| Prüfungsaufgaben mit Lösungen | HOCHSCHULE ESSLINGEN |
|---|---|
| Prüfungsfach: Mathematik 2 | Sommersemester 23 |
| Studiengänge: SWB/TIB/IEP | Seite: 1 von 10 |
| Prüfungsnummer: IT 105 20 03 und 105 20 13 | Zeit: 90 Minuten |
| Dozent: Prof. Dr. Jürgen Koch | Punkte: 54 |

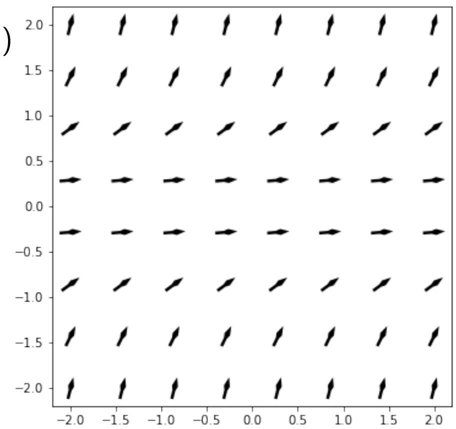
**Hilfsmittel:** Manuskript
Literatur
Taschenrechner Casio FX-87DE Plus / Casio FX-87DE Plus 2nd edition

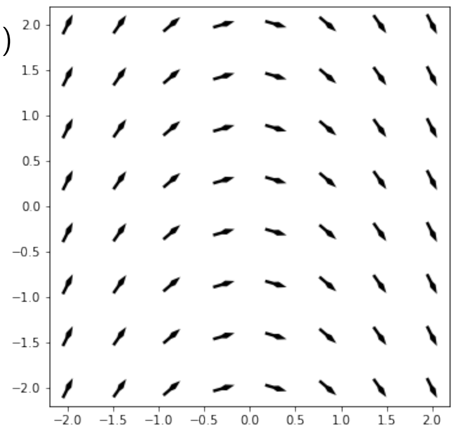
**Hinweise:** Bearbeiten Sie die Aufgaben ausschließlich auf diesen Prüfungsblättern.
Begründen Sie alle Lösungsschritte.

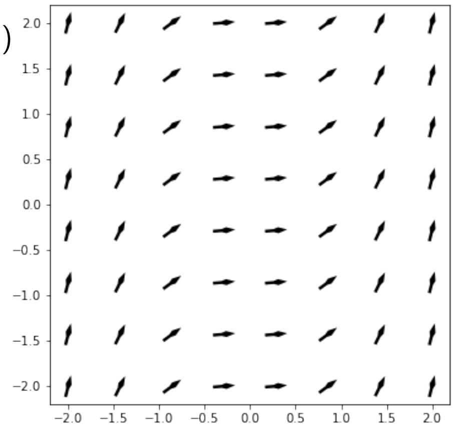
**Aufgabe 1 (10 Punkte)** Hinweis: Alle Teilaufgaben können unabhängig voneinander bearbeitet werden.

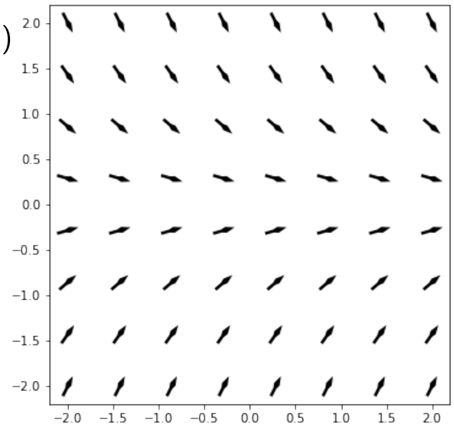
**a)** Ordnen Sie den Differenzialgleichungen die Richtungsfelder zu:

(A) $y' = -y$ (B) $y' = -x$ (C) $y' = y^2$ (D) $y' = x^2$

( C )



