


Name, Vorname	
Matrikelnummer	
Prüfungsfach: Mathematik 2	Sommersemester 23
Studiengang: WKB	Seite: 1 von 14
Prüfungsnummer: IT 105 20 20	Zeit: 90 Minuten
Dozent: Karsten Runge	Punkte: 54

Hilfsmittel: Manuskript
Literatur
Taschenrechner Casio FX-87DE Plus / Casio FX-87DE Plus 2nd edition

Hinweise: Bearbeiten Sie die Aufgaben ausschließlich auf diesen Prüfungsblättern.
Begründen Sie alle Lösungsschritte.

Aufgabe 1 (10 Punkte) Hinweis: Alle Teilaufgaben können unabhängig voneinander bearbeitet werden.

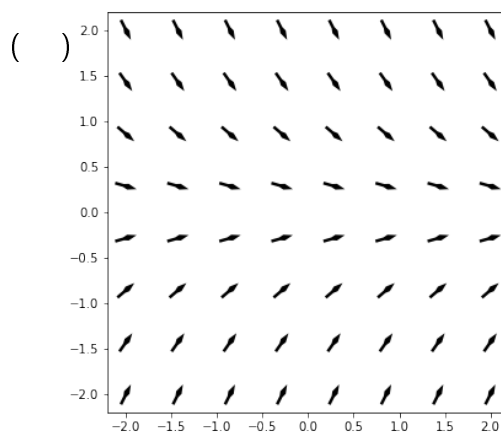
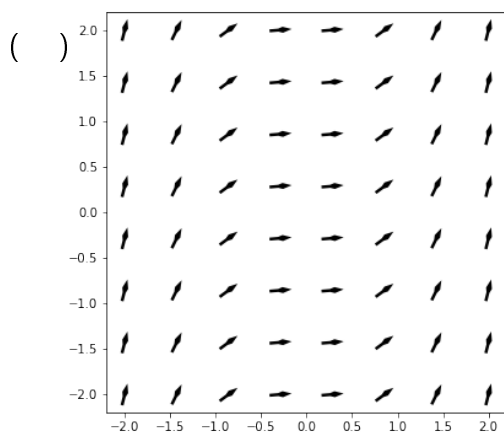
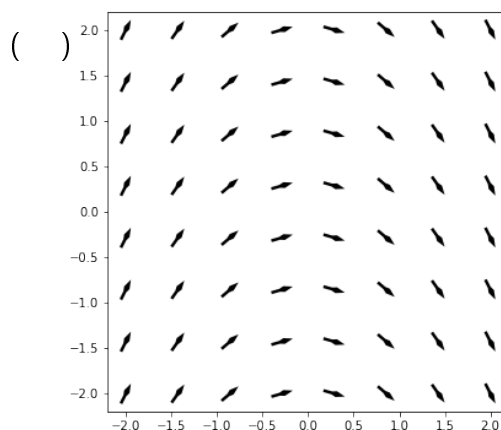
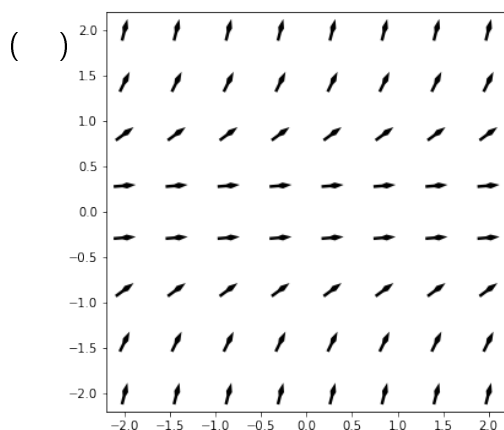
a) Ordnen Sie den Differenzialgleichungen die Richtungsfelder zu:

(A) $y' = -y$

(B) $y' = -x$

(C) $y' = y^2$

(D) $y' = x^2$



		
Name, Vorname	Matrikelnummer	
Prüfungsfach: Mathematik 2	Sommersemester 23	
Studiengang: WKB	Seite: 2 von 14	

