

Prüfungsaufgaben mit Lösungen	<b>HOCHSCHULE ESSLINGEN</b>
Prüfungsfach: Mathematik 2	Wintersemester 23/24
Studiengang: WKB	Seite: 1 von 12
Prüfungsnummer: IT 105 20 20	Zeit: 90 Minuten
Dozent: Karsten Runge	Punkte: 54

Hilfsmittel:      Manuskript  
Literatur  
Taschenrechner Casio FX-87DE Plus / Casio FX-87DE Plus 2nd edition

Hinweise:        Bearbeiten Sie die Aufgaben ausschließlich auf diesen Prüfungsblättern.  
Begründen Sie alle Lösungsschritte.

**Aufgabe 1 (10 Punkte)** Hinweis: Alle Teilaufgaben können unabhängig voneinander bearbeitet werden.

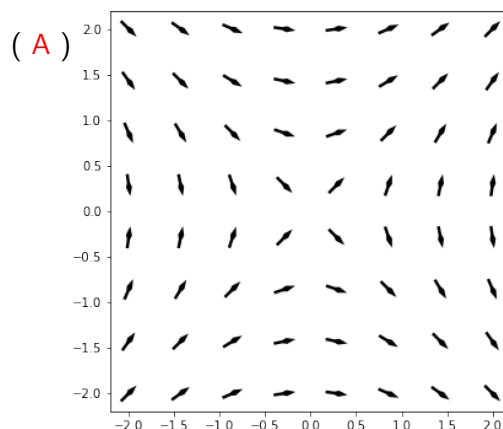
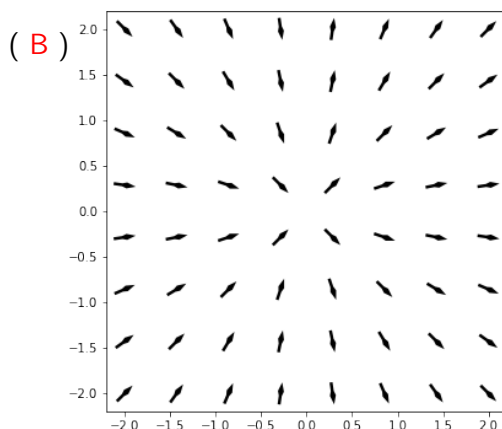
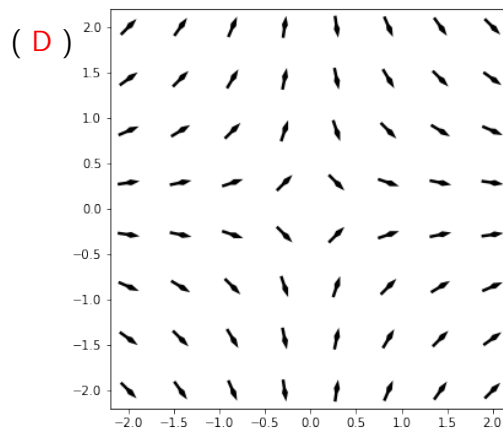
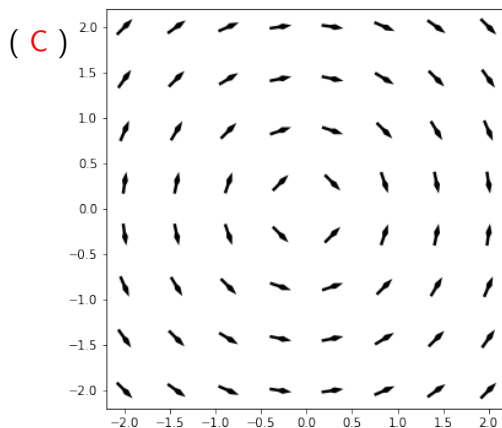
a) Ordnen Sie den Differenzialgleichungen die Richtungsfelder zu:


(A)  $y' = \frac{x}{y}$

(B)  $y' = \frac{y}{x}$

(C)  $y' = -\frac{x}{y}$

(D)  $y' = -\frac{y}{x}$



Prüfungsaufgaben mit Lösungen	 HOCHSCHULE ESSLINGEN
Prüfungsfach: Mathematik 2	Wintersemester 23/24
Studiengang: WKB	Seite: 2 von 12

b) Bestimmen Sie die allgemeine Lösung der Differenzialgleichung

$$y'(x) = 3x^2 y.$$

Separation:

1 P

$$\frac{dy}{dx} = 3x^2 y \implies \frac{1}{y} dy = 3x^2 dx.$$

Integration:

1 P

$$\int \frac{1}{y} dy = \int 3x^2 dx \implies \ln|y| = x^3 + C_1, \quad C_1 \in \mathbb{R}.$$

Nach  $y$  auflösen:

1 P

$$|y| = e^{x^3+C_1} \implies y = \pm e^{x^3+C_1} = \pm e_1^C e^{x^3} = C_2 e^{x^3}, \quad C_2 \in \mathbb{R}.$$

c) Berechnen Sie für die Lösung des Anfangswertproblems


$$y'(x) = \frac{y}{1+x^2}, \quad y(1) = 3,$$

einen Näherungswert, indem Sie einen Schritt mit dem Euler-Polygonzugverfahren mit der Schrittweite  $h = 0.2$  durchführen.

Euler-Polygonzugverfahren:

$$x_1 = x_0 + h = 1.2, \quad \tilde{y}_1 = \tilde{y}_0 + h \cdot \frac{\tilde{y}_0}{1+x_0^2} = 3 + 0.2 \cdot \frac{3}{1+1^2} = 3.3.$$

2 P

Prüfungsaufgaben mit Lösungen	 HOCHSCHULE ESSLINGEN
Prüfungsfach: Mathematik 2	Wintersemester 23/24
Studiengang: WKB	Seite: 3 von 12

- d) Beurteilen Sie den folgenden Dialog mit ChatGPT 3.5. Sind die Berechnungen und die Behauptungen von ChatGPT korrekt?

**You**

Bitte erstelle ein Beispiel für ein lineares Differenzengleichungssystem mit zwei Unbekannten, das asymptotisch stabil ist.

**ChatGPT**

Betrachten wir das folgende lineare Differenzengleichungssystem mit zwei Unbekannten:

$$\begin{aligned}x_{k+1} &= 0.8 x_k + 0.2 y_k \\y_{k+1} &= 0.4 x_k + 0.6 y_k\end{aligned}$$

Die obigen Gleichungen können in Matrixform geschrieben werden als:

$$\begin{pmatrix} x_{k+1} \\ y_{k+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.8 & 0.2 \\ 0.4 & 0.6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_k \\ y_k \end{pmatrix}, \text{ mit der Matrix } \mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0.8 & 0.2 \\ 0.4 & 0.6 \end{pmatrix}$$


Die Matrix  $\mathbf{A}$  ist die Übertragungsmatrix des Systems. Um die asymptotische Stabilität zu überprüfen, betrachten wir die Eigenwerte dieser Matrix. Die Eigenwerte  $\lambda$  können durch das Lösen der charakteristischen Gleichung gefunden werden:

$$\begin{vmatrix} 0.8 - \lambda & 0.2 \\ 0.4 & 0.6 - \lambda \end{vmatrix} = 0 \iff (0.8 - \lambda)(0.6 - \lambda) - 0.2 \cdot 0.4 = 0 \iff \lambda^2 - 1.4\lambda + 0.4 = 0$$

Die Lösungen dieser quadratischen Gleichung sind  $\lambda_1 = 1$  und  $\lambda_2 = 0.4$ . Beide Eigenwerte haben Beträge kleiner als 1, was darauf hinweist, dass das System asymptotisch stabil ist. In diesem Beispiel konvergieren die Lösungen für  $x_k$  und  $y_k$  gegen Null, was auf eine asymptotische Stabilität hinweist.

Die Berechnungen sind korrekt. Das System ist jedoch nicht asymptotisch stabil, denn der Betrag des Eigenwerts  $\lambda_1 = 1$  ist nicht echt kleiner 1. Deshalb konvergieren auch nicht alle Lösungen gegen Null. Beispielsweise ist  $x_0 = 1$  und  $y_0 = 1$  ein Fixpunkt.