( B )



( D )



( A )



2 P

**b)** Welche Differenzialgleichung ist linear? Bitte kreuzen Sie den entsprechenden Eintrag an:

| | | |
|---|---|---|
| $y'' + 2\,y' + y = \sin(x)$ | X linear | ☐ nicht linear |
| $y'' + 2\,y' + \sin(y) = 0$ | ☐ linear | X nicht linear |
| $y'' + 2\,y' + \sin(x) = 0$ | X linear | ☐ nicht linear |
| $y'' + 2\,y' + \sin(x)\,y = 0$ | X linear | ☐ nicht linear |

2 P

**c)** Die Differenzialgleichung der Balkendurchbiegung $w(x)$ lautet:

$$\frac{w''(x)}{(1+(w'(x))^2)^{3/2}} = -\frac{M_y(x)}{E\,I_y}\,.$$

Dabei bezeichnet $M_y(x)$ das Biegemoment an der Stelle $x$, $E$ das Elastizitätsmodul des Balkenmaterials und $I_y$ das axiale Flächenträgheitsmoment des Balkenquerschnitts. Stellen Sie die Differenzialgleichung mit Zustandsvariablen durch ein äquivalentes System von Differenzialgleichungen erster Ordnung dar.

2 P

Zwei Zustandsvariablen:

$$z_1 = w(x),\; z_2 = w'(x)\,.$$

System von Differenzialgleichungen erster Ordnung:

$$\begin{aligned} z_1' &= z_2\,, \\ z_2' &= -\tfrac{M_y(x)}{E\,I_y}(1+z_2^2)^{3/2}\,. \end{aligned}$$

**d)** Folgende Frage wurde ChatGPT in der Version vom 12. Mai 2023 gestellt:

`Ein Teich enthält 1000 Liter Wasser. Täglich verdunsten 2% des Wassers im Teich und 10 Liter Wasser werden nachgefüllt. Wieviel Wasser enthält der Teich nach 2 Tagen?`

Die Antwort lautete:

`Zuerst berechnen wir die tägliche Verdunstungsmenge: 2% von 1000 Litern sind 20 Liter. Da täglich 10 Liter Wasser nachgefüllt werden, verringert sich die Wasserstandsmenge um 10 Liter - 20 Liter = -10 Liter pro Tag. Nach 2 Tagen würde sich die Wassermenge im Teich um -10 Liter * 2 Tage = -20 Liter verringern. Da der Wasserverlust die Nachfüllung übersteigt, enthält der Teich nach 2 Tagen kein Wasser mehr.`

Bestimmen Sie die korrekte Wassermenge im Teich nach 2 Tagen mithilfe einer Differenzengleichung.

2 P

Differenzengleichung:

$$T_{k+1} = 0.98\,T_k + 10, \quad T_0 = 1000$$

Nach einem Tag:

$$T_1 = 0.98 \cdot 1000 + 10 = 990$$

Nach zwei Tagen:

$$T_2 = 0.98 \cdot 990 + 10 = 980.2$$

**e)** Welchen Grenzwert $S$ hat die Reihe

$$S = \sum_{k=2}^{\infty} \left(\frac{1}{3}\right)^k \,?$$

2 P

Geometrische Reihe mit $q = \frac{1}{3}$:

$$\sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{1}{3}\right)^k = \frac{1}{1-q} = \frac{1}{1-\frac{1}{3}} = \frac{3}{2}\,.$$

Erste beiden Glieder:

$$S = \sum_{k=2}^{\infty} \left(\frac{1}{3}\right)^k = \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{1}{3}\right)^k - \left(1 + \frac{1}{3}\right) = \frac{1}{6}$$

**Aufgabe 2 (8 Punkte)** Gegeben ist das Anfangswertproblem

$$y' = (y+1)\,\cos(x), \quad y(0) = 1.$$

**a)** Ist die Differenzialgleichung linear?

**b)** Berechnen Sie die Lösung des Anfangswertproblems.

**c)** Ermitteln Sie einen Näherungswert $\tilde{y}_1$ für die Lösung des Anfangswertproblems an der Stelle $x = 0.1$, indem Sie einen Schritt mit dem Euler-Polygonzugverfahren mit der Schrittweite $h = 0.1$ durchführen. Wie weit weicht der Näherungswert $\tilde{y}_1$ von der exakten Lösung ab?

