Modelagem Computational

Estudo da Série de Taylor utilizando o Python

Gisele Tessari Santos, D.Sc.

Conhecendo a Série de Taylor

- Funções podem ser aproximadas por uma série de Taylor.
- A série de Taylor fornece meios para predizer o valor de uma função em um ponto a partir de um ponto conhecido e das suas derivadas.
- Conheça então, a série de Taylor:

Termo de ordem 0

Termo de 2ª ordem = captura alguma da curvatura da função

$$f(x_{i+1}) \approx f(x_i) + \underbrace{\frac{df(x_i)}{dx}\frac{(x_{i+1}-x_i)}{1!}}_{\text{Termo de 1ª ordem}} + \overbrace{\frac{d^2 f(x_i)}{dx^2}\frac{(x_{i+1}-x_i)^2}{2!}}^{\text{Termo de 2ª ordem}} + \ldots + \frac{d^n f(x_i)}{dx^n}\frac{(x_{i+1}-x_i)^n}{n!}$$

Termo de 1ª ordem = inclinação x distância entre os pontos

→ forma de uma reta!

Aplicando a Série de Taylor

- Vamos utilizar o seguinte polinômio como referência para nossa aplicação:

$$f(x) = x^3 - 0,75x^2 + 3$$

- Escolha um ponto inicial $f(x_i)$ e final $f(x_{i+1})$ para a aplicação da série.
- Nesta aplicação serão utilizados 0,5 e 1, respectivamente.

Inserindo os pontos no gráfico

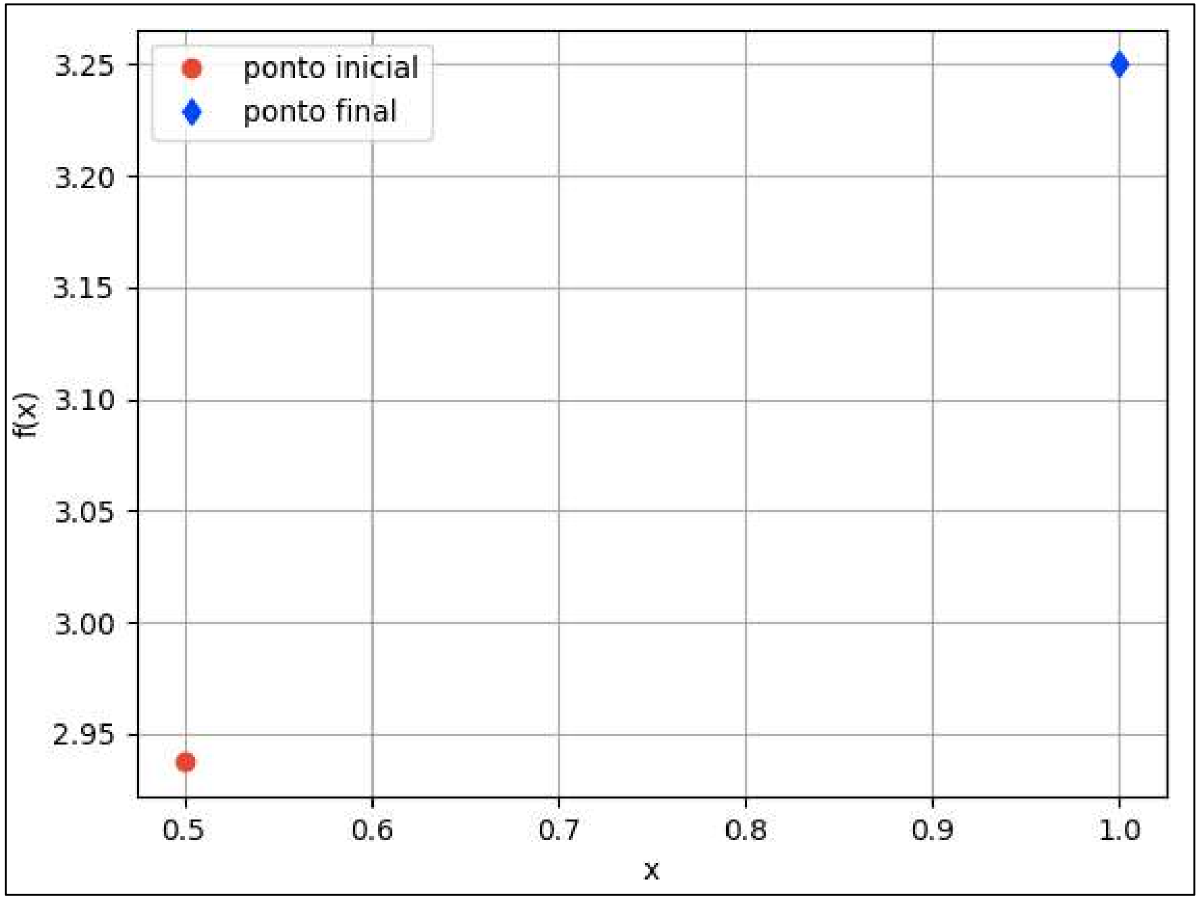
- Os pontos iniciais serão plotados no gráfico por meio do código em Python a seguir:

```
from matplotlib.pyplot import plot,grid,legend

f=lambda x: x**3 - 0.75*x**2 + 3

xinicial=0.5
xfinal=1
plot(xinicial,f(xinicial),'ro',label='ponto inicial')
plot(xfinal,f(xfinal),'bd',label='ponto final')
grid()
legend()
xlabel('x')
ylabel('f(x)')
```

