Projekt pri predmetu Matematično Modeliranje

Odbijanje kroglice po biljardni mizi

Tina Zwittnig

Fakulteta za Matematiko in Fiziko, Univerza v Ljubljani

7. maj 2020

Kazalo

1 Naloga

"Biljardna" miza ima obliko pravilnega n-kotnika. Iz neke točke na mizi pošljemo kroglico proti sredini prve stene. Odbija se po odbojnem zakonu, kjer je trk prožen in se vsa energija ohrani. Trenje zanemarimo. Napišite program, ki izriše animacijo k odbojev kroglice. Če problema ne znate rešiti splošno, ga poskusite obravnavati vsaj za $n = 4$ in nekaj odbojev.

2 Uvod v reševanje problema

Porblem razdelimo na manjše podprobleme.

1. Biljardna miza ima obliko n-kotnika, kar prevedemo v konsturiranje pravilnega n-kotnika.
2. Besedo zvezo "iz neke točke na mizi" lahko interpertiramo kot določanje naključne točke v mnogokotniku.
3. poved "Odbija se po odbojnem zakonu, kjer je trk prožen in se vsa energija ohrani." Nas zapelje v razmišljanje o odbojnem zakonu in ohranjanju energije

3 Teoretično ozadje

Poglejmo si teoretično ozadje za zgoraj naštetimi pojmi.

3.1 Pravilni n-kotnik

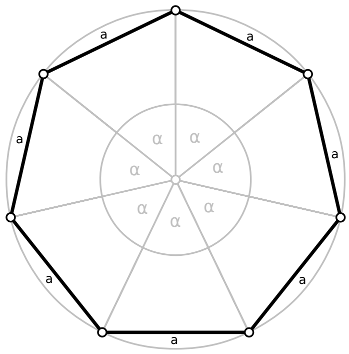
Pravilni n-kotnik je 2D lik, ki ima vse stranice enako dolge, skladni so tudi vsi središčni koti, ki merijo $\alpha = \frac{2\pi}{n}$. Lahko ga razdelimo na n enakokrakih trikotnikov, ki imajo eno točko v središču lika, drugi dve točki pa sta sosednji ogljišči n-kotnika. Lahko mu očrtamo ali včrtamo krožnico. Z drugimi besedami, krožnici lahko včrtamo ali očrtamo n-kotnik. V našem primeru nas bo zanimala le očrtana krožnica. Pravilni n-kotnik torej lahko konsturiramo s pomočjo polarnih koordinat:

$$x = x_o + r\cos(\varphi) \quad y = y_o + r\sin(\varphi),$$

pri čimer je φ večkratnik notranjega kota n-kotnika:

$$\varphi = k\alpha, \quad k \in \{0, 1, 2, 3, ..., n-1\}$$

Radij r je radij očrtane krožnice, (x_o, y_o) pa središče očrtane krožnice. Za lažje računanje bomo za središče očrtane krožnice vzeli $(0, 0)$. S pomočjo translacij pa je možno nalogo rešiti kjerkoli v koordinatnem sistemu.



Slika 1: Pravilni n kotnik z očrtano krožnico

3.2 Določanje naključne točke v mnogokotniku

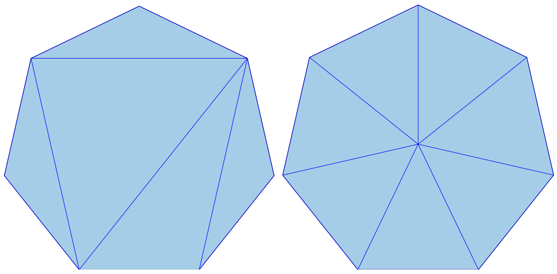
Naloga se zdi na prvi pogled enostavna, a temu ni tako. Naklučno točko znotraj mnogokotnika, lahko poiščemo na več načinov:

1. Določanje točke znotraj očrtane krožnice.
   Zamislimo si naključen radij, za katerega velja $r_{rand} \in [0, r_{ocrtan}]$, nato si izmislimo kot β, za katerega velja $\beta \in [0, 2\pi]$. Izračunamo (x_r, y_r) s pomočjo polarnih koordinat. Postopek ponavljamo dokler točka (x_r, y_r) ne leži v našem n-kotniku. Ta postopek je časovno zelo potraten, zato bomo pogledali še drug način.

