

Teorik/Klasik Mekanik
Güz 2025-2026
Ödev 1

Teslim: 26 Ekim 2025

Ad-Soyad: Tunay Ertürk
Öğrenci No: 082420024

Teorik Mekanik Dersinin birinci ödevi, bu sayfa da dahil olmak üzere, 2 sayfadan oluşmakta ve 3 soru bulunmaktadır. Aşağıda listelenmiş olan konulara özen göstererek çözümlerinizi hazırlamanız çoğu zaman beklediğinizden daha iyi not almanızı sağlayacağı gibi, öğrenmenize de katkıda bulunacaktır.

- ★ Yazınızın okunaklı olması çözümlerinizin ve notlandırılmasının daha kolay ve net bir şekilde olmasını sağlayacaktır.
- ★ Kullandığınız sembollerin anlamlarını ilgili yerlerde açıklamanız çözümlerinizi daha anlaşılır kıracaktır.
- ★ İşlemlerinizi anlaşılır bir sırayla ve gerekli açıklamalarla sunmanız beklenmektedir.
- ★ Aşağıda verilen tabloyu boş bırakınız.

Kazanımlar:

1. Klasik Mekaniğin temel kavramları
2. Lagrange Hareket Denklemleri
3. Merkezcik Kuvvet Alanında hareket
4. Katı Cisimlerin Hareketi
5. Karmaşık Sistemlerin Dinamiği

Question:	1	2	3	Total
Points:	30	40	30	100
Kazanımlar	1	1	1	
Score:				

1. Kartezyen koordinatlarda $d\vec{S} = dx\hat{i} + dy\hat{j} + dz\hat{k}$ olarak tanımlanan sonsuz küçük çizgi elemanını
 - (a) (20 points) Küresel koordinatlardaki ifadesini elde ediniz.
 - (b) (10 points) Silindirik koordinatlardaki ifadesini elde ediniz.
2. Kartezyen koordinatlar (x, y, z) ile oblate (basık) küresel koordinatlar (u, v, ϕ) arasında aşağıdaki gibi bir ilişki vardır:

$$\begin{aligned}x &= a \cosh(u) \cos(v) \cos(\phi) \\y &= a \cosh(u) \cos(v) \sin(\phi) \quad , \quad a = \text{sabit} \\z &= a \sinh(u) \cos(v)\end{aligned}$$

Bu ilişkiden yararlanarak

- (a) (20 points) Oblate küresel koordinat sisteminin birim baz vektörlerini bularak ortogonal olup olmadıklarını belirleyiniz.
 - (b) (20 points) Sonsuz küçük çizgi elemanın oblate küresel koordinatlardaki ifadesini elde ediniz.
3. İndislerden ve bazı özel tensörlerden yararlanarak aşağıda verilen vektör eşitliklerinin her zaman her vektör için doğru olduğunu gösteriniz.
 - (a) (10 points) $\vec{A} \cdot (\vec{A} \times \vec{B}) = 0 ; \quad \vec{A} \neq \vec{B}$
 - (b) (10 points) $\vec{A} \times (\vec{B} \times \vec{C}) + \vec{B} \times (\vec{C} \times \vec{A}) + \vec{C} \times (\vec{A} \times \vec{B}) = 0$
 - (c) (10 points) $|\vec{A} \times \vec{B}|^2 = |\vec{A}|^2 + |\vec{B}|^2 - (\vec{A} \cdot \vec{B})^2$

Teorik / Klasik Mekanik - Ödev 1

082420024

Tunay Ertürk

Soru - 1

Kartezyen koordinatlarda $d\vec{s} = dx\hat{i} + dy\hat{j} + dz\hat{k}$
olarak tanımlanan sonsuz küçük çizgi elemesini

- Küresel Koordinatlardaki ifadesini elde ediniz
- Silindirik Koordinatlardaki ifadesini elde ediniz

ÇÖZÜM

Küresel ve Silindirik Koordinat Sistemleri ortogonal sistemler olduğundan dolayı, sonsuz küçük çizgi elemanı, büyüklük faktörü kullanılarak bulunabilir.

Daha genel bir ifade olması içtn $d\vec{s}$ yerine $d\vec{r}$ (sonsuz küçük yer değiştirmeye vektörü) ile ifade edebiliriz.

