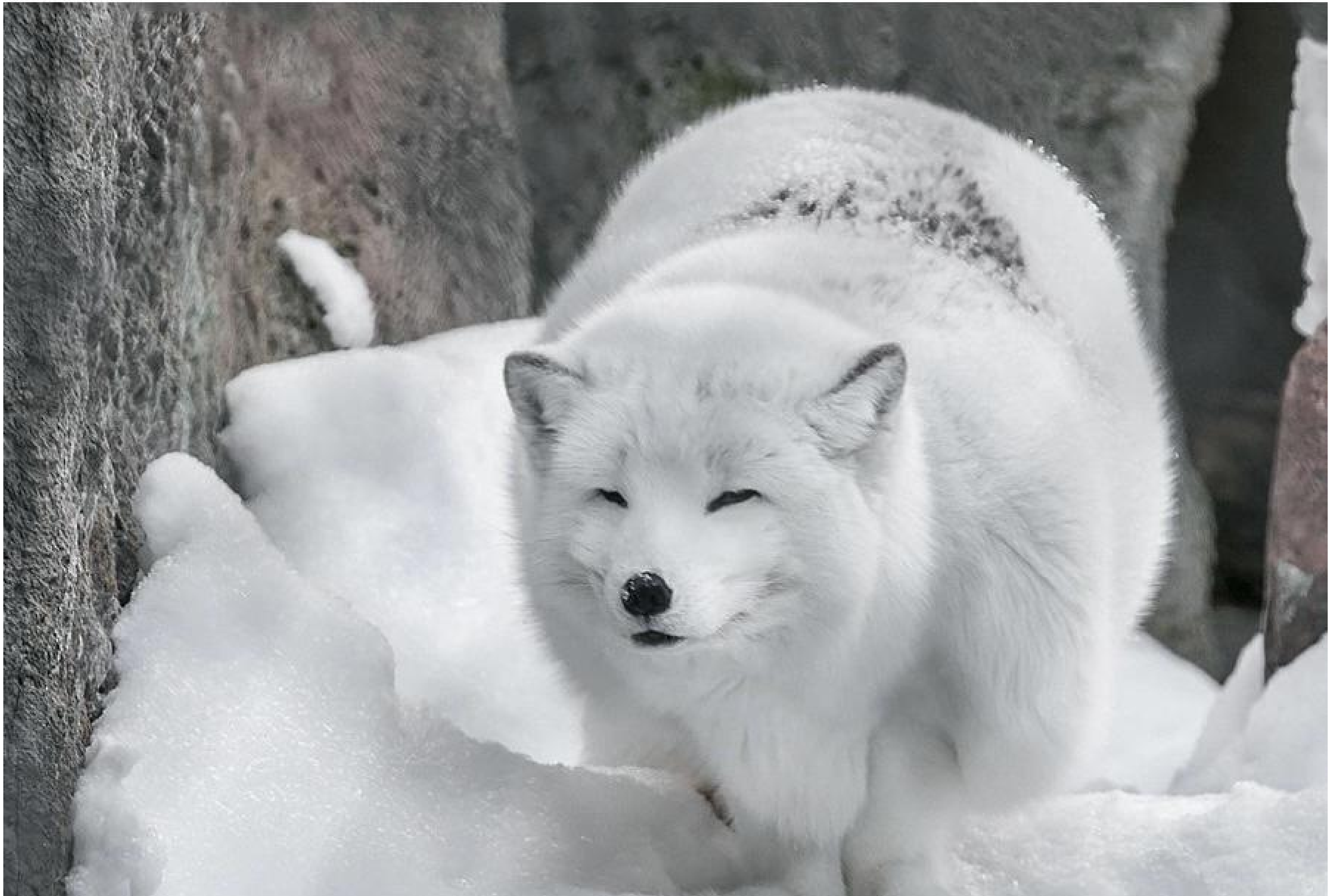
# Так выглядит полный писец



| Понятие | Неориентированный | Ориентированный |
|---|---|---|
| Определение | G = (V, E), где<br>V - множество вершин (узлов)<br>E - множество неупорядоченных пар на V (ребер) | G = (V, E), где<br>V - множество вершин (узлов)<br>E - множество упорядоченных пар на V (дуг) |
| Смежные вершины | Вершины, соединенные ребром *u* \|-\| *v.* | Вершины, соединенные дугой u -> v. |
| Названия вершин | Если u \|-\| v, то это концы ребра | Если u -> v, то это u – начало дуги, v – конец дуги<br><br>Петля - дуга, начало и конец которой совпадают. |
| Отношение непосредственной достижимости | u \|-\| v | u -> v |
| Инцидентность | Ребро e инцидентно по вершине v, если она является одним из его концов | Дугу наз инцидентной, если она заходит в v или исходит из v.<br><br>Дугу (u, v) наз заходящей в v и исходящей из u. |
| Степень вершины | Число всех инцидентных ей ребер.<br>dg v | Сумма всех полустепеней захода и исхода.<br>dg(v)<br><br>Полустепень захода – число заходящих в нее дуг dg-(v)<br>Полустепень исхода – число исходящих дуг dg+(v) |
| Про соседние вершины | Г(v) = {x : x \|-\| v} множество смежных вершин<br>dg(v) = \|Г(v)\| | Г(x) = {x : x -> v} множество преемников вершины x<br>Г-1(x) = {x : v -> x} мн предшественников вершины x<br><br>dg+(x) = \|Г(x)\| dg-(v) = \|Г-1(x)\| |

| | | |
|---|---|---|
| Цепь/Путь | Цепь – последовательность вершин такая, что vi \|-\| vi+1, для любого i, если i + 1 существует. | Путь – последовательность вершин такая, что vi -> vi+1, для любого i, если i + 1 существует. |
| Длина цепи/пути | Количество ребер в конечной цепи | Количество дуг  в конечном пути |
| Достижимость | Вершина v достижима из u, если существует цепь, начало которой совпадает с u, а конец с v | Вершина v достижима из u, если существует путь, начало которой совпадает с u, а конец с v |
| Отношение достижимости | \|-\|*<br>Рефлексивно, симметрично, транзитивно (отношение эквивалентности)<br><br>Также явл рефлексивно-транзитивным замыканием отношения \|-\| непосредственной достижимости | ->*<br>Рефлексивно, транзитивно, не антисимметрично (из того, что x->*y и y->*x, не следует, что x == y). То есть это отношение предпорядка.<br><br>Тоже самое, только для -> |
| Простая цепь/путь | – цепь, все вершины которой попарно различны и все ребра различны (кроме мб 1-ой и последней) | – путь, все вершины которого попарно различны (кроме мб 1-ой и последней) |
