Министерство науки и высшего образования Российской Федерации

Федеральное государственное автономное образовательное учреждение высшего образования

НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ ИТМО

(Университет ИТМО)

ОТЧЕТ ПО ЛАБОРАТОРНОЙ РАБОТЕ №3

по курсу «Алгоритмы и структуры данных»

Тема: СОРТИРОВКА СЛИЯНИЕМ, МЕТОД ДЕКОМПОЗИЦИИ

Вариант 21

СОДЕРЖАНИЕ

[ЗАДАЧИ ПО ВАРИАНТУ 4](#_Toc179456014)

[1 Сортировка вставкой 4](#_Toc179456015)

[Задание 4](#_Toc179456016)

[Код 4](#_Toc179456017)

[Анализ кода 5](#_Toc179456018)

[Вывод 5](#_Toc179456019)

[2 Сортировка вставкой c запоминанием индексов 6](#_Toc179456020)

[Задание 6](#_Toc179456021)

[Код 6](#_Toc179456022)

[Анализ кода 7](#_Toc179456023)

[3 Сортировка вставкой по убыванию 8](#_Toc179456024)

[Задание 8](#_Toc179456025)

[Код 8](#_Toc179456026)

[Анализ кода 8](#_Toc179456027)

[Вывод 9](#_Toc179456028)

[4 Линейный поиск 10](#_Toc179456029)

[Задание 10](#_Toc179456030)

[Код 10](#_Toc179456031)

[Анализ кода 11](#_Toc179456032)

[Вывод 11](#_Toc179456033)

[5 Сортировка выбором 11](#_Toc179456034)

[Задание 11](#_Toc179456035)

[Код 11](#_Toc179456036)

[Анализ кода 11](#_Toc179456037)

[Вывод 12](#_Toc179456038)

[6 Сортировка пузырьком 13](#_Toc179456039)

[Задание 13](#_Toc179456040)

[Код 13](#_Toc179456041)

[Анализ кода 13](#_Toc179456042)

[Вывод 15](#_Toc179456043)

[7 Сортировка пузырьком с индексами 15](#_Toc179456044)

[Задание 15](#_Toc179456045)

[Код 15](#_Toc179456046)

[Анализ кода 16](#_Toc179456047)

[8 Сортировка выбором + 17](#_Toc179456048)

[Задание 17](#_Toc179456049)

[Код 17](#_Toc179456050)

[Анализ кода 18](#_Toc179456051)

[9 Сложение бинарных чисел 19](#_Toc179456052)

[Задание 19](#_Toc179456053)

[Код 19](#_Toc179456054)

[Анализ кода 20](#_Toc179456055)

[Вывод 20](#_Toc179456056)

[10 Построение палиндромов 21](#_Toc179456057)

[Задание 21](#_Toc179456058)

[Код 21](#_Toc179456059)

[Анализ кода 22](#_Toc179456060)

# ЗАДАЧИ ПО ВАРИАНТУ

## Сортировка слиянием

### Задание

Реализовать алгоритм сортировки слиянием

### Код

import typing as tp

def merge(list1: tp.List[int], list2: tp.List[int], target: tp.List[int], start\_index: int = 0) -> None:  
 *"""  
 Слияние list1 и list2 в target, начиная с индекса target = start  
 :param list1: отсортированный список 1  
 :param list2: отсортированный список 2  
 :param target: список, в который будет помещён результат слияния списков 1 и 2  
 :param start\_index: индекс в списке target, откуда начнётся запись элементов  
 """* cur1 = cur2 = 0   
 cur\_target = start\_index   
  
  
 while cur1 < len(list1) and cur2 < len(list2):  
 if list1[cur1] <= list2[cur2]:  
 target[cur\_target] = list1[cur1]  
 cur1 += 1  
 else:  
 target[cur\_target] = list2[cur2]  
 cur2 += 1  
 cur\_target += 1  
  
  
 if cur1 == len(list1):  
 for i in range(cur2, len(list2)):  
 target[cur\_target] = list2[i]  
 cur\_target += 1  
 else:  
 for i in range(cur1, len(list1)):  
 target[cur\_target] = list1[i]  
 cur\_target += 1  
  
