Name, Vorname	Matrikelnummer	HOCHSCHULE ESSLINGEN
Prüfungsfach: Mathematik 2		SS 24
Studiengänge: ISB/SWB/TIB/IEP		Seite: 1 von 13
Prüfungsnummer: R39.08101		Zeit: 90 Minuten
Dozent: Prof. Dr. Jürgen Koch		Punkte: 54

Hilfsmittel: Manuskript

Literatur

Taschenrechner Casio FX-87DE Plus / Casio FX-87DE Plus 2nd edition

Hinweise: Bearbeiten Sie die Aufgaben ausschließlich auf diesen Prüfungsblättern.

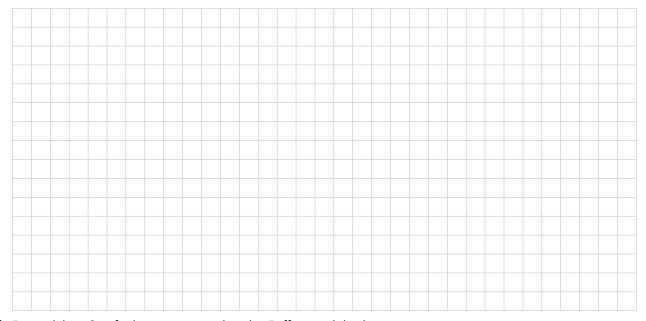
Begründen Sie alle Lösungsschritte.

Aufgabe 1 (8 Punkte) Hinweis: Alle Teilaufgaben können unabhängig voneinander bearbeitet werden.

a) Geben Sie eine lineare Differenzialgleichung an, die die Fundamentallösung

$$y(x) = e^{-2x}$$

besitzt.



b) Bei welchen Störfunktionen r tritt bei der Differenzialgleichung

$$y'' + 9y = r(x)$$

Resonanz auf? Bitte kreuzen Sie den entsprechenden Eintrag an:

r(x)	= e	-9x
------	-----	-----

☐ Resonanz

☐ keine Resonanz

$$r(x) = e^{9x}$$

 $\square$  Resonanz

☐ keine Resonanz

$$r(x) = 3\cos(x)$$

☐ Resonanz

$\Box$	1	Daganana
1 1	keme	Resonanz

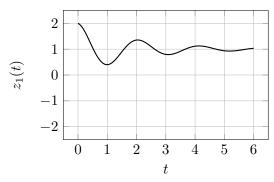
 $r(x) = \cos(3x)$ 

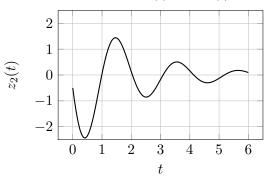
☐ Resonanz

☐ keine Resonanz

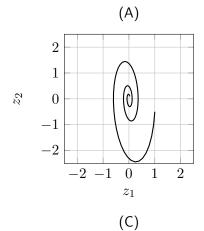
Name, Vorname	Matrikelnummer	HOCHSCHULE ESSLINGEN
Prüfungsfach: Mathematik 2		SS 24
Studiengänge: ISB/SWB/TIB/IEP		Seite: 2 von 13

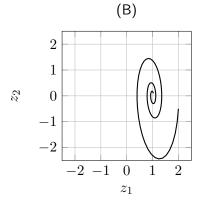
c) Die folgenden beiden Abbildungen zeigen den zeitlichen Verlauf der Zustände  $z_1(t)$  und  $z_2(t)$ :

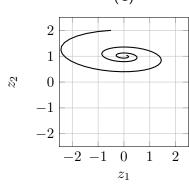


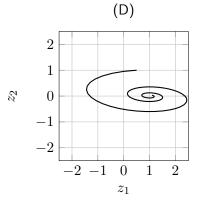


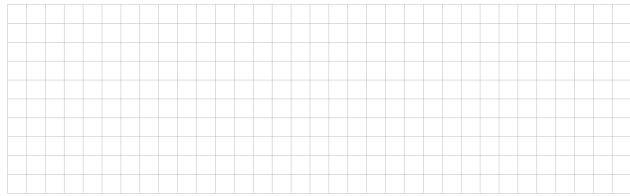
Welche der folgenden vier Abbildungen zeigt den richtigen Verlauf des Phasenporträts? Bitte begründen Sie Ihre Antwort!











