គណិតវិទ្យាIII

មាស ឡេន

ដេប៉ាតឺម៉ង់គណិតវិទ្យា

២០២១

គម្រោងមេរៀន

1. សេចក្តីផ្តើម
2. សមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែលលំដាប់មួយ
   - សមីការញែកបាន
   - សមីការលីនេអ៊ែរ
3. សមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែលលីនេអ៊ែរលំដាប់ពីរ
   - សមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែលលីនេអ៊ែរអូម៉ូសែនលំដាប់ពីរមេគុណថេរ
   - សមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែលលីនេអ៊ែរមិនអូម៉ូសែនលំដាប់ពីរមេគុណថេរ
4. ប្រព័ន្ធសមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែលលំដាប់មួយ

សេចក្ដីផ្ដើម

គំរូគណិតវិទ្យាជាច្រើនក្នុងជីវវិទ្យា រូបវិទ្យា គីមីវិទ្យាជាដើម ប្រើប្រាស់សមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែល។ ក្នុងដំនើរការជីវសាស្ត្រ៖ បំរែបំរួលនៃកំហាប់ថ្នាំក្នុងសសៃឈាមអ្នកជំងឺ ឬបំរែបំរួលម៉ាស់ក្នុងសរីរាង្គណាមួយ រហូតដល់ការកើនឡើងនៃចំនួនប្រជាជននៅពេលណាមួយ សុទ្ធតែមានគំរូគណិតវិទ្យាដោយប្រើសមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែល។

តើអ្វីជាសមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែល?

សមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែលជាសមីការដែលមានអនុគមន៍មិនស្គាល់ និងដេរីវេរបស់វាមួយឬច្រើន។

គំរូគណិតវិទ្យា

ការកើនឡើងនៃមេដំបែ

មេដំបែសរីរាង្គដែលមានកោសិកាតែមួយដែលប្រើដើម្បីផលិតស្រា ឬនំប៉័ងជាដើម។ សន្មតថាកោសិកាមេដំបែនីមួយៗផលិតកោសិកាថ្មីដោយអត្រា β។ ដូចនេះអត្រាកោសិកាសរុបដែលផលិតបាននៅពេល t គឺ $\beta N(t)$ ដែល $N(t)$ ជាចំនួនកោសិកាមេដំបែនៅខណៈ t។ ដូចគ្នាដែរសន្មតថា អត្រាកោសិកាសរុបដែលបាត់បង់នៅពេល t គឺ $\mu N(t)$ ដែល μ ជាអត្រាបាត់បង់កោសិកាមេដំបែ។ យើងសង្កេតឃើញថាអត្រាបំរែបំរួលនៃចំនួនកោសិកាមេដំបែនៅខណៈ t គឺ អត្រាកោសិកាផលិតបាន − អត្រាកោសិកាបាត់បង់$= \beta N(t) - \mu N(t)$ ។ ម្យ៉ាងវិញទៀតដោយសារអត្រាបំរែបំរួលនៃ $N(t)$ គឺ $dN(t)/dt$ ។

ដូច្នេះយើងអាចសរសេរ

$$\frac{dN(t)}{dt} = \beta N(t) - \mu N(t).$$

បើយើងតាង $r = \beta - \mu$ នោះ

$$\frac{dN(t)}{dt} = rN(t).$$

ដែល r ហៅថាអត្រាកើនឡើងនៃមេដំបៃក្នុងមួយកោសិកា។

សមីការនេះមានអនុគមន៍មិនស្គាល់ $N(t)$ និងដេរីវេទីមួយរបស់វា ដូចនេះវាជាសមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែល។

សមីការនេះប្រាប់យើងថាអត្រាបំរែបំរួលនៃចំនួនកោសិកាមេដំបៃនៅខណៈណាមួយគឺសមាមាត្រនឹងចំនួនកោសិកានៅខណៈនោះ។

យើងសង្កេតឃើញថាបើ $r > 0$ (មានន័យថាអត្រាកោសិកាផលិតបាន β ធំជាងអត្រាបាត់បង់ μ) នោះ

$$\frac{dN(t)}{dt} = rN(t) > 0.$$

មានន័យថាចំនួនកោសិកាមេដំបៃនឹងកើនឡើង។
ដូចគ្នាដែរបើ $r < 0$ (មានន័យថាអត្រាកោសិកាផលិតបាន β តូចជាងអត្រាបាត់បង់ μ) នោះ

$$\frac{dN(t)}{dt} = rN(t) < 0.$$

មានន័យថាចំនួនកោសិកាមេដំបៃនឹងថយចុះ។

សំនួរ:

តើចំនួនកោសិកាមេដំបែ $N(t)$ នៅខណៈណាមួយស្មើនឹងប៉ុន្មាន?
អនុគមន៍ $N(t)$ នេះហៅថាចម្លើយនៃសមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែល។ តាមពិតទៅអនុគមន៍

$$N(t) = Ce^{rt},$$

ដែល C ជាចំនួនថេរ។ យើងនឹងដោះស្រាយសមីការប្រភេទនេះពេលក្រោយ ប៉ុន្តែយើងអាចផ្ទៀងផ្ទាត់បានដោយប្រើដេរីវេ

$$N'(t) = C(re^{rt}) = r(Ce^{rt}) = rN(t).$$

សមីការឡូជីស្ទីក

$$\frac{dN}{dt} = rN\left(1 - \frac{K}{N}\right)$$

សមីការបន្ថយកំដៅញូតុន

$$\frac{dT}{dt} = -k\left(T - T_m\right)$$

ច្បាប់ទីពីរញូតុន

$$m\frac{d^2h}{dt^2} = -mg$$

ស្គាល់សមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែល

- សមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែលជាសមីការដែលមានអនុគមន៍មិនស្គាល់ និងដេរីវេរបស់វាមួយឬច្រើន។
- លំដាប់នៃសមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែលជាលំដាប់នៃដេរីវេខ្ពស់ជាងគេនៅក្នុងសមីការ។
- ចម្លើយនៃសមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែលជាអនុគមន៍ដែលផ្ទៀងផ្ទាត់សមីការពេលជំនួសចូលទៅ។

ឧទាហរណ៍

សមីការនៃការកើនឡើងនៃមេដំបែ សមីការឡូជីស្ទីក សមីការបន្ថយកំដៅញូតុនជាសមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែលលំដាប់មួយ។ សមីការនៃច្បាប់ទីពីរញូតុនជាសមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែលលំដាប់ពីរ។

គម្រោងមេរៀន

1. សេចក្តីផ្តើម
2. សមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែលលំដាប់មួយ
    - សមីការញែកបាន
    - សមីការលីនេអ៊ែរ
3. សមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែលលីនេអ៊ែរលំដាប់ពីរ
    - សមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែលលីនេអ៊ែរអូម៉ូសែនលំដាប់ពីរមេគុណថេរ
    - សមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែលលីនេអ៊ែរមិនអូម៉ូសែនលំដាប់ពីរមេគុណថេរ
4. ប្រព័ន្ធសមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែលលំដាប់មួយ

សមីការញែកបាន

ជាសមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែលលំដាប់មួយដែល dy/dx អាចសរសេរជាផលគុណនៃអនុគមន៍នៃ x និងអនុគមន៍នៃ y មានន័យថា

$$\frac{dy}{dx} = f(x)g(y)$$

បើ $g(y) \neq 0$ នោះ យើងអាចសរសេរ

$$\frac{dy}{dx} = \frac{f(x)}{h(y)}$$

ដែល $h(y) = 1/g(y)$ ឬ

$$\int h(y)dy = \int f(x)dx$$

ឧទាហរណ៍: ដោះស្រាយសមីការ

$$\frac{dN(t)}{dt} = rN(t).$$

$$\begin{aligned}
\frac{dN(t)}{N(t)} &= rdt \\
\int \frac{dN(t)}{N(t)} &= \int rdt \\
\ln|N(t)| &= rt + C_1 \\
N(t) &= \pm e^{C_1} e^{rt} = Ce^{rt}
\end{aligned}$$

បើ $N(0) = N_0$ នោះ៖

$$N(t) = N_0 e^{rt}$$

ឧទាហរណ៍: ដោះស្រាយសមីការ (von Bertalanffy)

គំរូសាមញ្ញនៃការលូតលាស់នៃត្រី៖ តាង $L(t)$ ជាប្រវែងនៃត្រីនៅអាយុ t និងសន្មតថា $L(0) = L_0$ នោះ៖

$$\frac{dL}{dt} = k(L_\infty - L),$$

ដែល k, L_∞ ជាចំនួនថេរវិជ្ជមាន។

សមីការនេះប្រាប់យើងថាអត្រាលូតលាស់នៃត្រី dL/dt គឺសមាមាត្រនឹង $L_\infty - L$ ។ យើងសង្កេតឃើញថា អត្រាលូតលាស់នៃត្រី dL/dt គឺវិជ្ជមានហើយថយចុះលីនេអ៊ែរអាស្រ័យនឹងប្រវែង បើ $L < L_\infty$ និងការលូតលាស់បញ្ឈប់ (មានន័យថា $dL/dt = 0$) នៅពេល $L = L_\infty$ ។

យើងប្រើវិធីសាស្ត្រសមីការញែកបានដើម្បីដោះស្រាយសមីការនេះ៖

$$\int \frac{dL}{L_\infty - L} = \int k dt$$

$$-\ln|L_\infty - L| = kt + C_1$$

$$L_\infty - L = Ce^{-kt}, C = \pm e^{-C_1}$$

ដោយសារ $L(0) = L_0$ នោះ៖

$$L_\infty - L_0 = C$$

ដូច្នេះ៖

$$L(t) = L_\infty - (L_\infty - L_0)e^{-kt}.$$

ឧទាហរណ៍:សមីការឡូជីស្ទីក

សមីការនេះបកស្រាយអំពីបំរែបំរួលចំនួនប្រជាជនក្នុងបរិស្ថានណាមួយរហូតដល់ចំនួនអតិបរមា K ដែលបរិស្ថានអាចទ្រាំទ្របាន។ បើយើងតាង $N(t)$ ជាចំនួនប្រជាជននៅខណៈ t នោះបំរែបំរួលនៃកំណើនប្រជាជនគឺ

$$\frac{dN}{dt} = rN\left(1 - \frac{K}{N}\right), \quad N(0) = N_0$$

បើN_0 នៅចន្លោះ 0 និងK នោះ $N'(t) > 0$ (បើ $r > 0$) ហើយចំនួនប្រជាជនកើនឡើង។ តែបើ $N > K$ នោះ $1 - N/K < 0$ និង $N'(t) < 0$ ហើយចំនួនប្រជាជនថយចុះ។ បើ $N \to K$ នោះ $N'(t) \to 0$ ចំនួនប្រជាជនស្ទើរនៅថេរ។