2. Določanje naključne točke s pomočjo triangulacije mnogokotnika. Ideja je, da mnogokotnik trianguliramo, si izberemo naključen trikotnik in nato v trikotniku naključno točko.
   Mnogokotnik lahko trianguliramo na več različnih načinov, kot je prikazano na sliki 2. Pri prvi triangulaciji lahko opazimo, da trikotniki niso skladni in imajo različne ploščine. To nam pri izbiri trikotnika ni v pomoč. Če trikotniki nimajo enake ploščine moramo pri izbiri naključnega trikotnika upoštevati tudi velikost trikotnika. Torej izbrati naključni trikotnik med trikotniki z utežmi, kjer so uteži odvisne od ploščine(da je verjetnost da izberemo največji trikotnik največja). To predstavlja dodatne korake (izračun površine trikotnikov, določevanje uteži...)
   Zato se raje odločimo za drug način triangulacije. Ker so vsi trikotniki skladni, si izberemo naključno število od 1 do n, kjer vsako število predstavlja določen trikotnik.

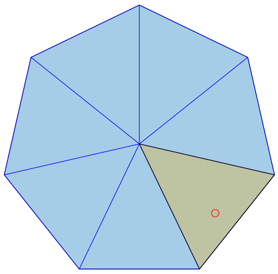
Naključno točko znotraj trikotnika ABC konstruiramo s pomočjo enačbe:

$$P = (1 - \sqrt{r_1})A + (1 - r_2)\sqrt{r_1}B + r_2\sqrt{r_1}C,$$



Slika 2: Različni triangulaciji pravilnega n-kotnika

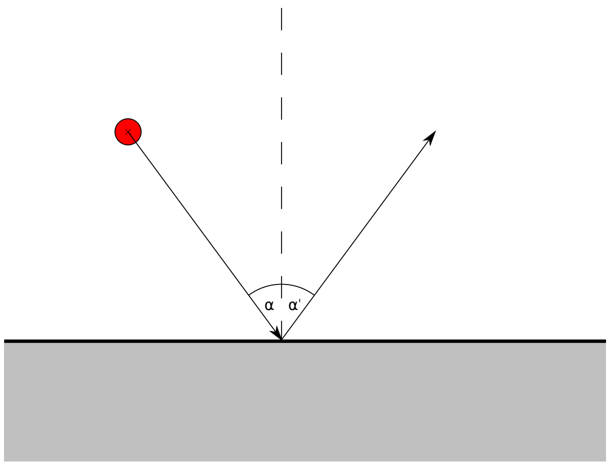
kjer sta r_1 in r_2 naključni števili med 0 in 1.
Kot je razvidno iz slike 3 pravilni n-kotnik trianguliramo s skladnimi trikotniki, izberemo naključi trikotnik in nato naključno točko v tem trikotniku.



Slika 3: Naključna točka v naključnem trikotniku

3.3 Odbojni zakon

Odbojni zakon pove, da sta vpadni kot α in odbojni kot α' skladna ter da ležita na isti ravnini. Če imamo negibljivo idealno gladko telo, v katerega se zaleti idealo prožno telo, se ohrani kinetična energija in pride do odboja po odbojnem zakonu.
Velja $\alpha = \alpha'$.



Slika 4: Odbojni zakon

3.4 Ohranitev energije

Zakon o ohranitvi energije nam pove, da se skupna energija predmetov skozi čas ne spreminja.

$$\Delta W = 0$$

V našem primeru bomo upoštevali kinetično in prožnosto energijo. Kinetična energije točkastega telesa, se ob trku pretvori v prožnostno energijo. Ko se telo odbije, pa se pretvori nazaj v kinetično energijo. Lahko rečemo, da se kinetična energija ohranja.
Kinetična energija točkastega telesa je definirana kot:

$$W_k = \frac{1}{2}mv^2,$$

kjer je m masa telesa, v pa hitrost.
Če se kinetična energija ohranja velja:

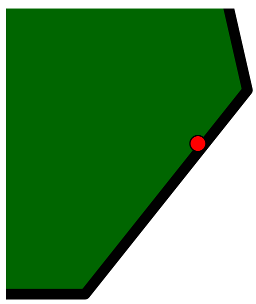
$$\Delta W_k = 0$$
$$W_{začetna} = W_{končna}$$
$$\frac{1}{2}mv_{začetna}^2 = \frac{1}{2}mv_{končna}^2$$
$$|v_{začetna}| = |v_{končna}|$$

Torej se velikost hitrosti pred in po trku ne spremeni.
Hitrost, se ne spremeni niti po kotaljenju po podlagi, saj trenje zanemarimo.

