គណិតវិទ្យាII

មាស ឡេន

ដេប៉ាតឺម៉ង់គណិតវិទ្យា

២០២១

គម្រោងមេរៀន

1. អាំងតេក្រាលមិនកំនត់
   - អាំងតេក្រាលដោយប្តូរអថេរ
   - អាំងតេក្រាលដោយផ្នែក
   - អាំងតេក្រាលត្រីកោណមាត្រ
   - អាំងតេក្រាលដោយជំនួសត្រីកោណមាត្រ
   - អាំងតេក្រាលដោយបំបែកជាប្រភាគតូចៗ
   - អាំងតេក្រាលនៃអនុគមន៍សនិទានត្រីកោណមាត្រ
2. អាំងតេក្រាលកំនត់
   - ក្រលាផ្ទៃនៃដែនខណ្ឌដោយខ្សែកោង
   - និយមន័យអាំងតេក្រាលកំនត់
   - ការគណនាអាំងតេក្រាលកំនត់
3. ការអនុវត្តនៃអាំងតេក្រាលកំនត់
   - ក្រលាផ្ទៃខណ្ឌដោយខ្សែកោង
   - មាឌសូលីតបរិវត្តន៍
   - ការអនុវត្តផ្សេងទៀត

សេចក្តីផ្តើម

- នៅក្នុងមេរៀនដេរីវេ: គេអោយអនុគមន៍ f នោះយើងអាចរកដេរីវេ f' ដោយប្រើក្បួនផ្សេងៗនៃដេរីវេ
- នៅក្នុងមេរៀននេះ: យើងចង់រកអនុគមន៍ F ដោយស្គាល់ដេរីវេរបស់វា មានន័យថារក $F(x)$ បើ $F'(x) = f(x)$

ឧទាហរណ៍

បើ $f(x) = x^2$ នោះបើ $F(x) = \frac{1}{3}x^3$ យើងបាន $F'(x) = x^2 = f(x)$។ យើងក៏មាន $F(x) = \frac{1}{3}x^3 + 10$ ផ្ទៀងផ្ទាត់ $F'(x) = x^2 = f(x)$ ដែរ។ តាមពិតជាទូទៅយើងមាន $F(x) = \frac{1}{3}x^3 + C, C$ ចំនួនថេរ ផ្ទៀងផ្ទាត់ $F'(x) = x^2 = f(x)$។

អាំងតេក្រាលមិនកំនត់

អាំងតេក្រាលមិនកំនត់

អាំងតេក្រាលមិនកំនត់នៃ f គឺ

$$\int f(x)dx = F(x) + C,$$

ដែល $F'(x) = f(x)$

ឧទាហរណ៍

$$\int \frac{1}{x}dx = \ln|x| + C, \ C \text{ ចំនួនថេរ}$$

ព្រោះ

$$\frac{d}{dx}(\ln|x|) = \frac{1}{x}.$$

តារាងអាំងតេក្រាលមិនកំនត់

$$\int [f(x)+g(x)]\,dx = \int f(x)\,dx + \int g(x)\,dx \qquad \int cf(x)\,dx = c\int f(x)\,dx$$

$$\int x^n\,dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C \quad (n \neq -1) \qquad \int \frac{1}{x}\,dx = \ln|x| + C$$

$$\int e^x\,dx = e^x + C \qquad \int a^x\,dx = \frac{a^x}{\ln a} + C$$

$$\int \sin x\,dx = -\cos x + C \qquad \int \cos x\,dx = \sin x + C$$

$$\int \sec^2 x\,dx = \tan x + C \qquad \int \csc^2 x\,dx = -\cot x + C$$

$$\int \sec x \tan x\,dx = \sec x + C \qquad \int \csc x \cot x\,dx = -\csc x + C$$

$$\int \frac{1}{x^2+1}\,dx = \tan^{-1}x + C \qquad \int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = \sin^{-1}x + C$$

និមិត្តសញ្ញា

តើ $\int f(u)du$ និង $\int f(u)dx$ ដូចគ្នាឬទេ?

ឧទាហរណ៍

យក $f(x) = x^3$ និង $u = x^2$ នោះយើងបាន

១. $\int f(x)dx = \int x^3 dx = \frac{x^4}{4} + C,$
២. $\int f(u)du = \int u^3 du = \frac{u^4}{4} + C = \frac{x^8}{4} + C,$
៣. $\int f(u)dx = \int x^6 dx = \frac{x^7}{7} + C$

ជាទូទៅ $\int f(u)du \neq \int f(u)dx$ ប៉ុន្តែ

$$\int f(x)dx = \int f(t)dt = \int f(s)ds = \int f(u)du$$

អាំងតេក្រាលដោយប្តូរអថេរ

ការគណនាអាំងតេក្រាលដោយវិធីសាស្ត្រប្តូរអថេរជួយឲ្យយើងបម្លែងពីទំរង់អាំងតេក្រាលមួយទៅជាទំរង់អាំងតេក្រាលមួយដែលយើងអាចគណនាបាន។ វិធីសាស្ត្រនេះអាចប្រើបាននៅពេលដែលអាំងតេក្រាលអាចសសេរជាទំរង់

$$\int f(g(x))g'(x)dx$$

ហេតុអ្វី?

យើងសង្កេតឃើញថាបើ $F' = f$ នោះតាមវិធានច្រវ៉ាក់

$$\frac{d}{dx}[F(g(x))] = F'(g(x))g'(x) = f(g(x))g'(x)$$

ដូចនេះ

$$\int f(g(x))g'(x)dx = \int F'(g(x))g'(x)dx = F(g(x)) + C$$

តាង $u = g(x)$ នោះ $du = g'(x)dx$ យើងបាន

$$\int f(g(x))g'(x)dx = \int f(u)du = F(u) + C$$

វិធីសាស្រ្តប្តូរអថេរ

បើ $u = g(x)$ នោះ

$$\int f(g(x))g'(x)dx = \int f(u)du$$

ឧទាហរណ៍

គណនាអាំងតេក្រាល $\int x^3\cos(x^4+2)dx$

តាង $u=x^4+2$ នោះ $du=4x^3dx$។ ដូចនេះ

$$\begin{aligned}\int x^3\cos(x^4+2)dx &= \int \cos u.\frac{1}{4}du\\ &= \frac{1}{4}\int \cos u du\\ &= \frac{1}{4}\sin u + C\\ &= \frac{1}{4}\sin(x^4+2)+C\end{aligned}$$

ឧទាហរណ៍

គណនាអាំងតេក្រាល $\int \frac{x}{\sqrt{1-4x^2}}dx$

តាង $u = 1 - 4x^2$ នោះ $du = -8xdx$ មានន័យថា $xdx = -\frac{1}{8}du$។ ដូចនេះ

$$\begin{aligned}\int \frac{x}{\sqrt{1-4x^2}}dx &= -\frac{1}{8}\int \frac{1}{\sqrt{u}}du \\ &= -\frac{1}{8}\int u^{-1/2}du \\ &= -\frac{1}{8}(2\sqrt{u}) + C \\ &= -\frac{1}{4}\sqrt{1-4x^2} + C\end{aligned}$$

ឧទាហរណ៍

គណនាអាំងតេក្រាល $\int \sin x e^{\cos x} dx$

តាង $u = \cos x$ នោះ $du = -\sin x dx$ ។ ដូចនេះ៖

$$\begin{aligned}\int \sin x e^{\cos x} dx &= -\int (-\sin x) e^{\cos x} dx \\ &= -\int e^{\cos x} (-\sin x) dx \\ &= -\int e^{u} du \\ &= -e^{u} + C \\ &= -e^{\cos x} + C\end{aligned}$$

លំហាត់អនុវត្តន៍

គណនាអាំងតេក្រាលវិធីប្តូរអថេរ

១. $\int x^2\sqrt{5+2x^3}dx$
២. $\int \frac{x^3+\sqrt{x}}{x^{3/2}}dx$
៣. $\int \frac{dx}{e^x+e^{-x}}$
៤. $\int (2x+1)e^{x^2+x}dx$
៥. $\int \tan x dx$
៦. $\int x\sqrt{2x-1}dx$
៧. $\int \frac{e^x}{e^x+1}dx$
៨. $\int \frac{e^{2\sqrt{x}+1}}{\sqrt{x}}dx$
៩. $\int \frac{dx}{5-3x}$
១០. $\int e^x\sqrt{1+e^x}dx$

ជំនួយស្មារតី

ការប្តូរអថេរឲ្យត្រូវហាក់ដូចជាសិល្បៈ វាមិនមែនជារឿងចម្លែកក្នុងការប្តូរអថេរខុសលើកទីមួយ ដូចនេះយើងត្រូវតែព្យាយាមម្តងទៀត

ពង្រីកគំនិត

1. ប្តូរ $x = \sin u, dx = \cos u du$ ដើម្បីបង្ហាញ
$$\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \int 1du$$
រួចគណនា $\int 1du$ ដើម្បីបង្ហាញ $\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \sin^{-1} x + C$
2. ប្តូរ $x = \tan u, dx = \frac{1}{\cos^2 u} du$ ដើម្បីបង្ហាញ
$$\int \frac{dx}{1+x^2} = \int 1du$$
រួចគណនា $\int 1du$ ដើម្បីបង្ហាញ $\int \frac{dx}{1+x^2} = \tan^{-1} x + C$

អាំងតេក្រាលដោយផ្នែក

ដើម្បីបង្ហាញពីសារៈសំខាន់នៃអាំងតេក្រាលដោយផ្នែកយើងសង្កេតមើលអាំងតេក្រាលខាងក្រោម៖

$$\int e^x dx = e^x + C \text{ និង } \int xe^x dx = ?$$

អាំងតេក្រាលទីមួយយើងបានគណនាហើយ ចំនែកអាំងតេក្រាលទីពីរយើងមិនទាន់បានគណនានៅឡើយទេ។ អាំងតេក្រាលទីពីរនេះជាអាំងតេក្រាលនៃទំរង់ផលគុណដែលអាចគណនាបានដោយ វិធីសាស្រ្តអាំងតេក្រាលដោយផ្នែក។ អាំងតេក្រាលផ្សេងៗទៀតដូចជា៖

$$\int x\cos x dx, \int x^2 e^x dx, \int \ln x dx, \int e^x \cos x dx.$$

តើអ្វីជាវិធីសាស្រ្តអាំងតេក្រាលដោយផ្នែក?

បើ u និង v ជាអនុគមន៍មានដេរីវេ នោះក្បួនផលគុណនៃដេរីវេ

$$\frac{d}{dx}[u(x)v(x)] = u'(x)v(x) + u(x)v'(x)$$

យើងបានក្នុងទំរង់អាំងតេក្រាល

$$u(x)v(x) = \int (u'(x)v(x) + u(x)v'(x))\, dx.$$

ឬ

$$\int u(x)\underbrace{v'(x)dx}_{dv} = u(x)v(x) - \int v(x)\underbrace{u'(x)dx}_{du}$$

សរសេរ $du = u'(x)dx, dv = v'(x)dx$ នោះយើងបាន

អាំងតេក្រាលដោយផ្នែក

$$\int udv = uv - \int vdu$$

សំគាល់

ក្នុងវិធីសាស្រ្តអាំងតេក្រាលដោយផ្នែក យើងបំបែកផលគុណជាពីរផ្នែក u និង dv។ តើអ្វីជាជម្រើសល្អបំផុតសំរាប់ u និង dv ?

ឧទាហរណ៍

គណនាអាំងតេក្រាល $\int xe^x dx$

តាង

$$u = x,\ dv = e^x dx$$
$$du = dx,\ v = e^x$$

ដូចនេះតាមអាំងតេក្រាលដោយផ្នែកយើងបាន

$$\int xe^x dx = xe^x - \int e^x dx$$
$$= xe^x - e^x + C.$$

ឧទាហរណ៍

គណនាអាំងតេក្រាល $\int x\cos x dx$

តាង

$$u = x,\ \ dv = \cos x dx$$
$$du = dx,\ \ v = \sin x$$

ដូចនេះតាមអាំងតេក្រាលដោយផ្នែកយើងបាន

$$\begin{aligned}\int x\cos x dx &= x\sin x - \int \sin x dx\\ &= x\sin x + \cos x + C.\end{aligned}$$

ពង្រីកគំនិត: សាកល្បងតាង $u = \cos x, dv = xdx$

តើអ្វីជាជម្រើសល្អបំផុតសំរាប់ u និង dv ?

1. ចំពោះអាំងតេក្រាល

$$\int x^n e^{ax} dx, \int x^n \sin ax dx, \int x^n \cos ax dx$$

តាង $u = x^n$ និង $dv = e^{ax} dx, \sin ax dx, \cos ax dx.$

2. ចំពោះអាំងតេក្រាល

$$\int x^n \ln x dx, \int x^n \sin^{-1} ax dx, \int x^n \tan^{-1} ax dx$$

តាង $u = \ln x, \sin^{-1} ax, \tan^{-1} ax$ និង $dv = x^n dx.$

៣ ចំពោះអាំងតេក្រាល

$$\int e^{ax}\sin bx dx, \int e^{ax}\cos bx dx$$

តាង $u = \sin bx, \cos bx$ និង $dv = e^{ax}dx$ ដែល $n \in \mathbb{N}, a, b \in \mathbb{R}$.

ជម្រើសសំរាប់ u

យើងជ្រើសរើស u តាមលំដាប់អក្សរកាត់ LIPET ដែលមានន័យថា៖

- L: Natural Logarithm (អនុគមន៍ឡូការីត)
- I: Inverse Trigonometric Function (អនុគមន៍ច្រាសត្រីកោណមាត្រ)
- P: Polynomial (ពហុធា)
- E: Exponential Function (អនុគមន៍អ៊ិចស្ប៉ូណង់ស្យែល)
- T: Trigonometric Function (អនុគមន៍ត្រីកោណមាត្រ)

ឧទាហរណ៍

គណនាអាំងតេក្រាល $\int \ln x dx$

តាង

$$u = \ln x,\ dv = dx$$
$$du = \frac{1}{x}dx,\ v = x$$

ដូចនេះតាមអាំងតេក្រាលដោយផ្នែកយើងបាន

$$\begin{aligned}\int \ln x dx &= x\ln x - \int x\frac{dx}{x}\\ &= x\ln x - \int dx\\ &= x\ln x - x + C\end{aligned}$$

ឧទាហរណ៍

គណនាអាំងតេក្រាល $\int x^2e^x dx$

តាង

$$u = x^2,\ dv = e^x dx$$
$$du = 2xdx,\ v = e^x$$

ដូចនេះតាមអាំងតេក្រាលដោយផ្នែកយើងបាន

$$\int x^2e^x dx = x^2e^x - 2\int xe^x dx$$

ប្រើអាំងតេក្រាលដោយផ្នែកម្តងទៀតចំពោះ $\int xe^x dx$: តាង

$$u = x, \;\; dv = e^x dx$$
$$du = dx, \;\; v = e^x$$

ដូចនេះយើងបាន

$$\int xe^x dx = xe^x - \int e^x dx = xe^x - e^x + C$$

សរុបមកយើងបាន

$$\begin{aligned} \int x^2 e^x dx &= x^2 e^x - 2\int xe^x dx \\ &= x^2 e^x - 2(xe^x - e^x + C) \\ &= x^2 e^x - 2xe^x + 2e^x + 2C. \end{aligned}$$

លំហាត់សំរាប់អ្នកមានចិត្តសាកល្បង

1. បង្ហាញថាគ្រប់ $n \in \mathbb{N}$,

$$\int x^n e^x dx = x^n e^x - n \int x^{n-1} e^x dx$$

2. ប្រើលំហាត់ទី១ ដើម្បីគណនាអាំងតេក្រាល

$$\int x^4 e^x dx$$

ឧទាហរណ៍

គណនាអាំងតេក្រាល $\int \sin^{-1} x dx$

តាង

$$u = \sin^{-1} x, \;\; dv = dx$$
$$du = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx, \;\; v = x$$

ដូចនេះតាមអាំងតេក្រាលដោយផ្នែកយើងបាន

$$\begin{aligned}\int \sin^{-1} x dx &= x \sin^{-1} x - \int \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} dx = x \sin^{-1} x + \frac{1}{2} \int \frac{-2x}{\sqrt{1-x^2}} dx, \\ &= x \sin^{-1} x + \frac{1}{2} \int u^{-1/2} du, \;\; (u = 1 - x^2, du = -2x dx) \\ &= x \sin^{-1} x + u^{1/2} + C = x \sin^{-1} x + \sqrt{1-x^2} + C.\end{aligned}$$

លំហាត់អនុវត្តន៍

គណនាអាំងតេក្រាលដោយប្រើអាំងតេក្រាលដោយផ្នែក

១ $\int e^x \sin x dx$
២ $\int x \ln x dx$
៣ $\int \cos^{-1} x dx$
៤ $\int \tan^{-1} x dx$
៥ $\int \ln \sqrt[3]{x} dx$
៦ $\int \frac{x}{e^x} dx$
៧ $\int x^2 \cos mx dx$
៨ $\int e^{2x} \cos 3x dx$
៩ $\int (\ln x)^2 dx$
១០ $\int x^2 e^{-x} dx$

លំហាត់ពង្រឹងស្មារតី

គណនាអាំងតេក្រាលដោយវិធីប្តូរអថេរបន្ទាប់មកប្រើអាំងតេក្រាលដោយផ្នែក

១ $\int \cos\sqrt{x}dx$

២ $\int \sin(\ln x)dx$

៣ $\int e^{\cos x}\sin 2xdx$

៤ $\int e^{\sqrt{3x+9}}dx$

៥ $\int x^5e^{x^2}dx$

លំហាត់សំរាប់អ្នកមានចិត្តសាកល្បង៖ គណនាអាំងតេក្រាល

១ $\int \sqrt{x} e^{\sqrt{x}} dx$

២ $\int \frac{e^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}} dx$

៣ $\int x^3 \sqrt{x^2+1} dx$

៤ $\int (1+2x^2) e^{x^2} dx$

៥ $\int \frac{xe^x}{(x+1)^2} dx$

៦ $\int \frac{(\sin^{-1} x)^2}{\sqrt{1-x^2}} dx$

បង្ហាញថា

១
$$\int \sin^n x dx = -\frac{1}{n} \cos x \sin^{n-1} x + \frac{n-1}{n} \int \sin^{n-2} x dx, (n \geq 2)$$

២
$$\int \cos^n x dx = \frac{1}{n} \cos^{n-1} x \sin x + \frac{n-1}{n} \int \cos^{n-2} x dx, (n \geq 2)$$

៣
$$\int (\ln x)^n dx = x(\ln x)^n - n \int (\ln x)^{n-1} dx, (n \geq 1)$$

អាំងតេក្រាលត្រីកោណមាត្រ

អាំងតេក្រាលទំរង់

$$\int \sin^m x \cos^n x dx, \;\; m, n \in \mathbb{N}.$$

១. បើស្វ័យគុណនៃ $\cos x$ សេសនោះបំបែក $\cos x$ មួយកត្តានិងប្រើ $\cos^2 x = 1 - \sin^2 x$ ដើម្បីសសេរតួនៅសល់អាស្រ័យនឹង $\sin x$ បន្ទាប់មកជំនួស $u = \sin x$.
២. បើស្វ័យគុណនៃ $\sin x$ សេសនោះបំបែក $\sin x$ មួយកត្តានិងប្រើ $\sin^2 x = 1 - \cos^2 x$ ដើម្បីសសេរតួនៅសល់អាស្រ័យនឹង $\cos x$ បន្ទាប់មកជំនួស $u = \cos x$.
៣. បើស្វ័យគុណនៃ $\sin x$ និង $\cos x$ គូទាំងពីរ យើងប្រើ

$$\sin^2 x = \frac{1}{2}(1 - \cos 2x), \;\; \cos^2 x = \frac{1}{2}(1 + \cos 2x)$$

ឧទាហរណ៍

គណនាអាំងតេក្រាល $\int \cos^3 x dx$

យើងមាន

$$\cos^3 x = \cos^2 x . \cos x = (1 - \sin^2 x) \cos x$$

តាង

$$u = \sin x, du = \cos x dx$$

យើងបាន

$$\begin{aligned}\int \cos^3 x dx &= \int \cos^2 x . \cos x dx = \int (1 - \sin^2 x) \cos x dx \\ &= \int (1 - u^2) du = u - \frac{1}{3} u^3 + C \\ &= \sin x - \frac{1}{3} \sin^3 x + C\end{aligned}$$

ឧទាហរណ៍

គណនាអាំងតេក្រាល $\int \sin^5 x \cos^2 x dx$

យើងមាន

$$\sin^5 x \cos^2 x = (\sin^2 x)^2 \cos^2 x \sin x = (1-\cos^2 x)^2 \cos^2 x \sin x$$

តាង $u = \cos x, du = -\sin x dx$ យើងបាន

$$\begin{aligned}
\int \sin^5 x \cos^2 x dx &= \int (\sin^2 x)^2 \cos^2 x \sin x dx = \int (1-\cos^2 x)^2 \cos^2 x \sin x dx \\
&= \int (1-u^2)^2 u^2 (-du) = -\int (u^2 - 2u^4 + u^6) du \\
&= -\left(\frac{u^3}{3} - 2\frac{u^5}{5} + \frac{u^7}{7}\right) + C \\
&= -\frac{1}{3}\cos^3 x + \frac{2}{5}\cos^5 x - \frac{1}{7}\cos^7 x + C
\end{aligned}$$

ឧទាហរណ៍

គណនាអាំងតេក្រាល $\int \cos^4 x dx$

យើងមាន

$$\cos^2 x = \frac{1}{2}(1+\cos 2x)$$

យើងបាន

$$\begin{aligned}
\int \cos^4 x dx &= \frac{1}{4}\int (1+\cos 2x)^2 dx = \frac{1}{4}\int (1 + 2\cos 2x + \cos^2 2x) dx \\
&= \frac{1}{4}\int \left(1 + 2\cos 2x + \frac{1}{2}(1+\cos 4x)\right) dx \\
&= \frac{3}{8}\int dx + \frac{1}{4}\int 2\cos 2x dx + \frac{1}{32}\int 4\cos 4x dx \\
&= \frac{3x}{8} + \frac{\sin 2x}{4} + \frac{\sin 4x}{32} + C
\end{aligned}$$

លំហាត់អនុវត្តន៍

គណនាអាំងតេក្រាលទំរង់ត្រីកោណមាត្រ

១. $\int \sin^4 x dx$
២. $\int \sin^2 x \cos^3 x dx$
៣. $\int \sin^2 x \cos^2 x dx$
៤. $\int \sin^3 x \cos^4 x dx$
៥. $\int \sin^3 mx dx$
៦. $\int \cos^6 x dx$

ពង្រីកគំនិត

វិធីសាស្ត្រខាងលើនៅតែអាចប្រើបានដរាបណាមួយក្នុងចំនោម m, n ជាលេខគត់សេសវិជ្ជមាន ហើយលេខមួយទៀតជាចំនួនពិត៖ ក្នុងន័យនេះយើងចង់សំដៅថា ដើម្បីគណនាអាំងតេក្រាល

$$\int \sin^m x \cos^n x dx$$

1. បើ $m \in \mathbb{N}$ សេស, $n \in \mathbb{R}$ នោះបំបែក $\sin x$ មួយកត្តានិងប្រើ $\sin^2 x = 1 - \cos^2 x$ ដើម្បីសសេរតួនៅសល់អាស្រ័យនឹង $\cos x$ រួចជំនួស $u = \cos x$.
2. បើ $n \in \mathbb{N}$ សេស, $m \in \mathbb{R}$ នោះបំបែក $\cos x$ មួយកត្តានិងប្រើ $\cos^2 x = 1 - \sin^2 x$ ដើម្បីសសេរតួនៅសល់អាស្រ័យនឹង $\sin x$ រួចជំនួស $u = \sin x$.

