Teorik / Klasik Mekanik - Ödev 1

082420024

Tunay Ertürk

Soru - 1

Kartezyen koordinatlarda $d\vec{s} = dx\,\hat{i} + dy\,\hat{j} + dz\,\hat{k}$ olarak tanımlanan sonsuz küçük çizgi elemanını

a) Küresel koordinatlardaki ifadesini elde ediniz

b) Silindirik koordinatlardaki ifadesini elde ediniz

Çözüm

Küresel ve Silindirik koordinat sistemleri ortogonal sistemler olduğundan dolayı, sonsuz küçük çizgi elemanı, büyüklük faktörü kullanılarak bulunabilir.

Daha genel bir ifade olması için $d\vec{s}$ yerine $d\vec{r}$ (sonsuz küçük yer değiştirme vektörü) ile ifade edebiliriz.

Bu durumda;

$$d\vec{r} = d\vec{s} = dx\,\hat{i} + dy\,\hat{j} + dz\,\hat{k}$$

olarak ifade edilir.

q_i genelleştirilmiş koordinatlar olmak üzere;

$d\vec{r}$ ifadesinin q_i koordinatlarına göre diferansiyel açılımı;

$$d\vec{r} = \frac{\partial \vec{r}}{\partial q_i} dq_i$$

olarak verilir.

Büyüklük faktörü;

$$h_i = \left| \frac{\partial \vec{r}}{\partial q_i} \right|$$

Olarak tanımlanır.

Bu durumda;

$$\hat{q}_i = \frac{1}{h_i} \frac{\partial \vec{r}}{\partial q_i}$$

olarak ifade edilirse, $d\vec{r}$ vektörü h_i ve $\hat{q}_i$ ifadeleri ile yeniden yazıldığında;

$$\therefore d\vec{r} = h_i \, dq_i \, \hat{q}_i$$

elde edilir.

Genelleştirilmiş koordinatlar q_1, q_2, q_3 olmak üzere ve x_1, x_2, x_3 kartezyen koordinatlar olmak üzere;

$$x_i(q_1, q_2, q_3) \quad \text{ve} \quad q_i(x_1, x_2, x_3)$$

bağıntılarıyla ifade edilen sistemde,

$$\vec{r} = x_J(q_1, q_2, q_3)\,\hat{e}_J$$

olarak ifade edilirse,

$$\frac{\partial \vec{r}}{\partial q_i} = \frac{\partial x_J(q_1, q_2, q_3)\,\hat{e}_J}{\partial q_i}$$

bağıntısı olarak yazılabilir.

Buradan sağlanan bağıntı ile büyüklük faktörü;

$$h_i = \left| \frac{\partial \vec{r}}{\partial q_i} \right|$$

$$h_i = \sqrt{\left(\frac{\partial x_1}{\partial q_i}\right)^2 + \left(\frac{\partial x_2}{\partial q_i}\right)^2 + \left(\frac{\partial x_3}{\partial q_i}\right)^2}$$

şeklinde yeniden yazılabilir.

$d\vec{r}$ vektörü, h_i ile yeniden yazıldığında;

$$d\vec{r} = \frac{\partial \vec{r}}{\partial q_i} dq_i = h_i \, dq_i \, \hat{q}_i$$

$i = 1, 2, 3 \Rightarrow$

$$\boxed{\therefore \; d\vec{r} = h_1 \, dq_1 \, \hat{q}_1 + h_2 \, dq_2 \, \hat{q}_2 + h_3 \, dq_3 \, \hat{q}_3}$$

olarak bulunur. İlgili koordinat sistemlerinde h_i ifadeleri bulunup yerine yazıldığında $d\vec{s}$ elemanı bulunur.