3 P

Prüfungsaufgaben mit Lösungen	 HOCHSCHULE ESSLINGEN
Prüfungsfach: Mathematik 2	Wintersemester 23/24
Studiengang: WKB	Seite: 4 von 12

**Aufgabe 2 (9 Punkte)** Bestimmen Sie die allgemeine reelle Lösung der Differenzialgleichung

$$y''(x) + 4y(x) = 8 \cos(2x) - 4 \sin(2x).$$

Charakteristische Gleichung der homogenen Differenzialgleichung:

2 P

$$\lambda^2 + 4 = 0 \implies \lambda^2 = -4 \implies \lambda = \pm 2i.$$

Allgemeine Lösung der homogenen Differenzialgleichung:

1 P

$$y_h(x) = C_1 \cos(2x) + C_2 \sin(2x).$$

Ansatz für partikuläre Lösung mit Resonanz:

1 P

$$y_p(x) = x(A \cos(2x) + B \sin(2x)).$$

Erste Ableitung:

1 P

$$y_p'(x) = A \cos(2x) + B \sin(2x) + x(-2A \sin(2x) + 2B \cos(2x)).$$

Zweite Ableitung:

1 P

$$y_p''(x) = -2A \sin(2x) + 2B \cos(2x) - 2A \sin(2x) + 2B \cos(2x) + x(-4A \cos(2x) - 4B \sin(2x)).$$

In Differenzialgleichung einsetzen:

1 P

$$\underbrace{-4A \sin(2x) + 4B \cos(2x) + x(-4A \cos(2x) - 4B \sin(2x))}_{y_p''(x)} + 4 \underbrace{x(A \cos(2x) + B \sin(2x))}_{y(x)} = 8 \cos(2x) - 4 \sin(2x).$$

Koeffizientenvergleich:


1 P

$$A = 1, \quad B = 2.$$

Allgemeine Lösung:

1 P

$$y(x) = y_h(x) + y_p(x) = C_1 \cos(2x) + C_2 \sin(2x) + x(\cos(2x) + 2 \sin(2x)).$$

Prüfungsaufgaben mit Lösungen	 HOCHSCHULE ESSLINGEN
Prüfungsfach: Mathematik 2	Wintersemester 23/24
Studiengang: WKB	Seite: 5 von 12

**Aufgabe 3 (10 Punkte)** Bestimmen Sie die allgemeine reelle Lösung des Differenzialgleichungssystems

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= -2x_1 + 3x_2 + 6e^{-2t}, \\ \dot{x}_2 &= 2x_1 + 3x_2.\end{aligned}$$

Matrixform:

1 P

$$\dot{\mathbf{x}} = \begin{pmatrix} -2 & 3 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \mathbf{x} + \begin{pmatrix} 6e^{-2t} \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Eigenwerte:

2 P

$$\begin{vmatrix} -2-\lambda & 3 \\ 2 & 3-\lambda \end{vmatrix} = (-2-\lambda)(3-\lambda) - 3 \cdot 2 = \lambda^2 - \lambda - 12 = 0 \implies \lambda_{1,2} = \frac{1 \pm \sqrt{1+48}}{2} = 4 \mid -3.$$

Eigenvektor  $\mathbf{v}_1$  zu  $\lambda_1 = 4$ :

1 P

$$\begin{pmatrix} -2-4 & 3 \\ 2 & 3-4 \end{pmatrix} \mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} -6 & 3 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} \mathbf{v}_1 = \mathbf{0} \implies \mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Eigenvektor  $\mathbf{v}_2$  zu  $\lambda_2 = -3$ :


1 P

$$\begin{pmatrix} -2+3 & 3 \\ 2 & 3+3 \end{pmatrix} \mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 6 \end{pmatrix} \mathbf{v}_2 = \mathbf{0} \implies \mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Allgemeine reelle Lösung des homogenen Differenzialgleichungssystems:

1 P

$$\mathbf{x}_h = C_1 e^{4t} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} + C_2 e^{-3t} \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad C_1, C_2 \in \mathbb{R}.$$

Prüfungsaufgaben mit Lösungen	 HOCHSCHULE ESSLINGEN
Prüfungsfach: Mathematik 2	Wintersemester 23/24
Studiengang: WKB	Seite: 6 von 12

Ansatz für partikuläre Lösung ohne Resonanz:

1 P

$$\mathbf{x}_p = e^{-2t} \begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix}.$$

Ableitung in Differenzialgleichungssystem eingesetzt:

1 P

$$-2e^{-2t} \begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 3 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} e^{-2t} \begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 6e^{-2t} \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Lineares Gleichungssystem:


1 P

$$\begin{aligned} -2A &= -2A + 3B + 6 \\ -2B &= 2A + 3B \end{aligned} \implies B = -2, A = 5.$$

Allgemeine reelle Lösung des Differenzialgleichungssystems:

1 P

$$\mathbf{x} = \mathbf{x}_h + \mathbf{x}_p = C_1 e^{4t} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} + C_2 e^{-3t} \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix} + e^{-2t} \begin{pmatrix} 5 \\ -2 \end{pmatrix}, \quad C_1, C_2 \in \mathbb{R}.$$

Prüfungsaufgaben mit Lösungen	 HOCHSCHULE ESSLINGEN
Prüfungsfach: Mathematik 2	Wintersemester 23/24
Studiengang: WKB	Seite: 7 von 12

**Aufgabe 4 (8 Punkte)** Eine Differenzengleichung erster Ordnung ist gegeben durch

$$x_{k+1} = 1.05 x_k - 1, \quad x_0 = 10, \quad k = 0, 1, 2, 3, \dots$$

- a) Geben Sie die Zahlenwerte von  $x_1$  und  $x_2$  an.  
b) Bestimmen Sie die Lösung der Differenzengleichung.  
c) Für welche Indizes  $k$  ist  $x_k < 0$ ?

a) Zahlenwerte:

1 P

$$x_0 = 1.05 \cdot 10 - 1 = 9.5, \quad x_1 = 1.05 \cdot 9.5 - 1 = 8.975$$

b) Lösungsformel:

1 P

$$x_{k+1} = \lambda x_k + r_k \implies x_k = \lambda^k \cdot x_0 + \sum_{l=0}^{k-1} \lambda^{k-1-l} r_l.$$

$$\lambda = 1.05, \quad r_k = -1, \quad x_0 = 10:$$

1 P

$$x_k = 1.05^k \cdot 10 + \sum_{l=0}^{k-1} 1.05^{k-1-l} \cdot (-1).$$

Geometrische Reihe:

1 P

$$x_k = 1.05^k \cdot 10 - \frac{1 - 1.05^k}{1 - 1.05}.$$

Vereinfachung:

1 P

$$x_k = 10 \cdot 1.05^k - \frac{1 - 1.05^k}{-0.05} = 10 \cdot 1.05^k + 20 - 20 \cdot 1.05^k = -10 \cdot 1.05^k + 20.$$

c) Bedingung  $x_k < 0$ :

1 P

$$-10 \cdot 1.05^k + 20 < 0 \iff 20 < 10 \cdot 1.05^k \iff 2 < 1.05^k.$$


Nach  $k$  auflösen:

1 P

$$\ln(2) < \ln\left((1.05)^k\right) \iff \ln(2) < k \ln(1.05) \iff k > \frac{\ln(2)}{\ln(1.05)} \approx 14.2$$

Ab  $k = 15$  sind alle Folgenglieder negativ.

