Name, Vorname	Matrikelnummer	HOCHSCHULE ESSLINGEN
Prüfungsfach: Mathematik 2		Sommersemester 23
Studiengang: WKB		Seite: 1 von 14
Prüfungsnummer: IT 105 20 20		Zeit: 90 Minuten
Dozent: Karsten Runge		Punkte: 54

Hilfsmittel: Manuskript

Literatur

Taschenrechner Casio FX-87DE Plus / Casio FX-87DE Plus 2nd edition

Hinweise: Bearbeiten Sie die Aufgaben ausschließlich auf diesen Prüfungsblättern.

Begründen Sie alle Lösungsschritte.

Aufgabe 1 (10 Punkte) Hinweis: Alle Teilaufgaben können unabhängig voneinander bearbeitet werden.

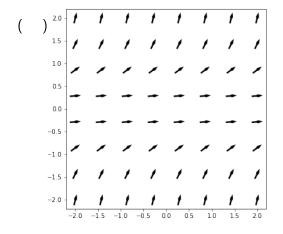
a) Ordnen Sie den Differenzialgleichungen die Richtungsfelder zu:

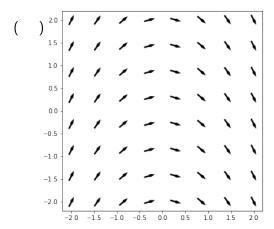
$$(A) y' = -y$$

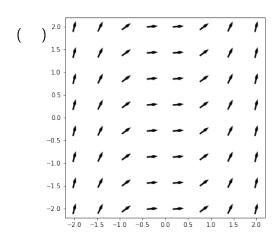
(B)
$$y' = -x$$

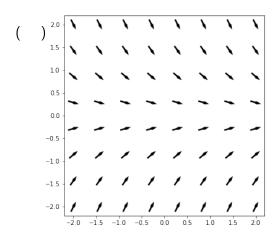
(C)
$$y' = y^2$$

(D)
$$y' = x^2$$









Name, Vorname	Matrikelnummer	HOCHSCHULE ESSLINGEN
Prüfungsfach: Mathematik 2		Sommersemester 23
Studiengang: WKB		Seite: 2 von 14

b) Welche Differenzialgleichung ist linear? Bitte kreuzen Sie den entsprechenden Eintrag an:

$y'' + 2y' + y = \sin(x)$	□ linear	🗆 nicht linear
$y'' + 2y' + \sin(y) = 0$	□ linear	□ nicht linear
$y'' + 2y' + \sin(x) = 0$	□ linear	🗆 nicht linear
$y'' + 2y' + \sin(x)y = 0$	\square linear	□ nicht linear

c) Die Differentialgleichung der Balkendurchbiegung w(x) lautet:

$$\frac{w''(x)}{(1+(w'(x))^2)^{3/2}} = -\frac{M_y(x)}{E I_y} .$$

Dabei bezeichnet $M_y(x)$ das Biegemoment an der Stelle x, E das Elastizitätsmodul des Balkenmaterials und I_y das axiale Flächenträgheitsmoment des Balkenquerschnitts. Stellen Sie diese Differenzialgleichung mithilfe von Zustandsvariablen durch ein äquivalentes System von Differenzialgleichungen erster Ordnung dar.



Name, Vorname	Matrikelnummer	HOCHSCHULE ESSLINGEN
Prüfungsfach: Mathematik 2		Sommersemester 23
Studiengang: WKB		Seite: 3 von 14

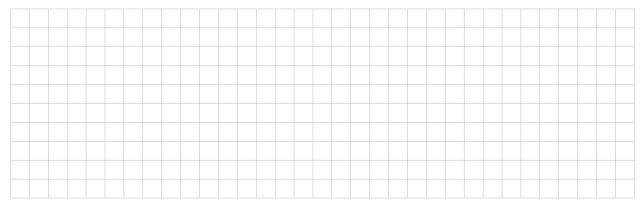
d) Folgende Frage wurde ChatGPT in der Version vom 12. Mai 2023 gestellt:

Ein Teich enthält 1000 Liter Wasser. Täglich verdunsten 2% des Wassers im Teich und 10 Liter Wasser werden nachgefüllt. Wieviel Wasser enthält der Teich nach 2 Tagen?