Name, Vorname	Matrikelnummer	THOCHSCHULE ESSLINGEN
Prüfungsfach: Mathematik 2		SS 24
Studiengänge: ISB/SWB/TIB/IEP		Seite: 3 von 13

d) Beurteilen Sie den folgenden Dialog mit ChatGPT 3.5. Sind die Berechnungen und die Behauptungen von ChatGPT korrekt? Es genügt den Fehler zu finden, die richtige Lösung muss nicht bestimmt werden!

You: Wie lautet die Lösung des Anfangswertproblems (AWP)

$$x' \cdot x = t, \quad x(0) = 1?$$

ChatGPT 3.5: Um das AWP zu lösen, können wir das Verfahren der Trennung der Variablen verwenden.

1. Trenne die Variablen:

$$\frac{dx}{x} = t \, dt$$

2. Integriere beide Seiten:

$$\int \frac{dx}{x} = \int t \, dt \quad \Longleftrightarrow \quad \ln|x| = \frac{t^2}{2} + C$$

3. Löse nach  $\boldsymbol{x}$  auf:

$$|x| = e^{\frac{t^2}{2} + C}$$

Da x(0) = 1, setzen wir t = 0 und lösen für C:

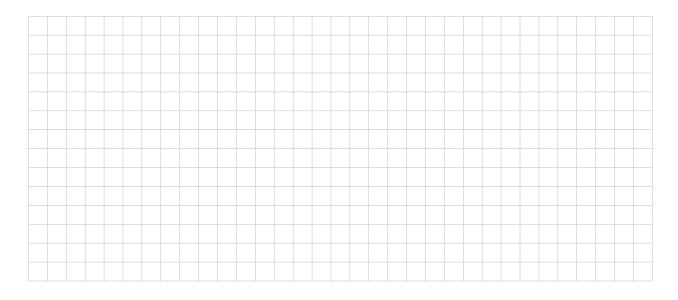
$$|1| = e^C \iff C = 0$$

4. Setze C ein und berücksichtige das Betragszeichen:

$$|x| = e^{\frac{t^2}{2}} \quad \Longleftrightarrow \quad x = \pm e^{\frac{t^2}{2}}$$

Da x(0) = 1, wählen wir das positive Vorzeichen:

$$x(t) = e^{\frac{t^2}{2}}$$

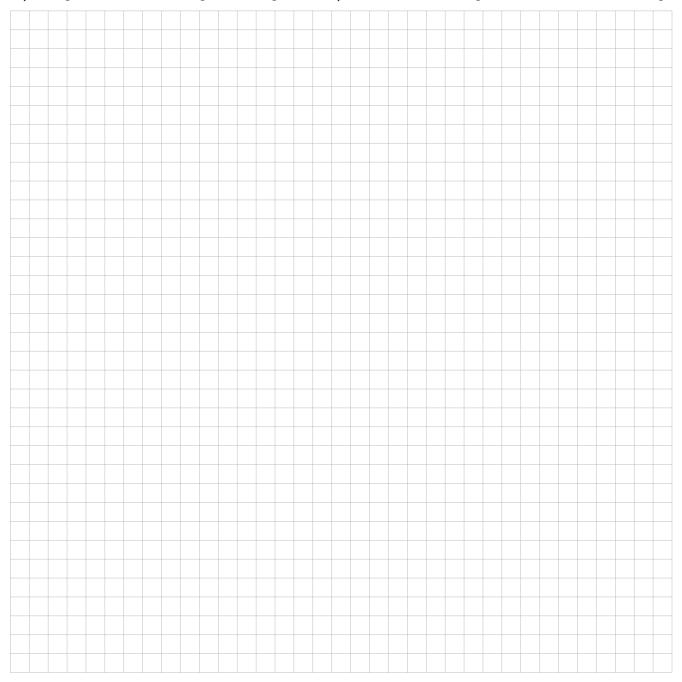


Name, Vorname	Matrikelnummer	THOCHSCHULE ESSLINGEN
Prüfungsfach: Mathematik 2		SS 24
Studiengänge: ISB/SWB/TIB/IEP		Seite: 4 von 13

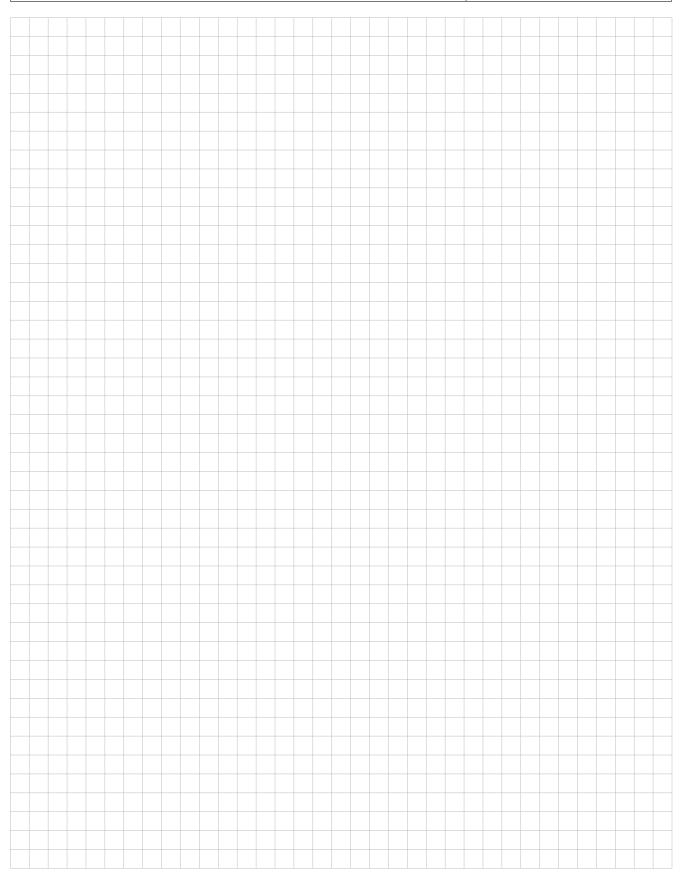
## Aufgabe 2 (10 Punkte) Wir betrachten das Anfangswertproblem

$$y'(x) \cdot y(x) = \sin(x), \quad y(0) = -1.$$

- a) Handelt es sich um eine lineare oder um eine nichtlineare Differenzialgleichung?
- b) Bestimmen Sie die exakte Lösung des Anfangswertproblems.
- c) Berechnen Sie einen Näherungswert für y(1), indem Sie mit der Schrittweite  $h=\frac{1}{2}$  zwei Schritte mit dem Polygonzugverfahren von Euler durchführen.
- d) Wie groß ist die Abweichung des in Aufgabenteil c) berechneten Näherungswerts von der exakten Lösung?



