Name, Vorname	Matrikelnummer	HOCHSCHULE ESSLINGEN
Prüfungsfach: Mathematik 2		Sommersemester 23
Studiengänge: SWB/TIB/IEP		Seite: 1 von 13
Prüfungsnummer: IT 105 20 03 und 105 20 13		Zeit: 90 Minuten
Dozent: Prof. Dr. Jürgen Koch		Punkte: 54

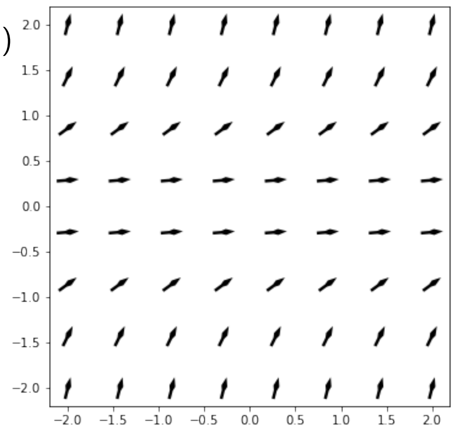
Hilfsmittel: Manuskript
Literatur
Taschenrechner Casio FX-87DE Plus / Casio FX-87DE Plus 2nd edition

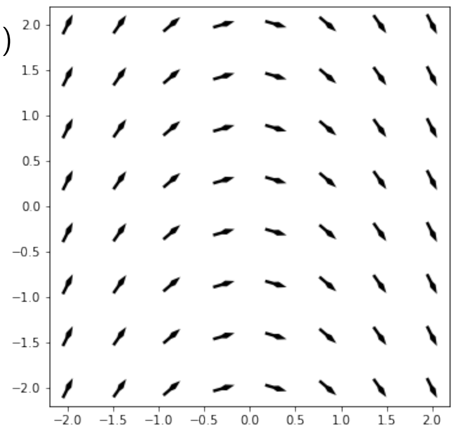
Hinweise: **Bearbeiten Sie die Aufgaben ausschließlich auf diesen Prüfungsblättern.**
Begründen Sie alle Lösungsschritte.

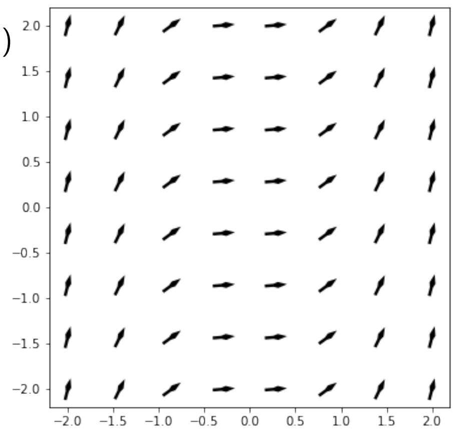
Aufgabe 1 (10 Punkte) Hinweis: Alle Teilaufgaben können unabhängig voneinander bearbeitet werden.

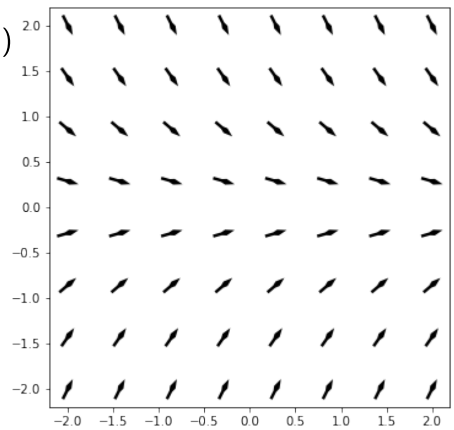
a) Ordnen Sie den Differenzialgleichungen die Richtungsfelder zu:

(A) $y' = -y$ (B) $y' = -x$ (C) $y' = y^2$ (D) $y' = x^2$

( ) 

( ) 

( ) 

( ) 

b) Welche Differenzialgleichung ist linear? Bitte kreuzen Sie den entsprechenden Eintrag an:

$y'' + 2\,y' + y = \sin(x)$	☐ linear	☐ nicht linear
$y'' + 2\,y' + \sin(y) = 0$	☐ linear	☐ nicht linear
$y'' + 2\,y' + \sin(x) = 0$	☐ linear	☐ nicht linear
$y'' + 2\,y' + \sin(x)\,y = 0$	☐ linear	☐ nicht linear

c) Die Differenzialgleichung der Balkendurchbiegung $w(x)$ lautet:

$$\frac{w''(x)}{(1 + (w'(x))^2)^{3/2}} = -\frac{M_y(x)}{E\,I_y}\,.$$

Dabei bezeichnet $M_y(x)$ das Biegemoment an der Stelle x, E das Elastizitätsmodul des Balkenmaterials und I_y das axiale Flächenträgheitsmoment des Balkenquerschnitts. Stellen Sie die Differenzialgleichung mit Zustandsvariablen durch ein äquivalentes System von Differenzialgleichungen erster Ordnung dar.