សន្មតថា $N \neq 0$ និង $N \neq K$ នោះយើងអាចសសេរសមីការជា

$$\int \frac{dN}{(1 - N/K)N} = \int r dt$$

យើងមាន

$$\frac{1}{(1 - N/K)N} = \frac{K}{N(K - N)} = \frac{1}{N} + \frac{1}{K - N}$$

នោះយើងបាន

$$\int \left(\frac{1}{N} + \frac{1}{K - N} \right) dN = \int r dt$$

$$\ln |N| - \ln |K - N| = rt + C$$

$$\ln \left| \frac{K - N}{N} \right| = -rt - C$$

$$\left|\frac{K-N}{N}\right| = e^{-rt-C} = e^{-C}e^{-rt}$$

$$\frac{K-N}{N} = Ae^{-rt},\ A = \pm e^{-C}$$

ដូចនេះ $N = \frac{K}{1+Ae^{-rt}}$ ។ ពេល $t = 0$ នោះ $N(0) = N_0$ យើងបាន

$$\frac{K-N_0}{N_0} = Ae^0 = A$$

ដូច្នេះចម្លើយនៃសមីការឡូជីស្ទីកគឺ

$$N(t) = \frac{K}{1+Ae^{-rt}} \text{ ដែល } A = \frac{K-N_0}{N_0}$$

ឧទាហរណ៍

ឧបមាថាសិស្សម្នាក់មានជំងឺផ្តាសាយត្រលប់ទៅសាលាដាច់ស្រយាលដែលមានសិស្ស 1000 នាក់។ យើងសន្មតថាអត្រាឆ្លងរាលដាលនៃវីរុសផ្តាសាយគោរពតាមគំរូឡូជីស្ទីក។ កំនត់ចំនួនសិស្សដែលបានឆ្លងក្នុងរយៈពេលថ្ងៃ 6 ក្រោយបើគេសង្កេតឃើញថាមានសិស្ស 50 នាក់បានឆ្លងក្នុងរយៈពេល 4 ថ្ងៃ។

ប្រើគំរូឡូជីស្ទីកជាមួយ $K = 1000, N_0 = 1, A = 999$ នោះ

$$N(t) = \frac{1000}{1 + 999e^{-rt}}$$

ដើម្បីរក r យើងប្រើ $N = 50$ ពេល $t = 4$

$$50 = \frac{1000}{1 + 999e^{-4r}} \text{ នោះ } r = 0.9906$$

ដូចនេះចំនួនសិស្សដែលឆ្លងជំងឺផ្តាសាយនៅខណៈ t គឺ

$$N(t) = \frac{1000}{1 + 999e^{-0.9906t}}$$

នោះចំនួនសិស្សដែលឆ្លងជំងឺផ្តាសាយនៅថ្ងៃ 6 ក្រោយគឺ

$$N(6) = \frac{1000}{1 + 999e^{-5.9436}} = 276 \text{ នាក់}$$

ឧទាហរណ៍:សមីការបន្ថយ/បន្ថែមកំដៅញូតុន

ច្បាប់បន្ថយកំដៅញូតុន៖ បំរែបំរួលសីតុណ្ហភាពនៃវត្ថុមួយនៅខណ:ណាមួយ សមាមាត្រនឹងផលដកនៃសីតុណ្ហភាពនៃវត្ថុនោះ និងសីតុណ្ហភាពជុំវិញវត្ថុនោះ។ បើតាង T ជាសីតុណ្ហភាពវត្ថុនៅខណ: t និង T_m សីតុណ្ហភាពជុំវិញ នោះ

$$\frac{dT}{dt} = -k(T - T_m)$$

ដែល $k > 0$ ជាចំនួនថេរសមាមាត្រ។

- បើ $T - T_m > 0$ នោះ $dT/dt < 0$: បន្ថយកំដៅ
- បើ $T - T_m < 0$ នោះ $dT/dt > 0$: បន្ថែមកំដៅ

ដោយសារ $dT = d(T - T_m)$ នោះសមីការអាចសរសេរជា

$$\int \frac{d(T - T_m)}{T - T_m} = -\int kdt$$

$$\ln|T - T_m| = -kt + C$$

$$|T - T_m| = e^{-kt}e^C$$

$$T - T_m = Ae^{-kt}, \; A = \pm e^C$$

ពេល $t = 0, T(0) = T_0$ យើងបាន $A = T_0 - T_m$
ដូចនេះចម្លើយនៃសមីការគឺ

$$T = T_m + (T_0 - T_m)e^{-kt}$$

ឧទាហរណ៍

ស៊ុតស្ងោរមួយគ្រាប់មានសីតុណ្ហភាព $98°C$ ត្រូវបានដាក់ចូលខ្ទះមានទឹកសីតុណ្ហភាព $18°C$។ រយៈពេល 5 នាទីក្រោយមក សីតុណ្ហភាពស៊ុតស្មើនឹង $38°C$។ តើរយៈពេលប៉ុន្មានដែលសីតុណ្ហភាពស៊ុតនឹងថយដល់ $20°C$?

ប្រើច្បាប់បន្ថយកំដៅញូតុនដែល $T_m = 18, T_0 = 98$ យើងមាន

$$T - 18 = (98 - 18)e^{-kt} \text{ ឬ } T = 18 + 80e^{-kt}.$$

ដើម្បីរក k យើងប្រើ $T = 38$ ពេល $t = 5$

$$\begin{aligned} 38 &= 18 + 80e^{-5k} \\ e^{-5k} &= \frac{1}{4} \\ k &= \frac{1}{5}\ln 4 \end{aligned}$$

សីតុណ្ហភាពស៊ុតនៅខណៈ t គឺ

$$T = 18 + 80e^{-(0.2\ln 4)t}.$$

ដូចនេះរយៈពេលដែលស៊ុតមានសីតុណ្ហភាព $20°C$ គឺ

$$20 = 18 + 80e^{-(0.2\ln 4)t} \text{ នោះ } t = 13.3$$

សន្និដ្ឋានៈ សីតុណ្ហភាពស៊ុតនឹងចុះដល់ $20°C$ ក្នុងរយៈពេល 13.3 នាទីបន្ទាប់ពីវាត្រូវបានដាក់ក្នុងខ្ទះដែលមានទឹកត្រជាក់។ ដោយសារវាត្រូវការពេល 5 នាទីដើម្បីចុះដល់សីតុណ្ហភាព $38°C$ នោះវាត្រូវការពេលប្រហែល 8 នាទីបន្ថែមដើម្បីចុះដល់សីតុណ្ហភាព $20°C$។

លំហាត់អនុវត្តន៍

ពែងមួយដែលមានកាហ្វេក្តៅដំបូងមានសីតុណ្ហភាព $95°C$ បន្ថយដល់ $80°C$ ក្នុងរយៈពេល 5 នាទីនៅពេលដែលយើងកំពុងអង្គុយក្នុងបន្ទប់ដែលមានសីតុណ្ហភាព $21°C$។ តើនៅពេលណាដែលសីតុណ្ហភាពកាហ្វេចុះដល់ $50°C$?

ស្រាក្រហមមួយដបត្រូវបានយកចេញពីកន្លែងស្តុកស្រាដែលមានសីតុណ្ហភាព $10°C$ រួចទុកចោលនៅក្នុងបន្ទប់មានសីតុណ្ហភាព $23°C$ ។ បើវាចំណាយពេល 10 នាទីដើម្បីឲ្យស្រាកើនសីតុណ្ហភាពដល់ $15°C$ តើនៅពេលណាដែលសីតុណ្ហភាពស្រាកើនដល់ $18°C$?

សមីការលីនេអ៊ែរ

និយមន័យ

សមីការលីនេអ៊ែរជាសមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែលលំដាប់មួយដែលមានទំរង់

$$a_1(x)\frac{dy}{dx} + a_0(x)y = g(x)$$

ទំរង់ស្តង់ដានៃសមីការលីនេអ៊ែរ

$$\frac{dy}{dx} + P(x)y = f(x)$$

គោលបំណង: ដោះស្រាយរកចម្លើយលើចន្លោះ I ដែល P និង f ជាអនុគមន៍ជាប់។

វិធីសាស្រ្តទី១៖ កត្តាអាំងតេក្រាល

យើងចង់កំនត់ $\mu(x)$ ដែលអង្គខាងឆ្វេងដៃនៃសមីការ

$$\mu(x)\frac{dy}{dx} + \mu(x)P(x)y = \mu(x)f(x)$$

ជាដេរីវេនៃផលគុណ $\mu(x)y$:

$$\mu(x)\frac{dy}{dx} + \mu(x)P(x)y = \frac{d}{dx}[\mu(x)y] = \mu(x)\frac{dy}{dx} + \mu'(x)y.$$

នោះ μ ត្រូវផ្ទៀងផ្ទាត់ $\mu'(x) = \mu(x)P(x)$ សមីការនេះជាសមីការញែកបាននោះយើងអាចដោះស្រាយបានដូចខាងក្រោម

$$\int \frac{d\mu}{\mu} = \int P(x)dx$$

$$\ln|\mu(x)| = \int P(x)dx + C_1$$
$$\mu(x) = C_2 e^{\int P(x)dx}$$

ជ្រើសយក $C_2 = 1$ នោះ៖

$$\mu(x) = e^{\int P(x)dx}.$$

ហៅថាកត្តាអាំងតេក្រាល ។ ដូចនេះ៖

$$\frac{d}{dx}[\mu(x)y] = \mu(x)f(x)$$
$$y = \frac{1}{\mu(x)}\left[\int \mu(x)f(x)dx + C\right]$$

វិធីសាស្ត្រដោះស្រាយសមីការលីនេអ៊ែរ

1. សរសេរសមីការជាទំរង់ស្តង់ដា $\frac{dy}{dx} + P(x)y = f(x)$
2. គណនាកត្តាអាំងតេក្រាល $\mu(x) = e^{\int P(x)dx}$
3. គុណអង្គទាំងពីរនៃសមីការស្តង់ដានឹងកត្តាអាំងតេក្រាលដើម្បីទទួលបាន

$$\frac{d}{dx}\left[e^{\int P(x)dx}y\right] = e^{\int P(x)dx}f(x)$$

4. ធ្វើអាំងតេក្រាលសងខាងរួចដោះស្រាយរក y

$$y(x) = e^{-\int P(x)dx}\int e^{\int P(x)dx}f(x)dx + Ce^{-\int P(x)dx}$$

ឧទាហរណ៍

ដោះស្រាយសមីការ

$$\frac{dy}{dx} - 3y = 6$$

សមីការនេះជាសមីការលីនេអ៊ែរក្នុងទំរង់ស្តង់ដាដែល $P(x) = -3$ នោះកត្តាអាំងតេក្រាលគឺ $e^{\int(-3)dx} = e^{-3x}$។ គុណសមីការនឹងកត្តាអាំងតេក្រាលយើងបាន

$$e^{-3x}\frac{dy}{dx} - 3e^{-3x}y = 6e^{-3x}$$

$$\frac{d}{dx}\left[e^{-3x}y\right] = 6e^{-3x}$$

$$e^{-3x}y = 6\int e^{-3x}dx = -2e^{-3x} + C$$

ដូចនេះ $y = -2 + Ce^{3x}$

ឧទាហរណ៍

ដោះស្រាយសមីការ

$$x\frac{dy}{dx} - 4y = x^6 e^x, \ \ x \in (0, \infty)$$

បម្លែងជាទំរង់ស្តង់ដា $\frac{dy}{dx} - \frac{4}{x}y = x^5 e^x$។ យើងមាន $P(x) = -4/x, f(x) = x^5 e^x$ និងកត្តាអាំងតេក្រាល $e^{-4\int dx/x} = e^{-4\ln x} = e^{\ln x^{-4}} = x^{-4}$ ។ យើងបាន

$$x^{-4}\frac{dy}{dx} - 4x^{-5}y = xe^x$$

$$\frac{d}{dx}\left[x^{-4}y\right] = xe^x$$

$$x^{-4}y = xe^x - e^x + C$$

ដូចនេះ $y = x^5 e^x - x^4 e^x + Cx^4.$

វិធីសាស្ត្រទី២៖ បំរែបំរួលប៉ារ៉ាម៉ែត្រ

1. សរសេរសមីការជាទំរង់ស្តង់ដា $\frac{dy}{dx} + P(x)y = f(x)$
2. ដោះស្រាយសមីការអូម៉ូសែន $\frac{dy}{dx} + P(x)y = 0$
   សមីការនេះជាសមីការញែកបានដែលមានចម្លើយ $y_c = Ce^{-\int P(x)dx} \equiv Cy_1(x)$.
3. ដោះស្រាយសមីការមិនអូម៉ូសែន៖ រក u ដែល $y_p = u(x)y_1(x)$ ជាចម្លើយនៃសមីការស្តង់ដា។ យើងបាន

$$u\frac{dy_1}{dx} + y_1\frac{du}{dx} + P(x)uy_1 = f(x)$$
$$u\left[\frac{dy_1}{dx} + P(x)y_1\right] + y_1\frac{du}{dx} = f(x)$$