Bu durumda;

$$d\vec{r} = d\vec{s} = dx\hat{i} + dy\hat{j} + dz\hat{k}$$

olarak ifade edilir.

q_i genelleştirilmiş koordinatlar olmak üzere;

$d\vec{r}$ ifadesinin q_i koordinatlarına göre diferansiyel açılımı;

$$d\vec{r} = \frac{\partial \vec{r}}{\partial q_i} dq_i$$

olarak verilir.

Büyükük faktörü;

$$h_i = \left| \frac{\partial \vec{r}}{\partial q_i} \right|$$

Olarak tanımlanır.

Bu durumda;

$$\hat{q}_i = \frac{1}{h_i} \frac{\partial \vec{r}}{\partial q_i}$$

olarak ifade edilirse, $d\vec{r}$ vektörü h_i ve \hat{q}_i ifadeleri ile yeniden yazılığında;

$$\therefore d\vec{r} = h_i dq_i \hat{q}_i$$

elde edili r.

Genelleştirilmiş koordinatlar q_1, q_2, q_3 olmak üzere ve x_1, x_2, x_3 kartezyen koordinatlar olmak üzere;

$x_i(q_1, q_2, q_3)$ ve $q_i(x_1, x_2, x_3)$

bağıntılarıyla ifade edilen sisteme,

$$\vec{r} = x_j(q_1, q_2, q_3) \hat{e}_j$$

olarak ifade edilirse,

$$\frac{\partial \vec{r}}{\partial q_i} = \frac{\partial x_j(q_1, q_2, q_3)}{\partial q_i} \hat{e}_j$$

bağıntısı olarak yazılabilir.

Buradan sağlanan bağıntı ile
büyüklik faktörü ;

$$h_i = \left| \frac{\partial \vec{r}}{\partial q_i} \right|$$

$$h_i = \sqrt{\left(\frac{\partial x_1}{\partial q_i} \right)^2 + \left(\frac{\partial x_2}{\partial q_i} \right)^2 + \left(\frac{\partial x_3}{\partial q_i} \right)^2}$$

şeklinde yeniden yazılabilir.

\vec{dr} vektörü, h_i ile yeniden yazıldığında;

$$d\vec{r} = \frac{\partial \vec{r}}{\partial q_i} dq_i = h_i dq_i \hat{q}_i$$

$$i=1,2,3 \Rightarrow$$

$$\therefore d\vec{r} = h_1 dq_1 \hat{q}_1 + h_2 dq_2 \hat{q}_2 + h_3 dq_3 \hat{q}_3$$

olarak bulunur. İlgili koordinat sistemlerinde h_i ifadeleri bulunup yerine yazılıdığında $d\vec{s}$ elemanı bulunur.

Küresel Koordinatlar

$$(x, y, z) \rightarrow (r, \theta, \phi)$$

$$x = r \sin(\theta) \cos(\phi)$$

$$y = r \sin(\theta) \sin(\phi)$$

$$z = r \cos(\theta)$$

(Kartezyen) $d\vec{s} = dx\hat{i} + dy\hat{j} + dz\hat{k}$

$$d\vec{s} = h_1 dq_1 \hat{q}_1 + h_2 dq_2 \hat{q}_2 + h_3 dq_3 \hat{q}_3$$

olarak verilen $d\vec{s}$ ifadesi için;

$$q_1 \equiv r$$

$$h_1 \equiv h_r$$

$$\hat{q}_1 \equiv \hat{r}$$

$$q_2 \equiv \theta$$

$$h_2 \equiv h_\theta$$

$$\hat{q}_2 \equiv \hat{\theta}$$

$$q_3 \equiv \phi$$

$$h_3 \equiv h_\phi$$

$$\hat{q}_3 \equiv \phi$$

İfadeleri ile yeniden yazılığında $d\vec{s}$ elementinin küresel koordinatlardaki ifadesi;

$$d\vec{s} = h_r dr \hat{r} + h_\theta d\theta \hat{\theta} + h_\phi d\phi \hat{\phi}$$

olarak bulunur. h_r , h_θ , h_ϕ ifadeleri bulunup yerine yazılığında $d\vec{s}$ elementini tamamen ifade edebiliriz.

r

$$h_r = \sqrt{\left(\frac{\partial x}{\partial r}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial r}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial r}\right)^2}$$

olmak üzere; h_r ifadesinin karesi alınırsa

$$(h_r)^2 = \left(\frac{\partial x}{\partial r}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial r}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial r}\right)^2$$

olarak bulunur.

$$\frac{\partial x}{\partial r} = \sin(\theta) \cos(\phi)$$

$$\frac{\partial y}{\partial r} = \sin(\theta) \sin(\phi)$$

$$\frac{\partial z}{\partial r} = \cos(\theta)$$

Bulunan ifadeler $(h_r)^2$ denkleminde yerine
yazılırsak;

$$(h_r)^2 = (\sin(\theta)\cos(\phi))^2 + (\sin(\theta)\sin(\phi))^2 + (\cos(\theta))^2$$

$$(h_r)^2 = \sin^2(\theta)(\sin^2(\phi) + \cos^2(\phi)) + \cos^2(\theta)$$

$$(h_r)^2 = \sin^2(\theta) + \cos^2(\theta)$$

$$(h_r)^2 = 1$$

$$\therefore h_r = 1$$

olarak bulunur.

