គណិតវិទ្យាI

មាស ទ្បេន

ដេប៉ាតឺម៉ង់គណិតវិទ្យា

២០២១

គម្រោងមេរៀន

1. សេចក្តីផ្តើម
2. ប្រព័ន្ធសមីការលីនេអ៊ែរ
   - វិធីបំបាត់ Gauss-Jordan
   - វិធីសាស្រ្តម៉ាទ្រីសច្រាស់
   - ក្បួន Cramer
3. អនុគមន៍ចំនួនពិតមួយអថេរ
   - លីមីតនៃអនុគមន៍
   - ដេរីវេនៃអនុគមន៍
   - ការអនុវត្តន៍នៃដេរីវេ

សេចក្ដីផ្ដើម

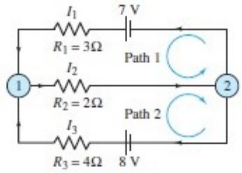
ផ្នែកទី១៖ ប្រព័ន្ធសមីការលីនេអ៊ែរមានវត្តមាននៅក្នុងការអនុវត្តជាច្រើន។ យើងលើកយកការអនុវត្តពីរ

1. ការថ្លឹងសមីការគីមី

$$x_1\, CH_4 + x_2\, O_2 \rightarrow x_3\, CO_2 + x_4\, H_2O$$

   ដែល x_1, x_2, x_3, x_4 ជាចំនួនគត់វិជ្ជមានដែលមិនស្គាល់។

2. សៀគ្វីអគ្គីសនី៖ កំនត់ I_1, I_2, I_3



ដើម្បីដោះស្រាយបញ្ហាទាំងនេះយើងសសេរជាទម្រង់ប្រព័ន្ធសមីការលីនេអ៊ែរ បន្ទាប់មកទៀតយើងប្រើវិធីសាស្ត្រនានាក្នុងការដោះស្រាយប្រព័ន្ធសមីការលីនេអ៊ែរ។ ធាតុផ្សំសំខាន់ៗដែលចាំបាច់មានដូចជា

- ម៉ាទ្រីស
- ប្រមាណវិធីលើម៉ាទ្រីស
- ម៉ាទ្រីសច្រាស់

វិធីសាស្ត្រដោះស្រាយប្រព័ន្ធសមីការលីនេអ៊ែរ

១ វិធីសាស្ត្របំបាត់ Gauss-Jordan
២ វិធីសាស្ត្រម៉ាទ្រីសច្រាស់
៣ ក្បួន Cramer

តើអ្វីជាគណិតគណនា?

ផ្នែកទី២៖ គណិតគណនាជាមែកធាងមួយនៃគណិតវិទ្យាដែលសិក្សាអំពីរបៀបដែលអ្វីមួយប្រែប្រួល។ ជាមូលដ្ឋានវាជាការសិក្សាអំពីរបៀបដែលតម្លៃមួយប្រែប្រួលធៀបនឹងតម្លៃមួយទៀត។ តាមពិតទៅយើងអាចកំនត់គណិតគណនាជាផ្នែកមួយនៃគណិតវិទ្យាដែលពាក់ព័ន្ធនឹងលីមីត។ គណិតគណនាត្រូវបានគេប្រើដើម្បីពន្យល់អំពីចលនានៃភពជុំវិញព្រះអាទិត្យ គណនាគន្លងនៃផ្កាយរណប ព្យាករណ៍ចំនួនប្រជាជន ប៉ាន់ស្មានការកើនឡើងឬធ្លាក់ចុះនៃតម្លៃប្រេង ព្យាករណ៍ធាតុអាកាសវាស់លទ្ធផលចង្វាក់បេះដូង គណនាផលលាភធានារ៉ាប់រងអាយុជីវិតជាដើម។

បញ្ហាសំខាន់ៗ ក្នុងគណិតគណនា

1. បញ្ហាក្រលាផ្ទៃ
2. បញ្ហាបន្ទាត់ប៉ះ
3. បញ្ហាល្បឿន
4. បញ្ហាបរមាកម្ម

ឧទាហរណ៍

ប្រអប់ (ប្រលេពីប៉ែតកែង) គេសង់ផ្ទះប៉ូវកម្លាំងមួយដែលមានចំណុះ $200\,cm^3$។ បើកំពស់នៃប្រអប់ស្មើនឹង 2 ដងនៃទទឹងប្រអប់ តើវិមាត្រនៃប្រអប់ស្មើនឹងប៉ុន្មានដែលនឹងធ្វើឲ្យក្រលាផ្ទៃមុខកាត់នៃប្រអប់អប្បបរមា?

គម្រោងមេរៀន

1. សេចក្ដីផ្ដើម

2. ប្រព័ន្ធសមីការលីនេអ៊ែរ
   - វិធីបំបាត់ Gauss-Jordan
   - វិធីសាស្ត្រម៉ាទ្រីសច្រាស់
   - ក្បួន Cramer

3. អនុគមន៍ចំនួនពិតមួយអថេរ
   - លីមីតនៃអនុគមន៍
   - ដេរីវេនៃអនុគមន៍
   - ការអនុវត្តន៍នៃដេរីវេ

ប្រព័ន្ធសមីការលីនេអ៊ែរ

ប្រព័ន្ធសមីការលីនេអ៊ែរដែលមាន m សមីការ n អញ្ញាតិ មានទម្រង់

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n &= b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n &= b_2 \\ &\vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n &= b_m \end{aligned}$$

ករណីពិសេស $m = n = 2$

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 &= b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 &= b_2 \end{aligned}$$

ប្រព័ន្ធសមីការលីនេអ៊ែរអាចបម្លែងជាទម្រង់ម៉ាទ្រីស

$$\mathbf{AX} = \mathbf{b}$$

ដែល

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{X} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}$$

ហេតុអ្វី? យើងត្រូវយល់អំពីលក្ខណៈនៃម៉ាទ្រីស ប្រមាណវិធីនៃម៉ាទ្រីស.....

តើអ្វីជាម៉ាទ្រីស

និយមន័យ

បើ m និង n ជាចំនួនគត់វិជ្ជមាននោះម៉ាទ្រីស $m \times n$ ជាតារាងដែលមានរាងចតុកោណកែង

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

ដែលធាតុនីមួយៗ a_{ij} ជាលេខ។ ម៉ាទ្រីស $m \times n$ មាន m ជួរដេកនិង n ជួរឈរ។

សម្គាល់

- ធាតុ a_{ij} ជាធាតុនៅជួរដេកទី i និងជួរឈរទី j
- សន្ទស្សន៍ i តំណាងឲ្យជួរដេក និងសន្ទស្សន៍ j តំណាងឲ្យជួរឈរ
- ម៉ាទ្រីសដែលមាន m ជួរដេកនិង n ជួរឈរមានវិមាត្រ $m \times n$
- បើ $m = n$ នោះម៉ាទ្រីសជាម៉ាទ្រីសការេដែលមានលំដាប់ n ដែលធាតុ $a_{11}, a_{22}, \ldots, a_{nn}$ ជាធាតុអង្កត់ទ្រូង។
- និមិត្តសញ្ញា: $\mathbf{A} = [a_{ij}]_{m \times n}$ ជាម៉ាទ្រីសដែលមាន m ជួរដេកនិង n ជួរឈរ។

ប្រមាណវិធីលើម៉ាទ្រីស

ភាពស្មើគ្នានៃម៉ាទ្រីស

ម៉ាទ្រីសពីរ $\mathbf{A} = [a_{ij}]$ និង $\mathbf{B} = [b_{ij}]$ ស្មើគ្នានៅពេលវាមានវិមាត្រដូចគ្នា $m \times n$ និង $a_{ij} = b_{ij}$ ចំពោះ $1 \leq i \leq m$ និង $1 \leq j \leq n$។

ឧទាហរណ៍

ពិនិត្យមើលម៉ាទ្រីស

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}, \ \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix}, \ \mathbf{C} = \begin{bmatrix} 1 & 3 \end{bmatrix}, \ \mathbf{D} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ x & 4 \end{bmatrix}$$

ម៉ាទ្រីស **A** និង **B** មិនស្មើគ្នាព្រោះមានវិមាត្រខុសគ្នា។ ដូចគ្នាដែរ ម៉ាទ្រីស **B** និង **C** មិនស្មើគ្នា។ ម៉ាទ្រីស **A** និង **D** ស្មើគ្នាលុះត្រាតែ $x = 3$ ។

ផលបូកនៃម៉ាទ្រីស

បើ $\mathbf{A} = [a_{ij}]$ និង $\mathbf{B} = [b_{ij}]$ ជាម៉ាទ្រីសមានវិមាត្រ $m \times n$ នោះផលបូករបស់វាជាម៉ាទ្រីស $m \times n$

$$\mathbf{A} + \mathbf{B} = [a_{ij} + b_{ij}]$$

ផលបូកនៃម៉ាទ្រីសពីរដែលមានវិមាត្រខុសគ្នាគឺមិនត្រូវបានកំនត់។

ឧទាហរណ៍

១

$$\begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1+1 & 2+3 \\ 0+(-1) & 1+2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 5 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}$$

២

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 4 & 0 & -1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 3 \end{bmatrix} \text{ គឺមិនកំនត់}$$

បើ $\mathbf{A} = [a_{ij}]$ ជាម៉ាទ្រីសមានវិមាត្រ $m \times n$ និង c ជាចំនួនថេរនោះផលគុណនៃ $\mathbf{A}$ ដោយចំនួនថេរ c ជាម៉ាទ្រីស $m \times n$

$$c\mathbf{A} = [ca_{ij}]$$

ឧទាហរណ៍

ចំពោះម៉ាទ្រីស

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 \\ -3 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

នោះ

$$3\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 3(1) & 3(2) & 3(4) \\ 3(-3) & 3(0) & 3(-1) \\ 3(2) & 3(1) & 3(2) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 6 & 12 \\ -9 & 0 & -3 \\ 6 & 3 & 6 \end{bmatrix}$$

ផលគុណនៃម៉ាទ្រីស

បើ $\mathbf{A} = [a_{ij}]$ ជាម៉ាទ្រីស $m \times n$ និង $\mathbf{B} = [b_{ij}]$ ជាម៉ាទ្រីស $n \times p$ នោះផលគុណនៃម៉ាទ្រីស $\mathbf{AB}$ ជាម៉ាទ្រីស $m \times p$

$$\mathbf{AB} = [c_{ij}]$$

ដែល

$$\begin{aligned} c_{ij} &= \sum_{k=1}^{n} a_{ik} b_{kj} \\ &= a_{i1} b_{1j} + a_{i2} b_{2j} + \cdots + a_{in} b_{nj} \end{aligned}$$

សម្គាល់៖
និយមន័យនេះមានន័យថាដើម្បីរកធាតុនៅជួរដេកទី i និងជួរឈរទី j នៃផលគុណ $\mathbf{AB}$ យើងគុណធាតុនៃជួរដេកទី i នៃម៉ាទ្រីស $\mathbf{A}$ ដោយធាតុត្រូវគ្នានៃជួរឈរទី j នៃម៉ាទ្រីស $\mathbf{B}$ រួចបូកចូលគ្នា។

ឧទាហរណ៍

រក **AB** ដែល

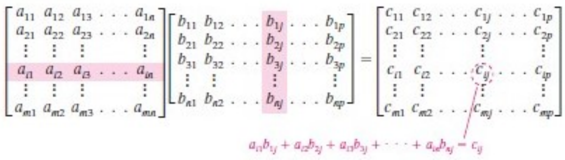
$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} -1 & 3 \\ 4 & -2 \\ 5 & 0 \end{bmatrix}, \ \mathbf{B} = \begin{bmatrix} -3 & 2 \\ -4 & 1 \end{bmatrix}$$

សម្គាល់ថាផលគុណ **AB** កំនត់បានព្រោះ **A** មានវិមាត្រ 3×2 និង **B** មានវិមាត្រ 2×2 ហើយផលគុណ **AB** មានវិមាត្រ 3×2 និង

$$\begin{bmatrix} -1 & 3 \\ 4 & -2 \\ 5 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -3 & 2 \\ -4 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (-1)(-3)+(3)(-4) & (-1)(2)+(3)(1) \\ (4)(-3)+(-2)(-4) & (4)(2)+(-2)(1) \\ (5)(-3)+(0)(-4) & (5)(2)+(0)(1) \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} -9 & 1 \\ -4 & 6 \\ -15 & 10 \end{bmatrix}$$

ទម្រង់ទូទៅនៃប្រមាណវិធីគុណម៉ាទ្រីស



ផលគុណនៃពីរម៉ាទ្រីសគឺកំនត់បានបើចំនួនជួរឈរនៃម៉ាទ្រីសទីមួយស្មើនឹងចំនួនជួរដេកនៃម៉ាទ្រីសទីពីរ

$$\mathbf{A}_{m\times n}\mathbf{B}_{n\times p} = \mathbf{AB}_{m\times p}$$

ឧទាហរណ៍

១ $$\begin{bmatrix}1 & 0 & 3\\ 2 & -1 & -2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-2 & 4 & 2\\ 1 & 0 & 0\\ -1 & 1 & -1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-5 & 7 & -1\\ -3 & 6 & 6\end{bmatrix}$$

២ $$\begin{bmatrix}1 & 2\\ 1 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-1 & 2\\ 1 & -1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}$$

៣ $$\begin{bmatrix}1 & -2 & -3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2\\ -1\\ 1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1\end{bmatrix}$$

៤ $$\begin{bmatrix}2\\ -1\\ 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & -2 & -3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2 & -4 & -6\\ -1 & 2 & 3\\ 1 & -2 & -3\end{bmatrix}$$

លំហាត់

រក (បើអាច) **AB** និង **BA**

១
$$\mathbf{A}=\begin{bmatrix}2 & -1 & 3\\ 5 & 1 & -2\\ 2 & 2 & 3\end{bmatrix},\ \mathbf{B}=\begin{bmatrix}0 & 1 & 2\\ -4 & 1 & 3\\ -4 & -1 & -2\end{bmatrix}$$

២
$$\mathbf{A}=\begin{bmatrix}2 & 1\\ -3 & 4\\ 1 & 6\end{bmatrix},\ \mathbf{B}=\begin{bmatrix}0 & -1 & 0\\ 4 & 0 & 2\\ 8 & -1 & 7\end{bmatrix}$$

៣
$$\mathbf{A}=\begin{bmatrix}-1\\ 2\\ -2\\ 1\end{bmatrix},\ \mathbf{B}=\begin{bmatrix}2 & 1 & 3 & 2\end{bmatrix}$$

ប្រព័ន្ធសមីការលីនេអ៊ែរទម្រង់ម៉ាទ្រីស

បើ

$$\mathbf{A}=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n}\\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n}\\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots\\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn}\end{bmatrix},\quad \mathbf{X}=\begin{bmatrix} x_1\\ x_2\\ \vdots\\ x_n\end{bmatrix},\quad \mathbf{b}=\begin{bmatrix} b_1\\ b_2\\ \vdots\\ b_m\end{bmatrix}$$

នោះ

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n}\\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n}\\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots\\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn}\end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1\\ x_2\\ \vdots\\ x_n\end{bmatrix}=\begin{bmatrix} b_1\\ b_2\\ \vdots\\ b_m\end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_n\\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots+a_{2n}x_n\\ \vdots\\ a_{m1}x_1+a_{m2}x_2+\cdots+a_{mn}x_n\end{bmatrix}=\begin{bmatrix} b_1\\ b_2\\ \vdots\\ b_m\end{bmatrix}$$

ឧទាហរណ៍

បម្លែងប្រព័ន្ធសមីការលីនេអ៊ែរជាទម្រង់ម៉ាទ្រីស

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 + 3x_3 &= 0 \\ 4x_1 + 5x_2 + 6x_3 &= 3 \\ 7x_1 + 8x_2 + 9x_3 &= 6 \end{aligned}$$

ទម្រង់ម៉ាទ្រីស

$$\mathbf{AX} = \mathbf{b}$$

ដែល

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix}, \ \mathbf{X} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}, \ \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 0 \\ 3 \\ 6 \end{bmatrix}$$

វិធីសាស្ត្រដោះស្រាយប្រព័ន្ធសមីការលីនេអ៊ែរ

- ប្រព័ន្ធសមីការលីនេអ៊ែរមួយអាច
  1. មានចម្លើយតែមួយគត់ ឬ
  2. មានចម្លើយច្រើនរាប់មិនអស់ ឬ
  3. គ្មានចម្លើយ
- វិធីសាស្ត្រដោះស្រាយប្រព័ន្ធសមីការលីនេអ៊ែរ
  1. វិធីសាស្ត្របំបាត់ Gauss-Jordan
  2. វិធីសាស្ត្រម៉ាទ្រីសច្រាស់
  3. រូបមន្ត Cramer

វិធីបំបាត់ Gauss-Jordan

1. សរសេរប្រព័ន្ធសមីការលីនេអ៊ែរជាទម្រង់ម៉ាទ្រីស $[\mathbf{A}\,|\,\mathbf{b}]$
2. ប្រើប្រមាណវិធីលើជួរដេក
   1. ប្តូរពីរជួរដេក $R_i \leftrightarrow R_j$
   2. គុណជួរដេកនឹងចំនួនថេរណាមួយ $cR_i \rightarrow R_i$
   3. បូកជួរដេកមួយនឹងចំនួនថេរគុណជួរដេកមួយទៀត $R_i + cR_j \rightarrow R_i$
3. បម្លែងជាម៉ាទ្រីសមានទម្រង់កាំជណ្តើរដែលមានលេខនាំមុខ 1 និងទីតាំងផ្សេងទៀតសូន្យ។

ឧទាហរណ៍(ចម្លើយតែមួយគត់)

ដោះស្រាយប្រព័ន្ធសមីការលីនេអ៊ែរ

$$
\begin{aligned}
x_2 + x_3 - 2x_4 &= -3 \\
x_1 + 2x_2 - x_3 &= 2 \\
2x_1 + 4x_2 + x_3 - 3x_4 &= -2 \\
x_1 - 4x_2 - 7x_3 - x_4 &= -19
\end{aligned}
$$

បម្លែងជាទម្រង់ម៉ាទ្រីស

$$\mathbf{AX} = \mathbf{b}$$

ដែល

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & -2 \\ 1 & 2 & -1 & 0 \\ 2 & 4 & 1 & -3 \\ 1 & -4 & -7 & -1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{X} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} -3 \\ 2 \\ -2 \\ -19 \end{bmatrix}$$

យើងសរសេរជាទម្រង់

$$[\mathbf{A}\,|\,\mathbf{b}] = \left[\begin{array}{cccc|c} 0 & 1 & 1 & -2 & -3 \\ 1 & 2 & -1 & 0 & 2 \\ 2 & 4 & 1 & -3 & -2 \\ 1 & -4 & -7 & -1 & -19 \end{array}\right] \xrightarrow{R_1 \leftrightarrow R_2} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & -1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & -2 & -3 \\ 2 & 4 & 1 & -3 & -2 \\ 1 & -4 & -7 & -1 & -19 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow[R_4 - R_1 \to R_4]{R_3 - 2R_1 \to R_3} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & -1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & -2 & -3 \\ 0 & 0 & 3 & -3 & -6 \\ 0 & -6 & -6 & -1 & -21 \end{array}\right] \xrightarrow{R_4 + 6R_2 \to R_4} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & -1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & -2 & -3 \\ 0 & 0 & 3 & -3 & -6 \\ 0 & 0 & 0 & -13 & -39 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow[(-\frac{1}{13})R_4\to R_4]{(\frac{1}{3})R_3\to R_3}\left[\begin{array}{cccc|c}1&2&-1&0&2\\0&1&1&-2&-3\\0&0&1&-1&-2\\0&0&0&1&3\end{array}\right]\xrightarrow[R_3+R_4\to R_3]{R_2+2R_4\to R_2}\left[\begin{array}{cccc|c}1&2&-1&0&2\\0&1&1&0&3\\0&0&1&0&1\\0&0&0&1&3\end{array}\right]$$

$$\xrightarrow[R_2-R_3\to R_2]{R_1+R_3\to R_1}\left[\begin{array}{cccc|c}1&2&0&0&3\\0&1&0&0&2\\0&0&1&0&1\\0&0&0&1&3\end{array}\right]\xrightarrow{R_1-2R_2\to R_1}\left[\begin{array}{cccc|c}1&0&0&0&-1\\0&1&0&0&2\\0&0&1&0&1\\0&0&0&1&3\end{array}\right]$$

ដូច្នេះចម្លើយនៃប្រព័ន្ធសមីការគឺ $x_1 = -1, x_2 = 2, x_3 = 1, x_4 = 3$

ឧទាហរណ៍ (ចម្លើយច្រើនរាប់មិនអស់)

ដោះស្រាយប្រព័ន្ធសមីការលីនេអ៊ែរ

$$\begin{aligned} x_2 + 2x_3 - x_4 &= 1 \\ x_1 + x_3 + x_4 &= 4 \\ -x_1 + x_2 - x_4 &= 2 \\ 2x_2 + 3x_3 - x_4 &= 7 \end{aligned}$$

បម្លែងជាទម្រង់ម៉ាទ្រីស

$$\mathbf{AX} = \mathbf{b}$$

ដែល

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 & -1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 3 & -1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{X} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 1 \\ 4 \\ 2 \\ 7 \end{bmatrix}$$

យើងសរសេរជាទម្រង់

$$[\mathbf{A}\,|\,\mathbf{b}] = \left[\begin{array}{cccc|c} 0 & 1 & 2 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 4 \\ -1 & 1 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 2 & 3 & -1 & 7 \end{array}\right] \xrightarrow{R_1 \leftrightarrow R_2} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 1 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & 2 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 2 & 3 & -1 & 7 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{R_1 + R_3 \to R_3} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 1 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 6 \\ 0 & 2 & 3 & -1 & 7 \end{array}\right] \xrightarrow[R_4 - 2R_2 \to R_4]{R_3 - R_2 \to R_3} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 1 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 5 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{(-1)R_3 \to R_3} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 1 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & -5 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 5 \end{array}\right] \xrightarrow{R_4 + R_3 \to R_4} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 1 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & -5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

នៅក្នុងករណីនេះប្រព័ន្ធសមីការមានចម្លើយច្រើនរាប់មិនអស់។ យើងបម្លែងជា

$$
\begin{aligned}
x_1 + x_3 + x_4 &= 4 \\
x_2 + 2x_3 - x_4 &= 1 \\
x_3 - x_4 &= -5
\end{aligned}
$$

ដោះស្រាយដោយទាញជំនួសយើងបាន

$$x_3 = -5 + x_4, \quad x_2 = 11 - x_4, \quad x_1 = 9 - 2x_4$$

ដូច្នេះ

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 9 - 2x_4 \\ 11 - x_4 \\ -5 + x_4 \\ x_4 \end{bmatrix}, \quad x_4 \in \mathbb{R}.$$

