \cdot h_y \cdot \hat{C}_{ji} \hat{y}_{ji} - \frac{Z_i}{\tilde{P}_i} \cdot h_x h_y \cdot \hat{C}_{ji} y_{ji} = \\
 & = \underbrace{\left( \frac{h_y \cdot \tau}{R_1^2} \frac{Z_{i-1/2}}{h_x} \cdot \frac{\hat{\lambda}_{j,i-1/2}}{h_x} \cdot \tilde{P}_{i-1/2} \hat{y}_{j,i-1} - \frac{h_y \cdot \tau \cdot Z_{i-1/2} \cdot \hat{\lambda}_{j,i-1/2} \cdot \tilde{P}_{i-1/2}}{R_1^2 \cdot h_x} \hat{y}_{ji} \right)}_{\text{first term}} - \\
 & \quad - \underbrace{\frac{h_y \cdot \tau}{R_1^2} \frac{Z_{i+1/2}}{h_x} \cdot \frac{\hat{\lambda}_{j,i+1/2}}{h_x} \cdot \tilde{P}_{i+1/2} \hat{y}_{ji}}_{\text{second term}} + \underbrace{\frac{h_y \cdot \tau}{R_1^2} \frac{Z_{i+1/2} \cdot \hat{\lambda}_{j,i+1/2} \cdot \tilde{P}_{i+1/2}}{h_x} \hat{y}_{j,i+1}}_{\text{third term}} + \\
 & \quad + \underbrace{\frac{h_x \cdot \tau}{R_1^2 \cdot \tilde{P}_i \cdot Z_i} \cdot \frac{\hat{\lambda}_{j-1/2,i}}{h_x} \hat{y}_{j-1,i}}_{\text{fourth term}} - \underbrace{\frac{h_x \cdot \tau}{R_1^2 \cdot \tilde{P}_i \cdot Z_i} \cdot \frac{\hat{\lambda}_{j-1/2,i}}{h_x} \hat{y}_{ji}}_{\text{fifth term}} - \\
 & \quad - \underbrace{\frac{h_x \cdot \tau}{R_1^2 \cdot \tilde{P}_i \cdot Z_i} \cdot \frac{\hat{\lambda}_{j+1/2,i}}{h_x} \hat{y}_{ji}}_{\text{sixth term}} + \underbrace{\frac{h_x \cdot \tau}{R_1^2 \cdot \tilde{P}_i \cdot Z_i} \cdot \frac{\hat{\lambda}_{j+1/2,i}}{h_x} \hat{y}_{j+1,i}}_{\text{seventh term}} - \\
 & \quad - \frac{Z_i}{\tilde{P}_i} h_x h_y \cdot \hat{g}_{ji} \cdot \tau
 \end{aligned}$$



Группировка слагаемых, получаем

$$\begin{aligned}
 & \frac{h_x \cdot \tau}{R_1^2 \cdot \tilde{p}_i \cdot z_i} \cdot \hat{\lambda}_{j-1/2, i} \cdot \hat{y}_{j-1, i} + \\
 & + \frac{h_y \cdot \tau}{R_1^2 \cdot h_x} z_{i-1/2} \cdot \tilde{p}_{i-1/2} \cdot \hat{\lambda}_{j, i-1/2} \cdot \hat{y}_{j, i-1} - \\
 & - \left( \frac{z_i \cdot h_x \cdot h_y}{\tilde{p}_i} \hat{c}_{ji} + \frac{h_y \cdot \tau \cdot z_{i-1/2} \cdot \tilde{p}_{i-1/2}}{h_x \cdot R_1^2} \cdot \hat{\lambda}_{j, i-1/2} + \right. \\
 & + \frac{h_y \cdot \tau \cdot z_{i+1/2} \cdot \tilde{p}_{i+1/2}}{h_x \cdot R_1^2} \cdot \hat{\lambda}_{j, i+1/2} + \frac{h_x \cdot \tau}{R_1^2 \cdot z_i \cdot \tilde{p}_i} \hat{\lambda}_{j-1/2, i} + \\
 & + \left. \frac{h_x \cdot \tau}{R_1^2 \cdot z_i \cdot \tilde{p}_i} \hat{\lambda}_{j+1/2, i} \right) \hat{y}_{ji} + \\
 & + \frac{h_y \cdot \tau \cdot z_{i+1/2} \cdot \tilde{p}_{i+1/2}}{h_x \cdot R_1^2} \cdot \hat{\lambda}_{j, i+1/2} \cdot \hat{y}_{j, i+1} + \\
 & + \frac{h_x \cdot \tau}{R_1^2 \cdot z_i \cdot \tilde{p}_i} \cdot \hat{\lambda}_{j+1/2, i} \cdot \hat{y}_{j+1, i} = \\
 & = - \left( \frac{z_i \cdot h_x \cdot h_y}{\tilde{p}_i} \cdot \hat{c}_{ji} \cdot \hat{y}_{ji} - \frac{z_i \cdot h_x \cdot h_y \cdot \tau}{\tilde{p}_i} \hat{y}_{ji} \right), \quad (9)
 \end{aligned}$$

