1 Modèle de base

Navier Stokes

$$\rho\frac{D\vec{u}}{Dt} = -\nabla p + \mu\nabla^2\vec{u} + \vec{F} \tag{1}$$

Modèle tension de surface :

$$\vec{F} = \rho\vec{g} + \overbrace{\left[4\eta\phi(\phi-1)\left(phi-\frac{1}{2}\right) - k\nabla^2\phi\right]\nabla\phi}^{Tension} \tag{2}$$

$$\vec{T} = \left[4\eta\phi(\phi-1)\left(\phi-\frac{1}{2}\right) - k\nabla^2\phi\right]\nabla\phi$$

Avec :

$$\eta = 12\frac{\sigma}{\xi} \qquad \kappa = \frac{3}{2}\sigma\xi \qquad \xi = 3dx$$

Bousinessq

$$\underbrace{\frac{\rho}{\rho_0}}_{\simeq 1}\frac{Du}{Dt} = \frac{-1}{\rho_0}\nabla p + \frac{\mu}{\rho_0}\nabla^2\vec{u} + \frac{\vec{F}}{\rho_0} \tag{3}$$

$$\underbrace{\frac{\rho}{\rho_0}}_{\simeq 1}\frac{Du}{Dt} = \frac{-1}{\rho_0}\nabla p + \frac{\mu}{\rho_0}\nabla^2\vec{u} + \frac{1}{\rho_0}\left(\vec{T} + \rho\vec{g}\right)$$

Ajout de la tension :

$$-\nabla p + \vec{F} = -\nabla(p + \rho_0\psi) + \delta\rho\vec{g} + \vec{T}$$

Équation de la vorticité sans viscosité :

$$\nabla \times (3) \Rightarrow \frac{D\omega}{Dt} = \frac{1}{\rho_0}\nabla \times \left(\delta\rho\vec{g} + \vec{T}\right)$$

$$\frac{D\omega}{Dt} = \frac{1}{\rho_0}\nabla(\delta\rho) \times \vec{g} + \frac{1}{\rho_0}\nabla \times \vec{T}$$

Notre modèle sans viscosité

$$\frac{D\vec{\omega}}{Dt} = \frac{1}{\rho_0}\nabla(\delta\rho) \times \vec{g} + \frac{1}{\rho_0}\nabla \times \left(\left[4\eta\phi(\phi_1)\left(\phi-\frac{1}{2}\right) - \kappa\nabla^2\phi\right]\nabla\phi\right)$$

Simplification de due à la 2d:

$$\frac{1}{\rho_0}\nabla(\delta\rho) \times \vec{g} = \frac{1}{\rho_0}\partial_x(\delta\rho) \cdot g\ \vec{e}_z$$

Donc, ce que l'on intègre en temps :

$$\frac{D\vec{\omega}}{Dt} = \frac{1}{\rho_0}\partial_x(\delta\rho) \cdot g\ \vec{e_z} + \frac{1}{\rho_0}\nabla \times \left(\left[4\eta\phi(\phi-1)\left(\phi-\frac{1}{2}\right) - k\nabla^2\phi\right]\nabla\phi\right)$$

Pourquoi l'approximation Boussinesq peut-elle fonctionner: Terme de pression dans l'équation de base de la vorticité:

$$-\nabla \times \left(\frac{1}{\rho}\nabla p\right) = -\nabla\left(\frac{1}{\rho}\right) \times \nabla p$$

Les gradients seront presque alignés, car il y a surpression dans la bulle ou la goutte, donc le produit vectoriel est négligeable.

Cependant ci c'était vraiment le cas la goutte ou la bulle ne bougeraient pas. L'approximation de Boussinesq compense la suppression du terme de pression.

2 Autres modèles possibles

Courbure:

$$\kappa = -\nabla \cdot \left(\frac{\nabla\phi}{\|\nabla\phi\|}\right)$$

Tension de surface $\vec{F_\sigma}$:

$$\vec{F_\sigma} = -\frac{\sigma}{\rho}\kappa\nabla\phi$$

Torque:

$$\nabla \times \vec{F_\sigma} = -\sigma\nabla\left(\frac{\kappa}{\rho}\right) \times \nabla\phi$$

? On développe au cas où l'on trouve une simplification de $\nabla(\kappa)$?:

$$= -\sigma\left[\nabla\left(\frac{1}{\rho}\right)\kappa + \frac{1}{\rho}\nabla(\kappa)\right] \times \nabla\phi$$

Rotationnel de la viscosité si l'on décide d'en ajouter:

$$\nabla \times (\mu/\rho_0 \cdot \nabla^2\vec{u}) = 1/\rho_0 \cdot \left[\nabla(\mu) \times \nabla^2\vec{u} + \mu\nabla^2\omega\right]$$