Die Antwort lautete:

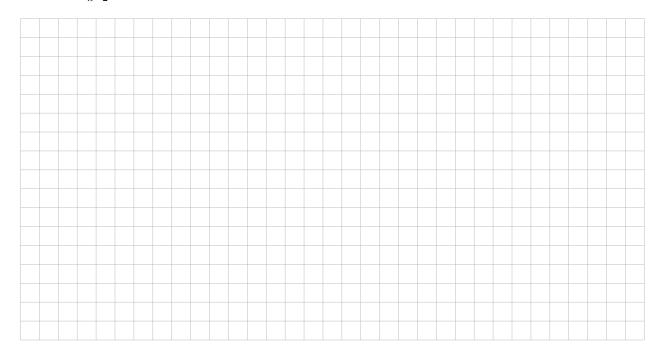
Zuerst berechnen wir die tägliche Verdunstungsmenge: 2% von 1000 Litern sind 20 Liter. Da täglich 10 Liter Wasser nachgefüllt werden, verringert sich die Wasserstandsmenge um 10 Liter – 20 Liter = -10 Liter pro Tag. Nach 2 Tagen würde sich die Wassermenge im Teich um -10 Liter * 2 Tage = -20 Liter verringern. Da der Wasserverlust die Nachfüllung übersteigt, enthält der Teich nach 2 Tagen kein Wasser mehr.

Bestimmen Sie die korrekte Wassermenge im Teich nach 2 Tagen mithilfe einer Differenzengleichung.



e) Welchen Grenzwert S hat die Reihe

$$S = \sum_{k=2}^{\infty} \left(\frac{1}{3}\right)^k ?$$

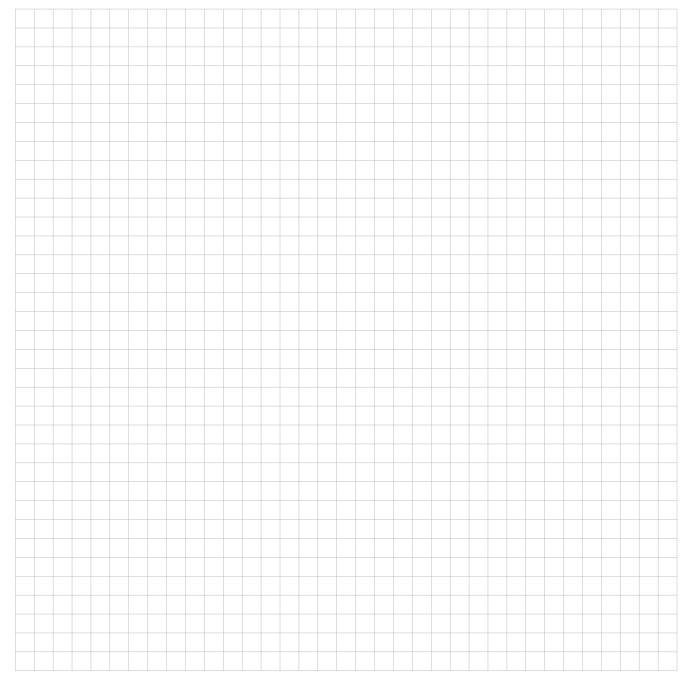


Name, Vorname	Matrikelnummer	HOCHSCHULE ESSLINGEN
Prüfungsfach: Mathematik 2		Sommersemester 23
Studiengang: WKB		Seite: 4 von 14