**a)** Linear. 1 P

**b)** Trennung der Variablen: 1 P

$$y' = (y+1)\,\cos(x) \quad\Longrightarrow\quad \int \frac{1}{y+1}\,\mathrm{d}y = \int \cos(x)\,\mathrm{d}x$$

Stammfunktionen: 1 P

$$\ln\left(|y+1|\right) = \sin(x) + C_1, \quad C_1 \in \mathbb{R}$$

Nach $y$ auflösen: 1 P

$$|y+1| = \mathrm{e}^{\sin(x)+C_1} \quad\Longrightarrow\quad y+1 = \pm\,\mathrm{e}^{C_1}\,\mathrm{e}^{\sin(x)} \quad\Longrightarrow\quad y = C_2\,\mathrm{e}^{\sin(x)} - 1, \quad C_2 \in \mathbb{R}$$

Anfangswert: 1 P

$$y(0) = C_2 - 1 \quad\Longrightarrow\quad 1 = C_2 - 1 \quad\Longrightarrow\quad C_2 = 2 \quad\Longrightarrow\quad y(x) = 2\,\mathrm{e}^{\sin(x)} - 1$$

**c)** Euler-Polygonzugverfahren: 1 P

$$\tilde{y}_{n+1} = \tilde{y}_n + h\,(\tilde{y}_n + 1)\,\cos(x_n),$$

Schritt von $x_0 = 0$ nach $x_1 = 0.1$ mit Schrittweite $h = 0.1$: 1 P

$$\tilde{y}_1 = 1 + 0.1 \cdot (1+1)\,\cos(0) = 1.2$$

Abweichung: 1 P

$$y(1.1) - \tilde{y}_1 = 2\,\mathrm{e}^{\sin(0.1)} - 1 - 1.2 \approx 0.009974$$

**Aufgabe 3 (10 Punkte)** Bestimmen Sie die allgemeine reelle Lösung der Differenzialgleichung

$$y'' + 4\,y = 3\,\cos(2\,x)\,.$$

Charakteristische Gleichung: 2 P

$$\lambda^2 + 4 = 0 \quad \Longrightarrow \quad \lambda_{1,2} = \pm 2\,\mathrm{i}$$

Homogene Lösung: 1 P

$$y_h(x) = C_1\cos(2\,x) + C_2\sin(2\,x)$$

Resonanzansatz für partikuläre Lösung: 2 P

$$y_p(x) = x\,(A\cos(2\,x) + B\sin(2\,x))$$

Erste Ableitung: 1 P

$$y_p'(x) = A\cos(2\,x) + B\sin(2\,x) + x\,(-2\,A\sin(2\,x) + 2\,B\cos(2\,x))$$

Zweite Ableitung: 1 P

$$y_p''(x) = -2\,A\sin(2\,x) + 2\,B\cos(2\,x) - 2\,A\sin(2\,x) + 2\,B\cos(2\,x) + x\,(-4\,A\cos(2\,x) - 4\,B\sin(2\,x))$$

In Differenzialgleichung einsetzen: 1 P

$$\underbrace{-4\,A\sin(2\,x) + 4\,B\cos(2\,x) - 4\,x\,(A\cos(2\,x) + B\sin(2\,x))}_{y_p''} + 4\,\underbrace{x\,(A\cos(2\,x) + B\sin(2\,x))}_{y_p} = 3\,\cos(2\,x)$$

