


Prüfungsaufgaben mit Lösungen	 HOCHSCHULE ESSLINGEN
Prüfungsfach: Mathematik 2	SS 24
Studiengänge: ISB/SWB/TIB/IEP	Seite: 1 von 11
Prüfungsnummer: R39.08101	Zeit: 90 Minuten
Dozent: Prof. Dr. Jürgen Koch	Punkte: 54

Hilfsmittel: Manuskript
Literatur
Taschenrechner Casio FX-87DE Plus / Casio FX-87DE Plus 2nd edition

Hinweise: Bearbeiten Sie die Aufgaben ausschließlich auf diesen Prüfungsblättern.
Begründen Sie alle Lösungsschritte.

Aufgabe 1 (8 Punkte) Hinweis: Alle Teilaufgaben können unabhängig voneinander bearbeitet werden.

a) Geben Sie eine lineare Differenzialgleichung an, die die Fundamentallösung

$$y(x) = e^{-2x}$$

besitzt.

Eigenwert $\lambda_1 = -2$:

$$y'(x) = -2 y(x)$$

2 P

b) Bei welchen Störfunktionen r tritt bei der Differenzialgleichung

$$y'' + 9y = r(x)$$

Resonanz auf? Bitte kreuzen Sie den entsprechenden Eintrag an:

$$r(x) = e^{-9x}$$

☐ Resonanz

☒ keine Resonanz

$$r(x) = e^{9x}$$

☐ Resonanz

☒ keine Resonanz

$$r(x) = 3 \cos(x)$$

☐ Resonanz


☒ keine Resonanz

$$r(x) = \cos(3x)$$

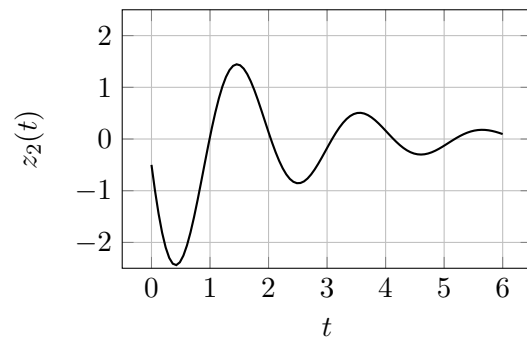
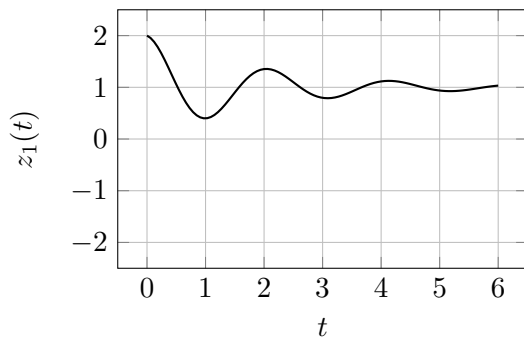
☒ Resonanz

☐ keine Resonanz

2 P

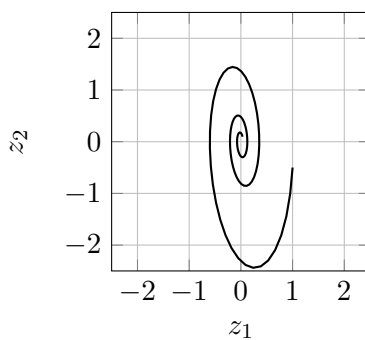
Prüfungsaufgaben mit Lösungen	
Prüfungsfach: Mathematik 2	SS 24
Studiengänge: ISB/SWB/TIB/IEP	Seite: 2 von 11

c) Die folgenden beiden Abbildungen zeigen den zeitlichen Verlauf der Zustände $z_1(t)$ und $z_2(t)$:

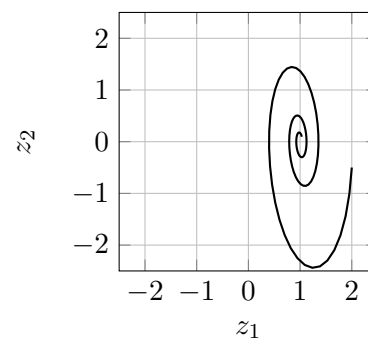


Welche der folgenden vier Abbildungen zeigt den richtigen Verlauf des Phasenporträts? Bitte begründen Sie Ihre Antwort!