Veja o gráfico inicial

Observe os pontos iniciais e finais para f(x)!

Eles serão a nossa referência para a aplicação da série para calcular o valor conhecido em x_{i+1}.



Utilizando o termo de primeira ordem da série...

- Utilize os valores de x_i e x_{i+1} para calcular o seguinte termo de primeira ordem da série.

$$f(1) \cong f(0,5) + f'(0,5)\frac{(1-0,5)}{1} \cong 2,9375$$

- Calcule o erro da predição feita pelo primeiro termo da série (erro verdadeiro – ε_t).

$$erro = \frac{f(1) - TaylorOrdem1}{f(1)} = \frac{3,25 - 2,937}{3,25} = 0,0961 \quad ou \quad 9,6\%$$

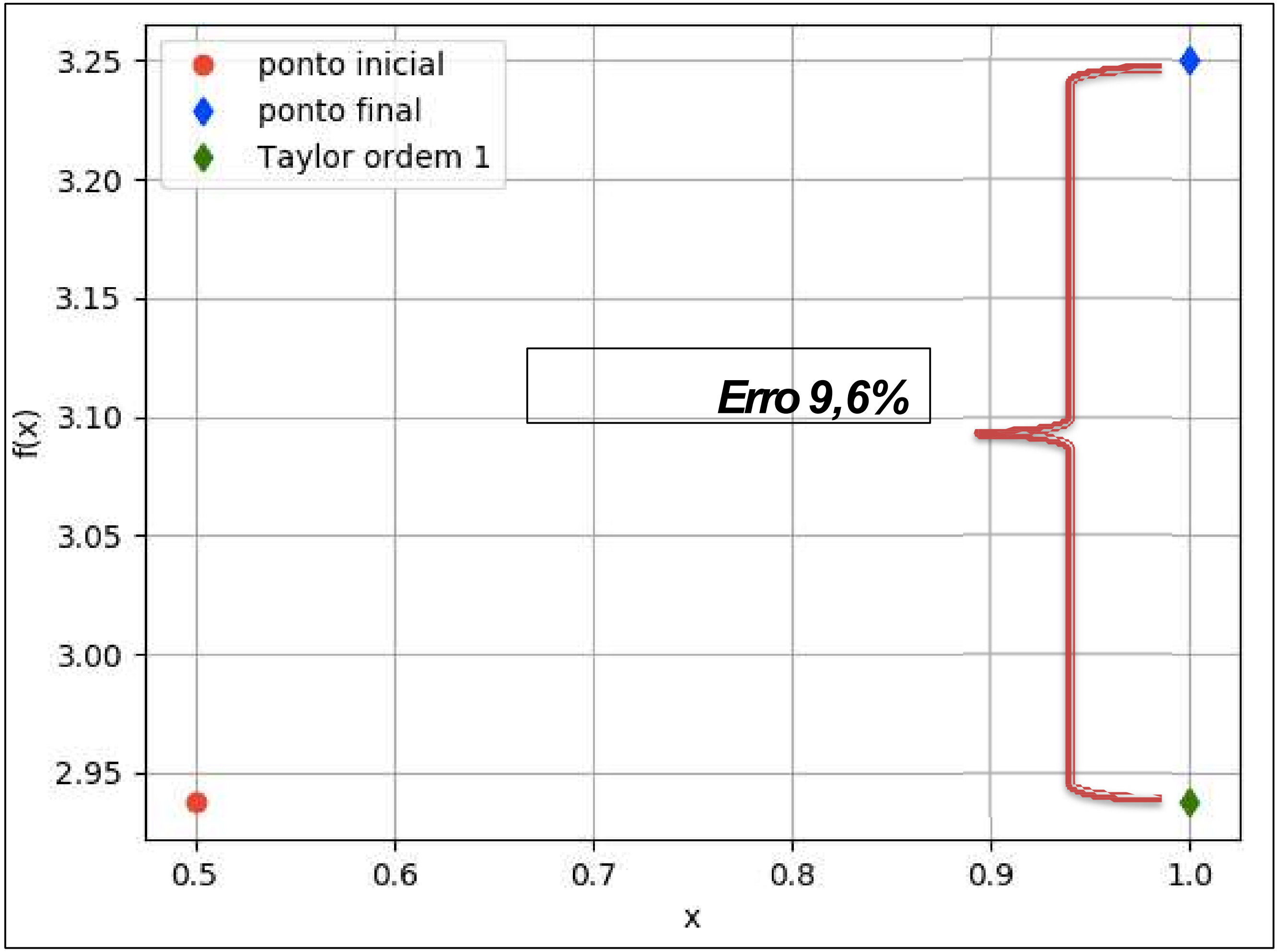
