
Name, Vorname	Matrikelnummer	
Prüfungsfach: Mathematik 2	Wintersemester 23/24	
Studiengang: WKB	Seite: 1 von 15	
Prüfungsnummer: IT 105 20 20	Zeit: 90 Minuten	
Dozent: Karsten Runge	Punkte: 54	

Hilfsmittel: Manuskript
Literatur
Taschenrechner Casio FX-87DE Plus / Casio FX-87DE Plus 2nd edition

Hinweise: Bearbeiten Sie die Aufgaben ausschließlich auf diesen Prüfungsblättern.
Begründen Sie alle Lösungsschritte.

Aufgabe 1 (10 Punkte) Hinweis: Alle Teilaufgaben können unabhängig voneinander bearbeitet werden.

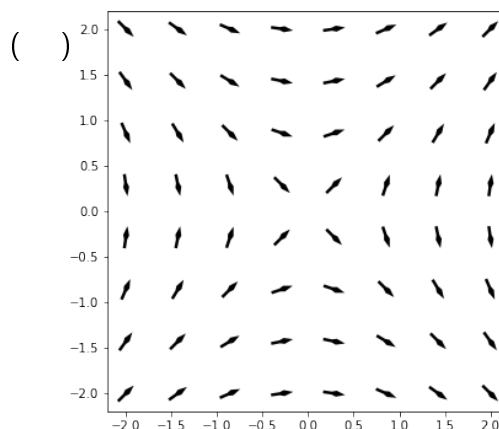
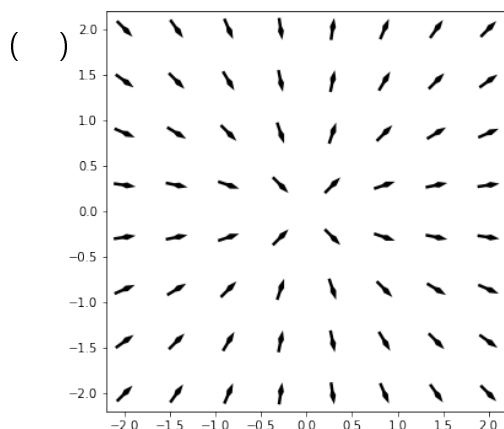
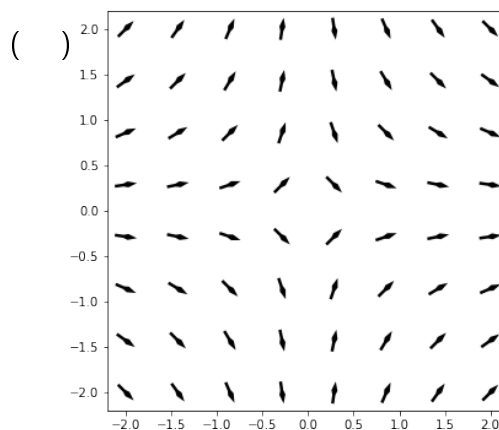
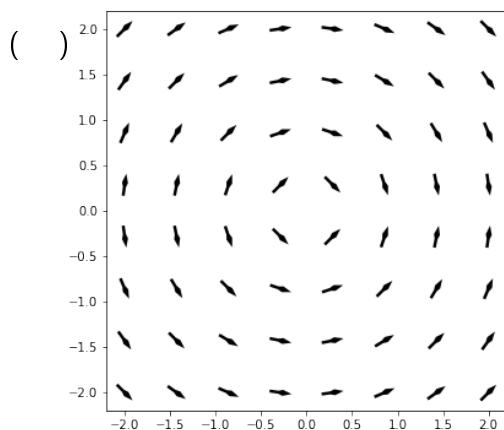
a) Ordnen Sie den Differenzialgleichungen die Richtungsfelder zu:

(A) $y' = \frac{x}{y}$

(B) $y' = \frac{y}{x}$

(C) $y' = -\frac{x}{y}$

(D) $y' = -\frac{y}{x}$



		
Name, Vorname	Matrikelnummer	
Prüfungsfach: Mathematik 2		Wintersemester 23/24
Studiengang: WKB		Seite: 2 von 15

