

# 1 Modèle de base

**Navier Stokes**

$$\rho \frac{D\vec{u}}{Dt} = -\nabla p + \mu \nabla^2 \vec{u} + \vec{F} \quad (1)$$

Modèle tension de surface :

$$\vec{F} = \rho \vec{g} + \overbrace{\left[ 4\eta\phi(\phi-1) \left( \phi - \frac{1}{2} \right) - k\nabla^2\phi \right]}^{Tension} \nabla\phi \quad (2)$$

$$\vec{T} = \left[ 4\eta\phi(\phi-1) \left( \phi - \frac{1}{2} \right) - k\nabla^2\phi \right] \nabla\phi$$

Avec :

$$\eta = 12 \frac{\sigma}{\xi} \quad \kappa = \frac{3}{2} \sigma \xi \quad \xi = 3dx$$

**Boussinesq**

$$\underbrace{\frac{\rho}{\rho_0}}_{\simeq 1} \frac{Du}{Dt} = \frac{-1}{\rho_0} \nabla p + \frac{\mu}{\rho_0} \nabla^2 \vec{u} + \frac{\vec{F}}{\rho_0} \quad (3)$$

Ajout de la tension :

$$-\nabla p + \vec{F} = -\nabla(p + \rho_0\psi) + \delta\rho\vec{g} + \vec{T}$$

Équation de la vorticité sans viscosité :

$$\nabla \times (3) \Rightarrow \frac{D\omega}{Dt} = \frac{1}{\rho_0} \nabla \times (\delta\rho\vec{g} + \vec{T})$$

$$\frac{D\omega}{Dt} = \frac{1}{\rho_0} \nabla(\delta\rho) \times \vec{g} + \frac{1}{\rho_0} \nabla \times \vec{T}$$

**Notre modèle sans viscosité**

$$\frac{D\vec{\omega}}{Dt} = \frac{1}{\rho_0} \nabla(\delta\rho) \times \vec{g} + \frac{1}{\rho_0} \nabla \times \left( \left[ 4\eta\phi(\phi_1) \left( \phi - \frac{1}{2} \right) - \kappa\nabla^2\phi \right] \nabla\phi \right)$$

Simplification de due à la 2d:

$$\frac{1}{\rho_0} \nabla(\delta\rho) \times \vec{g} = \partial_x(\delta\rho) \cdot g \vec{e}_z$$

Donc, ce que l'on intègre en temps :

$$\frac{D\vec{\omega}}{Dt} = \frac{1}{\rho_0} \partial_x(\delta\rho) \cdot g \vec{e}_z + \frac{1}{\rho_0} \nabla \times \left( \left[ 4\eta\phi(\phi-1) \left( \phi - \frac{1}{2} \right) - k\nabla^2\phi \right] \nabla\phi \right)$$

**Pourquoi l'approximation Boussinesq peut-elle fonctionner:** Terme de pression dans l'équation de base de la vorticité:

$$-\nabla \times \left( \frac{1}{\rho} \nabla p \right) = -\nabla \left( \frac{1}{\rho} \right) \times \nabla p$$

Les gradients seront presque alignés, car il y a surpression dans la bulle ou la goutte, donc le produit vectoriel est négligeable.

**Cependant ci c'était vraiment le cas la goutte ou la bulle ne bougeraient pas.** L'approximation de Boussinesq compense la suppression du terme de pression.

## 2 Autres modèles possibles

Courbure:

$$\kappa = -\nabla \cdot \left( \frac{\nabla \phi}{\|\nabla \phi\|} \right)$$

Tension de surface  $\vec{F}_\sigma$  :

$$\vec{F}_\sigma = -\frac{\sigma}{\rho} \kappa \nabla \phi$$

Torque:

$$\nabla \times \vec{F}_\sigma = -\sigma \nabla \left( \frac{\kappa}{\rho} \right) \times \nabla \phi$$

? On développe au cas où l'on trouve une simplification de  $\nabla(\kappa)$  ?:

$$= -\sigma \left[ \nabla \left( \frac{1}{\rho} \right) \kappa + \frac{1}{\rho} \nabla(\kappa) \right] \times \nabla \phi$$

Rotationnel de la viscosité si l'on décide d'en ajouter:

$$\nabla \times (\mu/\rho_0 \cdot \nabla^2 \vec{u}) = 1/\rho_0 \cdot [\nabla(\mu) \times \nabla^2 \vec{u} + \mu \nabla^2 \omega]$$