Name, Vorname	Matrikelnummer	HOCHSCHULE ESSLINGEN
Prüfungsfach: Mathematik 2		SS 24
Studiengänge: ISB/SWB/TIB/IEP		Seite: 5 von 13



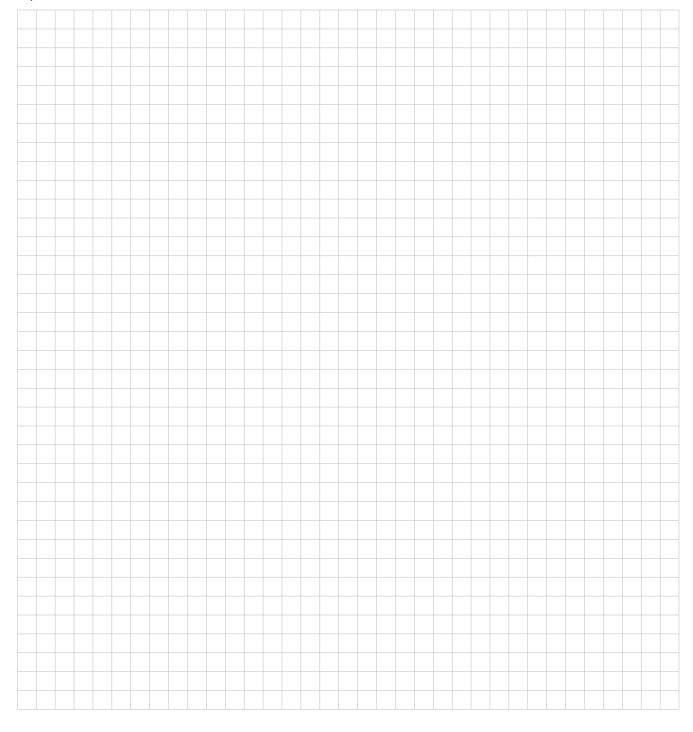
Name, Vorname	Matrikelnummer	HOCHSCHULE ESSLINGEN
Prüfungsfach: Mathematik 2		SS 24
Studiengänge: ISB/SWB/TIB/IEP		Seite: 6 von 13

Aufgabe 3 (9 Punkte) Ein Differenzialgleichungssystem ist gegeben durch

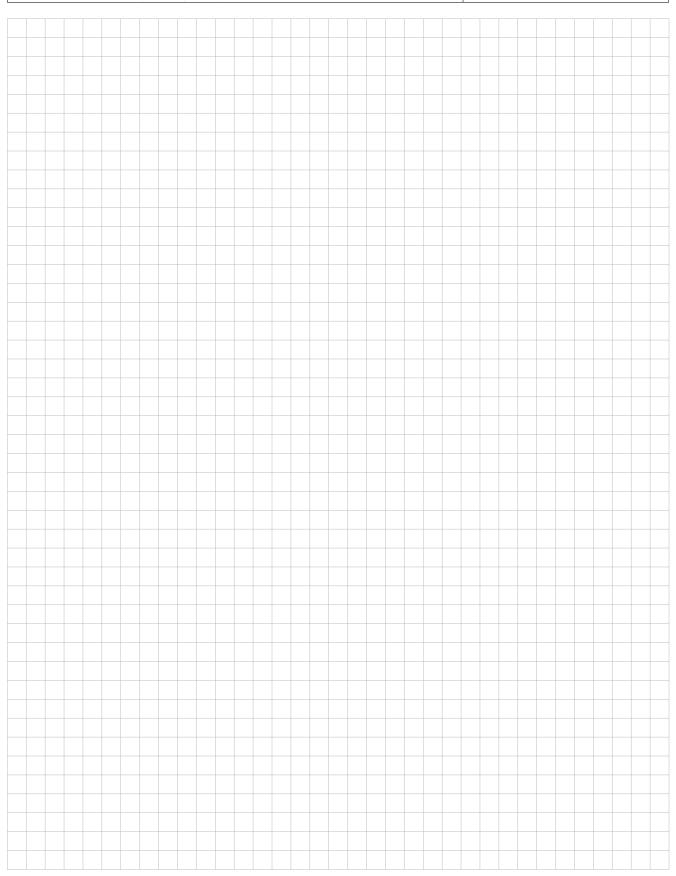
$$\dot{x} = -2x + 3y$$

$$\dot{y} = 10x - 3y$$

- a) Bestimmen Sie die allgemeine Lösung des Differenzialgleichungssystems.
- b) Ist das System asymptotisch stabil?



