共形映射

我们希望以留数定理为出发点，借助拓扑学优雅地建立辐角原理等一系列复分析的经典结果．关键在于如何用围道积分估计零点个数，进而借助纯复分析的手段证明开映射定理和逆映射定理，这在许多资料中是借道多元微分学的捷径[1]做到的．尽管标题似有挂羊头卖狗肉之嫌，但这些内容确实是共形映射理论的基石．

前置知识

分析方面的铺垫必不可少．诸如复微分、全纯函数、亚纯函数、幂级数、线积分（尤其是同伦不变性）等等，这些基本是本科复变课都会教的内容，也可在 [1] 和 [2] 中找到完整的理论．

同时，读者至少应了解基本群、同伦、覆叠等拓扑学概念，这看似风马牛不相及，实则是复分析必需的脚手架．点集拓扑参阅 [4]．至于代数拓扑，Munkres 的书确实也够了，不过来都来了，为什么不直接上 Hatcher [5] 呢？

代数基本没有涉及，可能有微乎其微的群论和拿来附庸风雅的范畴论．如果实在不明白的话，你可以看 [6]．

本文大致依循了 [3] 的路径．

记号约定

$\mathbb{R}$ 是实数域．$\mathbb{C}$ 是复数域．I 是单位闭区间 $[0,1]$．

$\mathbb{C}^\times$ 是去原点复平面 $\mathbb{C}\backslash\{0\}$，也即复数乘法群．

单位开圆盘 $\{z\in\mathbb{C}\mid |z|<1\}$ 记为 $\mathbb{D}$．单位圆 $\{z\in\mathbb{C}\mid |z|=1\}$ 记为 $\mathbb{S}$ 或 $\partial\mathbb{D}$．

$\mathbb{D}(z,r)$ 和 $z+r\mathbb{D}$ 都表示复平面上以 z 为圆心 r 为半径的开圆盘，$\mathbb{S}(z,r)$ 类似．

[1]这样做没什么不严谨的地方，但终究只是权宜之计．而且纯复分析能达到的结论反而更强．

拓扑学拾遗

作为集合，复数集 $\mathbb{C}$ 无异于 $\mathbb{R}^2$，$\mathbb{C}$ 的拓扑结构就是 $\mathbb{R}^2$ 上的积拓扑．准确地说，存在典范的同胚

$$\mathbb{C} \to \mathbb{R}^2, \qquad a + bi \mapsto (a, b).$$

这允许我们将 Euclid 空间的拓扑学运用到复分析中来. 道路 f 是指一个满足 $f(0) = f(1)$ 的连续函数 $f : I \to \mathbb{C}^\times$．如果还有 $f(0) = f(1)$，就称之为回路.

对于 $n \in \mathbb{Z}$，定义 $\mathbb{S}$ 上的光滑回路

$$\omega_n : I \to \mathbb{S}, \quad t \mapsto e^{2n\pi it} = \cos 2n\pi t + i \sin 2n\pi t.$$

容易验证 $[\omega_n] = [\omega_1]^n$，这里方括号表示同伦类，幂运算是在基本群 $\pi_1(\mathbb{S})$ 中做累乘.

定理 1. 存在群同构 $\Psi : \pi_1(\mathbb{S}) \to \mathbb{Z}$ 使得 $\Psi([\omega_1]) = 1$，更一般地，$\Psi([\omega_n]) = n$.

证明. 拓扑学常识. □

$\mathbb{S}$ 是 $\mathbb{C}^\times$ 的形变收缩核，形变收缩由

$$\mathbb{C}^\times \times I \to \mathbb{C}^\times, \quad (z, t) \mapsto (1 - t)z + \frac{tz}{|z|}$$

给出，所以 $\mathbb{S}$ 与 $\mathbb{C}^\times$ 同伦等价，定义收缩

$$\eta : \mathbb{C}^\times \to \mathbb{S}, \quad z \mapsto \frac{z}{|z|}.$$

设 ϕ 是 $\mathbb{C}^\times$ 中的一条回路，用 $\eta \circ \gamma$ 表示 η 对 γ 的推出，它是 $\mathbb{S}$ 中的回路 $t \mapsto \eta(\gamma(t))$. η 诱导群同构

$$\pi_1(\mathbb{C}^\times) \to \pi_1(\mathbb{S}) \to \mathbb{Z}, \quad [\phi] \mapsto [\eta \circ \phi] \mapsto \Psi([\eta \circ \phi]).$$

定义 ϕ 的卷绕数 $W(\phi) := \Psi([\eta \circ \phi])$. 换句话说, 若 ϕ 在 $\mathbb{C}^\times$ 中同伦于 ω_n, 那么 $W(\phi) = n$.

这样定义卷绕数胜在简洁，而另一种涉及积分的等价定义也是常用的．鉴于不可微的道路在复分析中用处不大，今后我们约定「道路」和「回路」总是指分段连续可微的道路（即分段 C^1），除非另有说明.

定理 2. 设 ϕ 是 $\mathbb{C}^\times$ 中的一条回路，卷绕数有计算公式

$$W(\phi) = \frac{1}{2\pi i} \oint_\phi \frac{d\zeta}{\zeta}.$$

在证明之前，引入一个极其重要的引理：线积分的同伦不变性．其证明与 Poincaré 引理有关，篇幅所限不再赘述．我们把复平面上的非空连通开集叫做区域.

引理 1. 设 f 是区域 U 上的全纯函数，ϕ 和 φ 是 U 中的两条同伦回路，则

$$\oint_\phi f = \oint_\varphi f.$$

类似地，若 η 和 η' 是 U 中的两条定端同伦道路，则

$$\int_\eta f = \int_{\eta'} f.$$

□

现在证明原定理.

证明. 设 $W(\phi) = n$. 因为 $\phi \simeq \omega_n$, 根据同伦不变性有 $\displaystyle\oint_\phi \frac{d\zeta}{\zeta} = \oint_{\omega_n} \frac{d\zeta}{\zeta}$.

于是只需证 $2n\pi i = \displaystyle\oint_{\omega_n} \frac{d\zeta}{\zeta}$. 直接计算积分

$$\oint_{\omega_n} \frac{d\zeta}{\zeta} = \int_0^1 \frac{2n\pi i e^{2n\pi i t}}{e^{2n\pi i t}} dt = \int_0^1 2n\pi i dt = 2n\pi i,$$

证毕. □

直观地说，假设我们在原点放置一个手拿计数器的观察者，而一个质点在复平面上沿着某条道路运动. 因为质点很小，观察者不知道他到质点的距离. 注意卷绕数只有当道路不过原点时才有意义，这就是说质点不会「撞上」观察者. 在时间从 0 变到 1 的过程中，在观察者看来，质点围着它旋转. 每当它逆时针转了一周，观察者就在计数器上往后拨一个数（比如从 1 数到 2）；反之，顺时针一周则往前拨一个数. 这样，在质点停止时，计数器上的数字就是卷绕数.

卷绕数有一个简单的推广. 给定复数 z，我们可将道路 ϕ 平移，得到一条新的道路 $t \mapsto \phi(t) - z$，记之为 $\phi - z$. 若回路 ϕ 不过点 z，那么 $\phi - z$ 就不过原点. 由此定义 ϕ 关于 z 的卷绕数 $W(\phi; z) := W(\phi - z)$.

如果每个点的卷绕数都毫无联系，那就太糟糕了. 好在卷绕数 $W(\phi; z)$ 实际上只和 z 在 $\mathbb{C}\backslash\phi(I)$ 中所在的道路连通分支有关. 若 $\mathbb{C}\backslash\phi(I)$ 中存在 z 到 w 的道路 γ，那么容易验证 $(t, s) \mapsto \phi(t) - \gamma(s)$ 是 $\phi - z$ 到 $\phi - w$ 在 $\mathbb{C}^\times$ 中的同伦，因此 $W(\phi - z) = W(\phi - w)$.

1. 留数定理

设 f 是区域 U 上的亚纯函数. 对于任取的 $z_0 \in U$, f 可在 z_0 的一个足够小的去心邻域 $\mathbb{D}(z_0, r)\backslash\{z_0\}$ 内展开为 Laurent 级数

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n (z - z_n)^n,$$

我们称负一项的系数 a_{-1} 为 f 在 z_0 处的留数, 记为 $\operatorname{Res}(f; z_0)$.

熟知 Laurent 级数的系数可以用围道积分计算:

$$\operatorname{Res}(f; z_0) = a_{-1} = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\partial\mathbb{D}(z_0,r)} f(\zeta)\, d\zeta,$$

这样一来, 「留数」一词的来历也就显而易见了, 它就是在某点附近绕一圈积分后还留下的数.