ឧទាហរណ៍ (មិនមានចម្លើយ)

ដោះស្រាយប្រព័ន្ធសមីការលីនេអ៊ែរ

$$\begin{aligned} x_1 - x_2 + 2x_3 &= 4 \\ x_1 + x_3 &= 6 \\ 2x_1 - 3x_2 + 5x_3 &= 4 \\ 3x_1 + 2x_2 - x_3 &= 1 \end{aligned}$$

បម្លែងជាទម្រង់ម៉ាទ្រីស

$$\mathbf{AX} = \mathbf{b}$$

ដែល

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & -3 & 5 \\ 3 & 2 & -1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{X} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 4 \\ 6 \\ 4 \\ 1 \end{bmatrix}$$

យើងសរសេរជាទម្រង់

$$[\mathbf{A}\mid\mathbf{b}]=\left[\begin{array}{ccc|c}1&-1&2&4\\1&0&1&6\\2&-3&5&4\\3&2&-1&1\end{array}\right]\xrightarrow[R_4-3R_1\to R_4]{\substack{R_2-R_1\to R_2\\R_3-2R_1\to R_3}}\left[\begin{array}{ccc|c}1&-1&2&4\\0&1&-1&2\\0&-1&1&-4\\0&5&-7&-11\end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{R_3+R_2\to R_3}\left[\begin{array}{ccc|c}1&-1&2&4\\0&1&-1&2\\0&0&0&-2\\0&5&-7&-11\end{array}\right]$$

យើងសង្កេតឃើញថាជួរដេកទីពមានធាតុសូន្យទាំងអស់លើកលែងតែធាតុចុងក្រោយដែលនេះបញ្ជាក់ថាប្រព័ន្ធសមីការមិនមានចម្លើយ។

លំហាត់

ដោះស្រាយប្រព័ន្ធសមីការលីនេអ៊ែរ

១

$$
\begin{aligned}
x_1 - 3x_3 &= -2 \\
3x_1 + x_2 - 2x_3 &= 5 \\
2x_1 + 2x_2 + x_3 &= 4
\end{aligned}
$$

២

$$
\begin{aligned}
2x_1 + x_2 - x_3 + 2x_4 &= -6 \\
3x_1 + 4x_2 + x_4 &= 1 \\
x_1 + 5x_2 + 2x_3 + 6x_4 &= -3 \\
5x_1 + 2x_2 - x_3 - x_4 &= 3
\end{aligned}
$$

1. បម្លែងជាទម្រង់ម៉ាទ្រីស

$$\mathbf{AX} = \mathbf{b}$$

ដែល

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -3 \\ 3 & 1 & -2 \\ 2 & 2 & 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{X} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} -2 \\ 5 \\ 4 \end{bmatrix}$$

យើងសរសេរជាទម្រង់

$$[\mathbf{A} \,|\, \mathbf{b}] = \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -3 & -2 \\ 3 & 1 & -2 & 5 \\ 2 & 2 & 1 & 4 \end{array}\right] \xrightarrow[R_3-2R_1\to R_3]{R_2-3R_1\to R_2} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -3 & -2 \\ 0 & 1 & 7 & 11 \\ 0 & 2 & 7 & 8 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{R_3-2R_2\to R_3} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -3 & -2 \\ 0 & 1 & 7 & 11 \\ 0 & 0 & -7 & -14 \end{array}\right] \xrightarrow{(-\frac{1}{7})R_3\to R_3} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -3 & -2 \\ 0 & 1 & 7 & 11 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow[R_2-7R_3\to R_2]{R_1+3R_3\to R_1}\left[\begin{array}{ccc|c}1&0&0&4\\0&1&0&-3\\0&0&1&2\end{array}\right]$$

ដូចនេះចម្លើយនៃប្រព័ន្ធសមីការគឺ $x_1=4, x_2=-3, x_3=2$

២ បម្លែងជាទម្រង់ម៉ាទ្រីស

$$\mathbf{AX}=\mathbf{b}$$

ដែល

$$\mathbf{A}=\begin{bmatrix}2&1&-1&2\\3&4&0&1\\1&5&2&6\\5&2&-1&-1\end{bmatrix},\quad \mathbf{X}=\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\end{bmatrix},\quad \mathbf{b}=\begin{bmatrix}-6\\1\\-3\\3\end{bmatrix}$$

$$[\mathbf{A}\,|\,\mathbf{b}] = \left[\begin{array}{cccc|c} 2 & 1 & -1 & 2 & -6 \\ 3 & 4 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 5 & 2 & 6 & -3 \\ 5 & 2 & -1 & -1 & 3 \end{array}\right] \xrightarrow{R_1 \leftrightarrow R_3} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 5 & 2 & 6 & -3 \\ 3 & 4 & 0 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & -1 & 2 & -6 \\ 5 & 2 & -1 & -1 & 3 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{\substack{R_2 - 3R_1 \to R_2 \\ R_3 - 2R_1 \to R_3 \\ R_4 - 5R_1 \to R_4}} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 5 & 2 & 6 & -3 \\ 0 & -11 & -6 & -17 & 10 \\ 0 & -9 & -5 & -10 & 0 \\ 0 & -23 & -11 & -31 & 18 \end{array}\right] \xrightarrow{(-\frac{1}{11})R_2 \to R_2} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 5 & 2 & 6 & -3 \\ 0 & 1 & \frac{6}{11} & \frac{17}{11} & -\frac{10}{11} \\ 0 & -9 & -5 & -10 & 0 \\ 0 & -23 & -11 & -31 & 18 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{\substack{R_3 + 9R_2 \to R_3 \\ R_4 + 23R_2 \to R_4}} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 5 & 2 & 6 & -3 \\ 0 & 1 & \frac{6}{11} & \frac{17}{11} & -\frac{10}{11} \\ 0 & 0 & -\frac{1}{11} & \frac{43}{11} & -\frac{90}{11} \\ 0 & 0 & \frac{17}{11} & \frac{50}{11} & -\frac{32}{11} \end{array}\right] \xrightarrow{\substack{(-11)R_3 \to R_3 \\ 11R_4 \to R_4}} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 5 & 2 & 6 & -3 \\ 0 & 1 & \frac{6}{11} & \frac{17}{11} & -\frac{10}{11} \\ 0 & 0 & 1 & -43 & 90 \\ 0 & 0 & 17 & 50 & -32 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{R_4-17R_3\to R_4}\left[\begin{array}{cccc|c}1 & 5 & 2 & 6 & -3\\ 0 & 1 & \frac{6}{11} & \frac{17}{11} & -\frac{10}{11}\\ 0 & 0 & 1 & -43 & 90\\ 0 & 0 & 0 & 781 & -1562\end{array}\right]\xrightarrow{\frac{1}{781}R_4\to R_4}\left[\begin{array}{cccc|c}1 & 5 & 2 & 6 & -3\\ 0 & 1 & \frac{6}{11} & \frac{17}{11} & -\frac{10}{11}\\ 0 & 0 & 1 & -43 & 90\\ 0 & 0 & 0 & 1 & -2\end{array}\right]$$

$$\xrightarrow[R_3+43R_4\to R_3]{\substack{R_1-6R_4\to R_1\\ R_2-\frac{17}{11}R_4\to R_2}}\left[\begin{array}{cccc|c}1 & 5 & 2 & 0 & 9\\ 0 & 1 & \frac{6}{11} & 0 & \frac{24}{11}\\ 0 & 0 & 1 & 0 & 4\\ 0 & 0 & 0 & 1 & -2\end{array}\right]\xrightarrow[R_2-\frac{6}{11}R_3\to R_2]{R_1-2R_3\to R_1}\left[\begin{array}{cccc|c}1 & 5 & 0 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 0 & 4\\ 0 & 0 & 0 & 1 & -2\end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{R_1-5R_2\to R_1}\left[\begin{array}{cccc|c}1 & 0 & 0 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 0 & 4\\ 0 & 0 & 0 & 1 & -2\end{array}\right]$$

វិធីសាស្ត្រម៉ាទ្រីសច្រាស់

និយមន័យ

ម៉ាទ្រីស $\mathbf{A}_{n\times n}$ ជាម៉ាទ្រីសមានចម្រាស់បើមានម៉ាទ្រីស $\mathbf{B}_{n\times n}$ ដែល

$$\mathbf{AB} = \mathbf{BA} = \mathbf{I}_n$$

ដែល $\mathbf{I}_n$ ជាម៉ាទ្រីសឯកតាលំដាប់ n។ ម៉ាទ្រីស $\mathbf{B}$ ជាចម្រាស់នៃម៉ាទ្រីស $\mathbf{A}$ តាងដោយ $\mathbf{B} := \mathbf{A}^{-1}$

សម្គាល់

$$\mathbf{I}_n = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

ករណីពិសេស

$$\mathbf{I}_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{I}_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

ចំណាំ

- ម៉ាទ្រីសមិនមែនការេមិនមានចម្រាស់នោះទេ។ តាមពិតទៅបើ **A** មានវិមាត្រ $m \times n$ និង **B** មានវិមាត្រ $n \times m$ ដែល $m \neq n$ នោះ **AB** និង **BA** មានវិមាត្រខុសគ្នានិងមិនអាចស្មើគ្នា។
- មិនមែនគ្រប់ម៉ាទ្រីសការេសុទ្ធតែមានចម្រាស់នោះទេ។
- ចម្រាស់នៃម៉ាទ្រីសការេបើមានគឺមានតែមួយគត់។

ចម្រាស់នៃម៉ាទ្រីស

រកចម្រាស់នៃម៉ាទ្រីសតាមវិធីបំបាត់ Gauss-Jordan

តាង $\mathbf{A}$ ជាម៉ាទ្រីសការេលំដាប់ n

1. សរសេរម៉ាទ្រីស $n\times 2n$ ដែលមានម៉ាទ្រីស $\mathbf{A}$ នៅខាងឆ្វេងដៃ និងម៉ាទ្រីសឯកតា $\mathbf{I}_{n\times n}$ នៅខាងស្តាំដៃដែលមានទម្រង់ $[\mathbf{A}\,|\,\mathbf{I}]$
2. បើអាចបម្លែង $\mathbf{A}$ ជាម៉ាទ្រីសឯកតា $\mathbf{I}$ ដោយប្រើប្រមាណវិធីលើជួរដេកទៅលើម៉ាទ្រីស $[\mathbf{A}\,|\,\mathbf{I}]$។ លទ្ធផលជាម៉ាទ្រីស $[\mathbf{I}\,|\,\mathbf{A}^{-1}]$ ។ បើមិនអាចបម្លែងបានទេនោះ ម៉ាទ្រីស $\mathbf{A}$ មិនមានចម្រាស់ទេ។
3. ពិនិត្យផ្ទៀងផ្ទាត់ $\mathbf{A}\mathbf{A}^{-1}=\mathbf{I}=\mathbf{A}^{-1}\mathbf{A}$

ឧទាហរណ៍(ម៉ាទ្រីសមានចម្រាស់)

រកចម្រាស់នៃម៉ាទ្រីស

$$\mathbf{A}=\begin{bmatrix}1 & -1 & 0\\ 1 & 0 & -1\\ -6 & 2 & 3\end{bmatrix}$$

យើងសរសេរជាទម្រង់

$$[\mathbf{A}\,|\,\mathbf{I}]=\left[\begin{array}{ccc|ccc}1 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0\\ 1 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0\\ -6 & 2 & 3 & 0 & 0 & 1\end{array}\right]$$

$$\xrightarrow[R_3+6R_1\to R_3]{R_2-R_1\to R_2}\left[\begin{array}{ccc|ccc}1 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & -1 & -1 & 1 & 0\\ 0 & -4 & 3 & 6 & 0 & 1\end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{R_3+4R_2\to R_3}\left[\begin{array}{ccc|ccc}1&-1&0&1&0&0\\0&1&-1&-1&1&0\\0&0&-1&2&4&1\end{array}\right]\xrightarrow{-R_3\to R_3}\left[\begin{array}{ccc|ccc}1&-1&0&1&0&0\\0&1&-1&-1&1&0\\0&0&1&-2&-4&-1\end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{R_2+R_3\to R_2}\left[\begin{array}{ccc|ccc}1&-1&0&1&0&0\\0&1&0&-3&-3&-1\\0&0&1&-2&-4&-1\end{array}\right]\xrightarrow{R_1+R_2\to R_1}\left[\begin{array}{ccc|ccc}1&0&0&-2&-3&-1\\0&1&0&-3&-3&-1\\0&0&1&-2&-4&-1\end{array}\right]$$

ដូចនេះម៉ាទ្រីស **A** មានចម្រាស់ហើយចម្រាស់របស់វាគឺ

$$\mathbf{A}^{-1}=\begin{bmatrix}-2&-3&-1\\-3&-3&-1\\-2&-4&-1\end{bmatrix}$$

ឧទាហរណ៍(ម៉ាទ្រីសមិនមានចម្រាស់)

រកចម្រាស់នៃម៉ាទ្រីស

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 3 & -1 & 2 \\ -2 & 3 & -2 \end{bmatrix}$$

យើងសរសេរជាទម្រង់

$$[\mathbf{A} \,|\, \mathbf{I}] = \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & -1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ -2 & 3 & -2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow[]{\substack{R_2-3R_1\to R_2 \\ R_3+2R_1\to R_3}} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -7 & 2 & -3 & 1 & 0 \\ 0 & 7 & -2 & 2 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{R_3+R_2\to R3}\left[\begin{array}{ccc|ccc}1 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0\\ 0 & -7 & 2 & -3 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 1\end{array}\right]$$

យើងសង្កេតឃើញថាផ្នែក $\mathbf{A}$ នៃម៉ាទ្រីសមានជួរដេកសូន្យ ដូចនេះយើងមិនអាចបម្លែងម៉ាទ្រីស $[\mathbf{A}\,|\,\mathbf{I}]$ ទៅជា $[\mathbf{I}\,|\,\mathbf{A}^{-1}]$ ដែលមានន័យថាម៉ាទ្រីស $\mathbf{A}$ មិនមានចម្រាស់។

ប្រព័ន្ធសមីការ

ចំពោះប្រព័ន្ធសមីការដែលមានចំនួនសមីការស្មើនឹងចំនួនអញ្ញាតិ៖

បើ $\mathbf{A}$ ជាម៉ាទ្រីសមានចម្រាស់នោះប្រព័ន្ធសមីការលីនេអ៊ែរ $\mathbf{AX} = \mathbf{b}$ មានចម្លើយតែមួយគត់ $\mathbf{X} = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{b}$

ដោយសារម៉ាទ្រីស $\mathbf{A}$ មានចម្រាស់ $\mathbf{A}^{-1}$ នោះ

$$\begin{aligned}\mathbf{AX} &= \mathbf{b}\\ \mathbf{A}^{-1}\mathbf{AX} &= \mathbf{A}^{-1}\mathbf{b}\\ \mathbf{IX} &= \mathbf{A}^{-1}\mathbf{b}\\ \mathbf{X} &= \mathbf{A}^{-1}\mathbf{b}\end{aligned}$$

ឧទាហរណ៍

ដោះស្រាយប្រព័ន្ធសមីការដោយប្រើវិធីសាស្ត្រម៉ាទ្រីសច្រាស់

១

$$\begin{aligned} 2x_1 + 3x_2 + x_3 &= -1 \\ 3x_1 + 3x_2 + x_3 &= 1 \\ 2x_1 + 4x_2 + x_3 &= -2 \end{aligned}$$

២

$$\begin{aligned} 2x_1 + 3x_2 + x_3 &= 4 \\ 3x_1 + 3x_2 + x_3 &= 8 \\ 2x_1 + 4x_2 + x_3 &= 5 \end{aligned}$$

ចម្លើយ

យើងសង្កេតឃើញថាម៉ាទ្រីសមេគុណសម្រាប់ប្រព័ន្ធនីមួយៗគឺ

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 3 & 3 & 1 \\ 2 & 4 & 1 \end{bmatrix}$$

ប្រើវិធីបំបាត់ Gauss-Jordan នោះ

$$\mathbf{A}^{-1} = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ 6 & -2 & -3 \end{bmatrix}$$

១

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ 6 & -2 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ -2 \end{bmatrix}$$

២

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ 6 & -2 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 \\ 8 \\ 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 1 \\ -7 \end{bmatrix}$$

ក្បួន Cramer

ប្រព័ន្ធសមីការលីនេអ៊ែរ

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = b_1$$
$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = b_2$$

មានចម្លើយ

$$x_1 = \frac{b_1a_{22} - b_2a_{12}}{a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12}}, \quad x_2 = \frac{b_2a_{11} - b_1a_{21}}{a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12}}$$

នៅពេលដែល $a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12} \neq 0$។ សម្គាល់ថាប្រភាគទាំងពីរមានភាគបែងដូចគ្នា $a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12}$ ដែលហៅថាដេទែរមីណង់នៃម៉ាទ្រីសមេគុណនៃប្រព័ន្ធសមីការ។

និយមន័យ

ដេទែមីណង់នៃម៉ាទ្រីស

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$$

គឺ

$$\det(\mathbf{A}) = |A| = a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12}$$

ឧទាហរណ៍

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & -3 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$$

នោះ

$$\det(\mathbf{A}) = (2)(2) - (1)(-3) = 7$$

និយមន័យ

ដេទែមីណង់នៃម៉ាទ្រីស

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$$

គឺ

$$\det(\mathbf{A}) = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{31}a_{22}a_{13} - a_{32}a_{23}a_{11} - a_{33}a_{21}a_{12}$$

ឧទាហរណ៍

រកដេទែមីណង់នៃម៉ាទ្រីស

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 3 & -1 & 2 \\ 4 & -4 & 1 \end{bmatrix}$$

នោះ

$$\det(\mathbf{A}) = 0 + 16 + (-12) - (-4) - 0 - 6 = 2$$

សម្គាល់

ចំពោះម៉ាទ្រីសដែលមានលំដាប់ខ្ពស់ជាងនេះយើងប្រើវិធីផ្សេង

- ការពន្លាតតាមកូហ្វាក់ទ័រ (cofactor)
- ការប្រើប្រមាណវិធីលើជួរដេកឬជួរឈរ

ការពន្លាតតាមកូហ្វាក់ទ័រ

និយមន័យ (មីន័រនិងកូហ្វាក់ទ័រ)

បើ **A** ជាម៉ាទ្រីសការេនោះមីន័រ (minor) M_{ij} នៃធាតុ a_{ij} គឺជាដេទែរមីណង់នៃម៉ាទ្រីសដែលទទួលបានពីការលុបជួរដេកទី i និងជួរឈរទី j នៃ **A**។
កូហ្វាក់ទ័រ (cofactor) C_{ij} នៃធាតុ a_{ij} គឺ $C_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij}$

បើ **A** ជាម៉ាទ្រីស 3×3

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$$

នោះមីន័រនិងកូហ្វាក់ទ័រនៃ a_{21}

$$M_{21} = \begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}, \quad C_{21} = (-1)^{2+1} M_{21} = -M_{21}$$

មីន័រនិងកូហ្វាក់ទ័រនៃ a_{22}

$$M_{22} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix}, \ C_{22} = (-1)^{2+2} M_{22} = M_{22}$$

មីន័រនិងកូហ្វាក់ទ័រនៃ a_{23}

$$M_{23} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}, \ C_{23} = (-1)^{2+3} M_{23} = -M_{23}$$

ឧទាហរណ៍

រកមីន័រនិងកូហ្វាក់ទ័រនៃ

$$\begin{bmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 3 & -1 & 2 \\ 4 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$M_{11} = \begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = -1,\ M_{12} = \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 4 & 1 \end{vmatrix} = -5,\ M_{13} = \begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 4 & 0 \end{vmatrix} = 4$$

$$M_{21} = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 2,\ M_{22} = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 4 & 1 \end{vmatrix} = -4,\ M_{23} = \begin{vmatrix} 0 & 2 \\ 4 & 0 \end{vmatrix} = -8$$

$$M_{31} = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} = 5,\ M_{32} = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = -3,\ M_{33} = \begin{vmatrix} 0 & 2 \\ 3 & -1 \end{vmatrix} = -6$$

$$C_{11} = (-1)^{1+1}M_{11} = -1,\ C_{12} = (-1)^{1+2}M_{12} = 5,\ C_{13} = (-1)^{1+3}M_{13} = 4$$
$$C_{21} = (-1)^{2+1}M_{21} = -2,\ C_{22} = (-1)^{2+2}M_{22} = -4,\ C_{23} = (-1)^{2+3}M_{23} = 8$$
$$C_{31} = (-1)^{3+1}M_{31} = 5,\ C_{32} = (-1)^{3+2}M_{32} = 3,\ C_{33} = (-1)^{3+3}M_{33} = -6$$

លំហាត់

រកមីន័រនិងកូហ្វាក់ទ័រនៃ

$$\begin{bmatrix} 3 & -1 & 2 \\ 4 & 1 & 4 \\ -2 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

និយមន័យ

បើ **A** ជាម៉ាទ្រីសការេលំដាប់ $n \geq 2$ នោះដេទែរមីណង់នៃ **A** គឺជាផលបូកនៃផលគុណរវាងធាតុនៅក្នុងជួរដេកទីមួយនៃ **A** នឹងកូហ្វាក់ទ័រត្រូវគ្នារបស់វា មានន័យថា

$$\det(\mathbf{A}) = \sum_{j=1}^{n} a_{1j}C_{1j}$$
$$= a_{11}C_{11} + a_{12}C_{12} + \cdots + a_{1n}C_{1n}$$

ឧទាហរណ៍

រកដេទែរមីណង់នៃ

$$\begin{bmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 3 & -1 & 2 \\ 4 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

តាមនិយមន័យនៃដេទែរមីណង់យើងមាន

$$\begin{aligned} \det(\mathbf{A}) &= a_{11}C_{11} + a_{12}C_{12} + a_{13}C_{13} \\ &= (0)(-1) + (2)(5) + (1)(4) \\ &= 14 \end{aligned}$$

លំហាត់

រកដេទែរមីណង់នៃ

$$\begin{bmatrix} 3 & -1 & 2 \\ 4 & 1 & 4 \\ -2 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

សម្គាល់

យើងអាចគណនាដេទែរមីណង់ដោយពន្លាតតាមជួរដេកឬជួរឈរណាមួយក៏បាន។

ជាឧទាហរណ៍យើងអាចគណនាដេទែរមីណង់ដោយពន្លាតតាមជួរដេកទី២

$$\begin{aligned}\det(\mathbf{A}) &= a_{21}C_{21} + a_{22}C_{22} + a_{23}C_{23}\\ &= (3)(-2) + (-1)(-4) + (2)(8)\\ &= 14\end{aligned}$$

ឬពន្លាតតាមជួរឈរទី១

$$\begin{aligned}\det(\mathbf{A}) &= a_{11}C_{11} + a_{21}C_{21} + a_{31}C_{31}\\ &= (0)(-1) + (3)(-2) + (4)(5)\\ &= 14\end{aligned}$$