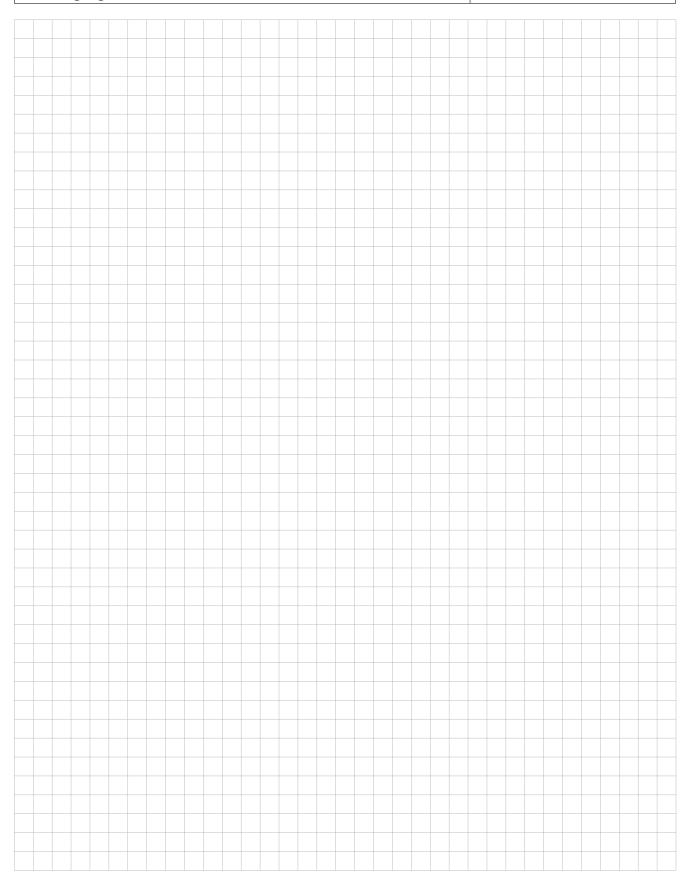
Aufgabe 2 (8 Punkte) Gegeben ist das Anfangswertproblem

$$y' = (y+1)\cos(x), \quad y(0) = 1.$$

- a) Ist die Differenzialgleichung linear?
- b) Berechnen Sie die Lösung des Anfangswertproblems.
- c) Ermitteln Sie einen Näherungswert \tilde{y}_1 für die Lösung des Anfangswertproblems an der Stelle x=0.1, indem Sie einen Schritt mit dem Euler-Polygonzugverfahren mit der Schrittweite h=0.1 durchführen. Wie weit weicht der Näherungswert \tilde{y}_1 von der exakten Lösung ab?



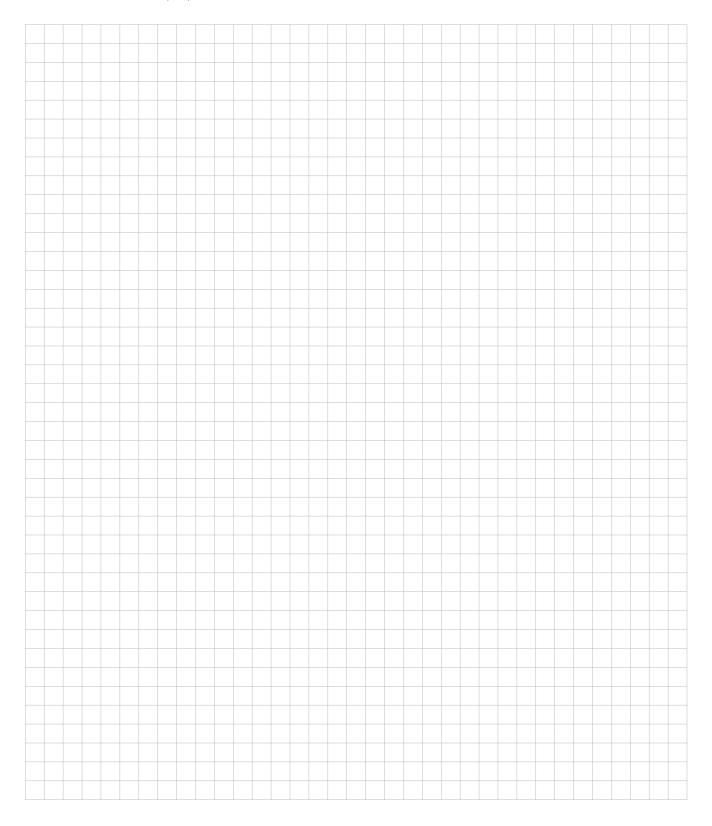
Name, Vorname	Matrikelnummer	HOCHSCHULE ESSLINGEN
Prüfungsfach: Mathematik 2		Sommersemester 23
Studiengang: WKB		Seite: 5 von 14



