Capitolo 1

Funzioni complesse

1.1 Richiami sui numeri complessi

L'introduzione dei numeri complessi ha la sua origine nel problema di dare significato all'espressione $\sqrt{-1}$ che come noto non ha soluzione nel campo dei numeri reali $\mathbb{R}$. La proposta di vari studiosi di epoca rinascimentale, tra cui vari algebristi dell'Ateneo bolognese (Scipione del Ferro, Cardano) accanto al matematico modenese Tartaglia, fu quella di "inventare" un nuovo numero $i = \sqrt{-1}$, detto **unità immaginaria**, che ovviamente non appartiene a $\mathbb{R}$. L'insieme di tutti i numeri che sono combinazioni lineari di una **parte reale** x e una **parte immaginaria** y

$$z = x + iy$$

con $x, y \in \mathbb{R}$ si dicono numeri complessi $z \in \mathbb{C}$. Spesso si usa la notazione

$$\mathrm{Re}z = x \qquad , \qquad \mathrm{Im}z = y$$

Dati due numeri complessi $z_1 = x_1 + iy_1$ e $z_2 = x_2 + iy_2$ la loro somma è definita come

$$z_1 + z_2 = (x_1 + x_2) + i(y_1 + y_2)$$

e il loro prodotto è

$$z_1 z_2 = (x_1 x_2 - y_1 y_2) + i(x_1 y_2 + x_2 y_1)$$

Somma e prodotto godono delle proprietà commutativa, associativa e distributiva. I numeri reali 0 e 1 giocano il ruolo di elementi neutri per somma e prodotto rispettivamente. L'insieme dei numeri complessi $\mathbb{C}$ forma perciò un campo. I numeri reali $\mathbb{R} \subset \mathbb{C}$ sono un sottocampo di $\mathbb{C}$.

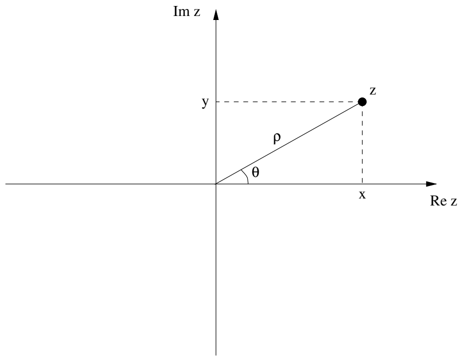

Figura 1.1: Piano complesso

Dato un numero complesso $z = x + iy$, definiamo suo **complesso coniugato** il numero

$$z^* = x - iy$$

e si ha

$$\mathrm{Re}z = \frac{z + z^*}{2} \qquad , \qquad \mathrm{Im}z = \frac{z - z^*}{2i}$$

Talvolta si usa la notazione $\bar{z}$ al posto di z^*. Il prodotto

$$zz^* = x^2 + y^2$$

risulta essere sempre un numero reale positivo. Alla sua radice quadrata

$$\sqrt{zz^*} = |z|$$

viene dato il nome di **modulo** del numero z (e ovviamente $|z^*| = |z|$)

E' facile verificare che il modulo gode delle seguenti proprietà:

$$\begin{cases} |z_1 z_2| = |z_1||z_2| & \text{distributività del prodotto} \\ |z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2| & \text{disuguaglianza triangolare} \end{cases}$$

Così come i numeri reali possono essere rappresentati dai punti su una retta, i numeri complessi, che sono in corrispondenza 1:1 con coppie di numeri reali, possono essere rappresentati come punti su un piano, detto piano complesso o piano di Gauss, in cui il numero z corrisponderà al punto di ascissa $\mathrm{Re}z$ e ordinata $\mathrm{Im}z$.

Possiamo quindi considerare le parti reale e immaginaria come le cooordinate cartesiane del punto rappresentante il numero complesso. E' questa la **forma cartesiana** del numero complesso. Un punto in un piano può però essere descritto anche da coordinate polari e ciò porta alla rappresentazione polare dei numeri complessi in termini di una coordinata radiale ρ e di una coordinata angolare θ. Esse saranno legate alle coordinate cartesiane x, y da

$$\begin{cases} x &= \rho\cos\theta \\ y &= \rho\sin\theta \end{cases} \implies \begin{cases} \rho \stackrel{\text{def}}{=} |z| = \sqrt{x^2+y^2} & \textbf{modulo di } z \\ \theta \stackrel{\text{def}}{=} \arg z = \arctan\frac{y}{x} + 2k\pi & \textbf{argomento} \text{ (o fase) di } z \end{cases}$$

con $k \in \mathbb{Z}$. Pertanto il numero complesso z può essere scritto come

$$z = \rho\cos\theta + i\rho\sin\theta$$

Si noti che il numero complesso di argomento $\arg z = \theta + 2k\pi$ per qualunque $k \in \mathbb{Z}$ coincide, per la periodicità di seno e coseno, con il numero complesso z. La scelta $-\pi < \arg z \leq \pi$ (o talvolta $0 \leq \arg z < 2\pi$) è detta determinazione *principale* dell'argomento.

Ricordando le espansioni in serie (in campo reale) di seno e coseno

$$\begin{aligned} \cos\theta &= \sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\frac{\theta^{2k}}{(2k)!} \\ \sin\theta &= \sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\frac{\theta^{2k+1}}{(2k+1)!} \end{aligned}$$

entrambe convergenti su tutto $\mathbb{R}$, e ricordando che $(-1)^k = i^{2k}$, possiamo calcolare

$$\cos\theta + i\sin\theta = \sum_{k=0}^{\infty}\left[\frac{(i\theta)^{2k}}{(2k)!} + \frac{(i\theta)^{2k+1}}{(2k+1)!}\right] = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(i\theta)^n}{n!} = e^{i\theta}$$

e quindi vale la fondamentale identità, detta **formula di Eulero**

$$\boxed{e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta} \tag{1.1}$$

da cui discende che ogni numero complesso può essere rappresentato nella **forma polare**

$$z = \rho e^{i\theta} = |z|e^{i\arg z}$$

Il suo complesso coniugato sarà $z^* = \rho e^{-i\theta} = |z|e^{-i\arg z}$.

Si noti che, se $\theta \in \mathbb{R}$

$$|e^{i\theta}| = 1$$

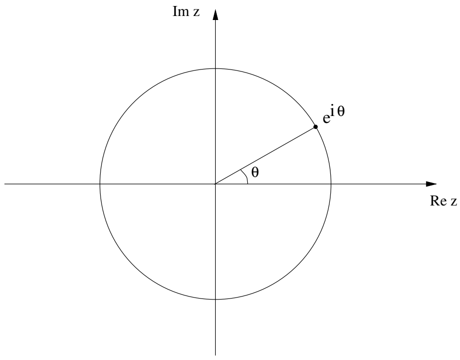

Figura 1.2: Cerchio unitario

Infatti
$$|e^{i\theta}| = |\cos\theta + i\sin\theta| = \sqrt{\cos^2\theta + \sin^2\theta} = 1$$

Mentre la forma cartesiana $z = x + iy$ è più utile per fare addizioni e sottrazioni di numeri complessi, la forma polare è più agevole per moltiplicare o dividere

$$\begin{aligned} z_1 z_2 &= \rho_1 e^{i\theta_1} \cdot \rho_2 e^{i\theta_2} = \rho_1\rho_2 e^{i(\theta_1+\theta_2)} \\ \frac{z_1}{z_2} &= \frac{\rho_1 e^{i\theta_1}}{\rho_2 e^{i\theta_2}} = \frac{\rho_1}{\rho_2} e^{i(\theta_1-\theta_2)} \end{aligned}$$

Esempio 1. Si esprima il seguente numero complesso in forma cartesiana e polare
$$(1+i)^8$$

Soluzione - Conviene passare alla forma polare per calcolare l'elevazione a potenza
$$z = 1 + i = |z|e^{i\arg z}$$

e cioè, visto che Re$z = 1 =$ Imz,
$$|z| = \sqrt{(\mathrm{Re}z)^2 + (\mathrm{Im}z)^2} = \sqrt{1+1} = \sqrt{2}$$
$$\arg z = \arctan\frac{\mathrm{Im}z}{\mathrm{Re}z} = \arctan 1 = \frac{\pi}{4}$$

Quindi
$$z = \sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}$$

In questa forma l'elevazione a potenza diventa semplice da calcolare
$$z^8 = (\sqrt{2})^8 e^{i\frac{\pi}{4}8} = 16e^{2\pi i} = 16$$

poiché $e^{2\pi i} = 1$.

Esempio 2. Si calcolino le radici quarte dell'unità, sia in forma polare che cartesiana

$$\sqrt[4]{1}$$

Soluzione - Essendo $1 = |1|e^{i\arg 1} = e^{2\pi k i}$ in forma polare, la radice quarta sarà

$$\sqrt[4]{1} = e^{\frac{\pi k}{2} i} = \cos\frac{k\pi}{2} + i\sin\frac{k\pi}{2}$$

Per la periodicità di seno e coseno vi sono 4 numeri complessi distinti che sono radici quarte dell'unità, rispettivamente per $k = 0, 1, 2, 3$

$$1, i, -1, -i$$

Esercizio 1. Si esprimano i seguenti numeri complessi in forma cartesiana e polare

1. $(2+3i)^3$ $\quad [-46 + 9i = 13\sqrt{13}e^{i\left(\pi - \arctan\frac{9}{46}\right)}]$
2. $\left(\frac{\sqrt{2}}{2}(1+i)\right)^{40}$ $\quad [1]$
3. $(3+i)^4$ $\quad [28 + 96i = 100e^{i\arctan\frac{24}{7}}]$

Esercizio 2. Calcolare le radici n-ime nel piano complesso dei seguenti numeri, esprimendole sia in coordinate polari che cartesiane

1. $\sqrt[4]{-1}$ $\quad [\{e^{\frac{2k+1}{4}\pi i},\ k = 0, 1, 2, 3\} = \{\pm\frac{1}{\sqrt{2}} \pm \frac{1}{\sqrt{2}}i\}]$
2. $\sqrt[6]{1}$ $\quad [\{e^{k\pi i/3},\ k = 0, 1, 2, 3, 4, 5\} = \{1, \pm\frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{3}}{2}i, -1\}]$
3. $\sqrt[3]{8}$ $\quad [\{2e^{\frac{2k\pi i}{3}},\ k = 0, 1, 2\} = \{2, -1 \pm \sqrt{3}i\}]$

Invertendo la (1.1) si ottengono le importanti relazioni

$$\boxed{\cos\theta = \frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2} \quad , \quad \sin\theta = \frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i}}$$

da cui è possibile poi dedurre la **formula di de Moivre**

$$\boxed{\cos n\theta + i \sin n\theta = e^{in\theta} = (e^{i\theta})^n = (\cos\theta + i\sin\theta)^n}$$

utile per calcolare seni e coseni dei multipli di un angolo. Più in generale, l'espansione binomiale

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k}$$

applicata alla formula di de Moivre ci permette di stabilire utili formule per seni e coseni di multipli interi di un angolo (v. Esercizi). Invertendo queste relazioni otteniamo anche le formule per le potenze di seni e coseni in termini di angoli multipli.