4 Reševanje naloge

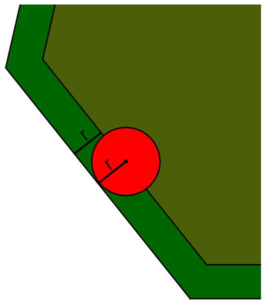
4.1 Risanje biljardne mize

Za začetek rabimo biljardno mizo, po kateri se bo odbijala kroglica. To naredimo s postopkom opisan v poglavju 3.1, za lepši prikaz lahko vse kote za konstrukcijo ogljišč zamaknemo za $\frac{\alpha+\pi}{2}$, tako da je neglede na število ogljišč spodnja stranica vzporedna z abciso.
Če kroglico obravnavamo kot točko, kar pomeni, da nima radija, smo z konstrukcijo končali. A se vizualno lahko zazdi, da točka "prodre" v ograjco biljardne mize.



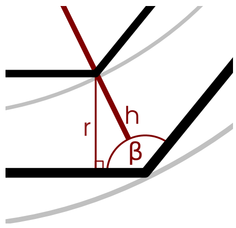
Slika 5: Vizualno napačen odboj

Da se temu izognemo, obravnavmo raje, da ima kroglica radij. Zato je potrebno skonstruirati še en mnogokotnik, od katerega se bo odbijalo središče kroglice. Stranice novega mnogokotnika, morajo biti zamaknjene v notranjost ravno za radij kroglice, kot je razvidno na sliki 6.



Slika 6: Zamaknjen mnogokotnik v notranjost.

Določiti moramo radij očrtane krožnice notranjega mnogokotnika. Pomagamo si s skico 7. Poznamo radij kroglice r, zanima pa nas razlika med radijema očrtanih krožnic mnogokotnika in notranjega mnogokotnika h. Po-



Slika 7: Skica mnogokotnika in notranjega mnogokotnika

magali si bomo s kotnimi funkcijami. Notranji kot β lahko izračunamo s pomočjo znane formule:

$$\beta = \frac{(n-2)\pi}{n}.$$

Vemo tudi

$$\sin\alpha = \frac{\text{nasprotiležna kateta}}{\text{hipotenuza}},$$

v našem primeru torej:

$$\sin\frac{\beta}{2} = \frac{r}{h}$$
$$h = \frac{r}{\sin\frac{\beta}{2}}$$

Tako smo določili radij za notranjo očrtano krožnico, ki je $r_{kroga} - h$ in s tem določili mnogokotnik dejanskega odboja.

4.2 Postavljanje kroglice na naključno mesto

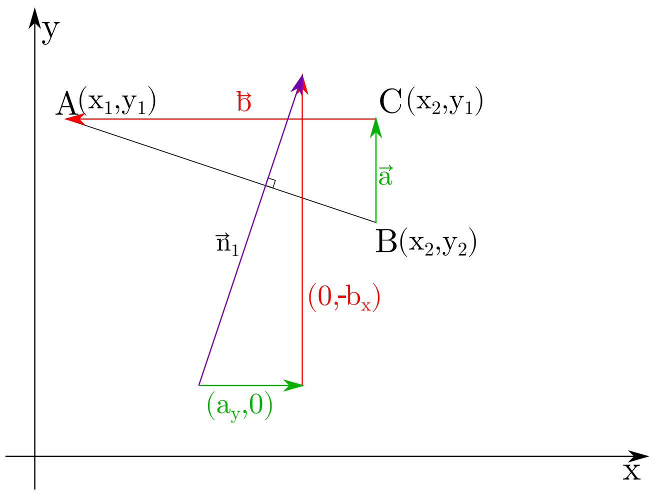
Biljardno mizo smo določili, sedaj je treba določiti kroglico. Lokacijo sredine kroglice določimo s pomočjo triangulacije mnogokotnika in določevanje naključne točke v trikotniku. Postopek je opisan v odstavku 3.2. Ker določimo naključno točko s pomočjo triangulacije, vemo v katerem trikotniku leži točka in s tem tudi, katera stranica mnogokotnika je najbližje.