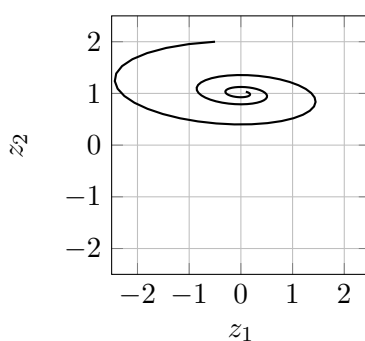
(A)



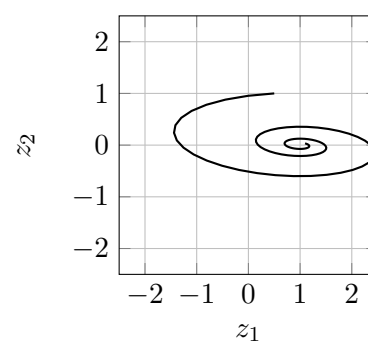
(B)



(C)




(D)



Die Spirale endet in der Nähe des Punktes mit den Koordinaten $(1 \mid 0)$. Die Werte des Zustands z_1 bewegen sich zwischen 0 und 2. Somit zeigt Abbildung (B) den richtigen Verlauf.

2 P

Prüfungsaufgaben mit Lösungen	 HOCHSCHULE ESSLINGEN
Prüfungsfach: Mathematik 2	SS 24
Studiengänge: ISB/SWB/TIB/IEP	Seite: 3 von 11

- d) Beurteilen Sie den folgenden Dialog mit ChatGPT 3.5. Sind die Berechnungen und die Behauptungen von ChatGPT korrekt? Es genügt den Fehler zu finden, die richtige Lösung muss nicht bestimmt werden!

You: Wie lautet die Lösung des Anfangswertproblems (AWP)

$$x' \cdot x = t, \quad x(0) = 1 ?$$

ChatGPT 3.5: Um das AWP zu lösen, können wir das Verfahren der Trennung der Variablen verwenden.

1. Trenne die Variablen:

$$\frac{dx}{x} = t \, dt$$

2. Integriere beide Seiten:

$$\int \frac{dx}{x} = \int t \, dt \quad \Longleftrightarrow \quad \ln|x| = \frac{t^2}{2} + C$$

3. Löse nach x auf:

$$|x| = e^{\frac{t^2}{2} + C}$$

Da $x(0) = 1$, setzen wir $t = 0$ und lösen für C :

$$|1| = e^C \quad \Longleftrightarrow \quad C = 0$$

4. Setze C ein und berücksichtige das Betragszeichen:

$$|x| = e^{\frac{t^2}{2}} \quad \Longleftrightarrow \quad x = \pm e^{\frac{t^2}{2}}$$

Da $x(0) = 1$, wählen wir das positive Vorzeichen:


$$x(t) = e^{\frac{t^2}{2}}$$

Die Trennung der Variablen ist falsch, richtig ist:

2 P

$$x \cdot \frac{dx}{dt} = t \quad \Longleftrightarrow \quad \int x \, dx = \int t \, dt$$

Hinweis: ChatGPT 4.0 bestimmt die Lösung des AWP korrekt!

