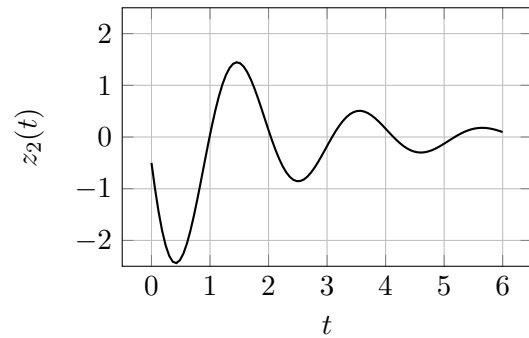
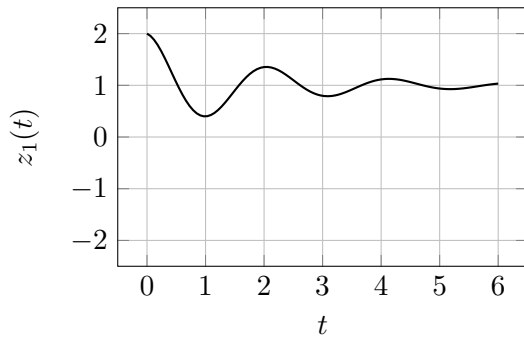


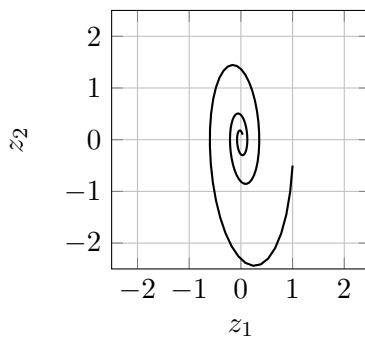
		
Name, Vorname	Matrikelnummer	
Prüfungsfach: Mathematik 2		SS 24
Studiengänge: ISB/SWB/TIB/IEP		Seite: 2 von 13

c) Die folgenden beiden Abbildungen zeigen den zeitlichen Verlauf der Zustände $z_1(t)$ und $z_2(t)$:

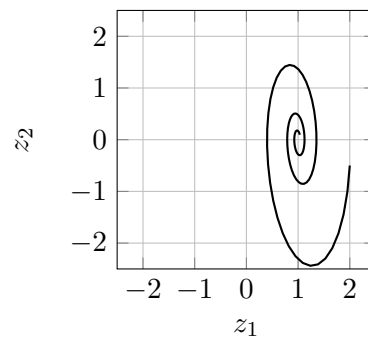


Welche der folgenden vier Abbildungen zeigt den richtigen Verlauf des Phasenporträts? Bitte begründen Sie Ihre Antwort!

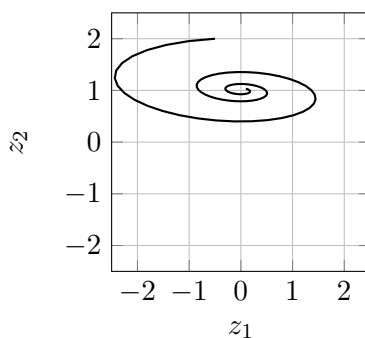
(A)



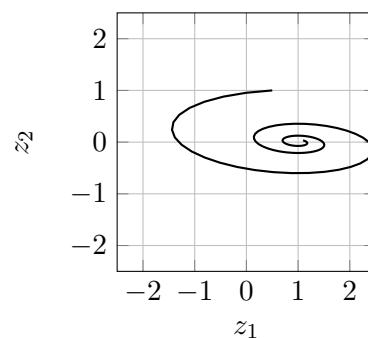
(B)



(C)



(D)



Name, Vorname	
Matrikelnummer	
Prüfungsfach: Mathematik 2	SS 24
Studiengänge: ISB/SWB/TIB/IEP	Seite: 3 von 13

- d) Beurteilen Sie den folgenden Dialog mit ChatGPT 3.5. Sind die Berechnungen und die Behauptungen von ChatGPT korrekt? Es genügt den Fehler zu finden, die richtige Lösung muss nicht bestimmt werden!