1 P

Prüfungsaufgaben mit Lösungen	 HOCHSCHULE ESSLINGEN
Prüfungsfach: Mathematik 2	Wintersemester 23/24
Studiengang: WKB	Seite: 8 von 12

Alternative Lösung für b)

Homogene Lösung:

$$x_{k+1} - 1.05 x_k = 0 \implies \lambda - 1.05 = 0 \implies \lambda = 1.05 \implies x_k^h = C \cdot 1.05^k.$$

Partikuläre Lösung

$$x_k^p = A \implies A - 1.05 A = -1 \implies A(1 - 1.05) = -1 \implies A = \frac{-1}{-0.05} = 20.$$

Allgemeine Lösung:

$$x_k = x_k^h + x_k^p = C \cdot 1.05^k + 20.$$


Anfangswert  $x_0 = 10$ :

$$k = 0 : x_0 = C \cdot 1.05^0 + 20 \implies 10 = C + 20 \implies C = -10.$$

Ergebnis:

$$x_k = -10 \cdot 1.05^k + 20.$$



Prüfungsaufgaben mit Lösungen	 HOCHSCHULE ESSLINGEN
Prüfungsfach: Mathematik 2	Wintersemester 23/24
Studiengang: WKB	Seite: 9 von 12

**Aufgabe 5 (8 Punkte)** Die Geschwister Fin und Ans haben ein Baugrundstück geerbt und planen darauf ein Gebäude mit 10 Mietwohnungen errichten zu lassen. Sie können zusammen ein Eigenkapital von 500.000 Euro aufbringen, der Rest muss über einen Kredit finanziert werden.

- a) Aufgrund stark gestiegener Kreditzinsen könnte der Bau von Sozialwohnungen eine attraktive Möglichkeit darstellen. Durch staatliche Förderung liegt der Zinssatz hier bei 1.2% p.a. bei unterjähriger, genauer monatlicher Verzinsung, d.h. der Zinssatz je Monat liegt bei 0.1%.

Der Bau der 10 Wohnungen soll 1.5 Millionen Euro kosten, es muss also 1 Million Euro Kredit aufgenommen werden.

- Bestimmen Sie den effektiven Jahreszins (auf zwei Nachkommastellen genau).
- Welche Rate  $R$  muss jeweils zum Ende des Monats gezahlt werden, damit der Kredit nach genau 20 Jahren (also 240 Monaten) getilgt ist?  
Hinweis: Sie können z.B. die Zahlung der 240 Raten als konstante Zahlungsfolge betrachten, deren Barwert oder Endwert mit einem geeigneten Wert gleich zu setzen ist.
- Welche monatliche Kaltmiete muss für jede der 10 Wohnungen erhoben werden, damit aus den Mieteinnahmen die Kreditraten  $R$  beglichen werden können? Dabei sollen zusätzliche Kosten für Instandhaltung oder Steuern vernachlässigt werden.

- b) Werden Wohnungen für den freien Markt gebaut, sind die Zinsen wesentlich höher. Sie liegen bei 4.8% p.a. bei monatlicher Verzinsung. Zusätzlich werden höhere Baukosten von 2 Millionen Euro (also ein Kredit von 1.5 Millionen Euro) eingeplant, um einen erhöhten Wohnkomfort zu erreichen.

- Bestimmen Sie den effektiven Jahreszins (auf zwei Nachkommastellen genau).
- Welche Rate  $R$  muss jeweils zum Ende des Monats gezahlt werden, damit der Kredit nach genau 20 Jahren getilgt ist?
- Welche monatliche Kaltmiete muss für jede der 10 Wohnungen erhoben werden, damit aus den Mieteinnahmen die Kreditraten  $R$  beglichen werden können?

a) effektiver Jahreszins  $p^* = 100 \cdot \left( \left( 1 + \frac{1.2}{12 \cdot 100} \right)^{12} - 1 \right) \approx 1.21$

1 P

Der Barwert der Zahlung aller 240 Raten  $R$  liegt bei 1 Million Euro. Deswegen kann man setzen

2 P

$$R \cdot \left( \frac{1}{1.001} + \frac{1}{1.001^2} + \dots + \frac{1}{1.001^{240}} \right) = 1000000$$

Multiplikation der Gleichung mit  $1.001^{240}$  ergibt


$$R \cdot (1.001^{239} + 1.001^{238} + \dots + 1) = 1000000 \cdot 1.001^{240}$$

Die Anwendung der geometrischen Summenformel führt zu

$$R \cdot \frac{1.001^{240} - 1}{1.001 - 1} = 1000000 \cdot 1.001^{240}$$

Damit ist

$$R = 10000 \cdot \frac{1.001^{240}}{1.001^{240} - 1} \approx 4688.72(\text{Euro})$$

