PHÂN TÍCH ĐỀ THI THPT QUỐC GIA 2016

Câu 1. Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị của hàm số $y = \dfrac{3-2x}{x-1}$

Phân tích Đề thi THPT Quốc gia 2016

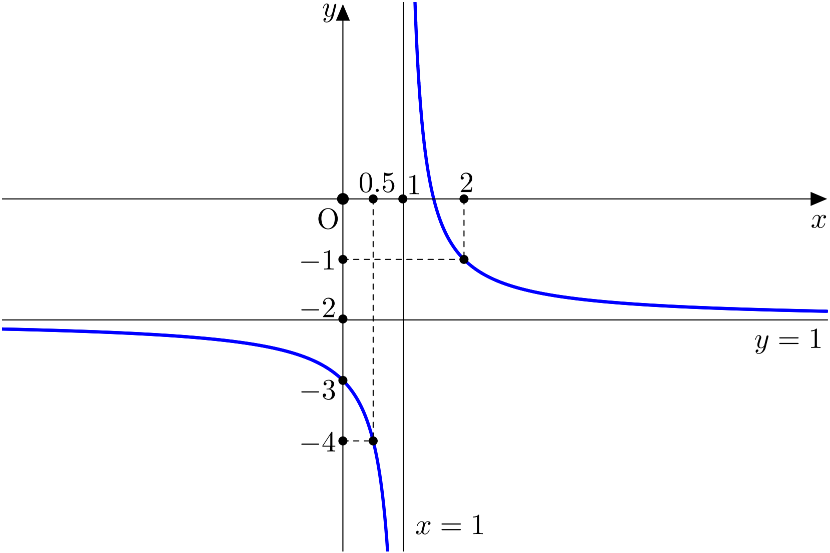
Câu 1. Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị của hàm số $y = \dfrac{3-2x}{x-1}$

- Tập xác định $D = \mathbb{R} \backslash \{1\}$
- Đạo hàm: $y' = \dfrac{-1}{(x-1)^2} < 0, \ \forall x \in D$
- Hsnb trên các khoảng $(-\infty; 1)$, $(1; +\infty)$ và không có đạt cực trị.
- $\lim\limits_{x \to -\infty} = -2; \lim\limits_{x \to +\infty} = -2 \Rightarrow y = -2$ là tiệm cận ngang.
- $\lim\limits_{x \to 1^-} = -\infty; \lim\limits_{x \to 1^+} = +\infty \Rightarrow x = 1$ là tiệm cận đứng.
- Bảng biến thiên

x	$-\infty$		1		$+\infty$
y'		$-$	‖	$-$	
y	-2 ↘		$-\infty$ ‖ $+\infty$	↘	-2

- Đồ thị

- Đồ thị



Câu 2. Viết phương trình tiếp tuyến của (C) biết tiếp tuyến song song với đường thẳng $\Delta : y = -x + 1$

Câu 2. Viết phương trình tiếp tuyến của (C) biết tiếp tuyến song song với đường thẳng $\Delta : y = -x + 1$

Gọi $M(x_0; y_0) \in (C)$ là tiếp điểm, phương trình tiếp tuyến tại M dạng

$$y = f'(x_0)(x - x_0) + y_0 \qquad (1)$$

Tiếp tuyến song song với $\Delta : y = -x + 1$ nên có hệ số góc $f'(x_0) = -1$

$$(1) \Leftrightarrow \frac{-1}{(x_0 - 1)^2} = -1 \Leftrightarrow (x_0 - 1)^2 = 1 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x_0 - 1 = \ \ 1 \\ x_0 - 1 = -1 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x_0 = 2 \\ x_0 = 0 \end{array}\right.$$

Câu 2. Viết phương trình tiếp tuyến của (C) biết tiếp tuyến song song với đường thẳng $\Delta : y = -x + 1$

Gọi $M(x_0; y_0) \in (C)$ là tiếp điểm, phương trình tiếp tuyến tại M dạng

$$y = f'(x_0)(x - x_0) + y_0 \qquad (1)$$

Tiếp tuyến song song với $\Delta : y = -x + 1$ nên có hệ số góc $f'(x_0) = -1$

$$(1) \Leftrightarrow \frac{-1}{(x_0 - 1)^2} = -1 \Leftrightarrow (x_0 - 1)^2 = 1 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x_0 - 1 = 1 \\ x_0 - 1 = -1 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x_0 = 2 \\ x_0 = 0 \end{array}\right.$$

- Với $x_0 = 2 \Rightarrow y_0 = -1$. Phương trình tiếp tuyến là:

$$y + 1 = -1(x - 2) \Leftrightarrow y = -x + 1 \text{ (loại)}$$

Câu 2. Viết phương trình tiếp tuyến của (C) biết tiếp tuyến song song với đường thẳng $\Delta : y = -x + 1$