Esempio 3. Per esempio, per $n = 2$

$$\cos 2\theta + i \sin 2\theta = (\cos\theta + i\sin\theta)^2 = \cos^2\theta - \sin^2\theta + 2i\sin\theta\cos\theta$$

perciò prendendo separatamente la parte reale e quella immaginaria

$$\begin{aligned} \cos 2\theta &= \cos^2\theta - \sin^2\theta = 2\cos^2\theta - 1 \\ \sin 2\theta &= 2\sin\theta\cos\theta \end{aligned}$$

Invertendo si ha anche

$$\begin{aligned} \cos^2\vartheta &= \frac{1}{2}(\cos 2\vartheta + 1) \\ \sin^2\vartheta &= 1 - \cos^2\vartheta = \frac{1}{2}(1 - \cos 2\vartheta) \end{aligned}$$

come ben noto.

Esercizio 3. Si calcoli, usando la formula di De Moivre e gli opportuni sviluppi binomiali, $\sin nx$ e $\cos nx$ in funzione di potenze di $\sin x$ e $\cos x$ per $n = 3, 4, 5, 6$.

Risultati -

$$\begin{aligned} \sin 3\theta &= 3\sin x - 4\sin^3 x \\ \sin 4\theta &= \cos\theta(4\sin\theta - 8\sin^3\theta) \\ \sin 5\theta &= 5\sin\theta - 20\sin^3\theta + 16\sin^5\theta \\ \sin 6\theta &= \cos\theta(6\sin\theta - 32\sin^3\theta + 32\sin^5\theta) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \cos 3x &= 4\cos^3 x - 3\cos x \\ \cos 4\theta &= 8\cos^4\theta - 8\cos^2\theta + 1 \\ \cos 5\theta &= 16\cos^5\theta - 20\cos^3\theta + 5\cos\theta \\ \cos 6\theta &= 32\cos 6x - 48\cos 4x + 18\cos 2x - 1 \end{aligned}$$

Esercizio 4. Si invertano le formule dell'esercizio 3 per esprimere $\sin^n x$ e $\cos^n x$ in funzuione di seni e coseni di angoli multipli di x.

Risultati -

$$\begin{aligned}
\sin^3 x &= \frac{1}{4}(3\sin x - \sin 3x)\\
\sin^4 \theta &= \frac{1}{8}(\cos 4x - 4\cos 2x + 3)\\
\sin^5 \theta &= \frac{1}{16}(\sin 5x - 5\sin 3x + 10\sin x)\\
\sin^6 \theta &= \frac{1}{32}(\cos 6x + 6\cos 4x - 15\cos 2x + 10)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\cos^3 x &= \frac{1}{4}(\cos 3x + \cos + 3\cos x)\\
\cos^4 \theta &= \frac{1}{8}(\cos 4x + 4\cos 2x + 3)\\
\cos^5 \theta &= \frac{1}{16}(\cos 5x + 5\cos 3x + 10\cos x)\\
\cos^6 \theta &= \frac{1}{32}(\cos 6x + 6\cos 4x + 15\cos 2x + 10)
\end{aligned}$$

Il modulo permette di definire il concetto di distanza in $\mathbb{C}$

$$d(z_1, z_2) = |z_1 - z_2| = |(x_1 - x_2) + i(y_1 - y_2)| = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}$$

Con la distanza si può definire il concetto di limite, di convergenza di una successione o di una serie e di punto interno o esterno ad un insieme.

1.2 Funzioni di variabile complessa

Si consideri un sottoinsieme $\mathcal{M} \subseteq \mathbb{C}$. Una funzione complessa è una legge che associa un numero $w \in \mathbb{C}$ a un numero $z \in \mathcal{M}$

$f : \mathcal{M} \to \mathbb{C}$, $w = f(z)$ univoca (a un sol valore o **monodroma**)

Se poniamo $z = x + iy$ e $w = u + iv$ cioè

$$f(z) = u(x, y) + iv(x, y) \qquad u, v : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$$

f può essere vista come un caso particolare di funzione da $\mathbb{R}^2$ in $\mathbb{R}^2$. Pertanto i concetti di limite e di continuità sono ereditati dai corrispondenti concetti per funzioni $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$.

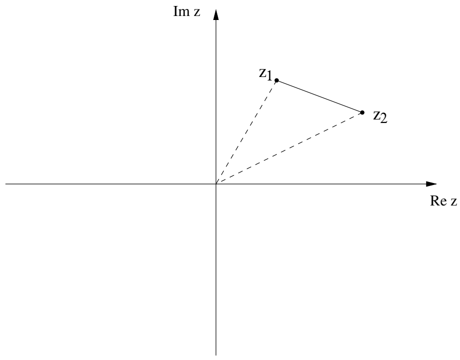

Figura 1.3: Distanza di due punti z_1 e z_2 in $\mathbb{C}$

Definizione. Un numero $A \in \mathbb{C}$ è detto *limite* di f per z che tende ad $a \in \mathbb{C}$ e si scrive

$$A = \lim_{z \to a} f(z)$$

se per ogni intorno U_A di A piccolo a piacere esiste un intorno U_a di a tale che $\forall z \in U_a \Rightarrow f(z) \in U_A$, ovvero per $\forall \varepsilon > 0$ (piccolo a piacere) $\exists \delta > 0$ tale che

$$0 < |z - a| < \delta \quad \Rightarrow \quad |f(z) - A| < \varepsilon$$

Ovviamente

$$\lim_{z \to a} f(z) = A \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} \lim\limits_{z \to a} \mathrm{Re}(f(z)) & = \mathrm{Re} A \\ \lim\limits_{z \to a} \mathrm{Im}(f(z)) & = \mathrm{Im} A \end{cases}$$

Definizione. Una funzione $f(z)$ è *continua* in a se

$$\lim_{z \to a} f(z) = f(a)$$

Le funzioni complesse di variabile complessa si definiscono generalizzando il caso reale il corrispondente sviluppo in serie di potenze. Per avere funzioni complesse ben definite è necessario provare che tali serie siano convergenti in un opportuno dominio (disco in $\mathbb{C}$).

Può essere dimostrato nel piano complesso, come già nell'insieme dei reali, un criterio di convergenza di Cauchy.

Teorema. *La successione delle ridotte di una serie è convergente se*

$$|S_N(z) - S_M(z)| < \varepsilon$$

Esempio 4. La funzione esponenziale è definita sull'asse reale come

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} \qquad , \qquad x \in \mathbb{R}$$

Per analogia, nel piano complesso la definiremo come

$$e^z \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!} \qquad , \qquad z \in \mathbb{C}$$

purché la serie sia convergente $\forall z \in \mathbb{C}$, ovverosia la successione delle ridotte

$$S_N(z) = \sum_{n=0}^{N} \frac{z^n}{n!} \underset{N\to\infty}{\longrightarrow} w \in \mathbb{C}$$

Allora diremo che $e^z = w$. Applicando il criterio di convergenza di Cauchy

$$\left| \sum_{n=0}^{N} \frac{z^n}{n!} - \sum_{m=0}^{M} \frac{z^m}{m!} \right| = \left| \sum_{n=M+1}^{N} \frac{z^n}{n!} \right|$$

per la disuguaglianza triangolare

$$\left| \sum_{n=M+1}^{N} \frac{z^n}{n!} \right| \leq \sum_{n=M+1}^{N} \frac{|z|^n}{n!} < \varepsilon$$

poiché l'ultima espressione è una serie reale convergente su tutto $\mathbb{R}$. Abbiamo così dimostrato che la serie esponenziale è convergente su tutto $\mathbb{C}$, divergendo solo per $z \to \infty$. Pertanto la funzione esponenziale è definita e non ha singolarità in tutto $\mathbb{C}$. In generale la convergenza in $\mathbb{R}^n$ (e quindi in particolare in $\mathbb{R}^2 \sim \mathbb{C}$) si dimostra sempre riconducendosi alla convergenza in $\mathbb{R}$.

Si noti che

$$e^z = e^{x+iy} = e^x e^{iy} = e^x(\cos y + i \sin y)$$

e quindi

$$\operatorname{Re} e^z = e^x \cos y \qquad , \qquad \operatorname{Im} e^z = e^x \sin y$$

da cui anche

$$|e^z| = \sqrt{(\operatorname{Re} e^z)^2 + (\operatorname{Im} e^z)^2} = e^x$$

Poiché e^x non si annulla mai in tutto $\mathbb{R}$, così pure è per $|e^z|$. Essendo 0 l'unico numero complesso di modulo 0, ne concludiamo che la funzione esponenziale non ha zeri in tutto $\mathbb{C}$.

Esempio 5. Seno e coseno complessi

$$\sin z \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{z^{2k+1}}{(2k+1)!} \qquad , \qquad \cos z \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{z^{2k}}{(2k)!}$$

Queste serie sono convergenti per $\forall z \in \mathbb{C}$. Possiamo generalizzare la formula di Eulero

$$e^{iz} = \cos z + i \sin z$$

(attenzione: ora $z \in \mathbb{C}$ e quindi non si tratta necessariamente di un numero di modulo 1). Invertendo

$$\cos z = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2} \qquad , \qquad \sin z = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}$$

Gli zeri di $\sin z$ sono tutti reali: $z_k = k\pi$ con $k \in \mathbb{Z}$, mentre quelli di $\cos z$ sono locati in $z_k = \left(k + \frac{1}{2}\right)\pi$.

Esercizio 5. Si verifichi che

$$\sin^2 z + \cos^2 z = 1$$

Perciò tutte le proprietà del seno e coseno reali si estendono anche al piano complesso.

Esercizio 6. Seno e coseno iperbolici complessi. Definiti

$$\sinh z \stackrel{\text{def}}{=} \frac{e^z - e^{-z}}{2} \qquad , \qquad \cosh z \stackrel{\text{def}}{=} \frac{e^z + e^{-z}}{2}$$

si mostri che valgono le proprietà

$$\begin{aligned} \sinh z &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^{2k+1}}{(2k+1)!} = -i \sin iz \\ \cosh z &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^{2k}}{(2k)!} = \cos iz \end{aligned}$$

Si determinino gli zeri di $\sinh z$ e di $\cosh z$ [Risposta: $z_k = k\pi i$ e $z_k = \left(k + \frac{1}{2}\right)\pi i$ rispettivamente]

1.3 Differenziabilità e olomorfismo

Dato che una funzione in $\mathbb{C}$ è un caso particolare delle funzioni $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, per definire un concetto di differenziabilità in $\mathbb{C}$ ci rifaremo a quello in $\mathbb{R}^2$.