Jordan 曲线是指平面上一条不发生自交的回路. 或者无聊地说, 它是这样一条回路 $\phi : I \to \mathbb{C}$, 满足 $\phi|_{[0,1)}$ 是单射. 称拓扑空间 X 是单连通的, 如果 X 是道路连通的, 且 X 的基本群 $\pi_1(X)$ 是平凡群.

我们只打算留数定理在单连通区域上的 Jordan 曲线的情形, 这暂时够用了. 留数定理指出, 沿一条 Jordan 曲线的积分是其内部各极点的留数之和. 注意, 亚纯函数的极点集是离散的闭集, 而回路总是紧的, 它的内部自然也是有界的. Bolzano–Weierstrass 定理指出有界闭集与离散闭集的交有限, 因此只有有限多个极点被回路「圈住」了.

看似天衣无缝的说法. 但是到底什么是曲线的内部? 这不是杞人忧天. 它被称为 Jordan 曲线定理, 在二十世纪初才乘着代数拓扑的春风得到圆满解决.

以下的三条定理, 证明不会给出. [4] 在不涉及同调群的前提下证明了定理 3 和引理 2, 也说明了 Jordan 曲线关于内部的卷绕数是 ± 1, 这基本足够. [5] 用同调群的方法简洁地证明了 Jordan 曲线定理. 至于 Osgood–Schoenflies 定理, 它实在太复杂了, 感兴趣的读者可移步 [8] 或 [9].

定理 3 (Jordan). 设 γ 是一条 Jordan 曲线, Γ 是它的像 [2]. 则 $\mathbb{C}\backslash\Gamma$ 恰好有两个连通分支 [3], 其中一个是有界开集, 称为 Γ 的内部, 记作 $\operatorname{Int}(\Gamma)$; 另一个是无界开集, 称为 Γ 的外部, 记作 $\operatorname{Ext}(\Gamma)$. 二者的边界都是 Γ. □

Jordan 曲线定理有更强的版本, 一般称为 Osgood–Schoenflies 定理, 不同于前者基于同调群的简洁证明, 后者需要用到多边形逼近等较为繁琐的几何拓扑方法.

定理 4 (Osgood–Schoenflies). 沿用上述记号, 存在同胚 $\Phi : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ 将 Γ 映至 $\mathbb{S}$, Γ 的内部映至 $\mathbb{D}$, Γ 的外部映至 $\mathbb{C}\backslash\overline{\mathbb{D}}$. □

卷绕数在某种程度上是拓扑不变的. 取定曲线内部某点 $p = \Phi^{-1}(0)$, 它诱导基本群的同构 $\Phi^* : \pi_1(\mathbb{C}\backslash\{p\}) \cong \pi_1(\mathbb{C}^\times)$, 这不外乎是 $\mathbb{Z}$ 的自同构 [4].

[2] 不致混淆时, 也用 γ 表示 γ 的像 $\gamma(I)$.

[3] $\mathbb{C}$ 中的开集局部道路连通. 所以 $\mathbb{C}\backslash\Gamma$ 的连通分支和道路连通分支是一回事.

[4] 取一个足够小的 r 使 $\overline{\mathbb{D}}(p, r) \subset \operatorname{Int}(\Gamma)$, 则曲线 $t \mapsto p + r\omega_1(t)$ 所确定的同伦类是 $\pi_1(\mathbb{C}\backslash\{p\})$ 的生成元,

注意循环群的同构总是把生成元映至生成元. 要么 Φ^* 将 1 映到 -1, 要么它是恒等同构. 我们说后一种情况 Φ 保持曲线的定向. 如果 Φ 不保定向, 注意共轭 $k: a+bi \mapsto a-bi$ 也不保定向，那么 $k\circ\Phi$ 反而是保定向的．我们因而总是假设 Φ 保定向.

易见 $\Phi\circ\gamma$ 是 Jordan 曲线，而以下引理表明 $\Phi\circ\gamma$ 相对于原点的卷绕数是 ± 1．由此立见取 $a\in \mathrm{Int}(\gamma)$，则 $W(\gamma,a)=W(\Phi\circ\gamma)=\pm 1$；取 $b\in\mathrm{Ext}(\Gamma)$，则 $W(\gamma,b)=0$．称 $W(\gamma,a)=1$ 为 γ 正定向（逆时针向）；$W(\gamma,a)=-1$ 为 γ 负定向（顺时针向）.

引理 2. 设 ϕ 是 $\mathbb{S}$ 上的回路，$\phi|_{[0,1)}$ 是单射，则 ϕ 同伦于 ω_1 或 ω_{-1}.

证明. 我们不妨认为 $\phi(0)=\phi(1)=1$，因为总是可以通过连续的旋转将起点移动到 1 得到一条同伦回路．熟知

$$p:\mathbb{R}\to\mathbb{S},\quad t\mapsto e^{2\pi it}$$

是覆叠映射，将 ϕ 提升为连续映射 $\hat\phi: I\to\mathbb{R}$，使 $\hat\phi(0)=0$，$\hat\phi(1)=n\in\mathbb{Z}$，$p\circ\hat\phi=\phi$. 那么 ϕ 同伦于 ω_n.

因为 ϕ 在 $(0,1)$ 上单射，所以 $\hat\phi$ 在 $(0,1)$ 上单射.

假若 $n=0$，$\hat\phi$ 当然不可能恒为零．则存在 $t_0\in(0,1)$ 使 $\hat\phi(t_0)\neq 0$，由介值定理知存在 $t_1\in(0,t_0)$ 和 $t_2\in(t_0,1)$ 使 $\hat\phi(t_1)=\hat\phi(t_2)=t_0/2$，矛盾.

假若 $n\geq 2$，则由介值定理存在 $t_1,t_2\in(0,1)$ 使 $\hat\phi(t_1)=0.5$，$\hat\phi(t_2)=1.5$．但这导致 $\phi(t_1)=p(0.5)=1=p(1.5)=\phi(t_2)$，矛盾．$n\leq -2$ 的情况类似，证毕．□

Jordan 曲线的性质远不止此. 定理 5 常常被视为自明, 乃至作为单连通的定义 [5], 然而证明也并非易事.

定理 5. 设 U 是 $\mathbb{C}$ 上的单连通区域，γ 是 U 内的一条 Jordan 曲线，则 $\mathrm{Int}(\gamma)\subset U$．□

我们现在可以给出留数定理的正式陈述.

定理 6. 设 f 是单连通区域 U 上的亚纯函数，γ 是 U 上的正定向 Jordan 曲线，γ 不经过 f 的极点．将 γ 内部的极点可被列举为 $z_1,\cdots,z_n$，且

$$\frac{1}{2\pi i}\oint_\gamma f(\zeta)\,d\zeta=\sum_{j=1}^n \mathrm{Res}(f;z_j).$$

证明. 最困难的部分已在上面几则拓扑学结论里处理了，主要的思路是用减法磨去极点.

设离散的闭集 $P\subset U$ 是 f 的极点集．设 $V=\mathrm{Int}(\gamma)$ 的内部，则 $\overline{V}$ 同胚于 $\mathbb{D}$，故 $\overline{V}$ 是紧的单连通集且含于 U．因为极点离散分布，$\overline{V}$ 中只能有有限个极点，列举为 $Q=\{z_1,\cdots,z_n\}\subset P$．注意到 $P\backslash Q=P\backslash V$ 是闭集．根据度量空间的正则性可取 $\overline{V}$ 的开邻域 $\Omega\subset U$ 使 Ω 与 $P\backslash Q$ 不交.

现在将 f 视为 Ω 上的亚纯函数，在每个 z_j 处构造 Laurent 展开

$$f(z)=\sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k^{(j)}(z-z_j)^k,$$

把它对应到 1 给出典范的同构 $\pi_1(\mathbb{C}\backslash\{p\})\cong\mathbb{Z}$．我们总是借助这个同构来用整数表示基本群的元素.

[5] “morally wrong but technically correct”.

取其主部 $h_j(z)=\sum\limits_{k=-\infty}^{-1}a_k^{(j)}(z-z_j)^k$，然后构造

$$g(z)=f(z)-\sum_{j=1}^{n}h_j(z),$$

显而易见 g 不仅是 Ω 上的亚纯函数，而且每个 z_j 作为 g 的奇点都是可去的，将 g 延拓为 Ω 上的全纯函数 $\hat{g}$. 因为 $\overline{V}$ 单连通，γ 可在 $\overline{V}$ 中缩至一点，那么当然也能在 Ω 中缩至一点，故 $\hat{g}$ 在 γ 上的积分为零.