Gọi $M(x_0; y_0) \in (C)$ là tiếp điểm, phương trình tiếp tuyến tại M dạng

$$y = f'(x_0)(x - x_0) + y_0 \tag{1}$$

Tiếp tuyến song song với $\Delta : y = -x + 1$ nên có hệ số góc $f'(x_0) = -1$

$$(1) \Leftrightarrow \frac{-1}{(x_0 - 1)^2} = -1 \Leftrightarrow (x_0 - 1)^2 = 1 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x_0 - 1 = \ \ 1 \\ x_0 - 1 = -1 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x_0 = 2 \\ x_0 = 0 \end{array}\right.$$

- Với $x_0 = 2 \Rightarrow y_0 = -1$. Phương trình tiếp tuyến là:

$$y + 1 = -1(x - 2) \Leftrightarrow y = -x + 1 \text{ (loại)}$$

- Với $x_0 = 0 \Rightarrow y_0 = -3$. Phương trình tiếp tuyến là:

$$y + 3 = -1(x - 0) \Leftrightarrow y = -x - 3$$

Câu 3.

a) Tìm số phức liên hợp của số phức z thỏa mãn $3z + 9 = 2i.\overline{z} + 11i$.

b) Giải hệ phương trình: $\log_{\frac{1}{2}}(x^2 + 5) + 2\log_2(x + 5) = 0$

Câu 3.

a) Tìm số phức liên hợp của số phức z thỏa mãn $3z + 9 = 2i.\bar{z} + 11i$.

b) Giải hệ phương trình: $\log_{\frac{1}{2}}(x^2 + 5) + 2\log_2(x + 5) = 0$

a) Gọi số phức $z = a + bi,\ (a, b \in \mathbb{R})$. Ta có

$$3z + 9 = 2i.\bar{z} + 11i \Leftrightarrow 3(a + bi) + 9 = 2i(a - bi) + 11i \qquad (2)$$

$$(2) \Leftrightarrow \begin{cases} 3a + 9 = 2b \\ 3b = 2a + 11 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3a - 2b = -9 \\ -2a + 3b = 11 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = -1 \\ b = 3 \end{cases}$$

Ta có $z = -1 + 3i \Rightarrow \bar{z} = -1 - 3i$

Câu 3.

a) Tìm số phức liên hợp của số phức z thỏa mãn $3z + 9 = 2i.\bar{z} + 11i$.

b) Giải hệ phương trình: $\log_{\frac{1}{2}}(x^2+5) + 2\log_2(x+5) = 0$

a) Gọi số phức $z = a + bi,\ (a, b \in \mathbb{R})$. Ta có

$$3z + 9 = 2i.\bar{z} + 11i \Leftrightarrow 3(a+bi) + 9 = 2i(a-bi) + 11i \qquad (2)$$

$$(2) \Leftrightarrow \begin{cases} 3a + 9 = 2b \\ 3b = 2a + 11 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3a - 2b = -9 \\ -2a + 3b = 11 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = -1 \\ b = 3 \end{cases}$$

Ta có $z = -1 + 3i \Rightarrow \bar{z} = -1 - 3i$

b) Điều kiện: $\begin{cases} x^2 + 5 > 0 \\ x + 5 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow x + 5 > 0 \Leftrightarrow x > -5$

Khi đó, phương trình đã cho tương đương với

$$x^2 + 10x + 25 = x^2 + 5 \Leftrightarrow 10x = -20 \Leftrightarrow x = -2 \text{ (nhận)}$$

Câu 4. Tính tích phân: $I = \int_0^1 x\left(x + e^{z^2}\right)dx$

Câu 4. Tính tích phân: $I = \int_0^1 x\left(x + e^{z^2}\right) dx$

$$I = \int_0^1 x\left(x + e^{z^2}\right) dx = \int_0^1 x^2 dx + \int_0^1 xe^{z^2} dx = I_1 + I_2$$

Ta tính

$$I_1 = \int_0^1 x^2 dx = \left.\frac{x^3}{3}\right|_0^1 = \frac{1}{3}$$

Đặt: $t = x^2 \Rightarrow dt = 2xdx \Rightarrow \dfrac{dt}{2} = xdx$. Đổi cận

x	0	1
t	0	1

$$\Rightarrow I_2 = \int_0^1 e^t \frac{dt}{2} = \left.\frac{1}{2}e^t\right|_0^1 = \frac{1}{2}e - \frac{1}{2}$$

Vậy $I = I_1 + I_2 = \dfrac{1}{3} + \dfrac{1}{2}e - \dfrac{1}{2} = \dfrac{1}{2}e - \dfrac{1}{6}$

Câu 5. Trong không gian $Oxyz$, cho 3 điểm $A(4;-4;3), B(1;3;-1)$, $C(-2;0;1)$. Viết phương trình mặt cầu (S) đi qua các điểm A, B, C và cắt hai mặt phẳng $(\alpha): x+y+z+2=0$ và $(\beta): x-y-z-4=0$ theo hai giao tuyến là hai đường tròn có bán kính bằng nhau.