Name, Vorname	Matrikelnummer	HOCHSCHULE ESSLINGEN
Prüfungsfach: Mathematik 2		SS 24
Studiengänge: ISB/SWB/TIB/IEP		Seite: 7 von 13

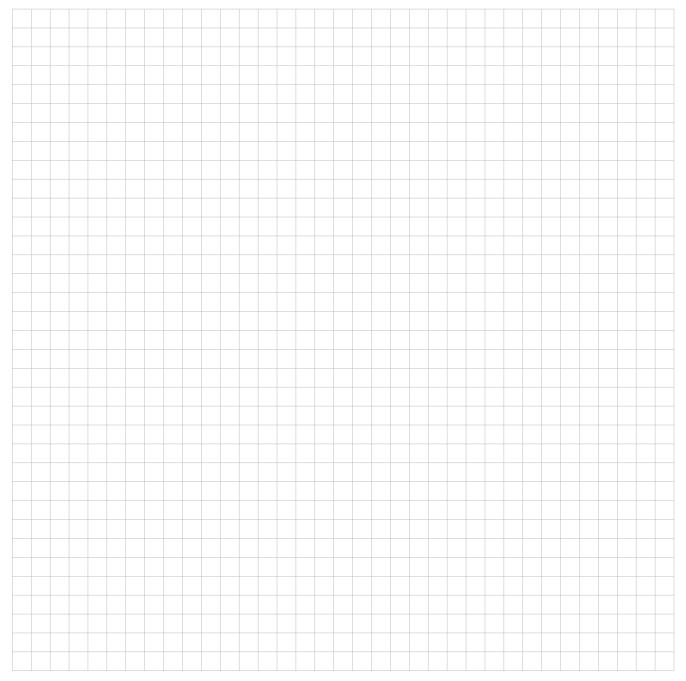


Name, Vorname	Matrikelnummer	HOCHSCHULE ESSLINGEN
Prüfungsfach: Mathematik 2		SS 24
Studiengänge: ISB/SWB/TIB/IEP		Seite: 8 von 13

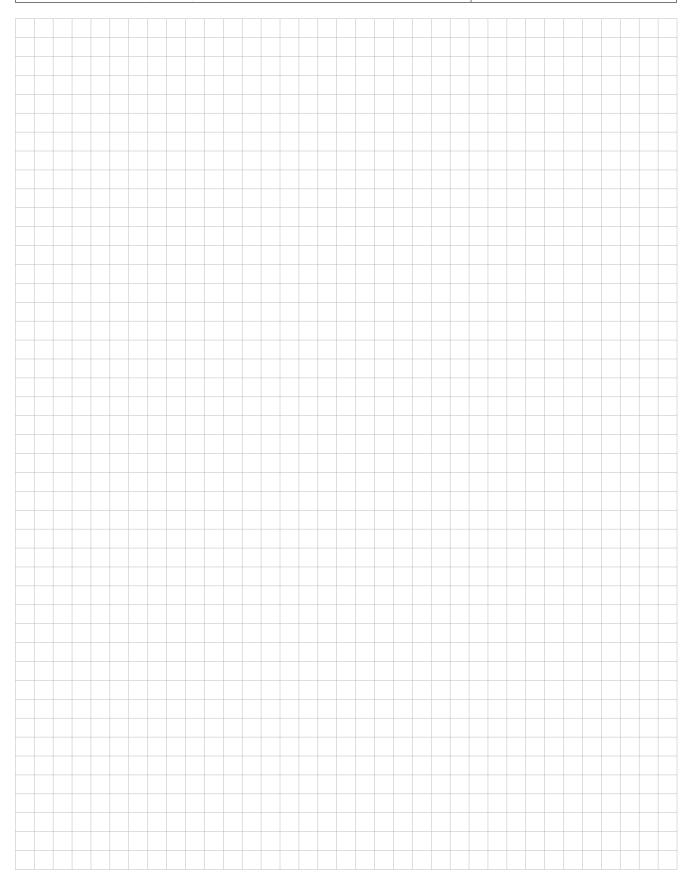
Aufgabe 4 (10 Punkte) Eine Differenzengleichung erster Ordnung ist gegeben durch