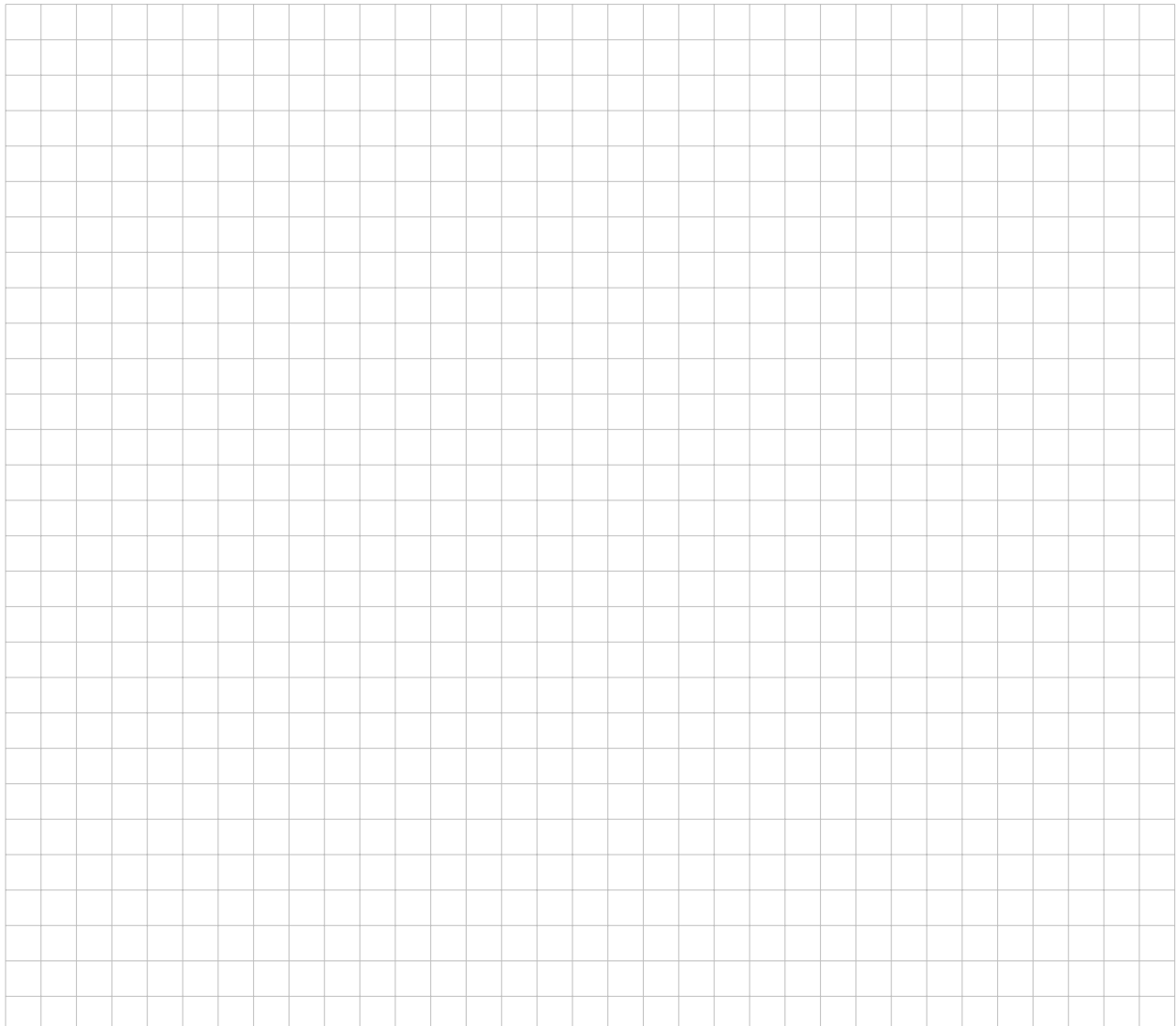
b) Welche Differenzialgleichung ist linear? Bitte kreuzen Sie den entsprechenden Eintrag an:

- | | | |
|----------------------------|---------------------------------|---------------------------------------|
| $y'' + 2y' + y = \sin(x)$ | <input type="checkbox"/> linear | <input type="checkbox"/> nicht linear |
| $y'' + 2y' + \sin(y) = 0$ | <input type="checkbox"/> linear | <input type="checkbox"/> nicht linear |
| $y'' + 2y' + \sin(x) = 0$ | <input type="checkbox"/> linear | <input type="checkbox"/> nicht linear |
| $y'' + 2y' + \sin(x)y = 0$ | <input type="checkbox"/> linear | <input type="checkbox"/> nicht linear |

c) Die Differentialgleichung der Balkendurchbiegung $w(x)$ lautet:

$$\frac{w''(x)}{(1 + (w'(x))^2)^{3/2}} = -\frac{M_y(x)}{E I_y}.$$

Dabei bezeichnet $M_y(x)$ das Biegemoment an der Stelle x , E das Elastizitätsmodul des Balkenmaterials und I_y das axiale Flächenträgheitsmoment des Balkenquerschnitts. Stellen Sie diese Differentialgleichung mithilfe von Zustandsvariablen durch ein äquivalentes System von Differentialgleichungen erster Ordnung dar.

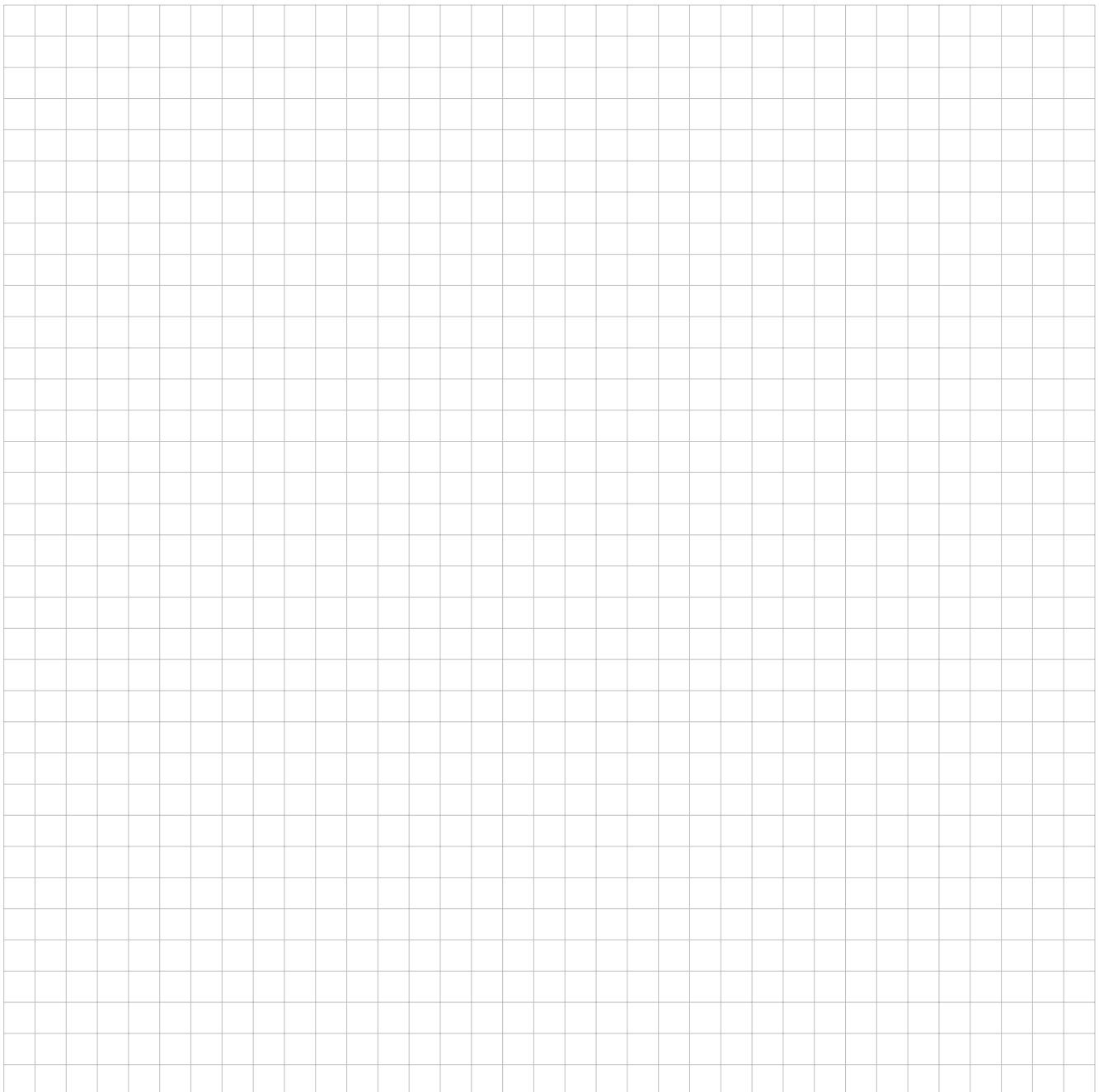


		
Name, Vorname	Matrikelnummer	
Prüfungsfach: Mathematik 2		Sommersemester 23
Studiengang: WKB		Seite: 4 von 14

Aufgabe 2 (8 Punkte) Gegeben ist das Anfangswertproblem

$$y' = (y + 1) \cos(x), \quad y(0) = 1.$$

- Ist die Differenzialgleichung linear?
- Berechnen Sie die Lösung des Anfangswertproblems.
- Ermitteln Sie einen Näherungswert \tilde{y}_1 für die Lösung des Anfangswertproblems an der Stelle $x = 0.1$, indem Sie einen Schritt mit dem Euler-Polygonzugverfahren mit der Schrittweite $h = 0.1$ durchführen. Wie weit weicht der Näherungswert \tilde{y}_1 von der exakten Lösung ab?



		
Name, Vorname	Matrikelnummer	
Prüfungsfach: Mathematik 2		
		Sommersemester 23
Studiengang: WKB		Seite: 6 von 14

Aufgabe 3 (10 Punkte) Bestimmen Sie die allgemeine reelle Lösung der Differenzialgleichung