Küresel Koordinatlar

$$(x, y, z) \longrightarrow (r, \theta, \phi)$$

$$x = r\sin(\theta)\cos(\phi)$$
$$y = r\sin(\theta)\sin(\phi)$$
$$z = r\cos(\theta)$$

(Kartezyen) $d\vec{s} = dx\,\hat{i} + dy\,\hat{j} + dz\,\hat{k}$

$$d\vec{s} = h_1\,dq_1\,\hat{q}_1 + h_2\,dq_2\,\hat{q}_2 + h_3\,dq_3\,\hat{q}_3$$

olarak verilen $d\vec{s}$ ifadesi için;

$$q_1 \equiv r \qquad h_1 \equiv h_r \qquad \hat{q}_1 \equiv \hat{r}$$

$$q_2 \equiv \theta \qquad h_2 \equiv h_\theta \qquad \hat{q}_2 \equiv \hat{\theta}$$

$$q_3 \equiv \phi \qquad h_3 \equiv h_\phi \qquad \hat{q}_3 \equiv \phi$$

ifadeleri ile yeniden yazıldığında $d\vec{s}$ elemanının küresel koordinatlardaki ifadesi;

$$d\vec{s} = h_r \, dr \, \hat{r} + h_\theta \, d\theta \, \hat{\theta} + h_\phi \, d\phi \, \hat{\phi}$$

olarak bulunur. h_r, h_θ, h_ϕ ifadeleri bulunup yerine yazıldığında $d\vec{s}$ elemanını tamamen ifade edebiliriz.

$\boxed{r}$

$$h_r = \sqrt{\left(\frac{\partial x}{\partial r}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial r}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial r}\right)^2}$$

olmak üzere; h_r ifadesinin karesi alınırsa

$$(h_r)^2 = \left(\frac{\partial x}{\partial r}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial r}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial r}\right)^2$$

olarak bulunur.

$$\frac{\partial x}{\partial r} = \sin(\theta)\cos(\phi)$$

$$\frac{\partial y}{\partial r} = \sin(\theta)\sin(\phi)$$

$$\frac{\partial z}{\partial r} = \cos(\theta)$$

Bulunan ifadeler $(h_r)^2$ denkleminde yerine yazılırsa;

$$(h_r)^2 = (\sin(\theta)\cos(\phi))^2 + (\sin(\theta)\sin(\phi))^2 + (\cos(\theta))^2$$

$$(h_r)^2 = \sin^2(\theta)\left(\sin^2(\phi) + \cos^2(\phi)\right) + \cos^2(\theta)$$

$$(h_r)^2 = \sin^2(\theta) + \cos^2(\theta)$$

$$(h_r)^2 = 1$$

$$\therefore h_r = 1$$

olarak bulunur.

θ

$$h_\theta = \sqrt{\left(\frac{\partial x}{\partial \theta}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial \theta}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial \theta}\right)^2}$$

olmak üzere ; h_θ ifadesinin karesi alınırsa

$$(h_\theta)^2 = \left(\frac{\partial x}{\partial \theta}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial \theta}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial \theta}\right)^2$$

olarak bulunur

$$\frac{\partial x}{\partial \theta} = r\cos(\theta)\cos(\phi)$$

$$\frac{\partial y}{\partial \theta} = r\cos(\theta)\sin(\phi)$$

$$\frac{\partial z}{\partial \theta} = -r\sin(\theta)$$

Bulunan ifadeler $(h_\theta)^2$ denkleminde yerine yazılırsa;

$$(h_\theta)^2 = (r\cos(\theta)\cos(\phi))^2 + (r\cos(\theta)\sin(\phi))^2 + (-r\sin(\theta))^2$$

$$(h_\theta)^2 = r^2\cos^2(\theta)\left(\cos^2(\phi) + \sin^2(\phi)\right) + r^2\sin^2(\theta)$$

$$(h_\theta)^2 = r^2\cos^2(\theta) + r^2\sin^2(\theta)$$

$$(h_\theta)^2 = r^2$$

$$\therefore h_\theta = r$$

olarak bulunur.