b) Bestimmen Sie die allgemeine Lösung der Differenzialgleichung

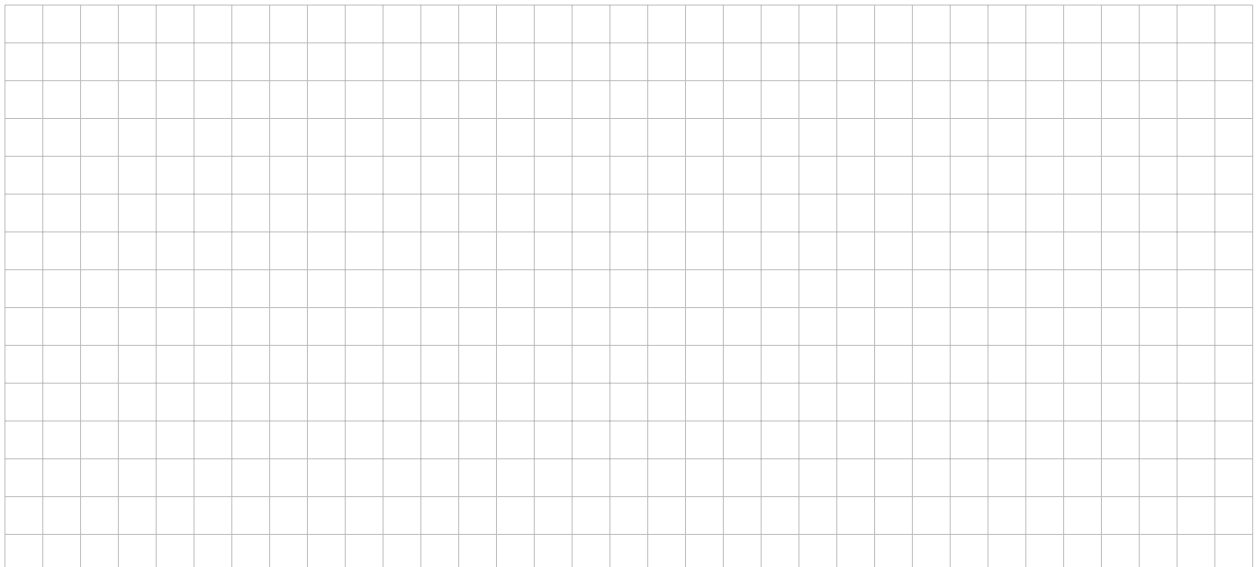
$$y'(x) = 3x^2 y.$$



c) Berechnen Sie für die Lösung des Anfangswertproblems

$$y'(x) = \frac{y}{1+x^2}, \quad y(1) = 3,$$

einen Näherungswert, indem Sie einen Schritt mit dem Euler-Polygonzugverfahren mit der Schrittweite $h = 0.2$ durchführen.



Name, Vorname	
Matrikelnummer	
Prüfungsfach: Mathematik 2	Wintersemester 23/24
Studiengang: WKB	Seite: 3 von 15

- d) Beurteilen Sie den folgenden Dialog mit ChatGPT 3.5. Sind die Berechnungen und die Behauptungen von ChatGPT korrekt?

You

Bitte erstelle ein Beispiel für ein lineares Differenzengleichungssystem mit zwei Unbekannten, das asymptotisch stabil ist.

ChatGPT

Betrachten wir das folgende lineare Differenzengleichungssystem mit zwei Unbekannten:

$$x_{k+1} = 0.8 x_k + 0.2 y_k$$

$$y_{k+1} = 0.4 x_k + 0.6 y_k$$

Die obigen Gleichungen können in Matrixform geschrieben werden als:


$$\begin{pmatrix} x_{k+1} \\ y_{k+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.8 & 0.2 \\ 0.4 & 0.6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_k \\ y_k \end{pmatrix}, \text{ mit der Matrix } \mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0.8 & 0.2 \\ 0.4 & 0.6 \end{pmatrix}$$

Die Matrix \mathbf{A} ist die Übertragungsmatrix des Systems. Um die asymptotische Stabilität zu überprüfen, betrachten wir die Eigenwerte dieser Matrix. Die Eigenwerte λ können durch das Lösen der charakteristischen Gleichung gefunden werden:

$$\begin{vmatrix} 0.8 - \lambda & 0.2 \\ 0.4 & 0.6 - \lambda \end{vmatrix} = 0 \iff (0.8 - \lambda)(0.6 - \lambda) - 0.2 \cdot 0.4 = 0 \iff \lambda^2 - 1.4\lambda + 0.4 = 0$$

Die Lösungen dieser quadratischen Gleichung sind $\lambda_1 = 1$ und $\lambda_2 = 0.4$. Beide Eigenwerte haben Beträge kleiner als 1, was darauf hinweist, dass das System asymptotisch stabil ist. In diesem Beispiel konvergieren die Lösungen für x_k und y_k gegen Null, was auf eine asymptotische Stabilität hinweist.



		
Name, Vorname	Matrikelnummer	
Prüfungsfach: Mathematik 2		Wintersemester 23/24
Studiengang: WKB		Seite: 4 von 15

Aufgabe 2 (9 Punkte) Bestimmen Sie die allgemeine reelle Lösung der Differenzialgleichung

$$y''(x) + 4\,y(x) = 8\cos(2\,x) - 4\sin(2\,x) \,.$$

<div> <div>Name, Vorname</div> <div>Matrikelnummer</div> </div>		<div> <div> <div></div> <div>HOCHSCHULE ESSLINGEN</div> </div> </div>
Prüfungsfach: Mathematik 2		Wintersemester 23/24
Studiengang: WKB		Seite: 6 von 15

Aufgabe 3 (10 Punkte) Bestimmen Sie die allgemeine reelle Lösung des Differenzialgleichungssystems

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= -2x_1 + 3x_2 + 6e^{-2t}, \\ \dot{x}_2 &= 2x_1 + 3x_2 \quad . \end{aligned}$$