ឧទាហរណ៍

គណនាអាំងតេក្រាល $\int \sin^3 x \cos^{-2} x dx$

យើងមាន

$$\begin{aligned}
\int \sin^3 x \cos^{-2} x dx &= \int \sin^2 x \cos^{-2} x \sin x dx \\
&= \int (1 - \cos^2 x) \cos^{-2} x \sin x dx \\
&= -\int (1 - u^2) u^{-2} du, \quad (u = \cos x, du = -\sin x dx) \\
&= \int (1 - u^{-2}) du = u + \frac{1}{u} + C \\
&= \cos x + \frac{1}{\cos x} + C \\
&= \cos x + \sec x + C
\end{aligned}$$

ឧទាហរណ៍

គណនាអាំងតេក្រាល $\int \frac{\cos^3 x}{\sqrt{\sin x}} dx$

យើងមាន

$$\begin{aligned}
\int \frac{\cos^3 x}{\sqrt{\sin x}} dx &= \int \frac{\cos^2 x \cos x}{\sqrt{\sin x}} dx = \int \frac{(1-\sin^2 x)\cos x}{\sqrt{\sin x}} dx \\
&= \int (1-u^2)u^{-1/2} du, \quad (u = \sin x, du = \cos x dx) \\
&= \int (u^{-1/2} - u^{3/2}) du \\
&= 2u^{1/2} + \frac{2}{5}u^{5/2} + C \\
&= 2\sin^{\frac{1}{2}} x + \frac{2}{5}\sin^{\frac{5}{2}} x + C
\end{aligned}$$

លំហាត់គិតលេង

គណនាអាំងតេក្រាល

១. $\int \cos^3 x\sqrt{\sin x}dx$
២. $\int \sin^{-\frac{3}{2}} x \cos^3 x dx$
៣. $\int \sin^3 x \cos^{\frac{3}{2}} x dx$

អាំងតេក្រាលទំរង់

$$\int \tan^m x \sec^n x dx$$

1. បើ n គូ នោះយើងបំបែកកត្តា $\sec^2 x$ រួចប្រើ $\sec^2 x = \tan^2 x + 1$ សសេរផ្នែកនៅសល់អាស្រ័យនឹង $\tan x$ បន្ទាប់មកតាង $u = \tan x$
2. បើ m សេស នោះយើងបំបែកកត្តា $\sec x \tan x$ រួចប្រើ $\tan^2 x = \sec^2 x - 1$ សសេរផ្នែកនៅសល់អាស្រ័យនឹង $\sec x$ បន្ទាប់មកតាង $u = \sec x$
3. បើ m គូ និង n សេស យើងសសេរស្វ័យគុណគូនៃ $\tan x$ ជាពហុធានៃ $\sec x$

ឧទាហរណ៍

គណនាអាំងតេក្រាល $\int \tan^3 x \sec^4 x dx$

$$\begin{aligned}
\int \tan^3 x \sec^4 x dx &= \int \tan^3 x \sec^2 x \sec^2 x dx \\
&= \int \tan^3 x (\tan^2 x + 1) \sec^2 x dx, \;\; (\sec^2 x = \tan^2 x + 1) \\
&= \int u^3 (u^2 + 1) du, \;\; (u = \tan x; du = \sec^2 x dx) \\
&= \frac{1}{6} \tan^6 x + \frac{1}{4} \tan^4 x + C
\end{aligned}$$

ឧទាហរណ៍

គណនាអាំងតេក្រាល $\int \tan^5 x \sec^7 x dx$

$$
\begin{aligned}
\int \tan^5 x \sec^7 x dx &= \int \tan^4 x \sec^6 x \sec x \tan x dx \\
&= \int (\sec^2 x - 1)^2 \sec^6 x \sec x \tan x dx \\
&= \int (u^2 - 1)^2 u^6 du, \ (u = \sec x; du = \sec x \tan x dx) \\
&= \int (u^{10} - 2u^8 + u^6) du \\
&= \frac{1}{11} u^{11} - \frac{2}{9} u^9 + \frac{1}{7} u^7 + C \\
&= \frac{1}{11} \sec^{11} x - \frac{2}{9} \sec^9 x + \frac{1}{7} \sec^7 x + C
\end{aligned}
$$

លំហាត់អនុវត្តន៍

គណនាអាំងតេក្រាល

១. $\int \tan^9 x \sec^4 x dx$
២. $\int \tan^3 x \sec^{-2} x dx$
៣. $\int \tan^{\frac{1}{2}} x \sec^4 x dx$

លំហាត់សំរាប់អ្នកមានចិត្តសាកល្បង

បង្ហាញថាចំពោះចំនួនគត់វិជ្ជមាន $n \neq 1$,

១. $\int \tan^n x dx = \frac{\tan^{n-1} x}{n-1} - \int \tan^{n-2} x dx$
$(\tan^2 x = \sec^2 x - 1)$
២. $\int \sec^n x dx = \frac{\sec^{n-2} x \tan x}{n-1} + \frac{n-2}{n-1} \int \sec^{n-2} x dx$
$(u = \sec^{n-2} x; dv = \sec^2 x dx)$

ស្វែងយល់បន្ថែម

អាំងតេក្រាលទំរង់

$$\int \cot^m x \csc^n x dx$$

អាចគណនាបានដោយវិធីសាស្រ្តខាងលើដោយប្រើលក្ខណ:ភាព

$$1 + \cot^2 x = \csc^2 x$$

ឧទាហរណ៍សាកល្បង

១ $\int \cot^{-2} x \csc^4 x dx$

២ $\int \cot x \csc^{10} x dx$

អាំងតេក្រាលទំរង់

$$\int \sin mx \cos nx dx$$

អាចគណនាបានដោយប្រើលក្ខណៈភាព

$$\sin mx \sin nx = \frac{1}{2}[\cos(m-n)x - \cos(m+n)x]$$
$$\sin mx \cos nx = \frac{1}{2}[\sin(m-n)x + \sin(m+n)x]$$
$$\cos mx \cos nx = \frac{1}{2}[\cos(m-n)x + \cos(m+n)x]$$

ឧទាហរណ៍សាកល្បង

$$\int \sin 3x \sin 2x dx, \quad \int \sin 3x \cos 7x dx, \quad \int \cos x \cos 2x dx$$

អាំងតេក្រាលដោយជំនួសត្រីកោណមាត្រ

នៅក្នុងផ្នែកនេះយើងសិក្សាអាំងតេក្រាលដែលមាន $a^2 - x^2, a^2 + x^2, x^2 - a^2$ ដែល $a > 0$ ជាចំនួនថេរ។ ឧទាហរណ៍

$$\int x\sqrt{a^2 - x^2}dx, \quad \int \frac{dx}{\sqrt{x^2 + a^2}}, \quad \int \frac{dx}{(x^2 + a^2)^{3/2}}$$

អាំងតេក្រាលទាំងនេះអាចគណនាបានដោយវិធីជំនួសត្រីកោណមាត្រ។

យើងនឹងសិក្សាវិធីសាស្រ្តដើម្បីបម្លែង $a^2 - x^2, a^2 + x^2, x^2 - a^2$ ជាផលគុណនៃការេ។ តើវិធីសាស្រ្តទាំងនោះមានអ្វីខ្លះ?

អាំងតេក្រាលដែលមាន $a^2 - x^2$

យើងប្តូរអថេរ

$$x = a\sin\theta, \theta \in [-\pi/2, \pi/2] \Leftrightarrow \theta = \sin^{-1}\left(\frac{x}{a}\right),$$

$$dx = a\cos\theta d\theta$$

នោះយើងបាន

$$\begin{aligned}
\sqrt{a^2 - x^2} &= \sqrt{a^2 - a^2\sin^2\theta} \\
&= \sqrt{a^2(1 - \sin^2\theta)} \\
&= \sqrt{a^2\cos^2\theta}, \quad (1 - \sin^2\theta = \cos^2\theta) \\
&= |a\cos\theta| \\
&= a\cos\theta. \quad \left(a > 0, \cos\theta \geq 0, \text{បើ} \quad -\frac{\pi}{2} \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}\right)
\end{aligned}$$

ឧទាហរណ៍

គណនាអាំងតេក្រាល

$$\int \frac{\sqrt{9-x^2}}{x^2}dx$$

តាង $x = 3\sin\theta, -\pi/2 \le \theta \le \pi/2$ នោះ $dx = 3\cos\theta d\theta$ និង

$$\sqrt{9-x^2} = \sqrt{9-9\sin^2\theta} = \sqrt{9\cos^2\theta} = 3|\cos\theta| = 3\cos\theta$$

យើងបាន

$$\int \frac{\sqrt{9-x^2}}{x^2}dx = \int \frac{3\cos\theta}{9\sin^2\theta}3\cos\theta d\theta = \int \frac{\cos^2\theta}{\sin^2\theta}d\theta$$

$$= \int \cot^2\theta d\theta = \int (\csc^2\theta - 1)d\theta = -\cot\theta - \theta + C$$

ដោយសារ $\sin\theta = \frac{x}{3}$ នោះ $\theta = \sin^{-1}\left(\frac{x}{3}\right)$ និង

$$\cos\theta = \frac{\sqrt{9-x^2}}{3}, \qquad \cot\theta = \frac{\sqrt{9-x^2}}{x}$$

ដូចនេះ

$$\int \frac{\sqrt{9-x^2}}{x^2}dx = -\frac{\sqrt{9-x^2}}{x} - \sin^{-1}\left(\frac{x}{3}\right) + C$$

ឧទាហរណ៍

គណនាអាំងតេក្រាល

$$\int \frac{dx}{(16-x^2)^{3/2}}$$

តាង $x = 4\sin\theta, -\pi/2 \le \theta \le \pi/2$ នោះ $dx = 4\cos\theta d\theta$ និង

$$\begin{aligned}(16-x^2)^{3/2} &= \left(16-16\sin^2\theta\right)^{3/2}, \quad x = 4\sin\theta \\ &= (16\cos^2\theta)^{3/2}, \quad 1-\sin^2\theta = \cos^2\theta \\ &= 64\cos^3\theta.\end{aligned}$$

យើងបាន

$$\int \frac{dx}{(16-x^2)^{3/2}} = \int \frac{4\cos\theta}{64\cos^3\theta} d\theta = \frac{1}{16}\int \frac{d\theta}{\cos^2\theta} = \frac{1}{16}\tan\theta + C.$$

ដោយសារ $\sin\theta = \frac{x}{4}$ នោះ

$$\cos\theta = \frac{\sqrt{16-x^2}}{4}, \qquad \tan\theta = \frac{x}{\sqrt{16-x^2}}$$

ដូចនេះ

$$\int \frac{\sqrt{9-x^2}}{x^2}dx = \frac{x}{16\sqrt{16-x^2}} + C$$

លំហាត់អនុវត្តន៍

១ $$\int \frac{dx}{(9-x^2)^{3/2}}$$

២ $$\int \frac{x^2}{\sqrt{4-x^2}}dx$$

៣ $$\int \sqrt{36-x^2}dx$$

៤ $$\int \sqrt{9-4x^2}dx$$

៥ $$\int \frac{1}{x^2\sqrt{9-x^2}}dx$$

អាំងតេក្រាលដែលមាន $a^2 + x^2$

យើងប្តូរអថេរ

$$x = a\tan\theta, -\pi/2 < \theta < \pi/2 \Leftrightarrow \theta = \tan^{-1}\left(\frac{x}{a}\right),$$
$$dx = a\sec^2\theta d\theta$$

នោះយើងបាន

$$\begin{aligned}
\sqrt{a^2 + x^2} &= \sqrt{a^2 + a^2\tan^2\theta} \\
&= \sqrt{a^2(1 + \tan^2\theta)} \\
&= \sqrt{a^2\sec^2\theta}, \quad (1 + \tan^2\theta = \sec^2\theta) \\
&= |a\sec\theta| \\
&= a\sec\theta. \quad \left(a > 0, \sec\theta \geq 0, \text{បើ} \quad -\frac{\pi}{2} < \theta < \frac{\pi}{2}\right)
\end{aligned}$$

ឧទាហរណ៍

គណនាអាំងតេក្រាល

$$\int \frac{dx}{x^2\sqrt{x^2+4}}$$

តាង $x = 2\tan\theta, -\pi/2 < \theta < \pi/2$ នោះ $dx = 2\sec^2\theta d\theta$ និង

$$\sqrt{x^2+4} = \sqrt{4(\tan^2\theta+1)} = \sqrt{4\sec^2\theta} = 2|\sec\theta| = 2\sec\theta$$

យើងបាន

$$\begin{aligned}\int \frac{dx}{x^2\sqrt{x^2+4}} &= \int \frac{2\sec^2\theta d\theta}{4\tan^2\theta . 2\sec\theta} \\ &= \frac{1}{4}\int \frac{\sec\theta}{\tan^2\theta}d\theta = \frac{1}{4}\int \frac{\cos\theta}{\sin^2\theta}d\theta\end{aligned}$$

$$= \frac{1}{4} \int \frac{du}{u^2}, \quad (u = \sin\theta; du = \cos\theta d\theta)$$

$$= \frac{1}{4}\left(-\frac{1}{u}\right) + C = -\frac{1}{4\sin\theta} + C$$

ដោយសារ $\tan\theta = \frac{x}{2}$ នោះ

$$\sin\theta = \frac{x}{\sqrt{x^2+4}}$$

ដូចនេះ

$$\int \frac{dx}{x^2\sqrt{x^2+4}} = -\frac{\sqrt{x^2+4}}{4x} + C$$

ឧទាហរណ៍

គណនាអាំងតេក្រាល

$$\int \frac{dx}{\sqrt{4x^2+1}}$$

តាង $x = \frac{1}{2}\tan\theta, -\pi/2 < \theta < \pi/2$ នោះ $dx = \frac{1}{2}\sec^2\theta d\theta$ និង

$$\sqrt{4x^2+1} = \sqrt{(\tan^2\theta+1)} = \sqrt{\sec^2\theta} = |\sec\theta| = \sec\theta$$

យើងបាន

$$\int \frac{dx}{\sqrt{4x^2+1}} = \frac{1}{2}\int \frac{\sec^2\theta}{\sec\theta} d\theta = \frac{1}{2}\int \sec\theta d\theta$$
$$= \frac{1}{2}\ln|\sec\theta + \tan\theta| + C = \frac{1}{2}\ln\left|\sqrt{4x^2+1} + 2x\right| + C.$$

ឧទាហរណ៍

គណនាអាំងតេក្រាល

$$\int \frac{dx}{(x^2+1)^{3/2}}$$

តាង $x = \tan\theta, -\pi/2 < \theta < \pi/2$ នោះ $dx = \sec^2\theta d\theta$ និង

$$(x^2+1)^{3/2} = (\tan^2\theta + 1)^{3/2} = (\sec^2\theta)^{3/2} = \sec^3\theta.$$

យើងបាន

$$\int \frac{dx}{(x^2+1)^{3/2}} = \int \frac{\sec^2\theta}{\sec^3\theta} d\theta = \int \frac{d\theta}{\sec\theta} = \int \cos\theta d\theta$$
$$= \sin\theta + C = \frac{x}{\sqrt{x^2+1}} + C$$

លំហាត់អនុវត្តន៍

១
$$\int \frac{dx}{(1+x^2)^2}$$

២
$$\int \frac{x^3}{\sqrt{x^2+4}}dx$$

៣
$$\int \frac{x^3}{(4x^2+9)^{3/2}}dx$$

៤
$$\int \frac{x^2}{(25+x^2)^2}dx$$

៥
$$\int \frac{x^4}{1+x^2}dx$$

លំហាត់សំរាប់អ្នកមានចិត្តសាកល្បង

គណនាអាំងតេក្រាលដោយបំពេញជាការេ រួចជំនួសដោយត្រីកោណមាត្រ៖

១
$$\int \frac{dx}{x^2+6x+18}$$

២
$$\int \frac{x^2-2x+1}{\sqrt{x^2-2x+10}}dx$$

៣
$$\int (9+x^2)^{-2}dx.$$

អាំងតេក្រាលដែលមាន $x^2 - a^2$

យើងប្តូរអថេរ

$$x = a\sec\theta, 0 \le \theta < \pi/2 (x \ge a) \text{ ឬ } \pi/2 < \theta \le \pi (x \le -a) \Leftrightarrow \theta = \sec^{-1}\left(\frac{x}{a}\right),$$

$$dx = a\sec\theta\tan\theta d\theta,$$

នោះយើងបាន

$$\begin{aligned}\sqrt{x^2 - a^2} &= \sqrt{a^2(\sec^2\theta - 1)}\\ &= \sqrt{a^2\tan^2\theta}, \quad (\sec^2\theta - 1 = \tan^2\theta)\\ &= |a\tan\theta| = \begin{cases} a\tan\theta & \text{បើ } 0 \le \theta < \pi/2 \\ -a\tan\theta & \text{បើ } \pi/2 < \theta \le \pi. \end{cases}\end{aligned}$$

ឧទាហរណ៍

គណនាអាំងតេក្រាល

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 - a^2}}, \text{ ដែល } a > 0$$

តាង $x = a\sec\theta$ នោះ $dx = a\sec\theta\tan\theta d\theta$ និង

$$\sqrt{x^2 - a^2} = \sqrt{a^2(\sec^2\theta - 1)} = \sqrt{a^2\tan^2\theta} = a|\tan\theta| = a\tan\theta$$

យើងបាន

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 - a^2}} = \int \frac{a\sec\theta\tan\theta}{a\tan\theta}d\theta = \int \sec\theta d\theta = \ln|\sec\theta + \tan\theta| + C$$

$$= \ln\left|\frac{x}{a} + \frac{\sqrt{x^2 - a^2}}{a}\right| + C = \ln\left|x + \sqrt{x^2 - a^2}\right| + C_1.$$

