

1 Modèle de base

Navier Stokes :

$$\rho \frac{D\vec{u}}{Dt} = -\nabla p + \mu \nabla^2 \vec{u} + \vec{F} \quad (1)$$

Modèle tension de surface :

$$\vec{F} = \rho \vec{g} + \overbrace{\left[4\eta\phi(\phi-1) \left(\phi - \frac{1}{2} \right) - k \nabla^2 \phi \right] \nabla \phi}^{Tension} \quad (2)$$

Avec :

$$\eta = 12 \frac{\sigma}{\xi} \quad \kappa = \frac{3}{2} \sigma \xi \quad \xi = 3dx$$

Boussinesq :

$$\underbrace{\frac{\rho}{\rho_0}}_{\simeq 1} \frac{Du}{Dt} = \frac{-1}{\rho_0} \nabla p + \frac{\mu}{\rho_0} \nabla^2 \vec{u} + \frac{\vec{F}}{\rho_0} \quad (3)$$

Ajout de la tension :

$$-\nabla p + \vec{F} = -\nabla(p + \rho_0 \psi) + \delta \rho \vec{g} + \overbrace{[\quad]}^{Tension}$$

Équation de la vorticité sans viscosité :

$$\nabla \times (3) \Rightarrow \frac{D\omega}{Dt} = \frac{1}{\rho_0} \nabla \times \left(\delta \rho \vec{g} + \overbrace{[\quad]}^{Tension} \right)$$

$$\frac{D\omega}{Dt} = \frac{1}{\rho_0} \nabla(\delta \rho) \times \vec{g} + \frac{1}{\rho_0} \nabla \times \overbrace{[\quad]}^{Tension}$$

Notre modèle sans viscosité :

$$\frac{D\vec{\omega}}{Dt} = \frac{1}{\rho_0} \nabla(\delta \rho) \times \vec{g} + \frac{1}{\rho_0} \nabla \times \left(\left[4\eta\phi(\phi_1) \left(\phi - \frac{1}{2} \right) - \kappa \nabla^2 \phi \right] \nabla \phi \right)$$

Simplification de due à la 2d:

$$\frac{1}{\rho_0} \nabla(\delta \rho) \times \vec{g} = \partial_x(\delta \rho) \cdot g \vec{e}_z$$

Donc, ce que l'on intègre en temps :

$$\frac{D\vec{\omega}}{Dt} = \frac{1}{\rho_0} \partial_x(\delta \rho) \cdot g \vec{e}_z + \frac{1}{\rho_0} \nabla \times \left(\left[4\eta\phi(\phi-1) \left(\phi - \frac{1}{2} \right) - k \nabla^2 \phi \right] \nabla \phi \right)$$

Pourquoi l'approximation Boussinesq peut-elle fonctionner: Terme de pression dans l'équation de base de la vorticité:

$$-\nabla \times \left(\frac{1}{\rho} \nabla p \right) = -\nabla \left(\frac{1}{\rho} \right) \times \nabla p$$

Les gradients seront presque alignés, car il y a surpression dans la bulle ou la goutte, donc le produit vectoriel est négligeable.

2 Autres modèles possibles

Tension de surface \vec{F}_σ :

$$\kappa = -\nabla \cdot \left(\frac{\nabla \phi}{\|\nabla \phi\|} \right)$$

$$\vec{F}_\sigma = -\frac{\sigma}{\rho} \kappa \nabla \phi$$

Torque:

$$\begin{aligned} \nabla \times \vec{F}_\sigma &= -\sigma \nabla \left(\frac{\kappa}{\rho} \right) \times \nabla \phi \\ &= -\sigma \left[\nabla \left(\frac{1}{\rho} \right) \kappa + \frac{1}{\rho} \nabla(\kappa) \right] \times \nabla \phi \end{aligned}$$

Viscosité:

$$\nabla \times (\mu/\rho_0 \cdot \nabla^2 \vec{u}) = 1/\rho_0 \cdot [\nabla(\mu) \times \nabla^2 \vec{u} + \mu \nabla^2 \omega]$$