| Цикл/контур | – простая цепь ненулевой длины с совпадающими концами | – простой путь ненулевой длины с совпадающими концами |
| Замкнутая цепь/путь | – произвольная цепь ненулевой длины с совпадающими концами | – произвольный путь ненулевой длины с совпадающими концами |
| Ациклический/бесконтурный | – неорграф без циклов | – орграф без контуров |

| | | |
|---|---|---|
| Подграф | Если $V1 \subseteq V$ и $E1 \subseteq E$ (выбрали какие-то вершины и какие-то ребра) | |
| Собственный подграф | подграф с $V1 \subset V$ или $E1 \subset E$ (выбрали какие-то вершины и какие-то ребра, но обязательно не все сразу) | |
| Остовный подграф | $V1 == V$ (выбрали все вершины и какие-то ребра) | |
| Подграф, порожденный множеством вершин $V1 \subseteq V$ | Каждое ребро ттт принадлежит $E1 \subseteq E$, когда его концы принадлежат V1 (причем должны включаться все такие ребра, концы которых принадлежат V1)<br><br>(выбрали какие-то вершины и все ребра, связанные с ними) | |
| Максимальный подграф | $G1 \subseteq G$ наз максимальным подграфом, обладающим данным свойством P, если он не является собственным подграфом никакого другого подграфа G, обладающего свойством P | |
| | | |
| Связный | Любые две вершины соединены цепью | Для любых двух его вершин u, v вершина v достижима из u или вершина u достижима из v |
| Компонента связности | Максимальный связный подграф | |
| Сильно связный | – | – для любых двух вершин, первая достижима из второй, вторая из первой |
| Бикомпонента | – | – максимально сильно связный подграф.<br>Две различные никогда не пересекаются. |
| Отношение взаимной достижимости | – | – u->*v и v->*u.<br>Рефлексивно, симметрично, транзитивно (отношение эквивалентности) |

| | | |
|---|---|---|
| Ассоциированность | Неорграф G1 ассоциирован с орграфом G , если их множества вершин совпадают, а пара {u, v} образует ребро ттт, когда $u \neq v$ и хотя бы в какую-то сторону ведет дуга (при переходе все петли исчезают)<br><br>$V1 == V$<br>$E1 = \{\{u, v\}: (u, v) \in E \text{ или } (v, u) \in E, u \neq v\}$ | |
| Слабо связный | – | ассоциированный неорграф связный |
| Компонента слабой связанности | – | максимальный слабо связный подграф |
| | | |
| Взвешенный (размеченный) граф | Каждому ребру сопоставлено некоторое действительное число | |
| Вес (метка) | Некоторое число, сопоставленное ребру | |