ឧទាហរណ៍

គណនាអាំងតេក្រាល

$$\int \frac{\sqrt{x^2-3}}{x}dx$$

តាង $x=\sqrt{3}\sec\theta$ នោះ $dx=\sqrt{3}\sec\theta\tan\theta d\theta$ និង

$$\sqrt{x^2-3}=\sqrt{3(\sec^2\theta-1)}=\sqrt{3\tan^2\theta}=\sqrt{3}\tan\theta$$

$$\begin{aligned}\int \frac{\sqrt{x^2-3}}{x}dx &= \int \frac{(\sqrt{3}\tan\theta)(\sqrt{3}\sec\theta\tan\theta)}{\sqrt{3}\sec\theta}d\theta = \int \sqrt{3}\tan^2\theta d\theta \\ &= \sqrt{3}\int(\sec^2\theta-1)d\theta = \sqrt{3}(\tan\theta-\theta)+C \\ &= \sqrt{3}\left(\frac{\sqrt{x^2-3}}{\sqrt{3}}-\sec^{-1}\frac{x}{\sqrt{3}}\right)+C.\end{aligned}$$

លំហាត់អនុវត្តន៍

១
$$\int \frac{\sqrt{x^2-9}}{x^3}dx$$

២
$$\int \frac{x}{\sqrt{x^2-7}}dx$$

៣
$$\int \frac{\sqrt{x^2+4x-5}}{x+2}dx$$

៤
$$\int \frac{x^3}{(x^2-16)^{3/2}}dx$$

លំហាត់សំរាប់អ្នកមានចិត្តសាកល្បង

បង្ហាញអាំងតេក្រាលខាងក្រោមដោយជំនួសត្រីកោណមាត្រ $(a > 0)$៖

១
$$\int \sqrt{a^2 - x^2}dx = \frac{1}{2}\left(x\sqrt{a^2 - x^2} + a^2 \sin^{-1}\frac{x}{a}\right) + C$$

២ $x > a$,
$$\int \sqrt{x^2 - a^2}dx = \frac{1}{2}\left(x\sqrt{x^2 - a^2} - a^2 \ln\left|x + \sqrt{x^2 - a^2}\right|\right) + C$$

៣
$$\int \sqrt{x^2 + a^2}dx = \frac{1}{2}\left(x\sqrt{x^2 + a^2} + a^2 \ln\left|x + \sqrt{x^2 + a^2}\right|\right) + C$$

អាំងតេក្រាលដោយបំបែកជាប្រភាគតូចៗ

នៅក្នុងផ្នែកនេះយើងនឹងសិក្សាអាំងតេក្រាលនៃអនុគមន៍សនិទានដោយបំបែកជាប្រភាគតូចៗ ដែលអាំងតេក្រាលរបស់វាអាចគណនាបាន។ តើវិធីសាស្ត្រនេះមានដំណើរការយ៉ាងដូចម្តេច? ឧទាហរណ៍យើងចង់គណនាអាំងតេក្រាល

$$\begin{aligned}\int \frac{x+5}{x^2+x-2}dx &= \int \left(\frac{2}{x-1} - \frac{1}{x+2}\right) dx \\ &= 2\ln|x-1| - \ln|x+2| + C\end{aligned}$$

ចំពោះអនុគមន៍សនិទានទូទៅ $f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$ ដែល P និង Q ជាពហុធា។ តាមវិធីចែកពហុធាយើងអាចសសេរ

$$f(x) = S(x) + \frac{R(x)}{Q(x)} \quad \text{ដែលដឺក្រេនៃ } R \text{ តូចជាងដឺក្រេនៃ } Q$$

ករណីទី១

បើភាគបែង $Q(x)$ ជាផលគុណនៃកត្តាដឺក្រេទីមួយផ្សេងគ្នា

$$Q(x) = (a_1x + b_1)(a_2x + b_2)\cdots(a_kx + b_k)$$

នោះ

$$\frac{R(x)}{Q(x)} = \frac{A_1}{a_1x + b_1} + \frac{A_2}{a_2x + b_2} + \cdots + \frac{A_k}{a_kx + b_k}$$

ដែល $A_1, A_2, \ldots, A_k$ ជាមេគុណដែលត្រូវកំនត់។

ឧទាហរណ៍

គណនាអាំងតេក្រាល

$$\int \frac{x^2+2x-1}{2x^3+3x^2-2x}dx$$

ដាក់ភាគបែងជាកត្តា $2x^3+3x^2-2x = x(2x^2+3x-2) = x(2x-1)(x+2)$ នោះយើងបាន

$$\frac{x^2+2x-1}{x(2x-1)(x+2)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{2x-1} + \frac{C}{x+2}$$

ដើម្បីដោះស្រាយរក A, B, C យើងគុណសមីការនឹង $x(2x-1)(x+2)$ នោះ

$$\begin{aligned} x^2+2x-1 &= A(2x-1)(x+2) + Bx(x+2) + Cx(2x-1) \\ &= (2A+B+2C)x^2 + (3A+2B-C)x - 2A \end{aligned}$$

ផ្ទឹមមេគុណាត្រូវគ្នាយើងទទួលបានប្រព័ន្ធសមីការ

$$
\begin{aligned}
2A + B + 2C &= 1\\
3A + 2B - C &= 2\\
-2A &= -1
\end{aligned}
$$

នោះ៖

$$A = \frac{1}{2}, B = \frac{1}{5}, C = -\frac{1}{10}$$

ដូចនេះ៖

$$
\begin{aligned}
\int \frac{x^2 + 2x - 1}{2x^3 + 3x^2 - 2x} dx &= \int \left(\frac{1}{2x} + \frac{1}{5(2x-1)} - \frac{1}{10(x+2)} \right) dx\\
&= \frac{1}{2} \ln|x| + \frac{1}{10} \ln|2x - 1| - \frac{1}{10} \ln|x + 2| + C.
\end{aligned}
$$

សំគាល់

យើងអាចរក A, B, C ដោយគុណសមីការនឹង $x(2x-1)(x+2)$ នោះ

$$x^2 + 2x - 1 = A(2x-1)(x+2) + Bx(x+2) + Cx(2x-1)$$

បន្ទាប់មកជ្រើសរើសតម្លៃ x សមស្រប៖

- យក $x = 0$ នោះ $-2A = -1$ ឬ $A = \frac{1}{2}$
- យក $x = \frac{1}{2}$ នោះ $\frac{5B}{4} = \frac{1}{4}$ ឬ $B = \frac{1}{5}$
- យក $x = -2$ នោះ $10C = -1$ ឬ $C = -\frac{1}{10}$

ករណីទី២

បើភាគបែង $Q(x)$ មានកត្តាដឺក្រេទីមួយដែលមានកត្តាច្រំដែល។ សន្មតថាកត្តាទីមួយច្រំដែល r ដង $(a_1x+b_1)^r$ នោះ $\frac{R(x)}{Q(x)}$ នឹងមានប្រភាគទំរង់

$$\frac{B_1}{a_1x+b_1}+\frac{B_2}{(a_1x+b_1)^2}+\cdots+\frac{B_r}{(a_1x+b_1)^r}$$

ដែល $B_1, B_2, \ldots, B_r$ ជាមេគុណដែលត្រូវកំនត់។

ឧទាហរណ៍

គណនាអាំងតេក្រាល

$$\int \frac{x^4 - 2x^2 + 4x + 1}{x^3 - x^2 - x + 1} dx$$

ចែកពហុធា

$$\frac{x^4 - 2x^2 + 4x + 1}{x^3 - x^2 - x + 1} = x + 1 + \frac{4x}{x^3 - x^2 - x + 1}$$

យើងដាក់ភាគបែងជាកត្តា $x^3 - x^2 - x + 1 = (x-1)(x^2-1) = (x-1)^2(x+1)$ នោះយើងបាន

$$\frac{4x}{(x-1)^2(x+1)} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{(x-1)^2} + \frac{C}{x+1}$$

ដើម្បីដោះស្រាយរក A, B, C យើងគុណសមីការនឹង $(x-1)^2(x+1)$ នោះ

$$\begin{aligned} 4x &= A(x-1)(x+1) + B(x+1) + C(x-1)^2 \\ &= (A+C)x^2 + (B-2C)x + (-A+B+C) \end{aligned}$$

ផ្ទឹមមេគុណត្រូវគ្នាយើងទទួលបានប្រព័ន្ធសមីការ

$$\begin{aligned} A+C &= 0 \\ B-2C &= 4 \\ -A+B+C &= 0 \end{aligned}$$

នោះ

$$A = 1, B = 2, C = -1$$

ដូចនេះ

$$\int \frac{x^4-2x^2+4x+1}{x^3-x^2-x+1}dx = \int \left(x+1+\frac{1}{x-1}+\frac{2}{(x-1)^2}-\frac{1}{x+1}\right)dx$$
$$= \frac{x^2}{2}+x+\ln|x-1|-\frac{2}{x-1}-\ln|x+1|+C$$
$$= \frac{x^2}{2}+x-\frac{2}{x-1}+\ln\left|\frac{x-1}{x+1}\right|+C$$

ករណីទី៣

បើភាគបែង $Q(x)$ មានកត្តា $ax^2 + bx + c$ ដែល $b^2 - 4ac < 0$ នោះ $\frac{R(x)}{Q(x)}$ នឹងមានប្រភាគទំរង់

$$\frac{Ax + B}{ax^2 + bx + c}$$

ដែល A, B ជាមេគុណដែលត្រូវកំនត់។

យើងប្រើអាំងតេក្រាល

$$\int \frac{xdx}{x^2 + a^2} = \frac{1}{2}\ln(x^2 + a^2) + C$$

$$\int \frac{dx}{x^2 + a^2} = \frac{1}{a}\tan^{-1}\left(\frac{x}{a}\right) + C$$

ឧទាហរណ៍

គណនាអាំងតេក្រាល

$$\int \frac{2x^2 - x + 4}{x^3 + 4x} dx$$

យើងដាក់ភាគបែងជាកត្តា $x^3 + 4x = x(x^2 + 4)$ នោះយើងបាន

$$\frac{2x^2 - x + 4}{x(x^2 + 4)} = \frac{A}{x} + \frac{Bx + C}{x^2 + 4}$$

គុណនឹង $x(x^2 + 4)$ យើងបាន

$$\begin{aligned} 2x^2 - x + 4 &= A(x^2 + 4) + (Bx + C)x \\ &= (A + B)x^2 + Cx + 4A. \end{aligned}$$

ផ្ទឹមមេគុណយើងមាន $A+B=2, \quad C=-1, \quad 4A=4$ នោះ

$$A=1, B=1, C=-1$$

ដូចនេះ

$$\begin{aligned}
\int \frac{2x^2-x+4}{x^3+4x}dx &= \int \left(\frac{1}{x}+\frac{x-1}{x^2+4}\right)dx \\
&= \int \frac{1}{x}dx + \int \frac{x}{x^2+4}dx - \int \frac{1}{x^2+4}dx \\
&= \ln|x| + \frac{1}{2}\ln(x^2+4) - \frac{1}{2}\tan^{-1}(x/2) + C.
\end{aligned}$$

ករណីទី៤

បើភាគបែង $Q(x)$ មានកត្តា $(ax^2+bx+c)^r$ ដែល $b^2-4ac<0$ នោះ $\frac{R(x)}{Q(x)}$ នឹងមានប្រភាគទំរង់

$$\frac{A_1x+B_1}{ax^2+bx+c}+\frac{A_2x+B_2}{(ax^2+bx+c)^2}+\cdots+\frac{A_rx+B_r}{(ax^2+bx+c)^r}$$

ដែល $A_1,B_1,A_2,B_2,\ldots,A_r,B_r$ ជាមេគុណដែលត្រូវកំនត់។

ឧទាហរណ៍

គណនាអាំងតេក្រាល

$$\int \frac{1-x+2x^2-x^3}{x(x^2+1)^2}dx$$

បំបែកជាប្រភាគតូចៗ

$$\frac{1-x+2x^2-x^3}{x(x^2+1)^2} = \frac{A}{x} + \frac{Bx+C}{x^2+1} + \frac{Dx+E}{(x^2+1)^2}$$

គុណនឹង $x(x^2+1)^2$ យើងបាន

$$\begin{aligned} -x^3+2x^2-x+1 &= A(x^2+1)^2+(Bx+C)x(x^2+1)+(Dx+E)x \\ &= (A+B)x^4+Cx^3+(2A+B+D)x^2+(C+E)x+A \end{aligned}$$

ផ្ទឹមមេគុណ $A+B=0,\ C=-1,\ 2A+B+D=2,\ C+E=-1,\ A=1$ នោះ

$$A=1, B=-1, C=-1, D=1, E=0$$

ដូចនេះ

$$\begin{aligned}\int \frac{1-x+2x^2-x^3}{x(x^2+1)^2}dx &= \int\left(\frac{1}{x}-\frac{x+1}{x^2+1}+\frac{x}{(x^2+1)^2}\right)dx\\ &= \int\frac{1}{x}dx-\int\frac{x}{x^2+1}dx-\int\frac{1}{x^2+1}dx+\int\frac{x}{(x^2+1)^2}dx\\ &= \ln|x|-\frac{1}{2}\ln(x^2+1)-\tan^{-1}(x)-\frac{1}{2(x^2+1)}+C.\end{aligned}$$

លំហាត់អនុវត្តន៍

១
$$\int \frac{2}{2x^2+3x+1}dx$$

២
$$\int \frac{x^2+1}{(x-3)(x-2)^2}dx$$

៣
$$\int \frac{x^2-2x-1}{(x-1)^2(x^2+1)}dx$$

៤
$$\int \frac{1}{x(x^2+4)^2}dx$$

លំហាត់សំរាប់អ្នកមានចិត្តសាកល្បង

ប្តូរអថេរដើម្បីបម្លែងជាអនុគមន៍សនិទានរួចគណនាអាំងតេក្រាល

១
$$\int \frac{1}{1+\sqrt[3]{x}}dx$$

២
$$\int \frac{e^{2x}}{e^{2x}+3e^{x}+2}dx$$

៣
$$\int \frac{\sin x}{\cos^2 x - 3\cos x}dx$$

៤
$$\int \frac{1}{e^{x}+e^{2x}}dx$$

៥
$$\int \sqrt{e^{x}+1}dx$$

ពង្រីកគំនិត

អាំងតេក្រាលនៃអនុគមន៍សនិទានត្រីកោណមាត្រ

វិធីសាស្រ្ត៖ តាង $t = \tan(x/2)$ ឬ $x = 2\tan^{-1} t$។ យើងមាន

- $dx = \frac{2}{1+t^2}dt$
- $\sin x = \frac{2t}{1+t^2}$
- $\cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2}$

ព្រោះ៖

$$\sin x = 2\sin\left(\frac{x}{2}\right)\cos\left(\frac{x}{2}\right) = 2\tan\left(\frac{x}{2}\right)\cos^2\left(\frac{x}{2}\right) = \frac{2\tan\left(\frac{x}{2}\right)}{1+\tan^2\left(\frac{x}{2}\right)}$$

$$\cos x = 2\cos^2\left(\frac{x}{2}\right) - 1 = \frac{2}{1+\tan^2\left(\frac{x}{2}\right)} - 1 = \frac{1-\tan^2\left(\frac{x}{2}\right)}{1+\tan^2\left(\frac{x}{2}\right)}$$

ឧទាហរណ៍

គណនាអាំងតេក្រាល

$$\int \frac{dx}{1+\sin x}$$

តាង $x = 2\tan^{-1} t, dx = \frac{2}{1+t^2}dt, \sin x = \frac{2t}{1+t^2}$ នោះយើងបាន

$$\begin{aligned}
\int \frac{dx}{1+\sin x} &= \int \frac{1}{1+\frac{2t}{1+t^2}} \frac{2}{1+t^2} dt \\
&= \int \frac{2dt}{(t+1)^2} \\
&= -\frac{2}{t+1} + C \\
&= -\frac{2}{1+\tan(x/2)} + C.
\end{aligned}$$

ឧទាហរណ៍

គណនាអាំងតេក្រាល

$$\int \frac{dx}{1+\sin x+\cos x}$$

តាង $x = 2\tan^{-1} t, dx = \frac{2}{1+t^2}dt, \sin x = \frac{2t}{1+t^2}, \cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2}$ នោះយើងបាន

$$\begin{aligned}\int \frac{dx}{1+\sin x+\cos x} &= \int \frac{1}{1+\frac{2t}{1+t^2}+\frac{1-t^2}{1+t^2}}\frac{2}{1+t^2}dt\\ &= \int \frac{dt}{t+1}\\ &= \ln|t+1|+C\\ &= \ln|\tan(x/2)+1|+C.\end{aligned}$$

លំហាត់អនុវត្តន៍

គណនាអាំងតេក្រាល

១
$$\int \frac{dx}{2+\cos x}$$

២
$$\int \frac{dx}{1-\cos x}$$

គម្រោងមេរៀន

1. អាំងតេក្រាលមិនកំនត់
   - អាំងតេក្រាលដោយប្តូរអថេរ
   - អាំងតេក្រាលដោយផ្នែក
   - អាំងតេក្រាលត្រីកោណមាត្រ
   - អាំងតេក្រាលដោយជំនួសត្រីកោណមាត្រ
   - អាំងតេក្រាលដោយបំបែកជាប្រភាគតូចៗ
   - អាំងតេក្រាលនៃអនុគមន៍សនិទានត្រីកោណមាត្រ
2. អាំងតេក្រាលកំនត់
   - ក្រលាផ្ទៃនៃដែនខណ្ឌដោយខ្សែកោង
   - និយមន័យអាំងតេក្រាលកំនត់
   - ការគណនាអាំងតេក្រាលកំនត់
3. ការអនុវត្តនៃអាំងតេក្រាលកំនត់
   - ក្រលាផ្ទៃខណ្ឌដោយខ្សែកោង
   - មាឌសូលីតបរិវត្តន៍
   - ការអនុវត្តផ្សេងទៀត

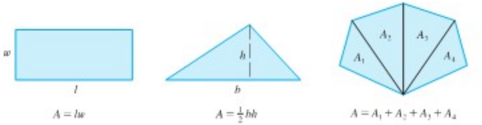
សេចក្តីផ្តើម

នៅក្នុងធរណីមាត្រអឺគ្លីត ដែននៃប្លង់ដែលសាមញ្ញជាងគេគឺចតុកោណកែង។

និយមន័យ

ក្រលាផ្ទៃចតុកោណកែងជាផលគុណនៃបណ្តោយនិងទទឹង $A = lw$

- ក្រលាផ្ទៃត្រីកោណគឺពាក់កណ្តាលបាតគុណនឹងកំពស់
- ក្រលាផ្ទៃនៃពហុកោណគឺជាផលបូកនៃក្រលាផ្ទៃនៃត្រីកោណតូចៗ

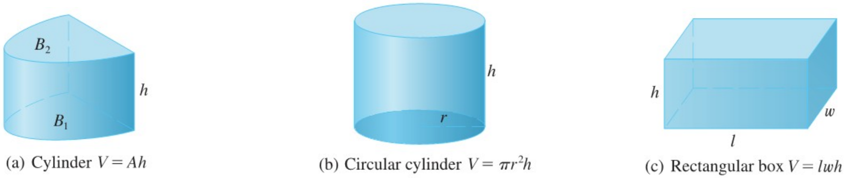


រូប: ផ្ទៃចតុកោណកែង ត្រីកោណ ពហុកោណ

មាឌស៊ីឡាំង

បើក្រលាផ្ទៃបាតគឺ A និងកំពស់នៃស៊ីឡាំងគឺ h នោះមាឌ V នៃស៊ីឡាំងកំណត់ដោយ

$$V = Ah$$



រូប: មាឌស៊ីឡាំង

បញ្ហាក្រលាផ្ទៃ និងមាឌ

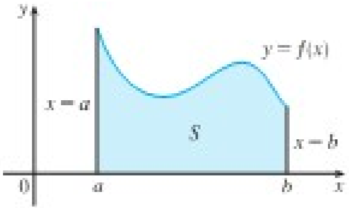
សំនួរៈ តើមានវិធីសាស្រ្តគណិតវិទ្យាអ្វីដើម្បីរកក្រលាផ្ទៃ និងមាឌនៃរូបធរណីមាត្រលំបាកៗ? ឧទាហរណ៍ក្រលាផ្ទៃនៃដែនមានជាយជាខ្សែកោង? មាឌនៃសូលីតមានរាងជាថូក្នុងសិល្បៈស្ទូន?

$\Rightarrow$ អាំងតេក្រាលកំនត់

ស្គាល់អាំងតេក្រាលកំនត់

- តើអ្វីជាអាំងតេក្រាលកំនត់?
- តើអាំងតេក្រាលកំនត់មានលក្ខណៈអ្វីខ្លះ?
- តើអាំងតេក្រាលកំនត់អាចគណនាបានតាមវិធីសាស្រ្តអ្វីខ្លះ?