ទ្រឹស្តីបទ

យក **A** ជាម៉ាទ្រីសការេលំដាប់ n នោះដេទែរមីណង់នៃA គឺ

- ពន្លាតតាមជួរដេកទី i

$$\det(\mathbf{A}) = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}C_{ij} = a_{i1}C_{i1} + a_{i2}C_{i2} + \cdots + a_{in}C_{in}$$

- ពន្លាតតាមជួរឈរទី j

$$\det(\mathbf{A}) = \sum_{i=1}^{n} a_{ij}C_{ij} = a_{1j}C_{1j} + a_{2j}C_{2j} + \cdots + a_{nj}C_{nj}$$

លំហាត់

រកដេទែរមីណង់នៃម៉ាទ្រីស

1.
$$\begin{bmatrix} 3 & 0 & 4 \\ -2 & 4 & 1 \\ 1 & -3 & 1 \end{bmatrix}$$

2.
$$\begin{bmatrix} 4 & 3 & 2 & 5 \\ 1 & 6 & -1 & 2 \\ -3 & 2 & 4 & 5 \\ 6 & 1 & 3 & -2 \end{bmatrix}$$

ក្បួន Cramer

ប្រព័ន្ធសមីការលីនេអ៊ែរ

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 &= b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 &= b_2 \end{aligned}$$

មានចម្លើយ

$$x_1 = \frac{\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}}, \quad x_2 = \frac{\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}}$$

នៅពេលដែល $a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12} \neq 0$។

តាង

$$\det(\mathbf{A}_1) = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix}, \quad \det(\mathbf{A}_2) = \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix}$$

ដូចនេះចម្លើយនៃប្រព័ន្ធសមីការគឺ

$$x_1 = \frac{\det(\mathbf{A}_1)}{\det(\mathbf{A})}, \quad x_2 = \frac{\det(\mathbf{A}_2)}{\det(\mathbf{A})}$$

ទម្រង់ដេទែរមីណង់នៃចម្លើយហៅថាក្បួន Cramer

ឧទាហរណ៍

ដោះស្រាយប្រព័ន្ធសមីការដោយប្រើក្បួន Cramer

$$\begin{aligned} 4x_1 - 2x_2 &= 10 \\ 3x_1 - 5x_2 &= 11 \end{aligned}$$

យើងមាន

$$\det(\mathbf{A}) = \begin{vmatrix} 4 & -2 \\ 3 & -5 \end{vmatrix} = -14 \neq 0$$

ដូចនេះ

$$x_1 = \frac{\det(\mathbf{A}_1)}{\det(\mathbf{A})} = \frac{\begin{vmatrix} 10 & -2 \\ 11 & -5 \end{vmatrix}}{-14} = \frac{-28}{-14} = 2,$$

$$x_2 = \frac{\det(\mathbf{A}_2)}{\det(\mathbf{A})} = \frac{\begin{vmatrix} 4 & 10 \\ 3 & 11 \end{vmatrix}}{-14} = \frac{14}{-14} = -1$$

ប្រព័ន្ធសមីការលីនេអ៊ែរ

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_3 + a_{13}x_3 &= b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_3 + a_{23}x_3 &= b_2 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_3 + a_{33}x_3 &= b_3 \end{aligned}$$

បើ $\det(\mathbf{A}) \neq 0$ ចម្លើយនៃប្រព័ន្ធសមីការគឺ

$$x_1 = \frac{\det(\mathbf{A}_1)}{\det(\mathbf{A})} = \frac{\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & a_{13} \\ b_2 & a_{22} & a_{23} \\ b_3 & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}}$$

$$x_2 = \frac{\det(\mathbf{A}_2)}{\det(\mathbf{A})} = \frac{\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 & a_{13} \\ a_{21} & b_2 & a_{23} \\ a_{31} & b_3 & a_{33} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}}$$

$$x_3 = \frac{\det(\mathbf{A}_3)}{\det(\mathbf{A})} = \frac{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & b_3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}}$$

ទ្រឹស្តីបទ

បើប្រព័ន្ធសមីការដែលមាន n សមីការ n អញ្ញាតិដែលដេទែរមីណង់នៃម៉ាទ្រីសមេគុណ $\det(\mathbf{A}) \neq 0$ នោះចម្លើយនៃប្រព័ន្ធសមីការគឺ

$$x_1 = \frac{\det(\mathbf{A}_1)}{\det(\mathbf{A})},\ x_2 = \frac{\det(\mathbf{A}_2)}{\det(\mathbf{A})},\ \ldots,\ x_n = \frac{\det(\mathbf{A}_n)}{\det(\mathbf{A})}$$

ដែលជួរឈរទី i នៃម៉ាទ្រីស $\mathbf{A}_i$ គឺជាជួរឈរនៃចំនួនថេរនៅខាងស្តាំដៃនៃប្រព័ន្ធសមីការ។

ឧទាហរណ៍

ដោះស្រាយប្រព័ន្ធសមីការដោយប្រើក្បួន Cramer

$$
\begin{aligned}
-x_1 + 2x_2 - 3x_3 &= 1 \\
2x_1 + x_3 &= 0 \\
3x_1 - 4x_2 + 4x_3 &= 2
\end{aligned}
$$

ដេទែរមីណង់នៃម៉ាទ្រីសមេគុណគឺ

$$\det(\mathbf{A}) = \begin{vmatrix} -1 & 2 & -3 \\ 2 & 0 & 1 \\ 3 & -4 & 4 \end{vmatrix} = 10 \neq 0$$

$$x_1 = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 0 & 0 & 1 \\ 2 & -4 & 4 \end{vmatrix}}{10} = \frac{4}{5}$$

$$x_2 = \frac{\begin{vmatrix} -1 & 1 & -3 \\ 2 & 0 & 1 \\ 3 & 2 & 4 \end{vmatrix}}{10} = -\frac{3}{2}$$

$$x_3 = \frac{\begin{vmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & 0 \\ 3 & -4 & 2 \end{vmatrix}}{10} = -\frac{8}{5}$$

ការថ្លឹងសមីការគីមី

ឧទាហរណ៍

ថ្លឹងសមីការគីមី

$$C_2H_6 + O_2 \rightarrow CO_2 + H_2O$$

ថ្លឹងសមីការនេះមានន័យថារក x_1, x_2, x_3, x_4 នៅក្នុង

$$x_1C_2H_6 + x_2O_2 \rightarrow x_3CO_2 + x_4H_2O$$

ដែលធ្វើឲ្យចំនួនអាតូមកាបូន អ៊ីដ្រូសែន និងអុកស៊ីសែនស្មើគ្នានៅសងខាងនៃសមីការ។ យើងទទួលបាន

$$\begin{aligned}
C &: 2x_1 = x_3 \Rightarrow 2x_1 - x_3 = 0 \\
H &: 6x_1 = 2x_4 \Rightarrow 6x_1 - 2x_4 = 0 \\
O &: 2x_2 = 2x_3 + x_4 \Rightarrow 2x_2 - 2x_3 - x_4 = 0
\end{aligned}$$

សរសេរជាប្រព័ន្ធសមីការលីនេអ៊ែរ

$$\begin{aligned} 2x_1 - x_3 &= 0 \\ 6x_1 - 2x_4 &= 0 \\ 2x_2 - 2x_3 - x_4 &= 0 \end{aligned}$$

យើងនឹងប្រើវិធីបំបាត់ Gauss-Jordan

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 2 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 6 & 0 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 2 & -2 & -1 & 0 \end{array}\right] \xrightarrow{\frac{1}{2}R_1 \to R_1} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & -\frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 6 & 0 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 2 & -2 & -1 & 0 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{R_2 - 6R_1 \to R_2} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & -\frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & -2 & 0 \\ 0 & 2 & -2 & -1 & 0 \end{array}\right] \xrightarrow{R_2 \leftrightarrow R_3} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & -\frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & -2 & 0 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{\frac{1}{2}R_2\to R_2}\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & -\frac{1}{2} & 0 & 0\\ 0 & 1 & -1 & -\frac{1}{2} & 0\\ 0 & 0 & 3 & -2 & 0\end{array}\right]\xrightarrow{\frac{1}{3}R_3\to R_3}\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & -\frac{1}{2} & 0 & 0\\ 0 & 1 & -1 & -\frac{1}{2} & 0\\ 0 & 0 & 1 & -\frac{2}{3} & 0\end{array}\right]$$

$$\xrightarrow[R_2+R_3\to R_3]{R_1+\frac{1}{2}R_3\to R_1}\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & -\frac{1}{3} & 0\\ 0 & 1 & 0 & -\frac{7}{6} & 0\\ 0 & 0 & 1 & -\frac{2}{3} & 0\end{array}\right]$$

ដូចនេះយើងទទួលបាន

$$\begin{aligned} x_1 - \frac{1}{3}x_4 &= 0 \Rightarrow x_1 = \frac{1}{3}x_4\\ x_2 - \frac{7}{6}x_4 &= 0 \Rightarrow x_2 = \frac{7}{6}x_4\\ x_3 - \frac{2}{3}x_4 &= 0 \Rightarrow x_3 = \frac{2}{3}x_4 \end{aligned}$$

ដែល $x_4 \in \mathbb{R}$។

ជាពិសេសយើងអាចយក $x_4 = 6$ នោះ $x_1 = 2, x_2 = 7, x_3 = 4$។ ដូច្នេះសមីការគីមីគឺ

$$2C_2H_6 + 7O_2 \rightarrow 4CO_2 + 6H_2O$$

ឧទាហរណ៍

ថ្លឹងសមីការគីមី

$$CO_2 + H_2O \rightarrow O_2 + C_6H_{12}O_6$$

ដើម្បីថ្លឹងសមីការយើងដោះស្រាយរក x_1, x_2, x_3, x_4 នៅក្នុង

$$x_1CO_2 + x_2H_2O \rightarrow x_3O_2 + x_4C_6H_{12}O_6$$

ដែលធ្វើឲ្យចំនួនអាតូមកាបូន អ៊ីដ្រូសែន និងអុកស៊ីសែនស្មើគ្នានៅសងខាងនៃសមីការ។

យើងទទួលបាន

$$
\begin{aligned}
C &: x_1 = 6x_4 \\
O &: 2x_1 + x_2 = 2x_3 + 6x_4 \\
H &: 2x_2 = 12x_4
\end{aligned}
$$

សរសេរជាប្រព័ន្ធសមីការលីនេអ៊ែរ

$$
\begin{aligned}
&x_1 - 6x_4 = 0 \\
&2x_1 + x_2 - 2x_3 - 6x_4 = 0 \\
&2x_2 - 12x_4 = 0
\end{aligned}
$$

យើងនឹងប្រើវិធីបំបាត់ Gauss-Jordan

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & -6 & 0 \\ 2 & 1 & -2 & -6 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & -12 & 0 \end{array}\right] \xrightarrow{R_2-2R_1\to R_2} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & -6 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 6 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & -12 & 0 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{R_3-2R_2\to R_3} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & -6 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & -24 & 0 \end{array}\right] \xrightarrow{\frac{1}{4}R_3\to R_3} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & -6 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -6 & 0 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{R_2+2R_3\to R_2} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & -6 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -6 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -6 & 0 \end{array}\right]$$

ដូចនេះយើងទទួលបាន

$$x_1 = x_2 = x_3 = 6x_4$$

ជាពិសេសបើយើងយក $x_4 = 1$ នោះ $x_1 = x_2 = x_3 = 6$ និងសមីការគឺមីមានទម្រង់

$$6CO_2 + 6H_2O \to 6O_2 + C_6H_{12}O_6$$

លំហាត់

ថ្លឹងសមីការគីមីដោយប្រើប្រព័ន្ធសមីការលីនេអ៊ែរ

១ $$C_6H_6 + O_2 \to C + H_2O$$

២ $$KOH + H_3PO_4 \to K_3PO_4 + H_2O$$

៣ $$NaOH + H_2SO_4 \to Na_2SO_4 + H_2O$$

សៀគ្វីអគ្គីសនី

ច្បាប់ Kirchhoff's

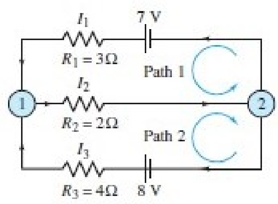
1. នៅត្រង់ខ្នែងនីមួយៗផលបូកចរន្តចូលស្មើនឹងផលបូកចរន្តចេញ
2. ផលបូកនៃផលគុណ IR (I ជាចរន្តនិង R ជារេស៊ីស្តង់) ជុំវិញគន្លងបិទគឺស្មើនឹងតង់ស្យុងសរុបក្នុងគន្លង

នៅក្នុងសៀគ្វីអគ្គីសនី

- ចរន្ត I គិតជាអំពែរ A
- រេស៊ីស្តង់ R គិតជាអូម Ω
- ផលគុណ IR គិតជាវ៉ុល V

ឧទាហរណ៍

កំនត់ចរន្ត I_1, I_2, I_3 សម្រាប់សៀគ្វីអគ្គីសនីខាងក្រោម



តាមច្បាប់ Kirchhoff ទី១ នៅតាមខ្សែងទី១ ឬខ្សែងទី២ យើងបាន

$$I_1 + I_3 = I_2$$

និងតាមច្បាប់ Kirchhoff ទី២ សម្រាប់គន្លងទាំងពីរ

$$\begin{aligned} R_1 I_1 + R_2 I_2 &= 3I_1 + 2I_2 = 7 \quad \text{Path1} \\ R_2 I_2 + R_3 I_3 &= 2I_2 + 4I_3 = 8 \quad \text{Path2} \end{aligned}$$

យើងទទួលបានប្រព័ន្ធសមីការដែលមាន I_1, I_2 និង I_3 ជាអញ្ញាតិ

$$\begin{aligned} I_1 - I_2 + I_3 &= 0 \\ 3I_1 + 2I_2 \quad &= 7 \\ 2I_2 + 4I_3 &= 8 \end{aligned}$$

តាមវិធីបំបាត់ Gauss-Jordan

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 0 & 7 \\ 0 & 2 & 4 & 8 \end{array}\right] \xrightarrow{R_2 - 3R_1 \to R_2} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 5 & -3 & 7 \\ 0 & 2 & 4 & 8 \end{array}\right] \xrightarrow{\frac{1}{5}R_2 \to R_2} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -\frac{3}{5} & \frac{7}{5} \\ 0 & 2 & 4 & 8 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{R_3 - 2R_2 \to R_3} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -\frac{3}{5} & \frac{7}{5} \\ 0 & 0 & \frac{26}{5} & \frac{26}{5} \end{array}\right] \xrightarrow{\frac{5}{26}R_3 \to R_3} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -\frac{3}{5} & \frac{7}{5} \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow[R_2 + \frac{3}{5}R_3 \to R_2]{R_1 - R_3 \to R_1} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{R_1 + R_2 \to R_1} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right]$$

គម្រោងមេរៀន

1. សេចក្តីផ្តើម

2. ប្រព័ន្ធសមីការលីនេអ៊ែរ
   - វិធីបំបាត់ Gauss-Jordan
   - វិធីសាស្រ្តម៉ាទ្រីសច្រាស់
   - ក្បួន Cramer

3. អនុគមន៍ចំនួនពិតមួយអថេរ
   - លីមីតនៃអនុគមន៍
   - ដេរីវេនៃអនុគមន៍
   - ការអនុវត្តន៍នៃដេរីវេ

អនុគមន៍ចំនួនពិតមួយអថេរ

និយមន័យ

- អនុគមន៍នៃអថេរ x គឺជាទំនាក់ទំនងរវាងដែនកំនត់ និងសំនុំរូបភាពដែលផ្តល់ឲ្យតម្លៃនីមួយៗនៃ x នូវតម្លៃតែមួយគត់ $f(x)$ ។
- អថេរនៃអនុគមន៍ហៅថាអថេរមិនអាស្រ័យ។
- សំនុំនៃតម្លៃអថេរមិនអាស្រ័យដែលធ្វើឲ្យអនុគមន៍កំនត់បាន ហៅថាដែនកំនត់នៃអនុគមន៍
- សំនុំនៃតម្លៃដែលអនុគមន៍យកបានហៅថាសំនុំរូបភាព
- ក្រាបនៃអនុគមន៍ f ជាសំនុំនៃគ្រប់ចំនុច (x, y) នៅក្នុងប្លង់ xy ដែលផ្ទៀងផ្ទាត់សមីការ $y = f(x)$

ឧទាហរណ៍

រកដែនកំនត់ $\mathcal{D}(f)$ និងសំនុំរូបភាព $\mathcal{R}(f)$ នៃអនុគមន៍

១ $f(x) = x^2 + 1$

$$\mathcal{D}(f) = \mathbb{R}$$

$$\mathcal{R}(f) = [1, \infty)$$

២ $g(x) = \sqrt{4 - x^2}$

$$\mathcal{D}(g) = [-2, 2]$$

$$\mathcal{R}(g) = [0, 2]$$

៣ $h(x) = \frac{x^2-3x+2}{x-1}$

$$\mathcal{D}(h) = \mathbb{R} \setminus \{1\}$$

$$\mathcal{R}(h) = \{y : y \neq -1\}$$

បន្សំនៃអនុគមន៍

អនុគមន៍ពីរ f និង g អាចផ្សំចូលគ្នាដើម្បីបង្កើតអនុគមន៍ថ្មី $f+g, f-g, fg$ និង f/g ដែល

- $(f+g)(x) = f(x) + g(x)$

$$\mathcal{D}(f+g) = \mathcal{D}(f) \cap \mathcal{D}(g)$$

- $(f-g)(x) = f(x) - g(x)$

$$\mathcal{D}(f-g) = \mathcal{D}(f) \cap \mathcal{D}(g)$$

- $(fg)(x) = f(x)g(x)$

$$\mathcal{D}(fg) = \mathcal{D}(f) \cap \mathcal{D}(g)$$

- $\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$

$$\mathcal{D}\left(\frac{f}{g}\right) = \{x \in \mathcal{D}(f) \cap \mathcal{D}(g) | g(x) \neq 0\}.$$

ឧទាហរណ៍

1. គេឲ្យអនុគមន៍ $f(x) = \sqrt{x}, g(x) = \sqrt{2-x}$ នោះ៖

$$(f+g)(x) = \sqrt{x} + \sqrt{2-x}$$

និង

$$\mathcal{D}(f) = [0, \infty), \mathcal{D}(g) = (-\infty, 2]$$

នោះ៖

$$\mathcal{D}(f+g) = \mathcal{D}(f) \cap \mathcal{D}(g) = [0, 2]$$

2. គេឲ្យអនុគមន៍ $f(x) = x^2, g(x) = x - 1$ នោះ៖

$$(f/g)(x) = \frac{x^2}{x-1}$$

$$\mathcal{D}(f/g) = \{x \in \mathcal{D}(f) \cap \mathcal{D}(g) | g(x) \neq 0\} = \mathbb{R} \setminus \{1\}$$

អនុគមន៍បណ្តាក់

និយមន័យ

គេឲ្យអនុគមន៍ពីរ f និង g នោះអនុគមន៍បណ្តាក់ $f \circ g$ គឺកំនត់ដោយ $(f \circ g)(x) = f(g(x))$។ ដែនកំនត់នៃ $f \circ g$ គឺជាសំនុំនៃ x នៅក្នុងដែនកំនត់នៃ g ដែល $g(x)$ នៅក្នុងដែនកំនត់នៃ f ។

សម្គាល់៖ $(f \circ g)(x)$ គឺកំនត់បាននៅពេលដែលទាំង $g(x)$ និង $f(g(x))$ កំនត់បាន។

ឧទាហរណ៍

បើ $f(x) = x^2$ និង $g(x) = x - 3$ រកអនុគមន៍បណ្តាក់ $f \circ g$ និង $g \circ f$ យើងមាន

$$(f \circ g)(x) = f(g(x)) = f(x-3) = (x-3)^2$$
$$(g \circ f)(x) = g(f(x)) = g(x^2) = x^2 - 3$$

សម្គាល់៖ $f \circ g \neq g \circ f.$

ឧទាហរណ៍

បើ $f(x) = \sqrt{x}$ និង $g(x) = \sqrt{2-x}$ រកអនុគមន៍បណ្តាក់នីមួយៗនិងដែនកំនត់របស់វា

១ $f \circ g$

២ $g \circ f$

៣ $f \circ f$

៤ $g \circ g$

យើងមាន

$$(f \circ g)(x) = f(g(x)) = f\left(\sqrt{2-x}\right) = \sqrt{\sqrt{2-x}} = \sqrt[4]{2-x}$$

$$\mathcal{D}(f \circ g) = \{x | 2 - x \geq 0\} = (-\infty, 2]$$

$$(g \circ f)(x) = g(f(x)) = g\left(\sqrt{x}\right) = \sqrt{2 - \sqrt{x}}$$

$$\mathcal{D}(g \circ f) = [0, 4]$$

ព្រោះ $\sqrt{x}$ កំនត់បានពេលដែល $x \geq 0$ និង $\sqrt{2-\sqrt{x}}$ កំនត់បានពេលដែល $2-\sqrt{x} \geq 0$ ឬ $\sqrt{x} \leq 2$ ឬ $x \leq 4$ ។ ដូច្នេះ $0 \leq x \leq 4$ ហើយ $\mathcal{D}(g \circ f) = [0, 4]$

$$(f \circ f)(x) = f(f(x)) = f\left(\sqrt{x}\right) = \sqrt{\sqrt{x}} = \sqrt[4]{x}$$
$$\mathcal{D}(f \circ f) = [0, \infty)$$

$$(g \circ g)(x) = g(g(x)) = g\left(\sqrt{2-x}\right) = \sqrt{2-\sqrt{2-x}}$$
$$\mathcal{D}(g \circ g) = [-2, 2]$$

ព្រោះ $g \circ g$ កំនត់បាននៅពេលដែល $2-x \geq 0$ និង $2-\sqrt{2-x} \geq 0$។ វិសមភាពទីមួយយើងបាន $x \leq 2$ និងវិសមភាពទីពីរ $\sqrt{2-x} \leq 2$ ឬ $2-x \leq 4$ ឬ $x \geq -2$។ ដូចនេះ $-2 \leq x \leq 2$

លំហាត់

1. បើ $f(x) = 2x + 1, g(x) = \frac{1}{x-1}$ រក
   - $f(g(1/2))$
   - $g(f(4))$
   - $g(f(x))$
2. រកអនុគមន៍ f និង g ដែល $f(g(x)) = (x^2 + 1)^5$
3. បើ $f(x) = \sqrt{x}, g(x) = x^3 - 2$ រក
   - $(f \circ g)(3)$
   - $(f \circ f)(64)$
   - $(g \circ f)(x)$
   - $(f \circ g)(x)$

អនុគមន៍សំខាន់ៗ

- ពហុធាជាអនុគមន៍ដែលមានទម្រង់

$$p(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$$

ដែលមេគុណ $a_0, a_1, \ldots, a_n$ ជាចំនួនពិតដែល $a_n \neq 0$ និងចំនួនគត់វិជ្ជមាន n ជាដឺក្រេនៃពហុធា។ ដែនកំនត់នៃពហុធាគឺជាសំនុំនៃចំនួនពិត $\mathbb{R}$.