т.е. сгруппировав уравнения (9) представляется

в виде

$$\begin{aligned}
 & \hat{A} \cdot \hat{y}_{j-1, i} + \hat{B} \cdot \hat{y}_{j, i-1} - \hat{C} \cdot \hat{y}_{ji} + \hat{D} \cdot \hat{y}_{j, i+1} + \hat{E} \cdot \hat{y}_{j+1, i} = \\
 & = -\hat{F}. \quad (10)
 \end{aligned}$$

Для замыкания системы нужны еще четыре уравнения, которые получаются интегрированием исходного уравнения (6') на границах области с использованием граничных условий (2)-(6).

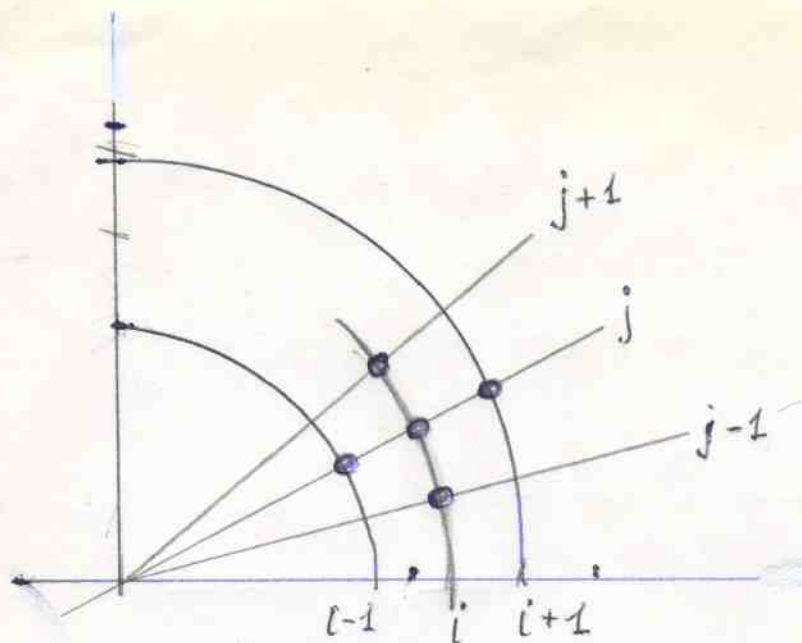
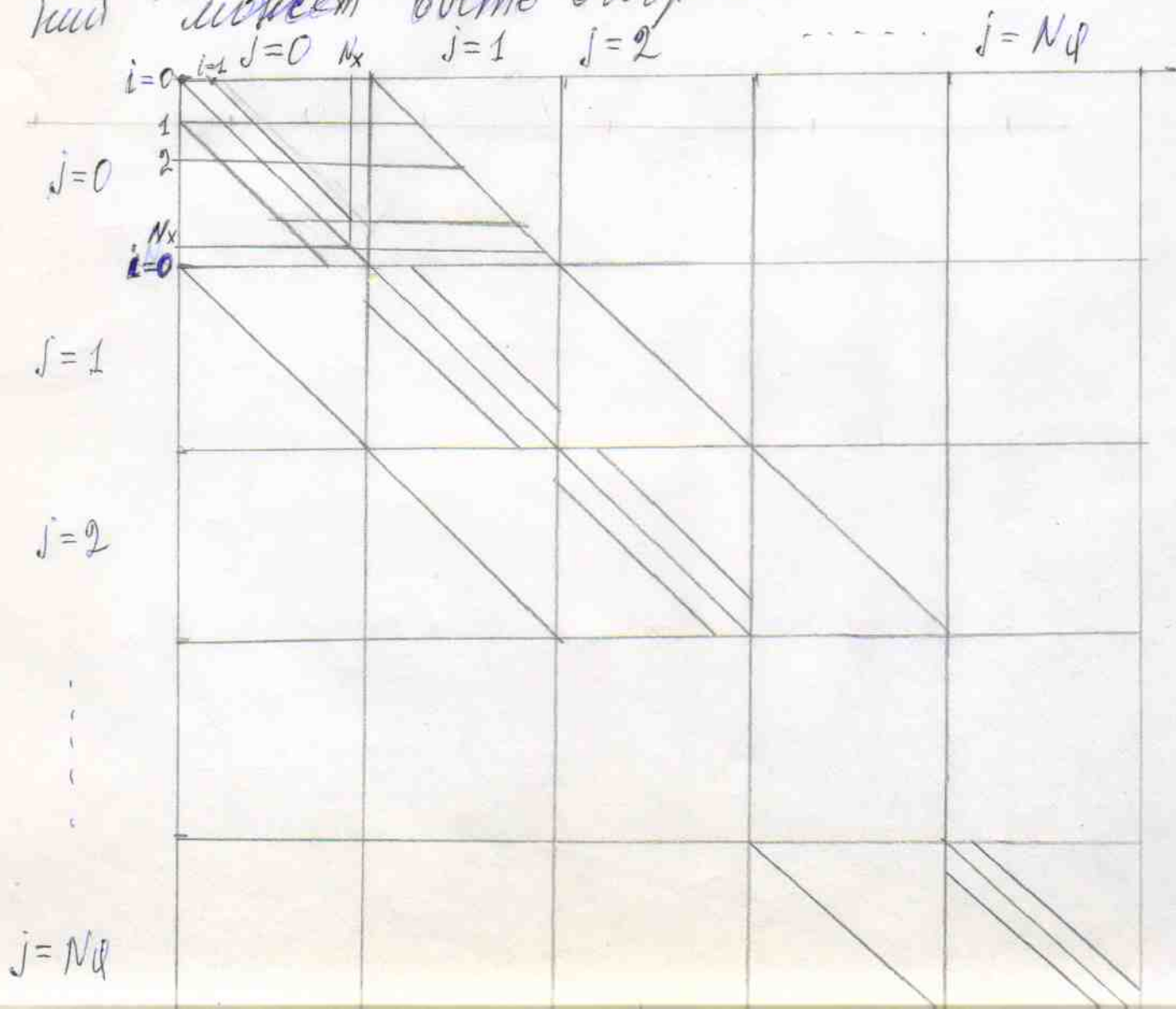