θ

$$h_{\theta} = \sqrt{\left(\frac{\partial x}{\partial \theta}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial \theta}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial \theta}\right)^2}$$

olmak üzere; h_{θ} ifadesinin karesi alınırsa

$$(h_{\theta})^2 = \left(\frac{\partial x}{\partial \theta}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial \theta}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial \theta}\right)^2$$

olarak bulunur

$$\frac{\partial x}{\partial \theta} = r \cos(\theta) \cos(\phi)$$

$$\frac{\partial y}{\partial \theta} = r \cos(\theta) \sin(\phi)$$

$$\frac{\partial z}{\partial \theta} = -r \sin(\theta)$$

Bulunan ifadeler $(h_\theta)^2$ denkleminde yerine yazılırsa;

$$(h_\theta)^2 = (r \cos(\theta) \cos(\phi))^2 + (r \cos(\theta) \sin(\phi))^2 + (-r \sin(\theta))^2$$

$$(h_\theta)^2 = r^2 \cos^2(\theta) (\cos^2(\phi) + \sin^2(\phi)) + r^2 \sin^2(\theta)$$

$$(h_\theta)^2 = r^2 \cos^2(\theta) + r^2 \sin^2(\theta)$$

$$(h_\theta)^2 = r^2$$

$$\therefore h_\theta = r$$

olarak bulunur.

ϕ

$$h_\phi = \sqrt{\left(\frac{\partial x}{\partial \phi}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial \phi}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial \phi}\right)^2}$$

olmak üzere ; h_ϕ ifadesinin Karesi alınırsa

$$(h_\phi)^2 = \left(\frac{\partial x}{\partial \phi}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial \phi}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial \phi}\right)^2$$

olarak bulunur.

$$\frac{\partial x}{\partial \phi} = -r \sin(\theta) \sin(\phi)$$

$$\frac{\partial y}{\partial \phi} = r \sin(\theta) \cos(\phi)$$

$$\frac{\partial z}{\partial \phi} = 0$$

Bulunan ifadeler $(h_\phi)^2$ denkleminde yerine yazılırsa;

$$(h_\phi)^2 = (-r \sin(\theta) \sin(\phi))^2 + (r \sin(\theta) \cos(\phi))^2 + (0)^2$$

$$(h_\phi)^2 = r^2 \sin^2(\theta) (\sin^2(\phi) + \cos^2(\phi))$$

$$(h_\phi)^2 = r^2 \sin^2(\theta)$$

$$\therefore h_\phi = r \sin(\theta)$$

olarak bulunur.

$$h_r = 1 \quad h_\theta = r \quad h_\phi = r \sin(\theta)$$

Bulunan h_r , h_θ , h_ϕ büyüklük faktörleri yerine
yazıldığında, küresel koordinatlardaki $d\vec{s}$ ifadesi;

$$d\vec{s} = h_r dr \hat{r} + h_\theta d\theta \hat{\theta} + h_\phi d\phi \hat{\phi}$$

$$\therefore d\vec{s} = dr \hat{r} + r d\theta \hat{\theta} + r \sin(\theta) d\phi \hat{\phi}$$

olarak bulunur.