$$y'' + 4y = 3 \cos(2x).$$

Name, Vorname

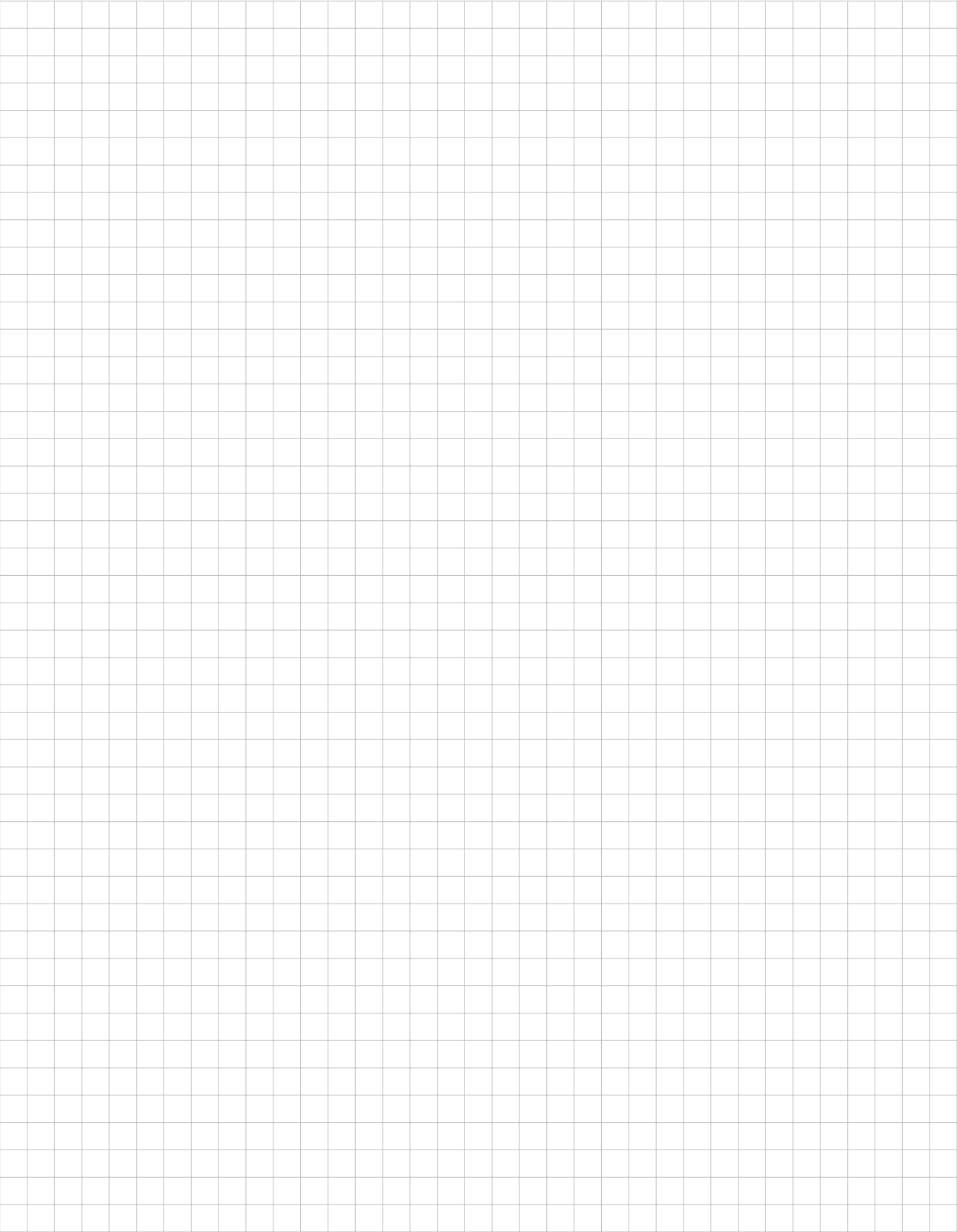
Matrikelnummer

Prüfungsfach: Mathematik 2

Sommersemester 23

Studiengang: WKB

Seite: 7 von 14

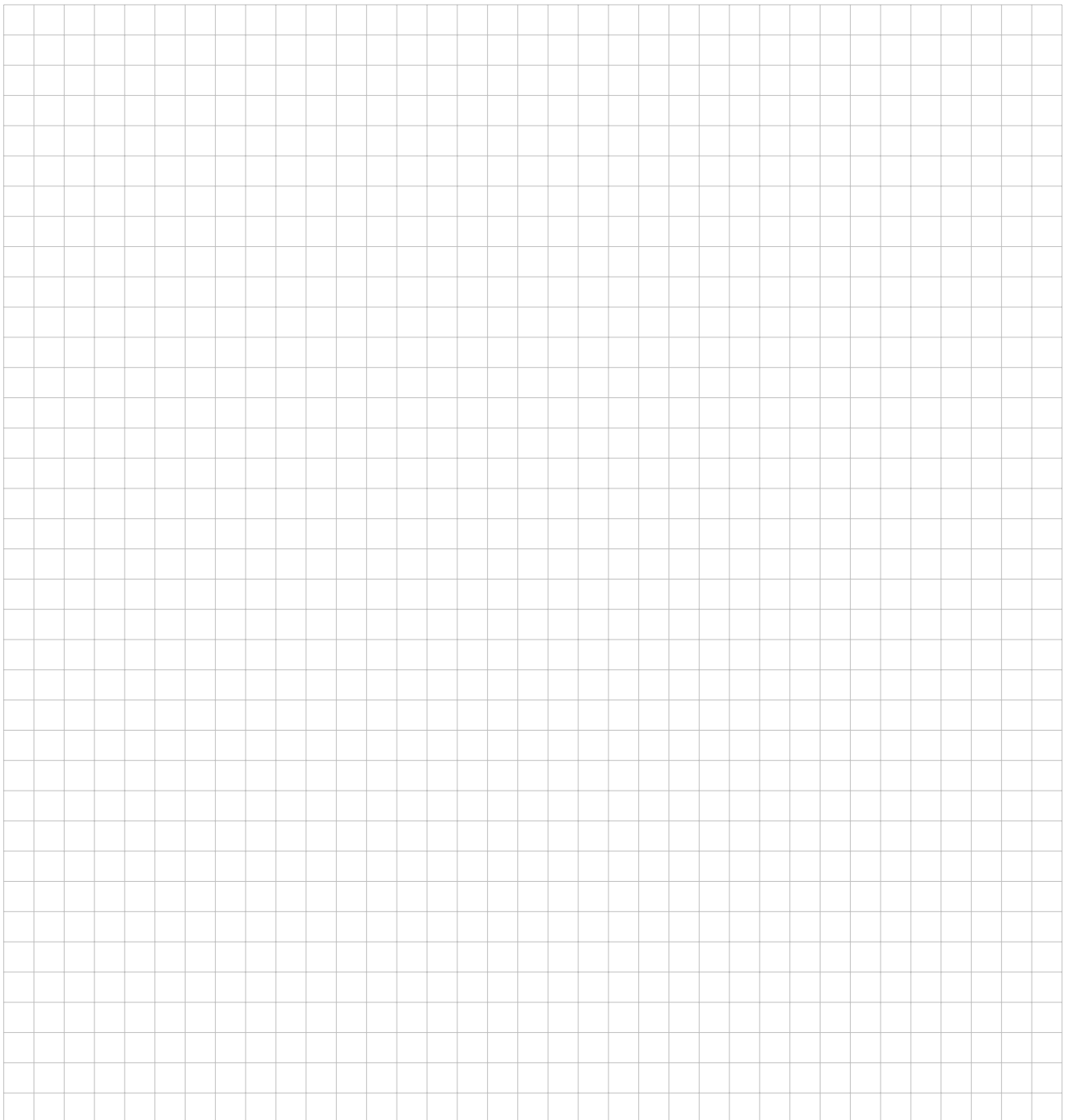


		