ϕ

$$h_\phi = \sqrt{\left(\frac{\partial x}{\partial \phi}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial \phi}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial \phi}\right)^2}$$

olmak üzere ; h_ϕ ifadesinin karesi alınırsa

$$(h_\phi)^2 = \left(\frac{\partial x}{\partial \phi}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial \phi}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial \phi}\right)^2$$

olarak bulunur.

$$\frac{\partial x}{\partial \phi} = -r \sin(\theta) \sin(\phi)$$

$$\frac{\partial y}{\partial \phi} = r \sin(\theta) \cos(\phi)$$

$$\frac{\partial z}{\partial \phi} = 0$$

Bulunan ifadeler $(h_\phi)^2$ denkleminde yerine yazılırsa;

$$(h_\phi)^2 = (-r\sin(\theta)\sin(\phi))^2 + (r\sin(\theta)\cos(\phi))^2 + (0)^2$$

$$(h_\phi)^2 = r^2\sin^2(\theta)\left(\sin^2(\phi) + \cos^2(\phi)\right)$$

$$(h_\phi)^2 = r^2\sin^2(\theta)$$

$$\therefore\ h_\phi = r\sin(\theta)$$

olarak bulunur.

$$h_r = 1 \qquad h_\theta = r \qquad h_\phi = r\sin(\theta)$$

Bulunan h_r, h_θ, h_ϕ büyüklük faktörleri yerine yazıldığında, küresel koordinatlardaki $d\vec{s}$ ifadesi;

$$d\vec{s} = h_r\, dr\, \hat{r} + h_\theta\, d\theta\, \hat{\theta} + h_\phi\, d\phi\, \hat{\phi}$$

$$\boxed{\therefore \quad d\vec{s} = dr\, \hat{r} + r\, d\theta\, \hat{\theta} + r\sin(\theta)\, d\phi\, \hat{\phi}}$$

olarak bulunur.

Silindirik Koordinatlar

$$(x, y, z) \longrightarrow (\rho, \phi, z)$$

$$x = \rho \cos(\phi)$$

$$y = \rho \sin(\phi)$$

$$z = z$$

(Kartezyen) $d\vec{s} = dx\,\hat{i} + dy\,\hat{j} + dz\,\hat{k}$

$$d\vec{s} = h_1 dq_1 \hat{q}_1 + h_2 dq_2 \hat{q}_2 + h_3 dq_3 \hat{q}_3$$

olarak verilen $d\vec{s}$ ifadesi için;

$$q_1 \equiv \rho \qquad h_1 \equiv h_\rho \qquad \hat{q}_1 \equiv \hat{\rho}$$

$$q_2 \equiv \phi \qquad h_2 \equiv h_\phi \qquad \hat{q}_2 \equiv \hat{\phi}$$

$$q_3 \equiv z \qquad h_3 \equiv h_z \qquad \hat{q}_3 \equiv \hat{z}$$

ifadeleri ile yeniden yazıldığında $d\vec{s}$ elemanının silindirik koordinatlardaki ifadesi;

$$d\vec{s} = h_\rho \, d\rho \, \hat{\rho} + h_\phi \, d\phi \, \hat{\phi} + h_z \, dz \, \hat{z}$$

olarak bulunur. h_ρ, h_ϕ, h_z ifadeleri bulunup yerine yazıldığında $d\vec{s}$ elemanını tamamen ifade edebiliriz.

ρ

$$h_\rho = \sqrt{\left(\frac{\partial x}{\partial \rho}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial \rho}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial \rho}\right)^2}$$

olmak üzere; h_ρ ifadesinin karesi alınırsa

$$(h_\rho)^2 = \left(\frac{\partial x}{\partial \rho}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial \rho}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial \rho}\right)^2$$

olarak bulunur.

$$\frac{\partial x}{\partial \rho} = \cos(\phi)$$

$$\frac{\partial y}{\partial \rho} = \sin(\phi)$$

$$\frac{\partial z}{\partial \rho} = 0$$

Bulunan ifadeler $(h_\rho)^2$ denkleminde yerine yazılırsa;

$$(h_\rho)^2 = (\cos(\phi))^2 + (\sin(\phi))^2 + (0)^2$$

$$(h_\rho)^2 = \cos^2(\phi) + \sin^2(\phi)$$

$$(h_\rho)^2 = 1$$

$$\therefore h_\rho = 1$$

olarak bulunur.