Prüfungsaufgaben mit Lösungen	 HOCHSCHULE ESSLINGEN
Prüfungsfach: Mathematik 2	SS 24
Studiengänge: ISB/SWB/TIB/IEP	Seite: 4 von 11

Aufgabe 2 (10 Punkte) Wir betrachten das Anfangswertproblem

$$y'(x) \cdot y(x) = \sin(x), \quad y(0) = -1.$$

- a) Handelt es sich um eine lineare oder um eine nichtlineare Differenzialgleichung?
- b) Bestimmen Sie die exakte Lösung des Anfangswertproblems.
- c) Berechnen Sie einen Näherungswert für $y(1)$, indem Sie mit der Schrittweite $h = \frac{1}{2}$ zwei Schritte mit dem Polygonzugverfahren von Euler durchführen.
- d) Wie groß ist die Abweichung des in Aufgabenteil c) berechneten Näherungswerts von der exakten Lösung?

a) Nichtlineare Differenzialgleichung.

1 P

b) Separation:

1 P

$$\frac{dy}{dx} \cdot y = \sin(x) \implies \int y \, dy = \int \sin(x) \, dx$$

Integration:

1 P

$$\frac{1}{2} y^2 = -\cos(x) + C$$

Allgemeine Lösung:

1 P

$$y(x) = \pm \sqrt{2C - 2\cos(x)}$$

Anfangswert $y(0) = -1$:

1 P

$$\frac{1}{2} \cdot (-1)^2 = -\cos(0) + C \implies C = \frac{3}{2}$$

Lösung des Anfangswertproblems:

1 P

$$y(x) = -\sqrt{3 - 2\cos(x)}$$

c) 1. Schritt mit $x_0 = 0$ und $y_0 = -1$:


1 P

$$y_1 = y_0 + h \frac{\sin(x_0)}{y_0} = -1, \quad x_1 = x_0 + h = \frac{1}{2}$$

2. Schritt:

1 P

$$y_2 = y_1 + h \frac{\sin(x_1)}{y_1} = -1 - \frac{1}{2} \sin\left(\frac{1}{2}\right) \approx -1.2397, \quad x_2 = x_1 + h = 1$$

Prüfungsaufgaben mit Lösungen	 HOCHSCHULE ESSLINGEN
Prüfungsfach: Mathematik 2	SS 24
Studiengänge: ISB/SWB/TIB/IEP	Seite: 5 von 11

d) Exakte Lösung:


1 P

$$y(1) = -\sqrt{3 - 2 \cos(1)} \approx -1.3854$$

Abweichung:

1 P

$$|y(1) - y_2| \approx |-1.3854 + 1.2397| \approx 0.1457$$

Prüfungsaufgaben mit Lösungen	
Prüfungsfach: Mathematik 2	SS 24
Studiengänge: ISB/SWB/TIB/IEP	Seite: 6 von 11

Aufgabe 3 (9 Punkte) Ein Differenzialgleichungssystem ist gegeben durch

$$\dot{x} = -2x + 3y$$

$$\dot{y} = 10x - 3y$$

- a) Bestimmen Sie die allgemeine Lösung des Differenzialgleichungssystems.
b) Ist das System asymptotisch stabil?

a) Homogenes System in Matrixform:

$$\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 3 \\ 10 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

1 P

Charakteristische Gleichung und Eigenwerte:

$$\begin{vmatrix} -2 - \lambda & 3 \\ 10 & -3 - \lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 + 5\lambda - 24 = 0 \implies \lambda_1 = -8, \lambda_2 = 3$$

2 P

Berechnung eines Eigenvektors $\begin{pmatrix} u_1 \\ v_1 \end{pmatrix}$ zum Eigenwert $\lambda_1 = -8$:

$$\begin{pmatrix} 6 & 3 \\ 10 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ v_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \implies v_1 = -2u_1 \implies \begin{pmatrix} u_1 \\ v_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}$$

2 P

Berechnung eines Eigenvektors $\begin{pmatrix} u_2 \\ v_2 \end{pmatrix}$ zum Eigenwert $\lambda_2 = 3$:

$$\begin{pmatrix} -5 & 3 \\ 10 & -6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_2 \\ v_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \implies 5u_2 = 3v_2 \implies \begin{pmatrix} u_2 \\ v_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \end{pmatrix}$$

2 P


Allgemeine Lösung des homogenen Differenzialgleichungssystems:

$$\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = C_1 e^{-8t} \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix} + C_2 e^{3t} \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \end{pmatrix}$$

1 P

- b) Das System ist nicht asymptotisch stabil, da nicht alle Eigenwerte λ die Bedingung $\operatorname{Re}(\lambda) < 0$ erfüllen, $\operatorname{Re}(\lambda_2) = 3 > 0$.