Name, Vorname	Matrikelnummer	
Prüfungsfach: Mathematik 2		Sommersemester 23
Studiengang: WKB		Seite: 8 von 14

Aufgabe 4 (8 Punkte) Gegeben ist das Differenzengleichungssystem

$$\begin{aligned} x_{k+1} &= -2x_k + 3y_k, \\ y_{k+1} &= 2x_k + 3y_k, \end{aligned} \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

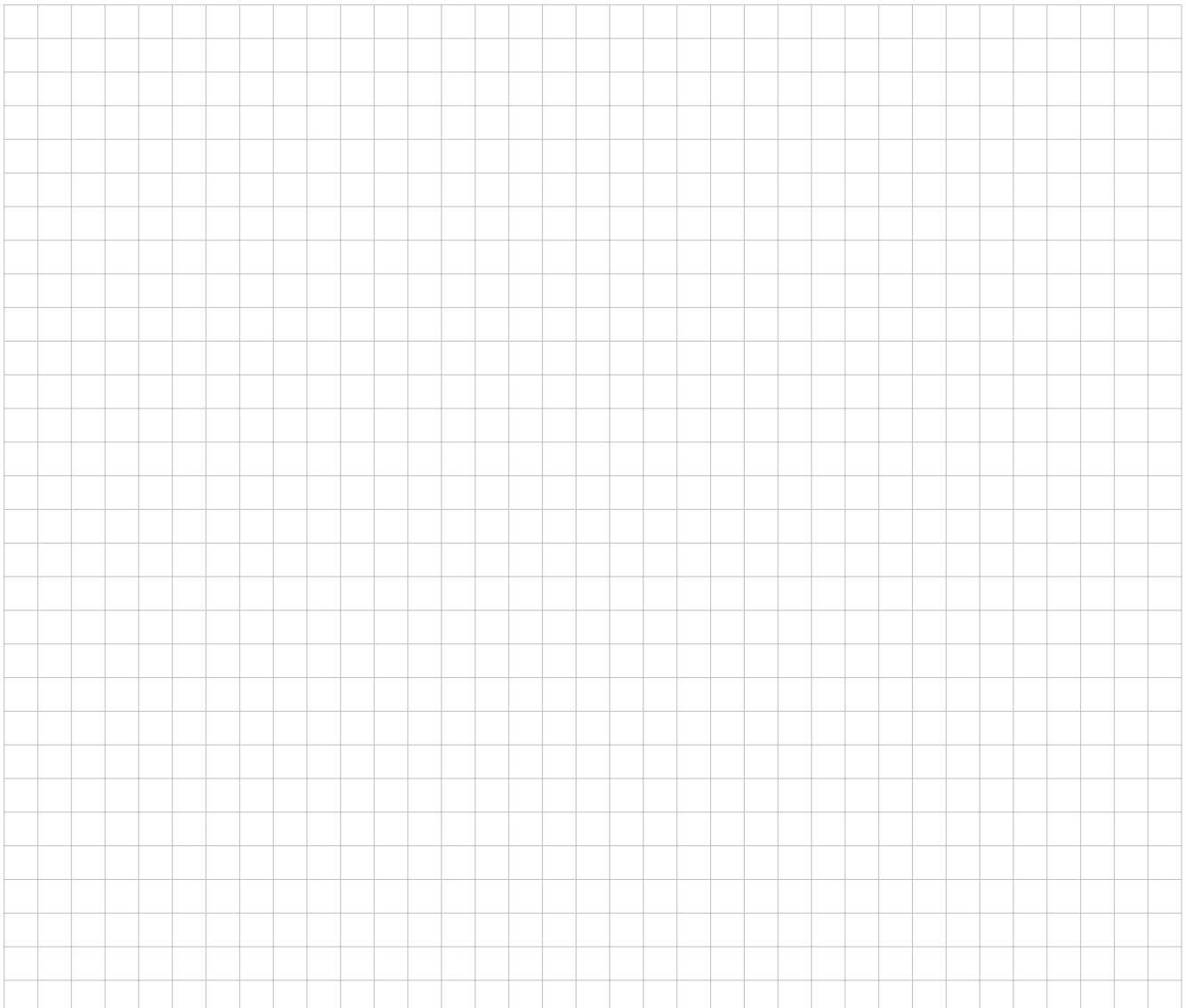
- a) Berechnen Sie die allgemeine Lösung des Differenzengleichungssystems.
b) Ist das Differenzengleichungssystem asymptotisch stabil?