Definizione. Differenziabilità in $\mathbb{R}^2$ – Sia Ω una aperto di $\mathbb{R}^2$ e sia $f(x, y)$ definita su Ω. Allora si dice che f è differenziabile in $(x_0, y_0) \in \Omega$ se esiste una forma lineare $\alpha\Delta x + \beta\Delta y$ detta *differenziale*, tale che

$$f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0) = \alpha\Delta x + \beta\Delta y + \omega(\Delta x, \Delta y)\sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2} \quad (1.2)$$

con $\omega(\Delta x, \Delta y) \to 0$ per $\Delta x \to 0\,,\ \Delta y \to 0$.

Se f è differenziabile in (x_0, y_0), esistono le derivate parziali

$$\frac{\partial f}{\partial x} \equiv \alpha \quad , \quad \frac{\partial f}{\partial y} \equiv \beta$$

e scriveremo

$$df|_{x_0,y_0} = \left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{x_0,y_0} dx + \left.\frac{\partial f}{\partial y}\right|_{x_0,y_0} dy$$

Nel caso complesso si deve però soddisfare una ulteriore richiesta, e cioè che Δx e Δy devono essere combinati nella forma $\Delta z = \Delta x + i\Delta y$, il che ci porta all'introduzione di un nuovo concetto

Definizione. Olomorfismo – Una funzione f definita su un aperto $\mathscr{D} \subseteq \mathbb{C}$ si dice *olomorfa* in $z_0 \in \mathscr{D}$ se f è differenziabile in z_0, cioè esiste $\gamma \in \mathbb{C}$ tale che

$$f(z_0 + \Delta z) - f(z_0) = \gamma\Delta z + \omega(\Delta z)|\Delta z| \quad (1.3)$$

con $\omega(\Delta z) \to 0$ per $\Delta z \to 0$. Paragonando la (1.3) con la (1.2) si ottiene

$$\alpha\Delta x + \beta\Delta y = \gamma\Delta z = \gamma\Delta x + i\gamma\Delta y \qquad \Longrightarrow \qquad \begin{cases} \alpha = \gamma \\ \beta = i\gamma \end{cases}$$

Se f è differenziabile in z_0 allora esiste la derivata di f in z_0

$$\gamma = \lim_{\Delta z \to 0} \frac{f(z_0 + \Delta z) - f(z_0)}{\Delta z} \equiv \left.\frac{df}{dz}\right|_{z_0}$$

z_0 è un punto regolare della funzione $f(z)$. Infine, f è detta olomorfa in $\mathscr{D} \subseteq \mathbb{C}$ se è olomorfa in $\forall z_0 \in \mathscr{D}$. In tal caso, $\mathscr{D}$ è detto dominio di olomorfismo della funzione $f(z)$. I punti non apparteneti al dominio $\mathscr{D}$ si dicono singolarità di $f(z)$.

Da questa discussione appare chiaro che ci sono condizioni aggiuntive, rispetto al puro caso $\mathbb{R}^2$ perché esista la derivata di f in z_0. Infatti α e β non sono indipendenti, ma $\alpha = \frac{\partial f}{\partial x} = \gamma$ e $\beta = \frac{\partial f}{\partial y} = i\gamma$, ovvero

$$\frac{\partial f}{\partial x} + i\frac{\partial f}{\partial y} = 0 \quad (1.4)$$

Ora se $f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial x} + i\frac{\partial v}{\partial x} \qquad , \qquad \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial u}{\partial y} + i\frac{\partial v}{\partial y}$$

e la (1.4) diventa

$$\frac{\partial u}{\partial x} + i\frac{\partial v}{\partial x} + i\left(\frac{\partial u}{\partial y} + i\frac{\partial v}{\partial y}\right) = \left(\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial v}{\partial y}\right) + i\left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y}\right) = 0$$

da cui le condizioni di olomorfismo di Cauchy-Riemann

$$\boxed{\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} \qquad , \qquad \frac{\partial v}{\partial x} = -\frac{\partial u}{\partial y}} \tag{1.5}$$

Cerchiamo di capire meglio queste condizioni effettuando il seguente cambiamento di variabili $(x,y) \to (z,\bar{z})$

$$\begin{cases} z = & x + iy \\ \bar{z} = & x - iy \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} x = & \frac{z+\bar{z}}{2} \\ y = & \frac{z-\bar{z}}{2i} \end{cases}$$

da cui, usando la (1.5)

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial z} &= \frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial z} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial z} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial f}{\partial x} - i\frac{\partial f}{\partial y}\right) = \frac{\partial f}{\partial x} \\ \frac{\partial f}{\partial \bar{z}} &= \frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial \bar{z}} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial \bar{z}} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial f}{\partial x} + i\frac{\partial f}{\partial y}\right) = 0 \end{aligned}$$

Quindi f è olomorfa se $\frac{\partial f}{\partial \bar{z}} = 0$ e perciò può dipendere solo da z e non da $\bar{z}$.

In particolare, $f(z) = \bar{z}$ e $f(z) = |z|$ non sono funzioni olomorfe.

Date due funzioni $f(z)$, olomorfa in un dominio $\mathcal{F}$ e $g(z)$, olomorfa in un dominio $\mathcal{G}$, si possono provare facilmente, utilizzando le condizioni di Cauchy-Riemann, i seguenti fatti:

1. la loro somma $S(z) = f(z) + g(z)$ è olomorfa in $\mathcal{F} \cap \mathcal{G}$
2. il loro prodotto $P(z) = f(z)g(z)$ è olomorfo in $\mathcal{F} \cap \mathcal{G}$
3. il dominio di $P(z)$ può essere in alcuni casi più grande di $\mathcal{F} \cap \mathcal{G}$ (si pensi per esempio alle funzioni $f(z) = 1/z$ e $g(z) = z$)

4. se $f(z)$ è olomorfa in $\mathcal{F}$, allora $\frac{1}{f(z)}$ è olomorfa in $\mathcal{F} \smallsetminus \mathcal{Z}$, dove $\mathcal{Z}$ è l'insieme degli zeri di $f(z)$

Esempio 6. Si mostri che la funzione

$$f(z) = z^2$$

è olomorfa in $\mathbb{C}$ e se ne calcoli la derivata prima.

Soluzione - Scriviamo $z = x + iy$ e $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$. Allora

$$f(z) = z^2 = (x - iy)^2 = x^2 - y^2 + 2ixy$$

e quindi

$$u(x, y) = x^2 - y^2 \qquad , \qquad v(x, y) = 2xy$$

e verifichiamo che le condizioni di Cauchy-Riemann sono soddisfatte

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 2x = \frac{\partial v}{\partial y} \qquad , \qquad \frac{\partial u}{\partial y} = -2y = \frac{\partial v}{\partial x}$$

Si ha allora univocamente

$$f'(z) = \frac{\partial u}{\partial x} + i\frac{\partial v}{\partial x} = 2(x + iy) = 2z$$

Esercizio 7. Si provino le seguenti affermazioni.

1. Si provi l'olomorfismo della funzione
$$f(z) = \frac{1}{z}$$
in ogni punto $z \in \mathbb{C}$ tranne $z = 0$ e se ne calcoli la derivata prima.

2. Si mostri che le funzioni $f(z) = z^n$ con $n \in \mathbb{Z}$ sono olomorfe in tutto $\mathbb{C}$ se $n \geq 0$ e in $\mathbb{C} \smallsetminus \{0\}$ se $n < 0$.

3. Si mostri che anche nel piano complesso vale la regola di derivazione delle potenze
$$\frac{d}{dz} z^n = nz^{n-1}$$
per ogni $n \in \mathbb{Z}$.

4. Si mostri che le funzioni
$$f(z) = \sin z \qquad , \qquad g(z) = \cos z \qquad , \qquad h(z) = e^z$$
sono funzioni olomorfe per $z \in \mathbb{C}$ e se ne calcoli la derivata prima.

5. Sfruttando le regole su soma e prodotto di funzioni olomorfe, si mostri che anche le funzioni
$$\tan z \quad , \quad \cot z \quad , \quad \sinh z \quad , \quad \cosh z \quad , \quad \tanh z \quad , \quad \coth z$$
sono olomorfe e per ognuna ne si descriva in dettaglio il dominio di olomorfismo.

6. Si mostri che la funzione $f(z) = z^*$ non è olomorfa

1.4 Integrali nel piano complesso

Passiamo ora al concetto di integrabilità lungo una curva.

Definizione. Curva. Si definisce curva una applicazione continua

$$\gamma : [\alpha, \beta] \to \mathbb{C}$$

in cui $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ sono gli estremi di un segmento $[\alpha, \beta]$ della retta reale parametrizzata da $t \in \mathbb{R}$

$$\gamma(t) = x(t) + iy(t)$$

I punti $a = \gamma(\alpha)$ e $b = \gamma(\beta)$ sono detti *estremi* della curva. La curva è detta *chiusa* se $a = b$.

1. Una curva è detta di *Jordan* se $\gamma\ :]\alpha, \beta[\to \mathbb{C}$ è biiettiva. Si noti l'esclusione degli estremi. Ciò permette in questa definizione di evitare i nodi, ma permette comunque che $\gamma(\alpha) = \gamma(\beta)$ e cioè che la curva sia chiusa.

2. Una curva è *regolare* (o differenziabile) se esiste $\gamma'(t)$, $\forall t \in [\alpha, \beta]$, cioè posso disegnare la retta tangente per tutti i punti di γ.

3. Una curva che sia composta dall'unione di più curve regolari, ma che nei punti di unione non è regolare, si dice *regolare a tratti.*

4. Una curva è *rettificabile* (cioè si può rendere equivalente a un segmento in $\mathbb{R}$) se esiste $\gamma'(t)$ quasi ovunque e $\gamma'(t)$ è assolutamente integrabile, cioè

   $$\int_\alpha^\beta |\gamma'(t)|dt = \int_\alpha^\beta \sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2}dt < \infty$$

   La lunghezza della curva γ sarà allora definita da

   $$\ell(\gamma) = \int_\alpha^\beta |\gamma'(t)|dt$$

   Il "quasi ovunque" nella definizione di curva rettificabile significa che anche curve regolari a tratti sono rettificabili.

Definizione. Un dominio $\mathscr{D} \subseteq \mathbb{C}$ è un insieme di punti di $\mathbb{C}$ tale che

1. $\mathscr{D}$ è aperto

2. $\mathscr{D}$ è connesso per archi, cioè per qualunque coppia di punti $a, b \in \mathscr{D}$, a e b possono essere collegati da una curva γ tale che $\gamma(\alpha) = a$ e $\gamma(\beta) = b$, con $\gamma(t) \in \mathscr{D}$, $\forall t \in [\alpha, \beta]$ (cioè tutti i punti della curva γ sono in $\mathscr{D}$).