You: Wie lautet die Lösung des Anfangswertproblems (AWP)

$$x' \cdot x = t, \quad x(0) = 1?$$

ChatGPT 3.5: Um das AWP zu lösen, können wir das Verfahren der Trennung der Variablen verwenden.

1. Trenne die Variablen:

$$\frac{dx}{x} = t dt$$

2. Integriere beide Seiten:

$$\int \frac{dx}{x} = \int t dt \iff \ln|x| = \frac{t^2}{2} + C$$

3. Löse nach x auf:

$$|x| = e^{\frac{t^2}{2} + C}$$

Da $x(0) = 1$, setzen wir $t = 0$ und lösen für C :

$$|1| = e^C \iff C = 0$$

4. Setze C ein und berücksichtige das Betragszeichen:

$$|x| = e^{\frac{t^2}{2}} \iff x = \pm e^{\frac{t^2}{2}}$$

Da $x(0) = 1$, wählen wir das positive Vorzeichen:

$$x(t) = e^{\frac{t^2}{2}}$$

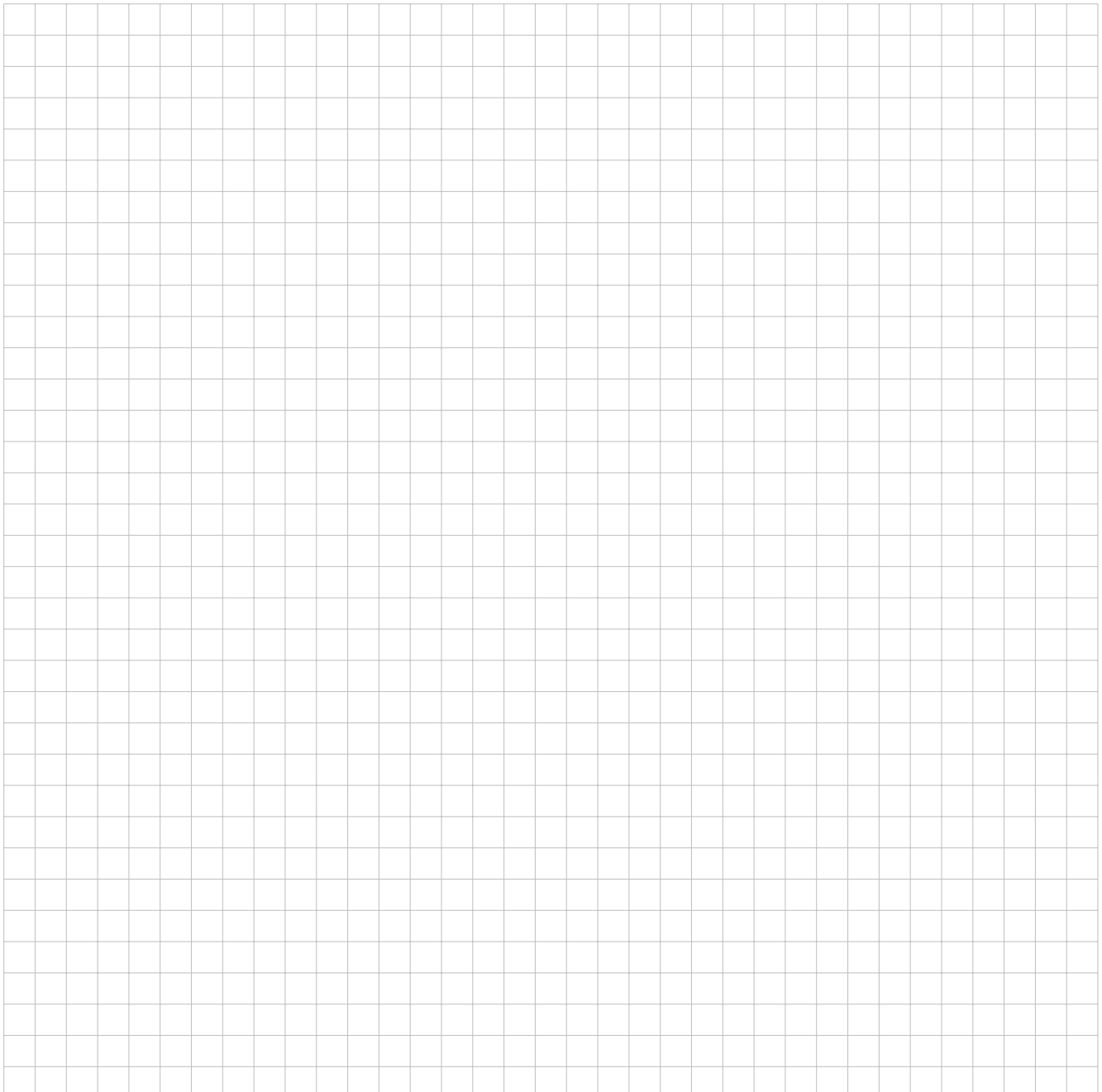


Name, Vorname	
Matrikelnummer	SS 24
Prüfungsfach: Mathematik 2	Seite: 4 von 13
Studiengänge: ISB/SWB/TIB/IEP	

Aufgabe 2 (10 Punkte) Wir betrachten das Anfangswertproblem

$$y'(x) \cdot y(x) = \sin(x), \quad y(0) = -1.$$

- Handelt es sich um eine lineare oder um eine nichtlineare Differenzialgleichung?
- Bestimmen Sie die exakte Lösung des Anfangswertproblems.
- Berechnen Sie einen Näherungswert für $y(1)$, indem Sie mit der Schrittweite $h = \frac{1}{2}$ zwei Schritte mit dem Polygonzugverfahren von Euler durchführen.
- Wie groß ist die Abweichung des in Aufgabenteil c) berechneten Näherungswerts von der exakten Lösung?