Способы задания графов:

- матрица инциденций (по строкам стоят пронумерованные ребра, по столбцам вершины, 1 - выходит, -1 - исходит, 0 - иначе)
  Скорость решения задачи поиска окружения o(nm)
- матрица смежности вершин (булева матрица)
  Скорость решения задачи поиска окружения o(n^2)
- списки смежности (в произвольном порядке в список сохраняются номера смежных вершин)
- массив лидеров (банальная хэш-таблица вместе с односвязными списками, начало каждого - соотв вершина)
- матрица достижимости (1, если достижима, иначе 0)

Остальные понятия есть [здесь]

**Задача транзитивного замыкания ориентированного графа** – для графа найти матрицу достижимости
**Задача о кратчайших расстояниях** – вычисление наименьших расстояний между всеми парами вершин
**Задача о перечислении путей** – перечесление всех путей между двумя произвольными вершинами

**Расстояние от v до w по пути S** – сумма меток дуг, входящих в этот путь
**Наименьшее расстояние** – минимальное расстояние между вершинами по всем возможным путям

**Взвешенный (размеченный) ориентированный граф** – пара W = (G, φ), где G = (V, E) – обычный ориентированный граф, а $\varphi\colon E \to R$ – функция разметки (весовая функция) со значениями в некотором идемпотентном полукольце $R$ = (R, +, . , 0, 1), причем $(\forall e \in E)(\varphi(e) \neq 0)$

**Матрица меток дуг** – матрица, элемент $a_{ij}$ которой равен $\varphi((i, j))$ весовой функции на дуге (i, j), если такая дуга существует, иначе нулю полукольца.

**Общая задача о путях** – задача вычисления матрицы $A^*$ для ориентированного графа, размеченного над произвольным полукольцом с итерацией, в частности над замкнутым полукольцом.

**Метка пути** – произведение в полукольце R меток входящих в путь дуг в порядке их следования (для пути ненулевой длины) и единица полукольца для пути нулевой длины

**Стоимость прохождения** – сумма в полукольце R меток всех путей, ведущих из i-той вершины в j

Деревья

Виды:

- **Неориентированное дерево** – связный, ациклический неорграф.
- **Ориентированное дерево** – бесконтурный орграф, в котором у каждой вершины не более одного родителя и в котором существует одна вершина, не имеющая родителя, называемая корнем. (нужно заменить слово родитель на полустепень захода)

Отношения:

- **Предок - потомок** – существует путь из u в v.
- **Отец - сын** – потомок - предок, длина пути == 1
- **Корень** - вершина, не имеющая предков.
- **Лист** – вершина, не имеющая потомков.
- **Поддерево** – подграф дерева, являющийся деревом
- **Куст** – ориентированное дерево, у которого каждая вершина, отличная от корня, есть лист

Лес:

- **Неориентированный лес** – произвольный ациклический граф.
- **Ориентированный лес** – каждая слабая компонента ориентированного графа является ориентированным деревом.

“Характеристики” вершин для ориент дерева:

- **Высота дерева** – наибольшая длина пути из корня в лист
- **Глубина вершины** – длина пути из корня в вершину
- **Высота вершины** – наибольшая длина пути из вершины в лист
- **Уровень вершины** – разность между высотой дерева и глубиной вершины

Бинарные деревья:

- **Бинарное дерево** – полустепень исхода любой вершины не больше 2
- **Полное бинарное дерево** – из любой вершины, не являющейся листом исходят ровно две дуги, уровни всех листьев совпадают

(Бинарное ориентированное дерево с n листьями имеет высоту, не меньшую log2 n)

Остовность:

- **Остовное дерево** – любой остовный подграф, являющийся деревом
- **Остовный лес** – любой остовный подграф, являющийся лесом
- **Остовное дерево наименьшего веса** – остовное дерево с наименьшей суммой весов (вычисляется алгоритмом Краскала)
- **Глубинный остовный лес** – максимальный остовный лес, находимый с помощью поиска в глубину.