Câu 5. Trong không gian $Oxyz$, cho 3 điểm $A(4;-4;3)$, $B(1;3;-1)$, $C(-2;0;1)$. Viết phương trình mặt cầu (S) đi qua các điểm A, B, C và cắt hai mặt phẳng $(\alpha): x+y+z+2=0$ và $(\beta): x-y-z-4=0$ theo hai giao tuyến là hai đường tròn có bán kính bằng nhau.

Gọi $I(a;b;c)$ là tâm của mặt cầu (S). Ta có hệ

$$\begin{cases} IA = IB \\ IA = IC \\ d(I,(\alpha)) = d(I,(\beta)) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b = 0 \\ c = 3 \end{cases} \vee \begin{cases} a = 19/7 \\ b = -12/7 \\ c = -9/7 \end{cases}$$

Câu 5. Trong không gian $Oxyz$, cho 3 điểm $A(4;-4;3), B(1;3;-1)$, $C(-2;0;1)$. Viết phương trình mặt cầu (S) đi qua các điểm A, B, C và cắt hai mặt phẳng $(\alpha): x+y+z+2=0$ và $(\beta): x-y-z-4=0$ theo hai giao tuyến là hai đường tròn có bán kính bằng nhau.

Gọi $I(a;b;c)$ là tâm của mặt cầu (S). Ta có hệ

$$\begin{cases} IA = IB \\ IA = IC \\ d(I,(\alpha)) = d(I,(\beta)) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b = 0 \\ c = 3 \end{cases} \vee \begin{cases} a = 19/7 \\ b = -12/7 \\ c = -9/7 \end{cases}$$

- Với $(a;b;c) = (1;0;3)$, phương trình mặt cầu

$$(x-1)^2 + y^2 + (z-3)^2 = 25$$

Câu 5. Trong không gian $Oxyz$, cho 3 điểm $A(4;-4;3), B(1;3;-1), C(-2;0;1)$. Viết phương trình mặt cầu (S) đi qua các điểm A, B, C và cắt hai mặt phẳng $(\alpha): x+y+z+2=0$ và $(\beta): x-y-z-4=0$ theo hai giao tuyến là hai đường tròn có bán kính bằng nhau.

Gọi $I(a;b;c)$ là tâm của mặt cầu (S). Ta có hệ

$$\begin{cases} IA = IB \\ IA = IC \\ d(I,(\alpha)) = d(I,(\beta)) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b = 0 \\ c = 3 \end{cases} \vee \begin{cases} a = 19/7 \\ b = -12/7 \\ c = -9/7 \end{cases}$$

- Với $(a;b;c) = (1;0;3)$, phương trình mặt cầu
$$(x-1)^2 + y^2 + (z-3)^2 = 25$$
- Với $(a;b;c) = (19/7;-12/7;-9/7)$, phương trình mặt cầu
$$\left(x - \frac{19}{7}\right)^2 + \left(y + \frac{12}{7}\right)^2 + \left(z + \frac{9}{7}\right)^2 = \frac{1237}{49}$$

Câu 6.

a) Viết phương trình tiếp tuyến của (C) biết tiếp tuyến song song với đường thẳng $\Delta : y = -x + 1$

Câu 6.

a) Viết phương trình tiếp tuyến của (C) biết tiếp tuyến song song với đường thẳng $\Delta : y = -x + 1$

Ta có

$$\begin{aligned}
& (\sin x + \cos x)^2 = 1 + \cos x \\
\Leftrightarrow\ & 1 + 2\sin x \cos x = 1 + \cos x \\
\Leftrightarrow\ & \cos x \cdot (2\sin x - 1) = 0 \\
\Leftrightarrow\ & \left[\begin{array}{l} \cos x = 0 \\ \sin x = \dfrac{1}{2} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \dfrac{\pi}{2} + k\pi \\ x = \dfrac{\pi}{6} + k2\pi \\ x = \dfrac{5\pi}{6} + k2\pi \end{array}\right. \quad (k \in \mathbb{Z})
\end{aligned}$$

Vậy phương trình đã cho có 3 họ nghiệm.