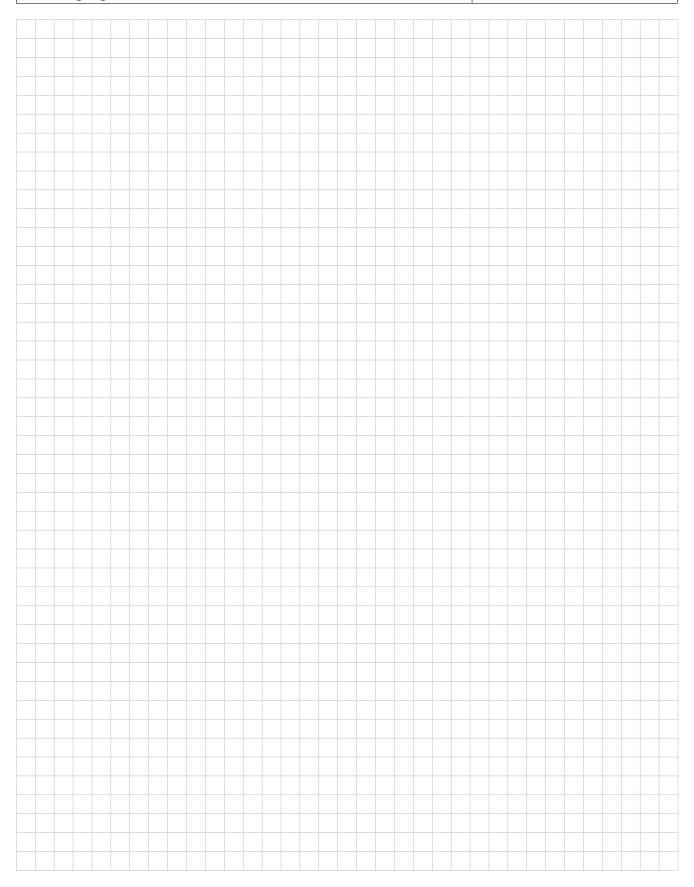
Name, Vorname	Matrikelnummer	THOCHSCHULE ESSLINGEN
Prüfungsfach: Mathematik 2		Sommersemester 23
Studiengang: WKB		Seite: 6 von 14

Aufgabe 3 (10 Punkte) Bestimmen Sie die allgemeine reelle Lösung der Differenzialgleichung

$$y'' + 4y = 3\cos(2x).$$



Name, Vorname	Matrikelnummer	HOCHSCHULE ESSLINGEN
Prüfungsfach: Mathematik 2		Sommersemester 23
Studiengang: WKB		Seite: 7 von 14



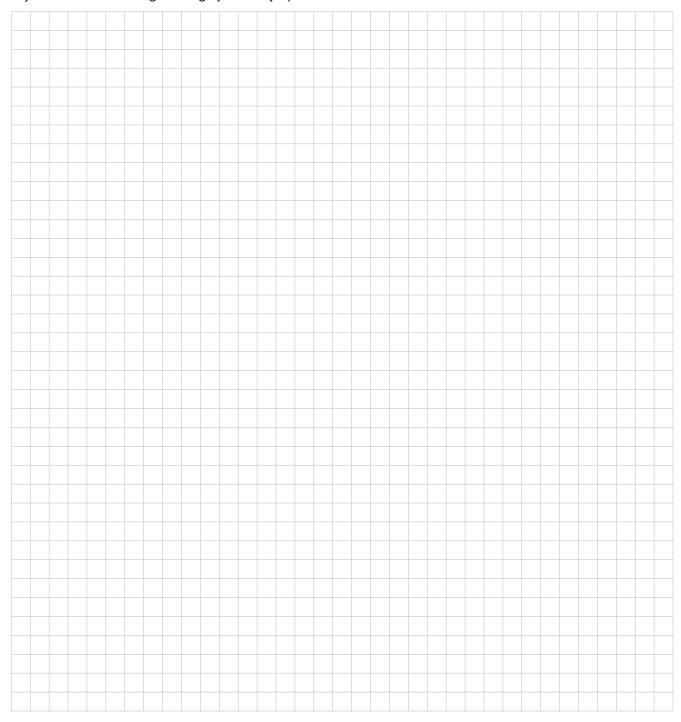
Name, Vorname	Matrikelnummer	HOCHSCHULE ESSLINGEN
Prüfungsfach: Mathematik 2		Sommersemester 23
Studiengang: WKB		Seite: 8 von 14