Дуги:

- **Древесная дуга T** – дуга, ведущая от отца к сыну в глубинном остовном лесу
- **Прямая дуга F -** дуга, ведущая от подлинного предка к подлинному потомку, но не от отца к сыну, в глубинном остовном лесу
- **Обратная дуга B** – от потомка к предку, включая петли
- **Поперечные дуги C** – не являются ни древесными, ни прямыми, ни обратными

**Критерий бесконтурности**: орграф  бесконтурный ттт, когда при поиске в глубину от некоторой начальной вершины множество обратных дуг оказывается пустым.

**Фундаментальный цикл** – цикл, содержащий только одно обратное ребро

**Алфавит** – непустое конечное множество V = {a1..an}, элементы которого называются буквами (символами).

**Слово (цепочка)** – произвольный кортеж из множества V^k
**Пустое слово** – пустой кортеж
**Длина слова** – число компонент кортежа |w| = k, если w ∈ V^k

Лексикографический номер слова считается как перевод в систему счисления *caa = 3^2 * 3 + 3^1 * 1 + 3^0 * 1 = 31*, в алфавите {a, b, c}

**Множество всех слов** – V* (итерация)
**Множество всех непустых слов** – V+ (положительная итерация)

**Конкатенация слов** (соединение) . :
Если $x = x(1)x(2)..x(k)$ и $y = y(1)..y(m)$, то соединение $xy = x(1)..x(k)y(1)..x(m)$
При этом $|xy| = |x| + |y|$

Свойства:
- $(xy)z = x(yz)$
- $xy \neq yx$
- $\lambda x = x\lambda = x$

$(V^*, . , \lambda)$ – моноид

Вхождение слова $x \in V^*$ в $y \in V^*$ – упорядоченная тройка слов (u, x, v) такая, что y = uxv.
u – левое вхождение, x – основа вхождения, v – правое вхождение

x является началом (префиксом) y, если y = xz, и концом (постфиксом) если y = zx

$x \subseteq y$ – x входит в y, ⊆ – отношение порядка (только у ⊆ должны быть квадратные края)

**Язык** в алфавите V – произвольное подмножество V*

**Операции с языками:**

- Теоретико-множественные операции $\cap \cup \setminus \vartriangle$ –
- Соединением (конкатенацией) языков L1 и L2 называют язык L1L2, состоящий из всех возможных соединений слов xy, в которых x принадлежит L1, а y принадлежит L2.
  Свойства:
  - $L1 \neq L2$
  - $K(LM) = (KL)M$
  - $\{\lambda\}L = L\{\lambda\} = L$, $\{\lambda\}$ – язык из одного пустого слова
  - $2^{v^*} = \{L : L \subseteq V^*\}$ – множество всех языков в алфавите V
  - $\alpha = (2^{v^*}, \cup, \cdot, \varnothing, \{\lambda\})$
- Возведение языка в произвольную степень L0 = {λ}, $L^n = L^{n-1}L$

**Итерация языка** – объединение всех степеней $L^* = \bigcup_{n=0}^{\infty} L^n$

**Позитивная итерация языка** – объединение всех степеней, начиная с первой $L^+ = \bigcup_{n=1}^{\infty} L^n$

**Теор. Алгебра** $\alpha$**, есть замкнутое полукольцо.**

$K \leq L \Leftrightarrow K \cup L = L \Leftrightarrow K \subseteq L$

$\sup L_n = \bigcup_{n=1}^{\infty} L_n = \{x : (\exists n)(x \in L_n)\}$

$K \cdot \bigcup_{n=1}^{\infty} L_n = \bigcup_{n=1}^{\infty} K L_n$

$(\bigcup_{n=1}^{\infty} L_n) K = \bigcup_{n=1}^{\infty} (L_n K)$

$x \in K \cdot \bigcup_{n=1}^{\infty} L_n \Rightarrow x = yz$, где $y \in K$, $z \in \bigcup_{n=1}^{\infty} L_n \Rightarrow$

$\Rightarrow y \in K, (\exists n)(z \in L_n) \Rightarrow (\exists n)(yz = x \in KL_n) \Rightarrow x \in \bigcup^{\infty} KL_n$

*Используя аксиомы полукольца:*

1) $K \cup (L \cup M) = (K \cup L) \cup M$

2) $K \cup L = L \cup K$

3) $K \cup \varnothing = K$

4) $K \cup K = K$

5) $K(LM) = (KL)M$

6) $L\{\lambda\} = \{\lambda\}L = L$

7) $K(L \cup M) = KL \cup KM$

***Седьмое докажем:***

$x \in K(L \cup M) \Rightarrow x = yz, y \in K, z \in L \cup M \Rightarrow$

$\Rightarrow (y \in K, z \in L) \vee (y \in K, z \in M) \Rightarrow yz \in KL \vee yz \in KM \Rightarrow$