将 h_j 视为 Ω 上的亚纯函数，其具有唯一的极点 z_j，因为 γ 关于 z_j 的卷绕数是 1，所以 γ 同伦[6] 于 z_j 附近的某个半径足够小的正定向圆 $\partial\mathbb{D}(z_j,r_j)$，这说明 h_j 沿 γ 积分得到的就是 $\mathrm{Res}(h_j;z_j)$.

直接计算积分:

$$\begin{aligned}0&=\oint_\gamma\hat{g}(z)dz=\oint_\gamma g(z)dz=\oint_\gamma[f(z)-\sum_{j=1}^{n}h_j(z)]dz\\&=\oint_\gamma f(z)dz-\sum_{j=1}^{n}\oint_\gamma h_j(z)dz\\&=\oint_\gamma f(z)dz-2\pi i\sum_{j=1}^{n}\mathrm{Res}(h_j;z_j),\end{aligned}$$

证毕. □

留数最广为人知的用途是计算积分和级数. 计算导向的方法论无关文章主旨，但有一些运算律必须注明. 先回忆零点重数和极点阶数的定义.

设 f 是区域 U 上不恒为零的的亚纯函数，设它在 $w\in U$ 处的 Laurent 级数为 $f(z)=\sum\limits_{k=n}^{\infty}a_k(z-w)^k$，其中 $a_n\neq 0$，则记 $\mathrm{ord}(f;w)=n\in\mathbb{Z}$. 说穿了，$n$ 就是 Laurent 级数非零项的最低次数. 因为亚纯函数无本质奇点，而且非零条件确保至少有一个非零项，所以 n 总是有意义.

当 $n<0$ 时，称 w 是 f 的 $|n|$ 阶极点；当 $n>0$ 时，称 w 是 f 的 $|n|$ 重零点.

命题. 设 w 是 f 的一阶极点，则 $\mathrm{Res}(f;w)=\lim\limits_{z\to w}(z-w)f(z)$.

证明. 设 $f(z)=b(z-w)^{-1}+\sum\limits_{k=0}^{\infty}a_k(z-w)^k$，则

$$f(z)(z-w)=b+\sum_{k=0}^{\infty}a_k(z-w)^{k+1},$$

显而易见 $\lim\limits_{z\to w}(z-w)f(z)=b=\mathrm{Res}(f;w)$. □

[6]一个细节. 这个同伦可以完全处于 $\overline{V}-\{z_j\}$ 内，因为 Schoenflies 定理告诉我们在 $\pi_1(\overline{V}\backslash\{z_j\})\cong\mathbb{Z}$ 中 $[\gamma]=1=[\partial\mathbb{D}(z_j,r_j)]$.

命题. 设 $\operatorname{ord}(f;w)=0$，$\operatorname{ord}(g;w)=1$，则 $\operatorname{Res}(f/g;w)=\dfrac{f(w)}{g'(w)}$.

证明. 由 $\operatorname{ord}(g;w)=1$ 知 $\lim\limits_{z\to w}\dfrac{g(z)}{z-w}\neq 0$，因而

$$A := \lim_{z\to w}(z-w)\frac{f(z)}{g(z)} = \frac{\lim_{z\to w} f(z)}{\lim_{z\to w}[g(z)/(z-w)]}$$

存在, 所以 w 是 f/g 的一阶极点[7]. 上一条性质表明 $\operatorname{Res}(f/g;w)=A$，又 $\lim\limits_{z\to w}\dfrac{g(z)}{(z-w)}=g'(z)$，这是导数的定义. □

[7]其实 $\operatorname{ord}(fg)=\operatorname{ord}(f)+\operatorname{ord}(g)$，$\operatorname{ord}(f/g)=\operatorname{ord}(f)-\operatorname{ord}(g)$.

2. 辐角原理

我们将借助留数统计零点和极点，这有助于我们刻画局部的共形映射.

对于 f 的零点集 $N=\{w_1,\cdots,w_n\}$，定义计重数零点数 $\#_{\mathrm{M}}(N)=\sum_{j=1}^{n}\operatorname{ord}(f;w_j)$.

设 f 的导函数为 f'，它是 U 上的亚纯函数. 那么 $\dfrac{f'}{f}$ 也是 U 上亚纯函数. 一个简单的观察将成为沟通留数和重数（或阶数）的桥梁.

引理 3. 对任意的 $w\in U$ 有

$$\operatorname{Res}(\frac{f'}{f};w)=\operatorname{ord}(f;w).$$

证明. 我们只研究 $w=0$ 的情况，一般情况将级数中的 z 代换为 $(z-w)$ 即可. 分三种情况讨论.

若 $\operatorname{ord}(f;0)=0$，则可认为 f 在原点附近非零且全纯，从而 f'/f 全纯，自然有 $\operatorname{Res}(f'/f;w)=0$.

若 $\operatorname{ord}(f;0)=n>0$，则设

$$f(z)=\sum_{k=n}^{\infty}a_kz^k=z^n\sum_{k=0}^{\infty}a_{k+n}z^k,$$

$$f'(z)=\sum_{k=n}^{\infty}ka_kz^{k-1}=z^{n-1}\sum_{k=0}^{\infty}(k+n)a_{k+n}z^k,$$

$$\frac{f'(z)}{f(z)}=\frac{1}{z}\cdot\frac{na_n+\sum_{k=1}^{\infty}(k+n)a_{k+n}z^k}{a_n+\sum_{k=1}^{\infty}a_{k+n}z^k}=:\frac{h(z)}{z}.$$

ord 的定义保证 $a_n\neq 0$. h 在原点附近全纯，$h(0)=n$，$z\mapsto z$ 的导数是 1.

$$\operatorname{Res}(f'/f;0)=\frac{h(0)}{1}=n.$$

若 $\operatorname{ord}(f;0)=-n<0$，则 f 可写为 $f(z)=\dfrac{h(z)}{z^n}$ 的形式，其中 h 在原点附近非零全纯.

$$\frac{f'(z)}{f(z)}=\frac{[h'(z)z^n-nz^{n-1}h(z)]/z^{2n}}{h(z)/z^n}=\frac{h'(z)}{h(z)}-\frac{n}{z}.$$

$z\mapsto\dfrac{h'(z)}{h(z)}$ 在 0 附近全纯. $-\dfrac{n}{z}$ 加上一个在 0 附近全纯的函数不会改变 Laurent 级数的主项，自然也不改变留数. 所以

$$\operatorname{Res}(f'/f;0)=\operatorname{Res}(-\frac{n}{z};0)=-n.$$

证毕. □

在这么多铺垫之后，我们得到留数定理的直接推论，它允许我们用围道积分来估计某一区域内的计重数零点数. 这给出一个统计全纯函数零点的数值方法，然而也并非没有瑕疵：高阶零点会被重复统计.

定理 7. 设 f 是单连通区域 U 上的全纯函数，ϕ 是 U 上的一条不经过 f 的零点的正定向 Jordan 曲线，则 $\mathrm{Int}(\phi)$ 中 f 的计重数零点数为 $\displaystyle\oint_\phi \frac{f'(\zeta)}{f(\zeta)}\,d\zeta$.

离大名鼎鼎的辐角原理已经很近了．换一个更几何的角度看，以上定理中的积分实为 $\mathbb{C}^\times$ 中的道路 $f\circ\phi$ 的卷绕数.

引理 4. $\displaystyle\oint_\phi \frac{f'(\zeta)}{f(\zeta)}\,d\zeta = W(f\circ\phi;0)$.

证明. 用围道积分的定义展开就行了．定理 2 给出

$$W(f\circ\phi;0)=\oint_{f\circ\phi}\frac{d\zeta}{\zeta}=\int_0^1\frac{(f\circ\phi)'(t)}{f\circ\phi(t)}dt=\int_0^1\frac{f'(\phi(t))\phi'(t)}{f(\phi)(t)}dt.$$

另一方面

$$\oint_\phi\frac{f'(\zeta)}{f(\zeta)}\,d\zeta=\int_0^1\frac{f'(\phi(t))\phi'(t)}{f(\phi(t))}dt.$$

□

定理 8 (辐角原理)**.** 设 f 是单连通区域 U 上的全纯函数，ϕ 是 U 上的一条不经过 f 的零点的正定向 Jordan 曲线，则 $\mathrm{Int}(\phi)$ 中 f 的计重数零点数为 $W(f\circ\phi;0)$.