Aufgabe 4 (8 Punkte) Gegeben ist das Differenzengleichungssystem

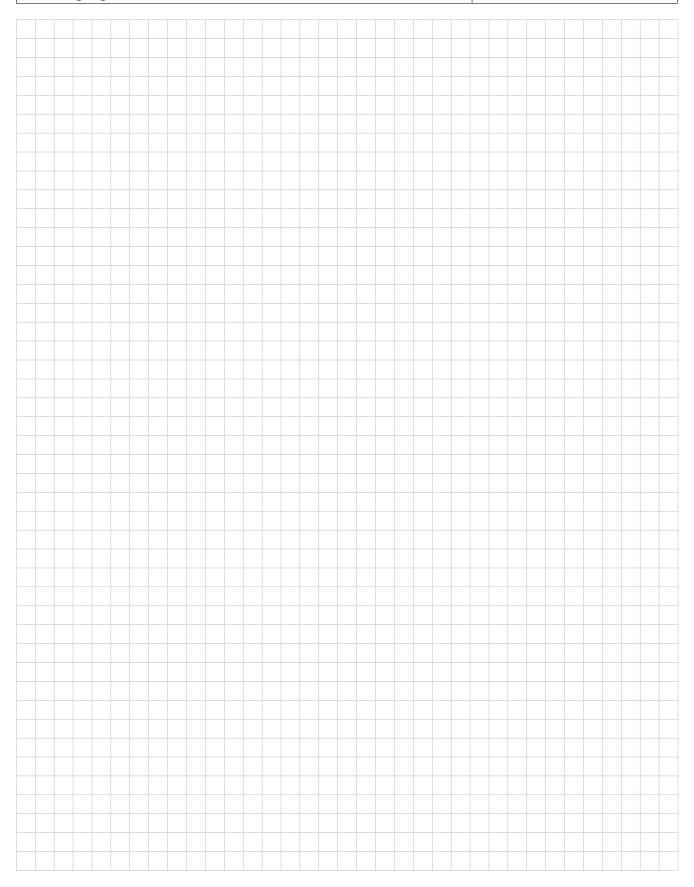
$$x_{k+1} = -2x_k + 3y_k,$$

 $y_{k+1} = 2x_k + 3y_k,$ $k = 0, 1, 2, ...$

- a) Berechnen Sie die allgemeine Lösung des Differenzengleichungssystems.
- b) Ist das Differenzengleichungssystem asymptotisch stabil?



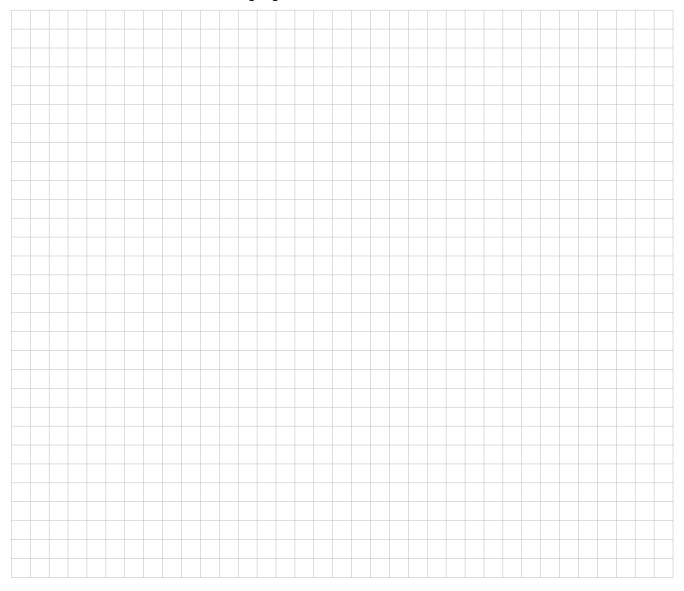
Name, Vorname	Matrikelnummer	HOCHSCHULE ESSLINGEN
Prüfungsfach: Mathematik 2		Sommersemester 23
Studiengang: WKB		Seite: 9 von 14