$$20 x_{k+1} - 21 x_k = -200, \quad x_0 = 100, \quad k = 0, 1, 2, 3, \dots$$

- a) Geben Sie die Zahlenwerte von  $x_1$  und  $x_2$  an.
- b) Bestimmen Sie die Lösung der Differenzengleichung.
- c) Interpretieren Sie die Zahlenfolge  $(x_k)$  als Kontostand nach k Jahren, eines Kontos mit festem Zinsatz von dem am Ende jeden Jahres der selbe Betrag abgehoben wird. Wie hoch sind Zinsatz und Betrag? Wie oft kann der Betrag von dem Konto abgehoben werden bevor der Kontostand negativ wird?



Name, Vorname	Matrikelnummer	HOCHSCHULE ESSLINGEN
Prüfungsfach: Mathematik 2		SS 24
Studiengänge: ISB/SWB/TIB/IEP		Seite: 9 von 13



Name, Vorname	Matrikelnummer	THOCHSCHULE ESSLINGEN
Prüfungsfach: Mathematik 2		SS 24
Studiengänge: ISB/SWB/TIB/IEP		Seite: 10 von 13

## Aufgabe 5 (8 Punkte) Gegeben ist die Funktion f mit

$$f(x) = e^x \ln(1+x).$$

a) Geben Sie die Potenzreihen der Funktionen g und h an der Entwicklungstelle  $x_0 = 0$  an, mit

$$g(x) = e^x$$
,  $h(x) = \ln(1+x)$ .

Welche Konvergenzradien haben diese Potenzreihen?

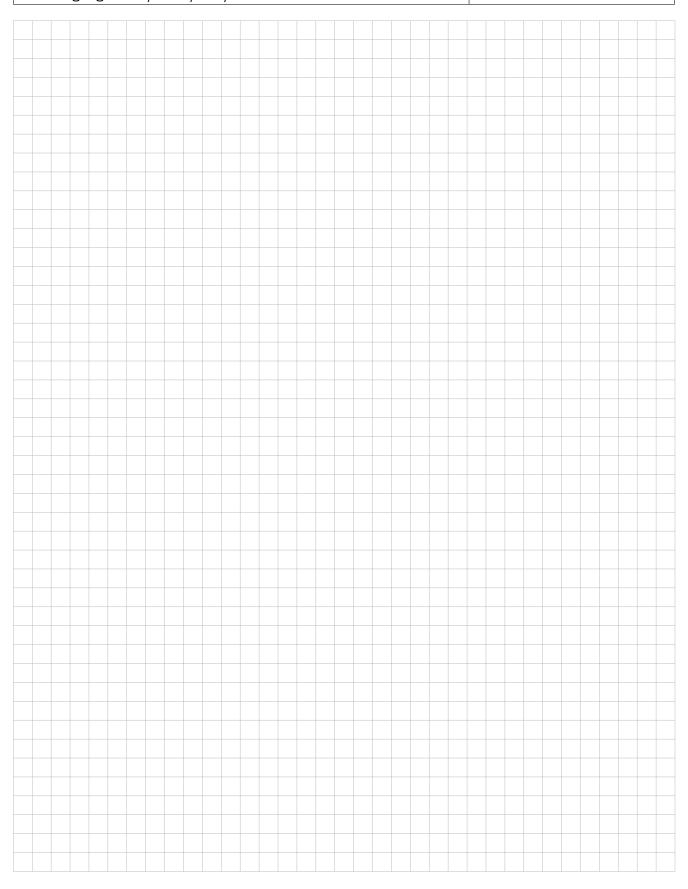
- **b)** Bestimmen Sie das Taylor-Polynom  $T_3$  von Grad 3 der Funktion f an der Entwicklungstelle  $x_0 = 0$  mithilfe der Potenzreihen der Funktionen g und h aus Aufgabenteil **a)**.
- c) Berechnen Sie einen Näherungswert  $\tilde{I}$  für das bestimmte Integral