- អនុគមន៍សនិទានមានទ្រង់

$$f(x) = \frac{p(x)}{q(x)}$$

ដែល p និង q ជាពហុធា។ ដែនកំនត់នៃអនុគមន៍សនិទានគឺជាសំនុំនៃចំនួនពិត $\mathbb{R}$ លើកលែងតែតម្លៃដែលធ្វើឲ្យភាគបែងស្មើនឹងសូន្យ។

- អនុគមន៍ពិជគណិតត្រូវបានបង្កើតដោយប្រមាណវិធីពិជគណិតដូចជា បូក ដក គុណ ចែក និងឬស។ ជាឧទាហរណ៍ $f(x) = \sqrt{2x^3+4}$ និង $g(x) = x^{1/4}(x^3+3)$។ បើវាជាឬសទីគូ (ឬសទី២ ឬសទី៤.....) នោះដែនកំនត់របស់វាមិនមានចំនុចដែលធ្វើឲ្យបរិមាណនៅក្រោមឬសអវិជ្ជមាន។
- អនុគមន៍អ៊ិចស្ប៉ូណង់ស្យែលមានទម្រង់

$$f(x) = a^x$$

ដែល $a \neq 1$ ជាចំនួនពិតវិជ្ជមាន។ ករណីពិសេស $a = e$ ដែល $e = 2.71828\ldots$

$$f(x) = e^x$$

ដែនកំនត់នៃអនុគមន៍អ៊ិចស្ប៉ូណង់ស្យែលគឺជាសំនុំនៃចំនួនពិត $\mathbb{R}$។

- អនុគមន៍ឡូការីតមានទម្រង់

$$f(x) = \log_a x$$

ដែល $a > 0, a \neq 1$។ ករណីពិសេស $a = e$

$$f(x) = \ln x$$

ដែនកំនត់នៃអនុគមន៍ឡូការីតគឺជាសំនុំនៃចំនួនពិតវិជ្ជមាន $\mathbb{R}^+$

- អនុគមន៍ត្រីកោណមាត្រ

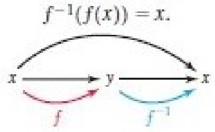
$$\sin x, \cos x, \tan x, \cot x, \sec x, \csc x$$

- ......

អនុគមន៍ច្រាស់

និយមន័យ

គេឲ្យអនុគមន៍ f ចម្រាស់របស់វា (បើមាន) គឺជាអនុគមន៍ f^{-1} ដែលផ្ទៀងផ្ទាត់ពេលដែល $y = f(x)$ នោះ $f^{-1}(y) = x$



សម្គាល់: និមិត្តសញ្ញា f^{-1} តាងឲ្យចម្រាស់នៃអនុគមន៍។ ដូច្នេះ $f^{-1}(x)$ មិនមែនមានន័យថា $\frac{1}{f(x)}$ ទេ។

តើអនុគមន៍ f មានចម្រាស់នៅពេលណា?

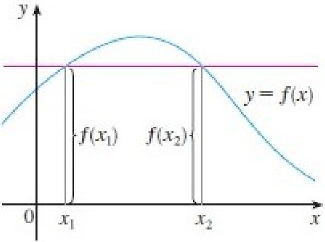
មិនមែនគ្រប់អនុគមន៍សុទ្ធតែមានចម្រាស់នោះទេ។ ដើម្បីធានាថា f មានចម្រាស់នៅលើដែនកំនត់ f ត្រូវតែជាអនុគមន៍មួយទល់មួយលើដែនកំនត់។

និយមន័យ

អនុគមន៍ f ជាអនុគមន៍មួយទល់មួយបើវាមិនយកតម្លៃដូចគ្នាពីរដង មានន័យថា

$$f(x_1) \neq f(x_2) \text{ នៅពេលដែល } x_1 \neq x_2$$

បើបន្ទាត់ដេកប្រសព្វក្រាបនៃ f ច្រើនជាងមួយចំនុចនោះយើងឃើញថាមាន x_1 និង x_2 ដែល $f(x_1) = f(x_2)$ ។ នេះមានន័យថា f មិនមែនជាអនុគមន៍មួយទល់មួយទេ

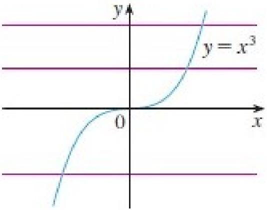


តេស្តបន្ទាត់ដេក

អនុគមន៍មួយជាអនុគមន៍មួយទល់មួយលុះត្រាតែគ្រប់បន្ទាត់ដេកទាំងអស់ប្រសព្វក្រាបរបស់វាយ៉ាងច្រើនមួយចំនុច។

ឧទាហរណ៍

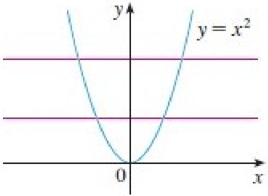
តើអនុគមន៍ $f(x) = x^3$ ជាអនុគមន៍មួយទល់មួយលើ $\mathbb{R}$ ឬទេ ?



បើ $x_1 \neq x_2$ នោះ $x_1^3 \neq x_2^3$ ដូច្នេះ $f(x) = x^3$ជាអនុគមន៍មួយទល់មួយ។ ឬតាមតេស្ត បន្ទាត់ដេក៖ គ្រប់បន្ទាត់ដេកប្រសព្វក្រាបនៃ f យ៉ាងច្រើនមួយចំនុចដូច្នេះ $f(x) = x^3$ ជាអនុគមន៍មួយទល់មួយ។

ឧទាហរណ៍

តើអនុគមន៍ $g(x) = x^2$ ជាអនុគមន៍មួយទល់មួយ លើ $\mathbb{R}$ ឬទេ ?



អនុគមន៍ $g(x) = x^2$ មិនមែនជាអនុគមន៍មួយទល់មួយព្រោះ $g(1) = 1 = g(-1)$ ឬតាមតេស្តបន្ទាត់ដេក៖ មានបន្ទាត់ដេកដែលប្រសព្វក្រាបនៃ g ច្រើនជាងមួយចំនុច។

សម្គាល់

អនុគមន៍ $g(x) = x^2$ មិនមានចម្រាស់លើចន្លោះ $(-\infty, \infty)$ ប៉ុន្តែបើដែនកំនត់នៃ g ត្រូវបានបង្រួមទៅលើចន្លោះ $(-\infty, 0]$ ឬ $[0, \infty)$ នោះ g ជាអនុគមន៍មួយទល់មួយលើចន្លោះទាំងនោះ។

ទ្រឹស្តីបទ

យក f ជាអនុគមន៍មួយទល់មួយលើដែនកំនត់ $\mathcal{D}$ ដែលមានសំនុំរូបភាព $\mathcal{R}$ នោះ f មានចម្រាស់តែមួយគត់ f^{-1} ដែលមានដែនកំនត់ $\mathcal{R}$ និងសំនុំរូបភាព $\mathcal{D}$ ដែល

$$f^{-1}(f(x)) = x \text{ និង } f(f^{-1}(y)) = y$$

ដែល $x \in \mathcal{D}$ និង $y \in \mathcal{R}$ ។

របៀបរកអនុគមន៍ច្រាស់

សន្មត់ថា f ជាអនុគមន៍មួយទល់មួយលើចន្លោះ I។ ដើម្បីរក f^{-1}

1. សរសេរ $y = f(x)$
2. ដោះស្រាយ $y = f(x)$ សម្រាប់ x (បើអាច)
3. ប្តូរ x និង y និងសរសេរ $y = f^{-1}(x)$.

សម្គាល់

នៅពេលដែលយើងរកឃើញ f^{-1} យើងអាចផ្ទៀងផ្ទាត់ចម្លើយដោយប្រើ

$$f^{-1}(f(x)) = x \text{ និង } f(f^{-1}(x)) = x$$

ឧទាហរណ៍

រកអនុគមន៍ច្រាស់នៃអនុគមន៍ខាងក្រោម (បង្រួមដែននៃ f បើចាំបាច់)

១. $f(x) = 2x + 6$
២. $f(x) = x^2 - 1$

១. អនុគមន៍ $f(x) = 2x + 6$ ជាអនុគមន៍មួយទល់មួយលើ $\mathbb{R}$ ដូចនេះ f មានចម្រាស់ចំពោះគ្រប់តម្លៃ x
យើងដោះស្រាយ $y = f(x)$ សម្រាប់ x: យើងមាន $y = 2x + 6$ ឬ $2x = y - 6$ ឬ $x = \frac{1}{2}y - 3$
ប្តូរ x និង y រួចសរសេរ $y = f^{-1}(x)$

$$y = f^{-1}(x) = \frac{1}{2}x - 3$$

យើងអាចផ្ទៀងផ្ទាត់

$$f(f^{-1}(x)) = f\left(\frac{1}{2}x - 3\right) = 2\left(\frac{1}{2}x - 3\right) + 6 = x - 6 + 6 = x,$$
$$f^{-1}(f(x)) = f^{-1}(2x + 6) = \frac{1}{2}(2x + 6) - 3 = x + 3 - 3 = x.$$

២ អនុគមន៍ $f(x) = x^2 - 1$ មិនមែនជាអនុគមន៍មួយទល់មួយលើ $\mathbb{R}$ ទេ ប៉ុន្តែវាជាអនុគមន៍មួយទល់មួយលើ $(-\infty, 0]$ និង $[0, \infty)$។ បើយើងបង្រួមដែននោះយើងអាចរកចម្រាស់របស់វាបាន។
ករណីទី១លើចន្លោះ $(-\infty, 0]$: ដោះស្រាយ $y = f(x)$ សម្រាប់ x

$$y = x^2 - 1$$
$$x^2 = y + 1$$
$$x = -\sqrt{y + 1}$$

ប្តូរ x និង y រួចសរសេរ $y = f^{-1}(x)$

$$y = f^{-1}(x) = -\sqrt{x+1}$$

ករណីទី២លើចន្លោះ $[0, \infty)$: ដោះស្រាយ $y = f(x)$ សម្រាប់ x

$$\begin{aligned} y &= x^2 - 1 \\ x^2 &= y + 1 \\ x &= \sqrt{y+1} \end{aligned}$$

ប្តូរ x និង y រួចសរសេរ $y = f^{-1}(x)$

$$y = f^{-1}(x) = \sqrt{x+1}$$

លំហាត់

រកចម្រាស់នៃអនុគមន៍ខាងក្រោម និងផ្ទៀងផ្ទាត់ថា

$$f(f^{-1}(x)) = x \text{ និង } f^{-1}(f(x)) = x$$

១. $f(x) = 2x$
២. $f(x) = \sqrt{x}, x \geq 0$
៣. $f(x) = x^3 + 2$

លំហាត់

គេឲ្យ $g(x) = 2x + 3$ និង $h(x) = x^3$។ តាង $f(x) = g(h(x))$។ រក f^{-1} និងសសេរវាអាស្រ័យនឹង g^{-1} និង h^{-1}។

អនុគមន៍ឡូការីត

បើ $a > 0$ និង $a \neq 1$ អនុគមន៍អិចស្ប៉ូណង់ស្យែល $f(x) = a^x$ គឺកើនឬចុះនោះវាជាអនុគមន៍មួយទល់មួយ ដូច្នេះវាមានចម្រាស់ f^{-1}។

និយមន័យ

បើ $a > 0$ និង $a \neq 1$ អនុគមន៍ឡូការីតគោល a តាងដោយ $y = \log_a x$ គឺជាចម្រាស់នៃអនុគមន៍អិចស្ប៉ូណង់ស្យែល $y = a^x$ ។

ករណីពិសេស $a = e$ នោះ $y = \ln x$ ជាអនុគមន៍ឡូការីតនេពែរ។ សម្គាល់៖

$$y = \log_a x \Leftrightarrow a^y = x$$

អនុគមន៍ឡូការីត $\log_a x$ មានដែនកំនត់ $(0, \infty)$ និងសំនុំរូបភាព $\mathbb{R}$

លំហាត់

រកចម្រាស់នៃអនុគមន៍ខាងក្រោម និងដែនកំនត់របស់វា

១ $f(x) = \frac{e^x}{e^x+2}$

២ $f(x) = \sqrt{3 - e^{2x}}$

៣ $f(x) = \ln(2 + \ln x)$

៤ $f(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} + 2$

លីមីតនៃអនុគមន៍

- គណិតគណនាគឺផ្អែកលើបញ្ញត្តិនៃលីមីត។
- លីមីតជាមូលដ្ឋាននៃប្រមាណវិធីសំខាន់ពីរនៅក្នុងគណិតគណនាគឺដេរីវេ និង អាំងតេក្រាល។
- ដេរីវេអាចឲ្យយើងគណនាអាត្រាបំរែបំរួលនៃអនុគមន៍ ល្បឿននិងសំទុះ អាត្រាកើនឡើងនៃប្រជាជន។
- អាំងតេក្រាលអាចឲ្យយើងគណនាក្រលាផ្ទៃនៅក្រោមខ្សែកោង ក្រលាផ្ទៃមុខកាត់ និងមាឌ។

ឥឡូវយើងបង្ហាញថាតើលីមីតមាននៅក្នុងបញ្ហាពីរផ្សេងគ្នា

- រកល្បឿនខណៈនៃវត្ថុដែលមានចលនា
- រកមេគុណប្រាប់ទិសនៃបន្ទាត់ប៉ះនឹងខ្សែកោង

ល្បឿនមធ្យម

ឧបមាថាយើងចង់គណនាល្បឿនមធ្យមនៅពេលដែលយើងធ្វើដំនើរតាមបណ្ដោយវិថីត្រង់មួយ។ បើយើងឆ្លងកាត់បង្គោលគីឡូម៉ែត្រលេខ 100 នៅវេលាថ្ងៃត្រង់ $12:00\,P.M.$ បង្គោលគីឡូម៉ែត្រលេខ 130 នៅវេលាថ្ងៃត្រង់ $12:30\,P.M.$ ។ យើងធ្វើដំនើរបាន $30km$ ក្នុងរយៈពេលកន្លះម៉ោង ដូចនេះល្បឿនមធ្យមនៅចន្លោះម៉ោងនេះគឺ $(30\,km)/(0.5\,h) = 60\,km/h$។ ទោះបីជាល្បឿនមធ្យមគឺ $60\,km/h$ ល្បឿនខណៈដែលបង្ហាញដោយកុងទ័រល្បឿនគឺប្រែប្រួលពីខណៈមួយទៅខណៈមួយទៀត។

ឧទាហរណ៍

សន្មត់ថាបាល់មួយត្រូវបានទម្លាក់ពីអាគារមួយដែលមានកំពស់ 450 m ពីដី។ រកល្បឿនមធ្យមនៃបាល់នៅចន្លោះ

1. $t = 1\ s$ និង $t = 3\ s$
2. $t = 1\ s$ និង $t = 2\ s$

តាង $s(t)$ ជាចម្ងាយគិតជាម៉ែត្រដែលបានធ្លាក់បន្ទាប់ពី t វិនាទីនោះ

$$s(t) = 4.9t^2$$

ល្បឿនមធ្យមនៃបាល់នៅចន្លោះពេល $[t_0, t_1]$ គឺជាបំរែបំរួលនៃទីតាំងចែកនឹងបំរែបំរួលពេលវេលា

$$v_{av} = \frac{s(t_1) - s(t_0)}{t_1 - t_0}$$

ដូច្នេះល្បឿនមធ្យមនៅចន្លោះពេល $[1,3]$ គឺ

$$v_{av} = \frac{s(3) - s(1)}{3 - 1} = \frac{44.1 - 4.9}{3 - 1} = 19.6\, m/s$$

ល្បឿនមធ្យមនៅចន្លោះពេល $[1,2]$ គឺ

$$v_{av} = \frac{s(2) - s(1)}{2 - 1} = \frac{19.6 - 4.9}{2 - 1} = 14.7\, m/s$$

សម្គាល់

ល្បឿនមធ្យមគឺជាមេគុណប្រាប់ទិសនៃបន្ទាត់កាត់តាម $(t_0, s(t_0))$ និង $(t_1, s(t_1))$ មានន័យថា

$$v_{av} = m = \frac{s(t_1) - s(t_0)}{t_1 - t_0}$$

ល្បឿនខណៈ

ដើម្បីគណនាល្បឿនមធ្យមយើងប្រើទីតាំងពីរខុសគ្នានៅពេលខុសគ្នា។ តើយើងគណនាល្បឿននៅខណៈណាមួយយ៉ាងដូចម្តេច? ល្បឿននៅខណៈ $t = t_0$ គឺត្រូវបានកំនត់ដោយការគណនាល្បឿនមធ្យមនៅចន្លោះ $[t_0, t_1]$ ដោយបន្ថយប្រវែងរបស់វា។ នៅពេលដែល t_1 ខិតទៅរក t_0 នោះល្បឿនមធ្យមគឺខិតទៅរកតម្លៃតែមួយគត់ដែលជាល្បឿនខណៈ។

ឧទាហរណ៍

សន្មត់ថាបាល់មួយត្រូវបានទម្លាក់ពីអាគារមួយដែលមានកំពស់ 450 m ពីដី។ រកល្បឿននៃបាល់នៅខណៈ $t = 5\ s$

យើងមាន

$$s(t) = 4.9t^2$$

យើងចាប់អារម្មណ៍ទៅលើល្បឿននៅខណៈ $t = 5$ នោះយើងគណនាល្បឿនមធ្យមលើចន្លោះខ្លីទៅៗ $[5, t]$ ដោយប្រើរូបមន្ត

$$v_{av} = \frac{s(t) - s(5)}{t - 5}$$

ចន្លោះពេល	ល្បឿនមធ្យម (m/s)
$5 \le t \le 6$	53.9
$5 \le t \le 5.1$	49.49
$5 \le t \le 5.05$	49.245
$5 \le t \le 5.01$	49.049
$5 \le t \le 5.001$	49.0049

យើងសង្កេតឃើញថានៅពេលដែលចន្លោះពេលត្រូវបានបន្ថយឲ្យខ្លី ល្បឿនមធ្យមកាន់តែខិតទៅជិត $49\,m/s$។

ល្បឿននៅខណៈ $t = 5$ គឺត្រូវបានកំនត់ជាតម្លៃលីមីតនៃល្បឿនមធ្យមទាំងនេះនៅលើចន្លោះកាន់តែខ្លីទៅៗចាប់ផ្តើមនៅ $t = 5$ ។ដូច្នេះល្បឿននៅខណៈ $t = 5$ គឺ

$$v = 49\, m/s$$

សម្គាល់

- យើងនឹងទទួលបានល្បឿនខណៈដូចគ្នានៅពេលដែល t ខិតទៅរក 5 ពីខាងឆ្វេង (ដែល $t < 5$) និងនៅពេលដែល t ខិតទៅរក 5 ពីខាងស្តាំ (ដែល $t > 5$)
- យើងនិយាយថាលីមីតនៃ v_{av} ពេល t ខិតទៅរក 5 ស្មើនឹងល្បឿនខណៈ $v_{inst} = 49\, m/s$។ យើងកំនត់សរសេរ

$$v_{inst} = \lim_{t\to 5} v_{av} = \lim_{t\to 5} \frac{s(t) - s(5)}{t - 5} = 49\, m/s$$

មេគុណប្រាប់ទិសនៃបន្ទាត់ប៉ះ

ល្បឿនមធ្យមនីមួយៗត្រូវគ្នានឹងមេគុណប្រាប់ទិសនៃបន្ទាត់កាត់តាមពីរចំនុចនៅលើក្រាបនៃអនុគមន៍ទីតាំង នៅពេលដែលល្បឿនមធ្យមខិតទៅរកតម្លៃលីមីតពេល t ខិតទៅរក 5មេគុណប្រាប់ទិសនៃបន្ទាត់កាត់តាមពីរចំនុចខិតទៅរកតម្លៃលីមីតដូចគ្នាពេល t ខិតទៅរក 5។ ដូចនេះពេល t ខិតទៅរក 5

1. បន្ទាត់កាត់តាមពីរចំនុចខិតទៅរកបន្ទាត់តែមួយគត់ហៅថាបន្ទាត់ប៉ះ
2. មេគុណប្រាប់ទិសនៃបន្ទាត់កាត់តាមពីរចំនុច m_{sec} ខិតទៅរកមេគុណប្រាប់ទិសនៃបន្ទាត់ប៉ះ m_{tan} នៅត្រង់ចំនុច $(5, s(5))$។ ដូច្នេះមេគុណប្រាប់ទិសនៃបន្ទាត់ប៉ះអាចសរសេរជា

$$m_{tan} = \lim_{t\to 5} m_{sec} = \lim_{t\to 5} \frac{s(t)-s(5)}{t-5} = 49$$

តម្លៃលីមីតនេះដូចគ្នានឹងតម្លៃលីមីតដែលកំនត់ល្បឿនខណៈ។ ដូច្នេះល្បឿនខណៈ $t=5$ គឺជាមេគុណប្រាប់ទិសនៃបន្ទាត់ប៉ះនឹងខ្សែកោងទីតាំងនៅ $t=5$។

លីមីតនៃអនុគមន៍

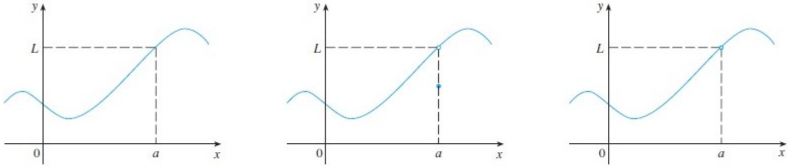
និយមន័យ

សន្មត់ថាអនុគមន៍ f កំនត់គ្រប់ x ក្បែរ a (អាចលើកលែងត្រង់ a)។ បើ $f(x)$ ខិតទៅរក L កាន់តែកៀកទៅៗពេលដែល x ខិតកាន់តែកៀក a (ពីសងខាង a) ប៉ុន្តែមិនស្មើនឹង a យើងសរសេរ

$$\lim_{x \to a} f(x) = L$$

មានន័យថាលីមីតនៃ $f(x)$ ពេល x ខិតទៅរក a ស្មើនឹង L

សម្គាល់៖ ឃ្លា ``ប៉ុន្តែ $x \neq a$"នៅក្នុងនិយមន័យមានន័យថាការរកលីមីតនៃ $f(x)$ ពេល x ខិតទៅរក a យើងមិនគិតចំនុច $x = a$។ តាមពិតទៅ $f(x)$ មិនកំនត់នៅត្រង់ $x = a$ ក៏បាន។ អ្វីដែលសំខាន់គឺថាតើ f កំនត់យ៉ាងដូចម្ដេចនៅក្បែរ a មានន័យថាតម្លៃនៃ $\lim_{x \to a} f(x)$ (បើមាន) អាស្រ័យលើតម្លៃនៃ f ក្បែរ a ប៉ុន្តែមិនអាស្រ័យលើតម្លៃនៃ $f(a)$។