d) Folgende Frage wurde ChatGPT in der Version vom 12. Mai 2023 gestellt:

`Ein Teich enthält 1000 Liter Wasser. Täglich verdunsten 2% des Wassers im Teich und 10 Liter Wasser werden nachgefüllt. Wieviel Wasser enthält der Teich nach 2 Tagen?`

Die Antwort lautete:

`Zuerst berechnen wir die tägliche Verdunstungsmenge: 2% von 1000 Litern sind 20 Liter. Da täglich 10 Liter Wasser nachgefüllt werden, verringert sich die Wasserstandsmenge um 10 Liter - 20 Liter = -10 Liter pro Tag. Nach 2 Tagen würde sich die Wassermenge im Teich um -10 Liter * 2 Tage = -20 Liter verringern. Da der Wasserverlust die Nachfüllung übersteigt, enthält der Teich nach 2 Tagen kein Wasser mehr.`

Bestimmen Sie die korrekte Wassermenge im Teich nach 2 Tagen mithilfe einer Differenzengleichung.

e) Welchen Grenzwert S hat die Reihe

$$S = \sum_{k=2}^{\infty} \left(\frac{1}{3}\right)^k ?$$

Aufgabe 2 (8 Punkte) Gegeben ist das Anfangswertproblem

$$y' = (y+1)\cos(x), \quad y(0) = 1.$$

a) Ist die Differenzialgleichung linear?

b) Berechnen Sie die Lösung des Anfangswertproblems.

c) Ermitteln Sie einen Näherungswert $\tilde{y}_1$ für die Lösung des Anfangswertproblems an der Stelle $x = 0.1$, indem Sie einen Schritt mit dem Euler-Polygonzugverfahren mit der Schrittweite $h = 0.1$ durchführen. Wie weit weicht der Näherungswert $\tilde{y}_1$ von der exakten Lösung ab?

Aufgabe 3 (10 Punkte) Bestimmen Sie die allgemeine reelle Lösung der Differenzialgleichung

$$y'' + 4\,y = 3\,\cos(2\,x)\,.$$

Aufgabe 4 (8 Punkte) Gegeben ist das Differenzengleichungssystem

$$\begin{aligned} x_{k+1} &= -2\,x_k + 3\,y_k, \\ y_{k+1} &= 2\,x_k + 3\,y_k, \end{aligned} \qquad k = 0, 1, 2, \ldots$$

a) Berechnen Sie die allgemeine Lösung des Differenzengleichungssystems.

b) Ist das Differenzengleichungssystem asymptotisch stabil?

Aufgabe 5 (8 Punkte) Gegeben ist die Funktion f mit

$$f(x) = \frac{1}{x}\ln(1+x)\,.$$

a) Geben Sie die Potenzreihe der Funktion f an.

b) Welchen Konvergenzradius r hat die Potenzreihe aus Aufgabenteil **a)**.

c) Bestimmen Sie den Grenzwert

$$\lim_{x\to 0} f(x)$$

mithilfe der Potenzreihe aus Aufgabenteil **a)**.

d) Berechnen Sie einen Näherungswert $\tilde{I}$ für das bestimmte Integral

$$I = \int_0^1 f(x)\,\mathsf{d}\,x$$

mithilfe der Potenzreihe aus Aufgabenteil **a)** mit allen Gliedern bis zur Ordnung 2.

e) Schätzen Sie die maximale Abweichung des Näherungswertes $\tilde{I}$ aus Aufgabenteil **d)** vom exakten Wert I mithilfe des Leibniz-Kriteriums.

Name, Vorname Matrikelnummer	HOCHSCHULE ESSLINGEN
Prüfungsfach: Mathematik 2	Sommersemester 23
Studiengänge: SWB/TIB/IEP	

Aufgabe 6 (10 Punkte) Gegeben ist die periodische Funktion f, mit

$$f(t) = \mathrm{e}^{t/2} \text{ für } t \in [-\pi, \pi), \quad f(t + 2\,\pi) = f(t)\,.$$

a) Skizzieren Sie die Funktion f für $t \in [-\pi, 4\,\pi]$.

b) Bestimmen Sie eine Formel für die komplexen Fourier-Koeffizienten c_k der Funktion f, für $k = 0, 1, 2, 3, \ldots$

c) Welchen Mittelwert m hat die Funktion f?

d) An welchen Stellen tritt bei der Funktion f das Gibbsche Phänomen auf? Wie groß sind die Überschwinger?