$$I = \int_0^1 f(x) \, \mathrm{d}\, x \approx \tilde{I} = \int_0^1 T_3(x) \, \mathrm{d}\, x$$

mithilfe des Taylor-Polynoms  $T_3$  aus Aufgabenteil b).

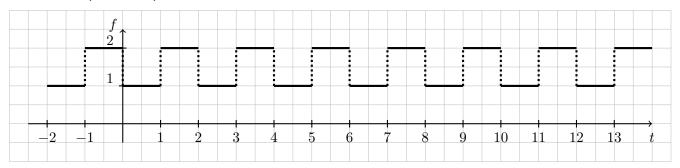


Name, Vorname	Matrikelnummer	THOCHSCHULE ESSLINGEN
Prüfungsfach: Mathematik 2		SS 24
Studiengänge: ISB/SWB/TIB/IEP		Seite: 11 von 13



Name, Vorname	Matrikelnummer	HOCHSCHULE ESSLINGEN
Prüfungsfach: Mathematik 2		SS 24
Studiengänge: ISB/SWB/TIB/IEP		Seite: 12 von 13

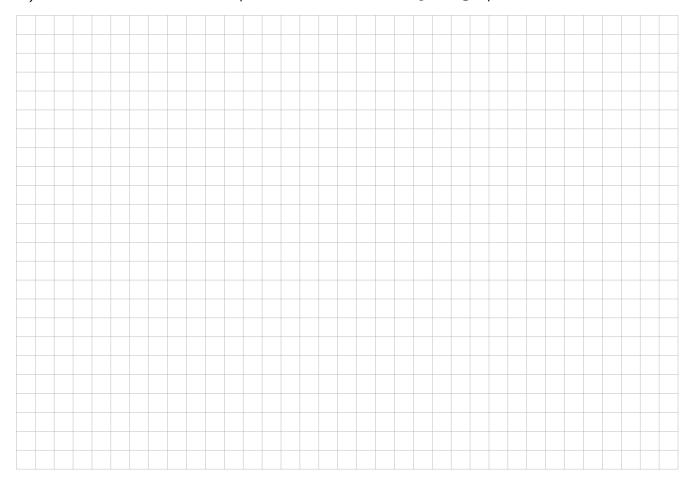
Aufgabe 6 (9 Punkte) Die folgende Abbildung zeigt den Verlauf einer periodischen Funktion f:



- a) Welche Periode T und welche Kreisfrequenz  $\omega$  hat die Funktion f?
- **b)** Ermitteln Sie den Mittelwert m der Funktion f.
- c) Sind die Aussagen richtig oder falsch? Bitte kreuzen Sie den entsprechenden Eintrag an:

Alle reellen Fourier-Koeffizienten  $a_k$  sind für k>0 null.  $\Box$  richtig  $\Box$  falsch Alle reellen Fourier-Koeffizienten  $b_k$  sind für k>0 null.  $\Box$  richtig  $\Box$  falsch

- d) Berechnen Sie für k>0 eine Formel für die komplexen Fourier-Koeffizienten  $c_k$ .
- e) Geben Sie die Werte für die komplexen Fourier-Koeffizienten  $c_1$  und  $c_2$  explizit an.



Name, Vorname	Matrikelnummer	THOCHSCHULE ESSLINGEN
Prüfungsfach: Mathematik 2		SS 24
Studiengänge: ISB/SWB/TIB/IEP		Seite: 13 von 13