ដោយសារ $\frac{dy_1}{dx} + P(x)y_1 = 0$ នោះ $y_1\frac{du}{dx} = f(x)$

$$du = \frac{f(x)}{y_1(x)}dx \quad \text{និង}\quad u = \int \frac{f(x)}{y_1(x)}dx$$

ដូច្នេះ

$$\begin{aligned} y_p = uy_1 &= \left(\int \frac{f(x)}{y_1(x)}dx\right)e^{-\int P(x)dx} \\ &= e^{-\int P(x)dx}\int e^{\int P(x)dx}f(x)dx, \end{aligned}$$

៤ ចម្លើយទូទៅនៃសមីការគឺ

$$y = y_c + y_p = Ce^{-\int P(x)dx} + e^{-\int P(x)dx}\int e^{\int P(x)dx}f(x)dx$$

ឧទាហរណ៍:ដោះស្រាយសមីការ

$$x\frac{dy}{dx} + 2y = x^{-3}$$

របៀបទី១

សរសេរជាទំរង់ស្តង់ដា $\frac{dy}{dx} + \frac{2}{x}y = x^{-4}$ ។ យើងមាន $P(x) = 2/x, f(x) = x^{-4}$ និងកត្តាអាំងតេក្រាល $e^{2\int dx/x} = e^{2\ln|x|} = e^{\ln x^2} = x^2$ ។ យើងបាន

$$x^2\frac{dy}{dx} + 2xy = x^{-2}$$

$$\frac{d}{dx}\left[x^2y\right] = x^{-2}$$

$$x^2y = -x^{-1} + C$$

ដូចនេះ $y = -x^{-3} + Cx^{-2}$.

របៀបទី២

សរសេរជាទំរង់ស្តង់ដា $\frac{dy}{dx} + \frac{2}{x}y = x^{-4}$

- ដោះស្រាយសមីការអូម៉ូសែន

$$\frac{dy}{dx} + \frac{2}{x}y = 0$$

$$\int \frac{dy}{y} = -\int \frac{2}{x}dx$$

$$\ln|y| = -2\ln|x| + C_1$$

$$y = Cx^{-2}$$

ដូចនេះ $y_c = Cx^{-2}$.

- សមីការមិនអូម៉ូសែននះ រក $y_p = ux^{-2}$ នោះ $y_p' = u'x^{-2} - 2x^{-3}u$ រួចជំនួសចូលសមីការ

$$\begin{aligned} u'x^{-2} - 2x^{-3}u + \frac{2}{x}ux^{-2} &= x^{-4} \\ u' &= x^{-2} \\ u &= -x^{-1} \end{aligned}$$

ដូចនេះ $y_p = -x^{-3}$.

- ចម្លើយទូទៅនៃសមីការគឺ

$$y = y_c + y_p = Cx^{-2} - x^{-3}.$$

លំហាត់អនុវត្តន៍

ដោះស្រាយសមីការ

១. $\frac{dy}{dx} + y = e^{3x}$
២. $y' + 3x^2y = x^2$
៣. $y' + 2xy = x^3$
៤. $x\frac{dy}{dx} - y = x^2 \sin x$
៥. $x\frac{dy}{dx} + (3x + 1)y = e^{-3x}$

គម្រោងមេរៀន

1. សេចក្តីផ្តើម
2. សមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែលលំដាប់មួយ
   - សមីការញែកបាន
   - សមីការលីនេអ៊ែរ
3. សមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែលលីនេអ៊ែរលំដាប់ពីរ
   - សមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែលលីនេអ៊ែរអូម៉ូសែនលំដាប់ពីរមេគុណថេរ
   - សមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែលលីនេអ៊ែរមិនអូម៉ូសែនលំដាប់ពីរមេគុណថេរ
4. ប្រព័ន្ធសមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែលលំដាប់មួយ

សមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែលលីនេអ៊ែរអូម៉ូសែនលំដាប់ពីរមេគុណថេរ

សមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែលលីនេអ៊ែរលំដាប់ពីរមេគុណថេរដែលមានទម្រង់

$$ay'' + by' + cy = f(x), \quad (a \neq 0)$$

ហៅថាសមីការមិនអូម៉ូសែន។ បើ $f(x) = 0$ នោះសមីការ

$$ay'' + by' + cy = 0$$

ហៅថាសមីការអូម៉ូសែន

តើយើងដោះស្រាយសមីការនេះតាមវិធីសាស្ត្រណា?

ពង្រាងគំនិត

រំលឹកដែលថានៅពេលយើងដោះស្រាយសមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែលលីនេអ៊ែរលំដាប់មួយ $ay' + by = 0$ ដោយវិធីសាស្ត្រញែកបានឬកត្តាអាំងតេក្រាល ហើយយើងទទួលបានចម្លើយ $y = Ce^{-b/ax}$ ដែលជាអនុគមន៍អិចស្ប៉ូណង់ស្យែល។ ដូចគ្នាដែរ ដោះស្រាយសមីការ $y' = ky$ មានន័យថារកអនុគមន៍ដែលដេរីវេរបស់វាគឺជាចំនួនថេរគុណនឹងអនុគមន៍ខ្លួនឯង។ អនុគមន៍នោះជាអនុគមន៍អិចស្ប៉ូណង់ស្យែល e^{rx}។ ដូចនេះវិធីសាស្ត្រនេះគឺតាង $y = e^{rx}$ នោះ $y' = re^{rx}$ រួចជំនួសចូលក្នុងសមីការ $ay' + by = 0$ យើងបាន

$$are^{rx} + be^{rx} = 0 \text{ ឬ } e^{rx}(ar + b) = 0,$$

ដោយសារ $e^{rx} \neq 0$ នោះ $ar + b = 0$ ឬ $r = -b/a$ ដូច្នេះ $y = e^{-b/ax}$ ជាចម្លើយនៃសមីការ។

សមីការអូម៉ូសែន

សមីការទំរង់

$$ay'' + by' + cy = 0,$$

ដែល a, b, c ជាចំនួនថេរ។

វិធីសាស្រ្ត: រកចម្លើយដែលមានទំរង់ $y = e^{rx}$ នោះ $y' = re^{rx}$ និង $y'' = r^2e^{rx}$ រួចជំនួសចូលក្នុងសមីការយើងបាន

$$ar^2e^{rx} + bre^{rx} + ce^{rx} = 0 \text{ ឬ } e^{rx}(ar^2 + br + c) = 0.$$

ដោយសារ $e^{rx} \neq 0$ នោះ

$$ar^2 + br + c = 0$$

សមីការនេះហៅថាសមីការសំគាល់។

សមីការសំគាល់

សមីការសំគាល់

$$ar^2 + br + c = 0$$

មានឫសពីរ

$$r_1 = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}, \qquad r_2 = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}.$$

1. r_1 និង r_2 ជាចំនួនពិតពីរផ្សេងគ្នាបើ $b^2 - 4ac > 0$
2. r_1 និង r_2 ជាចំនួនពិតពីរស្មើគ្នាបើ $b^2 - 4ac = 0$
3. r_1 និង r_2 ជាចំនួនកុំផ្លិចឆ្លាស់គ្នាបើ $b^2 - 4ac < 0$

ចម្លើយទូទៅនៃសមីការអូម៉ូសែន

1. ករណីទី១៖ ឫសពិតពីរផ្សេងគ្នា $r_1 \neq r_2$ នោះ

$$y = c_1 e^{r_1 x} + c_2 e^{r_2 x}$$

2. ករណីទី២៖ ឫសពិតពីរស្មើគ្នា $r_1 = r_2$ នោះ

$$y = c_1 e^{r_1 x} + c_2 x e^{r_1 x}$$

3. ករណីទី៣៖ ឫសកុំផ្លិចឆ្លាស់គ្នា $r_1 = \alpha + i\beta, r_2 = \alpha - i\beta$ នោះ

$$y = c_1 e^{(\alpha+i\beta)x} + c_2 e^{(\alpha-i\beta)x} \text{ ឬ}$$
$$y = e^{\alpha x}\left(C_1 \cos\beta x + C_2 \sin\beta x\right)$$

ស្វែងយល់បន្ថែម

3. ករណីទី១៖ $r_1 \neq r_2$ នោះ $y_1 = e^{r_1 x}$ និង $y_2 = e^{r_2 x}$ ជាចម្លើយពីរផ្សេងគ្នានៃសមីការ នោះបន្សំលីនេអ៊ែរ $y = c_1y_1 + c_2y_2, (c_1, c_2$ ចំនួនថេរ) ក៏ជាចម្លើយនៃសមីការដែរ ហេតុអ្វី?

$$\begin{aligned} ay'' + by' + cy &= a(c_1y_1 + c_2y_2)'' + b(c_1y_1 + c_2y_2)' + c(c_1y_1 + c_2y_2) \\ &= a(c_1y_1'' + c_2y_2'') + b(c_1y_1' + c_2y_2') + c(c_1y_1 + c_2y_2) \\ &= c_1(ay_1'' + by_1' + cy_1) + c_2(ay_2'' + by_2' + cy_2) \\ &= c_1.0 + c_2.0 \\ &= 0 \end{aligned}$$

ដូចនេះចម្លើយទូទៅជាបន្សំលីនេអ៊ែរ

$$y = c_1y_1 + c_2y_2 = c_1e^{r_1x} + c_2e^{r_2x}.$$

- ករណីទី២៖ $r_1 = r_2 = r$ នោះ $y_1 = e^{rx}$ និង $y_2 = xe^{rx}$ ជាចម្លើយពីរផ្សេងគ្នានៃសមីការ។ ហេតុអ្វី $y_2 = xe^{rx}$ ជាចម្លើយនៃសមីការ?

$$
\begin{aligned}
y_2 &= xe^{rx} \\
y_2' &= e^{rx} + rxe^{rx} \\
y_2'' &= 2re^{rx} + r^2xe^{rx} \\
ay_2'' + by_2' + cy_2 &= (2ar + b)e^{rx} + (ar^2 + br + c)xe^{rx} = 0
\end{aligned}
$$

ព្រោះ $r = -\frac{b}{2a}$ ជាឫសឌុបនៃសមីការសំគាល់។
ដូចនេះចម្លើយទូទៅជាបន្សំលីនេអ៊ែរ

$$y = c_1y_1 + c_2y_2 = c_1e^{rx} + c_2xe^{rx}.$$

វិធីសាស្រ្តបន្ថយលំដាប់

ហេតុអ្វី $y_2 = xe^{rx}$ មានទំរង់នេះ? ពេលដែល $r_1 = r_2 = r$ នោះយើងទទួលបានចម្លើយមួយ $y_1 = e^{rx}$។ យើងប្រើវិធីសាស្រ្តបន្ថយលំដាប់ដើម្បីរកចម្លើយទីពីរ y_2 ៖ តាង $y_2 = uy_1$ ដែល $u = u(x)$ ជាអនុគមន៍នឹងកំនត់ដើម្បីឲ្យ y_2 ជាចម្លើយនៃសមីការ។ យើងមាន

$$\begin{aligned}
y_2 &= ue^{rx} \\
y_2' &= u'e^{rx} + rue^{rx} \\
y_2'' &= u''e^{rx} + 2ru'e^{rx} + r^2ue^{rx} \\
ay_2'' + by_2' + cy_2 &= e^{rx}[au'' + (2ar + b)u' + (ar^2 + br + c)u] = au''e^{rx}
\end{aligned}$$

ព្រោះ $r = -\frac{b}{2a}$ ជាឫសឌុបនៃសមីការសំគាល់។ បន្ថែមពីនេះទៀត y_2 ជាចម្លើយនៃសមីការ និង $e^{rx} \neq 0$ នោះ $u'' = 0$ មានន័យថា $u(x) = c_1x + c_2$; យើងជ្រើសយក $c_1 = 1, c_2 = 0$ ដូចនេះ $y_2 = uy_1 = xe^{rx}$.