  
def merge\_sort(lst: tp.List[int]) -> None:  
 *"""  
 Сортировка списка слиянием на месте  
 :param lst: список, который нужно отсортировать  
 """*  
 len\_merging\_lists = 1   
 while len\_merging\_lists < len(lst):  
 start\_index = 0   
 while start\_index + len\_merging\_lists < len(lst):  
 if lst[start\_index + len\_merging\_lists - 1] <= lst[start\_index + len\_merging\_lists]:  
 start\_index += 2 \* len\_merging\_lists  
 continue  
  
 merge(lst[start\_index : start\_index + len\_merging\_lists],  
 lst[start\_index + len\_merging\_lists : min(len(lst), start\_index + 2 \* len\_merging\_lists)],  
 lst, start\_index)  
  
 start\_index += 2 \* len\_merging\_lists  
 len\_merging\_lists \*= 2

### Анализ кода

Сортировка слиянием (Merge Sort) — это алгоритм "разделяй и властвуй", который рекурсивно делит список на две половины до тех пор, пока не останутся списки длиной 1, которые затем последовательно сливаются в один отсортированный список. Основная идея — разбить массив на части, отсортировать каждую и затем слить их обратно, сохраняя порядок.

Алгоритм состоит из следующих шагов:

1. Разбиваем список на две половины.
2. Рекурсивно применяем сортировку слиянием к каждой половине.
3. Выполняем слияние двух отсортированных половин.

Так как рекурсии не слишком практичны: они используют много памяти и могут работать дольше итеративных алгоритмов, - было принято решение реализовывать сортировку без рекурсии. Вместо разделения массива на две части каждый раз (движение сверху вниз по дереву рекурсии), список сразу делится на минимальные отсортированные блоки, затем они попарно сливаются в блоки побольше, пока размер блока не станет равным размеру самого списка (движение снизу вверх по дереву рекурсии).

Функция merge позволяет объединять два отсортированных подмассива в один на месте, что снижает расходы на память.

Функция merge\_sort сортирует массив in-place, не создавая дополнительных массивов, кроме необходимых для временного хранения частей.

**Оценка времени работы**:

Время работы: O(n\*log ₂n), где n - длина списка. На каждом уровне рекурсии выполняется операция слияния, которая требует O(n), а уровней рекурсии — O(log ₂n).

Затраты памяти: O(n) на временные массивы, поскольку используется in-place модификация.

### Вывод

Итеративные алгоритмы в большинстве случаев более эффективны по памяти и времени выполнения. Рекурсия удобна и проста для понимания в некоторых задачах, но из-за ограничений стека вызовов, накладных расходов и проблем с производительностью рекурсивные алгоритмы часто уступают итеративным.

## Нахождение количества инверсий

### Задание

Найти количество инверсий в перестановке за O(n\*log ₂n)

### Код

import typing as tp  
  
  
def merge\_count\_inversions(list1: tp.List[int], list2: tp.List[int], target: tp.List[int], start\_index: int = 0) -> int:  
 *"""  
 Слияние list1 и list2, подсчет суммы по i от 0 до длины list1: количество элементов из list2, меньших list1[i]  
 :param list1: отсортированный список 1  
 :param list2: отсортированный список 2  
 :param target: список, в который будет помещён результат слияния списков 1 и 2  
 :param start\_index: индекс в списке target, откуда начнётся запись элементов  
 :return: сумма по i от 0 до длины list1: количество элементов из list2, меньших list1[i]  
 """* cnt = 0  
 cur1 = cur2 = 0 # текущие индексы в list1 и list2 соотв.  
 cur\_target = start\_index # текущий индекс в target  
 while cur1 < len(list1) and cur2 < len(list2):  
 if list1[cur1] <= list2[cur2]:  
 target[cur\_target] = list1[cur1]  
 cur1 += 1  
 cnt += cur2  
 else:  
 target[cur\_target] = list2[cur2]  
 cur2 += 1  
 cur\_target += 1  
  