Silindirik Koordinatlar

$$(x, y, z) \rightarrow (\rho, \phi, z)$$

$$x = \rho \cos(\phi)$$

$$y = \rho \sin(\phi)$$

$$z = z$$

(Kartezyen) $d\vec{s} = dx\hat{i} + dy\hat{j} + dz\hat{k}$

$$d\vec{s} = h_1 dq_1 \hat{q}_1 + h_2 dq_2 \hat{q}_2 + h_3 dq_3 \hat{q}_3$$

olarak verilen $d\vec{s}$ ifadesi için;

$$q_1 \equiv \varrho$$

$$h_1 \equiv h_\varrho$$

$$\hat{q}_1 \equiv \hat{\varrho}$$

$$q_2 \equiv \phi$$

$$h_2 \equiv h_\phi$$

$$\hat{q}_2 \equiv \hat{\phi}$$

$$q_3 \equiv z$$

$$h_3 \equiv h_z$$

$$\hat{q}_3 \equiv \hat{z}$$

ifadeleri ile yeniden yazıldığında $d\vec{s}$ elemanın silindirik koordinatlardaki ifadesi;

$$d\vec{s} = h_\varrho d\varrho \hat{\varrho} + h_\phi d\phi \hat{\phi} + h_z dz \hat{z}$$

olarak bulunur. h_ϱ , h_ϕ , h_z ifadeleri bulunup yerine yazıldığında $d\vec{s}$ elemanın tamamen ifade edebiliriz.

P |

$$h_g = \sqrt{\left(\frac{\partial x}{\partial g}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial g}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial g}\right)^2}$$

olmak üzere; h_g ifadesinin karesi alınırsa

$$(h_g)^2 = \left(\frac{\partial x}{\partial g}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial g}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial g}\right)^2$$

olarak bulunur.

$$\frac{\partial x}{\partial g} = \cos(\phi)$$

$$\frac{\partial y}{\partial g} = \sin(\phi)$$

$$\frac{\partial z}{\partial g} = 0$$

Bulunan ifadeler $(h_p)^2$ denkleminde yerine
yazılırsa;

$$(h_p)^2 = (\cos(\phi))^2 + (\sin(\phi))^2 + (o)^2$$

$$(h_p)^2 = \cos^2(\phi) + \sin^2(\phi)$$

$$(h_p)^2 = 1$$

$$\therefore h_p = 1$$

olarak bulunur.

ϕ

$$h_\phi = \sqrt{\left(\frac{\partial x}{\partial \phi}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial \phi}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial \phi}\right)^2}$$

olmak üzere; h_ϕ ifadesinin karesi alınırsa;

$$(h_\phi)^2 = \left(\frac{\partial x}{\partial \phi}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial \phi}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial \phi}\right)^2$$

olarak bulunur.

$$\frac{\partial x}{\partial \phi} = -\rho \sin(\phi)$$

$$\frac{\partial y}{\partial \phi} = \rho \cos(\phi)$$

$$\frac{\partial z}{\partial \phi} = 0$$

Bulunan ifadeler $(h_\phi)^2$ denkleminde yerine yazılırsa;

$$(h_\phi)^2 = (-\rho \sin(\phi))^2 + (\rho \cos(\phi))^2 + (0)^2$$

$$(h_\phi)^2 = \rho^2 \sin^2(\phi) + \rho^2 \cos^2(\phi)$$

$$(h_\phi)^2 = \rho^2$$

$$\therefore h_\phi = \rho$$

olarak bulunur.

$$h_z = \sqrt{\left(\frac{\partial x}{\partial z}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial z}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial z}\right)^2}$$

olmak üzere; h_z ifadesinin karesi alınırsa

$$(h_{xz})^2 = \left(\frac{\partial x}{\partial z}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial z}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial z}\right)^2$$

olarak bulunur.

$$\frac{\partial x}{\partial z} = 0$$

$$\frac{\partial y}{\partial z} = 0$$

$$\frac{\partial z}{\partial z} = 1$$

Bulunan ifadeler $(h_z)^2$ denkleminde yerine
yazılırsa;

$$(h_z)^2 = (0)^2 + (0)^2 + (1)^2$$

$$(h_z)^2 = 1$$

$$\therefore h_z = 1$$

olarak bulunur.

$$h_\rho = 1 \quad h_\phi = \varrho \quad h_z = 1$$

Bulunan h_ρ , h_ϕ , h_z büyüklük faktörleri yerine yazıldığında, silindirik koordinatlardaki $d\vec{s}$ ifadesi;

$$d\vec{s} = h_\rho d\rho \hat{\rho} + h_\phi d\phi \hat{\phi} + h_z dz \hat{z}$$

$$\therefore d\vec{s} = d\rho \hat{\rho} + \varrho d\phi \hat{\phi} + dz \hat{z}$$

olarak bulunur.