ϕ

$$h_\phi = \sqrt{\left(\frac{\partial x}{\partial \phi}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial \phi}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial \phi}\right)^2}$$

olmak üzere; h_ϕ ifadesinin karesi alınırsa;

$$(h_\phi)^2 = \left(\frac{\partial x}{\partial \phi}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial \phi}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial \phi}\right)^2$$

olarak bulunur.

$$\frac{\partial x}{\partial \phi} = -\rho \sin(\phi)$$

$$\frac{\partial y}{\partial \phi} = \rho \cos(\phi)$$

$$\frac{\partial z}{\partial \phi} = 0$$

Bulunan ifadeler $(h_\phi)^2$ denkleminde yerine yazılırsa;

$$(h_\phi)^2 = (-\rho\sin(\phi))^2 + (\rho\cos(\phi))^2 + (0)^2$$

$$(h_\phi)^2 = \rho^2\sin^2(\phi) + \rho^2\cos^2(\phi)$$

$$(h_\phi)^2 = \rho^2$$

$$\therefore\ h_\phi = \rho$$

olarak bulunur.

z

$$h_z = \sqrt{\left(\frac{\partial x}{\partial z}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial z}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial z}\right)^2}$$

olmak üzere; h_z ifadesinin karesi alınırsa

$$(h_z)^2 = \left(\frac{\partial x}{\partial z}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial z}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial z}\right)^2$$

olarak bulunur.

$$\frac{\partial x}{\partial z} = 0$$

$$\frac{\partial y}{\partial z} = 0$$

$$\frac{\partial z}{\partial z} = 1$$

Bulunan ifadeler $(h_z)^2$ denkleminde yerine yazılırsa;

$$(h_z)^2 = (0)^2 + (0)^2 + (1)^2$$

$$(h_z)^2 = 1$$

$$\therefore h_z = 1$$

olarak bulunur.

$h_\rho = 1 \qquad h_\phi = \rho \qquad h_z = 1$

Bulunan h_ρ, h_ϕ, h_z büyüklük faktörleri yerine yazıldığında, silindirik koordinatlardaki $d\vec{s}$ ifadesi;

$$d\vec{s} = h_\rho \, d\rho \, \hat{\rho} + h_\phi \, d\phi \, \hat{\phi} + h_z \, dz \, \hat{z}$$

$$\boxed{\therefore \; d\vec{s} = d\rho \, \hat{\rho} + \rho \, d\phi \, \hat{\phi} + dz \, \hat{z}}$$

olarak bulunur.

Soru - 2

Kartezyen koordinatlarda (x, y, z) ile oblate küresel koordinatlar (u, v, ϕ) arasında aşağıdaki gibi bir ilişki vardır;

$$
\left.\begin{aligned}
x &= a.\cosh(u)\cos(v)\cos(\phi) \\
y &= a.\cosh(u)\cos(v)\sin(\phi) \\
z &= a.\sinh(u)\cos(v)
\end{aligned}\right| \quad a = \text{sabit}
$$

Bu ilişkiden yararlanarak

a) Oblate Küresel koordinat sisteminin birim baz vektörlerini bularak ortogonal olup olmadıklarını belirleyiniz.

b) sonsuz küçük çizgi elemanının oblate küresel koordinatlardaki ifadesini elde ediniz.

çözüm

Oblate küresel koordinatlardaki, koordinat eğrilerine teğet vektörleri, Jacobian matrisi ile ifade edersek;

$$J = \frac{\partial(x, y, z)}{\partial(u, v, \phi)}$$

bu ifadeyi açarak matris formuna ulaşabiliriz.

Böylece;

$$J = \frac{\partial(x, y, z)}{\partial(u, v, \phi)} = \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial x}{\partial \phi} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} & \frac{\partial y}{\partial \phi} \\ \frac{\partial z}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial v} & \frac{\partial z}{\partial \phi} \end{bmatrix}$$

olarak bulunur

$$\vec{e}_u = col_1(J) = \left\langle \frac{\partial x}{\partial u}, \frac{\partial y}{\partial u}, \frac{\partial z}{\partial u} \right\rangle$$

$$\vec{e}_v = \mathrm{col}_2(J) = \left\langle \frac{\partial x}{\partial v}, \frac{\partial y}{\partial v}, \frac{\partial z}{\partial v} \right\rangle$$

$$\vec{e}_\phi = \mathrm{col}_3(J) = \left\langle \frac{\partial x}{\partial \phi}, \frac{\partial y}{\partial \phi}, \frac{\partial z}{\partial \phi} \right\rangle$$

Baz vektörlerini bu şekilde belirtebiliriz.