Câu 6.

b) Một tổ gồm 9 học sinh nam và 3 học sinh nữ. Cần chia tổ đó thành 3 nhóm, mỗi nhóm 4 học sinh để đi làm 3 công việc trực nhật khác nhau. Tính xác suất để khi chia ngẫu nhiên ta được mỗi nhóm có đúng 1 nữ.

Câu 6.

b) Một tổ gồm 9 học sinh nam và 3 học sinh nữ. Cần chia tổ đó thành 3 nhóm, mỗi nhóm 4 học sinh để đi làm 3 công việc trực nhật khác nhau. Tính xác suất để khi chia ngẫu nhiên ta được mỗi nhóm có đúng 1 nữ.

- Phép thử: "Sắp 12 học sinh vào 3 nhóm khác nhau"
  $\Rightarrow$ Số phần tử của không gian mẫu: $n(\Omega) = \mathbf{C}_{12}^4.\mathbf{C}_8^4.\mathbf{C}_4^4 = 34\ 650$

Câu 6.

b) Một tổ gồm 9 học sinh nam và 3 học sinh nữ. Cần chia tổ đó thành 3 nhóm, mỗi nhóm 4 học sinh để đi làm 3 công việc trực nhật khác nhau. Tính xác suất để khi chia ngẫu nhiên ta được mỗi nhóm có đúng 1 nữ.

- Phép thử: "Sắp 12 học sinh vào 3 nhóm khác nhau"

  $\Rightarrow$ Số phần tử của không gian mẫu: $n(\Omega) = \mathbf{C}_{12}^4.\mathbf{C}_8^4.\mathbf{C}_4^4 = 34\ 650$

- Gọi A là biến cố: "Sắp 12 học sinh vào 3 nhóm # có đúng 1 nữ"

  $\Rightarrow$ Số kết quả thuận lợi cho biến cố A là

$$n(A) = \mathbf{C}_3^1.\mathbf{C}_9^3.\mathbf{C}_2^1.\mathbf{C}_6^3.\mathbf{C}_1^1.\mathbf{C}_3^3 = 10\ 080$$

Câu 6.

b) Một tổ gồm 9 học sinh nam và 3 học sinh nữ. Cần chia tổ đó thành 3 nhóm, mỗi nhóm 4 học sinh để đi làm 3 công việc trực nhật khác nhau. Tính xác suất để khi chia ngẫu nhiên ta được mỗi nhóm có đúng 1 nữ.

- Phép thử: "Sắp 12 học sinh vào 3 nhóm khác nhau"

  $\Rightarrow$ Số phần tử của không gian mẫu: $n(\Omega) = \mathbf{C}_{12}^4.\mathbf{C}_8^4.\mathbf{C}_4^4 = 34\ 650$
- Gọi A là biến cố: "Sắp 12 học sinh vào 3 nhóm # có đúng 1 nữ"

  $\Rightarrow$ Số kết quả thuận lợi cho biến cố A là

$$n(A) = \mathbf{C}_3^1.\mathbf{C}_9^3.\mathbf{C}_2^1.\mathbf{C}_6^3.\mathbf{C}_1^1.\mathbf{C}_3^3 = 10\ 080$$

- Xác suất của biến cố là $P(A) = \dfrac{n(\Omega)}{n(A)} = \dfrac{10\ 080}{34\ 650} = \dfrac{16}{55}$

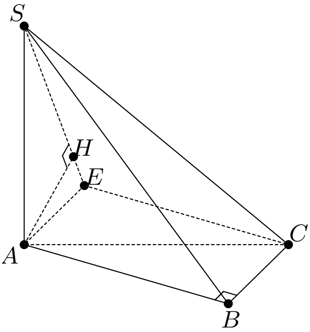
Câu 6.

b) Một tổ gồm 9 học sinh nam và 3 học sinh nữ. Cần chia tổ đó thành 3 nhóm, mỗi nhóm 4 học sinh để đi làm 3 công việc trực nhật khác nhau. Tính xác suất để khi chia ngẫu nhiên ta được mỗi nhóm có đúng 1 nữ.