Definizione. Un insieme $\mathcal{M}$ è detto connesso se non può essere ripartito in due parti non vuote, cioè $\nexists \mathcal{N}_1, \mathcal{N}_2 \neq \varnothing$ tali che $\mathcal{M} = \mathcal{N}_1 \cup \mathcal{N}_2$ con $\bar{\mathcal{N}}_1 \cap \mathcal{N}_2 = \varnothing$ e $\mathcal{N}_1 \cap \bar{\mathcal{N}}_2 = \varnothing$ (ove con $\bar{\mathcal{N}}$ si indica la chiusura di $\mathcal{N}$: $\bar{\mathcal{N}} = \mathcal{N} \cup \partial\mathcal{N}$).

Ogni insieme connesso per archi è connesso. Viceversa un insieme connesso è sicuramente connesso per archi solo se è aperto.

Definizione. Un dominio $\mathscr{D}$ è semplicemente connesso se il suo bordo $\partial\mathscr{D}$ è connesso. In caso contrario, cioè se il bordo $\partial\mathscr{D}$ non è connesso, il dominio $\mathscr{D}$ si dice molteplicemente connesso.

Sia $f(z)$ una funzione in $\mathbb{C}$ di z e γ una curva regolare (o regolare a tratti)

$$\gamma(t) \equiv z(t) = x(t) + iy(t)$$

continua per $t \in [\alpha, \beta]$ e tale che $\gamma(\alpha) \equiv z(\alpha) = a$ e $\gamma(\beta) \equiv z(\beta) = b$. Suddividiamo l'arco (a, b) in n intervalli introducendo $n+1$ punti sulla curva

$$z_0 = a, z_1, z_2, ..., z_{n-1}, z_n = b$$

Per ogni arco (z_{k-1}, z_k) scegliamo un punto ξ_k e valutiamo la somma

$$I_n = \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)(z_k - z_{k-1})$$

Prendiamo poi il limite $n \to \infty$ con la condizione che $|z_k - z_{k-1}| \to 0$ per tutti i k. Se questo limite esiste in maniera indipendente dai punti z_k e ξ_k è detto **integrale di contorno** di $f(z)$ lungo la curva γ e viene indicato con

$$I = \int_\gamma f(z)dz$$

Si noti che $\int_a^b f(z)dz$ sarebbe una notazione imprecisa dato che l'integrale dipende dalla curva γ e non solo dai suoi estremi a e b.

Se $a = b$ e γ è una curva chiusa, si scrive

$$I = \oint_\gamma f(z)dz$$

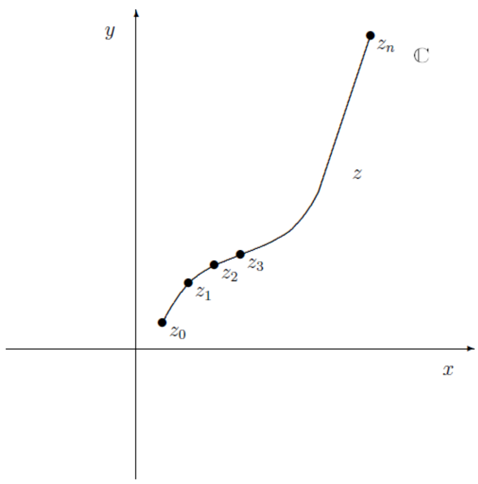

Figura 1.4: Integrazione lungo una curva

Per convenzione si prende come positivo il verso di percorrenza antiorario.

Riportiamo l'integrale di contorno ad ordinari integrali in $\mathbb{R}$. Poniamo

$$f = u + iv \qquad \text{e} \qquad z = x + iy$$

Allora

$$\begin{aligned} I &= \int_\gamma f(z)dz = \int_\gamma (u+iv)(dx+idy) \\ &= \int_\gamma (udx - vdy) + i\int_\gamma (vdx + udy) \end{aligned} \tag{1.6}$$

Gli integrali di contorno godono di alcune proprietà fondamentali, simili a quelle degli integrali ordinari:

1. Linearità

$$\int_\gamma Af(z)dz = A\int_\gamma f(z)dz \qquad , \qquad \int_\gamma \{f(z)+g(z)\}\,dz = \int_\gamma f(z)dz + \int_\gamma g(z)dz$$

2. Somma dei contorni

$$\int_{\gamma_1 \cup \gamma_2} f(z)dz = \int_{\gamma_1} f(z)dz + \int_{\gamma_2} f(z)dz$$

3. Se γ è percorsa in un certo verso, sia γ^- la stessa curva, ma percorsa in senso opposto. Allora
$$\int_{\gamma^-} f(z)dz = -\int_\gamma f(z)dz$$

4. Integrazione per parti
$$\int_\gamma \frac{df}{dz} g(z)dz = f(z)g(z)|_{z=a}^{z=b} - \int_\gamma f(z)\frac{dg}{dz}dz$$

5. Disuguaglianza di Darboux
$$\left| \int_\gamma f(z)dz \right| \leq M\ell(\gamma)$$

   dove $M = \max |f(z)|$ per $z \in \gamma$ e $\ell(\gamma)$ è la lunghezza della curva γ.

Ora, se la curva è parametrizzata da $t \in [\alpha, \beta]$ e $x = x(t)$, $y = y(t)$ e inoltre
$$dx = \frac{dx}{dt}dt \qquad , \qquad dy = \frac{dy}{dt}dt$$

allora
$$I = \int_\alpha^\beta \left[u(x(t), y(t))\frac{dx}{dt} - v(x(t), y(t))\frac{dy}{dt} \right] dt + i\int_\alpha^\beta \left[v(x(t), y(t))\frac{dx}{dt} + u(x(t), y(t))\frac{dy}{dt} \right] dt$$

ovvero
$$I = \int_\alpha^\beta f(z(t))\frac{dz(t)}{dt}dt$$

Se $\gamma \subseteq \mathscr{D}$ con $\mathscr{D}$ dominio in $\mathbb{C}$ e $f(z) = \frac{dF(z)}{dz}$ in $\mathbb{R}$ (il che implica che $F(z)$ è olomorfa in $\mathscr{D}$) allora $F(z)$ è detta primitiva di $f(z)$. Di conseguenza
$$\begin{aligned} \int_\gamma f(z)dz &= \int_\alpha^\beta f(z(t))\frac{dz(t)}{dt}dt = \int_\alpha^\beta \frac{dF}{dz}\frac{dz}{dt}dt = \int_\alpha^\beta \frac{dF(z(t))}{dt}dt \\ &= F(z(\beta)) - F(z(\alpha)) = F(b) - F(a) \end{aligned}$$

Abbiamo così ottenuto il teorema fondamentale del calcolo integrale:

Teorema. *L'integrale di contorno dipende soltanto dai punti estremi a e b se esiste una primitiva della funzione integranda per $\forall z \in \gamma$.*

1.5 Teoremi di Cauchy e di Morera

Una generica $f(z)$ non ammette una primitiva univoca in $\mathscr{D} \subseteq \mathbb{C}$ e perciò il suo integrale dipende dalla curva γ. Tuttavia funzioni analitiche ammettono primitive univoche all'interno di domini semplicemente connessi, perciò i loro integrali dipendono solo dagli estremi delle curve di integrazione.

Teorema. (di Cauchy) – *Sia $f(z)$ olomorfa in un dominio $\mathscr{D}$ aperto e semplicemente connesso. Se $\gamma \subseteq \mathscr{D}$ è una curva chiusa semplice e regolare a tratti, allora*

$$\oint_\gamma f(z)dz = 0$$

Dimostrazione. Sia S la superficie delimitata dalla curva chiusa γ. Dalla (1.6), usando il teorema di Gauss[1]

$$\oint_\gamma f(z)dz = \iint_S dxdy\left(-\frac{\partial u}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial x}\right) + i\iint_S dxdy\left(-\frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial u}{\partial x}\right)$$

Ma le relazioni di olomorfismo di Cauchy-Riemann (1.5) hanno come immediata conseguenza che

$$\oint_\gamma f(z)dz = 0$$

□

Il teorema di Cauchy è fondamentale nello sviluppo della teoria dell'integrazione nel piano complesso. Una sua immediata conseguenza è che l'integrale tra due punti z_1 e z_2 di una funzione olomorfa $f(z)$ è indipendente dalla curva congiungente i due punti, purché essa sia tutta interna al dominio di olomorfismo di f. Infatti, pensando la curva chiusa γ come l'unione di due curve aperte γ_1 e γ_2 che connettono i punti z_1 e z_2

$$0 = \oint_\gamma f(z)dz = \int_{z_1,\gamma_1}^{z_2} f(z) + \int_{z_2,\gamma_2}^{z_1} f(z) = \int_{z_1,\gamma_1}^{z_2} f(z) - \int_{z_1,\gamma_2}^{z_2} f(z)$$

da cui

$$\int_{z_1,\gamma_1}^{z_2} f(z) = \int_{z_1,\gamma_2}^{z_2} f(z)$$

[1] Ricordiamo che per funzioni in $\mathbb{R}^2$ vale il ben noto teorema di Gauss

$$\oint_\gamma f(x,y)dx = -\iint_S \frac{\partial f}{\partial y}dxdy = \iint_S \frac{\partial f}{\partial x}dxdy$$

Si tenga a mente però il fondamentale requisito che entrambe le curve devono essere comprese nel dominio di olomorfismo. Finché si rimane in tale dominio, si può arbitrariamente deformare ogni cammino di integrazione tra due punti, se la funzione integranda è olomorfa.

Le cose cambiano drasticamente se la curva chiusa γ racchiude punti in cui la funzione non è olomorfa, per esempio punti singolari della funzione stessa.

Se l'integrale di una funzione analitica non dipende dal cammino ma solo dagli estremi della curva su cui è definito, allora la primitiva $F(z)$, come abbiamo visto, è univocamente definita. Essa è perciò una funzione olomorfa, come facilmente dimostrabile scrivendo

$$F(z) = \int_{z_0}^{z} f(z')dz' = U(x,y) + iV(x,y)$$

con $z' = x' + iy'$ e

$$U = \int_{z_0}^{z} [u(x',y')dx' - v(x',y')dy'] \qquad , \qquad V = \int_{z_0}^{z} [v(x',y')dx' + u(x',y')dy']$$

Derivando queste relazioni si ottiene che per ogni $z \in \mathscr{D}$ valgono le uguaglianze

$$\begin{aligned} \frac{\partial U}{\partial x} &= u \qquad , \qquad \frac{\partial U}{\partial y} = -v \\ \frac{\partial V}{\partial x} &= v \qquad , \qquad \frac{\partial V}{\partial y} = u \end{aligned} \tag{1.7}$$

e perciò F soddisfa le condizioni di Cauchy-Riemann.