Kısmi türev işlemleri yapıldıktan sonra bu vektörleri;

$$\vec{e}_u = a. \begin{pmatrix} \sinh(u)\sin(v)\cos(\phi) \\ \sinh(u)\sin(v)\sin(\phi) \\ \cosh(u)\cos(v) \end{pmatrix}$$

$$\vec{e}_v = a.\begin{pmatrix} \cosh(u)\cos(v)\cos(\phi) \\ \cosh(u)\cos(v)\sin(\phi) \\ -\sinh(u)\sin(v) \end{pmatrix}$$

$$\vec{e}_\phi = a.\begin{pmatrix} -\cosh(u)\sin(v)\sin(\phi) \\ \cosh(u)\sin(v)\cos(\phi) \\ 0 \end{pmatrix}$$

olarak bulunur.

Birim baz vektörlerini bulmak için h_i büyüklük faktörlerinin bulunması gerekir. Bu durumda birim baz vektörlerini;

$$\hat{u} = \frac{\vec{e}_u}{h_u} \qquad \hat{v} = \frac{\vec{e}_v}{h_v} \qquad \hat{\phi} = \frac{\vec{e}_\phi}{h_\phi}$$

olarak ifade edebiliriz.

$$u \rightarrow h_u = \sqrt{\left(\frac{\partial x}{\partial u}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial u}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial u}\right)^2}$$

$$(h_u)^2 = \left(\frac{\partial x}{\partial u}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial u}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial u}\right)^2$$

$$(h_u)^2 = a^2 \Big((\sinh^2(u) \sin^2(v) \cos^2(\phi)) + (\sinh^2(u) \sin^2(v) \sin^2(\phi)) + (\cosh^2(u) \cos^2(v)) \Big)$$

$$(h_u)^2 = a^2\left(\sinh^2(u)\sin^2(v)\left(\cos^2(\phi)+\sin^2(\phi)\right) + \left(\cosh^2(u)\cos^2(v)\right)\right)$$

$$(h_u)^2 = a^2\left(\sinh^2(u)\sin^2(v) + \cosh^2(u)\cos^2(v)\right)$$

$$\cosh^2(a) - \sinh^2(a) = 1$$

olduğuna göre,

$$(h_u)^2 = a^2\left(\sinh^2(u) + \cos^2(v)\right)$$

$$\therefore\ h_u = a\sqrt{\sinh^2(u)+\cos^2(v)}$$

olarak bulunur.

$$\nu \rightarrow h_\nu = \sqrt{\left(\frac{\partial x}{\partial \nu}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial \nu}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial \nu}\right)^2}$$

$$(h_\nu)^2 = \left(\frac{\partial x}{\partial \nu}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial \nu}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial \nu}\right)^2$$

$$(h_\nu)^2 = a^2\Big((\cosh^2(u)\cos^2(\nu)\cos^2(\phi)) + (\cosh^2(u)\cos^2(\nu)\sin^2(\phi)) + (\sinh^2(u)\sin^2(\nu))\Big)$$

$$(h_\nu)^2 = a^2\Big(\cosh^2(u)\cos^2(\nu)\left(\cos^2(\phi) + \sin^2(\phi)\right) + \sinh^2(u)\sin^2(\nu)\Big)$$

$$(h_\nu)^2 = a^2\left(\cosh^2(u)\cos^2(\nu) + \sinh^2(u)\sin^2(\nu)\right)$$

$$\cosh^2(a) - \sinh^2(a) = 1$$

olduğuna göre

$$(h_\nu)^2 = a^2\left(\cosh^2(u) - \sin^2(\nu)\right)$$

$$\therefore h_\nu = a\sqrt{\cosh^2(u) - \sin^2(\nu)}$$

olarak bulunur.