Visualização da solução gráfica

- Utilizaremos o código ao lado para gerar a vizualização gráfica da previsão de primeira ordem feita.

```
from matplotlib.pyplot import plot,grid,legend,xlabel,ylabel

f=lambda x: x**3 - 0.75*x**2 + 3
df=lambda x: 3*x**2 - 1.5*x

xinicial=0.5
xfinal=1.0
plot(xinicial,f(xinicial),'ro',label='ponto inicial')
plot(xfinal,f(xfinal),'bd',label='ponto final')
taylor1=f(xinicial)+ (df(xinicial)*(xfinal-xinicial))
plot(xfinal,taylor1,'gd',label='Taylor ordem 1')
xlabel('x')
ylabel('f(x)')
grid()
legend()
```

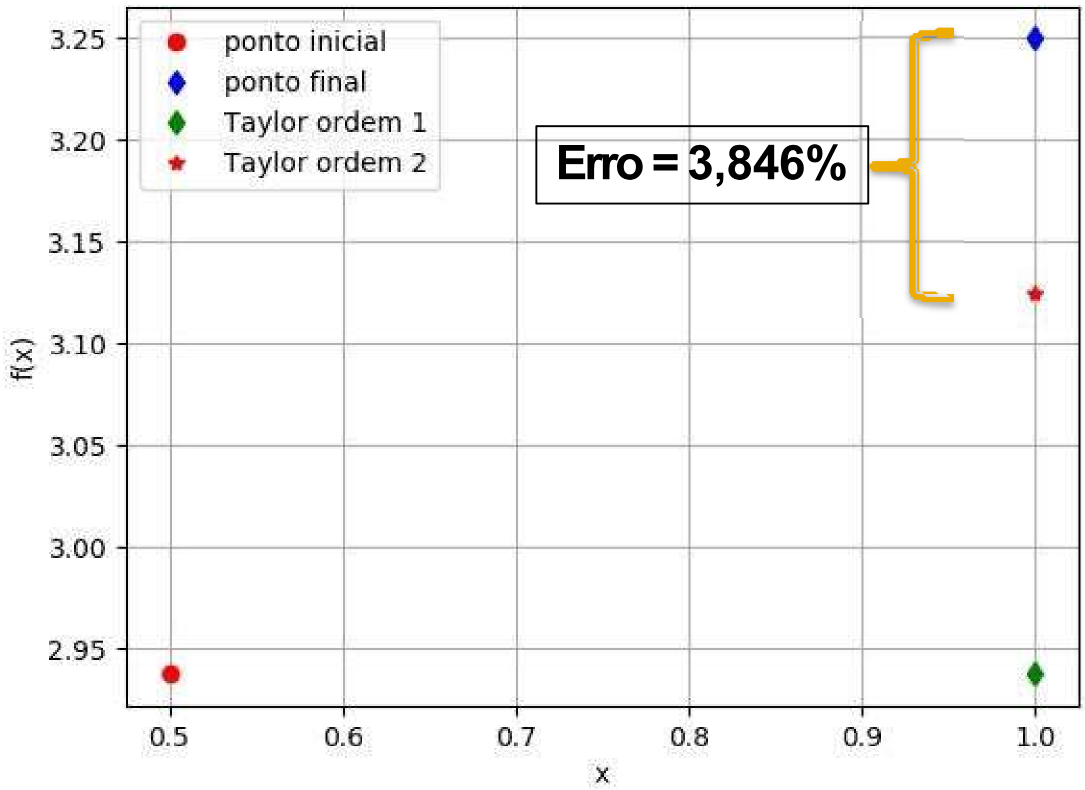
Atenção para os novos comandos inseridos !!!