附录中会给出一些用辐角估计零点的实例．我们目前只关心它的理论价值．以下引理粗看繁冗，细观则妙不可言．它刻画了零点的「分裂」现象：在 n 阶零点附近，将观察到全纯函数的纤维 [8] 分裂成 n 元集，不多不少；反过来看，n 阶零点就是说，原本是 n 元集的纤维 $f^{-1}(b)$，在 b 接近 0 的过程中，内部的 n 个元素在几何上不断靠近，最后终于在 $f^{-1}(0)$ 中「融合为一」．事实上，这个结果还并不完整，本质上 f^{-1} 可看作一个有较好的解析性质的「多值[9]」函数，这个性质我们留待引入万有覆叠等代拓手法之后做比较统一的处理.

引理 5. 设 $f:U\to\mathbb{C}$ 是区域 $U\subset\mathbb{C}$ 上的全纯函数，且 f 不是常值函数．对于 $a\in U$，设 $f(a)=b$，$\mathrm{ord}(f(z)-b;a)=n$．则存在 a 的开邻域 $V\subset U$，使得 $W:=f(V)$ 是 b 的开邻域，且对任意的 $w\in W\backslash\{b\}$，$f^{-1}(w)\cap V$ 恰好是 n 元集.

证明. 取 $\overline{\mathbb{D}}(a,r_1)\subset U$ 使 $f(z)-b$ 在 $\overline{\mathbb{D}}(a,r_1)$ 上有且只有 a 一个零点, 且 f' 在 $\overline{\mathbb{D}}(a,r_1)\backslash\{a\}$ 上恒不等于零．这当然可以做到，因为全纯函数的零点是离散的．于是 $f(z)-b$ 将正定向 Jordan 回路 $\partial\mathbb{D}(a,r_1)$ 推出为一条 $\mathbb{C}^\times$ 中的回路 γ．注意 $\Gamma:=\gamma(I)$ 是紧集的连续像，故而 Γ 是紧的．因为紧集 Γ 和紧集 $\{0\}$ 不交，所以它们有正的距离．换句话说，可以构造 0 的邻域 $r_2\mathbb{D}$ 使 $r_2\mathbb{D}$ 与 Γ 不交．由于 $\partial\mathbb{D}(a,r_1)$ 内部零点计重数个数为 n，根据辐角原理，$W(\gamma)=n$.

命 $W=b+r_2\mathbb{D}$ ，它是 b 的开邻域．任取 $w\in W$，则 $w-b\in r_2\mathbb{D}$．因为 $r_2\mathbb{D}$ 道路连通，所以 $r_2\mathbb{D}$ 完全含于 $\mathbb{C}\backslash\Gamma$ 的某一个道路连通分支中，在拓扑拾遗部分我们已注明同

[8]纤维就是单点的原像.

[9]个人不喜欢这个名字．一个初步的例子是 $z\mapsto z^n$ 诱导出的 n 次方根 $z\mapsto\sqrt[n]{z}$，其中根号的定义尚待澄清.

一道路连通分支中卷绕数不变，所以 $W(\gamma, w-b) = W(\gamma, 0) = n$. 因为 $\partial\mathbb{D}(a, r_1)$ 在函数 $f(z) - w$ 下的像恰好是 $\gamma - (w-b)$，所以 $f(z) - w$ 在 $\mathbb{D}(a, r_1)$ 中有 n 个计重数零点. 我们对于 $f'(z) \neq 0$ 的约束保证这些零点都是一阶的，从而这 n 个零点互不相同，这就是说在 $\mathbb{D}(a, r_1)$ 中有且仅有 n 个 z 使 $f(z) = w$. 取 $V := f^{-1}(W) \cap \mathbb{D}(a, r_1)$，显然 V 是 a 的开邻域，证毕. □

引理 5 蕴含开映射定理.

定理 9. 设 f 在开集 $U \subset \mathbb{C}$ 上全纯，那么 $f(U) \subset \mathbb{C}$ 是开集. 如果 U 还是连通的，那么 $f(U)$ 亦然.

证明. 这几乎和引理 5 无异，不过有些细节容易忽视. 要证明 $f(U)$ 是开集，只需对每个 $w \in f(U)$ 构造开邻域 $W \subset f(U)$. 任取 $z \in U$ 使得 $f(z) = w$，再取 $\mathbb{D}(z, r) \subset U$. 将 f 视为区域 $\mathbb{D}(z, r)$ 上的全纯函数，引理 5 给出 w 的开邻域 $W \subset f(\mathbb{D}(z, r)) \subset f(U)$. 关于连通性的断言是连续函数的性质. □

定理 10 (Hurwitz). 设 $(f_n)_{n\geq 1}$ 是区域 Ω 上的全纯函数列，其局部一致收敛至函数 f，则 f 在 Ω 上全纯. 假如每个 f_n 在 Ω 上都无零点，则 f 要么恒等于零，要么在 Ω 上无零点.

证明. 首先，Weierstrass 收敛定理指出若区域 Ω 上的全纯函数列 f_n 局部一致收敛到 f，则 f 在 Ω 上全纯.

我们假设 f 不恒为零且在 Ω 上有零点. 众所周知非零全纯函数的零点是孤立的. 对于 f 的一个零点 w，取一个足够小的 $r > 0$ 使 f_n 在 $\mathbb{D}(w, 4r)$ 上一致收敛且 f 在 $\mathbb{D}(w, 4r)$ 上只有 w 一个零点，由辐角原理 $\displaystyle\oint_{\partial\mathbb{D}(w,2r)} \frac{f'(z)}{f(z)} dz$ 是一个正整数，它等于 f 在 $\mathbb{D}(w, 2r)$ 内零点的计重数个数，即 w 的阶.

取环形区域 $V = \mathbb{D}(w, 3r) \backslash \overline{\mathbb{D}}(w, r)$. 在紧集 $\overline{V}$ 上 $|f|$ 恒不为零，从而能取得正的最小值 $2M > 0$ 和最大值 $K > 0$. 由一致收敛性，存在 N 当 $n \geq N$ 时 $|f(z) - f_n(z)| < M$ 在 V 上每一点都成立，此时 V 上恒有 $M < |f_n(z)| < K + M$. 考虑零点计数积分 $\displaystyle\oint_{\partial\mathbb{D}(w,2r)} \frac{f_n'(z)}{f_n(z)} dz$，因 f_n 无零点，故此积分值也必为零.

我们希望证明全纯函数列 $\dfrac{f_n'}{f_n}$ 在 V 上一致收敛到 $\dfrac{f'}{f}$. 注意到 $n \geq N$ 时

$$\left| \frac{f'(z)}{f(z)} - \frac{f_n'(z)}{f_n(z)} \right| = \frac{|f_n(z)f'(z) - f(z)f_n'(z)|}{|f(z)f_n(z)|} \leq \frac{|f_n(z)f'(z) - f(z)f_n'(z)|}{M^2},$$

$$|f_n(z)f'(z) - f(z)f_n'(z)| \leq L|f_n(z) - f(z)| + (K + M)|f_n'(z) - f'(z)|,$$

其中 $L = \max\limits_{z\in\overline{V}} |f'(z)|$. 于是我们只需说明 f_n' 在 V 上一致收敛到 f'.

在 $z \in V$ 的邻域 $\overline{\mathbb{D}}(z, \dfrac{r}{2}) \subset V$ 的边界上用 Cauchy 积分公式

$$|f'(z) - f_n'(z)| = \frac{1}{2\pi} \left| \oint_{\partial\mathbb{D}(z,\frac{r}{2})} \frac{f(\zeta) - f_n(\zeta)}{(\zeta - z)^2} d\zeta \right| \leq \frac{2 \max_{\zeta\in\mathbb{D}(w,4r)} |f(\zeta) - f_n(\zeta)|}{r}.$$

当 $n \to \infty$ 上式一致趋于零，V 上 $\dfrac{f_n'}{f_n}$ 的一致收敛性得证.

现在，由于一致收敛性，我们可以交换积分与极限，得到矛盾

$$\oint_{\partial\mathbb{D}(w,2r)} \frac{f'(z)}{f(z)}dz = \lim_{n\to\infty} \oint_{\partial\mathbb{D}(w,2r)} \frac{f_n'(z)}{f_n(z)}dz = 0.$$

证毕. □

Hurwitz 定理的结论并非画蛇添足，f 确实是可以恒为零的. 考虑 $f_n : z \mapsto z^n$，这列函数在 $\mathbb{D}\backslash\{0\}$ 上局部一致地收敛至 0.

定理 11 (Rouché). 设 γ 是单连通区域 U 上的一条正定向 Jordan 曲线，Γ 是它的像. 若 f, g 都是 U 上的全纯函数，γ 不经过 f 和 g 的零点，且 $|g(\zeta) - f(\zeta)| < |f(\zeta)|$ 对于 $\zeta \in \Gamma$ 恒成立，那么 f 和 g 在 $\operatorname{Int}(\Gamma)$ 中的计重数零点数相同.