4.3 Smer kroglice do prvega odboja

V besedilu naloge imamo podano, da krogljico pošljemo proti sredini prve stene. Torej vzamemo ogljišča trikotnika v katerem leži kroglica $A = (x_1, y_1)$ in $B = (x_2, y_2)$, ki sta različna od $(0, 0)$. Izračunamo razpolovišče $(x_r, y_r) = (\frac{x_1+x_2}{2}, \frac{y_1+y_2}{2})$. Sedaj imamo 2 točki: razpolovišče R in točko v kateri se nahaja kroglica K . S tem lahko določimo smer $\vec{s}$ gibanja do prvega odboja $\vec{s_1} = \vec{r_K} - \vec{r_R}$, kjer sta $\vec{r_K}$ in $\vec{r_R}$ krajevna vektorja točk. Končno smer gibanja še normiramo, zaradi lažjega računanja. $\vec{s} = \frac{\vec{s_1}}{|\vec{s_1}|}$.

4.4 Odboj kroglice

Kroglico premikamo v prej izračunani smeri $\vec{s}$ do točke odboja. Poznamo ogljišči stranice A in B od katere se bo odbila kroglica in poznamo smer premikanja kroglice. Izračunati moramo v katero smer se bo točka odbila. To storimo s pomočjo normale stranice. (glej sliko 8)



Slika 8: Določitev normale na stranico.

Kot je razvidno iz slike normalo določimo z pomočjo vektorjev. Določimo vektorja $\vec{a} = (0, y_1 - y_2)$ in $\vec{b} = (x_1 - x_2, 0)$ za katera velja : $\vec{a} + \vec{b} = \vec{BA}$. Vzamemo y komponento vektorja $\vec{a}$, kar predstavlja x komponento normale. Podobno vzamemo $-x$ komponento vektorja $\vec{b}$, ki predstavlja y komponento normale. Normala na stranico AB je torej $\vec{n_1} = (\vec{a}_y, -\vec{b}_x) = (y_1 - y_2, x_2 - x_1)$ Pokažimo, da sta $\vec{n}_1$ in $\vec{BA}$ res pravokotni. Če sta pravokotni, je njun skalarni produkt enak nič.

$$
\begin{aligned}
\vec{BA} \cdot \vec{n}_1 &= (x_1 - x_2, y_1 - y_2) \cdot (y_1 - y_2, x_2 - x_1) \\
&= (x_1 - x_2)(y_1 - y_2) + (y_1 - y_2)(x_2 - x1) \\
&= (x_1 - x_2)(y_1 - y_2) + (y_1 - y_2) \cdot (-1)(x_1 - x_2) \\
&= (x_1 - x_2)(y_1 - y_2) - (y_1 - y_2)(x_1 - x_2) \\
&= 0
\end{aligned}
$$

Za ležje nadaljno računanje normalni vektor še normiramo. $\vec{n} = \frac{\vec{n_1}}{|\vec{n_1}|}$ Sedaj imamo normalo $\vec{n}$ in smer premikanja kroglice pred odbojom $\vec{s}$. Zanima nas kakšna bo smer po odboju $\vec{s_2}$. Vemo, da se žogica odbije po odbojnem zakonu, ki je opisan v 3.3. Torej:

$$
\begin{aligned}
\alpha &= \alpha' \\
\cos\alpha &= \cos\alpha'
\end{aligned}
$$

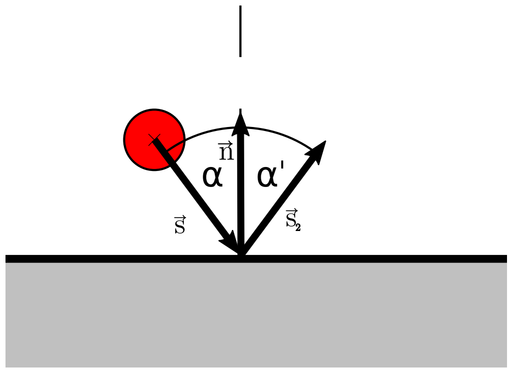
Pomagamo si z sklarnim produktom $\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}||\vec{b}| \cos\alpha$ Izrazimo: $\cos\alpha = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}||\vec{b}|}$ Ker smo smer premikanja $\vec{s}$ in normalo $\vec{n}$ normirali, lahko pišemo:

$$
\begin{aligned}
-\vec{s} \cdot \vec{n} &= \vec{n} \cdot \vec{s_2} \\
-\vec{s} \cdot \vec{n} &= \vec{n} \cdot (\eta \vec{s} + \mu \vec{n}) \qquad \vec{s_2} \text{ izrazimo z linearno kombinacijo } \vec{n} \text{ in } \vec{s} \\
-\vec{s} \cdot \vec{n} &= \eta \vec{n} \cdot \vec{s} + \mu \vec{n} \cdot \vec{n} \\
-\vec{s} \cdot \vec{n} &= \eta \vec{n} \cdot \vec{s} + \mu
\end{aligned}
$$