(a) (b) (c)

នៅក្នុងករណីទាំងបី

$$\lim_{x \to a} f(x) = L$$

សម្គាល់៖ (b) $f(a) \neq L$ និង (c) $f(a)$ មិនកំនត់

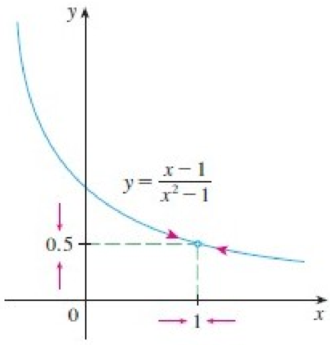
ឧទាហរណ៍

រកលីមីត

$$\lim_{x \to 1} \frac{x-1}{x^2-1}$$

សម្គាល់ថាអនុគមន៍ $f(x) = (x-1)/(x^2-1)$ មិនកំនត់ $x = 1$ ប៉ុន្តែនេះមិនមែនជាបញ្ហាពីព្រោះតាមនិយមន័យនៃ $\lim_{x \to a} f(x)$ យើងពិនិត្យតម្លៃនៃ x ដែលនៅក្បែរ a ប៉ុន្តែមិនស្មើនឹង a ។

$x < 1$	$f(x)$	$x > 1$	$f(x)$
0.5	0.666667	1.5	0.400000
0.9	0.526316	1.1	0.476190
0.99	0.502513	1.01	0.497512
0.999	0.500250	1.001	0.499750
0.9999	0.500025	1.0001	0.499975



តាមតារាងនេះយើងអាចនិយាយបានថា

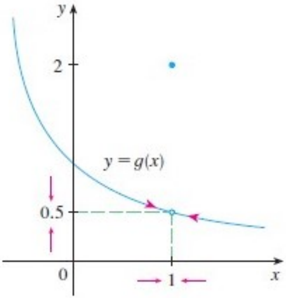
$$\lim_{x \to 1} \frac{x-1}{x^2-1} = 0.5$$

ឧទាហរណ៍

លីមីត

$$\lim_{x\to 1} g(x) = 0.5$$

$$g(x) = \begin{cases} \frac{x-1}{x^2-1}, & x \neq 1 \\ 2, & x = 1 \end{cases}$$



លីមីតឆ្វេង លីមីតស្តាំ

និយមន័យ

លីមីតស្តាំ: សន្មត់ថា f កំនត់បានចំពោះគ្រប់ x ក្បែរ a ដែល $x > a$។ បើ $f(x)$ ខិតទៅរក L ពេល x ខិតទៅរក a ដែល $x > a$ ដែលកំនត់សសេរដោយ

$$\lim_{x \to a^+} f(x) = L$$

មានន័យថាលីមីតនៃ $f(x)$ ពេល x ខិតទៅរក a ពីខាងស្តាំស្មើនឹង L

លីមីតឆ្វេង: សន្មត់ថា f កំនត់បានចំពោះគ្រប់ x ក្បែរ a ដែល $x < a$។ បើ $f(x)$ ខិតទៅរក L ពេល x ខិតទៅរក a ដែល $x < a$ ដែលកំនត់សសេរដោយ

$$\lim_{x \to a^-} f(x) = L$$

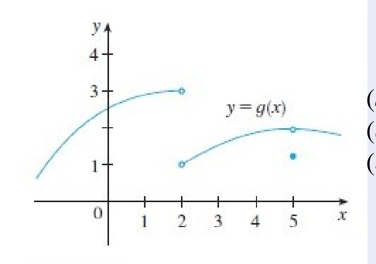
មានន័យថាលីមីតនៃ $f(x)$ ពេល x ខិតទៅរក a ពីខាងឆ្វេងស្មើនឹង L

ទ្រឹស្តីបទ

$$\lim_{x\to a} f(x) = L \text{ លុះត្រាតែ } \lim_{x\to a^-} f(x) = L \text{ និង } \lim_{x\to a^+} f(x) = L$$

សម្គាល់៖ បើ $\lim_{x\to a^-} f(x) \neq \lim_{x\to a^+} f(x)$ នោះ $\lim_{x\to a} f(x)$ មិនមានលីមីត។

ឧទាហរណ៍



$(a).\ \lim_{x\to 2^-} g(x)$ $(b).\ \lim_{x\to 2^+} g(x)$

$(c).\ \lim_{x\to 2} g(x)$ $(d).\ \lim_{x\to 5^-} g(x)$

$(e).\ \lim_{x\to 5^+} g(x)$ $(f).\ \lim_{x\to 5} g(x)$

ចម្លើយ

$$(a).\ \lim_{x\to 2^-} g(x) = 3$$

$$(b).\ \lim_{x\to 2^+} g(x) = 1$$

ដោយសារ $\lim_{x\to 2^-} g(x) = 3 \neq 1 = \lim_{x\to 2^+} g(x)$ ដូចនេះ $\lim_{x\to 2} g(x)$ មិនមានលីមីត។

$$(d).\ \lim_{x\to 5^-} g(x) = 2$$

$$(e).\ \lim_{x\to 5^+} g(x) = 2$$

ដោយសារ $\lim_{x\to 5^-} g(x) = 2 = \lim_{x\to 5^+} g(x)$ ដូចនេះ

$$\lim_{x\to 2} g(x) = 2$$

ឧទាហរណ៍

គេឲ្យអនុគមន៍

$$g(x) = \frac{2x^2 - 6x + 4}{|x-1|}$$

រកលីមីត $\lim_{x\to 1^-} g(x)$, $\lim_{x\to 1^+} g(x)$, និង $\lim_{x\to 1} g(x)$ បើមាន។

យើងសង្កេតឃើញថា g មិនកំនត់នៅត្រង់ $x = 1$។ យើងមាន

$$g(x) = \frac{2x^2 - 6x + 4}{|x-1|} = \frac{2(x-1)(x-2)}{|x-1|}$$

សម្រាប់ $x > 1, |x-1| = x - 1$ និង

$$g(x) = \frac{2(x-1)(x-2)}{x-1} = 2x - 4$$

សម្រាប់ $x < 1, |x-1| = -(x-1)$ និង

$$g(x) = \frac{2(x-1)(x-2)}{-(x-1)} = -2x + 4$$

ដូច្នេះ

$$g(x) = \begin{cases} 2x - 4, & x > 1 \\ -2x + 4, & x < 1 \end{cases}$$

ដូច្នេះ

$$\lim_{x \to 1^-} g(x) = 2$$
$$\lim_{x \to 1^+} g(x) = -2$$

ដោយសារ $\lim_{x \to 1^-} g(x) = 2 \neq (-2) = \lim_{x \to 1^+} g(x)$ ដូចនេះ $\lim_{x \to 1} g(x)$ មិនមានលីមីត។

ឧទាហរណ៍

អនុគមន៍ H កំនត់ដោយ

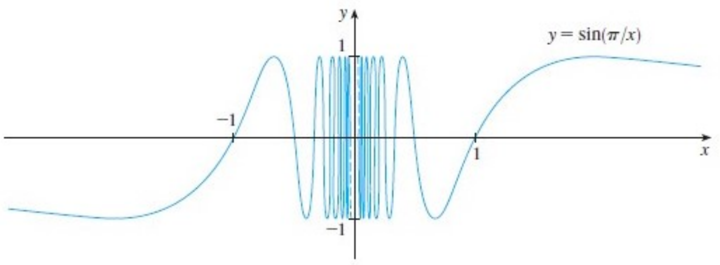
$$H(x) = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ 1, & x \geq 0 \end{cases}$$

- $\lim_{x\to 0^-} H(x) = 0$
- $\lim_{x\to 0^+} H(x) = 1$
- $\lim_{x\to 0} H(x)$ មិនមានលីមីតព្រោះ $\lim_{x\to 0^-} H(x) = 0 \neq 1 = \lim_{x\to 0^+} H(x)$

ឧទាហរណ៍

រកលីមីត

$$\lim_{x\to 0} \sin\frac{\pi}{x}$$



សម្គាល់ថាអនុគមន៍ $f(x) = \sin(\pi/x)$ មិនកំនត់ត្រង់ 0។ យើងមាន $f(1/n) = \sin n\pi = 0$ ចំពោះគ្រប់ចំនួនគត់ n។ យក $x = \frac{1}{2n+1/2}$ ពេលដែល n កាន់តែធំតម្លៃនៃ $x = \frac{1}{2n+1/2}$ ខិតទៅរក 0 នោះ $f(x) = 1$។យក $x = \frac{1}{2n+3/2}$ ពេលដែល n កាន់តែធំតម្លៃនៃ $x = \frac{1}{2n+3/2}$ ខិតទៅរក 0 នោះ $f(x) = -1$។ ដូច្នេះ $\sin(\pi/x)$ យោលចុះឡើងរវាង 1 និង -1 ចំពោះតម្លៃច្រើនអនេកខិតទៅរក 0 ។ ដូចនេះ

$$\lim_{x\to 0} \sin \frac{\pi}{x}$$

មិនមានលីមីតព្រោះ $f(x)$ មិនខិតទៅរកតម្លៃជាក់លាក់មួយពេល x ខិតទៅរក 0 ។

លំហាត់

1. គេឲ្យអនុគមន៍

$$g(x) = \frac{x^3 - 4x}{8|x-2|}$$

គណនាលីមីត

   1. $\lim_{x \to 2^-} g(x)$
   2. $\lim_{x \to 2^+} g(x)$
   3. $\lim_{x \to 2} g(x)$

2. គេឲ្យអនុគមន៍

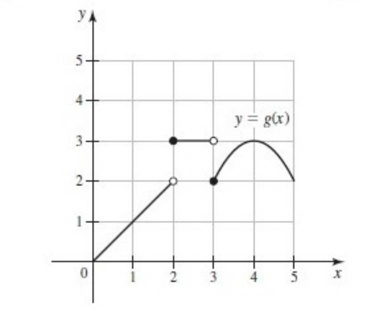
$$f(x) = \begin{cases} x^2 + 1, & x \leq -1 \\ 3, & x > -1 \end{cases}$$

គណនា

   1. $\lim_{x \to -1^-} f(x)$
   2. $\lim_{x \to -1^+} f(x)$
   3. $\lim_{x \to -1} f(x)$

លំហាត់

គណនាលីមីតតាមក្រាប



$(a).\ \lim_{x\to 2^-} g(x)$ $(b).\ \lim_{x\to 2^+} g(x)$
$(c).\ \lim_{x\to 2} g(x)$ $(d).\ \lim_{x\to 3^-} g(x)$
$(e).\ \lim_{x\to 3^+} g(x)$ $(f).\ \lim_{x\to 3} g(x)$
$(g).\ \lim_{x\to 4} g(x)$

ក្បួនគណនាលីមីត

លីមីតនៃអនុគមន៍លីនេអ៊ែរ

យក a, b និង m ជាចំនួនពិត។ ចំពោះអនុគមន៍លីនេអ៊ែរ $f(x) = mx + b$,

$$\lim_{x \to a} f(x) = f(a) = ma + b.$$

ឧទាហរណ៍

១ បើ $f(x) = \frac{1}{2}x - 7$

$$\lim_{x \to 3} f(x) = \lim_{x \to 3} \left(\frac{1}{2}x - 7 \right) = f(3) = -\frac{11}{2}$$

២ បើ $f(x) = 6$

$$\lim_{x \to 2} f(x) = \lim_{x \to 2} 6 = f(2) = 6$$

ក្បួនលីមីត

សន្មត់ថា $\lim_{x\to a} f(x)$ និង $\lim_{x\to a} g(x)$ មានលីមីត។លក្ខណៈខាងក្រោមពិតដែល c ជាចំនួនពិត និង $n > 0$ ជាចំនួនគត់

១
$$\lim_{x\to a}(f(x)+g(x)) = \lim_{x\to a} f(x) + \lim_{x\to a} g(x)$$

២
$$\lim_{x\to a}(f(x)-g(x)) = \lim_{x\to a} f(x) - \lim_{x\to a} g(x)$$

៣
$$\lim_{x\to a}(cf(x)) = c\lim_{x\to a} f(x)$$

៤
$$\lim_{x\to a}(f(x)g(x)) = \left(\lim_{x\to a} f(x)\right)\left(\lim_{x\to a} g(x)\right)$$

៥
$$\lim_{x\to a}\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)=\frac{\lim_{x\to a}f(x)}{\lim_{x\to a}g(x)} \text{ បើ } \lim_{x\to a}g(x)\neq 0$$

៦
$$\lim_{x\to a}(f(x))^n=\left(\lim_{x\to a}f(x)\right)^n$$

៧
$$\lim_{x\to a}(f(x))^{1/n}=\left(\lim_{x\to a}f(x)\right)^{1/n}$$

ដោយដឹងថា $f(x)>0$ ចំពោះ x ក្បែរ a បើ n គូ

ឧទាហរណ៍

សន្មត់ថា $\lim_{x\to 2} f(x) = 4, \lim_{x\to 2} g(x) = 5$ និង $\lim_{x\to 2} h(x) = 8$។ គណនាលីមីត

១
$$\lim_{x\to 2} \frac{f(x)-g(x)}{h(x)}$$

២
$$\lim_{x\to 2}(6f(x)g(x)+h(x))$$

៣
$$\lim_{x\to 2}(g(x))^3$$

១

$$\lim_{x\to 2}\frac{f(x)-g(x)}{h(x)} = \frac{\lim_{x\to 2}(f(x)-g(x))}{\lim_{x\to 2}h(x)} = \frac{\lim_{x\to 2}f(x)-\lim_{x\to 2}g(x)}{\lim_{x\to 2}h(x)} = \frac{4-5}{8} = -\frac{1}{8}$$

២

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 2}(6f(x)g(x)+h(x)) &= \lim_{x\to 2}(6f(x)g(x)) + \lim_{x\to 2}h(x)\\ &= 6\lim_{x\to 2}(f(x)g(x)) + \lim_{x\to 2}h(x)\\ &= 6\left(\lim_{x\to 2}f(x)\right)\left(\lim_{x\to 2}g(x)\right) + \lim_{x\to 2}h(x)\\ &= 6.4.5+8 = 128\end{aligned}$$

៣ $\lim_{x\to 2}(g(x))^3 = \left(\lim_{x\to 2}g(x)\right)^3 = 5^3 = 125$

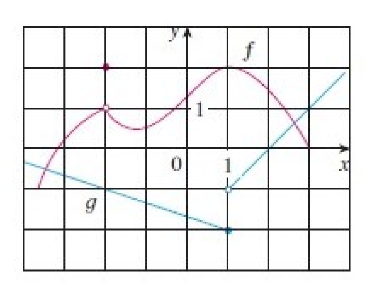
ទ្រឹស្តីបទ

ក្បួនលីមីត ១ ដល់ ៦ នៅតែពិតបើជំនួស $\lim\limits_{x\to a}$ ដោយ $\lim\limits_{x\to a^-}$ ឬ $\lim\limits_{x\to a^+}$ ក្បួន ៧ ត្រូវបានប្តូរដូចខាងក្រោម

- $$\lim_{x\to a^+}(f(x))^{1/n}=\left(\lim_{x\to a^+}f(x)\right)^{1/n}$$
  ដោយដឹងថា $f(x)\geq 0$ ចំពោះ x ក្បែរ a ដែល $x>a$ បើ n គូ
- $$\lim_{x\to a^-}(f(x))^{1/n}=\left(\lim_{x\to a^-}f(x)\right)^{1/n}$$
  ដោយដឹងថា $f(x)\geq 0$ ចំពោះ x ក្បែរ a ដែល $x<a$ បើ n គូ

ឧទាហរណ៍

គណនាលីមីតតាមក្រាប



1. $$\lim_{x\to -2}[f(x)+5g(x)]$$
2. $$\lim_{x\to 1}[f(x)g(x)]$$
3. $$\lim_{x\to 2}\frac{f(x)}{g(x)}$$

១ តាមក្រាបយើងឃើញថា

$$\lim_{x\to -2} f(x) = 1,\ \lim_{x\to -2} g(x) = -1$$

ដូច្នេះយើងមាន

$$\begin{aligned}\lim_{x\to -2}[f(x)+5g(x)] &= \lim_{x\to -2} f(x) + \lim_{x\to -2}[5g(x)]\\ &= \lim_{x\to -2} f(x) + 5\lim_{x\to -2} g(x)\\ &= 1+5(-1) = -4\end{aligned}$$

២ យើងឃើញថា $\lim_{x\to 1} f(x) = 2$ ប៉ុន្តែ $\lim_{x\to 1} g(x)$ មិនមានលីមីតព្រោះ $\lim_{x\to 1^-} g(x) = -2 \neq -1 = \lim_{x\to 1^+} g(x)$ ដូចនេះយើងមិនអាចប្រើក្បួនផលគុណនៃលីមីតទេ។

យើងអាចប្រើក្បួនផលគុណសម្រាប់លីមីតម្ខាង

$$\lim_{x\to 1^-}[f(x)g(x)] = 2(-2) = -4, \quad \lim_{x\to 1^+}[f(x)g(x)] = 2(-1) = -2$$

លីមីតឆ្វេង និងលីមីតស្តាំមិនស្មើគ្នាដូចនេះ $\lim_{x\to 1}[f(x)g(x)]$ មិនមានលីមីត។

3. តាមក្រាបយើងបាន

$$\lim_{x\to 2} f(x) \approx 1.4, \quad \lim_{x\to 2} g(x) = 0$$

ដូចនេះ $\lim_{x\to 2}\frac{f(x)}{g(x)}$ មិនមានលីមីតព្រោះ $\lim_{x\to 2} g(x) = 0$។

ឧទាហរណ៍

គេឲ្យ

$$f(x) = \begin{cases} -2x+4, & x \leq 1 \\ \sqrt{x-1}, & x > 1 \end{cases}$$

គណនាលីមីត $\lim_{x\to 1^-} f(x)$, $\lim_{x\to 1^+} f(x)$ និង $\lim_{x\to 1} f(x)$ បើមាន

- $\lim_{x\to 1^-} f(x) = \lim_{x\to 1^-}(-2x+4) = 2$
- ចំពោះ $x > 1$ នោះ $x - 1 > 0$ យើងបាន

$$\lim_{x\to 1^+} f(x) = \lim_{x\to 1^+} \sqrt{x-1} = \sqrt{\lim_{x\to 1^+}(x-1)} = 0$$

- ដោយសារ $\lim_{x\to 1^-} f(x) \neq \lim_{x\to 1^+} f(x)$ ដូចនេះ $\lim_{x\to 1} f(x)$ មិនមានលីមីត។

បើ $f(x) = g(x)$ ពេល $x \neq a$ នោះ $\lim_{x \to a} f(x) = \lim_{x \to a} g(x)$ ដោយដឹងថាលីមីតមាន។

ឧទាហរណ៍

គណនាលីមីត

$$\lim_{x \to 1} \frac{x^2 - 1}{x - 1}$$

យើងមាន

$$f(x) = \frac{x^2 - 1}{x - 1} = \frac{(x-1)(x+1)}{x-1} = x + 1 = g(x), \quad x \neq 1$$

ដូចនេះ

$$\lim_{x \to 1} \frac{x^2 - 1}{x - 1} = \lim_{x \to 1} \frac{(x-1)(x+1)}{x-1} = \lim_{x \to 1}(x + 1) = 2$$

លំហាត់

គេឲ្យអនុគមន៍

$$f(x)=\frac{x^3-6x^2+8x}{\sqrt{x-2}}$$

គណនាលីមីត $\lim_{x\to 2^-} f(x)$, $\lim_{x\to 2^+} f(x)$ និង $\lim_{x\to 2} f(x)$ បើមាន

ដោយសារភាគបែងនៃ f គឺ $\sqrt{x-2}$, $f(x)$ គឺកំនត់បាននៅពេលដែល $x-2>0$ ដូចនេះដែនកំនត់នៃ f គឺ $x>2$។ យើងទាញបានថា $\lim_{x\to 2^-} f(x)$ មិនមានលីមីតដែល នាំឲ្យ $\lim_{x\to 2} f(x)$ មិនមានលីមីត។ យើងគណនា $\lim_{x\to 2^+} f(x)$

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 2^+} f(x) &= \lim_{x\to 2^+}\frac{x(x-2)(x-4)}{(x-2)^{1/2}} = \lim_{x\to 2^+} x(x-4)(x-2)^{1/2}\\ &= \lim_{x\to 2^+} x.\lim_{x\to 2^+}(x-4).\lim_{x\to 2^+}(x-2)^{1/2} = 2(-2)(0)=0.\end{aligned}$$

លំហាត់

1. គេឲ្យ

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + 1, & x < -1 \\ \sqrt{x+1}, & x \geq -1 \end{cases}$$

គណនាលីមីត $\lim_{x \to -1^-} f(x)$, $\lim_{x \to -1^+} f(x)$ និង $\lim_{x \to -1} f(x)$ បើមាន

2. គណនា

$$\lim_{x \to 2^+} \sqrt{x-2}$$

3. ពន្យល់ហេតុអ្វី

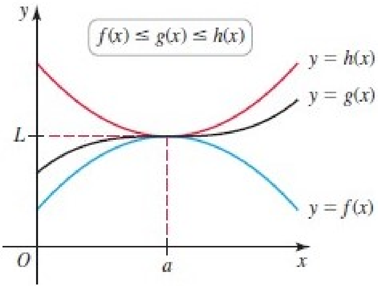
$$\lim_{x \to 2^-} \sqrt{x-2}$$

មិនមានលីមីត

ទ្រឹស្តីបទ Sandwich/ Squeeze/ Pinching

ទ្រឹស្តីបទ

សន្មត់ថាអនុគមន៍ f, g និង h ផ្ទៀងផ្ទាត់ $f(x) \leq g(x) \leq h(x)$ ចំពោះគ្រប់តម្លៃ x ក្បែរ a (អាចលើកលែងត្រង់ a)។ បើ $\lim_{x\to a} f(x) = \lim_{x\to a} h(x) = L$ នោះ $\lim_{x\to a} g(x) = L$



ឧទាហរណ៍

ប្រើទ្រឹស្តីបទ Squeeze ដើម្បីបង្ហាញថា $\lim_{x\to 0} x^2 \sin(1/x) = 0$

សម្គាល់ថាយើងមិនអាចប្រើ

$$\lim_{x\to 0} x^2 \sin\frac{1}{x} = \lim_{x\to 0} x^2 . \lim_{x\to 0} \sin\frac{1}{x}$$

ព្រោះ $\lim_{x\to 0} \sin(1/x)$ មិនមានលីមីត។

ចំពោះគ្រប់ចំនួនពិត $\theta, -1 \leq \sin\theta \leq 1$។ យក $\theta = 1/x$ ចំពោះ $x \neq 0$ នោះយើងទាញបាន

$$-1 \leq \sin\frac{1}{x} \leq 1$$

យើងដឹងថា $x^2 \geq 0$ នោះយើងបាន

$$-x^2 \leq x^2 \sin \frac{1}{x} \leq x^2$$

យើងដឹងថា

$$\lim_{x \to 0}(-x^2) = 0, \quad \lim_{x \to 0} x^2 = 0$$

យក $f(x) = -x^2, g(x) = x^2 \sin(1/x)$ និង $h(x) = x^2$ នៅក្នុងទ្រឹស្តីបទ Squeeze យើងទទួលបាន

$$\lim_{x \to 0} x^2 \sin(1/x) = 0$$

ឧទាហរណ៍

បើ $4x-9 \leq f(x) \leq x^2-4x+7$ ចំពោះ $x \geq 0$។ រក $\lim_{x\to 4} f(x)$

យើងមាន

$$\lim_{x\to 4}(4x-9) = 7,$$
$$\lim_{x\to 4}(x^2-4x+7) = 7$$

តាមទ្រឹស្តីបទ Squeeze យើងទទួលបាន

$$\lim_{x\to 4} f(x) = 7$$

ភាពជាប់នៃអនុគមន៍

និយមន័យ

- អនុគមន៍ f ជាអនុគមន៍ជាប់ត្រង់ $x = a$ បើ $\lim\limits_{x\to a} f(x) = f(a)$
- អនុគមន៍ f ជាប់លើចន្លោះ I បើវាជាប់ត្រង់គ្រប់ចំនុចក្នុង I

សម្គាល់ថាដើម្បីឲ្យ f ជាប់ត្រង់ a លក្ខខណ្ឌទាំងបីខាងក្រោមត្រូវផ្ទៀងផ្ទាត់

១ $f(a)$ កំនត់បាន $(a \in \mathcal{D}(f))$

២ $\lim\limits_{x\to a} f(x)$ មានលីមីត

៣ $\lim\limits_{x\to a} f(x) = f(a)$

សម្គាល់៖

- បើមានលក្ខខណ្ឌណាមួយមិនផ្ទៀងផ្ទាត់នោះអនុគមន៍មិនជាប់នៅត្រង់ a។

ឧទាហរណ៍

កំនត់ថាតើអនុគមន៍ $f(x) = 2x + 3$ ជាប់ត្រង់ $x = 4$?