  
 if cur1 == len(list1):  
 for i in range(cur2, len(list2)):  
 target[cur\_target] = list2[i]  
 cur\_target += 1  
 else:  
 for i in range(cur1, len(list1)):  
 target[cur\_target] = list1[i]  
 cur\_target += 1  
 cnt += (len(list1) - cur1) \* len(list2)  
  
 return cnt  
  
  
def merge\_sort\_count\_inversions(lst: list) -> int:  
 *"""  
 Нахождение количества инверсий  
 :param lst: список, в котором нужно найти количество инверсий (отсортируется в процессе)  
 :return: количество инверсий в lst  
 """* count\_inv = 0 # счетчик инверсий  
 len\_merging\_lists = 1 # длина сливающихся подсписков  
 while len\_merging\_lists < len(lst):  
 start\_index = 0 # начальный индекс пары сливающихся подсписков  
 while start\_index + len\_merging\_lists < len(lst):  
 if lst[start\_index + len\_merging\_lists - 1] <= lst[start\_index + len\_merging\_lists]:  
 start\_index += 2 \* len\_merging\_lists  
 continue  
  
 count\_inv += merge\_count\_inversions(lst[start\_index : start\_index + len\_merging\_lists],  
 lst[start\_index + len\_merging\_lists : min(len(lst), start\_index + 2 \* len\_merging\_lists)],  
 lst, start\_index)  
  
 start\_index += 2 \* len\_merging\_lists  
 len\_merging\_lists \*= 2  
  
 return count\_inv

### Анализ кода

Инверсии в массиве — это такие пары элементов, что i < j, а A[i] > A[j]. Подсчёт количества инверсий можно провести при помощи модифицированного алгоритма сортировки слиянием, используя тот факт, что количество инверсий списка равно сумме количества инверсий двух его частей и суммы, где каждое i-е слагаемое – количество элементов из правой части, таких, что они больше i-ого элемента из левой части. Первое и второе слагаемые находятся рекурсивно, а третье можно посчитать при слиянии. Причем, чтобы сделать эти вычисления быстрее, все-таки необходимо отсортировать части списка. Тогда, если при сравнении текущих элементов частей списков получается, что текущий элемент левой части меньше текущего из правой, можно утверждать, что все элементы правой, меньше текущего элемента из правой части (а таких элементов = индекс текущего правого), меньше текущего из левой.

Алгоритм состоит из:

1. Разделения списка на две части.
2. Рекурсивного подсчёта инверсий в каждой из частей.
3. Подсчёта инверсий, возникающих при слиянии двух частей.

**Оценка времени работы**: аналогично обычной сортировке слиянием

Время работы: O(n\*log ₂n), аналогично сортировке слиянием.

Затраты памяти: O(n) на временные массивы для слияния.

### Вывод

Встроенная модификация алгоритма сортировки слиянием позволяет одновременно с сортировкой подсчитывать инверсии.

## Бинарный поиск

### Задание

Реализовать алгоритм бинарного поиска элемента в списке.

### Код

import typing as tp  
  
  
def bin\_pow(lst: tp.List[int], value: int) -> int:  
 *"""  
 Поиск value в списке lst  
 :param lst: список, в котором будет производиться поиск  
 :param value: искомый элемент  
 :return: индекс искомого элемента или -1, если его нет  
 """* lst\_indexes = list(range(len(lst)))  
 lst\_indexes.sort(key=lambda index: lst[index])

left = 0  
 right = len(lst) - 1  
 while left <= right:  
 mid = left + (right - left) // 2  
 if lst[lst\_indexes[mid]] == value:  
 return lst\_indexes[mid]  
 if lst[lst\_indexes[mid]] < value:  
 left = mid + 1  
 else:  
 right = mid - 1  
  
 return -1

### Анализ кода

Бинарный поиск — это алгоритм поиска элемента в отсортированном списке. Он работает по принципу "разделяй и властвуй", на каждом шаге деля список пополам и проверяя, находится ли искомый элемент в левой или правой части.