$\Rightarrow yz = x \in KL \cup KM$

8) $L\varnothing = \varnothing L = \varnothing$

Пусть $\Sigma$ — конечный алфавит. Регулярными языками в алфавите $\Sigma$ называются множества слов, определяемые по индукции следующим образом:

1. Пустое множество ($\varnothing$) является регулярным языком.
2. Множество, состоящее из одной лишь пустой строки ($\{\varepsilon\}$) является регулярным языком.
3. Множество, состоящее из одного однобуквенного слова ($\{a\}$, где $a \in \Sigma$) является регулярным языком.
4. Если $\alpha$ и $\beta$ — регулярные языки, то их объединение ($\alpha \cup \beta$), конкатенация ($\alpha\beta$) и взятие звёздочки Клини ($\alpha^*$) тоже являются регулярными языками.
5. Других регулярных языков нет.

Конечный автомат – ориентированный граф, размеченный над полукольцом R(V) регулярных языков в алфавите V с выделенной вершиной q0, которая называется начальной, и с выделенным подмножеством вершин F, каждый элемент которого называется заключительной вершиной.

M = (Q, E, $\varphi$, $q_0$, F)

Q – множество состояний
E – множество дуг
$\varphi$ – функция разметки
$q_0$ – начальное состояние
F – подмножество заключительных состояний

Функция переходов – множество всех состояний, в которые из данного состояния возможен переход по данному входному символу или пустой цепочке.

$\delta\colon Q \times (V \cup \{\lambda\}) \to 2^Q$
$\delta(q, a) = \{r\colon q \to_a r\}$

через функцию переходов автомат можно задавать следующим образом M = (V, E, $q_0$, F, $\delta$)

Полностью определенный автомат – из каждого состояния по каждому символу есть переход в какое-то состояние.

Детерминированный автомат – нет $\lambda$ и из каждого состояния по любому символу есть переход ровно в одно состояние

Стоимость прохождения – объединение меток всех путей. (то есть матрица стоимостей – язык)

Язык конечного автомата – множество всех цепочек во входном алфавите, читаемых на некотором пути из начального состояния в конечное

Два конечных автомата называют эквивалентными, если их языки совпадают.

1. Теорема о равенстве порядка образующего элемента конечной циклической группы порядку группы (формулировка и доказательство.)
2. Индуктивное упорядоченное множество. Теорема о неподвижной точке (с доказательством).
3. Кольца. Аддитивная группа и мультипликативный моноид кольца. Теорема о тождествах кольца (аннулирующем свойстве нуля, свойстве обратного по сложению при умножении, дистрибутивности умножения относительно вычитания).
4. Область целостности. Теорема о конечной области целостности (с доказательством). Поля вычетов.
5. Непрерывность операции сложения в замкнутом полукольце. Теорема о наименьшем решении линейного уравнения в замкнутом полукольце.
6. Смежные классы подгруппы по элементу, теорема Лагранжа.

7. Поиск в глубину в орграфе. Классификация дуг. Критерий бесконтурности.
8. Поиск в ширину (алгоритм волнового фронта и поиск в размеченном орграфе).
9. Задача о путях в размеченных орграфах и метод ее решения (с доказательством основной теоремы).
10. Алгоритм вычисления кратчайшего расстояния в размеченном орграфе от заданной вершины на основе поиска в ширину.

11. Сформулируйте и докажите лемму о разрастании для регулярных языков и ее следствие.

12. Сформулируйте теорему Клини. Опишите алгоритм синтеза КА по регулярному выражению.

13. Сформулируйте теорему о детерминизации КА. Опишите алгоритм построения КА без λ-переходов по исходному КА.

14. Однородные линейные рекуррентные соотношения. Доказательство теоремы о структуре общего решения (любое решение есть линейная комбинация фундаментальных решений).
15. Неоднородные линейные рекуррентные соотношения (формулировка теоремы о структуре общего решения, принцип суперпозиции; доказательство теоремы о структуре общего решения).
16. Вывод формулы включений - исключений.

17. Лемма Бернсайда (с доказательством).

18. Цикловой индекс группы. Формулировка теоремы Пойа.

17. Сформулируйте и докажите теорему о минимизации КА. Определите множество состояний минимального КА.

12. Алгоритм Дейкстры.
13. Задача о путях в размеченном орграфе и ее решение (доказать основную теорему).