Denimo, da $\eta = 1$ in izrazimo μ

$$
\begin{gathered}
-\vec{s} \cdot \vec{n} - \vec{n} \cdot \vec{s} = \mu \\
\mu = -2\vec{s} \cdot \vec{n} \\
\Longrightarrow \\
\vec{s_2} = \vec{s} - 2(\vec{s} \cdot \vec{n})\vec{n}
\end{gathered}
$$

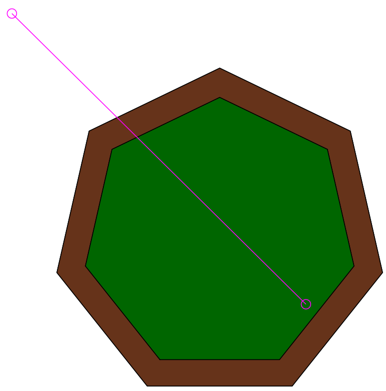
Ko izračunamo $\vec{s}_2$ vemo v katero smer se premika žogica po prvem odboju.



Slika 9: smer po odboju

4.5 Točka odboja po prvem odboju

Potrebujemo naslednjo točko odboja, ter stranico odboja, da bomo lahko izračunali normalo. En izmed načinov kako to naredimo je, da kroglico nekoliko premaknemo v smeri $\vec{s_2}$, da ne leži več na robu mnogokotnika. Nato določimo točko N, ki leži na premici $\vec{r_K} + t\vec{s}, \quad t \in \mathbb{R}$, in zagotovo ne leži v mnogokotiku. Sepravi mora biti $t\vec{s}$ večji od premera očrtane krožnice. Določimo, da $t = 3 \cdot r_{očrtana}$. Povežemo točki K in N in dobimo daljico, ki se seka v eni točki z mnogokotnikom, kot je razvidno na sliki 10. Ta točka je naslednja točka odboja. S pomočjo MATLAB ukaza `polyxpoly()` izračunamo presečišče in določimo stranico od katere se bo odbila kroglica.



Slika 10: Daljica, ki povezuje krogljico in točko zunaj mnogokotnika.

Nato ponovno izračunamo normalo, smer po odboju... postopek ponavljamo dokler se kroglica k-krat ne odbije.

5 Zaključek

Zanimivo bi bilo videti, če bi nalogo dopolnili še z odboji več kroglic. Če bi se kroglici srečali bi morali upoštevati še trk dveh prožnih teles. Lahko bi upoštevali tudi trenje, da bi se kroglica po nekem času ustavila. Če bi si želeli pa simulirati "realen" bilijard, bi morali konsturirati tudi luknjice v katere bi žogica padla.

Literatura

[1] M. Kocjan-Barle, D. Bajt, *Slovenski veliki leksikon*, **H-O**, Mladinska Knjiga Založba, 2004

[2] D. Kavka, *Matematika v srednji šoli*, Modrian založba, 2007

[3] L. Kos, *Distribuirani sistem za upodabljanje tridimenzionalnih objektov*, magistrsko delo, Fakulteta za strojništvo, Univerza v Ljubljani, 1995; dostopno tudi na `http://www.casprod.eu/~leon/distray/distray.html`.

[4] R. Osada, T. Funkhouser, B. Chazelle, D. Dobkin, *Shape Distributions*, v: ACM Transactions on Graphics **21/4**, Association for Computing Machinery, 2002, str. 807–832; dostopno tudi na `https://dl.acm.org/doi/10.1145/571647.571648`

[5] G. Turk, *Generating random points in triangles*, v: Graphics Gems, **I**, Academic Press Inc, 1993; dostopno tudi na `http://inis.jinr.ru/sl/vol1/CMC/Graphics_Gems_1,ed_A.Glassner.pdf`

[6] A. Likar, *Odboj Žoge* v Presek **8/2**, DMFA – založništvo, 1980/81 str. 67-72; dostopno tudi na `http://www.presek.si/8/472-Likar.pdf`

[7] T. Košir, *Linearna Algebra*, verzija 12. 1. 2009, Poglavje: vektorji, [ogled 5. 4. 2020], dostopno na `https://www.fmf.uni-lj.si/~kosir/poucevanje/skripta/`.

[8] *Polygon*, v: Wikipedia, The Free Encyclopedia, [ogled 5. 4. 2020], dostopno na `https://en.wikipedia.org/wiki/Polygon`.