អនុគមន៍ f ជាប់ត្រង់ $x = 4$ ព្រោះ

1. $f(4) = 11$ កំនត់បាន
2. $\lim\limits_{x \to 4} f(x)$ មានលីមីត
3. $\lim\limits_{x \to 4} f(x) = 11 = f(4)$

តាមពិតទៅ $f(x) = 2x + 3$ ជាអនុគមន៍ជាប់ត្រង់គ្រប់ចំនុចទាំងអស់នៃ $\mathbb{R}$។

ឧទាហរណ៍

តើអនុគមន៍

$$g(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}x + 3, & x < -2 \\ x - 1, & x \geq -2 \end{cases}$$

ជាប់ត្រង់ $x = -2$? ហេតុអ្វី?

យើងមាន

1. $g(-2) = -3$ កំនត់បាន
2. យើងមាន

$$\lim_{x \to -2^-} g(x) = \frac{1}{2}(-2) + 3 = 2; \quad \lim_{x \to -2^+} g(x) = -2 - 1 = -3$$

ដោយសារ $\lim_{x \to -2^-} g(x) \neq \lim_{x \to -2^+} g(x)$ នោះ $\lim_{x \to -2} g(x)$ មិនមានលីមីត

ដូច្នេះ g មិនជាប់នៅត្រង់ -2

លំហាត់

១. តើអនុគមន៍

$$f(x)=\begin{cases}\frac{x^2-16}{x-4}, & x\neq 4\\ 7, & x=4\end{cases}$$

ជាប់ត្រង់ $x=4$? ហេតុអ្វី?

២. តើអនុគមន៍

$$f(x)=\begin{cases}-x+3, & x\leq 2\\ x^2-3, & x>2\end{cases}$$

ជាប់ត្រង់ $x=2$? ហេតុអ្វី?

ទ្រឹស្តីបទ

បើ f និង g ជាអនុគមន៍ជាប់ត្រង់ a នោះអនុគមន៍ខាងក្រោមជាប់ត្រង់ a

១ $f+g$
២ $f-g$
៣ cf ដែល c ជាចំនួនថេរ
៤ fg
៥ $\frac{f}{g}$ បើ $g(a)\neq 0$
៦ $(f(x))^n$ ដែល $n>0$ ជាចំនួនគត់

ទ្រឹស្តីបទ

អនុគមន៍ខាងក្រោមជាប់ត្រង់គ្រប់ចំនុចនៅក្នុងដែនកំនត់

- ពហុធា
- អនុគមន៍សនិទាន
- អនុគមន៍ឫសទី n
- អនុគមន៍ត្រីកោណមាត្រ
- អនុគមន៍អ៊ិចស្ប៉ូណង់ស្យែល
- អនុគមន៍ឡូការីត

ឧទាហរណ៍

តើអនុគមន៍ $f(x) = \frac{\ln x + e^x}{x^2 - 1}$ ជាប់ត្រង់ណាខ្លះ?

- អនុគមន៍ $y = \ln x$ ជាប់ចំពោះ $x > 0$ និង
- $y = e^x$ ជាប់លើ $\mathbb{R}$
- នោះ $y = \ln x + e^x$ ជាប់លើ $(0, \infty)$។
- អនុគមន៍ $y = x^2 - 1$ ជាប់លើ $\mathbb{R}$ ។

ដូច្នេះ f ជាប់គ្រប់ $x > 0$ លើកលែងតែ $x^2 - 1 = 0$ មានន័យថា f ជាប់លើចន្លោះ $(0, 1)$ និង $(1, \infty)$។

និយមន័យ

- អនុគមន៍ f ជាប់ខាងស្តាំត្រង់ a បើ

$$\lim_{x\to a^+} f(x) = f(a)$$

- អនុគមន៍ f ជាប់ខាងឆ្វេងត្រង់ a បើ

$$\lim_{x\to a^-} f(x) = f(a)$$

ឧទាហរណ៍

កំនត់ចន្លោះជាប់នៃអនុគមន៍

$$f(x) = \begin{cases} x^2+1, & x\le 0 \\ 3x+5, & x>0 \end{cases}$$

អនុគមន៍ f ជាប់ត្រង់គ្រប់ $x \neq 0$ ដោយសារ f មានពីរផ្នែកដែលផ្នែកនីមួយៗពហុធា។ សិក្សាភាពជាប់នៃ f ត្រង់ 0

$$\lim_{x \to 0^-} f(x) = \lim_{x \to 0^-} (x^2 + 1) = 1,$$

មានន័យថា $\lim_{x \to 0^-} f(x) = f(0)$។ ដូចនេះ f ជាប់ខាងឆ្វេងត្រង់ 0។ ប៉ុន្តែដោយសារ

$$\lim_{x \to 0^+} f(x) = \lim_{x \to 0^+} (3x + 5) = 5 \neq f(0)$$

នោះ f មិនជាប់ខាងស្តាំត្រង់ 0 ។ ដូច្នេះ f ជាប់លើ $(-\infty, 0]$ និងលើ $(0, \infty)$។

លំហាត់

1. រកចំនុចដែលអនុគមន៍មិនជាប់

$$f(x) = \begin{cases} x+2, & x<0 \\ e^x, & 0 \le x \le 1 \\ 2-x, & x>1 \end{cases}$$

តើចំនុចណាក្នុងចំនោមចំនុចទាំងនេះដែល f ជាប់ខាងស្តាំ ឬជាប់ខាងឆ្វេង ?

2. តើ f ជាប់ត្រង់ $x=1$? តើ f ជាប់ខាងឆ្វេងត្រង់ $x=1$? តើ f ជាប់ខាងស្តាំត្រង់ $x=1$?

$$f(x) = \begin{cases} 2x, & x<1 \\ x^2+3x, & x \ge 1 \end{cases}$$

ទ្រឹស្តីបទ

បើ g ជាប់ត្រង់ a និង f ជាប់ត្រង់ $g(a)$ នោះ $f \circ g$ ជាប់ត្រង់ a

ទ្រឹស្តីបទនេះមានន័យថា

$$\lim_{x \to a} f(g(x)) = f(g(a))$$

សម្គាល់៖ បើ g ជាប់ត្រង់ a នោះ $\lim\limits_{x \to a} g(x) = g(a)$។ យើងទាញបានថា

$$\lim_{x \to a} f(g(x)) = f(g(a)) = f\left(\lim_{x \to a} g(x)\right).$$

ឧទាហរណ៍

តើអនុគមន៍ខាងក្រោមជាប់ត្រង់ចំនុចណាខ្លះ?

១. $h(x) = \sin(x^2)$
២. $F(x) = \ln(1 + \cos x)$

១. យើងមាន $h(x) = f(g(x))$ ដែល $g(x) = x^2$ និង $f(x) = \sin x$។ g ជាប់លើ $\mathbb{R}$ និង f ជាប់លើ $\mathbb{R}$ នោះ $h = f \circ g$ ជាប់លើ $\mathbb{R}$។
២. យើងមាន $f(x) = \ln x$ ជាអនុគមន៍ជាប់និង $g(x) = 1 + \cos x$ ជាអនុគមន៍ជាប់ នោះ $F(x) = f(g(x))$ ជាអនុគមន៍ជាប់ត្រង់កន្លែងដែលវាកំនត់បាន។ អនុគមន៍ $\ln(1 + \cos x)$ កំនត់បាននៅពេលដែល $1 + \cos x > 0$ នោះវាមិនកំនត់ពេលដែល $\cos x = -1$ ឬ $x = \pm\pi, \pm 3\pi, \ldots$។ ដូច្នេះ F មិនជាប់ត្រង់ $x = \pm\pi, \pm 3\pi, \ldots$ និងជាប់លើចន្លោះរវាងតម្លៃទាំងនេះ។

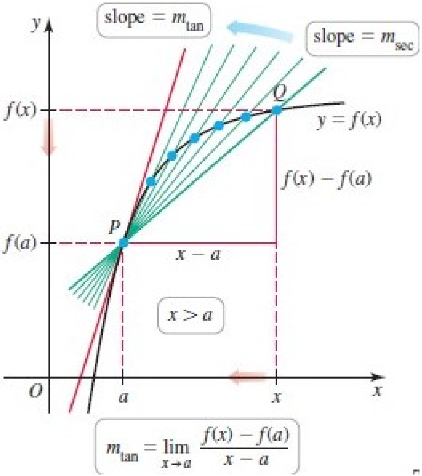
បន្ទាត់ប៉ះនឹងខ្សែកោង

ពិនិត្យខ្សែកោង $y = f(x)$ និងកំនាត់បន្ទាត់ប្រសព្វខ្សែកោងត្រង់ពីរចំនុច $P(a, f(a))$ និង $Q(x, f(x))$។ មេគុណប្រាប់ទិសនៃបន្ទាត់កាត់តាម P, Q គឺ

$$m_{\text{sec}} = \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

- នៅពេលដែល x ខិតទៅរក a បើខ្សែកោងគឺរលោងនៅត្រង់ $P(a, f(a))$ (វាមិនមានកំណូចឬ ជ្រុង) នោះបន្ទាត់កាត់តាមពីរចំនុចខិតទៅរកបន្ទាត់តែមួយគត់ដែលប៉ះនឹងខ្សែកោងត្រង់ចំនុច P។
- នៅពេលដែល x ខិតទៅរក a មេគុណប្រាប់ទិសនៃបន្ទាត់កាត់តាមពីរចំនុច m_{sec} ខិតទៅរកមេគុណប្រាប់ទិសនៃបន្ទាត់ប៉ះ $m_{\tan}$

$$m_{\tan} = \lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$


slope = m_{tan}
slope = m_{sec}
y
$f(x)$
$f(a)$
Q
$y = f(x)$
$f(x) - f(a)$
P
$x - a$
$x > a$
O
a
x
x
$m_{tan} = \lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$

និយមន័យ

សមីការបន្ទាត់ប៉ះនឹងខ្សែកោងត្រង់ចំនុច $(a, f(a))$ គឺជាសមីការដែលមានទម្រង់

$$y - f(a) = m_{\tan}(x - a)$$

ដែល

$$m_{\tan} = \lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

សម្គាល់៖

- រូបមន្តផ្សេងទៀតសម្រាប់មេគុណប្រាប់ទិសនៃបន្ទាត់ប៉ះ

$$m_{\tan} = \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

- មេគុណប្រាប់ទិសនៃបន្ទាត់ប៉ះនឹងខ្សែកោង f ត្រង់ចំនុច a គឺជាអាត្រាបំរែបំរួលនៃ f ត្រង់ចំនុច a (ហៅថាដេរីវេនៃ f ត្រង់ a)។

ដេរីវេ

ដេរីវេនៃអនុគមន៍ត្រង់ចំនុចមួយ

ដេរីវេនៃ f ត្រង់ a កំនត់សរសេរដោយ $f'(a)$ គឺឲ្យដោយ

$$f'(a) = \lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

ឬ

$$f'(a) = \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

បើលីមីតមាននិង a នៅក្នុងដែនកំនត់នៃ f។ បើ $f'(a)$ អត្ថិភាព នោះយើងនិយាយថា f មានដេរីវេត្រង់ a។

ឧទាហរណ៍

រកសមីការបន្ទាត់ប៉ះនឹងខ្សែកោង $f(x)=\frac{3}{x}$ នៅត្រង់ $\left(2,\frac{3}{2}\right)$។

តាមនិយមន័យនៃមេគុណបន្ទាត់ប៉ះនិងដេរីវេ

$$\begin{aligned} m_{\tan} = f'(2) &= \lim_{x\to 2}\frac{f(x)-f(2)}{x-2} = \lim_{x\to 2}\frac{\frac{3}{x}-\frac{3}{2}}{x-2} \\ &= \lim_{x\to 2}\frac{\frac{6-3x}{2x}}{x-2} = \lim_{x\to 2}\frac{-3(x-2)}{2x(x-2)} \\ &= \lim_{x\to 2}\left(-\frac{3}{2x}\right) = -\frac{3}{4}. \end{aligned}$$

ដូចនេះសមីការបន្ទាត់ប៉ះនឹងខ្សែកោង $f(x)=\frac{3}{x}$ នៅត្រង់ $\left(2,\frac{3}{2}\right)$ គឺ

$$y-\frac{3}{2}=-\frac{3}{4}(x-2) \text{ ឬ } y=-\frac{3}{4}x+3$$

យើងបានគណនាដេរីវេនៃអនុគមន៍ឬមេគុណប្រាប់ទិសនៃបន្ទាត់ប៉ះនៅត្រង់ចំនុចជាក់លាក់ណាមួយ។ បើចំនុចនេះប្រែប្រួលតាមខ្សែកោងនោះបន្ទាត់ប៉ះក៏ប្រែប្រួលដែរ។ ចំពោះហេតុផលនេះមេគុណប្រាប់ទិសនៃបន្ទាត់ប៉ះនៃអនុគមន៍ f ក៏ជាអនុគមន៍ដែរដែលហៅថាដេរីវេនៃ f ។

និយមន័យ

ដេរីវេនៃ f គឺជាអនុគមន៍

$$f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

បើលីមីតមាននិង x នៅក្នុងដែនកំនត់នៃ f។ បើ $f'(x)$ អត្ថិភាព នោះយើងនិយាយថា f មានដេរីវេត្រង់ x។ បើ f មានដេរីវេត្រង់គ្រប់ចំនុចនៃចន្លោះបើក I យើងនិយាយថា f មានដេរីវេលើ I។

ទ្រឹស្តីបទ

បើ f មានដេរីវេត្រង់ a នោះ f ជាប់ត្រង់ a

សម្គាល់៖

- ភាពជាប់យើងត្រូវការលក្ខខណ្ឌ

$$\lim_{x\to a}(f(x)-f(a))=0$$

- ភាពមានដេរីវេយើងត្រូវការលក្ខខណ្ឌ

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a} \text{ មានលីមីត}$$

សម្រាយបញ្ជាក់

ដោយសារ f មានដេរីវេត្រង់ a យើងដឹងថា $f'(a) = \lim_{x\to a} \frac{f(x)-f(a)}{x-a}$ មានលីមីត ដើម្បីបង្ហាញថា f ជាប់ត្រង់ a យើងត្រូវបង្ហាញថា $\lim_{x\to a} f(x) = f(a)$។ យើងមាន

$$f(x) = \frac{f(x)-f(a)}{x-a}(x-a) + f(a),\ \ x \neq a$$

នោះ៖

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to a} f(x) &= \lim_{x\to a}\left(\frac{f(x)-f(a)}{x-a}(x-a) + f(a)\right)\\
&= \underbrace{\lim_{x\to a}\left(\frac{f(x)-f(a)}{x-a}\right)}_{f'(a)} \underbrace{\lim_{x\to a}(x-a)}_{0} + \underbrace{\lim_{x\to a} f(a)}_{f(a)}\\
&= f'(a).0 + f(a) = f(a).
\end{aligned}$$

សម្គាល់

- បើ f មិនជាប់ត្រង់ a នោះ f មិនមានដេរីវេត្រង់ a
- f ជាប់ត្រង់ a មិននាំឲ្យ f មានដេរីវេត្រង់ a ជាទូទៅនោះទេ។

ឧទាហរណ៍៖ អនុគមន៍ $f(x) = |x|$ ជាអនុគមន៍ជាប់ត្រង់ 0 ព្រោះ

$$\lim_{x\to 0} f(x) = \lim_{x\to 0} |x| = 0 = f(0)$$

ប៉ុន្តែមិនមានដេរីវេត្រង់ 0 ព្រោះ

$$f'(0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(0+h) - f(0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{|0+h| - |0|}{h}$$

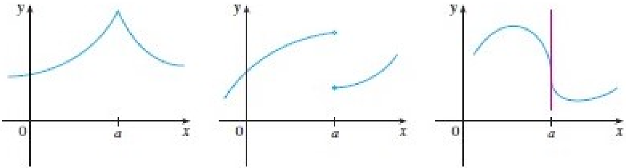
យើងគណនាលីមីតឆ្វេង និងលីមីតស្តាំ

$$\lim_{h\to 0^+}\frac{|0+h|-|0|}{h}=\lim_{h\to 0^+}\frac{|h|}{h}=\lim_{h\to 0^+}\frac{h}{h}=\lim_{h\to 0^+}1=1,$$
$$\lim_{h\to 0^-}\frac{|0+h|-|0|}{h}=\lim_{h\to 0^-}\frac{|h|}{h}=\lim_{h\to 0^-}\frac{-h}{h}=\lim_{h\to 0^+}(-1)=-1$$

ដោយសារលីមីតទាំងពីរខុសគ្នានោះ $f'(0)$ មិនមាន។ ដូច្នេះ f មិនមានដេរីវេត្រង់ 0 ទេ។

តើនៅពេលណាដែលអនុគមន៍មិនមានដេរីវេត្រង់ចំនុចណាមួយ? អនុគមន៍ f មិនមានដេរីវេនៅត្រង់ a បើយ៉ាងហោចណាស់លក្ខខណ្ឌមួយក្នុងចំនោមលក្ខខណ្ឌខាងក្រោមផ្ទៀងផ្ទាត់

១ f មានជ្រុងត្រង់ a
២ f មិនជាប់ត្រង់ a
៣ f មានបន្ទាត់ប៉ះឈរត្រង់ a



ឧទាហរណ៍

គេឲ្យអនុគមន៍

$$f(x) = \begin{cases} 4 - x^2, & x \leq 1 \\ 2x + 1, & x > 1 \end{cases}$$

តើ f មានដេរីវេត្រង់ $x = 1$ ឬទេ?

សម្គាល់ថាអនុគមន៍ f ជាប់ត្រង់ $x = 1$។ f មានដេរីវេត្រង់ $x = 1$ លុះត្រាតែ $f'(1) = \lim_{x\to 1} \frac{f(x)-f(1)}{x-1}$ អត្ថិភាព។ យើងមាន

$$\begin{aligned} \lim_{x\to 1^-} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} &= \lim_{x\to 1^-} \frac{4 - x^2 - 3}{x - 1} = \lim_{x\to 1^-} \frac{1 - x^2}{x - 1} \\ &= - \lim_{x\to 1^-} \frac{(x - 1)(x + 1)}{x - 1} \\ &= - \lim_{x\to 1^-} (x + 1) = -2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\lim_{x\to1^+}\frac{f(x)-f(1)}{x-1} &= \lim_{x\to1^+}\frac{2x+1-3}{x-1}\\ &= \lim_{x\to1^+}\frac{2(x-1)}{x-1} = 2\end{aligned}$$

ដោយសារ

$$\lim_{x\to1^-}\frac{f(x)-f(1)}{x-1} = -2 \neq 2 = \lim_{x\to1^+}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}$$

នោះ

$$\lim_{x\to1}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}$$

មិនមានលីមីត។ ដូចនេះ f មិនមានដេរីវេត្រង់ $x=1$

ឧទាហរណ៍

គេឲ្យអនុគមន៍

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + 1, & x \leq 1 \\ 2x, & x > 1 \end{cases}$$

តើ f មានដេរីវេត្រង់ $x = 1$ ឬទេ?

សម្គាល់ថាអនុគមន៍ f ជាប់ត្រង់ $x = 1$។ f មានដេរីវេត្រង់ $x = 1$ លុះត្រាតែ $f'(1) = \lim\limits_{x\to 1} \frac{f(x)-f(1)}{x-1}$ អត្ថិភាព។ យើងមាន

$$\begin{aligned} \lim_{x\to 1^-} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} &= \lim_{x\to 1^-} \frac{x^2 + 1 - 2}{x - 1} \\ &= \lim_{x\to 1^-} \frac{(x - 1)(x + 1)}{x - 1} \\ &= \lim_{x\to 1^-} (x + 1) = 2 \end{aligned}$$

$$\lim_{x\to 1^+}\frac{f(x)-f(1)}{x-1} = \lim_{x\to 1^+}\frac{2x-2}{x-1}$$
$$= \lim_{x\to 1^+}\frac{2(x-1)}{x-1}$$
$$= \lim_{x\to 1^+} 2 = 2$$

ដូចនេះ

$$f'(1) = \lim_{x\to 1}\frac{f(x)-f(1)}{x-1} = 2$$

មានន័យថា f មានដេរីវេត្រង់ $x = 1$

លំហាត់

1. គេឲ្យអនុគមន៍

$$f(x) = \begin{cases} x, & x \leq 0 \\ x+1, & x > 0 \end{cases}$$

   1. ចំពោះ $x < 0$ តើ $f'(x)$ ស្មើនឹងប៉ុន្មាន?
   2. ចំពោះ $x > 0$ តើ $f'(x)$ ស្មើនឹងប៉ុន្មាន?
   3. តើ f មានដេរីវេត្រង់ 0 ឬទេ?