- ករណីទី៣៖ បើ $r_1 = \alpha + i\beta$ និង $r_2 = \alpha - i\beta$ ដែល $i^2 = -1$ នោះចម្លើយទូទៅនៃសមីការគឺ

$$y = c_1 e^{(\alpha+i\beta)x} + c_2 e^{(\alpha-i\beta)x}.$$

តាមរូបមន្ត Euler: $e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta$ យើងបាន

$$e^{i\beta x} = \cos\beta x + i\sin\beta x \text{ និង } e^{-i\beta x} = \cos\beta x - i\sin\beta x$$

នោះ

$$e^{i\beta x} + e^{-i\beta x} = \cos\beta x \text{ និង } e^{i\beta x} - e^{-i\beta x} = 2i\sin\beta x$$

យក $c_1 = c_2 = 1$ នោះ

$$y = e^{(\alpha+i\beta)x} + e^{(\alpha-i\beta)x} = e^{\alpha x}\left(e^{i\beta x} + e^{-i\beta x}\right) = 2e^{\alpha x}\cos\beta x$$

យក $c_1 = 1, c_2 = -1$ នោះ

$$y = e^{(\alpha+i\beta)x} - e^{(\alpha-i\beta)x} = e^{\alpha x}\left(e^{i\beta x} - e^{-i\beta x}\right) = 2ie^{\alpha x}\sin\beta x.$$

នោះ $y_1 = e^{\alpha x}\cos\beta x$ និង $y_2 = e^{\alpha x}\sin\beta x$ ជាចម្លើយពីរផ្សេងគ្នានៃសមីការ ដែលជាអនុគមន៍នៃចំនួនពិត។ ដូចនេះចម្លើយទូទៅជាបន្សំលីនេអ៊ែរ

$$y = C_1y_1 + C_2y_2 = e^{\alpha x}\left(C_1\cos\beta x + C_2\sin\beta x\right).$$

ឧទាហរណ៍

ដោះស្រាយសមីការ

1. $$y'' + 5y' - 6y = 0$$
2. $$y'' + 4y' + 4y = 0$$
3. $$y'' + 4y' + 7y = 0$$

ចម្លើយ

១

$$y'' + 5y' - 6y = 0$$

សមីការសំគាល់

$$r^2 + 5r - 6 = 0,$$
$$r_1 = 1, r_2 = -6$$

ដូចនេះចម្លើយទូទៅនៃសមីការគឺ

$$y = c_1 e^{x} + c_2 e^{-6x}.$$

២

$$y'' + 4y' + 4y = 0$$

សមីការសំគាល់

$$r^2 + 4r + 4 = 0,$$
$$r_1 = r_2 = -2$$

ដូចនេះចម្លើយទូទៅនៃសមីការគឺ

$$y = c_1 e^{-2x} + c_2 x e^{-2x}.$$

គ

$$y'' + 4y' + 7y = 0$$

សមីការសំគាល់

$$r^2 + 4r + 7 = 0,$$
$$r_1 = -2 + i\sqrt{3}, r_2 = -2 - i\sqrt{3}$$

ដូចនេះចម្លើយទូទៅនៃសមីការគឺ

$$y = e^{-2x}\left(c_1 \cos \sqrt{3}x + c_2 \sin \sqrt{3}x\right).$$

ឧទាហរណ៍

ដោះស្រាយសមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែល

១
$$y'' + k^2 y = 0$$

២
$$y'' - k^2 y = 0$$

ដែល $k \in \mathbb{R}$។

ចម្លើយ

1.
$$y'' + k^2 y = 0$$

សមីការសំគាល់

$$r^2 + k^2 = 0,$$
$$r_1 = ki, r_2 = -ki$$

ដូចនេះចម្លើយទូទៅនៃសមីការគឺ

$$y = c_1 \cos kx + c_2 \sin kx.$$

២

$$y'' - k^2 y = 0$$

សមីការសំគាល់

$$r^2 - k^2 = 0,$$
$$r_1 = k, r_2 = -k$$

ដូចនេះចម្លើយទូទៅនៃសមីការគឺ

$$y = c_1 e^{kx} + c_2 e^{-kx}.$$

លំហាត់

រកចម្លើយទូទៅនៃសមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែល

១
$$4y'' + y' = 0$$

២
$$y'' - y' - 6y = 0$$

៣
$$2y'' + 2y' + y = 0$$

៤
$$y'' - 4y' + 5y = 0$$

៥
$$3y'' + 2y' + y = 0$$

សមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែលលីនេអ៊ែរមិនអូម៉ូសែនលំដាប់ពីរមេគុណថេរ

នៅក្នុងផ្នែកនេះយើងដោះស្រាយសមីការដែលមានទម្រង់

$$ay'' + by' + cy = f(x)$$

ដើម្បីដោះស្រាយសមីការនេះយើងត្រូវ

១ រកចម្លើយ y_c នៃសមីការអូម៉ូសែន $ay'' + by' + cy = 0$

២ រកចម្លើយពិសេស y_p នៃសមីការមិនអូម៉ូសែន

៣ ចម្លើយទូទៅគឺ $y = y_c + y_p$

តើយើងអាចរក y_p តាមវិធីសាស្រ្តណាខ្លះ?

១ វិធីសាស្រ្តមេគុណមិនទាន់កំនត់ (Undetermined Coefficients)

២ វិធីសាស្រ្តបំរែបំរួលប៉ារ៉ាម៉ែត្រ (Variation of Parameters)

វិធីសាស្រ្តមេគុណមិនទាន់កំនត់

វិធីសាស្រ្តនេះគឺប្រើបានសម្រាប់សមីការលីនេអ៊ែរដែលមានមេគុណថេរនៅពេលដែល $f(x)$ ជាអនុគមន៍ថេរ ពហុធា អនុគមន៍អិចស្ប៉ូណង់ស្យែល អនុគមន៍ស៊ីនីស កូស៊ីនីស ឬផលគុណឬផលបូកនៃអនុគមន៍ទាំងនេះ។ អនុគមន៍ទាំងនេះមានដេរីវេស្រដៀងនឹង $f(x)$ ខ្លួនឯង ដូចនេះយើងជ្រើសយក y_p ស្រដៀងនឹង $f(x)$ ប៉ុន្តែមេគុណរបស់វាមិនស្គាល់ដែលនឹងត្រូវកំនត់ដោយជំនួស y_p និងដេរីវេរបស់វាទៅក្នុងសមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែល។

តួក្នុង $f(x)$	ជម្រើសសម្រាប់ $y_p(x)$
$ke^{\gamma x}$	$Ae^{\gamma x}$
$kx^n, n = 0, 1, \ldots$	$A_n x^n + A_{n-1}x^{n-1} + \cdots + A_1 x + A_0$
$k\cos\omega x$	$A\cos\omega x + B\sin\omega x$
$k\sin\omega x$	$A\cos\omega x + B\sin\omega x$
$ke^{\alpha x}\cos\omega x$	$e^{\alpha x}(A\cos\omega x + B\sin\omega x)$
$ke^{\alpha x}\sin\omega x$	$e^{\alpha x}(A\cos\omega x + B\sin\omega x)$

សម្គាល់

វិធីសាស្ត្រមេគុណមិនទាន់កំនត់មិនអាចប្រើបាននៅពេលដែល

$$f(x) = \ln x, \quad f(x) = \frac{1}{x}, \quad f(x) = \tan x, \quad f(x) = \sin^{-1} x$$

វិធីសាស្ត្រមេគុណមិនទាន់កំនត់

1. បើ $f(x)$ ជាអនុគមន៍មួយនៅក្នុងជួរឈរទីមួយនៅក្នុងតារាងខាងលើនោះយើងជ្រើសយក y_p ដែលត្រូវគ្នារួចកំនត់មេគុណរបស់វាដោយជំនួស y_p និងដេរីវេរបស់វាទៅក្នុងសមីការ។
2. បើតួនៅក្នុងជម្រើសនៃ y_p ដូចគ្នាទៅនឹងចម្លើយនៃសមីការអូម៉ូសែននោះយើងគុណតួនោះនឹង x (ឬគុណនឹង x^2 បើសមីការសម្គាល់នៃសមីការអូម៉ូសែនមានឬសឌុប)
3. បើ $f(x)$ ជាផលបូកនៃអនុគមន៍នៅក្នុងជួរឈរទីមួយនោះជម្រើសសម្រាប់ y_p ជាផលបូកត្រូវគ្នានៃអនុគមន៍នៅក្នុងជួរឈរទីពីរ។

ឧទាហរណ៍

ដោះស្រាយសមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែល

$$y'' + 4y' - 2y = 2x^2 - 3x + 6$$

- សមីការអូម៉ូសែន

$$y'' + 4y' - 2y = 0$$

សមីការសំគាល់

$$r^2 + 4r - 2 = 0,$$
$$r_1 = -2 - \sqrt{6}, r_2 = -2 + \sqrt{6}$$

ដូចនេះចម្លើយនៃសមីការអូម៉ូសែនគឺ

$$y_c = c_1 e^{-(2+\sqrt{6})x} + c_2 e^{(-2+\sqrt{6})x}.$$

- សមីការមិនអូម៉ូសែន៖ ដោយសារ $f(x)$ ជាពហុធាដឺក្រេទីពីរនោះយើងរកចម្លើយពិសេស y_p ដែលទម្រង់ជាពហុធាដឺក្រេទីពីរដែរ

$$y_p = Ax^2 + Bx + C$$

ដែល A, B, C ជាមេគុណដែលត្រូវកំនត់។
យើងជំនួស y_p និងដេរីវេរបស់វា $y_p' = 2Ax + B$ និង $y_p'' = 2A$ ចូលក្នុងសមីការយើងបាន

$$\begin{aligned} y_p'' + 4y_p' - 2y_p &= 2A + 8Ax + 4B - 2Ax^2 - 2Bx - 2C \\ &= -2Ax^2 + (8A - 2B)x + 2A + 4B - 2C \\ &= 2x^2 - 3x + 6 \end{aligned}$$

យើងផ្ទឹមមេគុណត្រូវគ្នាយើងបានប្រព័ន្ធសមីការលីនេអ៊ែរ

$$\begin{cases} -2A = 2 \\ 8A - 2B = -3 \\ 2A + 4B - 2C = 6 \end{cases}$$

ដោះស្រាយប្រព័ន្ធសមីការនេះយើងទទួលបាន $A = -1, B = -\frac{5}{2}, C = -9$។ ដូចនេះចម្លើយពិសេសគឺ

$$y_p = -x^2 - \frac{5}{2}x - 9$$

- ដូចនេះចម្លើយទូទៅនៃសមីការគឺ

$$y = y_c + y_p = c_1 e^{-(2+\sqrt{6})x} + c_2 e^{(-2+\sqrt{6})x} - x^2 - \frac{5}{2}x - 9$$