L'inverso del teroema di Cauchy è noto come teorema di Morera.

Teorema. (di Morera) – *Se l'integrale di una funzione continua $f(z)$ si annulla*

$$\oint_{\gamma} f(z)dz = 0$$

per ogni curva chiusa $\gamma \subseteq \mathscr{D}$, allora $f(z)$ è olomorfa in $\mathscr{D}$.

Dimostrazione. Se l'integrale di $f(z)$ lungo una qualsiasi curva chiusa di $\mathscr{D}$ è nullo, allora l'integrale tra due qualsiasi punti z_0 e z di $\mathscr{D}$ è indipendente dal cammino. Posto quindi

$$F(z) = \int_{z_0}^{z} f(z')dz'$$

valgono le relazioni (1.7). Derivandole si ottiene

$$\frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x} \qquad , \qquad \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial x}$$

e cioè le condizioni di Cauchy-Riemann per $\forall z \in \mathscr{D}$. Perciò $f(z)$ è olomorfa in $\mathscr{D}$. $\square$

Una immediata conseguanza di questa dimostrazione è che

Corollario. *La derivata di una funzione olomorfa in $\mathscr{D}$ è anch'essa olomorfa in $\mathscr{D}$.*

Le funzioni olomorfe sono tutte differenziabili un numero infinito di volte, cioè sono funzioni *liscie.*

Esempio 7. Calcoliamo

$$I = \oint_\gamma \frac{dz}{z}$$

con γ curva chiusa che racchiude $z = 0$.

Soluzione - In $z = 0$ la funzione integranda è singolare, quindi non possiamo concludere che l'intergale sia nullo per il teorema di Cauchy. Tale teorema però ci assicura che qualunque curva chiusa, grande o piccola che sia, che racchiuda $z = 0$ darà un valore equivalente dell'integrale, poiché stiamo deformando una curva di integrazione nel dominio di olomorfismo e quindi questa operazione dà contributo nullo.

Dunque possiamo considerare γ per comodità come un cerchio di raggio $\rho =$ cost. centrato nell origine. Rappresentiamo z in coordinate polari

$$z = \rho e^{i\theta} \qquad \Longrightarrow \qquad dz = i\rho e^{i\theta} d\theta = izd\theta$$

e dunque

$$I = i\int_0^{2\pi} d\theta = 2\pi i$$

Più in generale

$$\boxed{\oint_{\gamma_w} \frac{dz}{z - w} = 2\pi i}$$

ove γ_w è una qualunque curva chiusa attorno al punto w (spesso si usa la notazione abbreviata $\oint_w$ per indicare l'integrale lungo una curva arbitraria, tutta contenuta in $\mathscr{D}$, che racchiude w).

Esempio 8. Si calcoli l'integrale

$$I = \oint_0 \frac{dz}{z^2}$$

Soluzione - Come sopra, poniamo $z = \rho e^{i\theta}$ da cui $dz = izd\theta$. Avremo

$$I = i\int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{z} = \frac{i}{\rho}\int_0^{2\pi} e^{-i\theta} d\theta = -\frac{1}{\rho}\left[e^{-i\theta}\right]_{\theta=0}^{\theta=2\pi} = 0$$

Esercizio 8.

1. Si dimostri che, per $n \in \mathbb{Z}$
$$\oint_0 z^n dz = 2\pi i \delta_{n,-1}$$
ove $\delta_{a,b}$ è la delta di Krönecker
$$\delta_{a,b} = \begin{cases} 1 & \text{se } a = b \\ 0 & \text{se } a \neq b \end{cases}$$

2. Più in generale si dimostri che
$$\oint_w (z-w)^n dz = 2\pi i \delta_{n,-1}$$

1.6 Rappresentazione integrale di Cauchy

Dal teorema di Cauchy è possibile dedurre una forma integrale di rappresentazione delle funzioni molto importante.

Teorema. (Rappresentazione integrale di Cauchy) – *Sia $f(z)$ una funzione olomorfa in un dominio $\mathscr{D} \subseteq \mathbb{C}$ aperto e semplicemente connesso e $\gamma \subseteq \mathscr{D}$ una curva chiusa regolare a tratti. Se $z \notin \gamma$ si ha che*

$$\boxed{\frac{1}{2\pi i}\oint_\gamma \frac{f(w)}{w-z} dw = \begin{cases} f(z) & \textit{se } z \textit{ è interno a } \gamma \\ 0 & \textit{se } z \textit{ è esterno a } \gamma \end{cases}}$$

Dimostrazione. Se z è esterno a γ la funzione $g(w) = \frac{f(w)}{z-w}$ è olomorfa in w in tutta la regione interna a γ. Quindi il suo integrale su una curva chiusa è nullo per il teorema di Cauchy.

Se invece z è interno a γ, si consideri il rapporto

$$\frac{f(w) - f(z)}{w - z}$$

Poiché f è olomorfa, essa è anche continua, quindi per ogni $\epsilon > 0$ fissato a piacere, esiste un $\delta > 0$ tale che

$$|f(w) - f(z)| < \epsilon$$

quando $|w - z| < \delta$. Considerando ora un cerchio $\mathscr{C}$ nel piano w centrato su z di raggio $r < \delta$, quindi tutto contenuto in $\mathscr{D}$, descritto dall'equazione

$$w = z + re^{i\theta}$$

Integrando lungo tale cerchio, grazie alla disuguaglianza di Darboux si ha

$$\left| \oint_{\mathscr{C}} \frac{f(w) - f(z)}{w - z} dw \right| < \frac{\epsilon}{r} 2\pi r = 2\pi\epsilon$$

Nel limite per $\epsilon \to 0$ tale espressione si annulla, implicando

$$\oint_{\mathscr{C}} \frac{f(w) - f(z)}{w - z} dw = 0$$

e quindi

$$\oint_{\mathscr{C}} \frac{f(w)}{w - z} dw = f(z) \oint_{\mathscr{C}} \frac{dw}{w - z} = f(z) \cdot 2\pi i$$

Poiché la curva $\mathscr{C}$ e la curva γ sono entrambe contenute nel dominio di olomorfismo, possiamo deformare l'integrale da $\mathscr{C}$ a γ aggiungendo un contributo nullo per il teorema di Cauchy, provando quindi che

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\gamma} \frac{f(w)}{w - z} dw$$

quando la curva γ racchiude z. □

Derivando rispetto a z la rappresentazione di Cauchy (all'interno del dominio delimitato dalla curva chiusa γ)

$$\frac{df}{dz} = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\gamma} \frac{f(w)}{(w - z)^2} dw$$

Iterando la procedura si perviene a una rappresentazione integrale per le derivate di una funzione olomorfa

$$\boxed{\frac{d^n f}{dz^n} = \frac{n!}{2\pi i} \oint_{\gamma} \frac{f(w)}{(w - z)^{n+1}} dw}$$

che come abbiamo visto nel corollario al teorema di Morera esistono e sono tutte olomorfe.

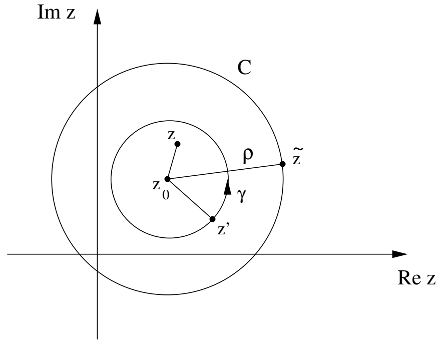

Figura 1.5: Cammino di integrazione γ per la serie di Taylor di $f(z)$ attorno a un punto regolare z_0. z è il punto in cui è valutata la funzione, z' varia lungo la curva γ nella rappresentazione di Cauchy di $f(z)$. La regione di convergenza è delimitata dal cerchio C di raggio ρ che incontra la prima singolarità $\tilde{z}$.

1.7 Serie di Taylor

Definizione. Analiticità – Una funzione $f(z)$ definita in un aperto $\mathscr{D} \subseteq \mathbb{C}$ si dice *analitica* in Ω se $\forall z_0 \in \Omega$, f è sviluppabile in serie di potenze di $(z - z_0)$, cioè esiste un $\rho(z_0) > 0$, detto *raggio di convergenza*, tale che

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n \qquad \text{per} \quad |z - z_0| < \rho(z_0)$$

Una funzione olomorfa è analitica e viceversa: i due concetti sono equivalenti.

Una funzione $f(z)$, olomorfa in un dominio $\mathscr{D}$ ammette infatti in ogni punto $z_0 \in \mathscr{D}$ uno sviluppo in serie di Taylor

$$\boxed{f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k (z - z_0)^k}$$

con

$$\boxed{a_k = \frac{1}{k!} \left. \frac{d^k f}{dz^k} \right|_{z=z_0} = \frac{1}{2\pi i} \oint_\gamma \frac{f(z)}{(z - z_0)^{k+1}} dz}$$

Allo scopo di dimostrare questo asserto, osserviamo che la rappresentazione di Cauchy ci permette di scrivere

$$f(z) = \oint_\gamma \frac{f(z')}{z' - z} dz'$$

se la curva γ è tutta appartenente al dominio $\mathscr{D}$ di olomorfismo della funzione f. Ora notiamo che

$$\frac{1}{z'-z} = \frac{1}{z'-z_0-z+z_0} = \frac{1}{z'-z_0}\frac{1}{1-\frac{z-z_0}{z'-z_0}}$$

Se γ è scelta in modo da racchiudere sia il punto z in cui valutiamo la funzione, sia il punto z_0 attorno a cui vogliamo espandere, allora avremo che $|z'-z_0| > |z-z_0|$ e quindi

$$\left|\frac{z-z_0}{z'-z_0}\right| < 1$$

Applicando il ben noto risultato per la somma della serie geometrica

$$\sum_{k=0}^{\infty} z^n = \frac{1}{1-z}$$

valido ove la serie è convergente, cioè per $|z| < 1$ si ha

$$\frac{1}{z'-z} = \frac{1}{z'-z_0}\sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{z-z_0}{z'-z_0}\right)^k$$

Poiché la serie così trovata è uniformemente convergente, possiamo sostituirla al posto di $1/(z'-z)$ nella rappresentazione di Cauchy e integrare termine a termine, ottenendo

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i}\sum_{k=0}^{\infty}(z-z_0)^k \oint_\gamma \frac{f(z')}{(z'-z_0)^{k+1}}dz'$$

da cui l'assunto.