Solução gráfica – Taylor Ordem 1



Novo Teste | Aproximação de Ordem 2

- Repita os procedimentos feitos para a aproximação de ordem 1 e calcule uma aproximação de ordem 2 !
- Você deverá encontrar o seguinte resultado da figura ao lado!



Novo Teste

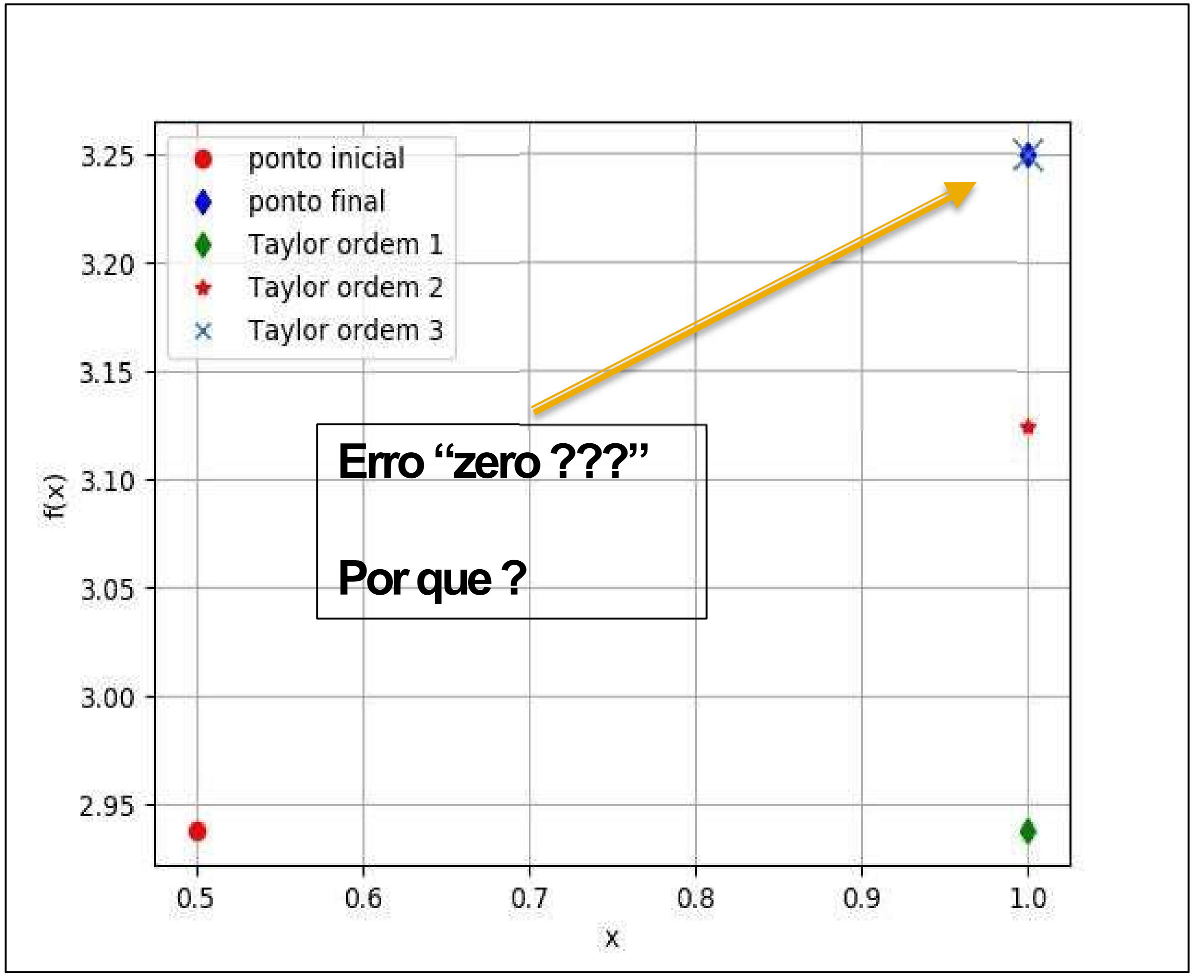
Aproximação de Ordem 3

- Repita os procedimentos feitos para a aproximação de ordem 2 e calcule uma aproximação de ordem 3!
- Você deverá encontrar o seguinte resultado da figura ao lado!

Novo Teste

Aproximação de Ordem 3

- A expansão em série de Taylor de ordem n será exata para um polinômio de grau n.
- Para outras funções diferenciáveis (portanto, contínuas), como exponenciais e funções senoidais, um número finito de termos não resultará em uma estimativa exata.
- Cada termo adicional contribui com alguma melhora, ainda que pequena, para a aproximação.



Experimento final

- Utilize a série de Taylor para realizar cálculos de ordens 1 a 3 para a função $f(x) = \ln(x)$. Utilize como ponto inicial x_i e final x_{i+1} os valores 1,5 e 2.
  - O que você espera como resultado final?
  - Quais foram os resultados obtidos?
  - Faça diferentes testes com diferentes valores de x_{i+1}. Qual o efeito?
  - Mostre o erro obtido e a solução gráfica para todos os testes.

O erro na série de Taylor...

- Suponha que a expansão em série de Taylor seja truncada depois do termo de ordem zero:

$$f(x_{i+1}) \approx f(x_i)$$

- Consequentemente, teremos como resto a seguinte expressão:

$$R \approx \frac{df(x_i)}{dx}\frac{(x_{i+1}-x_i)}{1!} + \frac{d^2 f(x_i)}{dx^2}\frac{(x_{i+1}-x_i)^2}{2!} + \ldots + \frac{d^n f(x_i)}{dx^n}\frac{(x_{i+1}-x_i)^n}{n!}$$

O erro na série de Taylor...