Soru - 2

Kartezyen koordinatlarda (x, y, z) ile oblate küresel koordinatlar (u, v, ϕ) arasında aşağıdaki gibi bir ilişki vardır;

$$x = a \cdot \cosh(u) \cos(v) \cos(\phi)$$

$$y = a \cdot \cosh(u) \cos(v) \sin(\phi)$$

$$z = a \cdot \sinh(u) \cos(v)$$

$a = \text{sabit}$

Bu ilişkiden yararlanarak

- a) Oblate Küresel Koordinat sisteminin birim baz vektörlerini bularak ortogonal olup olma-

diklerini belirleyiniz.

b) sonsuz küçük çizgi elemanın oblate kürsel Koordinatlardaki ifadesini elde ediniz.

Cözüm

Oblate kürsel Koordinatlardaki, Koordinat egrilerine teget vektörleri, Jacobian matrisi ile ifade edersek;

$$J = \frac{\partial(x, y, z)}{\partial(u, v, \phi)}$$

bu ifadeyi açarak matris formuna ulaşabiliriz.

Böyledice;

$$\mathcal{J} = \frac{\partial(x, y, z)}{\partial(u, v, \phi)} =$$

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial x}{\partial \phi} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} & \frac{\partial y}{\partial \phi} \\ \frac{\partial z}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial v} & \frac{\partial z}{\partial \phi} \end{bmatrix}$$

olarak bulunur

$$\vec{e}_u = \text{col}_1(\mathcal{J}) = \left\langle \frac{\partial x}{\partial u}, \frac{\partial y}{\partial u}, \frac{\partial z}{\partial u} \right\rangle$$

$$\vec{e}_v = \text{col}_2(J) = \left\langle \frac{\partial x}{\partial v}, \frac{\partial y}{\partial v}, \frac{\partial z}{\partial v} \right\rangle$$

$$\vec{e}_\phi = \text{col}_3(J) = \left\langle \frac{\partial x}{\partial \phi}, \frac{\partial y}{\partial \phi}, \frac{\partial z}{\partial \phi} \right\rangle$$

Baz vektörlerini bu şekilde belirtebiliriz.

Kısmi türev işlemleri yapıldıktan sonra bu vektörler;

$$\vec{e}_u = a \begin{pmatrix} \sinh(u) \sin(v) \cos(\phi) \\ \sinh(u) \sin(v) \sin(\phi) \\ \cosh(u) \cos(v) \end{pmatrix}$$

$$\vec{e}_v = a \cdot \begin{pmatrix} \cosh(u) \cos(v) \cos(\phi) \\ \cosh(u) \cos(v) \sin(\phi) \\ -\sinh(u) \sin(v) \end{pmatrix}$$

$$\vec{e}_\phi = a \cdot \begin{pmatrix} -\cosh(u) \sin(v) \sin(\phi) \\ \cosh(u) \sin(v) \cos(\phi) \\ 0 \end{pmatrix}$$

olarak bulunur.

Birim baz vektörlerini bulmak için h_i büyüklük faktörlerinin bulunması gerekdir. Bu durumda birim baz vektörlerini;

$$\hat{u} = \frac{\vec{e}_u}{h_u} \quad \hat{v} = \frac{\vec{e}_v}{h_v} \quad \hat{\phi} = \frac{\vec{e}_\phi}{h_\phi}$$

Olarak ifade edebiliriz.

$$u \rightarrow h_u = \sqrt{\left(\frac{\partial x}{\partial u}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial u}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial u}\right)^2}$$

$$(h_u)^2 = \left(\frac{\partial x}{\partial u}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial u}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial u}\right)^2$$

$$(h_u)^2 = a^2 \left((\sinh^2(u) \sin^2(v) \cos^2(\phi)) + (\sinh^2(u) \sin^2(v) \sin^2(\phi)) + (\cosh^2(u) \cos^2(v)) \right)$$

$$(hu)^2 = a^2 \left(\sinh^2(u) \sin^2(v) (\cos^2(\phi) + \sin^2(\phi)) + (\cosh^2(u) \cos^2(v)) \right)$$

$$(hu)^2 = a^2 \left(\sinh^2(u) \sin^2(v) + \cosh^2(u) \cos^2(v) \right)$$

$$\cosh^2(a) - \sinh^2(a) = 1$$

olduguuna gøre,

$$(hu)^2 = a^2 (\sinh^2(u) + \cos^2(v))$$

$$\therefore hu = a \sqrt{\sinh^2(u) + \cos^2(v)}$$

olarak bulunur.