Prüfungsaufgaben mit Lösungen	 HOCHSCHULE ESSLINGEN
Prüfungsfach: Mathematik 2	Wintersemester 23/24
Studiengang: WKB	Seite: 10 von 12

monatliche Kaltmiete:

1 P

$$4688.72 : 10 \approx 468.88 \text{ (Euro)}$$

Hier muss aufgerundet werden.

b) effektiver Jahreszins  $p^* = 100 \cdot \left( \left( 1 + \frac{4.8}{12 \cdot 100} \right)^{12} - 1 \right) \approx 4.91$

1 P

Der Barwert der Zahlung aller 240 Raten R liegt bei 1.5 Million Euro. Deswegen kann man (bei monatlichen Zinsen von 0.4%) setzen

2 P

$$R \cdot \left( \frac{1}{1.004} + \frac{1}{1.004^2} + \dots + \frac{1}{1.004^{240}} \right) = 1500000$$


Die geometrische Summenformel und Umstellen nach R ergibt

$$R = 1500000 \cdot 0.004 \cdot \frac{1.004^{240}}{1.004^{240} - 1} \approx 9734.36 \text{ (Euro)}$$

monatliche Kaltmiete:

1 P

$$9734.36 : 10 \approx 973.44 \text{ (Euro)}$$

<b>Prüfungsaufgaben mit Lösungen</b>	
<b>Prüfungsfach: Mathematik 2</b>	<b>Wintersemester 23/24</b>
<b>Studiengang: WKB</b>	<b>Seite: 11 von 12</b>

### Aufgabe 6 (9 Punkte)

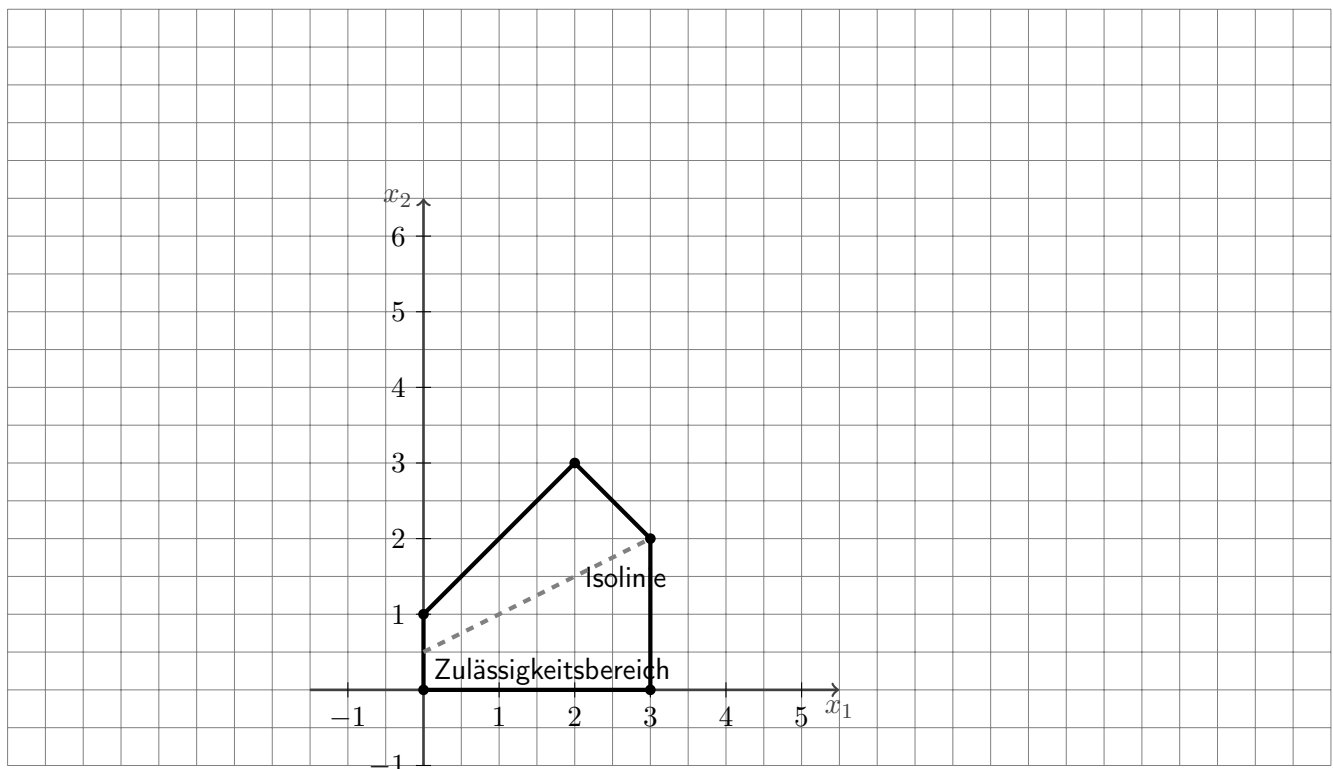
Gegeben ist das lineare Optimierungsproblem