Possiamo sempre deformare γ ad assumere la forma di un cerchio centrato in z_0. Possiamo dilatare questo cerchio finché esso non incontri un punto $\tilde{z}$ che sia una singolarità di $f(z)$. Quando il cerchio raggiunge tale punto esso non può più essere tutto nel dominio di olomorfismo $\mathscr{D}$ di f e quindi la rappresentazione di $f(z)$ tramite serie di Taylor non è più valida. In altre parole, abbiamo trovato che il raggio di convergenza della serie di Taylor rappresentante $f(z)$ si estende fino a trovare la prima singolarità $\tilde{z}$ di f e quindi la regione di convergenza della serie è data da un cerchio di raggio $\rho(z_0) = |\tilde{z}-z_0|$.

Esempio. Si sviluppi la funzione

$$f(z) = \frac{1}{1-z}$$

attorno al punto $z_0 = 3$ in serie di Taylor e ne si determini il raggio di convergenza.

Soluzione - Questa funzione è singolare in un unico punto $\tilde{z} = 1$. Il raggio di convergenza della serie di Taylor attorno a $z_0 = 3$ sarà dunque $\rho(3) = |z_0 - \tilde{z}| = |3 - 1| = 2$.

Per trovare esplicitamente la serie possiamo calcolare le derivate successive

$$\begin{aligned}
f(z) &= (1-z)^{-1} \\
f'(z) &= (1-z)^{-2} \\
f''(z) &= 2(1-z)^{-3} \\
f'''(z) &= 2 \cdot 3(1-z)^{-4} \\
&\ldots \\
f^{(n)}(z) &= n!(1-z)^{-(n+1)}
\end{aligned}$$

e poi valutarle in $z = 3$ ottenendo così i coefficienti della serie in maniera diretta

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(3)}{n!}(z-3)^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{2^{n+1}}(z-3)^n$$

1.8 Zeri e singolarità di una funzione

Definizione. Un punto z_0 è uno zero di ordine n di una funzione analitica se in tale punto la funzione e le sue prime $n-1$ derivate si annullano e la n-ima è non nulla

$$z_0 \text{ è un zero di ordine } n \iff f(z_0) = f'(z_0) = \ldots = f^{(n-1)}(z_0) = 0 \quad \text{e} \quad f^{(n)}(z_0) \neq 0$$

Gli zeri sono punti regolari della funzione e attorno ad essi la funzione è rappresentabile in serie di Taylor. Poiché i primi n termini della serie sono nulli, la serie potrà essere scritta come

$$\begin{aligned}
f(z) &= \sum_{k=n}^{\infty} a_k(z-z_0)^k = a_n(z-z_0)^n + a_{n+1}(z-z_0)^{n+1} + \ldots \\
&= (z-z_0)^n \sum_{k=0}^{\infty} a_{n+k}(z-z_0)^k = (z-z_0)^n g(z)
\end{aligned}$$

ove $g(z)$ è un'altra funzione analitica in z_0, ma ivi non nulla. Da ciò discende che gli zeri di una funzione analitica sono punti isolati, ovvero si può sempre trovare attorno a uno zero di una funzione analitica un intorno di raggio $\epsilon > 0$ opportuno in cui la funzione non presenta altri zeri. Da ciò discende che gli zeri di una funzione costiuiscono un insieme discreto di punti nel dominio di analiticità $\mathscr{D}$. Un eventuale punto di accumulazione di zeri (cioè un punto di cui ogni intorno di raggio $\epsilon > 0$ piccolo a piacere contiene sempre almeno uno zero della funzione) è forzatamente fuori da $\mathscr{D}$, e quindi una singolarità di $f(z)$.

Definizione. Una singolarità di una funzione analitica $f(z)$ si dice isolata se esiste almeno un intorno di raggio $\epsilon > 0$ in cui non sono presenti altre singolarità di $f(z)$.

1.9 Serie di Laurent

Supponiamo che $f(z)$ sia una funzione olomorfa in un dominio $\mathscr{D}_0 = \mathscr{D} \setminus \{z_0\}$, ovvero olomorfa ovunque in $\mathscr{D}$ tranne che nel punto z_0 dove essa presenta una singolarità isolata. Vogliamo ora trovare una rappresentazione in serie della funzione attorno al punto singolare z_0. Allo scopo, consideriamo un punto generico $z \in \mathscr{D}_0$, per il quale varrà la rappresentazione di Cauchy

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{f(z')}{z' - z} dz'$$

Consideriamo ora l'integrale

$$\oint_{\gamma'} \frac{f(z')}{z' - z} dz' = 0$$

lungo il cammino γ' di fig.1.6. Esso è nullo in quanto la funzione integranda è olomorfa all'interno di γ', essendo il punto z ove essa presenterebbe una singolarità esterno a tale cammino. Consideriamo ora i cammini parziali di cui γ' è composto. Il cammino γ_2 risulta percorso in senso antiorario, mentre il cammino γ_1 è percorso in senso orario. Inoltre, i due tratti di collegamento A e B possono essere avvicinati così tanto da coincidere e vengono percorsi una volta in un senso e poi anche nel senso opposto, dunque danno contributo zero a qualunque integrale di funzione olomorfa. Pertanto

$$\oint_{\gamma'} = \oint_{\gamma_2} - \oint_{\gamma_1} - \oint_C$$

e si ha

$$\oint_C \frac{f(z')}{z' - z} dz' = \oint_{\gamma_2} \frac{f(z')}{z' - z} dz' - \oint_{\gamma_1} \frac{f(z')}{z' - z} dz'$$

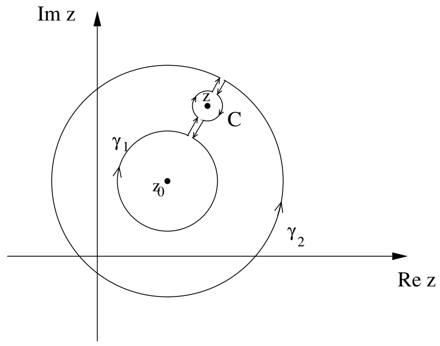

Figura 1.6: Cammino di integrazione per la serie di Laurent. z_0 è la singolarità e z il punto in cui la funzione viene valutata. Il dominio di analiticità si estende oltre γ_2, fino alla prossima singolarità, ma non comprende, ovviamente, z_0.

e quindi la rappresentazione integrale di Cauchy per $f(z)$ può essere scritta come

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i}\oint_{\gamma_2}\frac{f(z')}{z'-z}dz' - \frac{1}{2\pi i}\oint_{\gamma_1}\frac{f(z')}{z'-z}dz'$$

L'integrale lungo γ_2 può essere trattato esattamente come nel caso della serie di Taylor, infatti si ha $|z'-z_0| > |z-z_0|$. Quindi questa parte dell'integrale fornisce

$$\frac{1}{2\pi i}\oint_{\gamma_2}\frac{f(z')}{z'-z}dz' = \sum_{k=0}^{\infty} a_k(z-z_0)^k$$

con

$$a_k = \frac{1}{2\pi i}\oint_{\gamma_2}\frac{f(z)}{(z-z_0)^{k+1}}dz$$

Invece nel caso di γ_1 dovremo porre attenzione al fatto che $|z'-z_0| < |z-z_0|$ e quindi la corretta manipolazione è

$$\frac{1}{z'-z} = \frac{1}{z'-z_0-z+z_0} = -\frac{1}{z-z_0}\frac{1}{1-\frac{z'-z_0}{z-z_0}} = -\frac{1}{z-z_0}\sum_{l=0}^{\infty}\left(\frac{z'-z_0}{z-z_0}\right)^l$$

che, integrata termine a termine fornisce (ponendo $k = l+1$)

$$\frac{1}{2\pi i}\oint_{\gamma_1}\frac{f(z')}{z'-z}dz' = -\sum_{k=1}^{\infty}\frac{b_k}{(z-z_0)^k}$$

con

$$b_k = \frac{1}{2\pi i}\oint_{\gamma_1} f(z)(z-z_0)^{k-1}dz$$

Dunque risulta

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k(z-z_0)^k + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{b_k}{(z-z_0)^k}$$

che possiamo convenientemente scrivere come

$$\boxed{f(z) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} d_k(z-z_0)^k}$$

con

$$d_k = \begin{cases} a_k & \text{per } k \geq 0 \\ b_{-k} & \text{per } k < 0 \end{cases}$$

ovvero

$$\boxed{d_k = \frac{1}{2\pi i}\oint_{\gamma} \frac{f(z)}{(z-z_0)^k}dz \qquad , \qquad k = 0, \pm 1, \pm 2, ...}$$

lungo qualsiasi cammino $\gamma \subseteq \mathscr{D}_0$ che racchiuda il punto singolare z_0.

Lo sviluppo di Laurent ci permette di classificare le singolarità isolate.

- Se per una funzione $f(z)$ il punto z_0 è una singolarità isolata con uno sviluppo di Laurent

  $$f(z) = \sum_{k=-n}^{\infty} d_k(z-z_0)^k$$

  cioè una serie troncata dalla parte delle potenze negative a un certo n finito, si dice che la singolarità in z_0 è un **polo** di ordine n. La parte delle potenze negative

  $$\sum_{k=-n}^{-1} d_k(z-z_0)^k$$

  viene detta *parte principale* della funzione $f(z)$. Si noti che in presenza di un polo di ordine n possiamo scrivere la funzione

  $$f(z) = \frac{g(z)}{(z-z_0)^n}$$

  con $g(z)$ funzione olomorfa in z_0 e ivi non nulla.

- Se invece la serie non si tronca mai dalla parte delle potenze negative, avremo una **singolarità essenziale**. Le singolarità essenziali isolate hanno proprietà più complicate rispetto ai poli. Per esempio, nell'intorno di una singolarità essenziale una funzione prende tutti i valori possibili nel piano complesso, ovvero oscilla selvaggiamente (teorema di Weierstrass). Inoltre, *un punto di accumulazione di zeri o di poli di una funzione è sempre una singolarità essenziale isolata.*

Esempio. Si sviluppi in serie di Laurent la funzione

$$f(z) = \frac{e^{-2iz}}{(z-i)^3}$$

intorno a $z = i$. Determinare il raggio di convergenza di tale serie.

Soluzione - La funzione ha evidentemente un polo di ordine 3 in $z = i$. Essendo il numeratore e^{-2iz} una funzione intera, non vi sono altre singolarità al finito.