$$2 \rightarrow h_v = \sqrt{\left(\frac{\partial x}{\partial v}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial v}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial v}\right)^2}$$

$$(h_v)^2 = \left(\frac{\partial x}{\partial v}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial v}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial v}\right)^2$$

$$\begin{aligned} (h_v)^2 &= a^2 \left((\cosh^2(u) \cos^2(v) \cos^2(\phi)) \right. \\ &\quad + (\cosh^2(u) \cos^2(v) \sin^2(\phi)) \\ &\quad \left. + (\sinh^2(u) \sin^2(v)) \right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (h_v)^2 &= a^2 \left(\cosh^2(u) \cos^2(v) (\cos^2(\phi) + \sin^2(\phi)) \right. \\ &\quad \left. + \sinh^2(u) \sin^2(v) \right) \end{aligned}$$

$$(h_v)^2 = a^2 (\cosh^2(u) \cos^2(v) + \sinh^2(u) \sin^2(v))$$

$$\cosh^2(a) - \sinh^2(a) = 1$$

olduğuna göre

$$(h_v)^2 = a^2 (\cosh^2(u) - \sin^2(v))$$

$$\therefore h_v = a \sqrt{\cosh^2(u) - \sin^2(v)}$$

olarak bulunur.

$$\phi \rightarrow h_\phi = \sqrt{\left(\frac{\partial x}{\partial \phi}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial \phi}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial \phi}\right)^2}$$

$$(h_\phi)^2 = \left(\frac{\partial x}{\partial \phi}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial \phi}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial \phi}\right)^2$$

$$(h_\phi)^2 = a^2 \left((-\cosh(u) \sin(v) \sin(\phi))^2 + (\cosh(u) \sin(v) \cos(\phi))^2 + (0)^2 \right)$$

$$(h_\phi)^2 = a^2 \cosh^2(u) \sin^2(v) (\sin^2(\phi) + \cos^2(\phi))$$

$$(h_\phi)^2 = a^2 \cosh^2(u) \sin^2(v)$$

$$\therefore h_\phi = a \cosh(u) \sin(v)$$

olarak bulunur.

Bulunan h_u , h_v , h_ϕ büyüklük faktörlerini birim baz vektörlerini bulmak için kullandığımızda;

$$\hat{u} = \frac{\vec{e}_u}{h_u} = \frac{1}{a\sqrt{\sinh^2(u) + \cos^2(v)}} \cdot a \begin{pmatrix} \sinh(u) \sin(v) \cos(\phi) \\ \sinh(u) \sin(v) \sin(\phi) \\ \cosh(u) \cos(v) \end{pmatrix}$$

$$\hat{v} = \frac{\vec{e}_v}{h_v} = \frac{1}{a\sqrt{\cosh^2(u) - \sin^2(v)}} \cdot a \begin{pmatrix} \cosh(u) \cos(v) \cos(\phi) \\ \cosh(u) \cos(v) \sin(\phi) \\ -\sinh(u) \sin(v) \end{pmatrix}$$

$$\hat{\phi} = \frac{\vec{e}_\phi}{h_\phi} = \frac{1}{a \cosh(u) \sin(v)} \cdot a \begin{pmatrix} -\cosh(u) \sin(v) \sin(\phi) \\ \cosh(u) \sin(v) \cos(\phi) \\ 0 \end{pmatrix}$$

olarak bulunur.

Birim buz vektörlerinin ortogonal olma durumlarının kontrolü;

$$\hat{u} \cdot \hat{v} = \frac{\vec{e}_u \cdot \vec{e}_v}{h_u \cdot h_v} \rightarrow \vec{e}_u \cdot \vec{e}_v = 0 \Rightarrow \hat{u} \cdot \hat{v} = 0$$

$$\begin{aligned}\vec{e}_u \cdot \vec{e}_v &= a^2 \left((\sinh(u) \cosh(v) \sin(v) \cos(v) \cos^2(\phi)) \right. \\ &\quad + (\sinh(u) \cosh(v) \sin(v) \cos(v) \sin^2(\phi)) \\ &\quad \left. + (-\sinh(u) \cosh(v) \sin(v) \cos(v)) \right)\end{aligned}$$

$$\vec{e}_u \cdot \vec{e}_v = a^2 \sinh(u) \cosh(v) \sin(v) \cos(v) (\cos^2(\phi) + \sin^2(\phi) - 1)$$

$$\therefore \vec{e}_u \cdot \vec{e}_v = 0 \Rightarrow \therefore \hat{u} \cdot \hat{v} = 0 \quad \text{olarak bulunur.}$$