Чтобы быстро выводить индекс элемента в неотсортированном списке, мы сортируем не сами элементы, а их индексы: индекс i является больше индекса j, если lst[i] больше lst[j]. Т.е. на позиции i хранится значение позиции в неотсортированном массиве, где стоял элемент, который в отсортированном массиве имеет индекс i.

Вместо рекурсии опять же использовался итеративный алгоритм, где роль разделения массива на две части играют два указателя, показывающие, с какой частью списка мы работаем. Алгоритм итеративного бинарного поиска начинается с установки начального значения границ поиска (left = 0, right = n-1). Затем определяется позиция mid как среднее между left и right. Элемент на позиции mid сравнивается с целевым значением. Если они равны, поиск завершен успешно. В противном случае, если элемент меньше целевого, left увеличивается, а если больше, right уменьшается. Процесс продолжается до тех пор, пока left не станет больше right, указывая на отсутствие элемента.

**Оценка времени работы**: аналогично обычной сортировке слиянием

Время работы: O(log ₂n), где n - это количество элементов в массиве. Это происходит потому, что каждый шаг поиска делит массив на две половины, сокращая область поиска примерно вдвое.

Затраты памяти: O(1) на переменные.

### Вывод

Бинпоиск – понятный (даже без использования рекурсий) и эффективный алгоритм.

## Поиск мажорирующего элемента

### Задание

Найти элемент, который встречается в списке более половины раз, если такой есть

### Код 1

import typing as tp  
  
  
def majority\_element\_recursion(lst: tp.List[int], start: int = 0, end: int = -1) -> tp.Tuple[tp.Optional[int], int]:  
 *"""  
 Поиск мажорирующего элемента на части lst от start до end (не включительно)  
 :param lst: список  
 :param start: начальный индекс списка  
 :param end: конечный индекс (end = len(lst) <-> end == -1)  
 :return: значение мажорирующего элемента (None, если его нет) и  
 количество раз, которое он встречается в списке (-1, если его нет)  
 """* if end == -1:  
 end = len(lst)  
  
 num\_elements = end - start  
 if num\_elements == 0:  
 return None, -1  
 if num\_elements == 1:  
 return lst[start], 1  
  
 mid = start + num\_elements // 2  
 majority\_left, num\_left = majority\_element\_recursion(lst, start, mid)  
 majority\_right, num\_right = majority\_element\_recursion(lst, mid, end)  
  
 if num\_left != -1:  
 for i in range(mid, end):  
 if lst[i] == majority\_left:  
 num\_left += 1  
 if num\_left > num\_elements // 2:  
 return majority\_left, num\_left  
  
 if num\_right != -1:  
 for i in range(start, mid):  
 if lst[i] == majority\_right:  
 num\_right += 1  
 if num\_right > num\_elements // 2:  
 return majority\_right, num\_right  
  
 return None, -1

### Анализ кода 1

### Код 2

def majority\_element\_line(lst: tp.List[int]) -> tp.Tuple[tp.Optional[int], int]:  
 *"""  
 Поиск мажорирующего элемента в lst за линию  
 :param lst: список  
 :return: значение мажорирующего элемента (None, если его нет) и  
 количество раз, которое он встречается в списке (-1, если его нет)  
 """* num\_without\_pair = 0 # количество элементов которые пока без пары  
 candidate = None # Значение элементов без пары  
   
 for elem in lst:  
 if num\_without\_pair == 0:  
 candidate = elem  
 num\_without\_pair += 1  
 elif elem == candidate:  
 num\_without\_pair += 1  
 else:  
 num\_without\_pair -= 1  
  
 cnt = 0  
 for elem in lst:  
 if elem == candidate:  
 cnt += 1  
  
 return (candidate, cnt) if cnt > len(lst) // 2 else (None, -1)

### Анализ кода 2

## Поиск подмассива с максимальной суммой за линию

### Задание

Найти подмассив с максимальной суммой и вывести его сумму, начальный и конечный индексы.