- Phép thử: "Sắp 12 học sinh vào 3 nhóm khác nhau"
  $\Rightarrow$ Số phần tử của không gian mẫu: $n(\Omega) = \mathbf{C}_{12}^4.\mathbf{C}_8^4.\mathbf{C}_4^4 = 34\ 650$
- Gọi A là biến cố: "Sắp 12 học sinh vào 3 nhóm # có đúng 1 nữ"
  $\Rightarrow$ Số kết quả thuận lợi cho biến cố A là
$$n(A) = \mathbf{C}_3^1.\mathbf{C}_9^3.\mathbf{C}_2^1.\mathbf{C}_6^3.\mathbf{C}_1^1.\mathbf{C}_3^3 = 10\ 080$$
- Xác suất của biến cố là $P(A) = \dfrac{n(\Omega)}{n(A)} = \dfrac{10\ 080}{34\ 650} = \dfrac{16}{55}$
- Vậy xác suất cần tìm là $\dfrac{16}{55}$

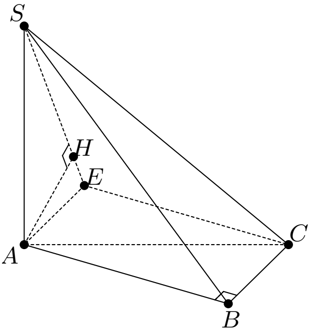
Câu 7. Cho khối chóp $S.ABC$ có $SA \perp$ với mặt đáy (ABC), tam giác ABC vuông cân tại B, $SA = a$, SB hợp với đáy một góc 30^0. Tính thể tích của khối chóp $S.ABC$ và tính khoảng cách giữa AB và SC.

Câu 7. Cho khối chóp $S.ABC$ có $SA \perp$ với mặt đáy (ABC), tam giác ABC vuông cân tại B, $SA = a$, SB hợp với đáy một góc 30^0. Tính thể tích của khối chóp $S.ABC$ và tính khoảng cách giữa AB và SC.



- Ta có $SA \perp AB$
- $\Rightarrow AB$ là hình chiếu của SB lên (ABC), do đó $\widehat{SBA} = 30^0$

Câu 7. Cho khối chóp $S.ABC$ có $SA \perp$ với mặt đáy (ABC), tam giác ABC vuông cân tại B, $SA = a$, SB hợp với đáy một góc 30^0. Tính thể tích của khối chóp $S.ABC$ và tính khoảng cách giữa AB và SC.

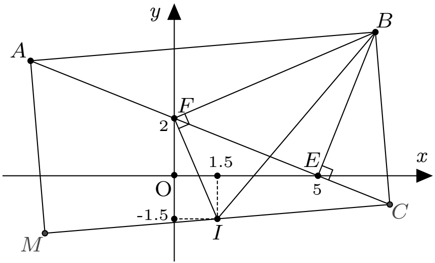


- Ta có $SA \perp AB$
- $\Rightarrow AB$ là hình chiếu của SB lên (ABC), do đó $\widehat{SBA} = 30^0$

- $\cot \widehat{SBA} = \dfrac{AB}{SA} \Rightarrow BC = a\sqrt{3}$
- $S_{ABC} = \dfrac{1}{2}AB.BC = \dfrac{1}{2}a\sqrt{3}.a\sqrt{3} = \dfrac{3a^2}{2}$
- $V = \frac{1}{3}SA.S_{ABC} = \dfrac{1}{3}.a.\dfrac{3a^2}{2} = \dfrac{a^3}{2}$
- Trong mp(ABC), kẻ $AI \,/\!/\, BC$ và kẻ $CI \,/\!/\, AB$
  $\Rightarrow ABCI$ là hình vuông cạnh $a\sqrt{3}$
- $d(AB, SC) = d\Big(A; (SIC)\Big) = AH$
- Tam giác SAI vuông tại A nên
  $$\frac{1}{AH^2} = \frac{1}{SA^2} + \frac{1}{AI^2} \Rightarrow AH = \frac{a\sqrt{3}}{2}$$
  $\Rightarrow$ khoảng cách của AB và SC bằng $\dfrac{a\sqrt{3}}{2}$

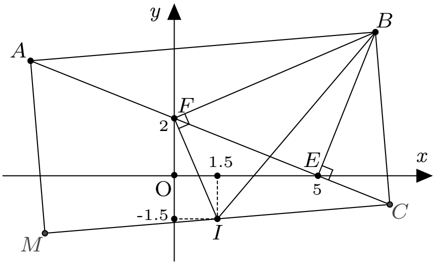
Câu 8. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho hình chữ nhật $ABCD$ có hình chiếu B lên AC là $E(5;0)$, trung điểm AE và CD lần lượt là $F(0;2), I\left(\frac{3}{2};-\frac{3}{2}\right)$. Viết phương trình đường thẳng CD.

Câu 8. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho hình chữ nhật $ABCD$ có hình chiếu B lên AC là $E(5;0)$, trung điểm AE và CD lần lượt là $F(0;2), I\left(\frac{3}{2}; -\frac{3}{2}\right)$. Viết phương trình đường thẳng CD.