អនុគមន៍ f ជាប់លើចន្លោះបិទ $[a,b]$។
សំនួរ: ក្រលាផ្ទៃនៃដែន S ដែលស្ថិតនៅក្រោមខ្សែកោង $y=f(x)$ ពី a ទៅ b?



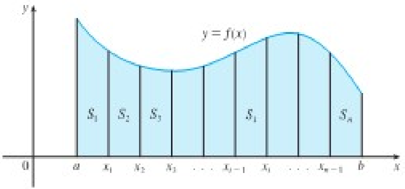
រូប: ដែន S នៅក្រោមខ្សែកោង $y=f(x)$

វិធីសាស្រ្ត

- ចែកដែន S ជា n ដែនតូចៗ $S_1, S_2, \cdots, S_n$ ដែលមានទទឹងស្មើៗគ្នា $\Delta x = \frac{b-a}{n}$ នោះចន្លោះបិទ $[a, b]$ មាន n ចន្លោះរង

$$[x_0, x_1], \quad [x_1, x_2], \quad [x_2, x_3], \ldots, [x_{n-1}, x_n]$$

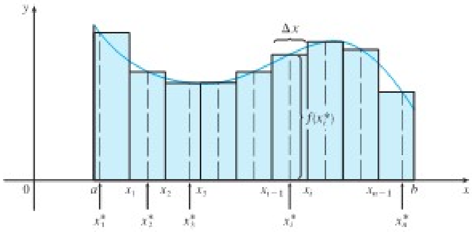
ដែល $x_0 = a$ និង $x_n = b$



រូប: ចែកដែន S ជាដែនតូចៗ

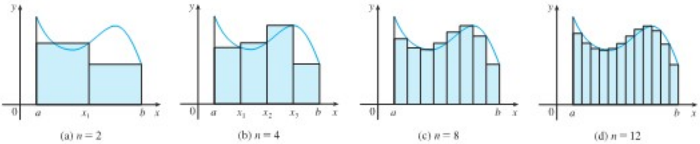
- ប៉ាន់ស្មានដែន S_i ដោយក្រលាផ្ទៃចតុកោណកែងដែលមានទទឹង Δx និងកំពស់ $f(x_i^*)$។ ដូចនេះក្រលាផ្ទៃនៃដែន S អាចប៉ាន់ស្មានដោយផលបូកនៃក្រលាផ្ទៃចតុកោណកែងតូចៗ

$$R_n = f(x_1^*)\Delta x + f(x_2^*)\Delta x + \cdots + f(x_n^*)\Delta x$$



រូប: ការប៉ាន់ស្មានដោយប្រើចំណុច x_i^* ណាមួយ

- ចែកដែន S ជាចំរៀកកាន់តែតូចទៅៗ មានន័យថាចំនួននៃចតុកោណកែង កាន់តែច្រើនឡើងៗនោះការប៉ាន់ស្មានផ្ទៃកាន់តែប្រសើរ



រូប: ការប៉ាន់ស្មានកាន់តែប្រសើរពេល n កើនឡើង

ក្រលាផ្ទៃ A នៃដែន S ដែលស្ថិតនៅក្រោមខ្សែកោងនៃអនុគមន៍ជាប់ f គឺជាលីមីត នៃផលបូកនៃក្រលាផ្ទៃចតុកោណកែងតូចៗ

$$A = \lim_{n\to\infty} R_n = \lim_{n\to\infty}[f(x_1^*)\Delta x + f(x_2^*)\Delta x + \cdots + f(x_n^*)\Delta x].$$

និយមន័យ: អាំងតេក្រាលកំនត់ជាលីមីតនៃផលបូក Riemann

យើងយក f ជាអនុគមន៍ជាប់ចំពោះ $a \leq x \leq b$ ។ អនុគមន៍នេះអាចមានតំលៃវិជ្ជមានព្រមទាំងអវិជ្ជមាន។ យើងចែកចន្លោះបិទ $[a, b]$ ជា n ចន្លោះរងដែលមានទទឹងស្មើៗគ្នា $\Delta x = (b - a)/n$។ យើងយក $(a =)x_0, x_1, x_2, \dots, x_n(= b)$ ជាចំនុចចុងអង្កត់រងទាំងនេះហើយយក $x_1^*, x_2^*, \dots, x_n^*$ ជាចំនុចណាមួយនៅក្នុងអង្កត់រងទី $i, [x_{i-1}, x_i]$។ អាំងតេក្រាលកំណត់នៃ f ពី a ទៅ b គឺ

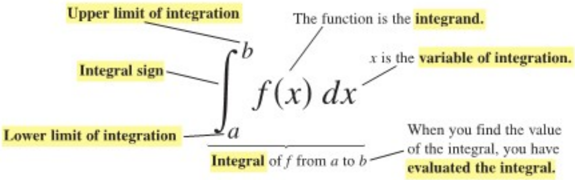
$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} f(x_i^*)\Delta x, \text{ បើលីមីតនេះមាន}$$

អត្ថិភាពនៃអាំងតេក្រាលកំនត់

គ្រប់អនុគមន៍ជាប់ f លើ $[a, b]$ មានអាំងតេក្រាលកំណត់លើ $[a, b]$។

សំគាល់

1. និមិត្តសញ្ញា $\int_a^b f(x)dx$ អានថាអាំងតេក្រាលកំណត់នៃ f ពី a ទៅ b ។



2. អាំងតេក្រាលកំណត់ $\int_a^b f(x)dx$ គឺជាចំនួនពិត ហើយវាមិនអាស្រ័យនឹង x។ តាមពិតយើងអាចប្រើអថេរផ្សេងទៀតក្រៅពី x ដោយមិនផ្លាស់ប្តូរតំលៃនៃអាំងតេក្រាល

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^b f(t)dt = \int_a^b f(r)dr$$

លក្ខណៈនៃអាំងតេក្រាលកំនត់

- $\int_b^a f(x)dx = -\int_a^b f(x)dx$
- $\int_a^a f(x)dx = 0$
- $\int_a^b c dx = c(b-a)$, ដែល c ជាចំនួនថេរ
- $\int_a^b [f(x)+g(x)]dx = \int_a^b f(x)dx + \int_a^b g(x)dx$
- $\int_a^b cf(x)dx = c\int_a^b f(x)dx$, ដែល c ជាចំនួនថេរ
- $\int_a^b [f(x)-g(x)]dx = \int_a^b f(x)dx - \int_a^b g(x)dx$
- $\int_a^c f(x)dx = \int_a^b f(x)dx + \int_b^c f(x)dx$
- បើ $f(x) \geq 0$ នោះ $\int_a^b f(x)dx \geq 0$
- បើ $f(x) \geq g(x)$ នោះ $\int_a^b f(x)dx \geq \int_a^b g(x)dx$
- បើ $m \leq f(x) \leq M$ នោះ $m(b-a) \leq \int_a^b f(x)dx \leq M(b-a)$

អាំងតេក្រាលកំនត់ដោយប្រើព្រីមីទីវ

ការគណនាអាំងតេក្រាលកំនត់ដោយប្រើព្រីមីទីវ

បើ f ជាអនុគមន៍ជាប់លើចន្លោះ $[a,b]$ នោះ

$$\int_a^b f(x)dx = [F(x)]_a^b = F(b) - F(a),$$

ដែលF ជាព្រីមីទីវ នៃf (មានន័យថា $F'(x) = f(x)$)។

សំគាល់

យើងមានវិធីសាស្រ្តជាច្រើនដើម្បីរកព្រីមីទីវនៃអនុគមន៍៖តារាងអាំងតេក្រាល អាំងតេក្រាលដោយប្តូរអថេរ អាំងតេក្រាលដោយផ្នែក អាំងតេក្រាលអនុគមន៍ត្រីកោណមាត្រ អាំងតេក្រាលអនុគមន៍សនិទានជាដើម។

ឧទាហរណ៍

គណនាក្រលាផ្ទៃនៃដែន S ខណ្ឌដោយខ្សែកោង $y = e^x$ ពី 1 ទៅ 3

1. ប្រើផលបូក Riemann៖ យើងមាន $f(x) = e^x, a = 1, b = 3$, $\Delta x = \frac{b-a}{n} = \frac{2}{n}$, $x_i = 1 + 2i/n$។ ដូច្នេះយើងបាន

$$\int_1^3 e^x dx = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} f(x_i)\Delta x = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} f\left(1 + \frac{2i}{n}\right)\frac{2}{n}$$
$$= \lim_{n\to\infty} \frac{2}{n} \sum_{i=1}^{n} e^{1+2i/n} = \lim_{n\to\infty} \frac{2}{n} . \frac{e^{(3n+2)/n} - e^{(n+2)/n}}{e^{2/n} - 1}$$
$$= e^3 - e$$

2. ប្រើព្រឹមីទីវ៖

$$\int_1^3 e^x dx = [e^x]_1^3 = e^3 - e.$$

វិធីសាស្រ្តប្តូរអថេរចំពោះអាំងតេក្រាលកំនត់

បើ g' ជាអនុគមន៍ជាប់លើចន្លោះ $[a,b]$ និង f ជាអនុគមន៍ជាប់ត្រង់ $u=g(x)$ នោះ

$$\begin{aligned}\int_a^b f(g(x))g'(x)dx &= \int_{g(a)}^{g(b)} f(u)du \\ &= [F(u)]_{g(a)}^{g(b)} \\ &= F(g(b)) - F(g(a)).\end{aligned}$$

ដែល F ជាព្រីមីទីវនៃ f.

ឧទាហរណ៍

គណនាអាំងតេក្រាល

$$\int_1^2 \frac{dx}{(3-5x)^2}$$

តាង $u = 3 - 5x$ នោះ $du = -5dx$ ឬ $dx = -\frac{1}{5}du$។ ពេល $x = 1, u = 3 - 5(1) = -2$ និង $x = 2, u = 3 - 5(2) = -7$ ។ ដូចនេះ

$$\begin{aligned}\int_1^2 \frac{dx}{(3-5x)^2} &= -\frac{1}{5}\int_{-2}^{-7} \frac{du}{u^2} \\ &= -\frac{1}{5}\left[-\frac{1}{u}\right]_{-2}^{-7} \\ &= -\frac{1}{5}\left(\frac{1}{7} - \frac{1}{2}\right) \\ &= \frac{1}{14}.\end{aligned}$$

ឧទាហរណ៍

គណនាអាំងតេក្រាល

$$\int_1^e \frac{\ln x}{x} dx$$

តាង $u = \ln x$ នោះ $du = dx/x$។ ពេល $x = 1, u = \ln 1 = 0$ និង $x = e, u = \ln e = 1$។ ដូចនេះ

$$\begin{aligned}\int_1^e \frac{\ln x}{x} dx &= \int_0^1 u du \\ &= \left[\frac{u^2}{2}\right]_0^1 \\ &= \frac{1}{2}.\end{aligned}$$

លំហាត់អនុវត្តន៍

១. $\int_1^2 \frac{e^{1/x}}{x^2}dx$
២. $\int_e^{e^4} \frac{dx}{x\sqrt{\ln x}}$
៣. $\int_0^{1/2} \frac{\sin^{-1} x}{\sqrt{1-x^2}}dx$

អាំងតេក្រាលដោយផ្នែកសំរាប់អាំងតេក្រាលកំនត់

$$\int_a^b f(x)g'(x)dx = [f(x)g(x)]_a^b - \int_a^b g(x)f'(x)dx$$

ឬ

$$\int_a^b udv = [uv]_a^b - \int_a^b vdu.$$

ឧទាហរណ៍

គណនាអាំងតេក្រាល

$$\int_0^1 xe^x dx$$

តាង

$$u = x, dv = e^x dx$$
$$du = dx, v = e^x$$

ដូចនេះ

$$\int_0^1 xe^x dx = [xe^x]_0^1 - \int_0^1 e^x dx$$
$$= e - [e^x]_0^1 = 1.$$

ឧទាហរណ៍

គណនាអាំងតេក្រាល

$$\int_0^1 \tan^{-1} x dx$$

តាង

$$u = \tan^{-1} x, \ dv = dx$$

$$du = \frac{dx}{1+x^2}, \ v = x$$

ដូចនេះ

$$\int_0^1 \tan^{-1} x dx = \left[x \tan^{-1} x\right]_0^1 - \int_0^1 \frac{x}{1+x^2} dx$$

$$= 1. \tan^{-1} 1 - 0. \tan^{-1} 0 - \int_0^1 \frac{x}{1+x^2} dx$$

$$= \frac{\pi}{4} - \int_0^1 \frac{x}{1+x^2}dx$$

គណនាអាំងតេក្រាល $\int_0^1 \frac{x}{1+x^2}dx$
តាង $t = 1 + x^2$ នោះ $dt = 2xdx$ ។ ពេល $x = 0, t = 1$ និងពេល $x = 1, t = 2$។ ដូចនេះ

$$\begin{aligned}\int_0^1 \frac{x}{1+x^2}dx &= \frac{1}{2}\int_1^2 \frac{dt}{t} = \frac{1}{2}\left[\ln|t|\right]_1^2 \\ &= \frac{1}{2}(\ln 2 - \ln 1) = \frac{1}{2}\ln 2\end{aligned}$$

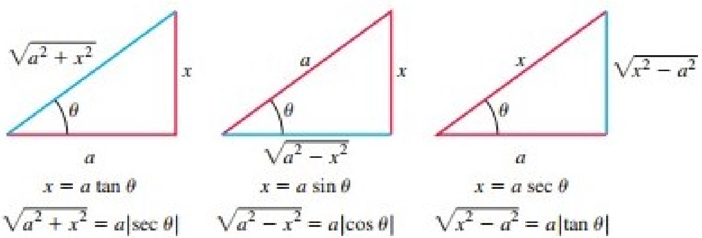
ដូច្នេះ

$$\int_0^1 \tan^{-1} x dx = \frac{\pi}{4} - \int_0^1 \frac{x}{1+x^2}dx = \frac{\pi}{4} - \frac{\ln 2}{2}.$$

លំហាត់អនុវត្តន៍

១. $\int_0^{1/2} \cos^{-1} x dx$
២. $\int_1^2 (\ln x)^2 dx$
៣. $\int_1^4 e^{\sqrt{x}} dx$
៤. $\int_{\sqrt{\pi/2}}^{\sqrt{\pi}} \theta^3 \cos(\theta^2) d\theta.$

អាំងតេក្រាលជំនួសត្រីកោណមាត្រសំរាប់អាំងតេក្រាលកំនត់



ឧទាហរណ៍

គណនាអាំងតេក្រាល

$$\int_0^r \sqrt{r^2 - x^2}dx, \; 0 \leq x \leq r.$$

តាង

$$x = r\sin\theta$$

ដោយសារ $0 \leq x \leq r$ យើងអាចយក $0 \leq \theta \leq \pi/2$។ យើងមាន $dx = r\cos\theta d\theta$ និង

$$\sqrt{r^2 - x^2} = \sqrt{r^2\cos^2\theta} = r\cos\theta$$

ព្រោះ $\cos\theta \geq 0$ ពេល $0 \leq \theta \leq \pi/2$។

ដូចនេះ:

$$\begin{aligned}
\int_0^r \sqrt{r^2 - x^2}dx &= \int_0^{\pi/2} (r\cos\theta) r\cos\theta d\theta \\
&= r^2 \int_0^{\pi/2} \cos^2\theta d\theta \\
&= \frac{1}{2} r^2 \int_0^{\pi/2} (1 + \cos 2\theta) d\theta \\
&= \frac{1}{2} r^2 [\theta + \frac{1}{2}\sin 2\theta]_0^{\pi/2} \\
&= \frac{1}{2} r^2 \left(\frac{\pi}{2} + 0 - 0\right) \\
&= \frac{1}{4}\pi r^2.
\end{aligned}$$

ឧទាហរណ៍

គណនាអាំងតេក្រាល

$$\int_0^{3\sqrt{3}/2} \frac{x^3}{(4x^2+9)^{3/2}}dx.$$

តាង $x = \frac{3}{2}\tan\theta$ នោះ $dx = \frac{3}{2}\sec^2\theta d\theta$ ។ ពេល $x = 0, \tan\theta = 0$ នោះ $\theta = 0$ ។ ពេល $x = 3\sqrt{3}/2, \tan\theta = \sqrt{3}$ នោះ $\theta = \pi/3$ និង

$$(4x^2+9)^{3/2} = (9\tan^2\theta + 9)^{3/2} = 27\sec^3\theta$$

ដូចនេះ

$$\begin{aligned}\int_0^{3\sqrt{3}/2} \frac{x^3}{(4x^2+9)^{3/2}}dx &= \int_0^{\pi/3} \frac{\frac{27}{8}\tan^3\theta}{27\sec^3\theta}\frac{3}{2}\sec^2\theta d\theta \\ &= \frac{3}{16}\int_0^{\pi/3}\frac{\tan^3\theta}{\sec\theta}d\theta\end{aligned}$$

$$= \frac{3}{16} \int_0^{\pi/3} \tan^2\theta \sec^{-2}\theta (\sec\theta \tan\theta) d\theta$$

តាង $u = \sec\theta, du = \sec\theta \tan\theta d\theta$។ ពេល $\theta = 0$ នោះ $u = 1$ ។ ពេល $\theta = \pi/3$ នោះ $u = 2$ ។ ដូចនេះ

$$\begin{aligned} &= \frac{3}{16} \int_1^2 (u^2 - 1) u^{-2} du \\ &= \frac{3}{16} \int_1^2 (1 - u^{-2}) du \\ &= \frac{3}{16} \left[u + \frac{1}{u} \right]_1^2 \\ &= \frac{3}{32}. \end{aligned}$$

ឧទាហរណ៍

គណនាអាំងតេក្រាល

$$\int_{\sqrt{2}}^{2} \frac{1}{x^3\sqrt{x^2-1}}dx.$$

តាង $x=\sec\theta$ នោះ $dx=\sec\theta\tan\theta d\theta$ ។ពេល $x=\sqrt{2}, \theta=\frac{\pi}{4}$ និងពេល $x=2, \theta=\frac{\pi}{3}$ ។ ដូចនេះ

$$\begin{aligned}
\int_{\sqrt{2}}^{2} \frac{1}{x^3\sqrt{x^2-1}}dx &= \int_{\pi/4}^{\pi/3} \frac{1}{\sec^3\theta\tan\theta}\sec\theta\tan\theta d\theta \\
&= \int_{\pi/4}^{\pi/3} \frac{1}{\sec^2\theta}d\theta = \int_{\pi/4}^{\pi/3} \cos^2\theta d\theta \\
&= \int_{\pi/4}^{\pi/3} \frac{1}{2}(1+\cos 2\theta)d\theta = \frac{1}{2}\left[\theta+\frac{1}{2}\sin 2\theta\right]_{\pi/4}^{\pi/3} \\
&= \frac{1}{2}\left[\left(\frac{\pi}{3}+\frac{1}{2}\frac{\sqrt{3}}{2}\right)-\left(\frac{\pi}{4}+\frac{1}{2}.1\right)\right] = \frac{\pi}{24}+\frac{\sqrt{3}}{8}-\frac{1}{4}.
\end{aligned}$$

លំហាត់អនុវត្តន៍

១ $\int_0^{\sqrt{3}/2} \frac{4x^2dx}{(1-x^2)^{3/2}}$

២ $\int_{\sqrt{3}}^{2} \frac{\sqrt{x^2-3}}{x}dx$

៣ $\int_0^{\sqrt{3}} \frac{dx}{(x^2+1)^{3/2}}$

ចម្លើយ

$x = \sin\theta, 0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{3}, dx = \cos\theta d\theta, (1-x^2)^{3/2} = \cos^3\theta;$

$$\begin{aligned}
\int_0^{\sqrt{3}/2} \frac{4x^2dx}{(1-x^2)^{3/2}} &= \int_0^{\pi/3} \frac{4\sin^2\theta\cos\theta d\theta}{\cos^3\theta} \\
&= 4\int_0^{\pi/3} \frac{1-\cos^2\theta}{\cos^2\theta} d\theta \\
&= 4\int_0^{\pi/3} (\sec^2\theta - 1)d\theta \\
&= 4\left[\tan\theta - \theta\right]_0^{\pi/3} = 4\sqrt{3} - \frac{4\pi}{3}.
\end{aligned}$$

$x = \sqrt{3}\sec\theta, dx = \sqrt{3}\sec\theta\tan\theta d\theta, x = \sqrt{3}, \sec\theta = 1, \theta = 0; x = 2, \sec\theta = \frac{2}{\sqrt{3}}, \theta = \frac{\pi}{6}, \sqrt{x^2-3} = \sqrt{3}\tan\theta$

$$\begin{aligned}\int_{\sqrt{3}}^{2} \frac{\sqrt{x^2-3}}{x}dx &= \int_0^{\pi/6} \frac{(\sqrt{3}\tan\theta)(\sqrt{3}\sec\theta\tan\theta)}{\sqrt{3}\sec\theta}d\theta \\ &= \int_0^{\pi/6} \sqrt{3}\tan^2\theta d\theta = \sqrt{3}\int_0^{\pi/6}(\sec^2\theta - 1)d\theta \\ &= \sqrt{3}\left[\tan\theta - \theta\right]_0^{\pi/6} = \sqrt{3}\left(\frac{1}{\sqrt{3}} - \frac{\pi}{6}\right).\end{aligned}$$

$x=\tan\theta, dx=\sec^2\theta d\theta, x=0, \tan\theta=0, \theta=0; x=\sqrt{3}, \tan\theta=\sqrt{3}, \theta=\frac{\pi}{3}, (x^2+1)^{3/2}=\sec^3\theta$

$$\begin{aligned}\int_0^{\sqrt{3}}\frac{dx}{(x^2+1)^{3/2}} &= \int_0^{\pi/3}\frac{\sec^2\theta d\theta}{\sec^3\theta} = \int_0^{\pi/3}\frac{d\theta}{\sec\theta}\\ &= \int_0^{\pi/3}\cos\theta d\theta = [\sin\theta]_0^{\pi/3} = \frac{\sqrt{3}}{2}.\end{aligned}$$

អាំងតេក្រាលកំនត់ដោយការប៉ាន់ស្មាន

ការគណនាអាំងតេក្រាលកំនត់ដោយការប៉ាន់ស្មាន

1. ក្បួនចំនុចកណ្តាល
2. ក្បួនចតុកោណព្នាយ
3. ក្បួន Simpson

សម្មតិកម្ម

សន្មតថា f ជាអនុគមន៍ជាប់លើចន្លោះ $[a, b]$។ យើងចែកចន្លោះ $[a, b]$ ជា n ចន្លោះរងដែលមានទទឹងស្មើៗគ្នា $h = (b - a)/n$.