证明. 根据辐角原理，其实就是证 $W(f\circ\gamma) = W(g\circ\gamma)$. 题设条件说明对于 $s \in I$ 有

$$|f(\zeta) + s[g(\zeta) - f(\zeta)]| \geq |f(\zeta)| - s|g(\zeta) - f(\zeta)| > 0.$$

我们断言 $f\circ\gamma$ 与 $g\circ\gamma$ 在 $\mathbb{C}^\times$ 中同伦，同伦映射由下式给定

$$\Phi : I \times I \to \mathbb{C}^\times, \quad (t, s) \mapsto f(\gamma(t)) + s[g(\gamma(t)) - f(\gamma(t))],$$

证毕. □

最后是喜闻乐见的代数基本定理.

定理 12 (d'Alembert–Gauss). 任何不为常数的多项式 $f \in \mathbb{C}[X]$ 在 $\mathbb{C}$ 中必有根，且根的个数（计重数）等于 f 的次数.

证明. 设 $\deg(f) = n \geq 1$，不失一般性认为 f 首项系数是 1. 设 $f(z) = z^n + g(z)$，其中 $g(z)$ 是 $n-1$ 次多项式，那么 z^n 是 $g(z)$ 的高阶无穷大. 准确地说，因为

$$\sup_{z\in r\mathbb{S}} \left|\frac{g(z)}{z^n}\right| = \sup_{z\in r\mathbb{S}} \left|\sum_{k=1}^{n} \frac{a_{n-k}}{z^k}\right| \leq \sup_{z\in r\mathbb{S}} \sum_{k=1}^{n} \left|\frac{a_{n-k}}{z^k}\right| = \sum_{k=1}^{n} \frac{|a_{n-k}|}{r^k},$$

故 $\lim\limits_{r\to\infty} \sup\limits_{z\in r\mathbb{S}} \left|\dfrac{g(z)}{z^n}\right| = 0$. 所以存在足够大的 $R > 0$，对任意的 $z \in R\mathbb{S}$ 有 $|z^n| > |g(z)|$. Rouché 定理说明 f 和 z^n 在 $R\mathbb{D}$ 上零点数相同，由带余除法知 f 最多也只能有 n 个计重数零点，因此 f 在 $\mathbb{C}$ 中有 n 个零点，此即欲证. □

3. 共形映射

本节中，U 和 V 总是表示复平面上的区域.

称 $f : U \to V$ 是从 U 到 V 的共形映射，若 f 是双射，且 f 和 f^{-1} 全纯. 顾名思义，共形映射有时也叫双全纯映射. 这个定义其实是冗余的. 先从局部的情况切入，我们现在要建立 $\mathbb{C}$ 上的逆映射定理. 回忆 $\mathbb{R}$ 上（更广泛地说，$\mathbb{R}^n$）的可微函数在 x 处微分不为零蕴含 x 附近是单射（从而局部可逆），但反过来则不然（考虑 $x \mapsto x^3$ 在 0 附近）；但复可微假设是如此的强有力，甚至能确保逆命题也成立.

定理 13. 设 $f : U \to \mathbb{C}$ 是 U 上的全纯函数. 任取 $a \in U$，以下命题等价：
(i) $f'(a) \neq 0$.
(ii) 存在 a 的邻域 $\Omega \subset U$，使得 f 在 Ω 上是单射.

证明. (i)⇒ (ii). 若 $f'(a) \neq 0$，则 w 是 $f(z) - f(a)$ 的 1 阶零点. 于是引理 5 中谈及的纤维全都变成了单点集，此时 f 诱导 a 的某个邻域 Ω 到 W 的双射. 将 W 用包含映射嵌入 $\mathbb{C}$ 就得到单射 $f|_\Omega$.

(ii)⇒ (i). 用反证法. 假设 $f'(a) = 0$，则 a 是 $f(z) - f(a)$ 的一个不低于 2 阶的零点. 在引理 5 的证明中我们可额外要求 r_1 足够小以确保 $\mathbb{D}(a, r_1) \subset \Omega$，接着构造 $f(a)$ 的邻域 W，任意的 $w \in W \setminus \{a\}$ 在 $\mathbb{D}(a, r_1)$ 中的原像都至少有两个元素，这时 $f|_\Omega$ 不可能是单射. □

显然在定理 13 中我们可以取一个更小的 $\Omega' \subset \Omega$ 确保其连通，这时候 f 当然也给出 Ω' 上的全纯单射，但这个说法不够时髦. 如果 f 在区域 $V \subset \mathbb{C}$ 上是全纯的单射，则称 f 在 V 上单叶. 逆映射定理给出以下性质，注意共形映射当然总是局部单叶的.

引理 6. 若 $f : U \to V$ 是共形映射，则 f' 在 U 上恒不为零.

逆命题不成立，例如 $z \mapsto z^2$ 在 $\mathbb{C}^\times$ 上不是双射. 有趣的是，因为 Lagrange 中值定理的缘故，实值函数反而有类似的性质.

引理 7. $f : U \to V$ 是共形映射当且仅当 f 是全纯双射.

证明.「⇒」方向平凡. 下证「⇐」方向.

假设 f 是全纯双射. 开映射定理说明 f 不仅是连续双射，而且是开映射，则 f 必然是同胚. 命 $g : V \to U$ 为 f 的逆，则 g 是连续的. 任取 $b \in V$，设 $g(b) = a \in U$. f 在 a 处可微，引理 6 表明 $f'(a) \neq 0$.

我们断言 g 在 b 处可微. 在 $V \setminus \{b\}$ 中任取点列 $w_n \to b$，则 $z_n = g(w_n) \to a$.

$$g'(b) = \lim_{n\to\infty} \frac{g(w_n) - g(b)}{w_n - b} = \lim_{n\to\infty} \frac{z_n - a}{f(z_n) - f(a)} = \left(\lim_{n\to\infty} \frac{f(z_n) - f(a)}{z_n - a} \right)^{-1} = \frac{1}{f'(a)},$$

那么 g 处处可微，所以 g 全纯，证毕. □

共形映射的复合和逆显然还是共形映射，于是一切从 U 到自身的共形映射关于映射的复合成为一个群，记为 U 的全纯自同构群 $\mathrm{Aut}(U)$，简称自同构群．称 U 和 V 共形等价，若存在共形映射 $\phi: U \to V$．容易验证共形等价是一个等价关系．共形等价 ϕ 诱导群同构

$$\Phi: \mathrm{Aut}(U) \to \mathrm{Aut}(V), \quad g \mapsto \phi \circ g \circ \phi^{-1},$$

因此共形等价的区域有同构的自同构群（反之未必）．用范畴论的抽象黑话说或许最简洁：我们将全体复平面上的区域作为对象，以共形映射为态射，得到一个广群，在其中可构造共形等价类.

4. 全纯覆叠

我们假设读者了解代数拓扑中覆叠空间的基本理论.

定理 14. 设 U, V 都是复平面上的区域，$p : U \to V$ 是全纯的覆叠映射，X 是道路连通、局部道路连通的拓扑空间．取定基点 $z_0 \in V$ 和 $\tilde{z}_0 \in U$ 使 $p(\tilde{z}_0) = z_0$.

对于连续映射 $f : X \to V$，设 $f(x_0) = z_0$，$f^*(\pi_1(X, x_0)) \subset p^*(\pi_1(U, \tilde{z}_0))$，则存在唯一的连续映射 $\tilde{f} : X \to U$ 使 $\tilde{f}(x_0) = \tilde{z}_0$ 且 $p \circ \tilde{f} = f$.

这里只处理解析性问题：拓扑学家在研究映射向覆叠空间的提升准则时，可不在乎什么复结构或微分结构是否能被提升保持，但事实确实如此，只要覆叠映射和原映射都是解析的．本质上，这是因为覆叠映射的局部同胚结构还原了原映射的光滑性和解析性.

引理 8. 沿用以上记号，若 X 是复平面上的开集，f 全纯，则 $\tilde{f}$ 全纯.

若 $X = I$，f 是分段连续可微道路，则 $\tilde{f}$ 也是分段连续可微道路.

证明. 任取 $w \in V$，按覆叠空间定义存在 w 的开邻域 $W = \mathbb{D}(w, r_w) \subset V$ 被均匀覆叠．这就是说，$p^{-1}(W)$ 是一族开集 $\tilde{W}_n$ 的不交并（n 的取值范围取决于覆叠的层数），其中 p 限制在任何一个 $\tilde{W}_n$ 上都给出一个同胚．注意，根据上一节的讨论，p 的全纯性质导致这个同胚一定是共形映射.