- F là trung điểm AE nên $A(-5;4)$
- Phương trình đường thẳng (AC) :
  $2x + 5y - 10 = 0$

Câu 8. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho hình chữ nhật $ABCD$ có hình chiếu B lên AC là $E(5;0)$, trung điểm AE và CD lần lượt là $F(0;2), I\left(\frac{3}{2};-\frac{3}{2}\right)$. Viết phương trình đường thẳng CD.



- F là trung điểm AE nên $A(-5;4)$
- Phương trình đường thẳng (AC) : $2x+5y-10=0$

- Ta đi chứng minh: $BF \perp IF$.
- $\overrightarrow{BF} = \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{BE}\right)$
- $\overrightarrow{FI} = \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{FD}+\overrightarrow{FC}\right) = \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{EC}\right)$
- $\Rightarrow \overrightarrow{BF}.\overrightarrow{FI} = 0$
- $BF \perp IF$ nên có phương trình: $7x+3y-6=0$
- BE đi qua E và vuông góc EF nên có phương trình: $5x-2y-25=0$. Do đó $B(7;5)$
- Từ đây tìm được phương trình (CD) : $2x-24y-39=0$

Câu 9. Giải bất phương trình:

$$\left(2-\frac{3}{x}\right)\left(2\sqrt{x-1}-1\right)\geq\frac{4-8x+9x^2}{3x+2\sqrt{2x-1}} \qquad (3)$$

Câu 9. Giải bất phương trình:

$$\left(2-\frac{3}{x}\right)\left(2\sqrt{x-1}-1\right) \geq \frac{4-8x+9x^2}{3x+2\sqrt{2x-1}} \qquad (3)$$

- ĐK: $x \geq 1$. Ta có

$$(3) \Leftrightarrow \frac{(2x-3)\left(2\sqrt{x-1}-1\right)}{x} \geq \frac{9x^2-4(2x-1)}{3x+2\sqrt{2\sqrt{2x-1}}}$$

$$\Leftrightarrow \frac{(2x-3)\left(2\sqrt{x-1}-1\right)}{x} \geq 3x-2\sqrt{2x-1}$$

$$\Leftrightarrow (2x-3)\left(2\sqrt{x-1}-1\right) \geq 3x^2-2x\sqrt{2x-1} \quad (\text{do } x \geq 1)$$

$$\Leftrightarrow 2\left(x-1-\sqrt{x-1}\right)^2+\left(x-\sqrt{2x-1}\right)^2+2\left(\sqrt{x-1}+x-1\right) \leq 0 \qquad (4)$$

Câu 9. Giải bất phương trình:

$$\left(2-\frac{3}{x}\right)\left(2\sqrt{x-1}-1\right) \geq \frac{4-8x+9x^2}{3x+2\sqrt{2x-1}} \qquad (3)$$

- ĐK: $x \geq 1$. Ta có

$$(3) \Leftrightarrow \frac{(2x-3)\left(2\sqrt{x-1}-1\right)}{x} \geq \frac{9x^2-4(2x-1)}{3x+2\sqrt{2\sqrt{2x-1}}}$$

$$\Leftrightarrow \frac{(2x-3)\left(2\sqrt{x-1}-1\right)}{x} \geq 3x-2\sqrt{2x-1}$$

$$\Leftrightarrow (2x-3)\left(2\sqrt{x-1}-1\right) \geq 3x^2-2x\sqrt{2x-1} \quad (\text{do } x \geq 1)$$

$$\Leftrightarrow 2\left(x-1-\sqrt{x-1}\right)^2+\left(x-\sqrt{2x-1}\right)^2+2\left(\sqrt{x-1}+x-1\right) \leq 0 \qquad (4)$$

- $\Rightarrow \mathrm{VT}_{(4)} \geq 0$

Phân tích Đề thi THPT Quốc gia 2016

Câu 9. Giải bất phương trình:

$$\left(2-\frac{3}{x}\right)\left(2\sqrt{x-1}-1\right) \geq \frac{4-8x+9x^2}{3x+2\sqrt{2x-1}} \qquad (3)$$

- ĐK: $x \geq 1$. Ta có

$$(3) \Leftrightarrow \frac{(2x-3)\left(2\sqrt{x-1}-1\right)}{x} \geq \frac{9x^2-4(2x-1)}{3x+2\sqrt{2\sqrt{2x-1}}}$$

$$\Leftrightarrow \frac{(2x-3)\left(2\sqrt{x-1}-1\right)}{x} \geq 3x-2\sqrt{2x-1}$$

$$\Leftrightarrow (2x-3)\left(2\sqrt{x-1}-1\right) \geq 3x^2-2x\sqrt{2x-1} \quad (\text{do } x \geq 1)$$

$$\Leftrightarrow 2\left(x-1-\sqrt{x-1}\right)^2+\left(x-\sqrt{2x-1}\right)^2+2\left(\sqrt{x-1}+x-1\right) \leq 0 \qquad (4)$$