ឧទាហរណ៍

ដោះស្រាយសមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែល

$$y'' - y' + y = 2\sin 3x$$

- សមីការអូម៉ូសែន

$$y'' - y' + y = 0$$

សមីការសំគាល់

$$r^2 - r + 1 = 0,$$

$$r_1 = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i,\ \ r_2 = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i$$

ដូចនេះចម្លើយនៃសមីការអូម៉ូសែនគឺ

$$y_c = e^{\frac{1}{2}x}\left(c_1\cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}x\right) + c_2\sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}x\right)\right).$$

- សមីការមិនអូម៉ូសែន៖ ដោយសារ $f(x)$ ជាអនុគមន៍ស៊ីនីសនោះយើងរកចម្លើយពិសេស y_p ដែលមានទម្រង់

$$y_p = A\cos 3x + B\sin 3x$$

ដែល A, B ជាមេគុណដែលត្រូវកំនត់។
យើងជំនួស y_p និងដេរីវេរបស់វា $y_p' = -3A\sin 3x + 3B\cos 3x$ និង $y_p'' = -9A\cos 3x - 9B\sin 3x$ ចូលក្នុងសមីការយើងបាន

$$\begin{aligned} y_p'' - y_p' + y_p &= (-8A - 3B)\cos 3x + (3A - 8B)\sin 3x \\ &= 2\sin 3x \end{aligned}$$

យើងផ្ទឹមមេគុណត្រូវគ្នាយើងបានប្រព័ន្ធសមីការលីនេអ៊ែរ

$$\begin{cases} -8A - 3B = 0 \\ 3A - 8B = 2 \end{cases}$$

ដោះស្រាយប្រព័ន្ធសមីការនេះយើងទទួលបាន $A = \frac{6}{73}, B = -\frac{16}{73}$។ ដូចនេះចម្លើយពិសេសគឺ

$$y_p = \frac{6}{73}\cos 3x - \frac{16}{73}\sin 3x$$

- ដូចនេះចម្លើយទូទៅនៃសមីការគឺ

$$y = y_c + y_p = e^{\frac{1}{2}x}\left(c_1\cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}x\right) + c_2\sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}x\right)\right) + \frac{6}{73}\cos 3x - \frac{16}{73}\sin 3x.$$

ឧទាហរណ៍

ដោះស្រាយសមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែល

$$y'' - 2y' - 3y = 4x - 5 + 6xe^{2x}$$

- សមីការអូម៉ូសែន

$$y'' - 2y' - 3y = 0$$

សមីការសំគាល់

$$r^2 - 2r - 3 = 0,$$
$$r_1 = -1, \; r_2 = 3$$

ដូចនេះចម្លើយនៃសមីការអូម៉ូសែនគឺ

$$y_c = c_1 e^{-x} + c_2 e^{3x}$$

- សមីការមិនអូម៉ូសែន៖ ដោយសារ $f(x)$ ជាផលបូកអនុគមន៍លីនេអ៊ែរ និងអ៊ិចស្ប៉ូណង់ស្យែល នោះយើងរកចម្លើយពិសេស y_p ដែលមានទម្រង់

$$y_p = y_{p_1} + y_{p_2}$$

ដែល $y_{p_1} = Ax + B$ និង $y_{p_2} = (Cx + D)e^{2x}$ ដែល A, B, C, D ជាមេគុណដែលត្រូវកំនត់។ យើងជំនួស $y_p = Ax + B + Cxe^{2x} + De^{2x}$ និងដេរីវេរបស់វា $y_p' = A + (2Cx + 2D + C)e^{2x}$ និង $y_p'' = (4Cx + 4D + 4C)e^{2x}$ ចូលក្នុងសមីការ យើងបាន

$$\begin{aligned} y_p'' - y_p' + y_p &= -3Ax - 2A - 3B - 3Cxe^{2x} + (2C - 3D)e^{2x} \\ &= 4x - 5 + 6xe^{2x} \end{aligned}$$

យើងផ្ទឹមមេគុណត្រូវគ្នាយើងបានប្រព័ន្ធសមីការលីនេអ៊ែរ

$$\begin{cases} -3A = 4 \\ -2A - 3B = -5 \\ -3C = 6 \\ 2C - 3D = 0 \end{cases}$$

ដោះស្រាយប្រព័ន្ធសមីការនេះយើងទទួលបាន $A = -\frac{4}{3}, B = \frac{23}{9}, C = -2, D = -\frac{4}{3}$ ។ ដូចនេះចម្លើយពិសេសគឺ

$$y_p = -\frac{4}{3}x + \frac{23}{9} - 2xe^{2x} - \frac{4}{3}e^{2x}.$$

- ដូចនេះចម្លើយទូទៅនៃសមីការគឺ

$$y = y_c + y_p = c_1e^{-x} + c_2e^{3x} - \frac{4}{3}x + \frac{23}{9} - 2xe^{2x} - \frac{4}{3}e^{2x}.$$

ឧទាហរណ៍

ដោះស្រាយសមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែល

$$y'' - 5y' + 4y = 8e^x$$

- សមីការអូម៉ូសែន

$$y'' - 5y' + 4y = 0$$

សមីការសំគាល់

$$r^2 - 5r + 4 = 0,$$
$$r_1 = 1, \;\; r_2 = 4$$

ដូចនេះចម្លើយនៃសមីការអូម៉ូសែនគឺ

$$y_c = c_1 e^x + c_2 e^{4x}$$

- សមីការមិនអូម៉ូសែន៖ ដោយសារ $f(x)$ ជាអនុគមន៍អិចស្ប៉ូណង់ស្យែលនោះ យើងរកចម្លើយពិសេស y_p ដែលមានទម្រង់

$$y_p = Axe^x$$

ដែល A ជាមេគុណដែលត្រូវកំនត់។ យើងជំនួស y_p និងដេរីវេរបស់វា $y_p' = Axe^x + Ae^x$ និង $y_p'' = Axe^x + 2Ae^x$ ចូលក្នុងសមីការយើងបាន

$$y_p'' - 5y_p' + 4y_p = -3Ae^x = 8e^x$$

ផ្ទឹមមេគុណយើងបាន $-3A = 8$ ឬ $A = -\frac{8}{3}$ ។ដូចនេះចម្លើយពិសេសគឺ

$$y_p = -\frac{8}{3}xe^x$$

- ដូចនេះចម្លើយទូទៅនៃសមីការគឺ $y = y_c + y_p = c_1e^x + c_2e^{4x} - \frac{8}{3}xe^x$.

ឧទាហរណ៍

ដោះស្រាយសមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែល

$$y'' - 2y' + y = e^x$$

- សមីការអូម៉ូសែន

$$y'' - 2y' + y = 0$$

សមីការសំគាល់

$$r^2 - 2r + 1 = 0,$$
$$r_1 = r_2 = 1$$

ដូចនេះចម្លើយនៃសមីការអូម៉ូសែនគឺ

$$y_c = c_1 e^x + c_2 x e^x$$

- សមីការមិនអូម៉ូសែន៖ ដោយសារ $f(x)$ ជាអនុគមន៍អិចស្ប៉ូណង់ស្យែលនោះ យើងរកចម្លើយពិសេស y_p ដែលមានទម្រង់

$$y_p = Ax^2e^x$$

ដែល A ជាមេគុណដែលត្រូវកំនត់។ យើងជំនួស y_p និងដេរីវេរបស់វា $y'_p = Axe^x + Ae^x$ និង $y''_p = Axe^x + 2Ae^x$ ចូលក្នុងសមីការយើងបាន

$$y''_p - 2y'_p + y_p = 2Ae^x = e^x$$

ផ្ទឹមមេគុណយើងបាន $2A = 1$ ឬ $A = \frac{1}{2}$ ។ដូចនេះចម្លើយពិសេសគឺ

$$y_p = \frac{1}{2}x^2e^x$$

- ដូចនេះចម្លើយទូទៅនៃសមីការគឺ $y = y_c + y_p = c_1e^x + c_2xe^x + \frac{1}{32}x^2e^x$.

លំហាត់

ដោះស្រាយសមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែលដោយប្រើវិធីសាស្ត្រមេគុណមិនទាន់កំនត់

១
$$4y'' + 9y = 15$$

២
$$y'' - y' + \frac{1}{4}y = 3 + e^{x/2}$$

៣
$$y'' - 6y' + 9y = 6x^2 + 2 - 12e^{3x}$$

៤
$$y'' + y = 2x\sin x$$

៥
$$y'' - 2y' + 5y = e^x \cos 2x$$

វិធីសាស្ត្របំរែបំរួលប៉ារ៉ាម៉ែត្រ

វិធីសាស្ត្របំរែបំរួលប៉ារ៉ាម៉ែត្រប្រើដើម្បីដោះស្រាយសមីការទម្រង់

$$a_2(x)y'' + a_1(x)y' + a_0(x)y = g(x)$$

ដែល $a_2(\neq 0), a_1, a_0, g$ ជាអនុគមន៍ជាប់។ ដោយចែកនឹង $a(x)$ យើងអាចបម្លែងសមីការជាទម្រង់ស្តង់ដា

$$y'' + P(x)y' + Q(x)y = f(x)$$

វិធីសាស្ត្របំរែបំរួលប៉ារ៉ាម៉ែត្រ

យើងរកចម្លើយពិសេស y_p ដែលមានទម្រង់

$$y_p(x) = u_1(x)y_1(x) + u_2(x)y_2(x)$$

សម្គាល់ y_1 និង y_2 មិនអាស្រ័យលីនេអ៊ែរគ្នាបើ y_1 មិនមែនជាផលគុណនៃចំនួនថេរនឹង y_2 និង y_2 មិនមែនជាផលគុណនៃចំនួនថេរនឹង y_1។ y_1 និង y_2 មិនអាស្រ័យលីនេអ៊ែរគ្នាលុះត្រាតែ Wronskian នៃ y_1 និង y_2 ដែលកំនត់ដោយ

$$W(x) = y_1(x)y_2'(x) - y_1'(x)y_2(x) \neq 0$$

យើងមាន

$$y_p' = u_1y_1' + y_1u_1' + u_2y_2' + y_2u_2'$$
$$y_p'' = u_1y_1'' + y_1'u_1' + y_1u_1'' + u_1'y_1' + u_2y_2'' + y_2'u_2' + y_2u_2'' + u_2'y_2'$$

ជំនួស y_p, y_p', y_p'' ចូលក្នុងសមីការស្តង់ដាយើងបាន

$$\begin{aligned} y_p'' + P(x)y_p' + Q(x)y_p &= u_1\underbrace{[y_1'' + Py_1' + Qy_1]}_{=0} + u_2\underbrace{[y_2'' + Py_2' + Qy_2]}_{=0} \\ &\quad + y_1u_1'' + u_1'y_1' + y_2u_2'' + u_2'y_2' + P[y_1u_1' + y_2u_2'] + y_1'u_1' + y_2'u_2' \\ &= \frac{d}{dx}[y_1u_1' + y_2u_2'] + P[y_1u_1' + y_2u_2'] + y_1'u_1' + y_2'u_2' \\ &= f(x) \end{aligned}$$

ដោយសារយើងចង់កំនត់អនុគមន៍មិនស្គាល់ពីរ u_1 និង u_2 ដូចនេះយើងត្រូវការសមីការពីរ។ យើងអាចទទួលបានសមីការទាំងពីរដោយសន្មត់ថា u_1 និង u_2 ផ្ទៀងផ្ទាត់ $y_1u_1' + y_2u_2' = 0$ នោះយើងនឹងទទួលបានសមីការមួយទៀត $y_1'u_1' + y_2'u_2' = f(x)$ ។ តាមវិធាន Cramer ចម្លើយនៃប្រព័ន្ធសមីការ

$$\begin{aligned} y_1u_1' + y_2u_2' &= 0 \\ y_1'u_1' + y_2'u_2' &= f(x) \end{aligned}$$