Teorema do valor médio das derivadas

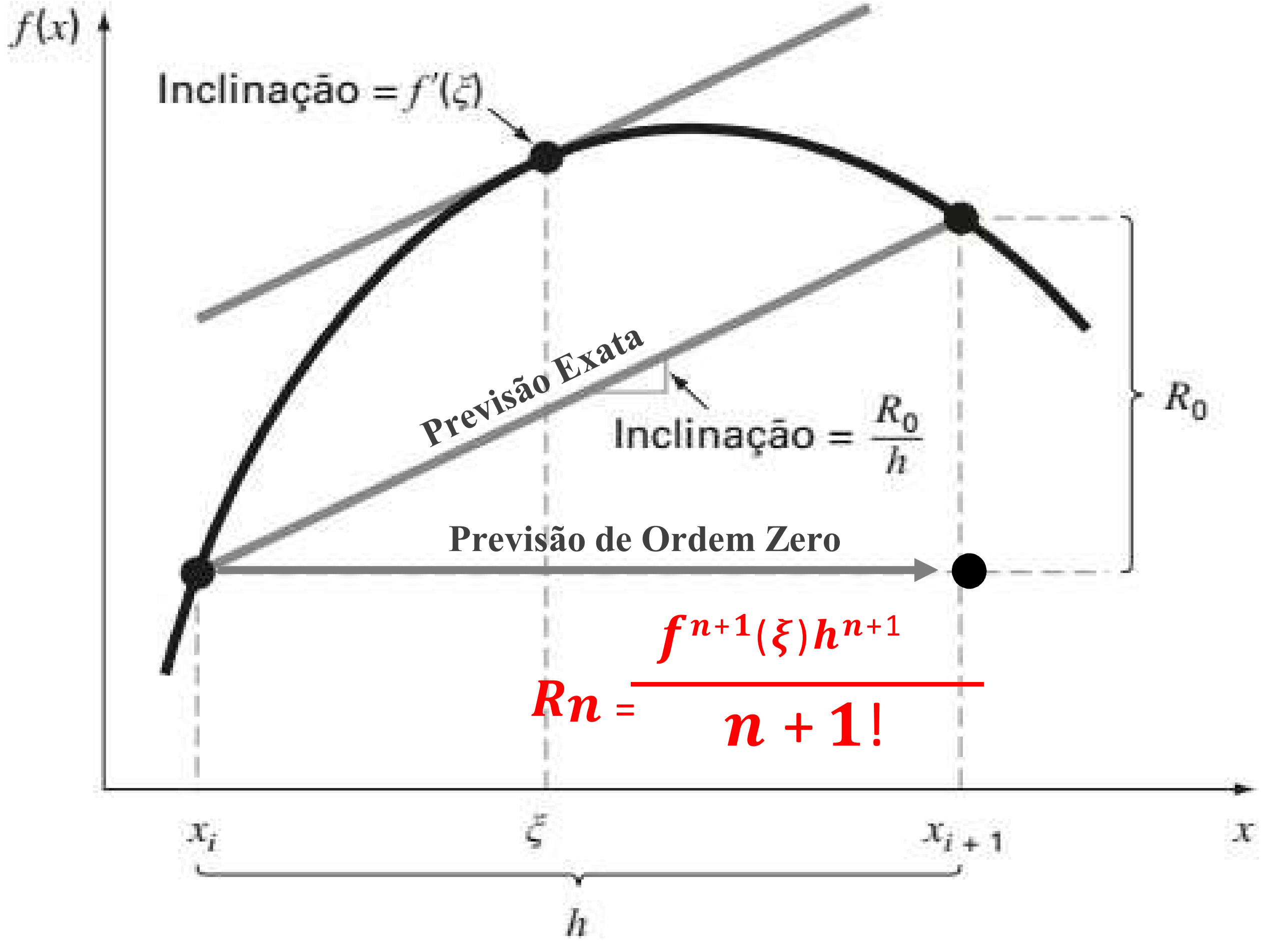
- Por conveniência utilizaremos apenas o primeiro termo da série para R_0:

$$R_0 \approx \frac{df(x_i)}{dx}\frac{(x_{i+1} - x_i)}{1!}$$

ou

$$R_0 \approx f'(x_i)h$$

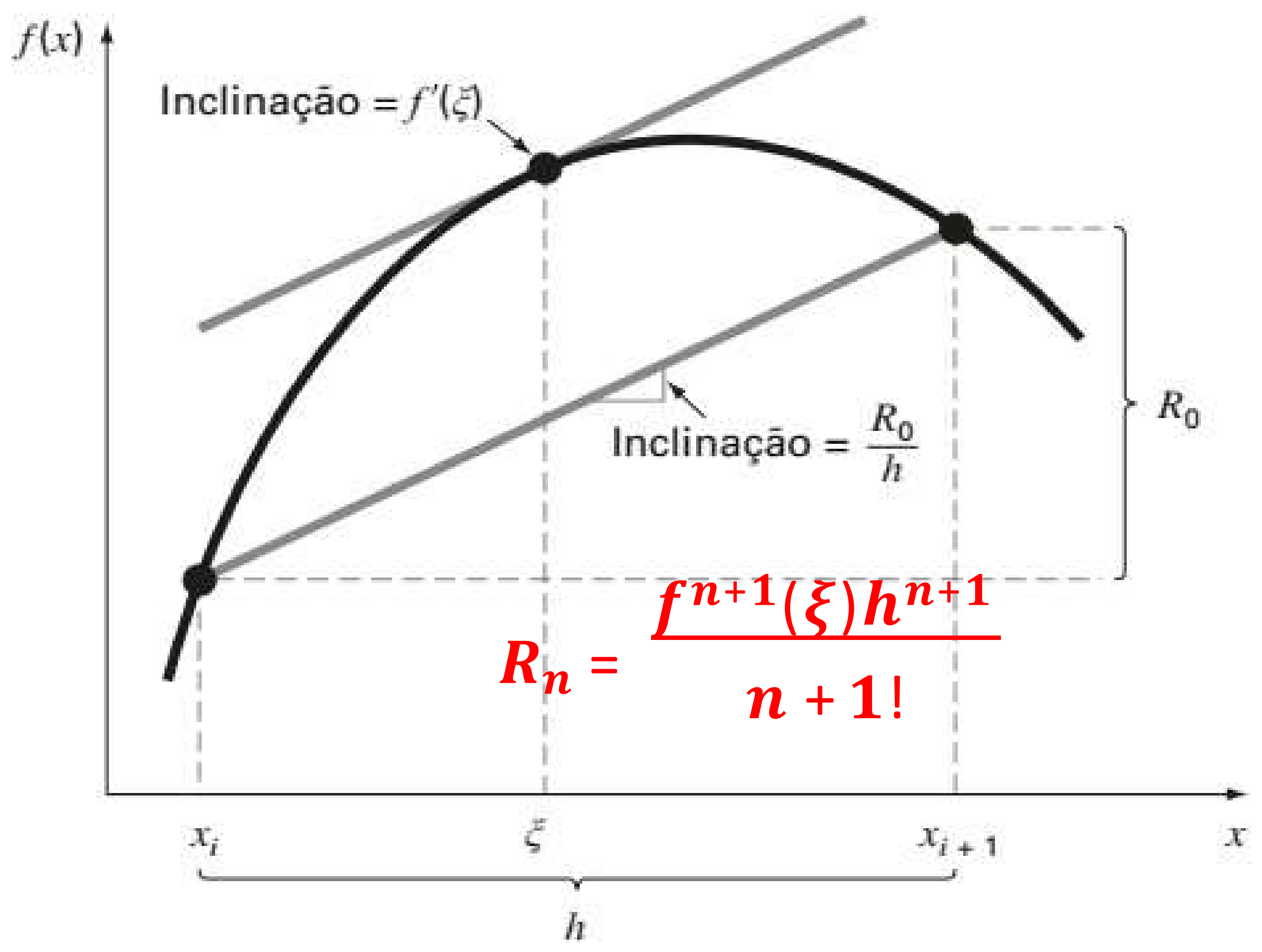
- $R_0 = O(h)$



$$Rn = \frac{f^{n+1}(\xi)h^{n+1}}{n+1!}$$

O erro na série de Taylor…

- $R_n = O(h^{n+1})$
- $O(h^{n+1})$ significa que o erro de truncamento é da ordem de h^{n+1}.
- Ou seja, o erro é proporcional ao tamanho do passo h elevado à (n+1)-ésima potência.



$$R_n = \frac{f^{n+1}(\xi)\,h^{n+1}}{n+1!}$$

Definições de Erro

Definições de Erro

Erro verdadeiro	E_t = erro verdadeiro − aproximação
Erro relativo porcentual verdadeiro	$\varepsilon_t = \dfrac{\text{erro verdadeiro} - \text{aproximação}}{\text{valor verdadeiro}}\ 100\%$
Erro relativo porcentual aproximado	$\varepsilon_a = \dfrac{\text{aproximação atual} - \text{aproximação anterior}}{\text{aproximação atual}}\ 100\%$
Critério de parada	Pare os cálculos quando $\varepsilon_a < \varepsilon_s$ onde ε_s é o erro relativo porcentual pedido

Referências bibliográficas

- CHAPRA, Steven C.; CANALE, Raymond P. Métodos numéricos para engenharia. 7ª ed. São Paulo: McGrawHill, 2016.