1 P

Prüfungsaufgaben mit Lösungen	 HOCHSCHULE ESSLINGEN
Prüfungsfach: Mathematik 2	SS 24
Studiengänge: ISB/SWB/TIB/IEP	Seite: 7 von 11

Aufgabe 4 (10 Punkte) Eine Differenzengleichung erster Ordnung ist gegeben durch

$$20x_{k+1} - 21x_k = -200, \quad x_0 = 100, \quad k = 0, 1, 2, 3, \dots$$

- a) Geben Sie die Zahlenwerte von x_1 und x_2 an.
- b) Bestimmen Sie die Lösung der Differenzengleichung.
- c) Interpretieren Sie die Zahlenfolge (x_k) als Kontostand nach k Jahren, eines Kontos mit festem Zinssatz von dem am Ende jeden Jahres der selbe Betrag abgehoben wird. Wie hoch sind Zinssatz und Betrag? Wie oft kann der Betrag von dem Konto abgehoben werden bevor der Kontostand negativ wird?

a) Rekursionsformel auflösen:

1 P

$$x_{k+1} = \frac{21}{20}x_k - 10.$$

Zahlenwerte:

1 P

$$k = 0 : x_1 = \frac{21}{20}x_0 - 10 = \frac{21}{20} \cdot 100 - 10 = 95.$$

$$k = 1 : x_2 = \frac{21}{20}x_1 - 10 = \frac{21}{20} \cdot 95 - 10 = 89.75.$$

b) Homogene Lösung:

1 P

$$20x_{k+1} - 21x_k = 0, \quad \Rightarrow \quad 20\lambda - 21 = 0 \quad \Rightarrow \quad \lambda = \frac{21}{20} \quad \Rightarrow \quad x_k^h = C \cdot \left(\frac{21}{20}\right)^k.$$

Partikuläre Lösung:

1 P

$$x_k^p = A \quad \Rightarrow \quad 20A - 21A = -200 \quad \Rightarrow \quad A = 200.$$

Allgemeine Lösung:

1 P

$$x_k = x_k^h + x_k^p = C \cdot \left(\frac{21}{20}\right)^k + 200.$$

Anfangswert $x_0 = 100$:


1 P

$$k = 0 : x_0 = C \cdot \left(\frac{21}{20}\right)^0 + 200 \quad \Rightarrow \quad 100 = C + 200 \quad \Rightarrow \quad C = -100.$$

Ergebnis:

1 P

$$x_k = -100 \cdot \left(\frac{21}{20}\right)^k + 200.$$

Prüfungsaufgaben mit Lösungen	 HOCHSCHULE ESSLINGEN
Prüfungsfach: Mathematik 2	SS 24
Studiengänge: ISB/SWB/TIB/IEP	Seite: 8 von 11

c) Zinssatz $\frac{21}{20} - 1 = \frac{1}{20} = 5\%$, Betrag 10.

1 P

Bedingung $x_k = 0$:

1 P

$$100 \cdot \left(\frac{21}{20}\right)^k = 200 \iff \left(\frac{21}{20}\right)^k = 2$$

Nach k auflösen:

1 P

$$\ln(2) = \ln\left(\frac{21}{20}\right)^k \iff \ln(2) = k \ln\left(\frac{21}{20}\right) \iff k = \frac{\ln(2)}{\ln\left(\frac{21}{20}\right)} \approx 14.2$$

Der Betrag kann 14 mal abgehoben werden.