អាចសសេរជាទម្រង់

$$u_1' = \frac{W_1}{W} = -\frac{y_2 f(x)}{W}, \quad u_2' = \frac{W_2}{W} = \frac{y_1 f(x)}{W}$$

ដែល

$$W = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix}, \; W_1 = \begin{vmatrix} 0 & y_2 \\ f(x) & y_2' \end{vmatrix}, \; W_2 = \begin{vmatrix} y_1 & 0 \\ y_1' & f(x) \end{vmatrix}$$

ដូច្នេះចម្លើយពិសេស y_p មានទម្រង់

$$y_p(x) = -y_1 \int \frac{y_2 f}{W} dx + y_2 \int \frac{y_1 f}{W} dx$$

ដែល y_1 និង y_2 ជាចម្លើយដែលមិនអាស្រ័យលីនេអ៊ែរគ្នានៃសមីការអូម៉ូសែន

$$y'' + P(x)y' + Q(x)y = 0$$

និង W ជា Wronskian នៃ y_1, y_2

$$W = y_1 y_2' - y_1' y_2$$

ដូចនេះដើម្បីដោះស្រាយសមីការទម្រង់

$$a_2(x)y'' + a_1(x)y' + a_0(x)y = g(x)$$

1. បម្លែងជាទម្រង់ស្តង់ដា $y'' + P(x)y' + Q(x)y = f(x)$
2. រកចម្លើយនៃសមីការអូម៉ូសែន $y'' + P(x)y' + Q(x)y = 0$

$$y_c = c_1y_1 + c_2y_2$$

3. រកចម្លើយពិសេស y_p នៃសមីការស្តង់ដា

$$y_p = u_1y_1 + u_2y_2$$

ដែល $u_1' = \frac{W_1}{W}, u_2' = \frac{W_2}{W}$

4. ចម្លើយទូទៅគឺ

$$y = y_c + y_p$$

ឧទាហរណ៍

ដោះស្រាយសមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែលតាមវិធីសាស្រ្តបំរែបំរួលប៉ារ៉ាម៉ែត្រ

$$y'' + y = \frac{1}{\cos x}$$

- សមីការអូម៉ូសែន

$$y'' + y = 0$$

សមីការសម្គាល់

$$r^2 + 1 = 0$$

មានឫស $r_1 = i,\ r_2 = -i$។ ចម្លើយនៃសមីការអូម៉ូសែនគឺ

$$y_c = c_1 \cos x + c_2 \sin x$$

- Wronskian៖ ចម្លើយមិនអាស្រ័យលីនេអ៊ែរគ្នាគឺ $y_1 = \cos x$ និង $y_2 = \sin x$ នោះ

$$W(x) = y_1(x)y_2'(x) - y_1'(x)y_2(x) = \cos^2 x + \sin^2 x = 1$$

- រកចម្លើយពិសេស y_p

$$\begin{aligned} y_p(x) &= -y_1 \int \frac{y_2 f}{W} dx + y_2 \int \frac{y_1 f}{W} dx \\ &= -\cos x \int y_2(x) \frac{1}{\cos x} dx + y_2(x) \int y_1(x) \frac{1}{\cos x} dx \\ &= -\cos x \int \tan x dx + \sin x \int 1 dx \\ &= \cos x \ln|\cos x| + x \sin x \end{aligned}$$

- ចម្លើយទូទៅនៃសមីការគឺ

$$y = y_c + y_p = c_1 \cos x + c_2 \sin x + x \sin x + \cos x \ln|\cos x|.$$

ឧទាហរណ៍

ដោះស្រាយសមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែល

$$y'' - 4y' + 4y = (x+1)e^{2x}$$

របៀបទី១៖ វិធីសាស្ត្របំរែបំរួលប៉ារ៉ាម៉ែត្រ

- សមីការអូម៉ូសែន

$$y'' - 4y' + 4y = 0$$

សមីការសម្គាល់

$$(r-2)^2 = 0$$

មានឫស $r_1 = r_2 = 2$។ ចម្លើយនៃសមីការអូម៉ូសែនគឺ

$$y_c = c_1 e^{2x} + c_2 x e^{2x}$$

- Wronskian៖ ចម្លើយមិនអាស្រ័យលីនេអ៊ែរគ្នាគឺ $y_1 = e^{2x}$ និង $y_2 = xe^{2x}$ នោះ

$$W(x) = y_1(x)y_2'(x) - y_1'(x)y_2(x) = e^{4x}$$

- រកចម្លើយពិសេស y_p

$$\begin{aligned}
y_p(x) &= -y_1 \int \frac{y_2 f}{W} dx + y_2 \int \frac{y_1 f}{W} dx \\
&= -e^{2x} \int \frac{xe^{2x}(x+1)e^{2x}}{e^{4x}} dx + xe^{2x} \int \frac{e^{2x}(x+1)e^{2x}}{e^{4x}} dx \\
&= -e^{2x} \int (x^2 + x) dx + xe^{2x} \int (x+1) dx \\
&= \left(-\frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2}\right) e^{2x} + \left(\frac{x^2}{2} + x\right) xe^{2x} = \frac{x^3}{6} e^{2x} + \frac{x^2}{2} e^{2x}
\end{aligned}$$

- ចម្លើយទូទៅនៃសមីការគឺ $y = y_c + y_p = c_1 e^{2x} + c_2 xe^{2x} + \frac{x^3}{6} e^{2x} + \frac{x^2}{2} e^{2x}$

របៀបទី២៖ វិធីសាស្ត្រមេគុណមិនទាន់កំនត់

- សមីការអូម៉ូសែន
$$y'' - 4y' + 4y = 0$$
សមីការសម្គាល់
$$(r-2)^2 = 0$$
មានឫស $r_1 = r_2 = 2$។ ចម្លើយនៃសមីការអូម៉ូសែនគឺ
$$y_c = c_1 e^{2x} + c_2 x e^{2x}$$
- សមីការមិនអូម៉ូសែន៖ ដោយសារ $f(x)$ ជាផលគុណនៃពហុធានិងអនុគមន៍អិចស្ប៉ូណង់ស្យែលនោះយើងរកចម្លើយពិសេស y_p ដែលមានទម្រង់
$$y_p = x^2(Ax + B)e^{2x}$$
ដែល A, B ជាមេគុណដែលត្រូវកំនត់។

យើងជំនួស y_p និងដេរីវេរបស់វាចូលក្នុងសមីការយើងបាន

$$y_p'' - 4y_p' + 4y_p = (6Ax + 2B)e^{2x} = (x + 1)e^{2x}$$

ផ្ទឹមមេគុណយើងបាន $6A = 1$, $2B = 1$ នោះ $A = \frac{1}{6}, B = \frac{1}{2}$ ។ ដូចនេះចម្លើយពិសេសគឺ

$$y_p = \left(\frac{x^3}{6} + \frac{x^2}{2}\right)e^{2x}$$

ដូច្នេះចម្លើយទូទៅនៃសមីការគឺ

$$y = y_c + y_p = c_1e^{2x} + c_2xe^{2x} + \frac{x^3}{6}e^{2x} + \frac{x^2}{2}e^{2x}$$

លំហាត់

ដោះស្រាយសមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែល

១. $$y'' + 3y' + 2y = \sin e^x$$

២. $$y'' + y = \tan x$$

៣. $$y'' + y = \cos^2 x$$

៤. $$y'' - 9y = 9xe^{-3x}$$

៥. $$y'' + 3y' + 2y = \frac{1}{1 + e^x}$$

គម្រោងមេរៀន

1. សេចក្តីផ្តើម
2. សមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែលលំដាប់មួយ
   - សមីការញែកបាន
   - សមីការលីនេអ៊ែរ
3. សមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែលលីនេអ៊ែរលំដាប់ពីរ
   - សមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែលលីនេអ៊ែរអូម៉ូសែនលំដាប់ពីរមេគុណថេរ
   - សមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែលលីនេអ៊ែរមិនអូម៉ូសែនលំដាប់ពីរមេគុណថេរ
4. ប្រព័ន្ធសមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែលលំដាប់មួយ

ប្រព័ន្ធសមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែលលំដាប់មួយ

ពិនិត្យមើលប្រព័ន្ធសមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែលលំដាប់មួយនៃអនុគមន៍មិនស្គាល់ពីរ $y_1(x), y_2(x)$

$$\begin{cases} y_1' = a_{11}y_1 + a_{12}y_2 \\ y_2' = a_{21}y_1 + a_{22}y_2 \end{cases}$$

យើងអាចបម្លែងជាទម្រង់

$$\begin{bmatrix} y_1' \\ y_2' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix}$$

តាង

$$Y = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix}, \quad A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$$

នោះយើងបាន

$$Y' = AY$$

សម្គាល់

ដេរីវេនៃម៉ាទ្រីសដែលមានធាតុជាអញ្ញតិគឺទទួលបានដោយដេរីវេនៃធាតុនីមួយៗ។ ជាឧទាហរណ៍

$$Y(x) = \begin{bmatrix} y_1(x) \\ y_2(x) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e^{-2x} \\ \sin x \end{bmatrix}$$

$$Y'(x) = \begin{bmatrix} y_1'(x) \\ y_2'(x) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2e^{-2x} \\ \cos x \end{bmatrix}$$

ត្រង់ស្ប៉ូនៃ A

$$A^T = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{21} \\ a_{12} & a_{22} \end{bmatrix}$$

ចម្រាស់នៃ A

$$AA^{-1} = A^{-1}A = I$$

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A}\begin{bmatrix} a_{22} & -a_{12} \\ -a_{21} & a_{11} \end{bmatrix}$$

$$\det A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$$

តម្លៃផ្ទាល់និងវ៉ិចទ័រផ្ទាល់

និយមន័យ

$\lambda \in \mathbb{R}$ (ឬ $\mathbb{C}$) ជាតម្លៃផ្ទាល់បើ

$$Av = \lambda v$$

ចំពោះវ៉ិចទ័រ $v \neq 0$ ដែលជាវ៉ិចទ័រផ្ទាល់ត្រូវគ្នានឹង λ

តាមនិយមន័យយើងបាន

$$(A - \lambda I)v = 0$$

$$\begin{bmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} - \lambda \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{cases} (a_{11} - \lambda)v_1 + a_{12}v_2 = 0 \\ a_{21}v_1 + (a_{22} - \lambda)v_2 = 0 \end{cases}$$

ប្រព័ន្ធសមីការនេះមានចម្លើយ $v \neq 0$ បើ $\det(A - \lambda I) = 0$
លក្ខខណ្ឌ

$$\det(A - \lambda I) = 0$$

$$\det \begin{bmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} - \lambda \end{bmatrix} = 0$$

$$(a_{11} - \lambda)(a_{22} - \lambda) - a_{21}a_{12} = 0$$

$$\lambda^2 - (a_{11} + a_{22})\lambda + a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12} = 0$$

រកតម្លៃផ្ទាល់និងវ៉ិចទ័រផ្ទាល់

- ដើម្បីរកតម្លៃផ្ទាល់ λ យើងដោះស្រាយសមីការសម្គាល់

$$\det(A - \lambda I) = 0$$
$$\lambda^2 - (a_{11} + a_{22})\lambda + a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12} = 0$$

- ដើម្បីរកវ៉ិចទ័រផ្ទាល់ v យើងដោះស្រាយសមីការប្រព័ន្ធសមីការអូម៉ូសែន

$$(A - \lambda I)v = 0$$
$$\begin{cases} (a_{11} - \lambda)v_1 + a_{12}v_2 = 0 \\ a_{21}v_1 + (a_{22} - \lambda)v_2 = 0 \end{cases}$$