ក្បួនចំនុចកណ្តាល

$$\int_a^b f(x)dx \approx M_n = h\left[f(\bar{x}_1) + f(\bar{x}_2) + \cdots + f(\bar{x}_n)\right]$$

ដែល

$$h = \frac{b-a}{n}$$

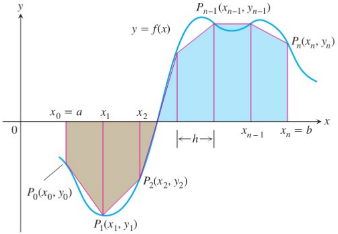
និង

$$\bar{x}_i = \frac{1}{2}(x_{i-1} + x_i) = \text{ចំនុចកណ្តាលនៃ } [x_{i-1}, x_i].$$

ក្បួនចតុកោណព្នាយ

$$\int_a^b f(x)dx \approx T_n = \frac{h}{2}\left(y_0 + 2y_1 + 2y_2 + \cdots + 2y_{n-1} + y_n\right)$$

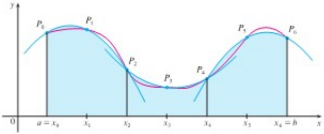
ដែល $y_0 = f(a), y_1 = f(x_1), \cdots, y_{n-1} = f(x_{n-1}), y_n = f(b)$



រូប: ប៉ាន់ស្មានផ្ទៃក្រោមខ្សែកោងដោយចតុកោណព្នាយ

ក្បួន Simpson (n គូ)

$$\int_a^b f(x)dx \approx S_n = \frac{h}{3}\left(y_0 + 4y_1 + 2y_2 + 4y_3 + 2y_4 + \cdots + 2y_{n-2} + 4y_{n-1} + y_n\right)$$



រូប: ប៉ាន់ស្មានផ្ទៃក្រោមខ្សែកោងដោយប៉ារ៉ាបូល

ល្អៀងនៃការប៉ាន់ស្មានអាំងតេក្រាល

$$\int_a^b f(x)dx = \text{តំលៃប៉ាន់ស្មាន} + \text{ល្អៀង}$$

បើ $|f''(x)| \leq K$ ចំពោះ $a \leq x \leq b$ នោះ

- ល្អៀងក្នុងក្បួនចំនុចកណ្ដាល E_M គឺ $|E_M| \leq \frac{K(b-a)^3}{24n^2}$
- ល្អៀងក្នុងក្បួនចតុកោណព្នាយ E_T គឺ $|E_T| \leq \frac{K(b-a)^3}{12n^2}$

បើ $|f^{(4)}(x)| \leq K$ ចំពោះ $a \leq x \leq b$ នោះ

- ល្អៀងក្នុងក្បួន Simpson E_S គឺ $|E_S| \leq \frac{K(b-a)^5}{180n^4}$

ឧទាហរណ៍

ប៉ាន់ស្មានអាំងតេក្រាល $\int_1^2 \frac{1}{x}dx,\ n = 10$

1. ក្បួនចំនុចកណ្តាល
2. ក្បួនចតុកោណព្នាយ
3. ក្បួន Simpson
4. ប៉ាន់ស្មានល្អៀងក្នុងក្បួននីមួយៗ

តម្លៃពិតប្រាកដនៃអាំងតេក្រាលនេះគឺ

$$\int_1^2 \frac{1}{x}dx = [\ln|x|]_1^2 = \ln 2 = 0.693147$$

យើងមាន $f(x)=\frac{1}{x}, n=10, h=\frac{2-1}{10}=0.1, x_0=1, x_1=1.1, x_2=1.2, x_3=1.3, x_4=1.4, x_5=1.5, x_6=1.6, x_7=1.7, x_8=1.8, x_9=1.9, x_{10}=2.$

1. ក្បួនចំនុចកណ្តាល

$$\begin{aligned}\int_1^2 \frac{1}{x}dx &\approx M_{10}\\ &= (0.1)[f(1.05)+f(1.15)+f(1.25)+f(1.35)+f(1.45)\\ &\quad + f(1.55)+f(1.65)+f(1.75)+f(1.85)+f(1.95)]\\ &= (0.1)\left[\frac{1}{1.05}+\frac{1}{1.15}+\frac{1}{1.25}+\frac{1}{1.35}+\frac{1}{1.45}+\frac{1}{1.55}\right.\\ &\quad \left.+\frac{1}{1.65}+\frac{1}{1.75}+\frac{1}{1.85}+\frac{1}{1.95}\right]\\ &\approx 0.692835\end{aligned}$$

❷ ក្បួនចតុកោណព្នាយ

$$
\begin{aligned}
\int_1^2 \frac{1}{x}dx &\approx T_{10} \\
&= \frac{0.1}{2}[f(1)+2f(1.1)+2f(1.2)+2f(1.3)+2f(1.4) \\
&\quad +2f(1.5)+2f(1.6)+2f(1.7)+2f(1.8)+2f(1.9)+f(2)] \\
&= \frac{0.1}{2}\left[\frac{1}{1}+\frac{2}{1.1}+\frac{2}{1.2}+\frac{2}{1.3}+\frac{2}{1.4}+\frac{2}{1.5}\right. \\
&\qquad \left.+\frac{2}{1.6}+\frac{2}{1.7}+\frac{2}{1.8}+\frac{2}{1.9}+\frac{1}{2}\right] \\
&\approx 0.693771
\end{aligned}
$$

- ក្បួន Simpson

$$
\begin{aligned}
\int_1^2 \frac{1}{x}dx \approx S_{10} \\
&= \frac{0.1}{3}[f(1) + 4f(1.1) + 2f(1.2) + 4f(1.3) + 2f(1.4) \\
&\quad + 4f(1.5) + 2f(1.6) + 4f(1.7) + 2f(1.8) + 4f(1.9) + f(2)] \\
&= \frac{0.1}{3}\left[\frac{1}{1} + \frac{4}{1.1} + \frac{2}{1.2} + \frac{4}{1.3} + \frac{2}{1.4} + \frac{4}{1.5}\right. \\
&\qquad \left. + \frac{2}{1.6} + \frac{4}{1.7} + \frac{2}{1.8} + \frac{4}{1.9} + \frac{1}{2}\right] \\
&\approx 0.693150
\end{aligned}
$$

ការប៉ាន់ស្មានល្អៀង

យើងមាន
$f(x)=1/x, f'(x)=-1/x^2, f''(x)=2/x^3, f'''(x)=-6/x^4, f^{(4)}(x)=24/x^5$
នោះចំពោះ $1\leq x\leq 2, 1/x\leq 1$,

$$|f''(x)|=\left|2/x^3\right|\leq 2$$

ដូចនេះយក $K=2, a=1, b=2, n=10$ យើងបាន

$$|E_M|\leq \frac{2(2-1)^3}{24(10)^2}=0.00083$$
$$|E_T|\leq \frac{2(2-1)^3}{12(10)^2}=0.0016$$

យើងមាន

$$|f^{(4)}(x)| = \left|24/x^5\right| \leq 24$$

ដូចនេះយក $K = 24, a = 1, b = 2, n = 10$ យើងបាន

$$|E_S| \leq \frac{24(2-1)^5}{180(10)^4} = 0.000013$$

ឧទាហរណ៍

តើយើងគួរជ្រើសរើស n ស្មើនឹងប៉ុន្មានដើម្បីធានាថាការប៉ាន់ស្មានក្នុងក្បួននីមួយៗ ចំពោះ $\int_1^2 \frac{1}{x}dx$ ត្រឹមត្រូវក្នុងកំរិតល្អៀង 0.0001 ?

យើងមាន $|f''(x)| \leq 2$ ចំពោះ $1 \leq x \leq 2$ យើងយក $K = 2, a = 1, b = 2$

- ក្បួនចំនុចកណ្តាល៖ យើងជ្រើសរើស n ដែល

$$\frac{2(2-1)^3}{24n^2} < 0.0001$$
$$n^2 > \frac{2}{24(0.0001)}$$
$$n > \frac{1}{\sqrt{0.0012}} \approx 29$$

- ក្បួនចតុកោណព្នាយ៖ យើងជ្រើសរើស n ដែល

$$\frac{2(2-1)^3}{12n^2} < 0.0001$$
$$n > \frac{1}{\sqrt{0.0006}} \approx 40.8 \quad \text{យក } n = 41$$

យើងមាន $|f^{(4)}(x)| \leq 24$ ចំពោះ $1 \leq x \leq 2$ យើងយក $K = 24, a = 1, b = 2$

- ក្បួន Simpson៖ យើងជ្រើសរើស n ដែល

$$\frac{24(2-1)^5}{180n^4} < 0.0001$$

$$n^4 > \frac{24}{180(0.0001)}$$

$$n > \frac{1}{\sqrt[4]{0.00075}} \approx 6.04$$

ដោយសារ n គូនោះ $n = 8$

ឧទាហរណ៍

ប៉ាន់ស្មានអាំងតេក្រាលដោយប្រើក្បួនចំនុចកណ្តាល

$$\int_0^1 e^{x^2} dx, \; n = 10$$

ដោយសារ $a = 0, b = 1$ និង $n = 10$ នោះតាមក្បួនចំនុចកណ្តាលយើងបាន

$$\begin{aligned}\int_0^1 e^{x^2} dx &\approx h[f(0.05) + f(0.15) + \cdots + f(0.85) + f(0.95)] \\ &= 0.1[e^{0.0025} + e^{0.0225} + e^{0.0625} + e^{0.1225} + e^{0.2025} + e^{0.3025} \\ &\qquad + e^{0.4225} + e^{0.5625} + e^{0.7225} + e^{0.9025}] \\ &= 1.460393\end{aligned}$$

យើងមាន $f(x) = e^{x^2}$ នោះ $f'(x) = 2xe^{x^2}, f''(x) = (2+4x^2)e^{x^2}$ ។ដោយសារ $0 \leq x \leq 1$ នោះ $x^2 \leq 1$ ហើយដូចនេះ

$$0 \leq f''(x) = (2+4x^2)e^{x^2} \leq 6e.$$

យក $K = 6e$ នោះល្អៀងក្នុងការប៉ាន់ស្មានគឺ

$$|E_M| \leq \frac{6e(1)^3}{24(10)^2} = \frac{e}{400} = 0.007.$$

ឧទាហរណ៍

ប៉ាន់ស្មានអាំងតេក្រាលដោយប្រើក្បួន Simpson

$$\int_0^1 e^{x^2}dx,\ n=10$$

ដោយសារ $a=0, b=1$ និង $n=10$ នោះតាមក្បួន Simpson យើងបាន

$$\begin{aligned}\int_0^1 e^{x^2}dx &\approx \frac{h}{3}[f(0)+4f(0.1)+2f(0.2)+\cdots+2f(0.8)+4f(0.9)+f(1)]\\ &= \frac{0.1}{3}[e^0+4e^{0.01}+2e^{0.04}+4e^{0.09}+2e^{0.16}+4e^{0.25}\\ &\quad +2e^{0.36}+4e^{0.49}+2e^{0.64}+4e^{0.81}+e^1]\\ &= 1.462681.\end{aligned}$$

យើងមាន $f(x) = e^{x^2}$ នោះ $f^{(4)}(x) = (12 + 48x^2 + 16x^4)e^{x^2}$។ដោយសារ $0 \le x \le 1$ នោះ $x^2 \le 1$ ហើយដូចនេះ

$$0 \le f^{(4)}(x) \le (12 + 48 + 16)e \le 76e.$$

យក $K = 76e$ នោះល្អៀងក្នុងការប៉ាន់ស្មានគឺ

$$|E_S| \le \frac{76e(1)^5}{180(10)^4} = 0.000115.$$

លំហាត់អនុវត្តន៍

ប៉ាន់ស្មានអាំងតេក្រាលដោយក្បួនចំនុចកណ្តាល ក្បួនចតុកោណព្នាយ ក្បួន Simpson ព្រមទាំងប៉ាន់ស្មានល្អៀងចំពោះក្បួននីមួយៗ៖

១ $\int_0^1 e^{x^2} dx$, $n = 10$

២ $\int_0^{1/2} \sin(x^2) dx$, $n = 4$

៣ $\int_1^5 \frac{\cos x}{x} dx$, $n = 8$

លំហាត់សម្រាប់អ្នកមានចិត្តសាកល្បង

តើយើងគួរជ្រើសរើស n ស្មើនឹងប៉ុន្មានដើម្បីធានាថាការប៉ាន់ស្មានក្នុងក្បួននីមួយៗ ចំពោះ $\int_0^1 e^{x^2} dx$ ត្រឹមត្រូវក្នុងកំរិតល្អៀង 0.00001 ?

គម្រោងមេរៀន

1. អាំងតេក្រាលមិនកំនត់
    - អាំងតេក្រាលដោយប្តូរអថេរ
    - អាំងតេក្រាលដោយផ្នែក
    - អាំងតេក្រាលត្រីកោណមាត្រ
    - អាំងតេក្រាលដោយជំនួសត្រីកោណមាត្រ
    - អាំងតេក្រាលដោយបំបែកជាប្រភាគតូចៗ
    - អាំងតេក្រាលនៃអនុគមន៍សនិទានត្រីកោណមាត្រ
2. អាំងតេក្រាលកំនត់
    - ក្រលាផ្ទៃនៃដែនខណ្ឌដោយខ្សែកោង
    - និយមន័យអាំងតេក្រាលកំនត់
    - ការគណនាអាំងតេក្រាលកំនត់
3. ការអនុវត្តនៃអាំងតេក្រាលកំនត់
    - ក្រលាផ្ទៃខណ្ឌដោយខ្សែកោង
    - មាឌសូលីតបរិវត្តន៍
    - ការអនុវត្តផ្សេងទៀត

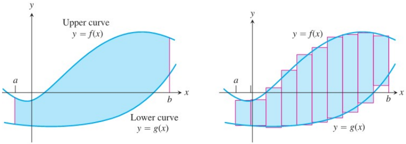
ក្រលាផ្ទៃខណ្ឌដោយខ្សែកោង

យើងយកដែន S ដែលនៅចន្លោះខ្សែកោងពីរ $y = f(x)$ និង $y = g(x)$ ហើយនៅចន្លោះបន្ទាត់ឈរ $x = a$ និង $x = b$ ដែល f, g ជាអនុគមន៍ជាប់និង $f(x) \geq g(x)$ ចំពោះគ្រប់ $x \in [a, b]$ ។

1. យើងចែកដែន S ជាចំណិតបញ្ឈរដែលមានទទឹង Δx ស្មើៗគ្នា ហើយប៉ាន់ស្មានចំណិតនីមួយៗដោយចតុកោណកែងមានបាត Δx និងកំពស់ $f(c_k) - g(c_k)$ ។ ក្រលាផ្ទៃចតុកោណកែងនីមួយៗគឺ

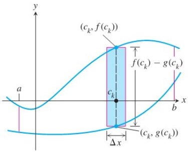
$$[f(c_k) - g(c_k)]\Delta x$$

ដែល c_k ជាចំនុចណាមួយនៅក្នុងចន្លោះរងទី k។



រូប: ក្រលាផ្ទៃចន្លោះខ្សែកោងនិងការប៉ាន់ស្មាន

យើងប៉ាន់ស្មានក្រលាផ្ទៃនៃដែន S ដោយផលបូក Riemann $\sum[f(c_k) - g(c_k)]\Delta x$



រូប: ប៉ាន់ស្មានចន្លោះរងទី k ដោយចតុកោណកែង

២ លីមីតនៃផលបូកពេល $\Delta x \to 0$ គឺ

$$\int_a^b [f(x) - g(x)]dx$$

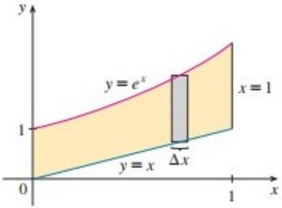
និយមន័យ

ក្រលាផ្ទៃនៃដែន S ដែលខណ្ឌដោយខ្សែកោងពីរ $y = f(x), y = g(x)$ និងបន្ទាត់ឈរ $x = a, x = b$ ដែល f, g ជាអនុគមន៍ជាប់និង $f(x) \geq g(x)$ ចំពោះគ្រប់ $x \in [a, b]$

$$A = \int_a^b [f(x) - g(x)]dx$$

ឧទាហរណ៍

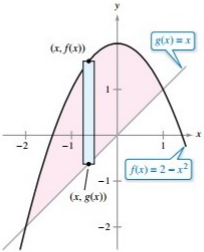
រកក្រលាផ្ទៃនៃដែនដែលខណ្ឌខាងលើដោយ $y = e^x$ ខាងក្រោមដោយ $y = x$ និងសងខាងដោយ $x = 0, x = 1$។



$$A = \int_0^1 (e^x - x)dx = \left[e^x - \frac{x^2}{2}\right]_0^1 = e - \frac{1}{2} - 1 = e - 1.5$$

ឧទាហរណ៍

រកក្រលាផ្ទៃនៃដែនខណ្ឌដោយខ្សែកោង $f(x) = 2 - x^2$ និង $g(x) = x$។



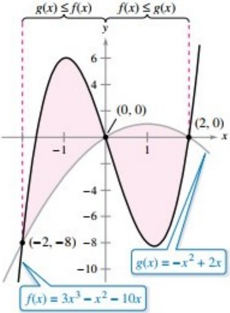
ក្រាបនៃ f និង g មានចំនុចប្រសព្វពីរ $(-2, -2)$ និង $(1, 1)$ ព្រោះសមីការនៃចំនុចប្រសព្វនៃក្រាបទាំងពីរគឺ $2 - x^2 = x$ នោះ $x = -2$ ឬ $x = 1$

ដូចនេះក្រលាផ្ទៃខណ្ឌដោយខ្សែកោងទាំងពីរគឺ

$$\begin{aligned} A &= \int_{-2}^{1} [(2 - x^2) - x] dx \\ &= \left[-\frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2} + 2x \right]_{-2}^{1} \\ &= \frac{9}{2}. \end{aligned}$$

ឧទាហរណ៍

រកក្រលាផ្ទៃនៃដែនខណ្ឌដោយខ្សែកោង $f(x) = 3x^3 - x^2 - 10x$ និង $g(x) = -x^2 + 2x$។



សមីការចំនុចប្រសព្វរវាងក្រាបទាំងពីរ

$$\begin{aligned} 3x^3 - x^2 - 10x &= -x^2 + 2x \\ 3x^3 - 12x &= 0 \\ 3x(x-2)(x+2) &= 0 \\ x &= -2, 0, 2 \end{aligned}$$

ខ្សែកោងទាំងពីរប្រសព្វគ្នានៅពេលដែល $x = -2, 0,$ និង 2។ យើងសង្កេតឃើញថា $g(x) \leq f(x)$ នៅចន្លោះ $[-2, 0]$ និង $f(x) \leq g(x)$ នៅចន្លោះ $[0, 2]$ ។ ដូច្នេះ

$$\begin{aligned} A &= \int_{-2}^{0} [f(x) - g(x)]dx + \int_{0}^{2} [g(x) - f(x)]dx \\ &= \int_{-2}^{0} (3x^3 - 12x)dx + \int_{0}^{2} (-3x^3 + 12x)dx \\ &= \left[\frac{3x^4}{4} - 6x^2\right]_{-2}^{0} + \left[\frac{-3x^4}{4} + 6x^2\right]_{0}^{2} = -(12 - 24) + (-12 + 24) = 24 \end{aligned}$$