### Код

import typing as tp  
  
  
def find\_max\_subarray(lst: tp.List[int]) -> tp.Tuple[int, int, int]:  
 *"""  
 Поиск максимального подмассива  
 :param lst: список  
 :return: сумма элементов максимального подмассива, стартовый индекс, конечный индекс  
 """* max\_subarray = lst[0] # сумма элементов максимального подмассива  
 left, right = 0, 1 # границы максимального подмассива  
  
  
 sm = 0 # сумма подмассива от 0 до текущего индекса  
 min\_sm = min\_sm\_len = 0 # подмассив от 0 до min\_sm\_len с минимальной суммой  
 for ind, elem in enumerate(lst):  
 sm += elem  
 """  
 От суммы текущего подмассива - [0:ind] - отнимаем сумму подмассива с минимальной суммой - [0:min\_sm\_len],  
 получаем сумму подмассива [min\_sum\_len:ind] - это подмассив с максимальной суммой из подмассива [0:ind]  
 """  
 if max\_subarray < sm - min\_sm:  
 max\_subarray = sm - min\_sm  
 left = min\_sm\_len  
 right = ind + 1  
  
 """  
 Обновляем значение и границу минимального подмассива [0:min\_sum\_len]  
 """  
 if min\_sm > sm:  
 min\_sm = sm  
 min\_sm\_len = ind + 1  
  
 return max\_subarray, left, right

### Анализ кода

### Вывод

## Умножение полиномов

### Задание

Реализовать алгоритм умножения полиномов меньше чем за O(n^2)

### Код

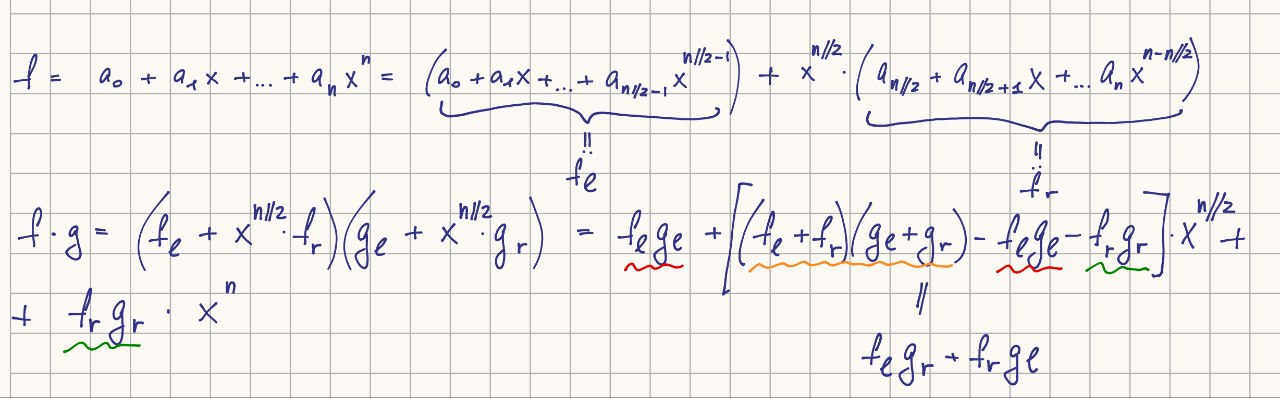
def mult\_polynomials(f: tp.List[int], g: tp.List[int]) -> tp.List[int]:  
 *"""  
 Умножение полинома f на полином g (если степени полиномов разные, они дополняются нулями)  
 Полиномы представляются в виде:  
 f = [a0 + a1 \* x + a2 \* x^2 + ...], g = [b0 + b1 \* x + b2 \* x^2 + ...]  
 :param f: [a0, a1, a2, ...]  
 :param g: [b0, b1, b2, ...]  
 :return: полином степени deg(f) + deg(g) - 1 в аналогичном виде  
 """* if not f or not g:  
 raise ValueError("Empty polynomials")  
  
 if len(f) < len(g):  
 f.extend([0] \* (len(g) - len(f)))  
 elif len(f) > len(g):  
 g.extend([0] \* (len(f) - len(g)))  
  
  
 def mult\_polynomials\_recursion(f: tp.List[int], g: tp.List[int],  
 f\_start: int, f\_end: int,  
 g\_start: int, g\_end: int) -> tp.List[int]:  
 len\_f = f\_end - f\_start  
 len\_g = g\_end - g\_start  
 assert len\_f == len\_g  
  
