关于 Poisson Editing 的实验报告

SA20001911 王克淳

1. 基于泊松方程的插值方法

泊松图像编辑的原理即是，在满足一定边界的条件下让需要求解的二维函数f在区域Ω中的梯度场与参考梯度场$\mathbf{v}$尽可能相似，同时需要满足的边界条件就是函数值在边界上与目标图像f^*的的取值相等，这就是狄利克雷边界条件。用数学方式表示就是：

$$\min_f \iint_\Omega |\nabla f - \mathbf{v}|^2 \text{ with } f|_{\partial\Omega} = f^*|_{\partial\Omega},$$

该方程的解满足欧拉-拉格朗日方程：

$$\Delta f = \operatorname{div}\mathbf{v} \text{ over } \Omega, \text{ with } f|_{\partial\Omega} = f^*|_{\partial\Omega},$$

利用该方程的解，可以得到图像所需要填充的区域内的 RGB 的值，从而得到填充后的图像结果。如果所使用的梯度场来自另外一个图片，则最终结果可以将两个图片进行较好的融合，在边界处不会有明显的痕迹。

1.1 算法说明

由于图像是一个离散的矩阵，需要在求解的时候使用泊松方程的离散形式，如下：

$$|N_p|f_p - \sum_{q\in N_p\cap\Omega} f_q = \sum_{q\in N_p\cap\partial\Omega} f_q^* + \sum_{q\in N_p} v_{pq}.$$

其中 Np 表示 p 点相邻的 4 个点组成的集合。Vpq 表示给定的向量场。

该离散形式来自于对欧拉-拉格朗日方程做有限差分，等式左侧就是散度的差分形式。

对于 Vpq，论文给出了两种形式：

$$\text{for all } \langle p,q\rangle,\ v_{pq} = g_p - g_q$$

$$v_{pq} = \begin{cases} f_p^* - f_q^* & \text{if } |f_p^* - f_q^*| > |g_p - g_q|, \\ g_p - g_q & \text{otherwise}, \end{cases}$$

其中，第二种混合梯度融合更能保留背景图片中的纹理细节。若想要保留背景图片的细节，则第二种形式更好。

1.2 具体算法

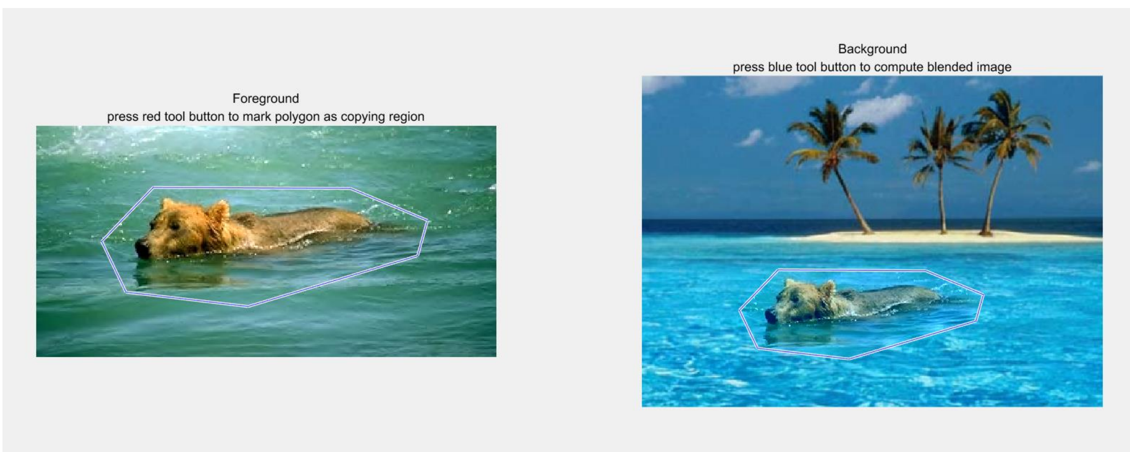
在导入背景图片后首先要确定要融合的区域，在代码中定义了一个新的 map 矩阵来判断具体的融合区域的位置。

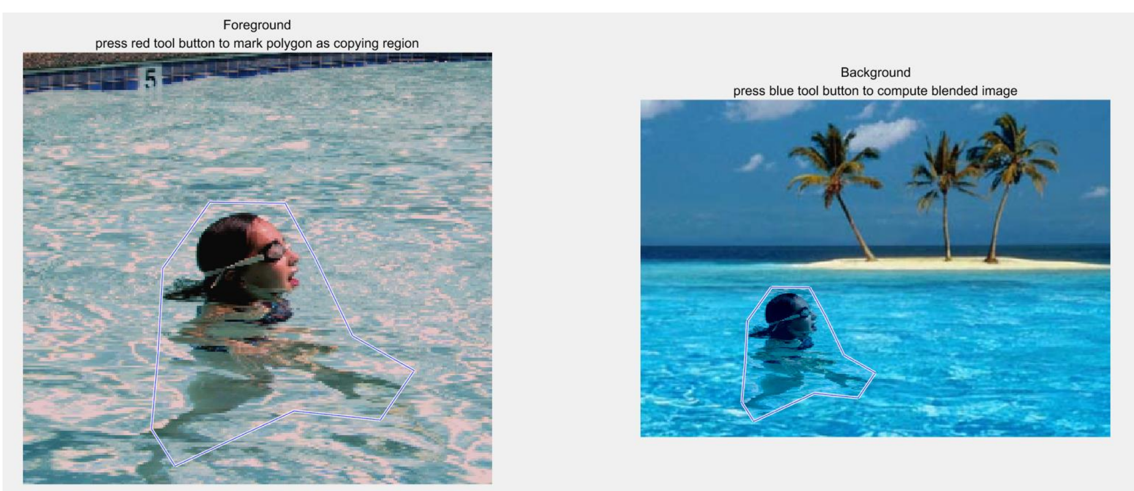
然后构造线性方程组 AX = B，根据上述的离散形式的泊松方程，对融合区域内部所有点构造线性方程组的系数矩阵 A，然后利用混合梯度融合方法的向量场的表达式确定 B 的值。

最后求解线性方程组，然后确定融合区域的 RGB 值即可。

1.3 运行结果

在选取特定区域的情况下的融合结果：





1.4 结果分析

可以看出， 泊松融合在这里起到了较好的效果，融合区域的边界基本看不出来模糊的痕迹，与背景图片的融合效果较好。

2. 关于线性方程组的求解

在上述方法中，求解线性方程组较为耗时，但是可以看出，在确定了源区域之后，线性方程组的系数矩阵已经固定。可以通过对系数矩阵进行预处理来节省后续时间。

2.1 矩阵分解

可以对系数矩阵 A 进行分解 QR 分解，由于 Q 是正交矩阵，R 是一个上三角矩阵，这时只用求解$RX = Q^T B$，即可，由于 Q 的正交性，不需要对 Q 求逆，且 R 是一个上三角阵，解上三角方程的时间复杂度仅为 O(n^2)。

这样在源区域不改变，仅改变融合区域时，可以节省程序的运行时间。