2. តើ $f(x) = \frac{x^2-5x+6}{x-2}$ មានដេរីវេត្រង់ $x = 2$?

ក្បួនដេរីវេ

1. បើ c ជាចំនួនពិតនោះ $\frac{d}{dx}(c) = 0$
2. បើ n ជាចំនួនគត់មិនអវិជ្ជមាននោះ $\frac{d}{dx}(x^n) = nx^{n-1}$
3. បើ f មានដេរីវេត្រង់ x និង c ជាចំនួនថេរនោះ

$$\frac{d}{dx}(cf(x)) = c\frac{d}{dx}f(x)$$

4. បើ f និង g មានដេរីវេត្រង់ x នោះ

$$\frac{d}{dx}(f(x) + g(x)) = \frac{d}{dx}f(x) + \frac{d}{dx}g(x)$$

៥ បើ f និង g មានដេរីវេត្រង់ x នោះ

$$\frac{d}{dx}(f(x)g(x)) = g(x)\frac{d}{dx}f(x) + f(x)\frac{d}{dx}g(x)$$

៦ បើ f និង g មានដេរីវេត្រង់ x, $g(x) \neq 0$ នោះដេរីវេនៃ f/g អត្ថិភាពនិង

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right) = \frac{g(x)\frac{d}{dx}f(x) - f(x)\frac{d}{dx}g(x)}{(g(x))^2}$$

សម្គាល់

- បើ n ជាចំនួនពិតនោះ

$$\frac{d}{dx}(x^n) = nx^{n-1}$$

- $$\frac{d}{dx}(e^x) = e^x$$

ឧទាហរណ៍

គណនាដេរីវេនៃអនុគមន៍
$$f(x) = \frac{4xe^x}{x^2+1}$$

យើងមាន

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dx}f(x) &= \frac{(x^2+1)\frac{d}{dx}(4xe^x) - (4xe^x)\frac{d}{dx}(x^2+1)}{(x^2+1)^2} \\
&= \frac{(x^2+1)(4e^x+4xe^x) - (4xe^x)(2x)}{(x^2+1)^2} \\
&= \frac{4e^x(x^3-x^2+x+1)}{(x^2+1)^2}
\end{aligned}$$

ឧទាហរណ៍

រកសមីការបន្ទាត់ប៉ះនឹងខ្សែកោង $y = \frac{e^x}{1+x^2}$ នៅត្រង់ចំនុច $\left(1, \frac{e}{2}\right)$។

យើងមាន

$$\begin{aligned}\frac{dy}{dx} &= \frac{(1+x^2)\frac{d}{dx}e^x - e^x\frac{d}{dx}(1+x^2)}{(1+x^2)^2}\\ &= \frac{(1+x^2)e^x - e^x(2x)}{(1+x^2)^2}\\ &= \frac{e^x(1-x)^2}{(1+x^2)^2}\end{aligned}$$

មេគុណប្រាប់ទិសនៃបន្ទាត់ប៉ះត្រង់ $\left(1, \frac{e}{2}\right)$ គឺ $\left.\frac{dy}{dx}\right|_{x=1} = 0$

ដូចនេះបន្ទាត់ប៉ះនឹងខ្សែកោងគឺ $y = \frac{e}{2}$

លំហាត់

1. បើ $f(5) = 1, f'(5) = 6, g(5) = -3$ និង $g'(5) = 2$។ រក
   1. $(fg)'(5)$
   2. $(f/g)'(5)$
   3. $(g/f)'(5)$
2. គណនាដេរីវេនៃ
$$f(x) = \frac{2e^x - 1}{2e^x + 1}$$
3. រកសមីការបន្ទាត់ប៉ះនឹងខ្សែកោង $f(x) = 2 + xe^x$ នៅត្រង់ $(0, 2)$
4. រកសមីការបន្ទាត់ប៉ះនឹងខ្សែកោង $f(x) = \frac{e^x}{x}$ នៅត្រង់ $(1, e)$

លំហាត់សម្រាប់អ្នកមានចិត្តសាកល្បង

1. គេឲ្យ
$$q(x) = \frac{5x^8 + 6x^5 + 5x^4 + 3x^2 + 20x + 100}{10x^{10} + 8x^9 + 6x^5 + 6x^2 + 4x + 2}$$
រក $q'(0)$
2. គេឲ្យ
$$p(x) = (5e^x + 10x^5 + 20x^3 + 100x^2 + 5x + 20).(10x^5 + 40x^3 + 20x^2 + 4x + 10)$$
រក $p'(0)$

ដេរីវេនៃអនុគមន៍ត្រីកោណមាត្រ

ទ្រឹស្តីបទ

$$\frac{d}{dx}(\sin x) = \cos x$$
$$\frac{d}{dx}(\cos x) = -\sin x$$
$$\frac{d}{dx}(\tan x) = \frac{1}{\cos^2 x} = \sec^2 x$$
$$\frac{d}{dx}(\cot x) = -\frac{1}{\sin^2 x} = -\csc^2 x$$
$$\frac{d}{dx}(\sec x) = \sec x \tan x$$
$$\frac{d}{dx}(\csc x) = -\csc x \cot x$$

ឧទាហរណ៍

គណនាដេរីវេ $\frac{dy}{dx}$

១ $y = e^x \cos x$

២ $y = \sin x - x\cos x$

៣ $y = \frac{1+\sin x}{1-\sin x}$

៤ $y = \tan x$

១

$$\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}(e^x \cos x) = e^x \cos x + e^x(-\sin x) = e^x(\cos x - \sin x)$$

២

$$\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}(\sin x) - \frac{d}{dx}(x\cos x) = \cos x - (1.\cos x + x(-\sin x)) = x\sin x$$

៣

$$\begin{aligned}\frac{dy}{dx} &= \frac{(1-\sin x)(\cos x)-(1+\sin x)(-\cos x)}{(1-\sin x)^2}\\ &= \frac{\cos x-\cos x\sin x+\cos x+\sin x\cos x}{(1-\sin x)^2}\\ &= \frac{2\cos x}{(1-\sin x)^2}\end{aligned}$$

៤

$$\begin{aligned}\frac{dy}{dx} &= \frac{d}{dx}(\tan x)=\frac{d}{dx}\left(\frac{\sin x}{\cos x}\right)\\ &= \frac{\cos x\cos x-\sin x(-\sin x)}{\cos^2 x}\\ &= \frac{\cos^2 x+\sin^2 x}{\cos^2 x}\\ &= \frac{1}{\cos^2 x}=\sec^2 x\end{aligned}$$

លំហាត់

1. គណនាដេរីវេនៃ
   - $$y = e^{-x}\sin x$$
   - $$y = \frac{\sin x + \cos x}{e^x}$$
2. រកសមីការបន្ទាត់ប៉ះនឹងខ្សែកោង $y = e^x \cos x$ ត្រង់ $(0, 1)$

វិធានច្រវ៉ាក់

ទ្រឹស្តីបទ

សន្មត់ថា $y = f(u)$ មានដេរីវេត្រង់ $u = g(x)$ និង $u = g(x)$ មានដេរីវេត្រង់ x។ អនុគមន៍បណ្តាក់ $y = f(g(x))$ មានដេរីវេ x និងដេរីវេរបស់វាគឺ

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du}.\frac{du}{dx}$$

ឬ

$$\frac{d}{dx}(f(g(x))) = f'(g(x)).g'(x)$$

សម្គាល់: ដេរីវេនៃ $y = f(g(x))$ គឺដេរីវេនៃ f ត្រង់ $g(x)$ គុណនឹងដេរីវេនៃ g ត្រង់ x

ការប្រើប្រាស់វិធានច្រវ៉ាក់

សន្មត់ថាគេឲ្យអនុគមន៍មានដេរីវេ $y = f(g(x))$

១ កំនត់អនុគមន៍ក្រៅ f និងអនុគមន៍ក្នុង g និងតាង $u = g(x)$

២ ជំនួស $g(x)$ ដោយ u ដើម្បីសសេរ y អាស្រ័យនឹង u

$$y = f(\underbrace{g(x)}_{u}) \Rightarrow y = f(u).$$

៣ គណនាផលគុណ $\frac{dy}{du}.\frac{du}{dx}$

៤ ជំនួស u ដោយ $g(x)$ ក្នុង $\frac{dy}{dx}$ ដើម្បីទទួលបាន $\frac{dy}{dx}$

ឧទាហរណ៍

គណនាដេរីវេនៃ

$$y = \sqrt{x^2 + 1}$$

យើងតាង $u = x^2 + 1$ និង $y = \sqrt{u}$។ ដោយសារ

$$\frac{dy}{du} = \frac{1}{2}u^{-1/2} = \frac{1}{2\sqrt{u}}, \quad \frac{du}{dx} = 2x$$

ដូចនេះ

$$\begin{aligned}
\frac{dy}{dx} &= \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx} \\
&= \frac{1}{2\sqrt{u}}(2x) \\
&= \frac{1}{2\sqrt{x^2 + 1}}(2x) \\
&= \frac{x}{\sqrt{x^2 + 1}}
\end{aligned}$$

ឬយើងអាចសរសេរ $y = f(g(x))$ ដែល $f(u) = \sqrt{u}$ និង $g(x) = x^2 + 1$។ ដោយសារ

$$f'(u) = \frac{1}{2}u^{-1/2} = \frac{1}{2\sqrt{u}}, \quad g'(x) = 2x$$

ដូចនេះ

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx}(f(g(x))) &= f'(g(x)).g'(x) \\ &= \frac{1}{2\sqrt{x^2+1}}(2x) \\ &= \frac{x}{\sqrt{x^2+1}} \end{aligned}$$

បើ $y=[g(x)]^n$ នោះយើងអាចសរសេរ $y=u^n$ ដែល $u=g(x)$ ។ តាមវិធានច្រវ៉ាក់យើងបាន

$$\frac{dy}{dx}=\frac{dy}{du}\frac{du}{dx}=nu^{n-1}\frac{du}{dx}=n[g(x)]^{n-1}g'(x).$$

បើ n ជាចំនួនពិតនិង $u=g(x)$ មានដេរីវេនោះ

$$\frac{d}{dx}(u^n)=nu^{n-1}\frac{du}{dx}$$

ឬ

$$\frac{d}{dx}[g(x)]^n=n[g(x)]^{n-1}.g'(x)$$

បើ $y = \sin u$ ដែល u មានដេរីវេត្រង់ x នោះតាមវិធានច្រវ៉ាក់យើងបាន

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du}\frac{du}{dx} = \cos u.\frac{du}{dx}$$

ដូចនេះ

$$\frac{d}{dx}(\sin u) = \cos u.\frac{du}{dx}$$

ដូចគ្នាដែរ

$$\frac{d}{dx}(\cos u) = -\sin u.\frac{du}{dx}$$

បើ $y = e^u$ ដែល u មានដេរីវេត្រង់ x នោះតាមវិធានច្រវ៉ាក់យើងបាន

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du}\frac{du}{dx} = e^u \frac{du}{dx}$$

ដូចនេះ

$$\frac{d}{dx}(e^u) = e^u \frac{du}{dx}$$

បើ $y = a^x, (a > 0)$ នោះយើងអាចសរសេរ

$$y = a^x = (e^{\ln a})^x = e^{(\ln a)x}$$

តាមវិធានច្រវ៉ាក់យើងបាន

$$\frac{d}{dx}(a^x) = \frac{d}{dx}(e^{(\ln a)x}) = e^{(\ln a)x}\frac{d}{dx}(\ln a)x = e^{(\ln a)x}. \ln a = a^x \ln a$$

លំហាត់

គណនាដេរីវេនៃអនុគមន៍

១ $$y = e^{\sqrt{x}}$$

២ $$y = \sin(e^{\cos x})$$

៣ $$y = x^2\sqrt{x^2+1}$$

៤ $$y = \sin(\sin(e^x))$$

៥ $$y = \sin^2(e^{3x+1})$$

ដេរីវេអាំព្លីស៊ីត

យើងបានគណនាដេរីវេនៃអនុគមន៍ដែលមានទម្រង់ $y=f(x)$ ដែល y ត្រូវបានកំនត់អ៊ិចភ្លីស៊ីតជាអនុគមន៍នៃ x។ ប៉ុន្តែទំនាក់ទំនងនៃអថេរអាចត្រូវបានកំនត់ជាទម្រង់អាំព្លីស៊ីត ជាឧទាហរណ៍ $x^2+y^2=25$ ឬ $x^3+y^3=6xy$។ នៅក្នុងករណីខ្លះយើងអាចដោះស្រាយរក y ជាអនុគមន៍នៃ x ដូចជាឧទាហរណ៍ទីមួយបើយើងដោះស្រាយរក y យើងទទួលបាន $y=\pm\sqrt{25-x^2}$ ប៉ុន្តែវាមិនងាយស្រួលនោះទេបើយើងដោះស្រាយរក y ជាអនុគមន៍នៃ x សម្រាប់ឧទាហរណ៍ទីពីរ។ តើនៅក្នុងករណីនេះយើងរកដេរីវេនៃ y យ៉ាងដូចម្តេច?

ដេរីវេអាំព្លីស៊ីត

វិធីសាស្ត្រនេះគឺយើងគណនាដេរីវេអង្គទាំងសងខាងនៃសមីការធៀបនឹង x រួចដោះស្រាយរក y' (ដោយសន្មត់ថាសមីការដែលឲ្យកំនត់ y អាំព្លីស៊ីតជាអនុគមន៍មានដេរីវេនៃ x)

ឧទាហរណ៍

1. រក $\frac{dy}{dx}$ បើ $x^2+y^2=25$
2. រកសមីការបន្ទាត់ប៉ះនឹងខ្សែកោង $x^2+y^2=25$ ត្រង់ $(3,4)$

1. ធ្វើដេរីវេអង្គទាំងសងខាងនៃសមីការ $x^2+y^2=5$:

$$\frac{d}{dx}(x^2+y^2)=\frac{d}{dx}(25)$$
$$\frac{d}{dx}(x^2)+\frac{d}{dx}(y^2)=0$$

ដោយសារ y ជាអនុគមន៍នៃ x និងតាមវិធានច្រវ៉ាក់យើងបាន

$$\frac{d}{dx}(y^2)=2y\frac{dy}{dx}$$

ដូច្នេះ

$$2x + 2y\frac{dy}{dx} = 0$$

ដោះស្រាយសមីការនេះសម្រាប់ $\frac{dy}{dx}$

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{x}{y}$$

2. នៅត្រង់ចំនុច $(3, 4)$ យើងមាន $x = 3$ និង $y = 4$ នោះ

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{3}{4}$$

ដូចនេះសមីការបន្ទាត់ប៉ះនឹងខ្សែកោង $x^2 + y^2 = 25$ ត្រង់ $(3, 4)$ គឺ

$$y - 4 = -\frac{3}{4}(x - 3) \text{ ឬ } 3x + 4y = 25$$

ឧទាហរណ៍

1. រក y' បើ $x^3 + y^3 = 6xy$
2. រកសមីការបន្ទាត់ប៉ះនឹងខ្សែកោង $x^3 + y^3 = 6xy$ ត្រង់ $(3, 3)$

1. ធ្វើដេរីវេអង្គទាំងសងខាងនៃ $x^3 + y^3 = 6xy$ ធៀបនឹង x ដោយចាត់ទុក y ជាអនុគមន៍នៃ x យើងទទួលបាន

$$\begin{aligned} 3x^2 + 3y^2y' &= 6xy' + 6y \\ x^2 + y^2y' &= 2xy' + 2y \end{aligned}$$

ដោះស្រាយរក y'

$$\begin{aligned} y^2y' - 2xy' &= 2y - x^2 \\ (y^2 - 2x)y' &= 2y - x^2 \\ y' &= \frac{2y - x^2}{y^2 - 2x} \end{aligned}$$

2. ពេល $x = y = 3$ នោះ

$$y' = \frac{2.3 - 3^2}{3^2 - 2.3} = -1$$

ដូចនេះសមីការបន្ទាត់ប៉ះនឹងខ្សែកោង $x^3 + y^3 = 6xy$ ត្រង់ $(3, 3)$ គឺ

$$y - 3 = -1(x - 3) \text{ ឬ } x + y = 6$$

លំហាត់

1. រក y' បើ $2x^3 + x^2y - xy^3 = 2$
2. រកសមីការបន្ទាត់ប៉ះនឹងខ្សែកោង $x^2 + xy - y^3 = 7$ ត្រង់ $(3, 2)$
3. រកសមីការបន្ទាត់ប៉ះនឹងខ្សែកោង $x^4 + y^4 = 2$ ត្រង់ $(1, -1)$

ដេរីវេនៃអនុគមន៍ឡូការីត

ដើម្បីរកដេរីវេនៃ $y = \ln x$ យើងប្រើដេរីវេអាំព្លីស៊ីតនិងវិធានច្រវ៉ាក់។ យើងមាន

$$y = \ln x \Leftrightarrow x = e^y$$

ធ្វើដេរីវេអង្គទាំងសងខាងនៃ $x = e^y$ ធៀបនឹង x យើងបាន

$$x = e^y$$

$$\frac{d}{dx}(x) = \frac{d}{dx}(e^y)$$

$$1 = e^y . \frac{dy}{dx}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{e^y} = \frac{1}{x}$$

ដូច្នេះ

$$\frac{d}{dx}(\ln x) = \frac{1}{x}, \quad x > 0$$

ពិនិត្យអនុគមន៍ $\ln|x|$ ដែលកំនត់គ្រប់ $x \neq 0$

$$\ln|x| = \begin{cases} \ln x, & x > 0 \\ \ln(-x), & x < 0 \end{cases}$$

ចំពោះ $x > 0$ យើងទាញបាន

$$\frac{d}{dx}(\ln|x|) = \frac{d}{dx}(\ln x) = \frac{1}{x}$$

ចំពោះ $x < 0$ វិធានច្រវ៉ាក់ផ្ដល់នូវ

$$\frac{d}{dx}(\ln|x|) = \frac{d}{dx}(\ln(-x)) = \frac{1}{(-x)}(-1) = \frac{1}{x}$$

ដូច្នេះ

$$\frac{d}{dx}(\ln|x|) = \frac{1}{x}$$

ទ្រឹស្តីបទ

- $$\frac{d}{dx}(\ln x) = \frac{1}{x}, \quad x > 0$$
- $$\frac{d}{dx}(\ln |x|) = \frac{1}{x}, \quad x \neq 0$$
- បើ u មានដេរីវេត្រង់ x និង $u(x) \neq 0$ នោះ៖

$$\frac{d}{dx}(\ln |u(x)|) = \frac{u'(x)}{u(x)}$$

ឧទាហរណ៍

រក $\frac{dy}{dx}$ នៃអនុគមន៍ខាងក្រោម

១
$$y = \ln 4x$$

២
$$y = x \ln x$$

៣
$$y = \ln|\sec x|$$

៤
$$y = \frac{\ln x^2}{x^2}$$

១
$$\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}(\ln 4x) = \frac{1}{4x}(4) = \frac{1}{x}$$

២
$$\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}(x \ln x) = 1.\ln x + x.\frac{1}{x} = \ln x + 1$$

៣
$$\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}(\ln|\sec x|) = \frac{1}{\sec x}.\frac{d}{dx}(\sec x) = \frac{1}{\sec x}(\sec x \tan x) = \tan x$$

៤
$$\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}\left(\frac{\ln x^2}{x^2}\right) = \frac{x^2\left(\frac{1}{x^2}.2x\right) - (\ln x^2)2x}{(x^2)^2} = \frac{2x - 2x\ln x^2}{x^4} = \frac{2(1-\ln x^2)}{x^3}$$

លំហាត់

គណនា

១ $$\frac{d}{dx}\left(\ln\left(\frac{x}{x^2+1}\right)\right)$$

២ $$\frac{d}{dx}\left(\ln \sqrt{x^2+1}\right)$$

៣ $$\frac{d}{dx}(\ln(xe^x))$$

៤ $$\frac{d}{dx}(\ln|\sin x|)$$

៥ $$\frac{d}{dx}\left(\frac{\ln x}{\ln x+1}\right)$$

ដេរីវេនៃអនុគមន៍ច្រាស់ត្រីកោណមាត្រ

ដេរីវេ $y = \sin^{-1} x = \arcsin x$

យើងមាន

$$y = \sin^{-1} x \Leftrightarrow x = \sin y, \frac{\pi}{2} \leq y \leq \frac{\pi}{2}$$

យើងរកដេរីវេនៃអនុគមន៍ $y = \sin^{-1} x$ ដោយធ្វើដេរីវេអង្គទាំងសងខាងនៃ $x = \sin y$ ធៀបនឹង x

$$\begin{aligned} x &= \sin y \\ \frac{d}{dx}(x) &= \frac{d}{dx}(\sin y) \\ 1 &= (\cos y)\frac{dy}{dx} \\ \frac{dy}{dx} &= \frac{1}{\cos y} \end{aligned}$$

យើងមាន $\sin^2 y + \cos^2 y = 1$ នោះ

$$\cos y = \pm\sqrt{1-\sin^2 y} = \pm\sqrt{1-x^2}$$

ដោយសារ $-\frac{\pi}{2} \leq y \leq \frac{\pi}{2}$ នោះ $\cos y \geq 0$ ដូច្នេះ

$$\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}(\sin^{-1} x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

ទ្រឹស្តីបទ

$$\frac{d}{dx}(\sin^{-1} x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}, \quad -1 < x < 1$$

ដេរីវេនៃ $y = \cos^{-1} x = \arccos x$

យើងមាន

$$y = \cos^{-1} x \Leftrightarrow x = \cos y, 0 \leq y \leq \pi$$

ធ្វើដេរីវេនៃ $x = \cos y$ ធៀបនឹង x

$$\begin{aligned} x &= \cos y \\ \frac{d}{dx}(x) &= \frac{d}{dx}(\cos y) \\ 1 &= -(\sin y)\frac{dy}{dx} \\ \frac{dy}{dx} &= -\frac{1}{\sin y} \end{aligned}$$

យើងមាន $\sin^2 y + \cos^2 y = 1$ នោះ

$$\sin y = \pm\sqrt{1 - \cos^2 y} = \pm\sqrt{1 - x^2}$$

ដោយសារ $0 \leq y \leq \pi$ នោះ $\sin y \geq 0$ ដូច្នេះ

$$\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}(\cos^{-1} x) = -\frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}$$

ទ្រឹស្តីបទ

$$\frac{d}{dx}(\cos^{-1} x) = -\frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}, \quad -1 < x < 1$$

ដេរីវេនៃ $y = \tan^{-1} x = \arctan x$

យើងមាន

$$y = \tan^{-1} x \Leftrightarrow x = \tan y, -\frac{\pi}{2} < y < \frac{\pi}{2}$$

ធ្វើដេរីវេនៃ $x = \tan y$ ធៀបនឹង x

$$\begin{aligned} x &= \tan y \\ \frac{d}{dx}(x) &= \frac{d}{dx}(\tan y) \\ 1 &= \sec^2 y \frac{dy}{dx} \\ \frac{dy}{dx} &= \frac{1}{\sec^2 y} \end{aligned}$$

យើងមាន $1+\tan^2 y=\sec^2 y$ នោះ $\sec^2 y=1+x^2$ ដូច្នេះ

$$\frac{dy}{dx}=\frac{d}{dx}(\tan^{-1}x)=\frac{1}{1+x^2}$$

ទ្រឹស្តីបទ

$$\frac{d}{dx}(\tan^{-1}x)=\frac{1}{1+x^2}$$

ដេរីវេនៃ $y = \cot^{-1} x = \operatorname{arccot} x$

យើងមាន

$$y = \cot^{-1} x \Leftrightarrow x = \cot y, 0 < y < \pi$$

ធ្វើដេរីវេនៃ $x = \cot y$ ធៀបនឹង x

$$\begin{aligned} x &= \cot y \\ \frac{d}{dx}(x) &= \frac{d}{dx}(\cot y) \\ 1 &= -\csc^2 y \frac{dy}{dx} \\ \frac{dy}{dx} &= -\frac{1}{\csc^2 y} \end{aligned}$$

យើងមាន $1+\cot^2 y = \csc^2 y$ នោះ $\csc^2 y = 1 + x^2$ ដូច្នេះ

$$\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}(\cot^{-1} x) = -\frac{1}{1+x^2}$$

ទ្រឹស្តីបទ

$$\frac{d}{dx}(\cot^{-1} x) = -\frac{1}{1+x^2}$$

តើដេរីវេប្រាប់យើងអំពីអ្វីខ្លះ?