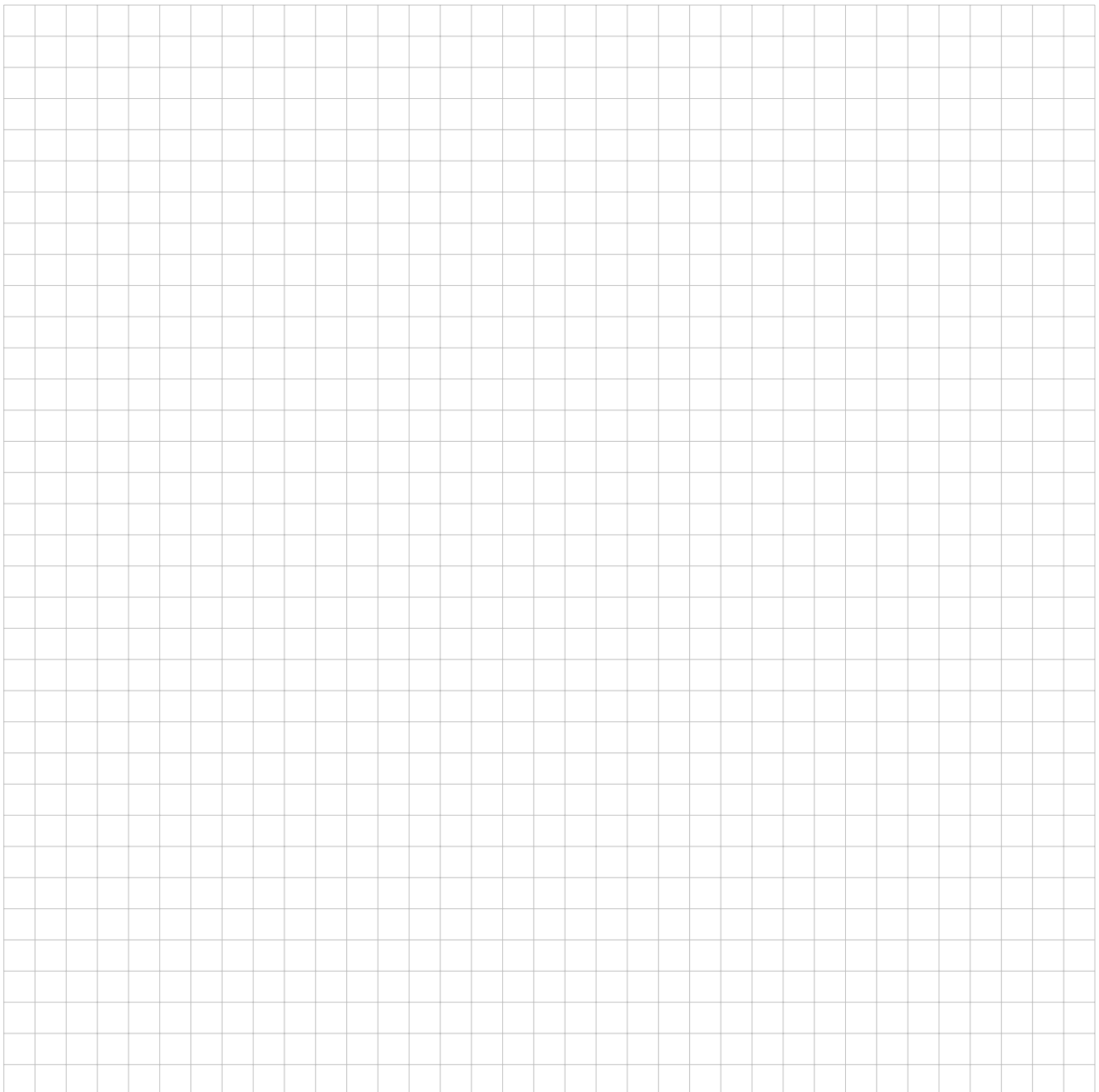


		
Name, Vorname	Matrikelnummer	
Prüfungsfach: Mathematik 2		
		SS 24
Studiengänge: ISB/SWB/TIB/IEP		Seite: 8 von 13

Aufgabe 4 (10 Punkte) Eine Differenzengleichung erster Ordnung ist gegeben durch

$$20x_{k+1} - 21x_k = -200, \quad x_0 = 100, \quad k = 0, 1, 2, 3, \dots$$

- Geben Sie die Zahlenwerte von x_1 und x_2 an.
- Bestimmen Sie die Lösung der Differenzengleichung.
- Interpretieren Sie die Zahlenfolge (x_k) als Kontostand nach k Jahren, eines Kontos mit festem Zinssatz von dem am Ende jeden Jahres der selbe Betrag abgehoben wird. Wie hoch sind Zinssatz und Betrag? Wie oft kann der Betrag von dem Konto abgehoben werden bevor der Kontostand negativ wird?



Name, Vorname	
Matrikelnummer	
Prüfungsfach: Mathematik 2	SS 24
Studiengänge: ISB/SWB/TIB/IEP	Seite: 10 von 13

Aufgabe 5 (8 Punkte) Gegeben ist die Funktion f mit

$$f(x) = e^x \ln(1+x).$$

- a) Geben Sie die Potenzreihen der Funktionen g und h an der Entwicklungstelle $x_0 = 0$ an, mit

$$g(x) = e^x, \quad h(x) = \ln(1+x).$$

Welche Konvergenzradien haben diese Potenzreihen?

- b) Bestimmen Sie das Taylor-Polynom T_3 von Grad 3 der Funktion f an der Entwicklungstelle $x_0 = 0$ mithilfe der Potenzreihen der Funktionen g und h aus Aufgabenteil a).
- c) Berechnen Sie einen Näherungswert \tilde{I} für das bestimmte Integral

$$I = \int_0^1 f(x) \, dx \approx \tilde{I} = \int_0^1 T_3(x) \, dx$$

mithilfe des Taylor-Polynoms T_3 aus Aufgabenteil b).