假设 $X \subset \mathbb{C}$ 是开集，f 全纯．任取 $a \in X$，设 $b = f(a)$，取 b 的均匀覆叠开邻域 B，将 $p^{-1}(B)$ 分解为一族开集 $\tilde{B}_n$ 的无交并，设 $\tilde{f}(a) \in \tilde{B}_N$，而 $\phi : B \to \tilde{B}_N$ 是 $p|_{\tilde{B}_N}$ 的逆．那么 ϕ 是全纯的．取 $A := \mathbb{D}(a, r) \subset X$ 使 $\tilde{f}(A) \subset \tilde{B}_N$，易见 $\tilde{f}|_A = \phi \circ f|_A$，那么 $\tilde{f}$ 在 a 附近全纯．全纯是局部性质，a 是任取的，所以 $\tilde{f}$ 是全纯映射.

道路提升的情况类似，注意全纯同胚总是光滑微分同胚. □

实践中很多时候 X 压根就是单连通的．这时候 $f^*(\pi_1(X, x_0)) \subset p^*(\pi_1(U, \tilde{z}_0))$ 自动成立.

要将覆叠空间运用到复分析中，我们需要找一个具体的全纯覆叠．最常用的覆叠映射是指数函数.

定理 15. $\exp : \mathbb{C} \to \mathbb{C}^\times$ 是全纯覆叠，层数为 $\aleph_0$.

证明. 严格来讲,复指数函数是个水很深的东西,无论采取级数定义 $\exp(z) = 1 + z + \dfrac{z^2}{2} + \cdots$ 还是别的什么，都有一大堆性质需要证明[10]．从零开始造轮子不现实，只是讲个大概.

从 $e^{x+iy} = e^x(\cos y + i \sin y)$ 可见 $e^z = 1$ 当且仅当 $z = 2k\pi i\,(k \in \mathbb{Z})$，进而 $\exp(z) = \exp(w)$ 当且仅当 $(z - w)/2\pi i \in \mathbb{Z}$．易见这导致每一段横条带 $L(a, \pi) := \{x + iy \mid x \in \mathbb{R}, y \in (a - \pi, a + \pi)\}$ 上 $\exp$ 是单射.

任取 $w \in \mathbb{C}^\times$，因为 $\exp$ 是满的，所以存在 $x + iy$ 使 $\exp(x + iy) = w$．取 $L_n = L(y + 2n\pi, \pi)$，令 $U = \exp(L_0)$．开映射定理说明 U 是 w 的开邻域．U 被均匀覆盖了,

[10] 仅举一例：欧拉公式 $e^{i\pi} = -1$．你打算怎样定义 π?

因为容易证明 $\exp^{-1}(U)$ 恰好是 L_n 的不交并，exp 在每个 L_n 上都给出到 U 的全纯双射，进而是同胚．因为 L_n 取遍整数 n，所以该覆叠有可数层． □

我们现在给出对数函数主值分支 log 的拓扑定义，谓之主值，是因为它在 $(0,+\infty)$ 上的取值与中学熟知的实对数函数契合．

定义「割开的复平面」$\Omega = \mathbb{C}\backslash(-\infty,0]$，则 Ω 是单连通区域．考虑带基点的包含映射 $\iota : (\Omega,1) \to (\mathbb{C}^\times,1)$，它被带基点的覆叠 $\exp : (\mathbb{C},0) \to (\mathbb{C}^\times,1)$ 提升为全纯映射 $\log : \Omega \to \mathbb{C}$，满足 $\exp(\log(z)) = z$ 且 $\log(1) = 0$.

我们终于可以研究对函数取对数和开根号是什么意思了．

引理 9. 设 $f : U \to \mathbb{C}^\times$ 是单连通区域 U 上的全纯函数，则存在 U 上的全纯函数 $h : U \to \mathbb{C}$ 使 $f(z) = e^{h(z)}$.

证明．直接用全纯覆叠 exp 提升 f 即可．唯一要注意的一点是 h 并不是唯一确定的，事实上 h 有可数多个． □

定理 16. $k_n : z \mapsto z^n$ 是 $\mathbb{C}^\times$ 到 $\mathbb{C}^\times$ 的全纯覆叠，层数为 n.

证明．先对 k_n 做些初步观察．将 $w \in \mathbb{C}^\times$ 写成 $w = re^{i\theta}$ 的极坐标形式，其中 $r > 0$，辐角 $\theta \in \mathbb{R}$ 随意取定一个可能值．记 $\theta_k = (\theta + 2k\pi)/n$ $(0 \le k \le n-1)$，w 的 n 次方根可被列举为 $z_k = \sqrt[n]{r}e^{i\theta_k}$.

取 w 的 n 次方根 z_0，构造扇形区域

$$A_k = \{re^{i\theta} \mid r > 0,\, \theta_k - \pi/n < \theta < \theta_k + \pi/n\},$$

则 $W = k_n(A_0)$ 是 w 的开邻域，$k_n^{-1}(W)$ 被分解成 A_k 的无交并，易验证每个 A_k 上 k_n 都是单射，证毕． □

类似于 log 的定义，包含映射 $\iota : (\Omega,1) \to (\mathbb{C}^\times,1)$ 在覆叠 $k_n : (\Omega,1) \to (\mathbb{C}^\times,1)$ 下提升为全纯映射 $r_n : \Omega \to \mathbb{C}^\times$，使得 $[r_n(z)]^n = z$，$r_n(1) = 1$．它把正实数映到正的 n 次方根，符合我们对开根号的直觉，在不发生歧义的前提下，$r_n(z)$ $(z \notin (-\infty,0])$ 可以写成 $\sqrt[n]{z}$.

引理 10. 设 $f : U \to \mathbb{C}^\times$ 是单连通区域 U 上的全纯函数，则存在 U 上的全纯函数 $h : U \to \mathbb{C}^\times$ 使 $f(z) = [h(z)]^n$.

证明．用 k_n 提升 f．h 不是唯一的，可能的 h 有 n 个．

另一个进路是取对数 $g(z)$ 使 $f(z) = e^{g(z)}$ 然后令 $h(z) = e^{g(z)/n}$. □

现在给出引理 5 的新证明, 所得的结论实际上比引理 5 略强. 我们几乎可以说, 全纯函数在 n 阶零点附近的行为已经完全清楚了: 先是做一个共形映射, 然后复合一个 k_n.

定理 17. 设 $f: U \to \mathbb{C}$ 是区域 $U \subset \mathbb{C}$ 上的全纯函数, 且 f 不是常值函数. 对于 $a \in U$, 设 $f(a) = b$, $\mathrm{ord}(f(z)-b; a) = n$. 则存在 a 的开邻域 $V \subset U$ 和 $r > 0$, 使得 $f(V) = \mathbb{D}(b, r^n)$, 且在 V 上存在分解 $f(z) = [g(z)]^n + b$, 其中 g 是从 V 到 $\mathbb{D}(0, r)$ 的共形映射[11].

证明. 不妨设 $a = b = 0$, 一般情况可从 f 诱导 $\hat{f}: z \mapsto f(z+a) - b$ 然后研究 $\hat{f}$.

我们的任务是构造 f 的 n 次方根. 取 $r_1 > 0$ 使 f 在 $r_1\mathbb{D} \subset U$ 上展开为 Taylor 级数

$$f(z) = \sum_{k=n}^{\infty} c_n z^n = z^n \sum_{k=0}^{\infty} c_{k+n} z^k =: z^n h(z),$$

其中 $h(0) = c_n \neq 0$. 取足够小的 $r_2 \leq r_1$ 使 $h(r_2\mathbb{D}) \subset \mathbb{C}^\times$, 用 k_n 提升 h 得到 $q: r_2\mathbb{D} \to \mathbb{C}^\times$, $[q(z)]^n = h(z)$ 对任意 $z \in r_2\mathbb{D}$ 恒成立.

命 $g(z) = zq(z)$, 则在 $r_2\mathbb{D}$ 上 $f(z) = [g(z)]^n$. 注意 $g'(z) = q(z) + zq'(z)$, 由此 $g'(0) = q(0) \neq 0$. 用逆映射定理取 $r_3 \leq r_2$ 使 g 在 $r_3\mathbb{D}$ 上单叶. 设 $f(r_3\mathbb{D}) = k_n(g(r_3\mathbb{D})) = W$, 则 W 是 0 的开邻域. 选取 $r > 0$ 使 $r^n\mathbb{D} \subset W$, 显而易见 $r^n\mathbb{D}$ 在 k_n 下的原像恰好是 $r\mathbb{D}$. 最后令 $V = g^{-1}(r\mathbb{D}) \subset r_3\mathbb{D}$, 证毕. □

[11] 我们特别指出, 这说明 V 同胚于 $\mathbb{D}$, 而引理 5 甚至没法保证 V 是连通的.