Alternative Lösung für b) mit Lösungsformel für lineare Differenzengleichung erster Ordnung:

$$x_{k+1} = \lambda x_k + r_k \implies x_k = \lambda^k \cdot x_0 + \sum_{l=0}^{k-1} \lambda^{k-1-l} r_l.$$

Mit $\lambda = \frac{21}{20}$, $r_k = -10$, $x_0 = 100$:


$$x_k = \left(\frac{21}{20}\right)^k \cdot 100 + \sum_{l=0}^{k-1} \left(\frac{21}{20}\right)^{k-1-l} \cdot (-10).$$

Geometrische Reihe:

$$\sum_{l=0}^{k-1} q^{k-1-l} = \frac{1 - q^k}{1 - q}.$$

Mit $q = \frac{21}{20}$:

$$x_k = 100 \left(\frac{21}{20}\right)^k - 10 \frac{1 - \left(\frac{21}{20}\right)^k}{1 - \frac{21}{20}} = 100 \left(\frac{21}{20}\right)^k + 200 \left(1 - \left(\frac{21}{20}\right)^k\right) = -100 \cdot \left(\frac{21}{20}\right)^k + 200.$$

Prüfungsaufgaben mit Lösungen	
Prüfungsfach: Mathematik 2	SS 24
Studiengänge: ISB/SWB/TIB/IEP	Seite: 9 von 11

Aufgabe 5 (8 Punkte) Gegeben ist die Funktion f mit

$$f(x) = e^x \ln(1+x).$$

a) Geben Sie die Potenzreihen der Funktionen g und h an der Entwicklungstelle $x_0 = 0$ an, mit

$$g(x) = e^x, \quad h(x) = \ln(1+x).$$

Welche Konvergenzradien haben diese Potenzreihen?

b) Bestimmen Sie das Taylor-Polynom T_3 von Grad 3 der Funktion f an der Entwicklungstelle $x_0 = 0$ mithilfe der Potenzreihen der Funktionen g und h aus Aufgabenteil a).

c) Berechnen Sie einen Näherungswert \tilde{I} für das bestimmte Integral

$$I = \int_0^1 f(x) \, dx \approx \tilde{I} = \int_0^1 T_3(x) \, dx$$

mithilfe des Taylor-Polynoms T_3 aus Aufgabenteil b).

a) Potenzreihe der e-Funktion:

1 P

$$e^x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} x^k = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} \pm \dots$$

Potenzreihe des Logarithmus:

1 P

$$\ln(1+x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k} x^k = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} \pm \dots$$

Die Potenzreihe der e-Funktion hat den Konvergenzradius ∞ und die Potenzreihe der ln-Funktion hat den Konvergenzradius 1.

1 P

b) Cauchy-Produkt:

1 P

$$f(x) = g(x) \cdot h(x) = \left(1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} \pm \dots\right) \left(x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} \pm \dots\right)$$

Taylor-Polynom T_3 von Grad 3:


2 P

$$T_3(x) = 1 \cdot \left(x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3}\right) + x \cdot \left(x - \frac{x^2}{2}\right) + \frac{x^2}{2} \cdot x = x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3}$$

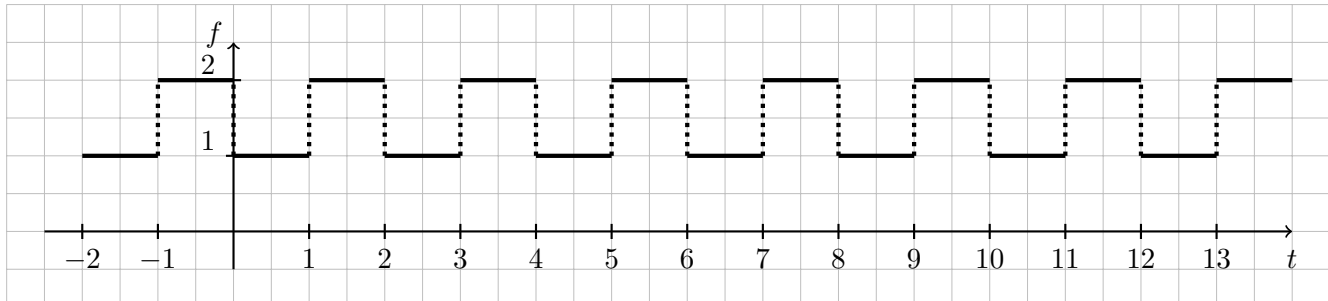
c) Näherungswert:

2 P

$$\tilde{I} = \int_0^1 T_3(x) \, dx = \int_0^1 \left(x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3}\right) \, dx = \left[\frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + \frac{x^4}{12}\right]_0^1 = \frac{1}{2} + \frac{1}{6} + \frac{1}{12} = \frac{9}{12} = \frac{3}{4}$$

Prüfungsaufgaben mit Lösungen	 HOCHSCHULE ESSLINGEN
Prüfungsfach: Mathematik 2	SS 24
Studiengänge: ISB/SWB/TIB/IEP	Seite: 10 von 11

Aufgabe 6 (9 Punkte) Die folgende Abbildung zeigt den Verlauf einer periodischen Funktion f :



- a) Welche Periode T und welche Kreisfrequenz ω hat die Funktion f ?
- b) Ermitteln Sie den Mittelwert m der Funktion f .
- c) Sind die Aussagen richtig oder falsch? Bitte kreuzen Sie den entsprechenden Eintrag an:
- Alle reellen Fourier-Koeffizienten a_k sind für $k > 0$ null. ☒ richtig ☐ falsch
- Alle reellen Fourier-Koeffizienten b_k sind für $k > 0$ null. ☐ richtig ☒ falsch
- d) Berechnen Sie für $k > 0$ eine Formel für die komplexen Fourier-Koeffizienten c_k .
- e) Geben Sie die Werte für die komplexen Fourier-Koeffizienten c_1 und c_2 explizit an.

1 P

- a) Periode $T = 2$ und Kreisfrequenz $\omega = \pi$.


1 P

- b) Mittelwert:

1 P

$$m = \frac{\text{Fläche einer Periode}}{\text{Periode}} = \frac{3}{2}$$

- c)

Prüfungsaufgaben mit Lösungen	
Prüfungsfach: Mathematik 2	SS 24
Studiengänge: ISB/SWB/TIB/IEP	Seite: 11 von 11

d) Formel für c_k :

1 P

$$c_k = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(t) e^{-i k \omega t} dt = \frac{1}{2} \int_{-1}^1 f(t) e^{-i k \pi t} dt$$

Aufspalten in zwei Teilintegrale:

1 P

$$c_k = \frac{1}{2} \int_{-1}^0 1 \cdot e^{-i k \pi t} dt + \frac{1}{2} \int_0^1 2 \cdot e^{-i k \pi t} dt$$

Stammfunktionen:

1 P

$$c_k = \frac{1}{2} \left[\frac{e^{-i k \pi t}}{-i k \pi} \right]_{-1}^0 + \left[\frac{e^{-i k \pi t}}{-i k \pi} \right]_0^1$$

Grenzen einsetzen:

1 P

$$c_k = \frac{1}{2} \frac{1 - e^{i k \pi}}{-i k \pi} + \frac{e^{-i k \pi} - 1}{-i k \pi}.$$

Wegen $e^{\pm i k \pi} = (-1)^k$:

1 P

$$c_k = \frac{1 - (-1)^k + 2(-1)^k - 1}{-2 i k \pi} = \frac{(-1)^k - 1}{-2 i k \pi} = \frac{(-1)^k - 1}{2 k \pi} i$$

e) Für $k = 1$ und $k = 2$:

1 P

$$c_1 = \frac{(-1)^1 - 1}{2 \cdot 1 \cdot \pi} i = -\frac{1}{\pi} i, \quad c_2 = \frac{(-1)^2 - 1}{2 \cdot 2 \cdot \pi} i = 0$$