ឧទាហរណ៍

រកតម្លៃផ្ទាល់និងវ៉ិចទ័រផ្ទាល់នៃ

$$A = \begin{bmatrix} -3 & 1 \\ 1 & -3 \end{bmatrix}$$

- សមីការសម្គាល់នៃ A គឺ

$$\det(A - \lambda I) = \begin{vmatrix} -3-\lambda & 1 \\ 1 & -3-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 + 6\lambda + 8 = 0$$

ដូចនេះតម្លៃផ្ទាល់នៃ A គឺ

$$\lambda_1 = -2, \ \lambda_2 = -4$$

- រកវ៉ិចទ័រផ្ទាល់ដែលត្រូវនឹង $\lambda = -2$ យើងដោះស្រាយប្រព័ន្ធសមីការអូម៉ូសែន

$$\begin{cases} (-3-\lambda)v_1 + v_2 = 0 \\ v_1 + (-3-\lambda)v_2 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} -v_1 + v_2 = 0 \\ v_1 - v_2 = 0 \end{cases}$$

នោះយើងបាន $v_1 = v_2$។ ដូចនេះវ៉ិចទ័រផ្ទាល់ដែលត្រូវនឹង $\lambda = -2$ គឺ

$$v = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_1 \end{bmatrix} = v_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

- រកវ៉ិចទ័រផ្ទាល់ដែលត្រូវនឹង $\lambda = -4$ យើងដោះស្រាយប្រព័ន្ធសមីការអូម៉ូសែន

$$\begin{cases}(-3-\lambda)v_1 + v_2 = 0\\ v_1 + (-3-\lambda)v_2 = 0\end{cases}$$

$$\begin{cases}v_1 + v_2 = 0\\ v_1 + v_2 = 0\end{cases}$$

នោះយើងបាន $v_1 = -v_2$។ ដូចនេះវ៉ិចទ័រផ្ទាល់ដែលត្រូវនឹង $\lambda = -4$ គឺ

$$v = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} v_1 \\ -v_1 \end{bmatrix} = v_1 \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

លំហាត់

រកតម្លៃផ្ទាល់និងវ៉ិចទ័រផ្ទាល់នៃ

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -12 \\ 1 & -5 \end{bmatrix}$$

$Y' = AY$

តាង
$$Y = Ke^{\lambda x}, \quad Y' = \lambda K e^{\lambda x}$$
ជំនួសចូលក្នុងសមីការយើងបាន
$$Y' = \lambda K e^{\lambda x} = AY = AKe^{\lambda x}$$
ដូចនេះយើងបាន
$$AK = \lambda K$$
ដែលបញ្ជាក់ថា λ ជាតម្លៃផ្ទាល់នៃ A និង K ជាវ៉ិចទ័រផ្ទាល់ដែលត្រូវនឹង λ ។

តើយើងរក λ និង K តាមរបៀបណា?

- λ ជាឫសនៃសមីការសម្គាល់នៃ A

$$\det(A - \lambda I) = 0$$
$$\lambda^2 - (a_{11} + a_{22})\lambda + a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12} = 0$$

- $K \neq 0$ ជាចម្លើយនៃប្រព័ន្ធសមីការអូម៉ូសែន

$$(A - \lambda I)K = 0$$
$$\begin{cases} (a_{11} - \lambda)k_1 + a_{12}k_2 = 0 \\ a_{21}k_1 + (a_{22} - \lambda)k_2 = 0 \end{cases}$$

ចម្លើយនៃ $Y' = AY$

1. ករណីឫសពិតពីរផ្សេងគ្នា $\lambda_1 \neq \lambda_2 \in \mathbb{R}$

$$Y = c_1 K_1 e^{\lambda_1 x} + c_2 K_2 e^{\lambda_2 x}$$

ដែល K_1 ជាវ៉ិចទ័រផ្ទាល់ដែលត្រូវនឹងតម្លៃផ្ទាល់ λ_1 និង K_2 ជាវ៉ិចទ័រផ្ទាល់ដែលត្រូវនឹងតម្លៃផ្ទាល់ λ_2។

2. ករណីឫសពិតពីរស្មើគ្នា $\lambda_1 = \lambda_2 \in \mathbb{R}$

$$Y = c_1 K_1 e^{\lambda_1 x} + c_2 (K_1 x + K_2) e^{\lambda_1 x}$$

ដែល K_1 ជាវ៉ិចទ័រផ្ទាល់ដែលត្រូវនឹងតម្លៃផ្ទាល់ λ_1 និង K_2

$$(A - \lambda_1 I) K_2 = K_1$$

- ៣ ករណីឫសកុំផ្លិច $\lambda_1 = \alpha + i\beta, \lambda_2 = \alpha - i\beta, \beta > 0, i^2 = -1$
  ចម្លើយអនុគមន៍កុំផ្លិច
  $$Y_1 = K_1 e^{\lambda_1 x}, \; Y_2 = \bar{K}_1 e^{\bar{\lambda}_1 x}$$
  ចម្លើយអនុគមន៍ចំនួនពិត
  $$\begin{aligned} Y_1 &= e^{\alpha x}[\mathrm{Re}(K_1)\cos\beta x - \mathrm{Im}(K_1)\sin\beta x] \\ Y_2 &= e^{\alpha x}[\mathrm{Im}(K_1)\cos\beta x + \mathrm{Re}(K_1)\sin\beta x] \end{aligned}$$
  ចម្លើយទូទៅគឺ
  $$Y = c_1 Y_1 + c_2 Y_2$$

ករណីឫសពិតពីរផ្សេងគ្នា

ឧទាហរណ៍

ដោះស្រាយប្រព័ន្ធសមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែល

$$\begin{cases} y_1' = 2y_1 + 3y_2 \\ y_2' = 2y_1 + y_2 \end{cases}$$

បម្លែងជាទម្រង់ម៉ាទ្រីស

$$Y' = AY$$

ដែល

$$Y = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix}, \quad A = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$$

- សមីការសម្គាល់នៃ A គឺ

$$\det(A - \lambda I) = \begin{vmatrix} 2-\lambda & 3 \\ 2 & 1-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - 3\lambda - 4 = 0$$

ដូចនេះតម្លៃផ្ទាល់នៃ A គឺ

$$\lambda_1 = -1, \ \lambda_2 = 4$$

- រកវ៉ិចទ័រផ្ទាល់ដែលត្រូវនឹង $\lambda = -1$ យើងដោះស្រាយប្រព័ន្ធសមីការអូម៉ូសែន

$$\begin{cases} 3k_1 + 3k_2 = 0 \\ 2k_1 + 2k_2 = 0 \end{cases}$$

នោះយើងបាន $k_1 = -k_2$។ យក $k_2 = -1$ ដូចនេះវ៉ិចទ័រផ្ទាល់ដែលត្រូវនឹង $\lambda = -1$ គឺ

$$K_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

- រកវ៉ិចទ័រផ្ទាល់ដែលត្រូវនឹង $\lambda = 4$ យើងដោះស្រាយប្រព័ន្ធសមីការអូម៉ូសែន

$$\begin{cases} -2k_1 + 3k_2 = 0 \\ 2k_1 - 3k_2 = 0 \end{cases}$$

នោះយើងបាន $k_1 = \frac{3}{2}k_2$។ យក $k_2 = 2$ ដូចនេះវ៉ិចទ័រផ្ទាល់ដែលត្រូវនឹង $\lambda = 4$ គឺ

$$K_2 = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix}$$

- ចម្លើយទូទៅនៃប្រព័ន្ធគឺ

$$Y = c_1 \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} e^{-x} + c_2 \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix} e^{4x}$$

ឬ

$$y_1 = c_1 e^{-x} + 3c_2 e^{4x}, \quad y_2 = -c_1 e^{-x} + 2c_2 e^{4x}$$

ឧទាហរណ៍

ដោះស្រាយប្រព័ន្ធសមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែល

$$\begin{cases} y_1' = -3y_1 + y_2 \\ y_2' = y_1 - 3y_2 \end{cases}$$

បម្លែងជាទម្រង់ម៉ាទ្រីស

$$Y' = AY$$

ដែល

$$Y = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix}, \quad A = \begin{bmatrix} -3 & 1 \\ 1 & -3 \end{bmatrix}$$

- សមីការសម្គាល់នៃ A គឺ

$$\det(A-\lambda I)=\begin{vmatrix}-3-\lambda & 1\\ 1 & -3-\lambda\end{vmatrix}=\lambda^2+6\lambda+8=0$$

ដូចនេះតម្លៃផ្ទាល់នៃ A គឺ

$$\lambda_1=-2,\ \lambda_2=-4$$

- រកវ៉ិចទ័រផ្ទាល់ដែលត្រូវនឹង $\lambda=-2$ យើងដោះស្រាយប្រព័ន្ធសមីការអូម៉ូសែន

$$\begin{cases}-k_1+k_2=0\\ k_1-k_2=0\end{cases}$$

នោះយើងបាន $k_1=k_2$។ យក $k_2=1$ ដូចនេះវ៉ិចទ័រផ្ទាល់ដែលត្រូវនឹង $\lambda=-2$ គឺ

$$K_1=\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}$$

- រកវ៉ិចទ័រផ្ទាល់ដែលត្រូវនឹង $\lambda = -4$ យើងដោះស្រាយប្រព័ន្ធសមីការអូម៉ូសែន

$$\begin{cases} k_1 + k_2 = 0 \\ k_1 + k_2 = 0 \end{cases}$$

នោះយើងបាន $k_1 = -k_2$។ យក $k_2 = -1$ ដូចនេះវ៉ិចទ័រផ្ទាល់ដែលត្រូវនឹង $\lambda = -4$ គឺ

$$K_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

- ចម្លើយទូទៅនៃប្រព័ន្ធគឺ

$$Y = c_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} e^{-2x} + c_2 \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} e^{-4x}$$

លំហាត់

ដោះស្រាយប្រព័ន្ធសមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែល

១
$$\begin{cases} y_1' = y_1 + 2y_2 \\ y_2' = 4y_1 + 3y_2 \end{cases}$$

២
$$\begin{cases} y_1' = 2y_1 + 2y_2 \\ y_2' = y_1 + 3y_2 \end{cases}$$

៣
$$\begin{cases} y_1' = -4y_1 + 2y_2 \\ y_2' = -\frac{5}{2}y_1 + y_2 \end{cases}$$

ករណីឫសពិតពីរស្មើគ្នា

នៅក្នុងករណីសមីការសម្គាល់មានឫសឌុបនោះចម្លើយមួយគឺមានទម្រង់ $Y_1 = K_1 e^{\lambda_1 x}$ ដែល K_1 ជាវ៉ិចទ័រផ្ទាល់ដែលត្រូវនឹងតម្លៃផ្ទាល់ λ_1 ។ តើយើងរកចម្លើយ Y_2 យ៉ាងដូចម្តេច?
តាង

$$Y_2 = K_1 x e^{\lambda_1 x} + K_2 e^{\lambda_1 x}$$

ជំនួស Y_2 និង Y_2' ចូលក្នុងសមីការយើងបាន

$$(AK_1 - \lambda_1 K_1) x e^{\lambda_1 x} + (AK_2 - \lambda_1 K_2 - K_1) e^{\lambda_1 x} = 0$$