ដេរីវេប្រាប់យើងថាតើពេលណាអនុគមន៍កើនឬចុះ

និយមន័យ

សន្មត់ថាអនុគមន៍ f កំនត់លើចន្លោះ I។ យើងនិយាយថា

- f ជាអនុគមន៍កើនលើ I បើ $f(x_2) > f(x_1)$ នៅពេលដែល x_1 និង x_2 នៅក្នុង I និង $x_2 > x_1$។
- f ជាអនុគមន៍ចុះលើ I បើ $f(x_2) < f(x_1)$ នៅពេលដែល x_1 និង x_2 នៅក្នុង I និង $x_2 > x_1$។

ទ្រឹស្តីបទ

សន្មត់ថា f ជាអនុគមន៍ជាប់លើ I និងមានដេរីវេត្រង់គ្រប់ចំនុចក្នុងនៃ I

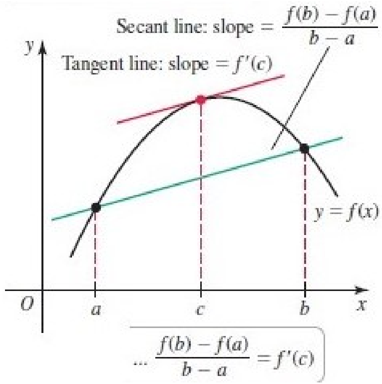
- បើ $f'(x) > 0$ ចំពោះគ្រប់ចំនុចក្នុងនៃ I នោះ f ជាអនុគមន៍កើនលើ I
- បើ $f'(x) < 0$ ចំពោះគ្រប់ចំនុចក្នុងនៃ I នោះ f ជាអនុគមន៍ចុះលើ I

សម្រាយបញ្ជាក់ទ្រឹស្តីបទនេះផ្អែកលើទ្រឹស្តីបទតម្លៃមធ្យម

ទ្រឹស្តីបទតម្លៃមធ្យម

បើ f ជាអនុគមន៍ជាប់លើចន្លោះបិទ $[a,b]$ និងមានដេរីវេលើចន្លោះ (a,b) នោះ យ៉ាងហោចណាស់មានចំនុច $c \in (a,b)$ ដែល

$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a} = f'(c)$$


Secant line: slope = $\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$
Tangent line: slope = $f'(c)$
y
O
a
c
b
x
$y = f(x)$
... $\frac{f(b)-f(a)}{b-a} = f'(c)$

ស្ថានភាពខាងក្រោមផ្តល់ការពន្យល់មួយនៃទ្រឹស្តីបទតម្លៃមធ្យម៖ ឧបមាថាយើងបើកបររយៈពេល 2 ម៉ោងទៅកាន់ទីក្រុងមួយដែលចម្ងាយ 100 គីឡូម៉ែត្រ។ ល្បឿនមធ្យមនៃការបើកបរគឺ $100\,km/2\,h = 50\,km/h$ រីឯល្បឿនខណៈ(ដែលវាស់ដោយកុងទ័រល្បឿន) គឺប្រែប្រួលពីខណៈមួយទៅខណៈមួយទៀត។ ទ្រឹស្តីបទតម្លៃមធ្យមប្រាប់យើងថានៅខណៈណាមួយពេលកំពុងធ្វើដំនើរល្បឿនខណៈស្មើនឹងល្បឿនមធ្យមគឺស្មើនឹង $50\,km/h$។

ឧទាហរណ៍

រកចន្លោះដែលអនុគមន៍កើននិងចន្លោះដែលអនុគមន៍ចុះ

$$f(x) = xe^{-x}$$

យើងមាន

$$f'(x) = e^{-x} + x(-e^{-x}) = (1 - x)e^{-x}$$

ដោយសារ $x = 1$ ជាចំនុចតែមួយគត់ដែលធ្វើឲ្យ $f'(x) = 0$ នោះបើ f' ប្តូរសញ្ញានោះវាប្តូរនៅត្រង់ $x = 1$ និងមិនប្តូរនៅត្រង់កន្លែងផ្សេងទៀតទេ មានន័យថា f' មានសញ្ញាដូចគ្នាចំពោះគ្រប់ចំនុចលើចន្លោះ $(-\infty, 1)$ និង $(1, \infty)$។ យើងសង្កេតឃើញថា

- $f' > 0$ នៅលើ $(-\infty, 1)$ នោះ f ជាអនុគមន៍កើនលើ $(-\infty, 1)$
- $f' < 0$ នៅលើ $(1, \infty)$ នោះ f ជាអនុគមន៍ចុះលើ $(1, \infty)$

ឧទាហរណ៍

មន្ត្រីត្រួតពិនិត្យចរាចរណ៍ម្នាក់ឃើញរថយន្តមួយបើកបរចេញពីនៅស្ងៀមនៅលើផ្លូវបត់ចូលផ្លូវល្បឿនលឿន។ គាត់បានទាក់ទងតាមវិទ្យុទំនាក់ទំនងទៅមន្ត្រីត្រួតពិនិត្យម្នាក់ទៀតដែលនៅខាងមុខចម្ងាយ 30 គីឡូម៉ែត្រតាមបណ្តោយផ្លូវល្បឿនលឿន។ នៅពេលរថយន្តទៅដល់ទីតាំងនៃមន្ត្រីត្រួតពិនិត្យទីពីរនៅរយៈពេល 28 នាទីក្រោយហើយល្បឿនរថយន្តត្រូវបានវាស់ថា 60 km/h។ អ្នកបើកបររថយន្តត្រូវបានពិន័យពីបទបើកលើសល្បឿនកំនត់ 60 km/h។ ហេតុអ្វីបានជាមន្ត្រីត្រួតពិនិត្យចរាចរណ៍អាចសន្និដ្ឋានថាអ្នកបើកបរបើកលើសល្បឿនកំនត់?

ល្បឿនមធ្យមនៃរថយន្តក្នុងរយៈពេល 28 នាទី (=28/60 h) គឺ

$$\frac{30-0}{28/60} = 64.3\ km/h$$

ដូចនេះមន្ត្រីត្រួតពិនិត្យអាចសន្និដ្ឋានតាមទ្រឹស្តីបទតម្លៃមធ្យមថានៅចំនុចណាមួយ ល្បឿនរថយន្តបានលើសល្បឿនកំនត់។

ឧទាហរណ៍

មន្ត្រីត្រួតពិនិត្យចរាចរណ៍ម្នាក់ឃើញរថយន្តមួយបើកបរចេញពីនៅសៀមនៅលើផ្លូវបត់ចូលផ្លូវល្បឿនលឿន។ គាត់បានទាក់ទងតាមវិទ្យុទំនាក់ទំនងទៅមន្ត្រីត្រួតពិនិត្យម្នាក់ទៀតដែលនៅខាងមុខចម្ងាយ 30 គីឡូម៉ែត្រតាមបណ្ដោយផ្លូវល្បឿនលឿន។ នៅពេលរថយន្តទៅដល់ទីតាំងនៃមន្ត្រីត្រួតពិនិត្យទីពីរនៅរយៈពេល 30 នាទីក្រោយហើយល្បឿនរថយន្តត្រូវបានវាស់ថា 60 km/h។ តើមន្ត្រីត្រួតពិនិត្យចរាចរណ៍អាចសន្និដ្ឋានថាអ្នកបើកបរបើកលើសល្បឿនកំនត់ឬទេ?

ល្បឿនមធ្យមនៃរថយន្តក្នុងរយៈពេល 30 នាទី (=1/2 h) គឺ

$$\frac{30-0}{1/2} = 60\ km/h$$

ប៉ុន្តែរថយន្តចាប់ផ្តើមពីនៅស្ងៀមនោះល្បឿនមធ្យមក្នុងរយៈពេលប៉ុន្មានវិនាទីដំបូង គឺតិចជាង 60 km/h ហើយដូច្នេះល្បឿនមធ្យមចំពោះចម្ងាយដែលនៅសល់ត្រូវតែលើស 60 km/h។ ដូចនេះមន្ត្រីត្រួតពិនិត្យអាចសន្និដ្ឋានតាមទ្រឹស្តីបទតម្លៃមធ្យមថានៅចំនុចណាមួយល្បឿនរថយន្តបានលើសល្បឿនកំនត់។

ទ្រឹស្តីបទ

ចំពោះគ្រប់អនុគមន៍ជាប់ f ដែលមានតម្លៃសំខាន់ c ដែលមួយគត់នៅក្នុងចន្លោះបើក (a,b)

- f មានអប្បបរមាធៀបត្រង់ c បើ $f'(x)<0$ លើ (a,c) និង $f'(x)>0$ លើ (c,b) មានន័យថា f ចុះនៅផ្នែកខាងឆ្វេងនៃ c និងកើននៅផ្នែកខាងស្តាំនៃ c
- f មានអតិបរមាធៀបត្រង់ c បើ $f'(x)>0$ លើ (a,c) និង $f'(x)<0$ លើ (c,b) មានន័យថា f កើននៅផ្នែកខាងឆ្វេងនៃ c និងចុះនៅផ្នែកខាងស្តាំនៃ c
- f មិនមានទាំងអប្បបរមាធៀបនិងអតិបរមាធៀបត្រង់ c បើ $f'(x)$ មានសញ្ញាដូចគ្នាទាំងនៅលើ (a,c) និង (c,b)

ឧទាហរណ៍

រកបរមាធៀបនៃអនុគមន៍

$$f(x) = 2x^3 - 3x^2 - 12x + 12$$

យើងមាន

$$f'(x) = 6x^2 - 6x - 12$$

$f'(x) = 0$ ពេលដែល $x = -1$ ឬ $x = 2$។ យើងសង្កេតឃើញថា

- $f'(x) > 0$ នៅលើចន្លោះ $(-\infty, -1)$
- $f'(x) < 0$ នៅលើចន្លោះ $(-1, 2)$
- $f'(x) > 0$ នៅលើចន្លោះ $(2, \infty)$

ដូចនេះ f អតិបរមាធៀបត្រង់ $x = -1$ ដែលឲ្យដោយ $f(-1) = 19$ និងអប្បបរមាធៀបត្រង់ $x = 2$ ដែលឲ្យដោយ $f(2) = -8$

ទ្រឹស្តីបទ

សន្មត់ថា f'' ជាអនុគមន៍ជាប់លើចន្លោះបើកផ្ទុក c ដែល $f'(c) = 0$

- បើ $f''(c) > 0$ នោះ f មានអប្បបរមាធៀបត្រង់ c
- បើ $f''(c) < 0$ នោះ f មានអតិបរមាធៀបត្រង់ c
- បើ $f''(c) = 0$ តេស្តនេះមិនអាចសន្និដ្ឋានបាន f អាចមានអប្បបរមាធៀបឬអតិបរមាឬគ្មានទាំងពីរ។

ឧទាហរណ៍

រកបរមាធៀបនៃអនុគមន៍

$$f(x) = x^3 + 3x^2 - 9x - 13$$

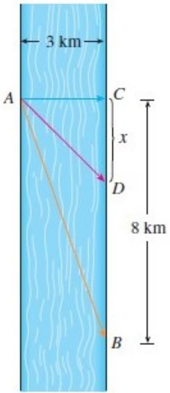
យើងមាន

$$f'(x) = 3x^2 + 6x - 9$$
$$f''(x) = 6x + 6$$

$f'(x) = 0$ ពេលដែល $x = -3$ ឬ $x = 1$ ។ យើងសង្កេតឃើញថា

- $f''(-3) = -12 < 0$ នោះ f មានអតិបរមាធៀបត្រង់ $x = -3$ ដែលឲ្យដោយ $f(-3) = 14$
- $f''(1) = 12 > 0$ នោះ f មានអប្បបរមាធៀបត្រង់ $x = 1$ ដែលឲ្យដោយ $f(1) = -18$

ចំណោទបរមា



បុរសម្នាក់ចេញទូកពីចំនុច A នៅលើមាត់ទន្លេដែលមាន ទទឹង $3\,km$ ហើយ គាត់ ចង់ទៅ កាន់ ចំនុច B ដែល មាន ចម្ងាយ $8\,km$ តាម បណ្តោយ មាត់ទន្លេម្ខាងទៀតលឿនបំផុតតាមដែលអាចធ្វើទៅបាន។ គាត់អាចអុំទូកឆ្លងពី A ទៅ C រួចបន្ទាប់មករត់ទៅ B ឬគាត់អាចអុំទូកទៅ B តែម្តងឬគាត់អាចអុំទូកឆ្លងពី A ទៅ D ដែលនៅចន្លោះ C និង B រួចបន្ទាប់មករត់ទៅ B។ បើគាត់អាចអុំ $6\,km/h$ និងរត់ $8\,km/h$ តើគាត់អាចអុំទៅដល់ចំនុចណាមួយនៅត្រើយម្ខាងដើម្បីទៅដល់ B លឿនតាមដែលអាចធ្វើទៅបាន? (សន្មត់ថាល្បឿននៃទឹកអាចចោលបានធៀបនឹងល្បឿនដែលគាត់អុំ)

តាង x ជាចម្ងាយពី C ទៅ D នោះចម្ងាយរត់គឺ $|DB| = 8 - x$ និងតាមទ្រឹស្តីបទពីតាគ័រចម្ងាយដែលអុំគឺ $|AD| = \sqrt{x^2+9}$។ តាមសមីការ

$$\text{រយៈពេល} = \frac{\text{ចម្ងាយ}}{\text{ល្បឿន}}$$

នោះរយៈពេលអុំគឺ $\sqrt{x^2+9}/6$ និងរយៈពេលរត់គឺ $(8-x)/8$ ។ ដូចនេះរយៈពេលសរុប T គឺ

$$T(x) = \frac{\sqrt{x^2+9}}{6} + \frac{8-x}{8}$$

យើងសង្កេតឃើញថា $0 \le x \le 8$។ បើ $x = 0$ គាត់អុំទៅកាន់ C និងបើ $x = 8$ គាត់អុំទៅកាន់ B តែម្តង។ ដេរីវេនៃ T គឺ

$$T'(x) = \frac{x}{6\sqrt{x^2+9}} - \frac{1}{8}$$

ដូចនេះដោយសារតែ $x \geq 0$ យើងមាន

$$\begin{aligned} T'(x) = 0 &\Leftrightarrow \frac{x}{6\sqrt{x^2+9}} = \frac{1}{8} \Leftrightarrow 4x = 3\sqrt{x^2+9} \\ &\Leftrightarrow 16x^2 = 9(x^2+9) \Leftrightarrow 7x^2 = 81 \\ &\Leftrightarrow x = \frac{9}{\sqrt{7}} \end{aligned}$$

ដើម្បីរកអប្បបរមានៃ T យើងជ្រើសយកតម្លៃតូចជាងគេនៃ

$$T(0) = 1.5, \qquad T\left(\frac{9}{\sqrt{7}}\right) = 1 + \frac{\sqrt{7}}{8} = 1.33, \qquad T(8) = \frac{\sqrt{73}}{6} = 1.42$$

ដូចនេះ T មានអប្បបរមានៅត្រង់ $x = 9/\sqrt{7}$ ។ ដូច្នេះគាត់គួរតែអុំទៅដល់ត្រើយម្ខាងនៅចំនុច $9/\sqrt{7} \approx 3.4\,km$ ពីចំនុចចាប់ផ្តើម។

ឧទាហរណ៍

ក្រុមហ៊ុនផលិតឧបករណ៍ស្តុកទុកអាហារផលិតកំប៉ុងស៊ីឡាំងដែលមានមាឌ $500\ cm^3$។ តើវិមាឌ (កំពស់និងកាំ) ដែលធ្វើឲ្យក្រលាផ្ទៃមុខកាត់អប្បបរមា (វត្ថុធាតុដើមត្រូវការដើម្បីផលិតអប្បបរមា)ស្មើនឹងប៉ុន្មាន?

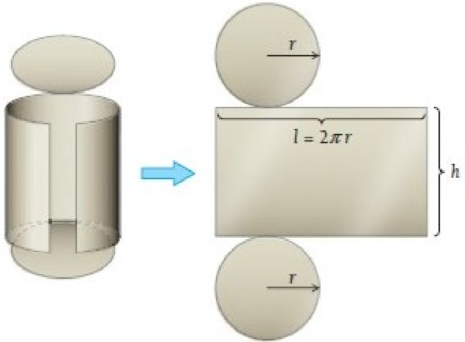
តាង h ជាកំពស់នៃកំប៉ុង និង r ជាកាំនៃកំប៉ុងដែលទាំងពីរគិតជាសង់ទីម៉ែត្រ។ តាមរូបមន្តមាឌស៊ីឡាំង

$$V = \pi r^2 h$$

យើងដឹងថាមាឌកំប៉ុងគឺ $500\ cm^3$ នោះយើងបាន

$$\pi r^2 h = 500 \Leftrightarrow h = \frac{500}{\pi r^2}$$

កំប៉ុងមួយមានរង្វង់ពីរនៅជាយលើនិងក្រោមដែលនីមួយៗមានក្រលាផ្ទៃស្មើនឹង πr^2 និងផ្ទៃកបញ្ឈរដែលនៅពេលដែលធ្វើឲ្យរាបស្មើជាចតុកោណកែងដែលមានកំពស់ h និងបណ្តោយជាបរិមាត្រនៃរង្វង់កាំ r ឬ $2\pi r$។ ដូចនេះក្រលាផ្ទៃនៃចតុកោណកែងនេះគឺ $2\pi rh$



ដូចនេះក្រលាផ្ទៃមុខកាត់សរុប A ស្មើនឹង

$$A = 2(\pi r^2) + 2\pi rh = 2\pi r^2 + 2\pi r\left(\frac{500}{\pi r^2}\right) = 2\pi r^2 + \frac{1000}{r}$$

ដេរីវេនៃ A ធៀបនឹង r:

$$A'(r) = 4\pi r - \frac{1000}{r^2}$$

ឲ្យដេរីវេស្មើនឹង 0 និងដោះស្រាយរក r យើងបាន

$$4\pi r - \frac{1000}{r^2} = 0 \Leftrightarrow 4\pi r = \frac{1000}{r^2}$$

$$\Leftrightarrow 4\pi r^3 = 1000 \Leftrightarrow r^3 = \frac{1000}{4\pi} = \frac{250}{r}$$

$$\Leftrightarrow r = \sqrt[3]{\frac{250}{\pi}} \approx 4.3$$

តម្លៃ $r \approx 4.3$ ជាតម្លៃសំខាន់តែមួយគត់នៅលើចន្លោះ $(0, \infty)$។ ដេរីវេទី 2 នៃ A គឺ

$$A''(r) = 4\pi + \frac{2000}{r^3}$$

នោះយើងបាន

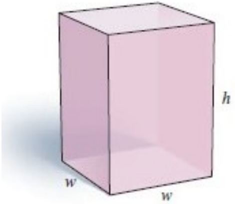
$$A''(4.3) = 4\pi + \frac{2000}{(4.3)^3} > 0$$

ដូចនេះ

- A មានអប្បបរមានៅត្រង់ $r \approx 4.3\,cm$ ។
- កំពស់ $h = \frac{500}{\pi(4.3)^2} \approx 8.6\,cm$ ។
- ក្រលាផ្ទៃមុខកាត់សរុបគឺ $\approx 348.73\,cm^2$ ។

ឧទាហរណ៍

សន្មត់ថាគោលនយោបាយនៃក្រុមហ៊ុនអាកាសចរណ៍ចែងថាគ្រប់កាបូបឥវ៉ាន់ត្រូវមានរាងជាប្រអប់ដែលមានផលបូកនៃបណ្តោយ ទទឹង និងកំពស់មិនលើសពី 64 អ៊ីន។ តើវិមាត្រនៃប្រអប់បាតការេស្មើនឹងប៉ុន្មានដើម្បីឲ្យមាឌនៃប្រអប់អតិបរមាក្រោមលក្ខខណ្ឌនេះ?



តាង w ជាបណ្តោយនិងទទឹង និង h ជាកំពស់នៃប្រអប់បាតការេ។ តាមគោលនយោបាយនៃក្រុមហ៊ុនអាកាសចរណ៍យើងមាន $2w + h = 64$។ មាឌនៃប្រអប់គឺ

$$V = w^2 h = w^2(64 - 2w) = 64w^2 - 2w^3$$

យើងសង្កេតឃើញថា $0 \leq w \leq 32$។ ចំនុចសំខាន់ផ្ទៀងផ្ទាត់

$$V'(w) = 128w - 6w^2 = 2w(64 - 3w) = 0$$

នោះ $w = 0$ និង $w = \frac{64}{3}$។ តាមតេស្តដេរីវេទី១ ឬទី២ $w = \frac{64}{3}$ ជាចំនុចអតិបរមាធៀប។ នៅចំនុចខាងចុង $V(0) = V(32) = 0$។ ដូច្នេះ V មានអតិបរមានៅត្រង់ $w = \frac{64}{3}$ ដែលឲ្យ $V(64/3) = 9709$។ វិមាត្រនៃប្រអប់គឺ $w = 64/3$ អ៊ីននិង $h = 64 - 2w = 64/3$ អ៊ីន។