 if len\_f == 1:  
 return [f[f\_start] \* g[g\_start]]  
  
 mid = len\_f // 2  
 f\_mid = f\_start + mid  
 g\_mid = g\_start + mid  
  
 f\_left\_g\_left = mult\_polynomials\_recursion(f, g, f\_start, f\_mid, g\_start, g\_mid)  
 f\_right\_g\_right = mult\_polynomials\_recursion(f, g, f\_mid, f\_end, g\_mid, g\_end)  
  
 f\_left\_plus\_f\_right = f[f\_mid:f\_end]  
 g\_left\_plus\_g\_right = g[g\_mid:g\_end]  
 for i in range(f\_start, f\_mid):  
 f\_left\_plus\_f\_right[i - f\_start] += f[i]  
 for i in range(g\_start, g\_mid):  
 g\_left\_plus\_g\_right[i - g\_start] += g[i]  
  
 sum\_f\_sum\_g = mult\_polynomials\_recursion(f\_left\_plus\_f\_right, g\_left\_plus\_g\_right,  
 0, f\_end - f\_mid,  
 0, g\_end - g\_mid)  
  
 result = [0] \* (len\_f \* 2 - 1)  
  
 for i in range(len(f\_left\_g\_left)):  
 result[i] += f\_left\_g\_left[i]  
 result[mid + i] -= f\_left\_g\_left[i]  
  
 for i in range(len(f\_right\_g\_right)):  
 result[mid \* 2 + i] += f\_right\_g\_right[i]  
 result[mid + i] -= f\_right\_g\_right[i]  
  
 for i in range(len(sum\_f\_sum\_g)):  
 result[mid + i] += sum\_f\_sum\_g[i]  
  
 return result  
  
 return mult\_polynomials\_recursion(f, g, 0, len(f), 0, len(g))

### Анализ кода

Алгоритм умножения полиномов, представленный в коде, основан на методе разделяй и властвуй. Этот подход разбивает полиномы на части, умножает их рекурсивно и собирает результат, используя стратегию, похожую на умножение чисел с разбиением по разрядам.

### Описание алгоритма:

**Алгоритм основан на том факте, что:**

****

**Таким образом, можно рекурсивно вызвать три умножения полиномов (частей исходного), а потом собрать результат с учетом сдвига (степени x, на который умножается произведение)**

1. **Разбиение полиномов**:

Алгоритм делит каждый полином на две части:

* + Левая часть — это полиномы с меньшими степенями.
  + Правая часть — полиномы с большими степенями.

Например, если полином f(x) = a0 + a1⋅x + a2⋅x^2 + a3⋅x^3, то он будет разделен на:

* + Левую часть: f\_left(x) = a0 + a1⋅x
  + Правую часть: f\_right(x) = a2 + a3⋅x

1. **Рекурсивное умножение**:

После разбиения двух полиномов f и g на левые и правые части, алгоритм рекурсивно умножает:

* + Левую часть полинома​ f на левую часть полинома g.
  + Правую часть полинома f ​ на правую часть полинома g.

1. **Вычисление промежуточных сумм**:

Чтобы уменьшить количество операций умножения, алгоритм также складывает левую и правую части полиномов f и g (результаты копируются в новые списки) и умножает суммы. Это позволяет исключить лишние вычисления.

1. **Сборка результата**:

После рекурсивного умножения левых и правых частей, а также суммы левых и правых частей, результат собирается в один полином с поправками на позиции коэффициентов. Это делает алгоритм более эффективным по сравнению с наивным умножением, которое требует умножения каждого коэффициента одного полинома на каждый коэффициент другого.

**Оценка времени работы**:

Время работы: O(n^log ₂3), где n - длина списка.

### Вывод

Ужасный алгоритм с точки зрения использования памяти. Была попытка исправить это, но в рекурсии в любом случае нужно копирование списков (для вычисления списка суммы левой и правой частей полинома) перед рекурсивным вызовом. Тем не менее, алгоритм работает быстрее наивного.