$$\phi \rightarrow h_\phi = \sqrt{\left(\frac{\partial x}{\partial \phi}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial \phi}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial \phi}\right)^2}$$

$$(h_\phi)^2 = \left(\frac{\partial x}{\partial \phi}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial \phi}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial \phi}\right)^2$$

$$(h_\phi)^2 = a^2\left(\left(-\cosh(u)\sin(v)\sin(\phi)\right)^2 + \left(\cosh(u)\sin(v)\cos(\phi)\right)^2 + (0)^2\right)$$

$$(h_\phi)^2 = a^2\cosh^2(u)\sin^2(v)\left(\sin^2(\phi)+\cos^2(\phi)\right)$$

$$(h_\phi)^2 = a^2\cosh^2(u)\sin^2(v)$$

$$\therefore h_\phi = a\cosh(u)\sin(v)$$

olarak bulunur.

Bulunan h_u, h_v, h_ϕ büyüklük faktörlerini birim baz vektörlerini bulmak için kullandığımızda;

$$\hat{u} = \frac{\vec{e}_u}{h_u} = \frac{1}{a\sqrt{\sinh^2(u) + \cos^2(v)}} \cdot a \begin{pmatrix} \sinh(u)\sin(v)\cos(\phi) \\ \sinh(u)\sin(v)\sin(\phi) \\ \cosh(u)\cos(v) \end{pmatrix}$$

$$\hat{v} = \frac{\vec{e}_v}{h_v} = \frac{1}{a.\sqrt{\cosh^2(u) - \sin^2(v)}} \cdot a \begin{pmatrix} \cosh(u)\cos(v)\cos(\phi) \\ \cosh(u)\cos(v)\sin(\phi) \\ -\sinh(u)\sin(v) \end{pmatrix}$$

$$\hat{\phi} = \frac{\vec{e}_\phi}{h_\phi} = \frac{1}{a.\cosh(u)\sin(v)} \cdot a \begin{pmatrix} -\cosh(u)\sin(v)\sin(\phi) \\ \cosh(u)\sin(v)\cos(\phi) \\ 0 \end{pmatrix}$$

olarak bulunur.

Birim baz vektörlerinin ortogonal olma durumlarının kontrolü;

$$\hat{u} \circ \hat{v} = \frac{\vec{e}_u \cdot \vec{e}_v}{h_u \cdot h_v} \longrightarrow \vec{e}_u \cdot \vec{e}_v = 0 \Rightarrow \hat{u} \cdot \hat{v} = 0$$

$$\vec{e}_u \cdot \vec{e}_v = a^2\Big(\big(\sinh(u)\cosh(u)\sin(v)\cos(v)\cos^2(\phi)\big)$$
$$+ \big(\sinh(u)\cosh(u)\sin(v)\cos(v)\sin^2(\phi)\big)$$
$$+ \big(-\sinh(u)\cosh(u)\sin(v)\cos(v)\big)\Big)$$

$$\vec{e}_u \cdot \vec{e}_v = a^2 \sinh(u)\cosh(u)\sin(v)\cos(v)\big(\cos^2(\phi) + \sin^2(\phi) - 1\big)$$

$$\therefore \vec{e}_u \cdot \vec{e}_v = 0 \quad \Rightarrow \quad \therefore \hat{u} \cdot \hat{v} = 0$$

olarak bulunur.

$$\hat{u} \cdot \hat{\phi} = \frac{\vec{e}_u \cdot \vec{e}_\phi}{h_u \cdot h_\phi} \rightarrow \vec{e}_u \cdot \vec{e}_\phi = 0 \Rightarrow \hat{u} \cdot \hat{\phi} = 0$$

$$\vec{e}_u \cdot \vec{e}_\phi = a^2\Big(\big(-\sinh(u)\cosh(u)\sin^2(v)\cos(\phi)\sin(\phi)\big) + \big(\sinh(u)\cosh(u)\sin^2(v)\sin(\phi)\cos(\phi)\big) + (0)\Big)$$

$$\therefore \vec{e}_u \cdot \vec{e}_\phi = a^2(0) = 0 \Rightarrow \therefore \hat{u} \cdot \hat{\phi} = 0$$

olarak bulunur.