- $\Rightarrow \mathrm{VT}_{(4)} \geq 0$
- Vậy để (4) xảy ra thì $\Leftrightarrow \mathrm{VT}_{(4)} = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x-1=\sqrt{x-1} \\ x=\sqrt{2x-1} \\ x-1=0 \end{cases} \Leftrightarrow x=1$

Câu 10. Cho $a, b, c > 0$, thỏa $c = \min\{a, b, c\}$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$P = \sqrt{\frac{a}{b+c}} + \sqrt{\frac{b}{c+a}} + \frac{2\ln\left(\dfrac{6(a+b)+4c}{a+b}\right)}{\sqrt[4]{\dfrac{8c}{a+b}}} \tag{5}$$

Câu 10. Cho $a, b, c > 0$, thỏa $c = \min\{a, b, c\}$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$P = \sqrt{\frac{a}{b+c}} + \sqrt{\frac{b}{c+a}} + \frac{2\ln\left(\dfrac{6(a+b)+4c}{a+b}\right)}{\sqrt[4]{\dfrac{8c}{a+b}}} \tag{5}$$

- $$\sqrt{\frac{a}{b+c}} + \sqrt{\frac{b}{c+a}} = \frac{a^2}{a\sqrt{a(b+c)}} + \frac{b^2}{b\sqrt{b(c+a)}} \geq \frac{(a+b)^2}{a\sqrt{a(b+c)} + b\sqrt{b(c+a)}} \tag{6}$$
- Mặt khác, vì $c = \min\{a, b, c\} \Rightarrow a + b - 2c \geq 0$. Nên ta có

$$a^2(b+c) + b^2(c+a) = ab(a+b-2c) + c(a+b)^2 \leq \left(\frac{a+b}{2}\right)^2 (a+b-2c) + c(a+b)^2$$

$$\left(\frac{a+b}{2}\right)^2 (a+b-2c) + c(a+b)^2 = \frac{(a+b)^3 + 2c(a+b)^2}{4} \tag{7}$$

- Từ (6) và (7) suy ra $\sqrt{\dfrac{a}{b+c}} + \sqrt{\dfrac{b}{c+a}} \geq 2\sqrt{\dfrac{a+b}{a+b+2c}}$
- $$\ln\left[\frac{6(a+b)+4c}{a+b}\right] = \ln\left[2\left(\frac{a+b+2c}{a+b} + 2\right)\right] \geq \ln\left[\left(\sqrt{1 + \frac{2c}{a+b}} + \sqrt{2}\right)^2\right] \tag{8}$$

- Mặt khác: vì $c = \min\{a, b, c\} \Rightarrow 2c \leq a + b$. Nên ta có

$$\sqrt[4]{\frac{8c}{a+b}} \leq \sqrt[4]{2 \cdot \frac{a+b+2c}{a+b}} \leq \frac{1}{2}\left(\sqrt{1+\frac{2c}{a+b}}+\sqrt{2}\right) \tag{9}$$

- Mặt khác: vì $c = \min\{a, b, c\} \Rightarrow 2c \leq a + b$. Nên ta có

$$\sqrt[4]{\frac{8c}{a+b}} \leq \sqrt[4]{2 \cdot \frac{a+b+2c}{a+b}} \leq \frac{1}{2}\left(\sqrt{1+\frac{2c}{a+b}} + \sqrt{2}\right) \tag{9}$$

- Từ (7), (8), (9) ta được

$$P \geq \frac{2}{\sqrt{1+\frac{2c}{a+b}}} + \frac{8\ln\left(\sqrt{1+\frac{2c}{a+b}} + \sqrt{2}\right)}{\sqrt{1+\frac{2c}{a+b}} + \sqrt{2}}$$

- Mặt khác: vì $c = \min\{a, b, c\} \Rightarrow 2c \le a + b$. Nên ta có

$$\sqrt[4]{\frac{8c}{a+b}} \le \sqrt[4]{2 \cdot \frac{a+b+2c}{a+b}} \le \frac{1}{2}\left(\sqrt{1+\frac{2c}{a+b}}+\sqrt{2}\right) \qquad (9)$$

- Từ (7), (8), (9) ta được

$$P \ge \frac{2}{\sqrt{1+\frac{2c}{a+b}}} + \frac{8\ln\left(\sqrt{1+\frac{2c}{a+b}}+\sqrt{2}\right)}{\sqrt{1+\frac{2c}{a+b}}+\sqrt{2}}$$