សម្គាល់

នៅក្នុងឧទាហរណ៍នេះយើងទទួលបានចម្លើយមិនត្រឹមត្រូវនៅពេលយើងគណនាអាំងតេក្រាលពី -2 ទៅ 2 ដូចខាងក្រោម៖

$$\begin{aligned}\int_{-2}^{2}[f(x)-g(x)]dx &= \int_{-2}^{2}(3x^3-12x)dx \\ &= \left[\frac{3x^4}{4}-6x^2\right]_{-2}^{2} \\ &= 0\end{aligned}$$

សម្គាល់

1. បើ $g(x) = 0$ នោះ S ជាដែនស្ថិតនៅក្រោមខ្សែកោង។
2. ចំពោះដែនខ្លះវាជាការប្រសើរបើយើងចាត់ទុក x ជាអនុគមន៍នៃ y ។ បើដែនខណ្ឌដោយខ្សែកោង $x = f(y), x = g(y), y = c$ និង $y = d$ ដែល f និង g ជាអនុគមន៍ជាប់ហើយ $f(y) \geq g(y)$ ចំពោះ $c \leq y \leq d$ នោះក្រលាផ្ទៃគឺ

$$A = \int_c^d [f(y) - g(y)]dy$$

ជាទូទៅ

ដើម្បីគណនាក្រលាផ្ទៃនៅចន្លោះខ្សែកោងពីរយើងអាចប្រើ

$$A=\int_{x_1}^{x_2}[\text{ខ្សែកោងខាងលើ}-\text{ខ្សែកោងខាងក្រោម}]dx=\int_{x_1}^{x_2}[y_T-y_B]dx$$

ឬ

$$A=\int_{y_1}^{y_2}[\text{ខ្សែកោងខាងស្តាំ}-\text{ខ្សែកោងខាងឆ្វេង}]dy=\int_{y_1}^{y_2}[x_R-x_L]dy$$

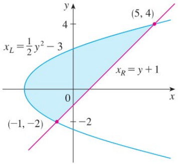
ដែល (x_1,y_1)និង (x_2,y_2) ជាចំនុចប្រសព្វបន្តបន្ទាប់គ្នានៃខ្សែកោងទាំងពីរ ឬ ជាចំនុចដែលឲ្យដោយបន្ទាត់ព្រំដែន។

ឧទាហរណ៍

រកក្រលាផ្ទៃដែលខណ្ឌដោយបន្ទាត់ $y = x - 1$ និងប៉ារ៉ាបូល $y^2 = 2x + 6$ ។

គណនាអាំងតេក្រាលធៀបនឹង y ៖ ចំនុចប្រសព្វនៃខ្សែកោងទាំងពីរគឺ $(-1, -2)$ និង $(5, 4)$ ។ យើងដោះស្រាយសមីការប៉ារ៉ាបូលរក x ហើយយើងកត់សំគាល់ក្នុងរូបថាខ្សែកោងព្រំដែនខាងឆ្វេងនិងខាងស្តាំគឺ

$$x_L = f(y) = \frac{1}{2}y^2 - 3 \quad \text{and} \quad x_R = g(y) = y + 1$$



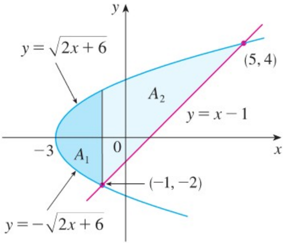
រូប: ផ្ទៃដែលខណ្ឌដោយបន្ទាត់ $y = x - 1$ និងប៉ារ៉ាបូល $y^2 = 2x + 6$

យើងគណនាអាំងតេក្រាលធៀបនឹង y ពី $y = -2$ ទៅ $y = 4$។ ដូចនេះយើងបាន

$$A = \int_{-2}^{4}[(y+1) - (\frac{1}{2}y^2 - 3)]dy = \int_{-2}^{4}\left(-\frac{1}{2}y^2 + y + 4\right)dy$$

$$= \left[\left(-\frac{1}{2}\frac{y^3}{3} + \frac{y^2}{2} + 4y\right)\right]_{-2}^{4} = 18$$

គណនាអាំងតេក្រាលធៀបនឹង x ៖ យើងចែកដែនជាពីរផ្នែកដូចក្នុងរូបហើយគណនាក្រលាផ្ទៃ A_1, A_2 នៃដែននីមួយៗ



រូប: ផ្ទៃដែលខណ្ឌដោយបន្ទាត់ $y = x - 1$ និងប៉ារ៉ាបូល $y^2 = 2x + 6$

យើងមាន

$$A = A_1 + A_2$$

ដែល

$$A_1 = 2\int_{-3}^{-1} \sqrt{2x+6}dx = \frac{16}{3}$$

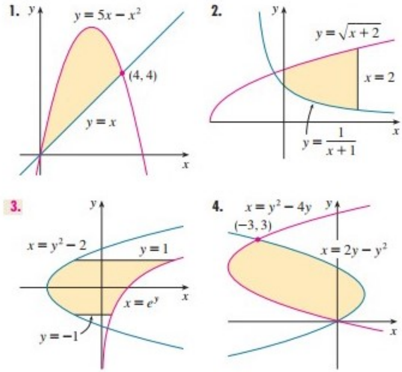
និង

$$A_2 = \int_{-1}^{5} \left[\sqrt{2x+6} - (x-1)\right] dx = \frac{38}{3}$$

ដូច្នេះយើងទទួលបានចំលើយដូចគ្នាគឺ $A = 18$ ។

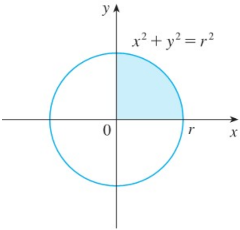
លំហាត់អនុវត្តន៍

រកក្រលាផ្ទៃនៃដែនដូចក្នុងរូប



ក្រលាផ្ទៃរង្វង់

ក្រលាផ្ទៃ(ថាសខណ្ឌដោយ)រង្វង់ដែលមានកាំ r គឺ πr^2 នេះគឺជារូបមន្តដ៏ល្បីល្បាញមួយហើយគេបានប្រាប់ជាយូរយារមកហើយថារូបមន្តនេះពិត ក៏ប៉ុន្តែវិធីសាស្ត្រដើម្បីស្រាយបញ្ជាក់គឺតាមរយៈអាំងតេក្រាល។



រូប: រង្វង់ផ្ចិត O កាំ r

យើងអាចសន្មត់យករង្វង់ដែលមានផ្ចិត $O=(0,0)$។ ដូចនេះសមីការរបស់វាគឺ

$$x^2+y^2=r^2$$

ដោះស្រាយសមីការនេះរក y យើងបាន

$$y=\pm\sqrt{r^2-x^2}$$

ដោយសាររង្វង់គឺឆ្លុះគ្នាធៀបនឹងអ័ក្សទាំងពីរនោះក្រលាផ្ទៃសរុបស្មើនឹងបួនដងនៃក្រលាផ្ទៃក្នុងកាដ្រង់ទីមួយ។ ផ្នែកនៃរង្វង់កាដ្រង់ទីមួយគឺអោយដោយអនុគមន៍

$$y=\sqrt{r^2-x^2}, \qquad 0\le x\le r$$

ដូច្នេះ

$$\frac{1}{4}A=\int_0^r\sqrt{r^2-x^2}dx$$

ដើម្បីគណនាអាំងតេក្រាលនេះយើងតាង

$$x = r\sin\theta$$

ដោយសារ $0 \le x \le r$ នោះ $0 \le \theta \le \pi/2$។ យើងមាន $dx = r\cos\theta d\theta$ និង

$$\sqrt{r^2 - x^2} = \sqrt{r^2 - r^2\sin^2\theta} = \sqrt{r^2\cos^2\theta} = r\cos\theta$$

ព្រោះ $\cos\theta \ge 0$ នៅពេលដែល $0 \le \theta \le \pi/2$ ។ ដូចនេះយើងបាន

$$\int_0^r \sqrt{r^2 - x^2}dx = \int_0^{\pi/2}(r\cos\theta)r\cos\theta d\theta = r^2\int_0^{\pi/2}\cos^2\theta d\theta$$

យើងមាន

$$\cos^2\theta = \frac{1}{2}(1 + \cos 2\theta)$$

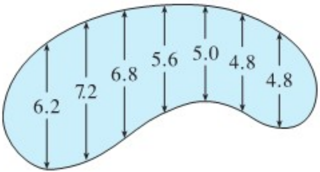
ដូច្នេះ

$$\begin{aligned}\frac{1}{4}A &= r^2\int_0^{\pi/2}\cos^2\theta d\theta = \frac{1}{2}r^2\int_0^{\pi/2}(1+\cos 2\theta)d\theta \\ &= \frac{1}{2}r^2\left[\theta+\frac{1}{2}\sin 2\theta\right]_0^{\pi/2} = \frac{1}{2}r^2\left(\frac{\pi}{2}+0-0\right) \\ &= \frac{1}{4}\pi\ r^2\end{aligned}$$

ដូច្នេះយើងបានបង្ហាញថា $A=\pi r^2$

ក្រលាផ្ទៃដោយក្បួន Simpson

ទទឹង(គិតជាម៉ែត្រ) នៃអាងហែលទឹកមួយដែលត្រូវបានវាស់នៅចន្លោះ 2 ម៉ែត្រដូចបង្ហាញក្នុងរូប៖



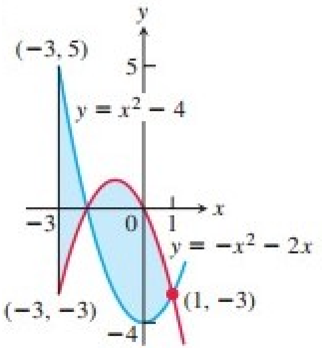
រូប: អាងហែលទឹក

យើងអាចប៉ាន់ស្មានក្រលាផ្ទៃនៃអាងហែលទឹកនេះបានដោយប្រើក្បួន Simpson៖ ដោយ អាងហែលទឹកនេះមានប្រវែង 16 ម៉ែត្រហើយយើងចែកជា 8 ចំនែក ដែលចំនែកនីមួយៗមានប្រវែង 2 ម៉ែត្រ ស្មើៗគ្នានោះយើងបានក្រលាផ្ទៃ S គឺ

$$S = \frac{2}{3}\big(1 \times 0 + 4 \times 6.2 + 2 \times 7.2 + 4 \times 6.8 + 2 \times 5.6 + 4 \times 5 + 2 \times 4.8 + 4 \times 4.8 + 1 \times 0\big) \approx 84\,(m^2)$$

លំហាត់អនុវត្តន៍

គណនាក្រលាផ្ទៃនៃដែនដូចក្នុងរូប

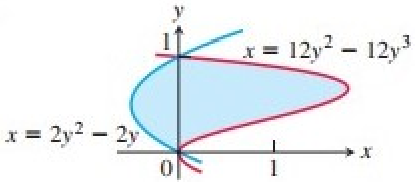


ចម្លើយ

ចំនុចប្រសព្វនៃខ្សែកោងទាំងពីរគឺ $(-2, 0)$ $(1, -3)$។ ដូចនេះក្រលាផ្ទៃ

$$\begin{aligned}
A &= \int_{-3}^{-2} [(x^2-4)-(-x^2-2x)]dx + \int_{-2}^{1} [(-x^2-2x)-(x^2-4)]dx \\
&= \int_{-3}^{-2} (2x^2+2x-4)dx + \int_{-2}^{1} (-2x^2-2x+4)dx \\
&= \left[\frac{2}{3}x^3+x^2-4x\right]_{-3}^{-2} + \left[-\frac{2}{3}x^3-x^2+4x\right]_{-2}^{1} \\
&= \frac{11}{3}+9 \\
&= \frac{38}{3}.
\end{aligned}$$

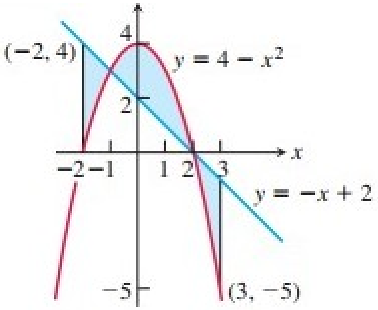
គណនាក្រលាផ្ទៃនៃដែនដូចក្នុងរូប



ចម្លើយ

$$
\begin{aligned}
A &= \int_0^1 [(12y^2 - 12y^3) - (2y^2 - 2y)]dy \\
&= \int_0^1 (10y^2 - 12y^3 + 2y)dy \\
&= \left[\frac{10}{3}y^3 - \frac{12}{4}y^4 + y^2\right]_0^1 \\
&= \left(\frac{10}{3} - 3 + 1\right) - 0 \\
&= \frac{4}{3}.
\end{aligned}
$$

គណនាក្រលាផ្ទៃនៃដែនដូចក្នុងរូប



ចម្លើយ

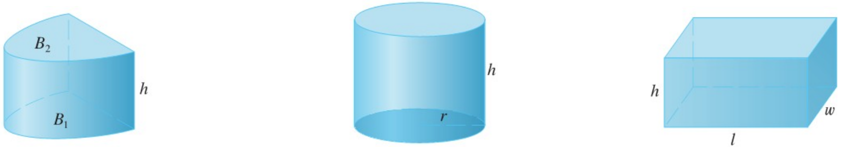
$$\begin{aligned}
A &= \int_{-2}^{-1} [(-x+2)-(4-x^2)]dx + \int_{-1}^{2} [(4-x^2)-(-x+2)]dx \\
&\quad + \int_{2}^{3} [(-x+2)-(4-x^2)]dx \\
&= \int_{-2}^{-1} (x^2-x-2)dx - \int_{-1}^{2} (x^2-x-2)dx + \int_{2}^{3} (x^2-x-2)dx \\
&= \left[\frac{x^3}{3}-\frac{x^2}{2}-2x\right]_{-2}^{-1} - \left[\frac{x^3}{3}-\frac{x^2}{2}-2x\right]_{-1}^{2} + \left[\frac{x^3}{3}-\frac{x^2}{2}-2x\right]_{2}^{3} \\
&= \frac{11}{6}+\frac{9}{2}+\frac{11}{6} \\
&= \frac{49}{6}.
\end{aligned}$$

មាឌសូលីត

យើងចាប់ផ្តើមពីប្រភេទងាយនៃសូលីតដែលហៅថាស៊ីឡាំង ។ បើក្រលាផ្ទៃបាតគឺ A និងកំពស់នៃស៊ីឡាំងគឺ h នោះមាឌ V នៃស៊ីឡាំងកំណត់ដោយ

$$V = Ah$$

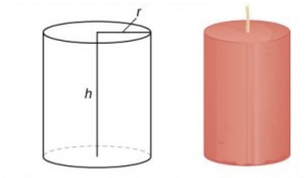
ជាពិសេសបើបាតជារង្វង់មានកាំ r នោះមាឌ $V = \pi r^2 h$។ បើបាតជាចតុកោណកែងដែលមានបណ្តោយ l និងទទឹង w នោះមាឌ $V = lwh$ ។

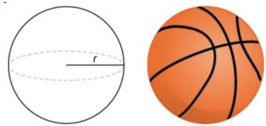


(a) Cylinder $V = Ah$ (b) Circular cylinder $V = \pi r^2 h$ (c) Rectangular box $V = lwh$

រូប: មាឌស៊ីឡាំង

ឧទាហរណ៍ខ្លះៗនៃមាឌ





រូប: ស៊ីឡាំង(ទៀន) ស្វ៊ែ(បាល់)

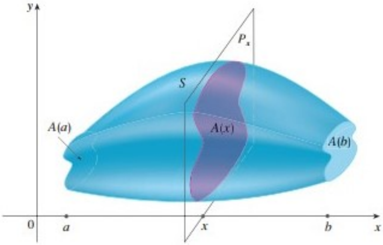
តើមាឌសូលីតទាំងនេះស្មើប៉ុន្មាន?

មាឌស៊ីឡាំងគឺ $\pi r^2 h$ មាឌនៃស្វ៊ែគឺ $\frac{4}{3}\pi r^3$

អាំងតេក្រាលកំណត់និងមាឌសូលីត

ចំពោះសូលីត S ដែលមិនមែនជាស៊ីឡាំងយើងច្រៀក S ជាផ្នែកតូចៗហើយ ប៉ាន់ស្មានផ្នែកនីមួយៗដោយស៊ីឡាំង។

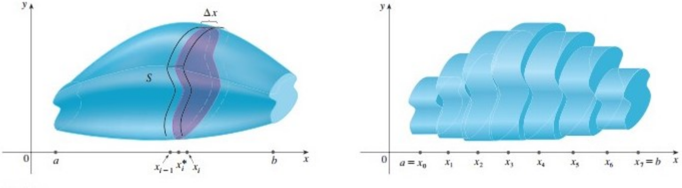
- យើងចាប់ផ្តើមដោយកាត់ S ដោយប្លង់ហើយទទួលបានដែនមួយហៅថា មុខកាត់នៃ S។ តាង $A(x)$ ជាក្រលាផ្ទៃមុខកាត់នៃ S ក្នុងប្លង់ P_x កែងនឹង $x-$ អាប់ស៊ីសហើយកាត់តាមចំនុច x ដែល $a \leq x \leq b$ ។



រូប: ការកាត់ដែន S ដោយប្លង់

- យើងចែកចន្លោះបិទ $[a, b]$ ជា n ចន្លោះរងដោយបំណែក $P = \{x_0, x_1, \dots, x_n\}$។ យើងចែក S ជា n ចំរៀកដែលមានទទឹង $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$ ដោយប្រើប្លង់ $P_{x_1}, P_{x_2}, \dots$ ដើម្បីច្រៀកសូលីត។ បើយើងជ្រើសរើសចំនុចគំរូណាមួយ $x_i^* \in [x_{i-1}, x_i]$ យើងអាចប៉ាន់ស្មានចំរៀកទី i, S_i (ដែលស្ថិតនៅចន្លោះប្លង់ $P_{x_{i-1}}$ និង P_{x_i}) ដោយស៊ីឡាំងដែលមានក្រលាផ្ទៃបាត $A(x_i^*)$ និងកំពស់ Δx_i ។ មាឌនៃស៊ីឡាំងនេះគឺ $A(x_i^*)\Delta x_i$ ដូចនេះ យើងអាចប៉ាន់ស្មានចំរៀកទី i, S_i ដោយ

$$V(S_i) \approx A(x_i^*)\Delta x_i$$



រូប: ការច្រៀកដែន S ដោយប្លង់ $P_{x_1}, P_{x_2}, \dots$

យើងទទួលបានការប៉ាន់ស្មាននៃមាឌសរុបដោយបូកបញ្ចូលមាឌនៃចំរៀកទាំងនេះ

$$V \approx \sum_{i=1}^{n} A(x_i^*)\Delta x_i$$

ការប៉ាន់ស្មាននេះកាន់តែប្រសើរនៅពេលដែលចំរៀកកាន់តែស្តើងទៅៗ។ ដូច្នេះ យើងកំណត់មាឌជាលីមីតនៃផលបូកនេះពេល $\max \Delta x_i \to 0$ ហើយនេះជាលីមីត នៃផលបូក Riemann ដែលជាអាំងតេក្រាលកំណត់។

និយមន័យ ១ (និយមន័យមាឌ)

យក S ជាសូលីតដែលស្ថិតនៅចន្លោះ $x = a$ និង $x = b$។ បើក្រលាផ្ទៃមុខកាត់នៃ S ក្នុងប្លង់ P_x ដែលកាត់តាម x ហើយកែងនឹងអ័ក្សអាប់ស៊ីសគឺ $A(x)$ ដែល A ជា អនុគមន៍មានអាំងតេក្រាល នោះមាឌនៃ S គឺ

$$V = \lim_{\max \Delta x_i \to 0} \sum_{i=1}^{n} A(x_i^*)\Delta x_i = \int_a^b A(x)\,dx$$

វិធាននៃការគណនាមាឌសូលីត

- ចំពោះស៊ីឡាំង ក្រលាផ្ទៃមុខកាត់គឺជាចំនួនថេរ $A(x) = A$ គ្រប់ x។ ដូច្នេះតាមនិយមន័យនៃមាឌ យើងបាន

$$V = \int_a^b A dx = A(b-a)$$

ដែលនេះគឺវាត្រូវគ្នានឹងរូបមន្ត $V = Ah$

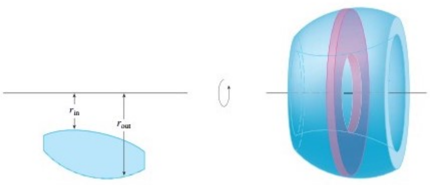
- បើមុខកាត់ជាថាសនោះយើងរកកាំ r នៃថាសជាអនុគមន៍នៃ x និង y ហើយប្រើ

$$A = \pi r^2$$

មាឌសូលីតបរិវត្តន៍ដោយ Washer

- បើមុខកាត់ជា Washer នោះយើងរកកាំក្នុង r_{in} និងកាំក្រៅ r_{out} ហើយគណនាក្រលាផ្ទៃនៃ Washerដោយធ្វើផលដកក្រលាផ្ទៃថាសក្នុងចេញពីក្រលាផ្ទៃថាសក្រៅ