附录

附录里基本是些滥竽充数的例子，不过在做题的时候可能还挺管用的[12].

用 Rouché 定理估计根的数目相对简单，这里随手举个例子．根的数目默认计重数.

例 1. 证明 $z^4-6z+3=0$ 在 $\{|z|<1\}$ 内有一个根，在 $\{1<|z|<2\}$ 内有三个根.

证明. 我们首先指出 $|z|=1$ 时有 $6|z|=6>4\geq|z^4+3|$，由 Rouché 定理知 $\mathbb{D}$ 中的零点数与 $f(z)=6z$ 相同，为 1.

而 $|z|\geq 2$ 时又有 $|z^4-6z|\geq 2|z^3-6|\geq 4>3$，所以 z^4-6z+3 剩下的三个零点（计重数）全都落在 $2\mathbb{D}\backslash\overline{\mathbb{D}}$ 内. □

有些情况没法用 Rouché 定理，我们还可以直接用辐角原理估计根的数目．大体上的思路 [13] 没什么难度，但我们得先把「辐角」是怎么一回事说清楚.

对于去原点复平面上的道路 $\phi: I\to\mathbb{C}^\times$，考虑 $\mathbb{C}^\times$ 到 $\mathbb{S}$ 的收缩 $\eta: z\mapsto\dfrac{z}{|z|}$. η 尽管不是复可微的，但却是实连续可微的，这已经足以保持道路的分段连续可微性，故可以定义卷绕数 $W(\phi)=\dfrac{1}{2\pi i}\displaystyle\int_{\eta\circ\phi}z^{-1}dz$.

覆叠空间的同伦提升定理保证我们总可以构造 $\eta\circ\phi$ 在 $\mathbb{S}$ 中的共端点同伦道路 $h: t\mapsto e^{i(at+b)}$，说白了 h 就是在单位圆上从 $\eta(\phi(0))$ 匀速、不走回头路地走到 $\eta(\phi(1))$. 因在全纯函数上的道路积分同伦不变，有

$$W(\phi)=\frac{1}{2\pi i}\int_h z^{-1}dz=\frac{a}{2\pi}\in\mathbb{R}.$$

不难验证当 ϕ 为回路时 $W(\phi)\in\mathbb{Z}$，与经典的回路卷绕数保持一致．注意

$$W(\phi_1*\phi_2)=W(\phi_1)+W(\phi_2).$$

给定复平面上的某条道路 $\varphi: I\to\mathbb{C}$，设 $\varphi(I)$ 含于区域 Ω，且存在 Ω 上的全纯函数 f 和 g，使得对一切 $z\in\varphi(I)$ 恒有 $f(z)\neq 0$ 和 $g(z)\neq 0$，并且 $|f(z)-g(z)|<|f(z)|$，我们就说在道路 φ 上 f 控制了 g．此时，注意到 $f\circ\varphi$ 和 $g\circ\varphi$ 是 $\mathbb{C}^\times$ 中的两条同伦道路，同伦由线性同伦 $f+t(g-f)$ 给定.

给定回路 ϕ 和如上所述的 g, 要计算 $W(g\circ\phi)$, 自然的想法是将之拆解为若干短道路 $\phi=\phi_1*\cdots*\phi_n$，在每一小段上寻找控制函数 f_i，然后用 $W(f_i\circ\phi_i)$ 近似 $W(g\circ\phi_i)$．这里存在一个问题，$f_i\circ\phi_i$ 和 $g\circ\phi_i$ 未必是共端的．为此，在起点处须用 $g_i(\phi_i(0))$ 到 $f(\phi_i(0))$ 的直道路 α_i 连接，终点处也相应地构造连接道路 β_i，则 $g\circ\phi_i$ 与 $\alpha_i*(f_i\circ\phi_i)*\beta_i$ 定端同伦，从而有

$$W(g\circ\phi)=\sum_{i=1}^n W(f_i\circ\phi_i)+\sum_{i=1}^n W(\alpha_i)+\sum_{i=1}^n W(\beta_i).$$

因为上式必须是一个整数，从而当后两项足够小，亦即始末端的辐角足够接近时，可以用第一项估计卷绕数．当然，第一项的求和也未必是整数，但我们只需对每一项以

[12] 毕竟是从作业里直接复制过来的（

[13] 虽然 Gamelin 的书我没翻过几页，但是我了解到这个方法确实得感谢 [7].

足够小的误差 r_i 找一个合适的估计 $w_i = W(f_i \circ \phi_i) + r_i$，使得 w_i 之和恰为整数，而余项的绝对值小于 1 即可．以下证明中出现的约等于，就是在这样的精度之下说的．

例 2. 设 α, β 是正实数，n 是正整数．考虑方程 $z^{2n} + \alpha^2 z^{2n-1} + \beta^2 = 0$．若 n 是偶数，则此方程恰有 $n-1$ 个根具有正的实部；若 n 是奇数，则此方程恰有 n 个根具有正的实部．

证明．令 $g(z) = z^{2n} + \alpha^2 z^{2n-1} + \beta^2$，先对 g 的零点分布做一些初步观察．在 $\mathbb{R}$ 上，求导知 g 先减后增，极小值点为负数，g 在 $\mathbb{R}$ 上的零点至多有两个，如果存在则必是负数．在虚轴 $i\mathbb{R}$ 上，$g(iy) = (\beta^2 + (-1)^n y^{2n}) + i((-1)^{n+1}\alpha^2 y^{2n-1})$，显然恒不为零．代数基本定理表明 g 的零点有 $2n$ 个，故存在足够大的实数 R 使得所有零点都包含在 $R\mathbb{D}$ 中．考察正定向半圆回路 Γ，它由 $R\mathbb{S}$ 在正实部半平面内的部分以及从 $-iR$ 到 iR 的线段构成．根据辐角原理，g 的实部为正的记重数零点等于卷绕数 $W(g \circ \Gamma)$．

将 Γ 拆分为半圆部分 ϕ_1 和直线段部分 ϕ_2. 对于 ϕ_1, 令 $f(z) = z^{2n}$, 则 f 是 $f-g$ 的高阶无穷大. 可取 R 充分大, 使 f 在 ϕ_1 上控制 g. 例如, 可以让 $|f(z)-g(z)| < \dfrac{|f(z)|}{100} = \dfrac{R^{2n}}{100}$. 此时衔接处的辐角变化可以忽略不计，我们有估计 $W(g \circ \phi_1) \approx W(f \circ \phi_1)$，后者无非是将 ϕ_1 的角速度放大了 $2n$ 倍，故 $W(f \circ \phi_1) = 2nW(\phi_1) = n$.

至于 $g \circ \phi_2$，若 n 为偶数，则道路从 $g(iR)$（第四象限某点）出发抵达 $g(-iR)$（第一象限某点），期间并未跨越虚轴，故 $W(g \circ \phi_1) < \dfrac{1}{2}$，与第一段求和取整知 $W(g \circ \phi_1) = n$.

