1 Modèle de base

Navier Stokes :

$$\rho \frac{D\vec{u}}{Dt} = -\nabla p + \mu \nabla^2 \vec{u} + \vec{F} \tag{1}$$

Modèle tension de surface :

$$\vec{F} = \rho \vec{g} + \overbrace{\left[4\eta\phi(\phi - 1)\left(phi - \frac{1}{2} \right) - k\nabla^2\phi \right] \nabla\phi}^{Tension} \tag{2}$$

Avec :

$$\eta = 12\frac{\sigma}{\xi} \qquad \kappa = \frac{3}{2}\sigma\xi \qquad \xi = 3dx$$

Bousinessq :

$$\underbrace{\frac{\rho}{\rho_0}}_{\simeq 1} \frac{Du}{Dt} = \frac{-1}{\rho_0}\nabla p + \frac{\mu}{\rho_0}\nabla^2\vec{u} + \frac{\vec{F}}{\rho_0} \tag{3}$$

Ajout de la tension :

$$-\nabla p + \vec{F} = -\nabla(p + \rho_0\psi) + \delta\rho\vec{g} + \overbrace{[\ \ ]}^{Tension}$$

Équation de la vorticité sans viscosité :

$$\nabla \times (3) \Rightarrow \frac{D\omega}{Dt} = \frac{1}{\rho_0}\nabla \times \left(\delta\rho\vec{g} + \overbrace{[\ \ ]}^{Tension} \right)$$

$$\frac{D\omega}{Dt} = \frac{1}{\rho_0}\nabla(\delta\rho) \times \vec{g} + \frac{1}{\rho_0}\nabla \times \overbrace{[\ \ ]}^{Tension}$$

Notre modèle sans viscosité :

$$\frac{D\vec{\omega}}{Dt} = \frac{1}{\rho_0}\nabla(\delta\rho) \times \vec{g} + \frac{1}{\rho_0}\nabla \times \left(\left[4\eta\phi(\phi_1)\left(\phi - \frac{1}{2} \right) - \kappa\nabla^2\phi \right] \nabla\phi \right)$$

Simplification de due à la 2d:

$$\frac{1}{\rho_0}\nabla(\delta\rho) \times \vec{g} = \partial_x(\delta\rho) \cdot g\ \vec{e_z}$$

Donc, ce que l'on intègre en temps :

$$\frac{D\vec{\omega}}{Dt} = \frac{1}{\rho_0}\partial_x(\delta\rho) \cdot g\ \vec{e_z} + \frac{1}{\rho_0}\nabla \times \left(\left[4\eta\phi(\phi - 1)\left(\phi - \frac{1}{2} \right) - k\nabla^2\phi \right] \nabla\phi \right)$$

Pourquoi l'approximation Boussinesq peut-elle fonctionner: Terme de pression dans l'équation de base de la vorticité:

$$-\nabla \times \left(\frac{1}{\rho}\nabla p \right) = -\nabla\left(\frac{1}{\rho} \right) \times \nabla p$$

Les gradients seront presque alignés, car il y a surpression dans la bulle ou la goutte, donc le produit vectoriel est négligeable.

2 Autres modèles possibles

Courbure:

$$\kappa = -\nabla \cdot \left(\frac{\nabla \phi}{\|\nabla \phi\|} \right)$$

Tension de surface $\vec{F_\sigma}$:

$$\vec{F_\sigma} = -\frac{\sigma}{\rho} \kappa \nabla \phi$$

Torque:

$$\nabla \times \vec{F_\sigma} = -\sigma \nabla \left(\frac{\kappa}{\rho} \right) \times \nabla \phi$$

? On développe au cas où l'on trouve une simplification de $\nabla(\kappa)$?:

$$= -\sigma \left[\nabla \left(\frac{1}{\rho} \right) \kappa + \frac{1}{\rho} \nabla(\kappa) \right] \times \nabla \phi$$

Rotationnel de la viscosité si l'on décide d'en ajouter:

$$\nabla \times (\mu/\rho_0 \cdot \nabla^2 \vec{u}) = 1/\rho_0 \cdot \left[\nabla(\mu) \times \nabla^2 \vec{u} + \mu \nabla^2 \omega \right]$$