$A$ und $B$ berechnen: 1 P

$$A = 0, \quad B = \frac{3}{4}$$

Allgemeine reelle Lösung: 1 P

$$y(x) = y_h(x) + y_p(x) = C_1\cos(2\,x) + C_2\sin(2\,x) + \frac{3}{4}\,x\,\sin(2\,x)$$

**Aufgabe 4 (8 Punkte)** Gegeben ist das Differenzengleichungssystem

$$\begin{aligned} x_{k+1} &= -2\,x_k + 3\,y_k, \\ y_{k+1} &= 2\,x_k + 3\,y_k, \end{aligned} \qquad k = 0, 1, 2, \ldots$$

**a)** Berechnen Sie die allgemeine Lösung des Differenzengleichungssystems.

**b)** Ist das Differenzengleichungssystem asymptotisch stabil?

---

**a)** Vektor-Matrix-Form:

$$\begin{pmatrix} x_{k+1} \\ y_{k+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 3 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_k \\ y_k \end{pmatrix}$$ 1 P

Charakteristische Gleichung und Eigenwerte:

$$\begin{vmatrix} -2-\lambda & 3 \\ 2 & 3-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - \lambda - 12 = 0 \quad \Longrightarrow \quad \lambda_1 = 4,\ \lambda_2 = -3$$ 3 P

Eigenvektor für $\lambda_1 = 4$:

$$\begin{pmatrix} -6 & 3 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} \mathbf{v} = \mathbf{0} \quad \Longrightarrow \quad \mathbf{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$ 1 P

Eigenvektor für $\lambda_2 = -3$:

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 6 \end{pmatrix} \mathbf{v} = \mathbf{0} \quad \Longrightarrow \quad \mathbf{v} = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix}$$ 1 P

Allgemeine Lösung

$$\begin{pmatrix} x_k \\ y_k \end{pmatrix} = C_1\, 4^k \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} + C_2\, (-3)^k \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix}$$ 1 P

**b)** Die Beträge der Eigenwerte sind nicht kleiner als $1$. Somit ist das Differenzengleichungssystem nicht asymptotisch stabil. 1 P

**Aufgabe 5 (8 Punkte)** Gegeben ist die Funktion $f$ mit

$$f(x) = \frac{1}{x}\ln(1+x)\,.$$

**a)** Geben Sie die Potenzreihe der Funktion $f$ an.

**b)** Welchen Konvergenzradius $r$ hat die Potenzreihe aus Aufgabenteil **a)**.

**c)** Bestimmen Sie den Grenzwert

$$\lim_{x\to 0} f(x)$$

mithilfe der Potenzreihe aus Aufgabenteil **a)**.

**d)** Berechnen Sie einen Näherungswert $\tilde{I}$ für das bestimmte Integral

$$I = \int_0^1 f(x)\,\mathsf{d}\,x$$

mithilfe der Potenzreihe aus Aufgabenteil **a)** mit allen Gliedern bis zur Ordnung $2$.

**e)** Schätzen Sie die maximale Abweichung des Näherungswertes $\tilde{I}$ aus Aufgabenteil **d)** vom exakten Wert $I$ mithilfe des Leibniz-Kriteriums.

**a)** Potenzreihe des Logarithmus: 2 P

$$\ln(1+x) = \sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^{k-1}}{k}x^k = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} \pm \dots$$

Potenzreihe von $f$:

$$f(x) = \frac{1}{x}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^{k-1}}{k}x^k = \sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^{k-1}}{k}x^{k-1} = 1 - \frac{x}{2} + \frac{x^2}{3} - \frac{x^3}{4} \pm \dots$$

**b)** Konvergenzradius $r = 1$ 1 P

**c)** Grenzwert: 1 P

$$\lim_{x\to 0} f(x) = \lim_{x\to 0}\left(1 - \frac{x}{2} + \frac{x^2}{3} - \frac{x^3}{4} \pm \dots\right) = 1$$