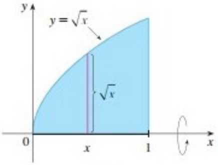
$$A = \pi(\text{កាំក្រៅ})^2 - \pi(\text{កាំក្នុង})^2$$

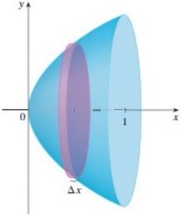


រូប: មាឌដោយ Washer

ឧទាហរណ៍

រកមាឌនៃសូលីតដែលបានមកពីការបង្វិលជុំវិញអ័ក្សអាប់ស៊ីសនៃដែននៅក្រោមខ្សែកោង $y = \sqrt{x}$ ពី 0 ទៅ 1 ។





រូប: សូលីតបានមកពីការបង្វិលជុំវិញអ័ក្សអាប់ស៊ីសនៃដែននៅក្រោមខ្សែកោង $y = \sqrt{x}$ ពី 0 ទៅ 1

បើយើងបង្វិលដែនក្នុងរូប (a) ជុំវិញអ័ក្សអាប់ស៊ីសយើងនឹងទទួលបានសូលីតដូចក្នុងរូប (b)។ នៅពេលដែលយើងច្រៀកតាមចំណុច x យើងនឹងទទួលបានថាសដែលមានកាំ $\sqrt{x}$។ ក្រលាផ្ទៃមុខកាត់គឺ

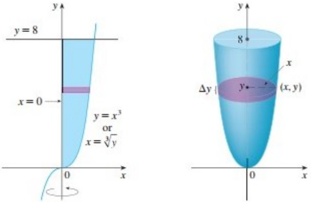
$$A(x) = \pi\left(\sqrt{x}\right)^2 = \pi x$$

ដូចនេះមាឌនៃសូលីតពី 0 ទៅ 1 គឺ

$$V = \int_0^1 A(x)dx = \int_0^1 \pi x dx = \pi\left[\frac{x^2}{2}\right]_0^1 = \frac{\pi}{2}$$

ឧទាហរណ៍

រកមាឌនៃសូលីតដែលបានមកពីការបង្វិលជុំវិញអ័ក្សអរដោនេនៃដែនដែលខណ្ឌដោយ $y = x^3, y = 8$ និង $x = 0$។



រូប: សូលីតដែលបានមកពីការបង្វិលជុំវិញអ័ក្សអរដោនេនៃដែនដែលខណ្ឌដោយ $y = x^3, y = 8$ និង $x = 0$

ដោយសារយើងបង្វិលដែនជុំវិញអ័ក្ស y នោះយើងច្រៀកសូលីតឱ្យកែងនឹង អ័ក្ស y ហើយយើងគណនាអាំងតេក្រាលធៀបនឹង y ។ បើយើងច្រៀកនៅកំពស់ y យើងទទួលបានថាសដែលមានកាំ x ដែល $x=\sqrt[3]{y}$ ហើយក្រលាផ្ទៃមុខកាត់តាម y គឺ

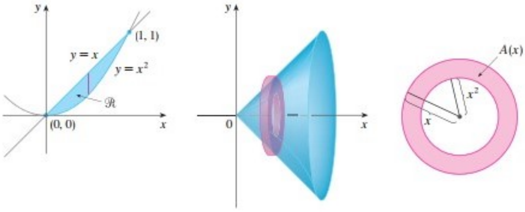
$$A(y)=\pi x^2=\pi(\sqrt[3]{y})^2=\pi y^{2/3}$$

ដូចនេះមាឌនៃសូលីតពី $y=0$ ទៅ $y=8$ គឺ

$$V=\int_0^8 A(y)dy=\int_0^8 \pi y^{2/3}dy=\pi\left[\frac{3}{5}y^{5/3}\right]_0^8=\frac{96\pi}{5}$$

ឧទាហរណ៍

រកមាឌនៃសូលីតដែលបានមកពីការបង្វិលជុំវិញ អ័ក្សអាប់ស៊ីសនៃដែន $\mathcal{R}$ ដែលខណ្ឌដោយខ្សែកោង $y = x$ និង $y = x^2$ ។



រូប: ដែនខណ្ឌដោយខ្សែកោង សូលីតបរិវត្តន៍ និង washer

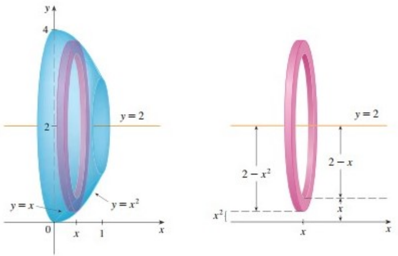
ខ្សែកោង $y = x$ និង $y = x^2$ ប្រសព្វគ្នាត្រង់ចំណុច $(0, 0)$ $(1, 1)$។ ដែនខណ្ឌដោយខ្សែកោងទាំងពីរ សូលីតបរិវត្តន៍ និង មុខកាត់ដែលកែងនឹងអ័ក្សអាប់ស៊ីសបានបង្ហាញដូចក្នុងរូប។ មុខកាត់តាម x មានរាងជា washer (ចិញ្ចៀនវង់) ដែលមានកាំក្នុង x^2 និងកាំក្រៅ x។ ដូចនេះយើងអាចរកក្រលាផ្ទៃមុខកាត់ដោយធ្វើផលដកក្រលាផ្ទៃថាសខាងក្នុងចេញពីក្រលាផ្ទៃថាសខាងក្រៅ៖

$$A(x) = \pi x^2 - \pi(x^2)^2 = \pi(x^2 - x^4)$$

$$\begin{aligned} V &= \int_0^1 A(x)dx = \int_0^1 \pi(x^2 - x^4)dx \\ &= \pi\left[\frac{x^3}{3} - \frac{x^5}{5}\right]_0^1 = \frac{2\pi}{15} \end{aligned}$$

ឧទាហរណ៍

រកមាឌនៃសូលីតដែលបានមកពីការបង្វិលជុំវិញបន្ទាត់ $y = 2$ នៃដែន $\mathcal{R}$ ដែលខណ្ឌដោយខ្សែកោង $y = x$ និង $y = x^2$ ។



រូប: សូលីតបរិវត្តន៍បានមកពីការបង្វិលដែន $\mathcal{R}$

ជាថ្មីម្តងទៀតមុខកាត់ជា washer ប៉ុន្តែពេលនេះកាំក្នុងគឺ $2-x$ និងកាំក្រៅគឺ $2-x^2$។ ក្រលាផ្ទៃមុខកាត់គឺ

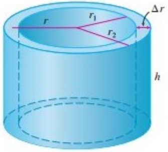
$$A(x) = \pi(2-x^2)^2 - \pi(2-x)^2$$

ដូច្នេះមាឌនៃសូលីតគឺ

$$\begin{aligned} V &= \int_0^1 A(x)dx = \pi \int_0^1 \left[(2-x^2)^2 - (2-x)^2\right] dx \\ &= \pi \int_0^1 \left(x^4 - 5x^2 + 4x\right) dx = \pi \left[\frac{x^5}{5} - 5\frac{x^3}{3} + 4\frac{x^2}{2}\right]_0^1 \\ &= \frac{8\pi}{15} \end{aligned}$$

មាឌសូលីតបរិវត្តន៍ដោយគំរបស៊ីឡាំង

មានបញ្ហាមាឌមួយចំនួនគឺពិបាកដោះស្រាយដោយវិធីសាស្រ្តក្នុងផ្នែកមុន ក៏ប៉ុន្តែយើងនឹងបង្ហាញវិធីសាស្រ្តងាយស្រួលជាងក្នុងផ្នែកនេះ ដែលហៅថា មាឌនៃសូលីតបរិវត្តន៍ដោយគំរបស៊ីឡាំង។ ក្នុងរូបខាងក្រោមគឺជាគំរបស៊ីឡាំងដែលមានកាំក្នុង r_1 កាំក្រៅ r_2 និងកំពស់ h ។



រូប: គំរបស៊ីឡាំង

មាឌ V របស់វាគណនាដោយធ្វើផលដកមាឌ V_1 នៃស៊ីឡាំងក្នុង ចេញពីមាឌ V_2 នៃស៊ីឡាំងក្រៅ៖

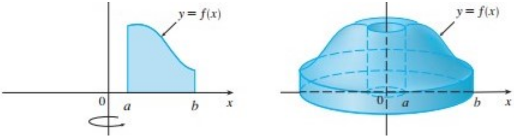
$$\begin{aligned} V &= V_2 - V_1 \\ &= \pi r_2^2 h - \pi r_1^2 h \\ &= \pi(r_2^2 - r_1^2)h \\ &= \pi(r_2 + r_1)(r_2 - r_1)h \\ &= 2\pi\frac{r_2 + r_1}{2}h(r_2 - r_1) \end{aligned}$$

បើយើងយក $\Delta r = r_2 - r_1$ (កំរាស់នៃគំរប) $r = \frac{1}{2}(r_2 + r_1)$ (កាំមធ្យមនៃគំរប) នោះរូបមន្តមាឌនៃគំរបស៊ីឡាំងក្លាយជា

$$V = 2\pi r h \Delta r$$

ហើយយើងអាចចងចាំវាដោយ $V =$ [បរិមាត្រ][កំពស់][កំរាស់]

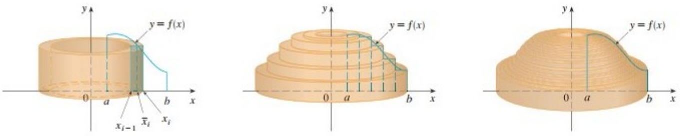
យើងយក S ជាសូលីតដែលបានមកពីការបង្វិលជុំវិញអ័ក្សអរដោនេ នៃដែនដែលខណ្ឌដោយខ្សែកោង $y = f(x)$ ដែល $f(x) \geq 0, y = 0, x = a$ និង $x = b$ ដែល $b > a \geq 0$ ។



រូប: សូលីតបរិវត្តន៍ជុំវិញអ័ក្សអរដោនេ

យើងចែកចន្លោះបិត $[a,b]$ ជា n ចន្លោះរង $[x_{i-1},x_i]$ ដែលមានប្រវែង Δx ស្មើៗគ្នា ហើយយើងយក$\bar{x}_i$ ជាចំនុចកណ្តាលនៃចន្លោះរងទី i។ បើយើងបង្វិលចតុកោណកែងដែលមានបាត $[x_{i-1},x_i]$ និងកំពស់ $f(\bar{x}_i)$ យើងទទួលបានគំរបស៊ីឡាំងដែលមានកាំមធ្យម $\bar{x}_i$ កំពស់ $f(\bar{x}_i)$ និងកំរាស់ Δx ដូច្នេះមាឌរបស់វាគឺ

$$V_i = (2\pi\bar{x}_i)f(\bar{x}_i)\Delta x$$



រូប: ការប៉ាន់ស្មានសូលីតបរិវត្តន៍ដោយគំរបស៊ីឡាំង

ដូច្នេះការប៉ាន់ស្មានមាឌ V នៃ S គឺអោយដោយផលបូកមាឌនៃគំរបស៊ីឡាំងទាំងនេះ

$$V \approx \sum_{i=1}^{n} V_i = \sum_{i=1}^{n} (2\pi \bar{x}_i) f(\bar{x}_i) \Delta x$$

ការប៉ាន់ស្មាននេះកាន់តែប្រសើរនៅពេលដែល $n \to \infty$ ហើយតាមនិយមន័យនៃអាំងតេក្រាលយើងដឹងថា

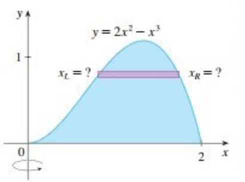
$$\lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} (2\pi \bar{x}_i) f(\bar{x}_i) \Delta x = \int_a^b 2\pi x f(x) dx$$

ដូច្នេះមាឌនៃសូលីតដែលបានមកពីការបង្វិលជុំវិញអ័ក្សអរដោនេនៃដែនខណ្ឌដោយខ្សែកោង $y = f(x)$ ពី a ទៅ b គឺ

$$V = \int_a^b 2\pi x f(x) dx \quad \text{ដែល} \quad 0 \leq a < b$$

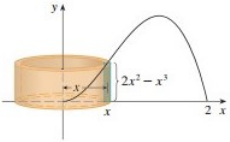
ឧទាហរណ៍

គណនាមាឌនៃសូលីតដែលបានមកពីការបង្វិលជុំវិញអ័ក្សអរដោនេនៃដែនខណ្ឌដោយ $y = 2x^2 - x^3$ និង $y = 0$។



រូប: ការបង្វិលជុំវិញអ័ក្សអរដោនេនៃដែនខណ្ឌដោយ $y = 2x^2 - x^3$ និង $y = 0$

- បើយើងច្រៀកដែនអោយកែងនឹងអ័ក្សអរដោនេយើងទទួលបាន washer ក៏ប៉ុន្តែដើម្បីគណនាកាំក្នុងនិងកាំក្រៅនៃ washer យើងត្រូវដោះស្រាយសមីការដឺក្រេទី ៣ $y = 2x - x^3$ រក x ជាអនុគមន៍នៃ y ដែលមិនមែនងាយស្រួលប៉ុន្មានទេ។
- យើងនឹងប្រើវិធីសាស្រ្តគំរបស៊ីឡាំងដើម្បីគណនាមាឌនៃសូលីតនេះ។ តាមរូបខាងក្រោមយើងឃើញថាស្រទាប់ស៊ីឡាំងមួយមានកាំ x បរិមាត្រ $2\pi x$ និងកំពស់ $f(x) = 2x^2 - x^3$។



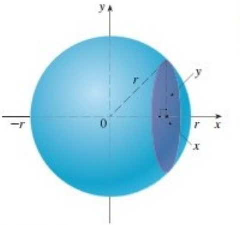
រូប: មាឌសូលីតតាមគំរបស៊ីឡាំង

ដូច្នេះមាឌនៃសូលីតនេះគឺ

$$
\begin{aligned}
V &= \int_0^2 (2\pi x)(2x^2 - x^3)dx \\
&= 2\pi \int_0^2 (2x^3 - x^4)dx \\
&= 2\pi \left[\frac{1}{2}x^4 - \frac{1}{5}x^5\right]_0^2 \\
&= 2\pi \left(8 - \frac{32}{5}\right) \\
&= \frac{16}{5}\pi
\end{aligned}
$$

មាឌនៃស្វ៊ែរដែលមានកាំ r

យើងអាចសន្មតថាផ្ចិតនៃស្វ៊ែគឺនៅគល់ O នោះប្លង់ ប្រសព្វជាមួយនឹងស្វ៊ែរបានជារង្វង់ដែលមានកាំស្មើនឹង $y=\sqrt{r^2-x^2}$ (តាមទ្រឹស្តីបទពីតាគ័រ)។



រូប: ស្វ៊ែកាំ r

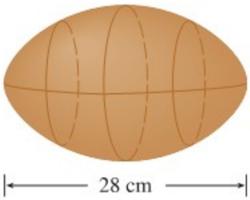
ដូចនេះក្រលាផ្ទៃមុខកាត់គឺ

$$A(x) = \pi y^2 = \pi(r^2 - x^2)$$

ប្រើនិយមន័យនៃមាឌចំពោះ $a = -r$ និង $b = r$ យើងបាន

$$\begin{aligned} V &= \int_{-r}^{r} A(x)dx = \int_{-r}^{r} \pi(r^2 - x^2)dx \\ &= 2\pi \int_0^r (r^2 - x^2)dx = 2\pi \left[r^2 x - \frac{x^3}{3} \right]_0^r \\ &= 2\pi \left(r^3 - \frac{r^3}{3} \right) = \frac{4}{3}\pi r^3 \end{aligned}$$

យើងប៉ាន់ស្មានមាឌនៃបាល់មួយដូចរូបខាងក្រោម៖



រូប: បាល់

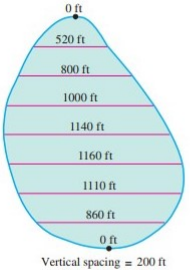
ជាដំបូងយើងវាស់ហើយរកឃើញថាបាល់មានបណ្ដោយ $28\,cm$។ យើងប្រើខ្សែដើម្បីវាស់បរិមាត្រនៅកន្លែងទទឹងធំជាងគេហើយរកឃើញបរិមាត្រគឺ $53\,cm$។ បរិមាត្រនៅចំនុច $7\,cm$ ចេញពីចុងសងខាងនៃបាល់គឺ $45\,cm$។

យើងអាចប៉ាន់ស្មានមាឌនេះបានដោយប្រើក្បួន Simpson៖ ដោយ បាល់នេះមានប្រវែង $28\,cm$ ហើយយើងចែកជា 4 ចំនែក ដែលចំនែកនីមួយៗមានប្រវែង $7\,cm$ ស្មើៗគ្នានោះយើងបានមាឌ V គឺ

$$\begin{aligned} V &= \pi \int_0^{28} [f(x)]^2 dx \\ &\approx \frac{7}{3}\left[1 \times 0 + 4 \times \pi \left(\frac{45}{2\pi}\right)^2 + 2 \times \pi \left(\frac{53}{2\pi}\right)^2 + 4 \times \pi \left(\frac{45}{2\pi}\right)^2 + 1 \times 0\right] \\ &= \frac{76363}{6\pi} \approx 4051.18\ cm^3 \end{aligned}$$

ស្តុកត្រីក្នុងបឹង

ឧបមាថាបឹងមួយមានជម្រៅជាមធ្យម $20ft$ យើងវាស់ប្រវែងកាត់បឹងនៅចន្លោះ $200ft$ ស្មើៗគ្នាដូចក្នុងរូប។ យើងគំរោងដាក់ត្រីមួយក្នុង $1000ft^3$ នៅដើមរដូវ។ យើងចង់បានយ៉ាងហោចណាស់ 25% (នៃចំនួនត្រីលែងនៅដើមរដូវ) នៅសល់នៅចុងរដូវ។ តើយើងអាចលក់អាជ្ញាប័ណ្ណយ៉ាងច្រើនប៉ុន្មាន បើការចាប់ត្រីតាមរដូវជាមធ្យមគឺ 20 ត្រីក្នុងមួយអាជ្ញាប័ណ្ណ?