$$\hat{u} \cdot \hat{\phi} = \frac{\vec{e}_u \cdot \vec{e}_\phi}{h_u \cdot h_\phi} \rightarrow \vec{e}_u \cdot \vec{e}_\phi = 0 \Rightarrow \hat{u} \cdot \hat{\phi} = 0$$

$$\begin{aligned}\vec{e}_u \cdot \vec{e}_\phi &= a^2 \left((-\sinh(u) \cosh(u) \sin^2(v) \cos(\phi) \sin(\phi)) \right. \\ &\quad \left. + (\sinh(u) \cosh(u) \sin^2(v) \sin(\phi) \cos(\phi)) \right. \\ &\quad \left. + (0) \right)\end{aligned}$$

$$\therefore \vec{e}_u \cdot \vec{e}_\phi = a^2(0) = 0 \Rightarrow \therefore \hat{u} \cdot \hat{\phi} = 0$$

olarak bulunur.

$$\hat{v} \cdot \hat{\phi} = \frac{\vec{e}_v \cdot \vec{e}_\phi}{h_v \cdot h_\phi} \rightarrow \vec{e}_v \cdot \vec{e}_\phi = 0 \Rightarrow \hat{v} \cdot \hat{\phi} = 0$$

$$\vec{e}_v \cdot \vec{e}_\phi = a^2 \left((-\cosh^2(u) \cos(v) \sin(v) \cos(\phi) \sin(\phi)) \right. \\ \left. + (\cosh^2(u) \cos(v) \sin(v) \sin(\phi) \cos(\phi)) \right. \\ \left. + (0) \right)$$

$\therefore \vec{e}_v \cdot \vec{e}_\phi = 0 \Rightarrow \text{de } \hat{u} \cdot \hat{\phi} = 0 \text{ olarak bulunur.}$

Sonuç olarak

$\hat{u} \cdot \hat{v} = 0$	$\hat{u} \cdot \hat{\phi} = 0$	$\hat{v} \cdot \hat{\phi} = 0$
-----------------------------	--------------------------------	--------------------------------

olduğuna göre oblate kütresel koordinat sistem:
ortogonaldır.

$d\vec{s}$ elemenini bulmak için bulunan h_i ifadelerini bulduğumuz $d\vec{s}$ eşitliğine yerleştirsek;

$$d\vec{s} = h_1 dq_1 \hat{q}_1 + h_2 dq_2 \hat{q}_2 + h_3 dq_3 \hat{q}_3$$

$$q_1 \equiv u$$

$$h_1 \equiv h_u$$

$$\hat{q}_1 \equiv \hat{u}$$

$$q_2 \equiv v$$

$$h_2 \equiv h_v$$

$$\hat{q}_2 \equiv \hat{v}$$

$$q_3 \equiv \phi$$

$$h_3 \equiv h_\phi$$

$$\hat{q}_3 \equiv \hat{\phi}$$

$$d\vec{s} = h_u du \hat{u} + h_v dv \hat{v} + h_\phi d\phi \hat{\phi}$$

$$\begin{aligned} \therefore d\vec{s} = & a \sqrt{\sinh^2(u) + \cos^2(v)} du \hat{u} \\ & + a \sqrt{\cosh^2(u) - \sin^2(v)} dv \hat{v} \\ & + a \cosh(u) \sin(v) d\phi \hat{\phi} \end{aligned}$$

olarak bulunur.

Soru - 3

İndislerden ve bazı özel tensörlerden yararlanarak aşağıda verilen vektör eşitliklerini her zaman her vektör için doğru olduğunu gösteriniz.

a) $\vec{A} \cdot (\vec{A} \times \vec{B}) = 0$; $\vec{A} \neq \vec{B}$

b) $\vec{A} \times (\vec{B} \times \vec{C}) + \vec{B} \times (\vec{C} \times \vec{A}) + \vec{C} \times (\vec{A} \times \vec{B}) = 0$

c) $|\vec{A} \times \vec{B}|^2 = |\vec{A}|^2 + |\vec{B}|^2 - (\vec{A} \cdot \vec{B})^2$

Cözüm

Öncelikle bu özdeşlikler her zaman her vektör için değil, tanımını yapacağımız ve bu özdeşlikleri

sağlayacak sistem için geçerli olacaktır.