Name, Vorname	
Matrikelnummer	
Prüfungsfach: Mathematik 2	Sommersemester 23
Studiengang: WKB	Seite: 10 von 14

Aufgabe 5 (6 Punkte) Frau R. wird in 10 Jahren in Rente gehen und denkt über verschiedene Möglichkeiten des Geldanlegens nach, um ihre Rente aufzubessern. In den folgenden Aufgaben wird von einem jährlichen Zinssatz von 3% ausgegangen.

- a) Frau R. denkt zunächst daran, heute genügend Geld anzulegen, um mit Rentenbeginn bis zu 30 Jahre lang (also 30 mal) jeweils zu Beginn des Rentenjahres 6000 Euro abheben zu können. Welche Summe müsste Frau R. dafür heute mindestens anlegen?
- b) Frau R. fällt auf, dass sie die Inflationsrate einbeziehen sollte - sie geht von jährlich 3% aus. Sie plant also mit ihrem Renteneintritt in zehn Jahren 6000 Euro und zu Beginn jedes weiteren Rentenjahres 3% mehr als im Vorjahr abheben zu können - wieder bis zu 30 Jahre lang.
- Welche Summe plant Frau R. zu Beginn ihres 2., 5. bzw. 30. Rentenjahres abheben zu können?
 - Welche Summe müsste zum Renteneintritt in 10 Jahren angespart sein, damit 30 Jahre lang wie beschrieben jeweils zu Beginn des Rentenjahres Geld abgehoben werden kann?
 - Welche Summe müsste heute angelegt werden?