Un modo efficiente di sviluppare in serie di Laurent è quello di passare alla nuova variabile $\zeta = z - i$, in termini della quale la funzione diventa

$$\tilde{f}(\zeta) = \frac{e^{-2i(\zeta+i)}}{\zeta^3} = e^2 \frac{e^{-2i\zeta}}{\zeta^3}$$

che ora presenta un polo di ordine 3 in $\zeta = 0$. Sviluppiamo in serie di Taylor il numeratore attorno a $\zeta = 0$ ottenendo

$$\tilde{f}(\zeta) = \frac{e^2}{\zeta^3} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-2i\zeta)^k}{k!} = e^2 \left(\frac{1}{\zeta^3} - \frac{2i}{\zeta^2} - \frac{2}{\zeta} + \frac{4i}{3} + \frac{2\zeta}{3} + ... \right)$$

ovvero, in termini della variabile originale z

$$f(z) = e^2 \left(\frac{1}{(z-i)^3} - \frac{2i}{(z-i)^2} - \frac{2}{z-i} + \frac{4i}{3} + \frac{2}{3}(z-i) + ... \right)$$

1.10 Residui

Definizione. Sia z_0 un punto singolare isolato di una funzione analitica $f(z)$. Si dice residuo di $f(z)$ nel punto z_0 la quantità

$$\operatorname*{Res}_{z=z_0} f(z) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{2\pi i} \oint_{z_0} f(z) dz$$

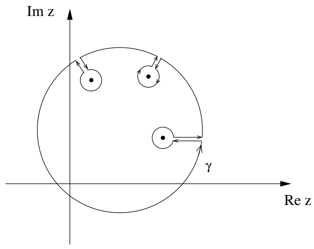

Figura 1.7: Teorema dei residui

Osservazione. Se invece il punto z_0 è regolare per la funzione $f(z)$, il residuo risulta essere 0 banalmente per il teorema di Cauchy.

Esempio. Calcoliamo

$$\operatorname*{Res}_{z=0}\frac{1}{z}=\frac{1}{2\pi i}\oint\frac{dz}{z}=\frac{1}{2\pi i}2\pi i=1$$

Teorema. *(dei residui) – L'integrale di una funzione $f(z)$ esteso a una qualsiasi curva chiusa $\gamma\subset\mathscr{D}$ semplicemente connessa e non passante per nessun punto singolare di $f(z)$ è uguale a $2\pi i$ volte la somma dei residui delle singolarità z_k $(k=1,...,n)$ di $f(z)$ interne a γ*

$$\oint_\gamma f(z)dz=2\pi i\sum_{k=1}^{n}\underset{z=z_k}{Res}f(z) \tag{1.8}$$

Dimostrazione. Si consideri la curva γ' disegnata in fig.1.7 (dove abbiamo esemplificato il problema con 3 singolarità z_1,z_2,z_3. Essa è tutta nella regione di analiticità di $f(z)$ e non racciude alcuna singolarità. Perciò, per il teorema di Cauchy

$$\oint_{\gamma'}f(z)dz=0$$

Tuttavia questa curva può essere spezzata nei cerchietti che aggirano le singolarità e danno proprio la definizione dei residui, più la curva γ originale, più i tratti che collegano γ ai cerchietti dei residui. Poiché in assenza di singolarità posso deformare i cammini di integrazione a piacere, posso rendere questi ultimi tratti, che vengono percorsi una volta in un senso e un'altra in senso opposto, praticamente coincidenti. I loro contributi all'integrale perciò si annullano e rimane

$$\oint_{\gamma'}f(z)dz=\oint_\gamma f(z)dz-\sum_{k=1}^{n}\oint_{z_k}f(z)dz=0$$

Il segno meno davanti agli integrali sui cerchietti viene dal fatto che questi sono percorsi in senso orario, mentre la convenzione adottata è che il senso positivo è quello antiorario. Paragonando con la definizione di residuo si ottiene la (1.8). $\square$

Per valutare esplicitamente i residui di una funzione, cominicamo coll'occuparci del caso in cui z_0 è un polo di ordine n. Allora nell'intorno di z_0 potremo scrivere

$$f(z) = \frac{g(z)}{(z - z_0)^n}$$

con $g(z)$ olomorfa nell'intorno di z_0. Dalla definizione di residuo

$$\operatorname*{Res}_{z=z_0} f(z) = \frac{1}{2\pi i} \oint_{z_0} \frac{g(z)}{(z - z_0)^n} dz$$

La rappresentazione di Cauchy per la derivata k-ima di una funzione olomorfa

$$\frac{d^k g(z)}{dz^k} = \frac{k!}{2\pi i} \oint_{z} \frac{g(z')}{(z' - z)^{k+1}} dz'$$

ci fornisce

$$\operatorname*{Res}_{z=z_0} f(z) = \frac{1}{(n-1)!} \left. \frac{d^{n-1} g(z)}{dz^{n-1}} \right|_{z=z_0}$$

e quindi

$$\boxed{\operatorname*{Res}_{z=z_0} f(z) = \frac{1}{(n-1)!} \lim_{z \to z_0} \left[\frac{d^{n-1}}{dz^{n-1}} (z - z_0)^n f(z) \right]}$$

e nel caso particolare di polo semplice

$$\boxed{\operatorname*{Res}_{z=z_0} f(z) = \lim_{z \to z_0} \left[(z - z_0) f(z) \right]}$$

Se poi confrontiamo questi risultati con le espressioni per i coefficienti dello sviluppo in serie di Laurent per $f(z)$ attorno a z_0 vediamo subito che

$$\boxed{\operatorname*{Res}_{z=z_0} f(z) = d_{-1}}$$

ovvero che il residuo di una funzione in corrispondenza di una singolarità isolata corrisponde al coefficiente del termine in $(z - z_0)^{-1}$ nel suo sviluppo di Laurent. Questa ultima formula è vera non solo per poli ma anche per singolarità essenziali, purché isolate.

Se la variabile z a sua volta è funzione analitica di un'altra variabile complessa t

$$z = z(t)$$

vale la formula (immediatamente ottenibile dalle usuali regole di cambiamento di variabili negli integrali)

$$\operatorname*{Res}_{z=z_0} f(z) = \operatorname*{Res}_{t=t_0} \left(f(z(t)) \frac{dz}{dt} \right)$$

Ciò permette di studiare anche il residuo del punto all'infinito di una funzione $f(z)$. Ciò può essere fatto agevolmente con il cambiamento di variabile

$$z = \frac{1}{t}$$

che manda il punto $z = \infty$ in $t = 0$

$$\boxed{\operatorname*{Res}_{z=\infty} f(z) = -\operatorname*{Res}_{t=0} \left(f\left(\frac{1}{t}\right) \frac{1}{t^2} \right)}$$

Il segno meno che compare nella formula per il residuo all'infinito è compatibile con il fatto che la curva che racchiude $z = \infty$, se viene presa come positiva in senso antiorario, sarà in senso orario se vista da $z = \infty$ stesso.

Si noti che possono esistere funzioni che sono regolari in $z = \infty$ ma che tuttavia hanno ivi un residuo non nullo. Per esempio

$$f(z) = \frac{1}{z}$$

prende valore 0 all'infinito e perciò è regolare, ma

$$\operatorname*{Res}_{z=\infty} \frac{1}{z} = -\operatorname*{Res}_{t=0} \frac{1}{t} = -1$$

Si noti che la somma di questo residuo e di quello dell'unica altra singolarità della funzione in tutto $\mathbb{C}$ è zero.

Vale infatti un teorema generale sulla somma dei residui di una funzione:

Teorema. *Se una funzione $f(z)$ ha solo singolarità isolate, la somma di tutti i suoi residui, compreso l'eventuale residuo all'infinito, è nulla.*

Dimostrazione. Si consideri una curva chiusa γ che racchiude un certo numero di singolarità, che chiameremo interne e lascia fuori le altre che chiameremo esterne. Il teorema dei residui ci dive che l'integrale

$$\oint_\gamma f(z)dz = 2\pi i \sum_{z_k \text{ interni}} \operatorname*{Res}_{z=z_k} f(z)$$

ma anche

$$\oint_\gamma f(z)dz = -2\pi i \sum_{z_k \text{ esterni}} \operatorname*{Res}_{z=z_k} f(z)$$

Il segno meno nella seconda equazione è dovuto al fatto che γ racchiude anche le singolarità esterne, girandoci però attorno in senso orario anziché antiorario. Il confronto delle due equazioni dice subito che

$$\sum_{\text{tutti gli } z_k} \operatorname*{Res}_{z=z_k} f(z) = 0$$

□

1.11 Classificazione delle funzioni complesse

Elenchiamo qui alcune proprietà immediate o facilmante deducibili dai risulati precedenti sulle funzioni complesse *monodrome* (cioè a un sol valore).

1. Teorema di Liouville: a parte le costanti, non esistono funzioni che non abbiano almeno una singolarità (che può essere polare o essenziale).

2. Una funzione senza singolarità essenziali, sia al finito che all'infinito, è necessariamente una <u>funzione razionale</u>, cioè un rapporto di polinomi.

3. Una funzione senza singolarità al finito è detta <u>funzione intera</u> ed è rappresentabile con una serie di potenze attorno a $z = 0$ (serie di McLaurin) con raggio di convergenza infinito.

4. Una funzione razionale e intera è necessariamente un <u>polinomio</u>. Esso presenterà all'infinito un polo di ordine pari al suo grado.

5. Una funzione che abbia in un dominio $\mathscr{D}$ solo poli o punti regolari si dice <u>meromorfa</u> in $\mathscr{D}$. Una funzione su $\mathbb{C}$ che presenti solo poli al finito, con al più l'eccezione di una singolarità essenziale all'infinito si dice <u>meromorfa su $\mathbb{C}$</u>.

6. Tutte le funzioni monodrome dotate di singolarità essenziali sono funzioni trascendenti.

1.12 Calcolo di integrali, lemma di Jordan

Il teorema dei residui permette il calcolo di una quantità di integrali definiti sull'asse reale che non sapremmo valutare con metodi elementari. Infatti permette di valutare, per esempio, integrali del tipo

$$I = \int_0^{2\pi} f(\cos\theta, \sin\theta) d\theta$$

Infatti si sostituisca $z = e^{i\theta}$ e quindi $d\theta = -i\frac{dz}{z}$ in modo che

$$f(\cos\theta, \sin\theta) \to F(z) = f\left(\frac{1}{2}\left(z + \frac{1}{z}\right), \frac{1}{2i}\left(z - \frac{1}{z}\right)\right)$$

per ricondurre gli integrali di questo tipo a integrali sul cerchio di raggio 1 nel piano complesso di z

$$I = \oint_C F(z)dz = 2\pi i \sum_{z_k} \underset{z=z_k}{\mathrm{Res}} F(z)$$

dove z_k sono le singolarità di $F(z)$ interne al cerchio C di raggio 1.