Рис. 2.

В ур-ние (10) связывает пять неизвестных в точках, показанных на рис. 2.

Структура матрицы системы уравнений может быть выбрана такой





# Лабораторная работа.

1. Граничные условия (2), (3) поставили как условия I рода, т.е. при  $r=R$  и  $t=R_1$  задана температура:

$$z = \frac{R}{R_1}, \quad T(z, \psi, t) = T_1 = \text{const}$$

$$z = 1, \quad T(1, \psi, t) = T_2 = \text{const}$$

2. Обработка уравнения (6') универсально-интерпретационной процедурой при  $\psi=0$  и  $\psi=\pi$  проводить не будем, а покажем, что  $y_{0,i} = y_{1,i}$  и  $y_{N,i} = y_{N-1,i}$ .

При этом аппроксимация граничных условий осуществляется порядком  $O(h_x)$  и  $O(h_y)$ . Это означает, что погрешность аппроксимации имеет вид  $h_x$  и  $h_y$ .

После таких упрощений матрица системы уравнений составляется по сетке, у которой  $i = 1..N_x - 1$  и  $j = 1..N_y - 1$  (при  $i=0, N_x$  и  $j=0, N_y$  уравнение (9) не требуется).

3. Неявные темпа  $q(z, \psi, t)$  задается в виде

$$q(z, \psi, t) = F_u(t) \cdot R \cdot \frac{k_p}{r} \cdot e^{-k_p(t-R)} - 4 k_p \cdot n_{np}^2 \cdot \sigma T^4$$

$$F_u(t) = F_{u0} t e^{-\frac{t}{\tau_u}}, \quad \lambda - \text{константа, } \sigma - \text{константа Стефана-Больцмана.}$$

Задаются:  $F_{u0}, \tau_u, k_p, n_{np}, \lambda$ .

## Исходные данные.

В качестве материала стекла используется кварцевое стекло.

### Температурные свойства кварцевого стекла.

1. Температурное

$$\rho(T) = 2,049 + 0,563 \cdot 10^{-3} \cdot T - \frac{0,528 \cdot 10^{-5}}{T^2}, \frac{\text{г/см}^3}{\text{К}}$$

2. Коэффициент температурного

$$\lambda = 0,134 \cdot 10^{-1} (1 + 4,35 \cdot 10^{-4} \cdot T)$$

3. Коэффициент расширения

$T, \text{К}$	$\alpha_p, \text{см}^{-1}$
293	$2 \cdot 10^{-3}$
1278	$5 \cdot 10^{-3}$
1528	$7,8 \cdot 10^{-3}$
1677	$1 \cdot 10^{-2}$

4. Коэффициент температурного расширения света.

$$R = 0,25 \text{ см}$$

$$R_1 = 0,40 \text{ см}$$

$$n_{\text{кр}} = 1,46.$$



# Решение задачи локально-одномерным методом.

Задача разбивается на две подзадачи.