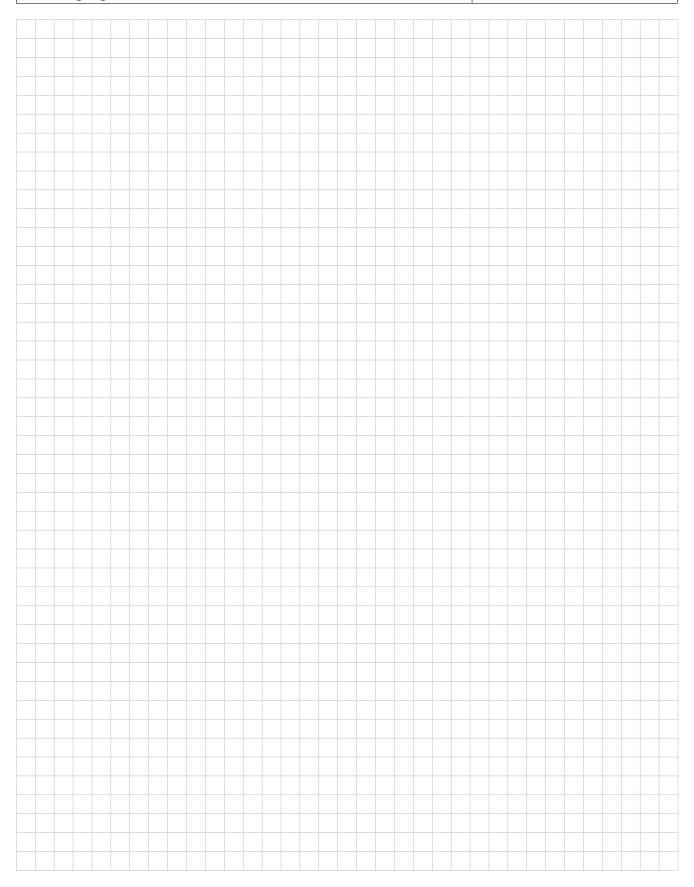
Name, Vorname	Matrikelnummer	HOCHSCHULE ESSLINGEN
Prüfungsfach: Mathematik 2		Sommersemester 23
Studiengang: WKB		Seite: 10 von 14

Aufgabe 5 (6 Punkte) Frau R. wird in 10 Jahren in Rente gehen und denkt über verschiedene Möglichkeiten des Geldanlegens nach, um ihre Rente aufzubessern. In den folgenden Aufgaben wird von einem jährlichen Zinssatz von 3% ausgegangen.

- a) Frau R. denkt zunächst daran, heute genügend Geld anzulegen, um mit Rentenbeginn bis zu 30 Jahre lang (also 30 mal) jeweils zu Beginn des Rentenjahres 6000 Euro abheben zu können. Welche Summe müsste Frau R. dafür heute mindestens anlegen?
- b) Frau R. fällt auf, dass sie die Inflationsrate einbeziehen sollte sie geht von jährlich 3% aus. Sie plant also mit ihrem Renteneintritt in zehn Jahren 6000 Euro und zu Beginn jedes weiteren Rentenjahres 3% mehr als im Vorjahr abheben zu können wieder bis zu 30 Jahre lang.
 - Welche Summe plant Frau R. zu Beginn ihres 2., 5. bzw. 30. Rentenjahres abheben zu können?
 - Welche Summe müsste zum Renteneintritt in 10 Jahren angespart sein, damit 30 Jahre lang wie beschrieben jeweils zu Beginn des Rentenjahres Geld abgehoben werden kann?
 - Welche Summe müsste heute angelegt werden?