$\vec{A}, \vec{B}, \vec{C} \in T_p \mathbb{R}^3$ olmak üzere;

$$\begin{aligned}\vec{A} \cdot (\vec{A} \times \vec{B}) &= A_i (\vec{A} \times \vec{B})_i \\ &= A_i \epsilon_{ijk} A_j B_k \\ &= B_k \epsilon_{ijk} A_i A_j\end{aligned}$$

$\epsilon_{ijk} = \epsilon_{kij}$ olduğuna göre

$$\begin{aligned}\vec{A} \cdot (\vec{A} \times \vec{B}) &= B_k \epsilon_{kij} A_i A_j \\ &= B_k (\vec{A} \times \vec{A})_k \\ &= \vec{B} \cdot (\vec{A} \times \vec{A})\end{aligned}$$

$$\vec{A} \times \vec{A} = \vec{0}$$

$$\therefore \vec{A} \cdot (\vec{A} \times \vec{B}) = 0$$

olduğuna göre;
olarak bulunur.

$$\vec{A} \times (\vec{B} \times \vec{C}) + \vec{B} \times (\vec{C} \times \vec{A}) + \vec{C} \times (\vec{A} \times \vec{B}) = \vec{0}$$

$$= \epsilon_{ijk} A_j (\vec{B} \times \vec{C})_k + \epsilon_{ijk} B_j (\vec{C} \times \vec{A})_k + \epsilon_{ijk} C_j (\vec{A} \times \vec{B})_k$$

$$= \epsilon_{ijk} A_j \epsilon_{kmn} B_m C_n + \epsilon_{ijk} B_j \epsilon_{kmn} C_m A_n + \epsilon_{ijk} C_j \epsilon_{kmn} A_m B_n$$

$$\bullet = \epsilon_{ijk} \epsilon_{kmn} (A_j B_m C_n + B_j C_m A_n + C_j A_m B_n)$$

$$\epsilon_{ijk} = \epsilon_{kij} \quad \text{olduğuna göre}$$

$$\bullet = \epsilon_{kij} \epsilon_{kmn} (A_j B_m C_n + B_j C_m A_n + C_j A_m B_n)$$

$$\epsilon_{kij} \epsilon_{kmn} = \delta_{im} \delta_{jn} - \delta_{in} \delta_{jm}$$

olduğuna göre

$$\begin{aligned}
 & \cdot = (\delta_{im} \delta_{jn} - \delta_{in} \delta_{jm})(A_j B_m C_n + B_j C_m A_n + C_j A_m B_n) \\
 & = (A_j B_i C_j + B_n C_i A_n + C_n A_i B_n \\
 & \quad - A_m B_m C_i - B_m C_m A_i - C_m A_m B_i) \\
 & = (B_i (\vec{A} \cdot \vec{C}) + C_i (\vec{B} \cdot \vec{A}) + A_i (\vec{C} \cdot \vec{B}) \\
 & \quad - C_i (\vec{A} \cdot \vec{B}) - A_i (\vec{B} \cdot \vec{C}) - B_i (\vec{C} \cdot \vec{A}))
 \end{aligned}$$

$$\therefore \vec{A} \times (\vec{B} \times \vec{C}) + \vec{B} \times (\vec{C} \times \vec{A}) + \vec{C} \times (\vec{A} \times \vec{B}) = \vec{0}$$

Olarak bulunur ve Jacobi özdeşliği olarak bilinir.

$$|\vec{A} \times \vec{B}|^2 = \left(\sqrt{(\vec{A} \times \vec{B}) \cdot (\vec{A} \times \vec{B})} \right)^2$$

$$= (\vec{A} \times \vec{B}) \cdot (\vec{A} \times \vec{B})$$

$$= (\vec{A} \times \vec{B})_i (\vec{A} \times \vec{B})_i$$

$$= \epsilon_{ijk} A_j B_k \epsilon_{imn} A_m B_n$$

$$\bullet = \epsilon_{ijk} \epsilon_{imn} A_j B_k A_m B_n$$

$$\epsilon_{ijk} \epsilon_{imn} = \delta_{jm} \delta_{kn} - \delta_{jn} \delta_{km}$$

olduğuna
göre

$$\bullet = (\delta_{jm} \delta_{kn} - \delta_{jn} \delta_{km}) A_j B_k A_m B_n$$

$$= A_m B_n A_m B_n - A_n B_m A_m B_n$$

$$= (\vec{A} \cdot \vec{A}) (\vec{B} \cdot \vec{B}) - (\vec{A} \cdot \vec{B}) (\vec{A} \cdot \vec{B})$$

$$\therefore |\vec{A} \times \vec{B}|^2 = |\vec{A}|^2 \cdot |\vec{B}|^2 - (\vec{A} \cdot \vec{B})^2$$

olarak
bulunur.