$$f(\vec{x}) = \vec{c} \cdot \vec{x} \stackrel{!}{=} \text{Max}, \quad \mathbf{A}\vec{x} \leq \vec{b}, \quad \vec{x} \geq 0,$$

mit

$$\vec{c} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{A} = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \vec{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

- Zeichnen Sie den zulässigen Bereich in das gegebene Koordinatensystem ein.
- Zeichnen Sie im zulässigen Bereich alle Punkte  $(x_1, x_2)$  mit  $f(x_1, x_2) = 1$  ein.
- Wenden Sie den Primalen Simplex-Algorithmus auf das lineare Optimierungsproblem an.



<b>Prüfungsaufgaben mit Lösungen</b>	
<b>Prüfungsfach: Mathematik 2</b>	<b>Wintersemester 23/24</b>
<b>Studiengang: WKB</b>	<b>Seite: 12 von 12</b>

a) Zulässigkeitsbereich: siehe Skizze.

2

b) Isolinie  $f(x_1, x_2) = 1$ : siehe Skizze.

1

c) Das LOP ist in Standardformat gegeben und wegen  $\vec{0} \leq \vec{b}$  ist  $\vec{0}$  ein Eckpunkt des zulässigen Bereichs. Das Ausgangstableau lautet

BV	$x_1$	$x_2$	$z_1$	$z_2$	$z_3$	$b_i$
$z_1$	-1	1	1	0	0	1
$z_2$	1	1	0	1	0	5
$z_3$	1	0	0	0	1	3
$f$	-1	2	0	0	0	0

1

1. Schritt: Pivot-Spalte: 2; Pivot-Zeile: 1. Die Nichbasisvariable  $x_2$  wird in die Basis aufgenommen. Dies führt auf das Tableau

BV	$x_1$	$x_2$	$z_1$	$z_2$	$z_3$	$b_i$
$x_2$	-1	1	1	0	0	1
$z_2$	2	0	-1	1	0	4
$z_3$	1	0	0	0	1	3
$f$	1	0	-2	0	0	-2

2

2. Schritt: Pivot-Spalte: 1; Pivot-Zeile: 2. Die Nichbasisvariable  $x_1$  wird in die Basis aufgenommen. Dies führt auf das Tableau

BV	$x_1$	$x_2$	$z_1$	$z_2$	$z_3$	$b_i$
$x_2$	0	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	3
$x_1$	1	0	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	2
$z_3$	0	0	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	1	1
$f$	0	0	$-\frac{3}{2}$	$-\frac{1}{2}$	0	-4

2

Die Zielfunktionszeile enthält nur Elemente  $\leq 0$ . Dies entspricht der 1. Abbruchbedingung. Die optimale zulässige Lösung ist  $(x_1, x_2) = (2, 3)$  mit  $f(x_1, x_2) = 4$ .

1