រូប: បឹង

ប្រើវិធី Simpson ដើម្បីរកផ្ទៃបឹង

$$S = \frac{200}{3}(1 \times 0 + 4 \times 520 + 2 \times 800 + 4 \times 1000 + 2 \times 1140$$
$$+ 4 \times 1160 + 2 \times 1110 + 4 \times 860 + 1 \times 0)$$
$$\approx 1\,350\,666\,(ft^2)$$

មាឌបឹង $V = 20 \times 1\,350\,666 = 27\,013\,333(ft^3)$
75% នៃ ចំនួនត្រី $= 0.75 \times 27\,013\,333/1000 = 20260$
ចំនួនអាជ្ញាប័ណ្ណ $= 20260/20 = 1013$

ម៉ាស៊ីនស្កេន CAT

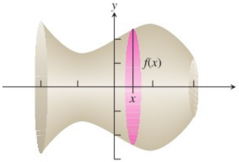
ម៉ាស៊ីនស្កេន CAT បង្កើតរូបភាពផ្ទៃមុខកាត់នៃសរីរាង្គមនុស្សនៅចន្លោះស្មើៗគ្នា ដែលផ្តល់ពត៌មានអំពីសរីរាង្គ។ ឧបមាថាម៉ាស៊ីនស្កេន CAT បង្ហាញផ្ទៃមុខកាត់នៃថ្លើមនៅចន្លោះ $1.5\,cm$ ស្មើៗគ្នា។ ថ្លើមមានប្រវែង $15\,cm$ ហើយក្រលាផ្ទៃមុខកាត់ (គិតជា cm^2) គឺ $0, 18, 58, 79, 94, 106, 117, 128, 63, 39,$ និង 0។
យើងអាចរកមាឌនៃថ្លើមដោយប្រើវិធី Simpson ដូចខាងក្រោម៖

រូប: ថ្លើម

$$
\begin{aligned}
V &= \int_0^{15} A(x)dx \\
&\approx \frac{1.5}{3}[1\times 0 + 4\times 18 + 2\times 58 + 4\times 79 + 2\times 94 \\
&+ 4\times 106 + 2\times 117 + 4\times 128 + 2\times 63 \\
&+ 4\times 39 + 1\times 0] \\
&\approx 1072\ cm^3
\end{aligned}
$$

មាឌថូ

យើងអាចគិតថាមាឌថូគឺជាមាឌសូលីតដែលបានមកពីការបង្វិលក្រាប $f(x) = 2 + x\cos x$ ជុំវិញអ័ក្សអាប់ស៊ីសនៅចន្លោះ $[-2, 2]$



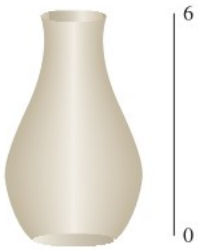
រូប: ថូគណិតវិទ្យា

យើងមាន $A(x) = \pi(f(x))^2$ នោះមាឌសូលីតគឺ

$$V = \int_{-2}^{2} A(x)dx \approx 52.43 \text{ ឯកតាមាឌ}$$

មាឌថូ

យើងចង់ប៉ាន់ស្មានមាឌនៃថូផ្កាដោយប្រើតែម៉ាស៊ីនគិតលេខ ខ្សែ និង បន្ទាត់។ យើងវាស់កំពស់ថូផ្កាហើយឃើញថាវាមានកំពស់ $6\,cm$ ។ យើងប្រើខ្សែនិងបន្ទាត់ដើម្បីរកបរិមាត្រថូ (គិតជា cm) នៅចន្លោះប្រវែង $1/2\,cm$។



Circumferences	
5.4	10.8
4.5	11.6
4.4	11.6
5.1	10.8
6.3	9.0
7.8	6.3
9.4	

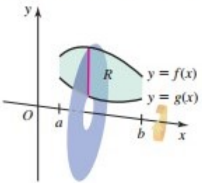
រូប: ថូផ្កានិងបរិមាត្រ

យើងអាចប៉ាន់ស្មានមាឌថូផ្កាដោយប្រើក្បួន Simpson៖ ដោយ ថូផ្កានេះមានប្រវែង $6\,cm$ ហើយយើងចែកជា 12 ចំនែក ដែលចំនែកនីមួយៗមានប្រវែង $1/2\,cm$ ស្មើៗគ្នា នោះយើងបានមាឌ V គឺ

$$
\begin{aligned}
V &= \pi \int_0^6 [f(x)]^2 dx \\
&\approx \frac{1}{24\pi}[1 \times (6.3)^2 + 4 \times 9^2 + 2 \times (10.8)^2 + 4 \times (11.6)^2 + 2 \times (11.6)^2 \\
&\quad + 4 \times (10.8)^2 + 2 \times (9.4)^2 + 4 \times (7.8)^2 + 2 \times (6.3)^2 + 4 \times (5.1)^2 \\
&\quad + 2 \times (4.4)^2 + 4 \times (4.5)^2 + 1 \times (5.4)^2] \\
&= \frac{2623.27}{24\pi} \approx 34.8\ cm^3
\end{aligned}
$$

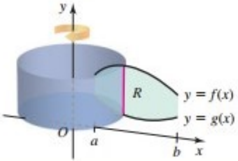
សេចក្តីសង្ខេប

Integration with respect to x



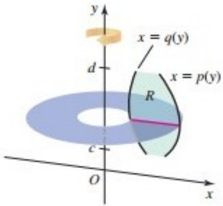
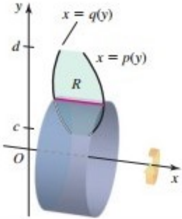
Disk / washer method about the x-axis
Disks / washers are *perpendicular* to the x-axis.

$$\int_a^b \pi(f(x)^2 - g(x)^2)\,dx$$



Shell method about the y-axis
Shells are *parallel* to the y-axis.

$$\int_a^b 2\pi x(f(x) - g(x))\,dx$$

Integration with respect to y	
	**Disk/washer method about the y-axis** Disks/washers are *perpendicular* to the y-axis. $$\int_c^d \pi(p(y)^2 - q(y)^2)\,dy$$
	**Shell method about the x-axis** Shells are *parallel* to the x-axis. $$\int_c^d 2\pi y(p(y) - q(y))\,dy$$

ការអនុវត្តផ្សេងទៀតនៃអាំងតេក្រាលកំនត់

ប្រវែងខ្សែកោង $y = f(x)$

សន្មតថាខ្សែកោងមួយឲ្យដោយ $y = f(x)$ ដែល f ជាអនុគមន៍មានដេរីវេទីមួយជាប់លើចន្លោះ $[a, b]$។ ប្រវែងនៃខ្សែកោងពី $(a, f(a))$ ទៅ $(b, f(b))$ គឺ

$$\begin{aligned} L &= \int_a^b \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} dx \\ &= \int_a^b \sqrt{1 + [f'(x)]^2} dx. \end{aligned}$$

ដូចគ្នាដែរចំពោះខ្សែកោងមួយឲ្យដោយ $x = g(y)$ ដែល g ជាអនុគមន៍មានដេរីវេទីមួយជាប់លើចន្លោះ $[c, d]$។ ប្រវែងនៃខ្សែកោងពី $(g(c), c)$ ទៅ $(g(d), d)$ គឺ

$$
\begin{aligned}
L &= \int_c^d \sqrt{1 + \left(\frac{dx}{dy}\right)^2}\, dy \\
&= \int_c^d \sqrt{1 + [g'(y)]^2}\, dy.
\end{aligned}
$$

ឧទាហរណ៍

រកប្រវែងនៃខ្សែកោងដែលកំនត់ដោយអនុគមន៍

$$y = \frac{4\sqrt{2}}{3}x^{3/2} - 1,\ 0 \leq x \leq 1.$$

យើងមាន

$$f(x) = \frac{4\sqrt{2}}{3}x^{3/2} - 1,$$

$$f'(x) = \frac{dy}{dx} = \frac{4\sqrt{2}}{3}.\frac{3}{2}x^{1/2} = 2\sqrt{2}x^{1/2}.$$

ប្រវែងនៃខ្សែកោងពី $x = 0$ ទៅ $x = 1$ គឺ

$$\begin{aligned} L &= \int_0^1 \sqrt{1 + [f'(x)]^2} dx \\ &= \int_0^1 \sqrt{1 + (2\sqrt{2}x^{1/2})^2} dx \\ &= \int_0^1 \sqrt{1 + 8x} dx \\ &= \left[\frac{2}{3} . \frac{1}{8} (1 + 8x)^{3/2}\right]_0^1 \\ &= \frac{13}{6}. \end{aligned}$$

ឧទាហរណ៍

រកប្រវែងនៃខ្សែកោងដែលកំនត់ដោយអនុគមន៍

$$f(x) = 2e^x + \frac{1}{8}e^{-x}$$

លើចន្លោះ $[0, \ln 2]$

យើងមាន

$$f'(x) = 2e^x - \frac{1}{8}e^{-x}$$

$$f'(x)^2 = 4e^{2x} - \frac{1}{2} + \frac{1}{64}e^{-2x}.$$

ប្រវែងនៃខ្សែកោងលើចន្លោះ $[0, \ln 2]$ គឺ

$$\begin{aligned}
L &= \int_0^{\ln 2} \sqrt{1 + [f'(x)]^2}dx \\
&= \int_0^{\ln 2} \sqrt{1 + (4e^{2x} - \frac{1}{2} + \frac{1}{64}e^{-2x})}dx \\
&= \int_0^{\ln 2} \sqrt{(2e^x + \frac{1}{8}e^{-x})^2}dx \\
&= \int_0^{\ln 2} (2e^x + \frac{1}{8}e^{-x})dx \\
&= \left[2e^x - \frac{1}{8}e^{-x}\right]_0^{\ln 2} \\
&= \frac{33}{16}.
\end{aligned}$$

ឧទាហរណ៍

រកប្រវែងនៃខ្សែកោង $y=(x/2)^{2/3}$ ពី $x=0$ ទៅ $x=2$ ។

យើងមានដេរីវេ

$$f'(x)=\frac{dy}{dx}=\frac{2}{3}\left(\frac{x}{2}\right)^{-1/3}\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{3}\left(\frac{2}{x}\right)^{1/3}$$

មិនកំនត់ត្រង់ 0 ដូចនេះរូបមន្តប្រវែងនៃខ្សែកោងអាស្រ័យនឹង x មិនអាចប្រើបានទេ។ ដូច្នេះយើងសរសេរសមីការជាទំរង់ x អាស្រ័យនឹង y៖

$$y=\left(\frac{x}{2}\right)^{2/3}\Leftrightarrow x=2y^{3/2}.$$

ប្រវែងខ្សែកោងដែលយើងចង់បានដូចគ្នាទៅនឹងប្រវែងខ្សែកោង $x=2y^{3/2}$ ពី $y=0$ ទៅ $y=1$។

យើងមាន

$$g(y) = 2y^{3/2},\ g'(y) = 3y^{1/2}$$

ដែលជាអនុគមន៍ជាប់លើ$[0,1]$។ ដូចនេះប្រវែងខ្សែកោង

$$\begin{aligned} L &= \int_0^1 \sqrt{1+[g'(y)]^2}dy \\ &= \int_0^1 \sqrt{1+9y}dy \\ &= \left[\frac{1}{9}.\frac{2}{3}(1+9y)^{3/2}\right]_0^1 \\ &= \frac{2}{27}(10\sqrt{10}-1) \approx 2.27 \end{aligned}$$

ក្រលាផ្ទៃមុខខាងបរិវត្តន៍

បើយើងបង្វិលដែនក្នុងប្លង់ដែលកំនត់ដោយក្រាបនៃអនុគមន៍លើចន្លោះណាមួយនោះយើងទទួលបានសូលីតបរិវត្តន៍។ ប៉ុន្តែបើយើងគ្រាន់តែបង្វិលខ្សែកោងព្រំដែននោះយើងទទួលបានមុខខាងបរិវត្តន៍ (មុខខាងដែលបង្កើតដោយការបង្វិលខ្សែកោងជុំវិញអ័ក្សបរិវត្តន៍)។
គោលបំណង៖ កំនត់ក្រលាផ្ទៃមុខខាងបរិវត្តន៍ដែលបង្កើតដោយការបង្វិលខ្សែកោងជុំវិញអ័ក្សបរិវត្តន៍។

បង្វិលជុំវិញអ័ក្សអាប់ស៊ីស

បើ $f(x) \geq 0$ ជាអនុគមន៍មានដេរីវេទីមួយជាប់លើ $[a, b]$ នោះក្រលាផ្ទៃមុខខាងបរិវត្តន៍បង្កើតដោយការបង្វិលក្រាបនៃ $y = f(x)$ ជុំវិញអ័ក្សអាប់ស៊ីសគឺ

$$\begin{aligned} S &= \int_a^b 2\pi y \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} dx \\ &= \int_a^b 2\pi f(x) \sqrt{1 + [f'(x)]^2} dx. \end{aligned}$$

ឧទាហរណ៍

រកក្រលាផ្ទៃមុខខាងបរិវត្តន៍បង្កើតដោយការបង្វិលក្រាបនៃ $y = 2\sqrt{x}$, $1 \le x \le 2$ ជុំវិញអ័ក្សអាប់ស៊ីស។

យើងមាន $y = 2\sqrt{x}$, $\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\sqrt{x}}$។ ដូចនេះ៖

$$
\begin{aligned}
S &= \int_1^2 2\pi y\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}dx = \int_1^2 2\pi.2\sqrt{x}\sqrt{1+\left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right)^2}dx \\
&= \int_1^2 2\pi.2\sqrt{x}\frac{\sqrt{x+1}}{\sqrt{x}}dx = 4\pi\int_1^2 \sqrt{x+1}dx \\
&= \left[4\pi.\frac{2}{3}(x+1)^{3/2}\right]_1^2 = \frac{8\pi}{3}(3\sqrt{3}-2\sqrt{2}).
\end{aligned}
$$

បង្វិលជុំវិញអ័ក្សអរដោនេ

បើ $x = g(y) \geq 0$ ជាអនុគមន៍មានដេរីវេទីមួយជាប់លើ $[c, d]$ នោះក្រលាផ្ទៃមុខខាងបរិវត្តន៍បង្កើតដោយការបង្វិលក្រាបនៃ $x = g(y)$ ជុំវិញអ័ក្សអរដោនេគឺ

$$\begin{aligned} S &= \int_c^d 2\pi x \sqrt{1 + \left(\frac{dx}{dy}\right)^2} dy \\ &= \int_c^d 2\pi g(y) \sqrt{1 + [g'(y)]^2} dy. \end{aligned}$$

ឧទាហរណ៍

រកក្រលាផ្ទៃមុខខាងបរិវត្តន៍បង្កើតដោយការបង្វិលក្រាបនៃ $x = 1 - y,\ 0 \leq y \leq 1$ ជុំវិញអ័ក្សអរដោនេ។

យើងមាន $x = 1 - y,\ \frac{dx}{dy} = -1$។ ដូចនេះ

$$\begin{aligned} S &= \int_0^1 2\pi x \sqrt{1 + \left(\frac{dx}{dy}\right)^2}\, dy \\ &= \int_0^1 2\pi(1 - y)\sqrt{2} dy \\ &= 2\pi\sqrt{2}\left[y - \frac{y^2}{2}\right]_0^1 \\ &= 2\pi\sqrt{2}\left(1 - \frac{1}{2}\right) = \pi\sqrt{2}. \end{aligned}$$

តម្លៃមធ្យមនៃអនុគមន៍

ដើម្បីគណនាតម្លៃមធ្យមនៃអនុគមន៍ $y = f(x), a \leq x \leq b$ យើងចែកចន្លោះ $[a, b]$ ជា n ចន្លោះរងដែលមានទទឹងស្មើៗគ្នា $\Delta x = (b-a)/n$ បន្ទាប់មកជ្រើសយកចំនុច $x_1^*, \ldots, x_n^*$ បន្តបន្ទាប់គ្នានៅក្នុងចន្លោះរងទាំងនោះរួចគណនាមធ្យមនៃ $f(x_1^*), \ldots, f(x_n^*)$៖

$$\frac{f(x_1^*) + \cdots + f(x_n^*)}{n}$$

ដោយសារ $\Delta x = (b-a)/n$ យើងបាន

$$\begin{aligned}
\frac{f(x_1^*) + \cdots + f(x_n^*)}{\frac{b-a}{\Delta x}} &= \frac{1}{b-a}[f(x_1^*)\Delta x + \cdots + f(x_n^*)\Delta x] \\
&= \frac{1}{b-a}\sum_{i=1}^{n} f(x_i^*)\Delta x
\end{aligned}$$

តាមនិយមន័យអាំងតេក្រាលកំនត់

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{b-a} \sum_{i=1}^{n} f(x_i^*)\Delta x = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x)dx.$$

ដូចនេះយើងកំនត់តម្លៃមធ្យមនៃ f លើចន្លោះ $[a,b]$ ដូចខាងក្រោម

$$f_{\text{ave}} = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x)dx.$$

ឧទាហរណ៍

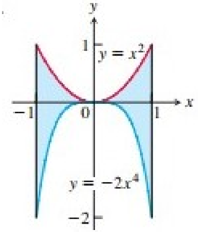
គណនាតម្លៃមធ្យមនៃអនុគមន៍ $f(x) = 1 + x^2$ លើចន្លោះ $[-1, 2]$។

$$\begin{aligned} f_{\text{ave}} &= \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx \\ &= \frac{1}{2-(-1)}\int_{-1}^{2}(1+x^2)dx \\ &= \frac{1}{3}\left[x + \frac{x^3}{3}\right]_{-1}^{2} \\ &= 2. \end{aligned}$$

លំហាត់អនុវត្តន៍

លំហាត់

រកក្រលាផ្ទៃនៃដែនដូចក្នុងរូប



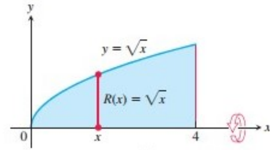
$$
\begin{aligned}
A &= \int_{-1}^{1} [f(x) - g(x)]dx \\
&= \int_{-1}^{1} [x^2 - (-2x^4)]dx \\
&= \int_{-1}^{1} (x^2 + 2x^4)dx \\
&= \left[\frac{x^3}{3} + \frac{2x^5}{5}\right]_{-1}^{1} \\
&= \frac{22}{15}.
\end{aligned}
$$

លំហាត់

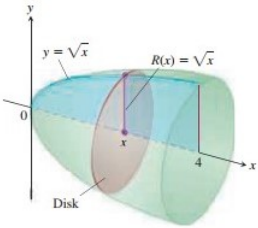
រកមាឌនៃសូលីតបរិវត្តន៍ដែលបានមកពីការបង្វិលដែនខណ្ឌដោយខ្សែកោង $y=\sqrt{x}, 0\leq x\leq 4$ និងអ័ក្សអាប់ស៊ីស ជុំវិញអ័ក្សអាប់ស៊ីស។

1. វិធីសាស្រ្តផ្ទៃមុខកាត់
2. វិធីសាស្រ្តគំរបស៊ីឡាំង

វិធីសាស្រ្តផ្ទៃមុខកាត់



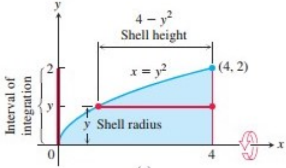
(a)



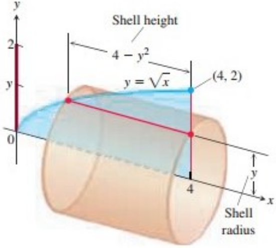
(b)

$$
\begin{aligned}
V &= \int_a^b A(x)dx \\
&= \int_0^4 \pi[\sqrt{x}]^2 dx \\
&= \pi \int_0^4 x dx \\
&= \pi \left[\frac{x^2}{2} \right]_0^4 \\
&= 8\pi.
\end{aligned}
$$

វិធីសាស្ត្រគំរបស៊ីឡាំង



(a)



(b)

$$
\begin{aligned}
V &= \int_a^b 2\pi(\text{កាំគំរប})(\text{កំពស់គំរប})dy \\
&= \int_0^2 2\pi y(4-y^2)dy \\
&= 2\pi \int_0^2 (4y-y^3)dy \\
&= \pi\left[2y^2 - \frac{y^4}{4}\right]_0^2 \\
&= 8\pi.
\end{aligned}
$$

លំហាត់

ប្រើក្បួន Simpson ចំពោះ $n = 10$ ដើម្បីប៉ាន់ស្មានប្រវែងនៃខ្សែកោងអ៊ីពែរបូល $xy = 1$ ពី $(1, 1)$ ទៅ $(2, \frac{1}{2})$។

យើងមាន

$$y = \frac{1}{x}, \quad \frac{dy}{dx} = -\frac{1}{x^2}$$

ដូច្នេះប្រវែងខ្សែកោងគឺ

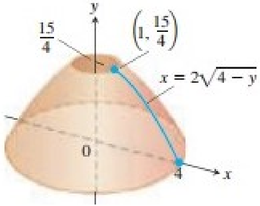
$$\begin{aligned} L &= \int_1^2 \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\, dx \\ &= \int_1^2 \sqrt{1 + \frac{1}{x^4}}\, dx \\ &= \int_1^2 \frac{\sqrt{x^4 + 1}}{x^2}\, dx. \end{aligned}$$

ប្រើក្បួន Simpson ចំពោះ $a = 1, b = 2, n = 10, \Delta x = 0.1$ និង $f(x) = \sqrt{1 + 1/x^4}$ យើងបាន

$$\begin{aligned}
L &= \int_1^2 \sqrt{1 + \frac{1}{x^4}} dx \\
&\approx \frac{0.1}{3}[f(1) + 4f(1.1) + 2f(1.2) + 4f(1.3) + \cdots + 2f(1.8) + 4f(1.9) + f(2)] \\
&\approx 1.132
\end{aligned}$$

លំហាត់

រកក្រលាផ្ទៃមុខខាងបរិវត្តន៍ដែលបានមកពីការបង្វិលខ្សែកោង $x = 2\sqrt{4-y}, 0 \leq y \leq 15/4$ ជុំវិញអ័ក្សអរដោនេ។



យើងមាន

$$\frac{dx}{dy} = -\frac{1}{\sqrt{4-y}}$$

ដូចនេះក្រលាផ្ទៃមុខខាងបរិវត្តន៍គឺ

$$\begin{aligned} S &= \int_0^{15/4} 2\pi x \sqrt{1 + \left(\frac{dx}{dy}\right)^2} dy \\ &= \int_0^{15/4} 2\pi . 2\sqrt{4-y}\sqrt{1 + \frac{1}{4-y}} dy \\ &= 4\pi \int_0^{15/4} \sqrt{(4-y)+1} dy \\ &= 4\pi \int_0^{15/4} \sqrt{5-y} dy \\ &= \left[-4\pi . \frac{2}{3}(5-y)^{3/2}\right]_0^{15/4} = \frac{35\pi\sqrt{5}}{3}. \end{aligned}$$

បញ្ចប់ឆមាសត្រឹមមេរៀននេះ
អបអរសាទរគ្នាយើង!