**d)** Gliedweise Integration der Potenzreihe: 2 P

$$\tilde{I} \approx \int_0^1 \left(1 - \frac{x}{2} + \frac{x^2}{3}\right) dx = \left[x - \frac{x^2}{4} + \frac{x^3}{9}\right]_0^1$$

Integrationsgrenzen:

$$\tilde{I} = 1 - \frac{1}{4} + \frac{1}{9} = \frac{31}{36}$$

**e)** Die Glieder der Reihe bilden eine monotone Nullfolge, deshalb kann man die Abweichung des Näherungswertes $\tilde{I}$ von der exakten Lösung $I$ mit dem Leibniz-Kriterium abschätzen.

Abschätzung: 2 P

$$\left|\tilde{I} - I\right| \leq \left|\int_0^1 -\frac{x^3}{4}\right| = \left|\left[-\frac{x^4}{16}\right]_0^1\right| = \frac{1}{16}$$

**Aufgabe 6 (10 Punkte)** Gegeben ist die periodische Funktion $f$, mit

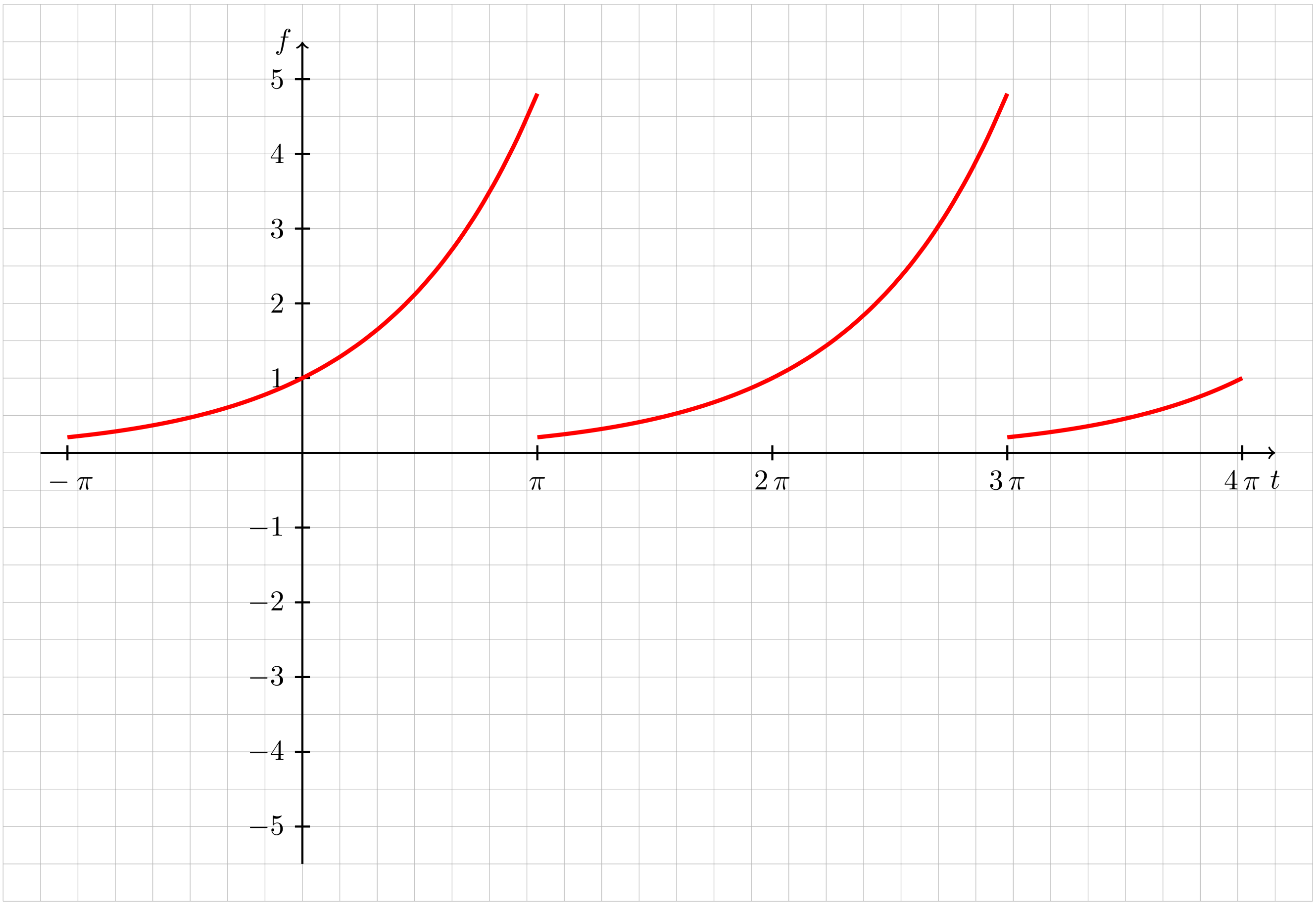
$$f(t) = \mathrm{e}^{t/2} \text{ für } t \in [-\pi, \pi), \quad f(t + 2\pi) = f(t)\,.$$