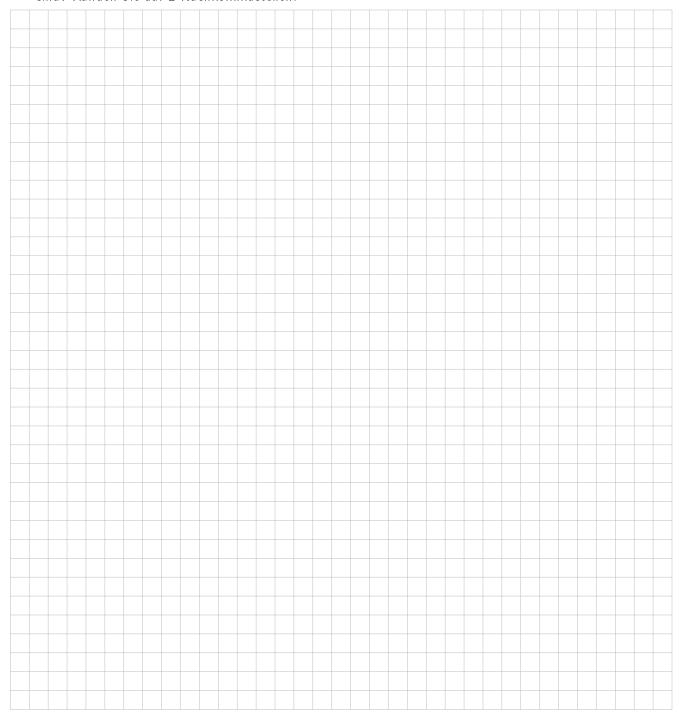
Name, Vorname	Matrikelnummer	HOCHSCHULE ESSLINGEN
Prüfungsfach: Mathematik 2		Sommersemester 23
Studiengang: WKB		Seite: 11 von 14



Name, Vorname	Matrikelnummer	HOCHSCHULE ESSLINGEN
Prüfungsfach: Mathematik 2		Sommersemester 23
Studiengang: WKB		Seite: 12 von 14

Aufgabe 6 (3 Punkte) Ehepaar Schmidt hat vor 5 Jahren 10.000 Euro für seine Tochter Lina angelegt, in der Hoffnung 20 Jahre später (also in 15 Jahren) 20.000 Euro angespart zu haben. In den ersten Jahren gab es zweimal 1%, zweimal 2% und einmal 3% Zinsen pro Jahr.

- a) Bestimmen Sie den effektiven Jahreszins für die ersten 5 Jahre (auf 1 Nachkommastelle gerundet).
- b) Angenommen der Zinssatz p für die kommenden 15 Jahre ist fest. Welchen Wert muss p (mindestens) haben, damit 20 Jahre nach Anlegen der 10.000 Euro tatsächlich (mindestens) 20.000 Euro angespart sind? Runden Sie auf 2 Nachkommastellen.



Name, Vorname	Matrikelnummer	HOCHSCHULE ESSLINGEN
Prüfungsfach: Mathematik 2		Sommersemester 23
Studiengang: WKB		Seite: 13 von 14

Aufgabe 7 (9 Punkte)

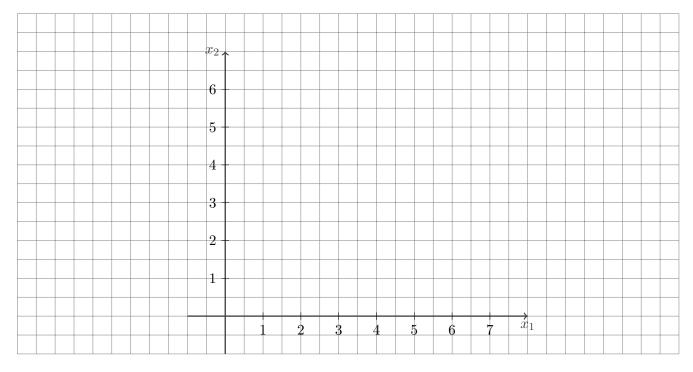
Gegeben ist das lineare Optimierungsproblem

$$f(\vec{x}) = \vec{c} \cdot \vec{x} \stackrel{!}{=} \text{Max}, \quad \mathbf{A}\vec{x} \le \vec{b}, \quad \vec{x} \ge 0,$$

mit

$$\vec{c} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{A} = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \vec{b} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix}.$$

- a) Zeichnen Sie den zulässigen Bereich in das gegebene Koordinatensystem ein.
- **b)** Zeichnen Sie im zulässigen Bereich alle Punkte (x_1, x_2) mit $f(x_1, x_2) = 6$ ein.
- c) Wenden Sie den Primalen Simplex-Algorithmus auf das lineare Optimierungsproblem an.





Name, Vorname	Matrikelnummer	HOCHSCHULE ESSLINGEN
Prüfungsfach: Mathematik 2		Sommersemester 23
Studiengang: WKB		Seite: 14 von 14