Esempio 9. Sia

$$I = \int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{1 - 2p\cos\theta + p^2}$$

La sostituzione $z = e^{i\theta}$ porta a

$$\begin{aligned} I &= -i\oint_C \frac{dz}{z}\frac{1}{1 - p\left(z + \frac{1}{z}\right) + p^2} = -i\oint_C \frac{dz}{z - pz^2 - p + p^2 z} \\ &= -i\oint_C \frac{dz}{(z-p)(1-pz)} = \frac{i}{p}\oint_C \frac{dz}{(z-p)\left(z - \frac{1}{p}\right)} \end{aligned}$$

Nel cerchio C di raggio 1 la funzione integranda ha due poli $z_1 = p$ che è interno a C se $|p| < 1$ e $z_2 = \frac{1}{p}$, interno a C se $|p| > 1$. Distinguando quindi i due casi:

- per $|p| < 1$
$$I = 2\pi i \underset{z=p}{\mathrm{Res}} \frac{i/p}{(z-p)\left(z - \frac{1}{p}\right)} = -\frac{2\pi}{p}\lim_{z\to p}\frac{1}{z - \frac{1}{p}} = \frac{2\pi}{1-p^2}$$

- per $|p| > 1$
$$I = 2\pi i \underset{z=\frac{1}{p}}{\mathrm{Res}} \frac{i/p}{(z-p)\left(z - \frac{1}{p}\right)} = -\frac{2\pi}{p}\lim_{z\to \frac{1}{p}}\frac{1}{z-p} = \frac{2\pi}{p^2-1}$$

I due risultati si possono riassumere nell'unica formula

$$I = \frac{2\pi}{|1-p^2|} \qquad , \qquad |p| \neq 1$$

Molti integrali sono poi valutabili grazie all'ausilio di un importante teorema noto come lemma di Jordan.

Lemma. (di Jordan) – *Sia γ_R una semicirconferenza nel semipiano Im $z > 0$ centrata nell'origine $z = 0$ e di raggio R e sia $f(z)$ una funzione che tende a zero quando $|z| \to \infty$ uniformemente per $0 \leq \arg z \leq \pi$. Allora*

$$\boxed{\lim_{R\to\infty} \int_{\gamma_R} e^{i\alpha z} f(z) dz = 0}$$

per qualunque $\alpha \in \mathbb{R}_+$.

Omettiamo la dimostrazione di tale teorema, notando però che esso vale anche nel caso in cui $\alpha = 0$ purché in questo caso la funzione $f(z)$ tenda a 0 per $z \to \infty$ più velocemente di $1/z$. In tal caso si ha

$$\lim_{R\to\infty} \int_{\gamma_R} f(z) dz = 0$$

Analoghe considerazioni si possono fare nel semipiano Im $z < 0$ con $\alpha \leq 0$.

Esempio. Si calcoli

$$I = \int_0^{\infty} \frac{z^2}{(z^2+1)(z^2+4)} dz$$

Soluzione - Innanzitutto notiamo che la funzione integranda

$$f(z) = \frac{z^2}{(z^2+1)(z^2+4)}$$

è pari e quindi

$$I = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} f(z) dz$$

Il comportamento all'infinito di $f(z)$ è

$$f(z) = \frac{z^2}{(z^2+1)(z^2+4)} \underset{z\to\infty}{\sim} \frac{1}{z^2}$$

e quindi si può applicare il lemma di Jordan con $\alpha = 0$ poiché $f(z)$ va a infinito più velocemente di $1/z$. $f(z)$ ha due poli nel semipiano superiore: $z_1 = i$ e $z_2 = 2i$. Ora possiamo usare il teorema dei residui per valutare l'integrale di $f(z)$ lungo una curva chiusa Γ composta da un tratto di retta reale da $-R$ a R e dalla curva γ_R del lemma di Jordan

$$\oint_\Gamma f(z)dz = \int_{-R}^{R} f(z)dz + \int_{\gamma_R} f(z)dz = 2\pi i \left(\operatorname*{Res}_{z=i} f(z) + \operatorname*{Res}_{z=2i} f(z) \right)$$

Ma per il lemma di Jordan in secondo integrale su γ_R è nullo nel limite $R \to \infty$, mentre il primo diventa proprio $2I$. Ora

$$\begin{aligned}
\operatorname*{Res}_{z=i} f(z) &= \lim_{z \to i} (z-i) \frac{z^2}{(z^2+1)(z^2+4)} = \frac{i^2}{2i(i^2+4)} = \frac{i}{6} \\
\operatorname*{Res}_{z=2i} f(z) &= \lim_{z \to 2i} (z-2i) \frac{z^2}{(z^2+1)(z^2+4)} = \frac{4i^2}{(4i^2+1)4i} = -\frac{i}{3}
\end{aligned}$$

Quindi

$$I = \frac{1}{2} 2\pi i \left(\frac{i}{6} - \frac{i}{3} \right) = \frac{\pi}{6}$$

1.13 Rapidi cenni sulle funzioni polidrome

Nel campo reale siamo abituati a considerare le funzioni come applicazioni a un sol valore. Invece nel campo complesso possono verificarsi fenomeni interessanti in cui l'estensione naturale delle funzioni reali porta a definire oggetti $f(z)$ che possono assumere più valori per un argomento dato z.

Più specificatamente chiameremo monodrome attorno a un punto z_0 le funzioni che, effettuato un intero giro attorno a z_0, cioè sotto la sostituzione

$$z - z_0 \to (z - z_0)e^{2\pi i}$$

tornano ad assumere lo stesso valore

$$f(\tilde{z}) = f(z)$$

ove

$$\tilde{z} = z_0 + (z - z_0)e^{2\pi i}$$

Alcune funzioni però acquisiscono dopo un tale giro un nuovo valore

$$f(\tilde{z}) \neq f(z)$$

A queste daremo il nome di **funzioni polidrome**. Il punto z_0 attorno a cui ciò avviene è detto in questo caso **punto di diramazione**. Il punto di diramazione va considerato come un punto singolare della funzione, anche quando essa ivi assume un valore finito o nullo.

Esempio. Consideriamo l'estensione al piano complesso della funzione radice quadrata. Cercando di mantenere le stesse proprietà del caso reale, per esempio che $\sqrt{x \cdot y} = \sqrt{x}\sqrt{y}$ vediamo di definire la funzione

$$f(z) = \sqrt{z} \equiv z^{\frac{1}{2}}$$

Usando la rappresentazione polare per il numero complesso $z = |z|e^{i \arg z}$ risulta chiaro che

$$\sqrt{z} = \sqrt{|z|e^{i \arg z}} = \sqrt{|z|}e^{\frac{i}{2} \arg z}$$

Se ora effettuiamo un giro intero attorno a $z = 0$

$$z \to ze^{2\pi i}$$

la funzione si comporta come segue

$$\sqrt{z} \to \sqrt{ze^{2\pi i}} = \sqrt{z}e^{\pi i} = -\sqrt{z}$$

e perciò assume un nuovo valore, opposto al valore precedente. Se effettuiamo un secondo giro è immediato rendersi conto che si ritorna al valore di origine. Si dice in questo caso che la polidromia della radice quadrata è di ordine 2, ovvero che il punto di diramazione in $z = 0$ della funzione $\sqrt{z}$ è di ordine 2.

Esempio. Le radici n-ime di un numero complesso presentano in $z = 0$ un punto di diramazione di ordine n. Infatti

$$z^{1/n} \to (ze^{2\pi i})^{1/n} = z^{1/n}e^{\frac{2\pi i}{n}}$$

e si torna al valore iniziale solo dopo n giri.

L'ordine di un punto di diramazione può essere finito (si considerino per esempio le radici n-ime $z^{1/n}$) oppure infinito, come mostrato da questo altro importante esempio.

Esempio. Il logaritmo di un numero complesso è dato da

$$\log z = \log(|z|e^{i \arg z}) = \log|z| + i \arg z$$

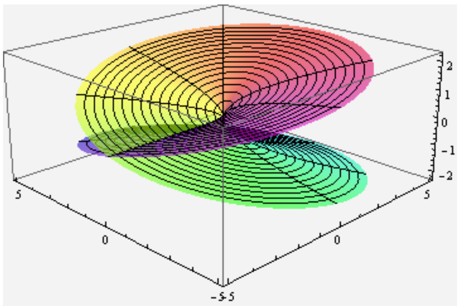

Figura 1.8: Superficie di Riemann $\mathcal{R}$ per la radice quadrata

A ogni giro $z \to ze^{2\pi i}$ la funzione cambia di valore

$$\log z \to \log(ze^{2\pi i}) = \log z + 2\pi i$$

Dopo k giri (antiorari per k positivo e orari per k negativo) essa assume il valore

$$\log z + 2k\pi i$$

Le funzioni polidrome possono essere ricondotte ad applicazionia un sol valore, ma non come funzioni $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, bensì come funzioni

$$f : \mathbb{C} \to \mathcal{R}$$

ove $\mathcal{R}$ è una varietà detta **superficie di Riemann** e composta da più repliche di $\mathbb{C}$ "cucite" l'una all'altra da un **taglio**, cioè una linea che collega due punti di diramazione della funzione.

Esempio. Consideriamo la radice quadrata. Oltre al punto di diramazione in $z = 0$ essa possiede anche un punto di diramazione all'infinito. Infatti ponendo $z = 1/t$ si vede subito che $z^{1/2} = t^{-1/2}$. Quest'ultima $t^{-1/2}$ possiede ovviamente un punto di diramazione in $t = 0$, da cui l'asserto. Ora pensiamo di operare un taglio nel piano complesso da zero a infinito, per esempio lungo l'asse reale negativo (come si sceglie il taglio per una data funzione è frutto di convenzione). Il taglio è la linea lungo la quale i due piani complessi in cui la funzione $\sqrt{z}$ prende i due suoi diversi valori vengono a contatto e girando attorno ai punti di diramazione si "scivola" da un piano nell'altro (vedi fig.1.8). Più complessa è la situazione del logaritmo, dove il numero di piani complessi costituenti la superficie di Riemann sono infiniti, andando a costituire una struttura tipo "scala a chiocciola" caratterisitica dei questo tipo di singolarità di diramazione (vedi fig.1.9).

Altre funzioni possono avere superfici di Riemann anche molto complicate (vedi per esempio fig.1.10).

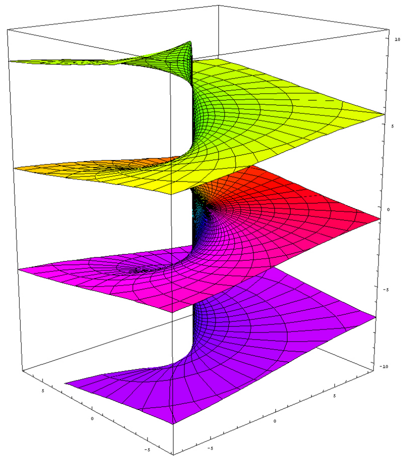

Figura 1.9: Superficie di Riemann $\mathcal{R}$ per il logaritmo

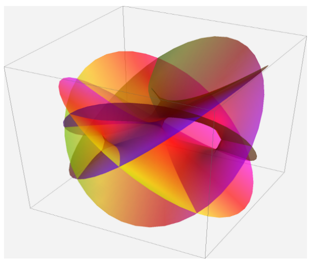

Figura 1.10: Superficie di Riemann $\mathcal{R}$ per la funzione $\sqrt{z^2 + \frac{1}{z}}$