**a)** Skizzieren Sie die Funktion $f$ für $t \in [-\pi, 4\pi]$.

**b)** Bestimmen Sie eine Formel für die komplexen Fourier-Koeffizienten $c_k$ der Funktion $f$, für $k = 0, 1, 2, 3, \ldots$

**c)** Welchen Mittelwert $m$ hat die Funktion $f$?

**d)** An welchen Stellen tritt bei der Funktion $f$ das Gibbsche Phänomen auf? Wie groß sind die Überschwinger?




**a)** Skizze: 2 P

**b)** Formel: 1 P

$$c_k = \frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} f(t)\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\,k\,\omega\,t}\mathrm{d}\,t = \frac{1}{2\,\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \mathrm{e}^{t/2}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\,k\,t}\mathrm{d}\,t\,.$$

Stammfunktion: 2 P

$$c_k = \frac{1}{2\,\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \mathrm{e}^{t/2-\mathrm{i}\,k\,t}\mathrm{d}\,t = \frac{1}{2\,\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \mathrm{e}^{(1/2-\mathrm{i}\,k)t}\mathrm{d}\,t = \frac{1}{2\,\pi}\left[\frac{\mathrm{e}^{(1/2-\mathrm{i}\,k)t}}{1/2-\mathrm{i}\,k}\right]_{-\pi}^{\pi}\,.$$

Grenzen einsetzen und vereinfachen: 2 P

$$c_k = \frac{\mathrm{e}^{(1/2-\mathrm{i}\,k)\pi} - \mathrm{e}^{(1/2-\mathrm{i}\,k)(-\pi)}}{2\,\pi\,(1/2-\mathrm{i}\,k)} = \frac{\mathrm{e}^{\pi/2-\mathrm{i}\,k\,\pi} - \mathrm{e}^{-\pi/2+\mathrm{i}\,k\,\pi}}{\pi - \mathrm{i}\,k\,2\,\pi} = \frac{(-1)^k(\mathrm{e}^{\pi/2} - \mathrm{e}^{-\pi/2})}{\pi - \mathrm{i}\,k\,2\,\pi}\,.$$

**c)** Mittelwert 1 P

$$m = c_0 = \frac{\mathrm{e}^{\pi/2} - \mathrm{e}^{-\pi/2}}{\pi} \approx 1.465\,.$$

**d)** Gibbsche Phänomen: 1 P

$$t_k = \pi + k\cdot 2\,\pi, \quad k = 0, 1, 2, 3, \ldots\,.$$

Überschwinger: 1 P

$$\pm 0.09\cdot(\mathrm{e}^{\pi/2} - \mathrm{e}^{-\pi/2}) \approx \pm 0.41\,.$$