- ① В уравнении (7) появляется разностный оператор, действующий по координате  $j$ , а вместо  $\hat{g}_{ji}$  записывается  $\tilde{g}_{ji} = \frac{1}{2} \hat{g}_{ji}$ .

Ищем в результате разностную схему

$$\frac{z_i \cdot h_x}{\tilde{p}_i} \hat{c}_{ji} (\hat{y}_{ji}^{(1)} - y_{ji}) = \frac{\tau}{R_1} (z_{i-1/2} \cdot \hat{F}_{r,j,i-1/2}^{(1)} - z_{i+1/2} \cdot \hat{F}_{r,j,i+1/2}^{(1)}) - \frac{z_i}{\tilde{p}_i} h_x \hat{g}_{ji} \tau.$$

Подставляя выражения для потоков  $\hat{F}_r$ , получаем уравнения разностной схемы.

$$\begin{aligned} & \frac{\tau \cdot z_{i-1/2} \cdot \tilde{p}_{i-1/2} \cdot \hat{\lambda}_{j,i-1/2}^{(1)} \cdot y_{j,i-1}^{(1)}}{R_1^2 \cdot h_x} - \\ & - \left( \frac{z_i \cdot h_x \cdot \hat{c}_{ji}}{\tilde{p}_i} + \frac{\tau \cdot z_{i-1/2} \cdot \tilde{p}_{i-1/2} \cdot \hat{\lambda}_{i-1/2}^{(1)}}{h_x R_1^2} + \frac{\tau \cdot z_{i+1/2} \cdot \tilde{p}_{i+1/2} \cdot \hat{\lambda}_{i+1/2}^{(1)}}{h_x R_1^2} \right) y_{ji}^{(1)} + \\ & + \frac{\tau \cdot z_{i+1/2} \cdot \tilde{p}_{i+1/2} \cdot \hat{\lambda}_{j,i+1/2}^{(1)} \cdot y_{j,i+1}^{(1)}}{h_x \cdot R_1^2} = \\ & = - \left( \frac{z_i \cdot h_x \cdot \hat{c}_{ji} \cdot y_{ji}}{\tilde{p}_i} - \frac{\tau \cdot z_i \cdot h_x}{\tilde{p}_i} \tilde{g}_{ji} \right). \end{aligned}$$

В каноническом виде

$$\hat{A}_i \cdot \hat{y}_{j,i-1}^{(1)} - \hat{B}_i \cdot \hat{y}_{ji}^{(1)} + \hat{D}_i \hat{y}_{j,i+1}^{(1)} = -\hat{F}_i, \quad i=1, 2, \dots, N_x-1$$

При фиксированном значении индекса  $j$  имеем систему ур-ний с трехдиагональной матрицей.

Для каждого значения  $j$  система решается методом прогонки.

② На 2-м этапе (2-я подзадача) в (7) опускается разностный оператор, действующий по координате  $x$ , а вместо  $\hat{y}_{ji}$  пишется  $\tilde{y}_{ji} = \frac{1}{2} \hat{y}_{ji}$ .

Разностная схема

$$\begin{aligned} & \frac{\tau \cdot \hat{\lambda}_{j-1/2,i}}{R_1^2 \cdot Z_i} \hat{y}_{j-1,i} - \\ & - \left( Z_i h \varphi \cdot \hat{C}_{ji} + \frac{\tau \hat{\lambda}_{j-1/2,i}}{R_1^2 \cdot Z_i} + \frac{\tau \cdot \hat{\lambda}_{j+1/2,i}}{R_1^2 \cdot Z_i} \right) \hat{y}_{ji} + \\ & + \frac{\tau \hat{\lambda}_{j+1/2,i}}{R_1^2 \cdot Z_i} \cdot \hat{y}_{j+1,i} = - \left( Z_i \cdot h \varphi \cdot \hat{C}_{ji} \hat{y}_{ji}^{(1)} - Z_i h \varphi \cdot \tau \tilde{y}_{ji} \right). \end{aligned}$$

В каноническом виде

$$\hat{A}_j \hat{y}_{j-1,i} - \hat{B}_j \hat{y}_{ji} + \hat{D}_j \hat{y}_{j+1,i} = -\hat{F}_j$$

Для каждого фиксированного значения индекса  $i$  система уравнений решается методом прогонки.