$$\hat{v} \cdot \hat{\phi} = \frac{\vec{e}_v \cdot \vec{e}_\phi}{h_v \cdot h_\phi} \rightarrow \vec{e}_v \cdot \vec{e}_\phi = 0 \Rightarrow \hat{v} \cdot \hat{\phi} = 0$$

$$\vec{e}_v \cdot \vec{e}_\phi = a^2\Big(\big(-\cosh^2(u)\cos(v)\sin(v)\cos(\phi)\sin(\phi)\big)$$
$$+\big(\cosh^2(u)\cos(v)\sin(v)\sin(\phi)\cos(\phi)\big)$$
$$+(0)\Big)$$

$$\therefore \vec{e}_v \cdot \vec{e}_\phi = 0 \Rightarrow \therefore \hat{v} \cdot \hat{\phi} = 0$$ olarak bulunur.

Sonuç olarak

$$\boxed{\hat{u} \cdot \hat{v} = 0 \qquad \hat{u} \cdot \hat{\phi} = 0 \qquad \hat{v} \cdot \hat{\phi} = 0}$$

olduğuna göre oblate küresel koordinat sistemi ortogonaldir.

$d\vec{s}$ elemanını bulmak için bulunan h_i ifadelerini bulduğumuz $d\vec{s}$ eşitliğine yerleştirirsek;

$$d\vec{s} = h_1 dq_1 \hat{q}_1 + h_2 dq_2 \hat{q}_2 + h_3 dq_3 \hat{q}_3$$

$$q_1 \equiv u \qquad h_1 \equiv h_u \qquad \hat{q}_1 \equiv \hat{u}$$
$$q_2 \equiv v \qquad h_2 \equiv h_v \qquad \hat{q}_2 \equiv \hat{v}$$
$$q_3 \equiv \phi \qquad h_3 \equiv h_\phi \qquad \hat{q}_3 \equiv \hat{\phi}$$

$$d\vec{s} = h_u du \hat{u} + h_v dv \hat{v} + h_\phi d\phi \hat{\phi}$$

$$\boxed{\begin{aligned} \therefore\ d\vec{s} = \ & a\sqrt{\sinh^2(u) + \cos^2(v)}\, du\, \hat{u} \\ & + a\sqrt{\cosh^2(u) - \sin^2(v)}\, dv\, \hat{v} \\ & + a\cosh(u)\sin(v)\, d\phi\, \hat{\phi} \end{aligned}}$$

olarak bulunur.

Soru - 3

Indislerden ve bazı özel tensörlerden yararlanarak aşağıda verilen vektör eşitliklerini her zaman her vektör için doğru olduğunu gösteriniz.

a) $\vec{A}\cdot(\vec{A}\times\vec{B}) = 0 \quad ; \quad \vec{A} \neq \vec{B}$

b) $\vec{A}\times(\vec{B}\times\vec{C}) + \vec{B}\times(\vec{C}\times\vec{A}) + \vec{C}\times(\vec{A}\times\vec{B}) = 0$

c) $|\vec{A}\times\vec{B}|^2 = |\vec{A}|^2 + |\vec{B}|^2 - (\vec{A}\cdot\vec{B})^2$

Çözüm

Öncelikle bu özdeşlikler her zaman her vektör için değil, tanımını yapacağımız ve bu özdeşlikleri sağlayacak sistem için geçerli olacaktır.