Name, Vorname

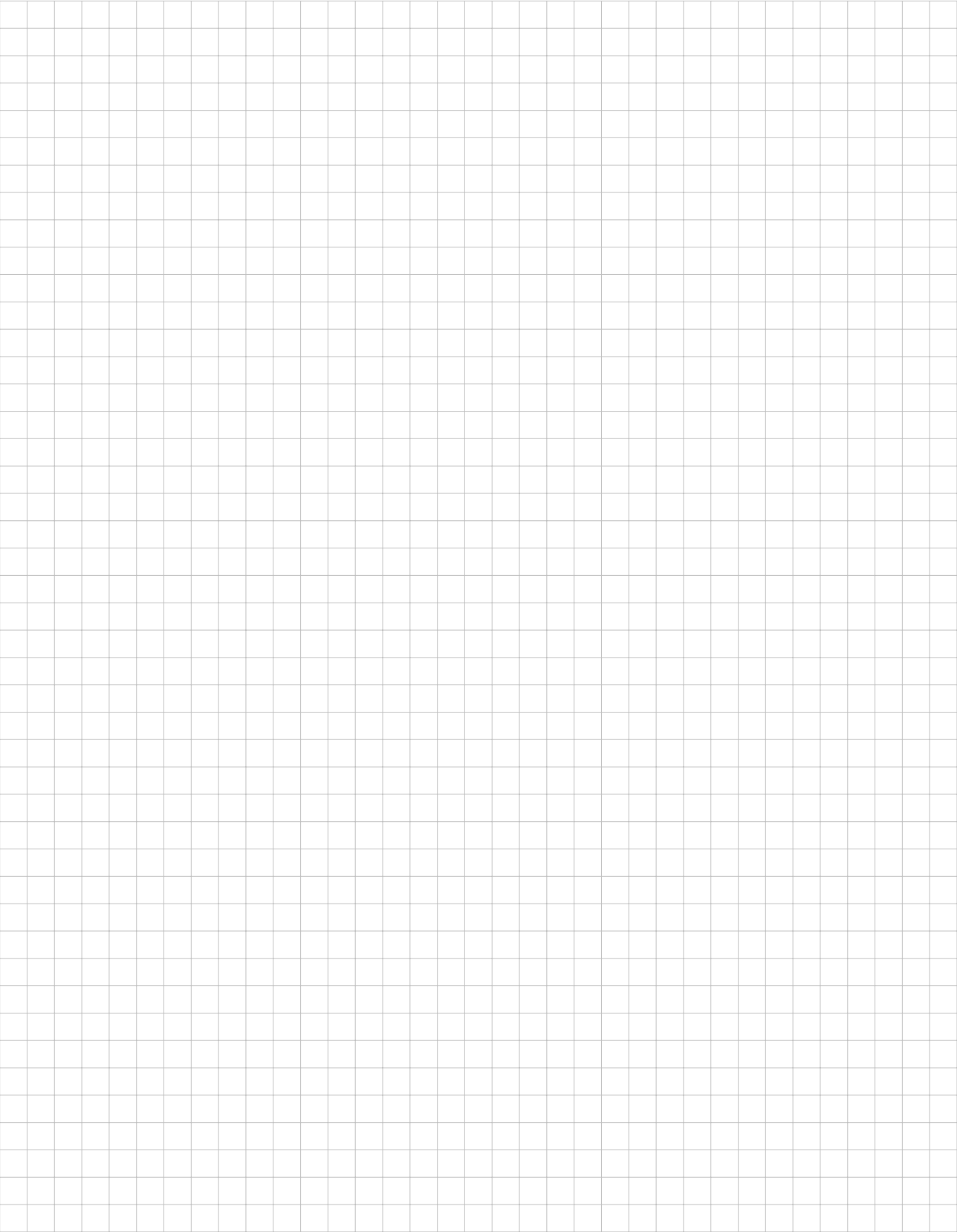
Matrikelnummer

Prüfungsfach: Mathematik 2

Sommersemester 23

Studiengang: WKB

Seite: 11 von 14



		
Name, Vorname	Matrikelnummer	
Prüfungsfach: Mathematik 2		Sommersemester 23
Studiengang: WKB		Seite: 13 von 14

Aufgabe 7 (9 Punkte)

Gegeben ist das lineare Optimierungsproblem

$$f(\vec{x}) = \vec{c} \cdot \vec{x} \stackrel{!}{=} \text{Max}, \quad \mathbf{A}\vec{x} \leq \vec{b}, \quad \vec{x} \geq 0,$$

mit

$$\vec{c} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{A} = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \vec{b} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix}.$$

- Zeichnen Sie den zulässigen Bereich in das gegebene Koordinatensystem ein.
- Zeichnen Sie im zulässigen Bereich alle Punkte (x_1, x_2) mit $f(x_1, x_2) = 6$ ein.
- Wenden Sie den Primalen Simplex-Algorithmus auf das lineare Optimierungsproblem an.