若 n 为奇数，则 y 从 R 移动到 $-R$ 的过程中，$g(iy)$ 从第二象限移动到第三象限，道路 $g \circ \phi_2$ 与实轴只能在 β^2 处相交，故 $W(g \circ \phi_2)$ 介于 $-\dfrac{1}{2}$ 到 -1 之间．其实，我们有更精密的估计 $W(g \circ \phi_2) \approx -1$，这是因为由于起点 $g(iR)$ 既在第一段道路又在第二段道路中，我们可以用 $f \circ \phi_1$ 的终点 $-R^{2n}$ 去近似起点位置，而终点 $g(-iR)$ 与起点关于实轴对称．求和取整知 $W(g \circ \phi) = n-1$．证毕． □

例 2 可能还不是特别形象．再看一个实系数的方程．

例 3. 考虑方程 $z^4 + z^3 + 4z^2 + 2z + 3 = 0$，它在坐标轴、第一象限和第四象限里都没有根，在开的第二、三象限各有两个互异的根．

证明．令 $g(z) = z^4 + z^3 + 4z^2 + 2z + 3$．在虚轴上 $g(iy) = (y^4 - 4y^2 + 3) + i(-y^3 + 2y) = (y^2-3)(y^2-1) + iy(2-y^2)$．求导知在 $\mathbb{R}$ 中 $x^4 + x^3 \geq -\dfrac{27}{256}$ 而 $4x^2 + 2x \geq -\dfrac{1}{4}$，所以在实数域内恒有 $g(x) > 0$．若虚轴上有零点 iy，则 $(y^2-3)(y^2-1) = 0$ 和 $y(2-y^2) = 0$ 要同时成立，这显然是不可能的．因此 g 在坐标轴上无零点．

取半径 R 充分大的位于第一象限的四分之一扇形并将其边界分为实轴、圆弧、虚轴三部分，记为 $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$．$g \circ \gamma_1$ 始终在实轴上故卷绕数为零．$f(z) = z^4$ 在 γ_2 上控制 g，$W(g \circ \gamma_2) \approx W(f \circ \gamma_2) = 4W(\gamma_2) = 1$．在 $g \circ \gamma_3$ 上 $g(iy)$ 从 $g(iR)$（第四象限）运动到 3，轨迹当且仅当 $y = \sqrt{2}$ 时在 -1 处跨越实轴，随后始终在实轴上方直至到达 3．不难看出估计 $-0.75 < W(g \circ \gamma_3) < -1$．所以总的卷绕数只能是 0，亦即 g 在第一象限无零点．

g 的特殊之处在于它是实系数有理函数，这种函数总是满足 $g(\overline{z}) = \overline{g(z)}$．因此 g 的零点分布关于实轴上下对称，且共轭的零点有相同的阶（考虑导数的零点）．于是第四

象限不可能有零点了.

代数基本定理断言 g 恰有四个零点，它们必然分布在开的第二、三象限里．只剩下两种情况，要么 f 有四个一阶零点，两个在开的第二象限，两个在开的第三象限；要么 f 有一对共轭的二阶零点．若为第二种情况，则可作因式分解

$$g(z) = (z-w)^2(z-\overline{w})^2 = (z^2+az+b)^2 = z^4+2az^3+(a^2+2b)z^2+2abz+b^2.$$

其中 a, b 是实数．比较 z^3 系数得 $a = \frac{1}{2}$，代入 z 的系数知 $b = 2$．但是比较常数项又会发现 $b^2 = 3$，矛盾．所以第一种情况成立． □

最后的最后，有一个逆映射定理的定量版本，它其实也蕴含 Schwarz 引理．我们会看到，对于一个定义在 $\mathbb{D}$ 上、以原点为不动点、在 0 处导数为 1 的全纯函数 f 而言，$\mathbb{D}$ 的像 $f(\mathbb{D})$ 不能是完全是 $\mathbb{D}$ 向其内部的坍缩．而且，$f(\mathbb{D})$ 如果「没有在某个方向上被拉得足够远」，那么也「不会在某个方向上被压得足够近」.

例 4. 设 f 是 $\mathbb{D}$ 上的全纯函数，$f(0) = 0$，$f'(0) = 1$.

假设 $M := \sup_{z\in\mathbb{D}} |f(z)| \in \mathbb{R}$ 存在[14]，那么 $M \geq 1$ 且 $\frac{1}{6M}\mathbb{D} \subset f(\mathbb{D})$.

证明. 选取半径为 $R < 1$ 的围道 $\partial\mathbb{D}(0, R)$，借助 Cauchy 积分公式可将 $\mathbb{D}$ 上的全纯函数展成原点处的收敛半径不小于 1 的 Taylor 级数

$$f(z) = a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \cdots = \sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k,$$

其中对系数

$$a_k = \frac{f^{(n)}(0)}{k!} = \frac{1}{2\pi i}\oint_{\partial\mathbb{D}(0,R)} \frac{f(\zeta)}{\zeta^{k+1}} d\zeta$$

有估计 $|a_k| \leq \frac{M}{R^k}$．因为 R 可以任意地趋近 1，取极限 $R \to 1$ 有 $|a_k| \leq M$．特别地，因为 $a_0 = f(0) = 0$ 而 $a_1 = f'(0) = 1$，即有 $1 \leq M$.

取自然数 $k \geq 3$，那么 $\frac{1}{kM} < 1$．在回路 $\gamma = \partial\mathbb{D}(0, \frac{1}{kM})$ 上始终有

$$\begin{aligned}
|f(z) - z| &\leq |\sum_{n=2}^{\infty} a_n z^n| \leq \sum_{n=2}^{\infty} |a_n||z^n| \\
&\leq M\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{(kM)^n} = \frac{1}{kM}\frac{1}{k-M^{-1}} \\
&\leq \frac{1}{k(k-1)M} = \frac{|z|}{k-1} \\
&< |z|.
\end{aligned}$$

故由 Rouché 定理，$\mathbb{D}(0, \frac{1}{kM})$ 上 f 的零点数与 z 相同，有且只有一个一阶零点.

[14]上界可以不存在．考虑 $z \mapsto z/(1-z)$.

f 将回路 γ 推出为 $\mathbb{C}^\times$ 中的回路 $\phi = f \circ \gamma$，据辐角原理知 $W(\phi; 0) = 1$．我们注意 ϕ 是回路 γ 作幅度小于 $\dfrac{1}{k(k-1)M}$ 的微小扰动得到的，那么 ϕ 上每个点与原点都至少保持 $\dfrac{k-2}{k(k-1)M}$ 的距离．任取 $a \in \mathbb{D}(0, \dfrac{k-2}{k(k-1)M})$，构造函数 $g_a(z) = f(z) - a$，注意 g_a 在回路 γ 上无零点.

要统计 $\mathbb{D}(0, \dfrac{1}{kM})$ 中取值为 a 的点，就是统计 g_a 在此区域内的零点，因辐角原理这等于 $W(g_a \circ \gamma)$．观察到 $W(g_a \circ \gamma) = W(\phi; a)$．$a$ 与 0 处于 $\mathbb{C} \backslash \phi(I)$ 的同一个道路连通分支中，从而 $W(\phi; a) = W(\phi; 0) = 1$．这不仅说明 f 能够取到 $V = \mathbb{D}(0, \dfrac{k-2}{k(k-1)M})$ 的任意值，而且表明将 f 限制在 $U = f^{-1}(V) \cap \mathbb{D}(0, \dfrac{1}{kM})$ 上给出了原点邻域 U 和 V 之间的共形映射.

V 的半径在 $k = 3$ 处取得最大值 $\dfrac{1}{6M}$，证毕 [15]. $\square$

我们给 f 的约束不是空穴来风. 事实上，f 统摄了全部的局部单叶映射. 对于一个在 a 处导数不为零的全纯函数 f，设 $f(a) = b$，$f'(a) = c \neq 0$，f 在 a 的足够小邻域 $a + r\mathbb{D}$ 上有定义，则 f 诱导了一个「规化的」函数 $g : z \mapsto [f(a + rz) - b]/cr$．易验证 g 满足所有条件．读者可试着把我们对规化函数的结论转述到一般情况.

[15]这里的最大是当 k 取整数时说的，这就解释了 6 这个奇怪数字的来历．不过当我们放下整数情结，显然 k 可以取任何大于 2 的实数，此时 V 的极大半径有更精确的下界 $[(3 + 2\sqrt{2})M]^{-1}$（当 $k = 2 + \sqrt{2}$ 时）.

参考

[1] H. Amann, J. Escher. *Analysis I*. Birkhäuser, Basel, 2005.

[2] H. Amann, J. Escher. *Analysis II*. Birkhäuser, Basel, 2008.

[3] E. Freitag, R. Busam. *Complex Analysis*. Springer-Verlag, Berlin, 2009.

[4] J. Munkres. *Topology*. Pearson, Essex, 2014.

[5] A. Hatcher. *Algebraic Topology*. Cambridge Univ. Press, Cambridge, 2001.

[6] 李文威. 代数学方法（第一卷）. 北京: 高等教育出版社, 2019.

[7] T. Gamelin. *Complex Analysis*. Springer-Verlag, New York, 2001.

[8] C. Thomassen, 1992. “The Jordan-Schönflies Theorem and the Classification of Surfaces.” *Amer. Math. Monthly* **99** (2): 116.

[9] L. C. Siebenmann, 2005. “The Osgood-Schoenflies theorem revisited.” *Russ. Math. Surv.* **60**: 645.

版权声明

本文作者的知乎是 La Modernité，你也可以通过邮箱 cn.trampoline@outlook.com 找到我.

She had discovered that Fernando knew how to make a shoe from beginning to end by hand, but he was also completely at home with the machines and knew how to use them, the post machine, the trimmer, the sander.

My Brilliant Friend, Elena Ferrante