Name, Vorname

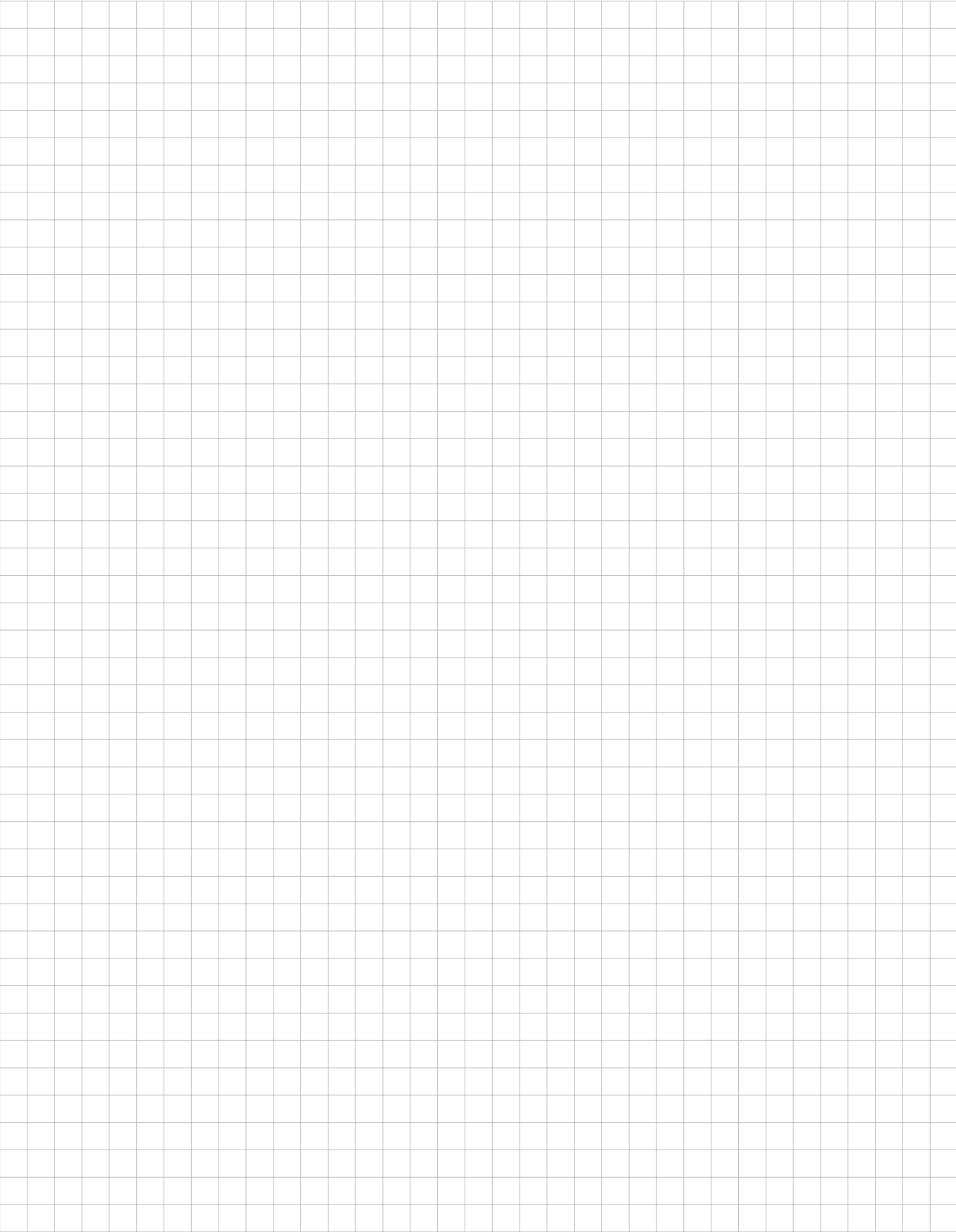
Matrikelnummer

Prüfungsfach: Mathematik 2

Wintersemester 23/24

Studiengang: WKB

Seite: 9 von 15



		
Name, Vorname	Matrikelnummer	
Prüfungsfach: Mathematik 2		Wintersemester 23/24
Studiengang: WKB		Seite: 13 von 15

Aufgabe 6 (9 Punkte)

Gegeben ist das lineare Optimierungsproblem

$$f(\vec{x}) = \vec{c} \cdot \vec{x} \stackrel{!}{=} \text{Max}, \quad \mathbf{A}\vec{x} \leq \vec{b}, \quad \vec{x} \geq 0,$$

mit

$$\vec{c} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{A} = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \vec{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

- Zeichnen Sie den zulässigen Bereich in das gegebene Koordinatensystem ein.
- Zeichnen Sie im zulässigen Bereich alle Punkte (x_1, x_2) mit $f(x_1, x_2) = 1$ ein.
- Wenden Sie den Primalen Simplex-Algorithmus auf das lineare Optimierungsproblem an.