ដូចនេះយើងបាន

$$(A - \lambda_1 I) K_1 = 0$$
$$(A - \lambda_1 I) K_2 = K_1$$

ឧទាហរណ៍

ដោះស្រាយប្រព័ន្ធសមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែល

$$\begin{cases} y_1' = -y_1 + 3y_2 \\ y_2' = -3y_1 + 5y_2 \end{cases}$$

បម្លែងជាទម្រង់ម៉ាទ្រីស

$$Y' = AY$$

ដែល

$$Y = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix}, \quad A = \begin{bmatrix} -1 & 3 \\ -3 & 5 \end{bmatrix}$$

- សមីការសម្គាល់នៃ A គឺ

$$\det(A - \lambda I) = \begin{vmatrix} -1-\lambda & 3 \\ -3 & 5-\lambda \end{vmatrix} = (\lambda - 2)^2 = 0$$

ដូចនេះតម្លៃផ្ទាល់នៃ A គឺ $\lambda_1 = \lambda_2 = 2$

- រកវ៉ិចទ័រផ្ទាល់ដែលត្រូវនឹង $\lambda = 2$ យើងដោះស្រាយប្រព័ន្ធសមីការអូម៉ូសែន

$$\begin{cases} -3k_1 + 3k_2 = 0 \\ -3k_1 + 3k_2 = 0 \end{cases}$$

នោះយើងបាន $k_1 = k_2$។ យក $k_2 = 1$ ដូចនេះវ៉ិចទ័រផ្ទាល់ដែលត្រូវនឹង $\lambda = 2$ គឺ

$$K_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

ដូចនេះ

$$Y_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} e^{2x}$$

- រក $K_2 = \begin{bmatrix} l_1 \\ l_2 \end{bmatrix}$ ដោយដោះស្រាយប្រព័ន្ធសមីការ

$$(A - \lambda_1 I)K_2 = K_1$$

$$\begin{cases} -3l_1 + 3l_2 = 1 \\ -3l_1 + 3l_2 = 1 \end{cases}$$

នោះយើងបាន $-l_1 + l_2 = 1/3$។ យក $l_2 = 0, l_1 = -1/3$ ដូចនេះ

$$K_2 = \begin{bmatrix} -1/3 \\ 0 \end{bmatrix} \text{ និង } Y_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} xe^{2x} + \begin{bmatrix} -1/3 \\ 0 \end{bmatrix} e^{2x}$$

ដូច្នេះ

$$Y = c_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} e^{2x} + c_2 \left(\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} xe^{2x} + \begin{bmatrix} -1/3 \\ 0 \end{bmatrix} e^{2x} \right)$$

ឧទាហរណ៍

ដោះស្រាយប្រព័ន្ធសមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែល

$$\begin{cases} y_1' = -2y_1 + y_2 \\ y_2' = -y_1 \end{cases}$$

បម្លែងជាទម្រង់ម៉ាទ្រីស

$$Y' = AY$$

ដែល

$$Y = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix}, \quad A = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$$

- សមីការសម្គាល់នៃ A គឺ

$$\det(A - \lambda I) = \begin{vmatrix} -2-\lambda & 1 \\ -1 & -\lambda \end{vmatrix} = (\lambda + 1)^2 = 0$$

ដូចនេះតម្លៃផ្ទាល់នៃ A គឺ $\lambda_1 = \lambda_2 = -1$

- រកវ៉ិចទ័រផ្ទាល់ដែលត្រូវនឹង $\lambda = -1$ យើងដោះស្រាយប្រព័ន្ធសមីការអូម៉ូសែន

$$\begin{cases} -k_1 + k_2 = 0 \\ -k_1 + k_2 = 0 \end{cases}$$

នោះយើងបាន $k_1 = k_2$។ យក $k_2 = 1$ ដូចនេះវ៉ិចទ័រផ្ទាល់ដែលត្រូវនឹង $\lambda = -1$ គឺ

$$K_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

ដូចនេះ

$$Y_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} e^{-x}$$

- រក $K_2 = \begin{bmatrix} l_1 \\ l_2 \end{bmatrix}$ ដោយដោះស្រាយប្រព័ន្ធសមីការ

$$(A - \lambda_1 I)K_2 = K_1$$

$$\begin{cases} -l_1 + l_2 = 1 \\ -l_1 + l_2 = 1 \end{cases}$$

នោះយើងបាន $-l_1 + l_2 = 1$ ។ យក $l_2 = 1, l_1 = 0$ ដូចនេះ

$$K_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \text{ និង } Y_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} xe^{-x} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} e^{-x}$$

ដូច្នេះ

$$Y = c_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} e^{-x} + c_2 \left(\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} xe^{-x} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} e^{-x} \right)$$

លំហាត់

ដោះស្រាយប្រព័ន្ធសមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែល

១
$$\begin{cases} y_1' = 3y_1 - y_2 \\ y_2' = 9y_1 - 3y_2 \end{cases}$$

២
$$\begin{cases} y_1' = -6y_1 + 5y_2 \\ y_2' = -5y_1 + 4y_2 \end{cases}$$

៣
$$\begin{cases} y_1' = 2y_1 + 4y_2 \\ y_2' = -y_1 + 6y_2 \end{cases}$$

ករណីឫសកុំផ្លិច

បើ $\lambda_1 = \alpha + i\beta$ និង $\lambda_2 = \alpha - i\beta,\ \beta > 0,\ i^2 = -1$ ជាចំនួនតម្លៃផ្ទាល់កុំផ្លិចនៃម៉ាទ្រីសមេគុណ A នោះវ៉ិចទ័រផ្ទាល់ក៏ជាចំនួនកុំផ្លិចដែរ។

ឧទាហរណ៍

ដោះស្រាយប្រព័ន្ធសមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែល

$$\begin{cases} y_1' = 6y_1 - y_2 \\ y_2' = 5y_1 + 4y_2 \end{cases}$$

បម្លែងជាទម្រង់ម៉ាទ្រីស

$$Y' = AY$$

ដែល

$$Y = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix}, \quad A = \begin{bmatrix} 6 & -1 \\ 5 & 4 \end{bmatrix}$$

- សមីការសម្គាល់នៃ A គឺ

$$\det(A - \lambda I) = \begin{vmatrix} 6-\lambda & -1 \\ 5 & 4-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - 10\lambda + 29 = 0$$

ដូចនេះតម្លៃផ្ទាល់នៃ A គឺ $\lambda_1 = 5 + 2i, \ \lambda_2 = 5 - 2i$

- រកវ៉ិចទ័រផ្ទាល់ដែលត្រូវនឹង $\lambda = 5 + 2i$ យើងដោះស្រាយប្រព័ន្ធសមីការអូម៉ូសែន

$$\begin{cases} (1-2i)k_1 - k_2 = 0 \\ 5k_1 - (1+2i)k_2 = 0 \end{cases}$$

នោះយើងបាន $k_2 = (1-2i)k_1$។ យក $k_1 = 1$ ដូចនេះវ៉ិចទ័រផ្ទាល់ដែលត្រូវនឹង $\lambda = 5 + 2i$ គឺ

$$K_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1-2i \end{bmatrix}$$

ដូចនេះ

$$Y_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1-2i \end{bmatrix} e^{(5+2i)x}$$

- រកវ៉ិចទ័រផ្ទាល់ដែលត្រូវនឹង $\lambda = 5 - 2i$ យើងដោះស្រាយប្រព័ន្ធសមីការអូម៉ូសែន

$$\begin{cases}(1+2i)k_1 - k_2 = 0 \\ 5k_1 - (1-2i)k_2 = 0\end{cases}$$

នោះយើងបាន $k_2 = (1+2i)k_1$។ យក $k_1 = 1$ ដូចនេះវ៉ិចទ័រផ្ទាល់ដែលត្រូវនឹង $\lambda = 5 - 2i$ គឺ

$$K_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1+2i \end{bmatrix}, \quad Y_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1+2i \end{bmatrix} e^{(5-2i)x}$$

ដូចនេះ

$$Y = c_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 1-2i \end{bmatrix} e^{(5+2i)x} + c_2 \begin{bmatrix} 1 \\ 1+2i \end{bmatrix} e^{(5-2i)x}$$

សម្គាល់៖ ចម្លើយអនុគមន៍ចំនួនពិត

$$
\begin{aligned}
Y_1 &= e^{\alpha x}[\mathrm{Re}(K_1)\cos\beta x - \mathrm{Im}(K_1)\sin\beta x] \\
Y_2 &= e^{\alpha x}[\mathrm{Im}(K_1)\cos\beta x + \mathrm{Re}(K_1)\sin\beta x]
\end{aligned}
$$

នៅក្នុងករណីនេះ

$$
K_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1-2i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} + i\begin{bmatrix} 0 \\ -2 \end{bmatrix}, \quad \mathrm{Re}(K_1) = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \mathrm{Im}(K_1) = \begin{bmatrix} 0 \\ -2 \end{bmatrix}
$$

ចម្លើយទូទៅគឺ

$$
Y = c_1\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}\cos 2x - \begin{bmatrix} 0 \\ -2 \end{bmatrix}\sin 2x\right)e^{5x} + c_2\left(\begin{bmatrix} 0 \\ -2 \end{bmatrix}\cos 2x + \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}\sin 2x\right)e^{5x}
$$

ឧទាហរណ៍

ដោះស្រាយប្រព័ន្ធសមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែល

$$\begin{cases} y_1' = 2y_1 + 8y_2 \\ y_2' = -y_1 - 2y_2 \end{cases}$$

បម្លែងជាទម្រង់ម៉ាទ្រីស

$$Y' = AY$$

ដែល

$$Y = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix}, \quad A = \begin{bmatrix} 2 & 8 \\ -1 & -2 \end{bmatrix}$$

- សមីការសម្គាល់នៃ A គឺ

$$\det(A - \lambda I) = \begin{vmatrix} 2-\lambda & 8 \\ -1 & -2-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 + 4 = 0$$

ដូចនេះតម្លៃផ្ទាល់នៃ A គឺ $\lambda_1 = 2i, \ \lambda_2 = -2i$

- រកវ៉ិចទ័រផ្ទាល់ដែលត្រូវនឹង $\lambda = 2i$ យើងដោះស្រាយប្រព័ន្ធសមីការអូម៉ូសែន

$$\begin{cases}(2-2i)k_1 + 8k_2 = 0\\ -k_1 + (-2-2i)k_2 = 0\end{cases}$$

នោះយើងបាន $k_1 = -(2+2i)k_2$។ យក $k_1 = -1$ ដូចនេះវ៉ិចទ័រផ្ទាល់ដែលត្រូវនឹង $\lambda = 2i$ គឺ

$$K_1 = \begin{bmatrix}2+2i\\-1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}2\\-1\end{bmatrix} + i\begin{bmatrix}2\\0\end{bmatrix}, \quad \mathrm{Re}(K_1) = \begin{bmatrix}2\\-1\end{bmatrix}, \quad \mathrm{Im}(K_1) = \begin{bmatrix}2\\0\end{bmatrix}$$

ដូចនេះ

$$Y = c_1\left(\begin{bmatrix}2\\-1\end{bmatrix}\cos 2x - \begin{bmatrix}2\\0\end{bmatrix}\sin 2x\right) + c_2\left(\begin{bmatrix}2\\0\end{bmatrix}\cos 2x + \begin{bmatrix}2\\-1\end{bmatrix}\sin 2x\right)$$

លំហាត់

ដោះស្រាយប្រព័ន្ធសមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែល

១

$$\begin{cases} y_1' = y_1 + 2y_2 \\ y_2' = 4y_1 + 3y_2 \end{cases}$$

២

$$\begin{cases} y_1' = 2y_1 + 2y_2 \\ y_2' = y_1 + 3y_2 \end{cases}$$

៣

$$\begin{cases} y_1' = -4y_1 + 2y_2 \\ y_2' = -\frac{5}{2}y_1 + 2y_2 \end{cases}$$