Занятие 1. Кванторы, ограниченность

4 сентября 2025 г.

1. Пусть X — некоторое множество на прямой. Рассмотрим формулу $?x \in X ?y \in X : x < y$. Вместо вопросиков вставьте комбинации кванторов $\exists$ и $\forall$. Что получится в каждом случае? Запишите при помощи кванторов отрицания получившихся утверждений.

2. Пусть $\{x_n\}_n$ — последовательность вещественных чисел. Запишите при помощи кванторов следующие утверждения: в этой последовательности бесконечно много натуральных чисел; все числа этой последовательности с некоторого места целые.

Некоторые неравенства

3. (Неравенство Бернулли) Покажите, что если $n \in \mathbb{N}$, а $x > -1$, то $(1+x)^n \geq 1+nx$. Когда достигается равенство?

4. Найдите какое-нибудь $N \in \mathbb{N}$ такое, что $1.01^n > n^3$ при всех $n > N$.

Ограниченность

5. Запишите при помощи кванторов определение ограниченности множества. Напишите его отрицание.

6. Ограничены ли следующие последовательности?

$$\begin{aligned}
\left\{2^{\alpha n} \,\middle|\, n \in \mathbb{N}\right\}&, \quad \alpha \in \mathbb{R},\\
\left\{\sqrt{n+1} - \sqrt{n} \,\middle|\, n \in \mathbb{N}\right\}&,\\
\left\{\frac{(-1)^n n + 10}{\sqrt{n^2+1}} \,\middle|\, n \in \mathbb{N}\right\}&,\\
\left\{n^{\cos \alpha n} \,\middle|\, n \in \mathbb{N}\right\}&, \quad \alpha \in \mathbb{R},\\
\left\{n^{\sin \alpha n} \,\middle|\, n \in \mathbb{N}\right\}&, \quad \alpha \in \mathbb{R},\\
\left\{n(\sqrt{n^4+1} - n^2) \,\middle|\, n \in \mathbb{N}\right\}&,\\
\left\{n^{1-\cos(\frac{\pi}{n})} \,\middle|\, n \in \mathbb{N}\right\}& \quad \text{(желательно обойтись без дифференцирования).}
\end{aligned}$$

Разные задачи

7. Опишите все последовательности $\{x_k\}_{k=1}^{\infty}$ такие, что

$$\forall k > 0, \forall l \geq k \; \exists m > l : |x_m| > |x_k| + |x_l|.$$

8. Пусть $n \in \mathbb{N}$, а $\{a_k\}_{k=1}^{n}$ — конечная последовательность вещественных чисел. Докажите, что $\exists\, m \in \{0, 1, \ldots, n\}$ такое, что

$$\left|\sum_{k=1}^{m} a_k - \sum_{k=m+1}^{n} a_k\right| \leq \max_{1 \leq k \leq n} |a_k|.$$

9. a. Докажите, что $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$. b. Докажите, что если $\frac{p}{q}$ — рациональная дробь, то $|\frac{p}{q} - \sqrt{2}| \geq \frac{1}{4q^2}$. c. Как с помощью целочисленной арифметики проверить выполнение неравенства $p/q \leq \sqrt{2} + \sqrt{3}$, $p, q \in \mathbb{N}$?