- Đặt $t = \sqrt{1+\frac{2c}{a+b}}$, do $c = \min\{a, b, c\} \Rightarrow \frac{2c}{a+b} \le 1 \Rightarrow t \le \sqrt{2}$

- Mặt khác: vì $c = \min\{a, b, c\} \Rightarrow 2c \leq a + b$. Nên ta có
$$\sqrt[4]{\frac{8c}{a+b}} \leq \sqrt[4]{2 \cdot \frac{a+b+2c}{a+b}} \leq \frac{1}{2}\left(\sqrt{1+\frac{2c}{a+b}} + \sqrt{2}\right) \tag{9}$$
- Từ (7), (8), (9) ta được
$$P \geq \frac{2}{\sqrt{1+\frac{2c}{a+b}}} + \frac{8\ln\left(\sqrt{1+\frac{2c}{a+b}} + \sqrt{2}\right)}{\sqrt{1+\frac{2c}{a+b}} + \sqrt{2}}$$
- Đặt $t = \sqrt{1+\frac{2c}{a+b}}$, do $c = \min\{a, b, c\} \Rightarrow \frac{2c}{a+b} \leq 1 \Rightarrow t \leq \sqrt{2}$
- Xét hàm $f(t) = \frac{2}{t} + \frac{8\ln\left(t+\sqrt{2}\right)}{t+\sqrt{2}}$, trên $t \in \left(0; \sqrt{2}\right]$

- Mặt khác: vì $c = \min\{a,b,c\} \Rightarrow 2c \leq a+b$. Nên ta có

$$\sqrt[4]{\frac{8c}{a+b}} \leq \sqrt[4]{2 \cdot \frac{a+b+2c}{a+b}} \leq \frac{1}{2}\left(\sqrt{1+\frac{2c}{a+b}}+\sqrt{2}\right) \qquad (9)$$

- Từ (7), (8), (9) ta được

$$P \geq \frac{2}{\sqrt{1+\frac{2c}{a+b}}} + \frac{8\ln\left(\sqrt{1+\frac{2c}{a+b}}+\sqrt{2}\right)}{\sqrt{1+\frac{2c}{a+b}}+\sqrt{2}}$$

- Đặt $t = \sqrt{1+\frac{2c}{a+b}}$, do $c = \min\{a,b,c\} \Rightarrow \frac{2c}{a+b} \leq 1 \Rightarrow t \leq \sqrt{2}$

- Xét hàm $f(t) = \frac{2}{t} + \frac{8\ln\left(t+\sqrt{2}\right)}{t+\sqrt{2}}$, trên $t \in \left(0;\sqrt{2}\right]$

- Ta có

$$f'(t) = \frac{\left(t-\sqrt{2}\right)\left(3t+\sqrt{2}\right)}{t^2\left(t+\sqrt{2}\right)^2} - \frac{8\ln\left(t+\sqrt{2}\right)}{\left(t+\sqrt{2}\right)^2},\ \forall t \in \left(0;\sqrt{2}\right]$$

- Mặt khác: vì $c = \min\{a,b,c\} \Rightarrow 2c \le a+b$. Nên ta có

$$\sqrt[4]{\frac{8c}{a+b}} \le \sqrt[4]{2\cdot\frac{a+b+2c}{a+b}} \le \frac{1}{2}\left(\sqrt{1+\frac{2c}{a+b}}+\sqrt{2}\right) \qquad (9)$$

- Từ (7), (8), (9) ta được

$$P \ge \frac{2}{\sqrt{1+\frac{2c}{a+b}}} + \frac{8\ln\left(\sqrt{1+\frac{2c}{a+b}}+\sqrt{2}\right)}{\sqrt{1+\frac{2c}{a+b}}+\sqrt{2}}$$

- Đặt $t = \sqrt{1+\frac{2c}{a+b}}$, do $c = \min\{a,b,c\} \Rightarrow \frac{2c}{a+b} \le 1 \Rightarrow t \le \sqrt{2}$

- Xét hàm $f(t) = \frac{2}{t} + \frac{8\ln\left(t+\sqrt{2}\right)}{t+\sqrt{2}}$, trên $t \in \left(0;\sqrt{2}\right]$

- Ta có

$$f'(t) = \frac{\left(t-\sqrt{2}\right)\left(3t+\sqrt{2}\right)}{t^2\left(t+\sqrt{2}\right)^2} - \frac{8\ln\left(t+\sqrt{2}\right)}{\left(t+\sqrt{2}\right)^2},\ \forall t \in \left(0;\sqrt{2}\right]$$

- Suy ra: $f(t) \ge f(\sqrt{2}) = 2(1+\ln 8)$. Vậy $P_{\min} = 2(1+\ln 8)$.

  Dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi $a=b=c$.