$\vec{A}, \vec{B}, \vec{C} \in T_p\mathbb{R}^3$ olmak üzere;

$$\vec{A}\cdot(\vec{A}\times\vec{B}) = A_i(\vec{A}\times\vec{B})_i$$
$$= A_i\,\epsilon_{ijk}A_jB_k$$
$$= B_k\,\epsilon_{ijk}A_iA_j$$

$\epsilon_{ijk} = \epsilon_{kij}$ olduğuna göre

$$\vec{A}\cdot(\vec{A}\times\vec{B}) = B_k\,\epsilon_{kij}A_iA_j$$
$$= B_k(\vec{A}\times\vec{A})_k$$
$$= \vec{B}\cdot(\vec{A}\times\vec{A})$$

$$\vec{A} \times \vec{A} = \vec{0}$$ olduğuna göre;

$$\boxed{\therefore \vec{A} \cdot (\vec{A} \times \vec{B}) = 0}$$ olarak bulunur.

$$\vec{A} \times (\vec{B} \times \vec{C}) + \vec{B} \times (\vec{C} \times \vec{A}) + \vec{C} \times (\vec{A} \times \vec{B}) = \vec{0}$$

$$= \epsilon_{ijk} A_j (\vec{B} \times \vec{C})_k + \epsilon_{ijk} B_j (\vec{C} \times \vec{A})_k + \epsilon_{ijk} C_j (\vec{A} \times \vec{B})_k$$

$$= \epsilon_{ijk} A_j \epsilon_{kmn} B_m C_n + \epsilon_{ijk} B_j \epsilon_{kmn} C_m A_n + \epsilon_{ijk} C_j \epsilon_{kmn} A_m B_n$$

- $= \epsilon_{ijk} \epsilon_{kmn} (A_j B_m C_n + B_j C_m A_n + C_j A_m B_n)$

$$\epsilon_{ijk} = \epsilon_{kij}$$ olduğuna göre

- $= \epsilon_{kij} \epsilon_{kmn} (A_j B_m C_n + B_j C_m A_n + C_j A_m B_n)$

$$\epsilon_{kij} \epsilon_{kmn} = \delta_{im} \delta_{jn} - \delta_{in} \delta_{jm}$$

olduğuna göre

$$= (\delta_{im}\delta_{jn} - \delta_{in}\delta_{jm})(A_j B_m C_n + B_j C_m A_n + C_j A_m B_n)$$

$$= (A_j B_i C_j + B_n C_i A_n + C_n A_i B_n - A_m B_m C_i - B_m C_m A_i - C_m A_m B_i)$$

$$= \left(B_i(\vec{A}\cdot\vec{C}) + C_i(\vec{B}\cdot\vec{A}) + A_i(\vec{C}\cdot\vec{B}) - C_i(\vec{A}\cdot\vec{B}) - A_i(\vec{B}\cdot\vec{C}) - B_i(\vec{C}\cdot\vec{A})\right)$$

$$\boxed{\therefore\ \vec{A}\times(\vec{B}\times\vec{C}) + \vec{B}\times(\vec{C}\times\vec{A}) + \vec{C}\times(\vec{A}\times\vec{B}) = \vec{0}}$$

olarak bulunur ve Jacobi özdeşliği olarak bilinir.

$$|\vec{A}\times\vec{B}|^2 = \left(\sqrt{(\vec{A}\times\vec{B})\cdot(\vec{A}\times\vec{B})}\right)^2$$

$$= (\vec{A}\times\vec{B})\cdot(\vec{A}\times\vec{B})$$

$$= (\vec{A}\times\vec{B})_i\,(\vec{A}\times\vec{B})_i$$

$$= \epsilon_{ijk} A_j B_k \, \epsilon_{imn} A_m B_n$$

$$= \epsilon_{ijk}\,\epsilon_{imn}\, A_j B_k A_m B_n$$

$$\epsilon_{ijk}\epsilon_{imn} = \delta_{jm}\delta_{kn} - \delta_{jn}\delta_{km}$$ olduğuna göre

$$= (\delta_{jm}\delta_{kn} - \delta_{jn}\delta_{km}) A_j B_k A_m B_n$$

$$= A_m B_n A_m B_n - A_n B_m A_m B_n$$

$$= (\vec{A}\cdot\vec{A})(\vec{B}\cdot\vec{B}) - (\vec{A}\cdot\vec{B})(\vec{A}\cdot\vec{B})$$

$$\boxed{\therefore\ |\vec{A}\times\vec{B}|^2 = |\vec{A}|^2\cdot|\vec{B}|^2 - (\vec{A}\cdot\vec{B})^2}$$ olarak bulunur.