Name, Vorname	Matrikelnummer HOCHSCHULE ESSLINGEN	
Prüfungsfach: Mathematik 2	Sommersemester	24
Studiengang: WKB	Seite: 1 von 14	
Prüfungsnummer: R39.04355	Zeit: 90 Minuten	
Dozent: Karsten Runge	Punkte: 54	

Hilfsmittel: Manuskript

Literatur

Taschenrechner Casio FX-87DE Plus / Casio FX-87DE Plus 2nd edition

Hinweise: Bearbeiten Sie die Aufgaben ausschließlich auf diesen Prüfungsblättern.

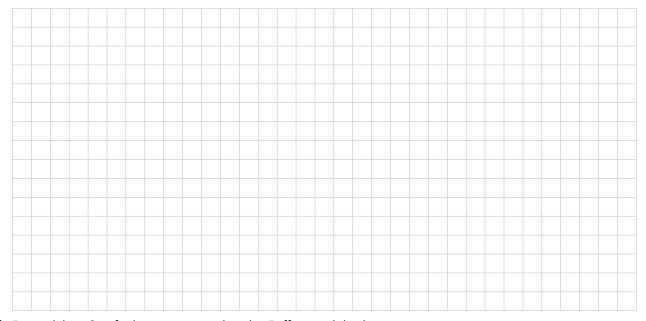
Begründen Sie alle Lösungsschritte.

Aufgabe 1 (8 Punkte) Hinweis: Alle Teilaufgaben können unabhängig voneinander bearbeitet werden.

a) Geben Sie eine lineare Differenzialgleichung an, die die Fundamentallösung

$$y(x) = e^{-2x}$$

besitzt.



b) Bei welchen Störfunktionen r tritt bei der Differenzialgleichung

$$y'' + 9y = r(x)$$

Resonanz auf? Bitte kreuzen Sie den entsprechenden Eintrag an:

r(x)	$=\mathrm{e}^{-9x}$
------	---------------------

☐ Resonanz

☐ keine Resonanz

$$r(x) = e^{9x}$$

 \square Resonanz

☐ keine Resonanz

$$r(x) = 3\cos(x)$$

☐ Resonanz

\Box	kaina	Resonanz
Ш	keine	Resonanz

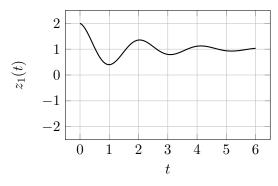
 $r(x) = \cos(3x)$

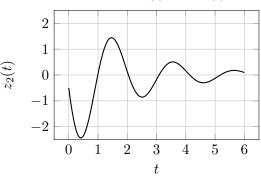
 \square Resonanz

☐ keine Resonanz

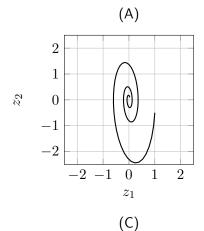
Name, Vorname	Matrikelnummer	HOCHSCHULE ESSLINGEN
Prüfungsfach: Mathematik 2		Sommersemester 24
Studiengang: WKB		Seite: 2 von 14

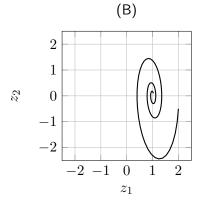
c) Die folgenden beiden Abbildungen zeigen den zeitlichen Verlauf der Zustände $z_1(t)$ und $z_2(t)$:

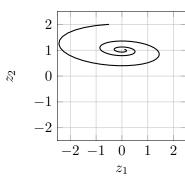


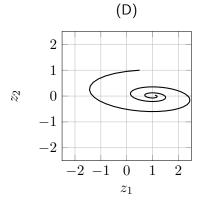


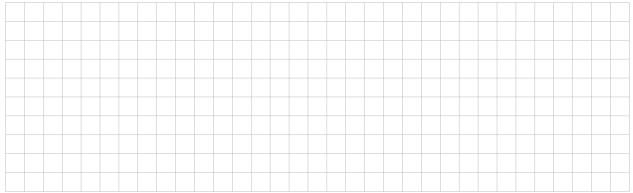
Welche der folgenden vier Abbildungen zeigt den richtigen Verlauf des Phasenporträts? Bitte begründen Sie Ihre Antwort!











Name, Vorname	Matrikelnummer	HOCHSCHULE ESSLINGEN
Prüfungsfach: Mathematik 2		Sommersemester 24
Studiengang: WKB		Seite: 3 von 14

d) Beurteilen Sie den folgenden Dialog mit ChatGPT 3.5. Sind die Berechnungen und die Behauptungen von ChatGPT korrekt? Es genügt den Fehler zu finden, die richtige Lösung muss nicht bestimmt werden!

You: Wie lautet die Lösung des Anfangswertproblems (AWP)

$$x' \cdot x = t, \quad x(0) = 1?$$

ChatGPT 3.5: Um das AWP zu lösen, können wir das Verfahren der Trennung der Variablen verwenden.

1. Trenne die Variablen:

$$\frac{dx}{x} = t \, dt$$

2. Integriere beide Seiten:

$$\int \frac{dx}{x} = \int t \, dt \quad \Longleftrightarrow \quad \ln|x| = \frac{t^2}{2} + C$$

3. Löse nach \boldsymbol{x} auf:

$$|x| = e^{\frac{t^2}{2} + C}$$

Da x(0) = 1, setzen wir t = 0 und lösen für C:

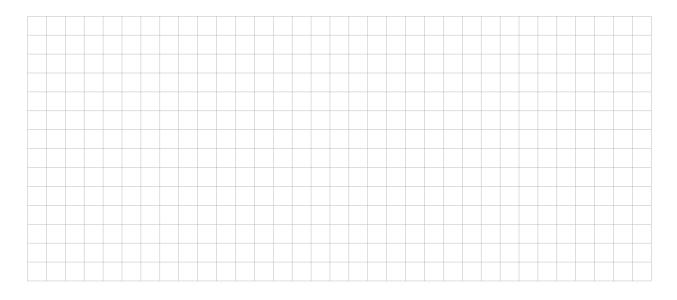
$$|1| = e^C \iff C = 0$$

4. Setze C ein und berücksichtige das Betragszeichen:

$$|x| = e^{\frac{t^2}{2}} \quad \Longleftrightarrow \quad x = \pm e^{\frac{t^2}{2}}$$

Da x(0) = 1, wählen wir das positive Vorzeichen:

$$x(t) = e^{\frac{t^2}{2}}$$

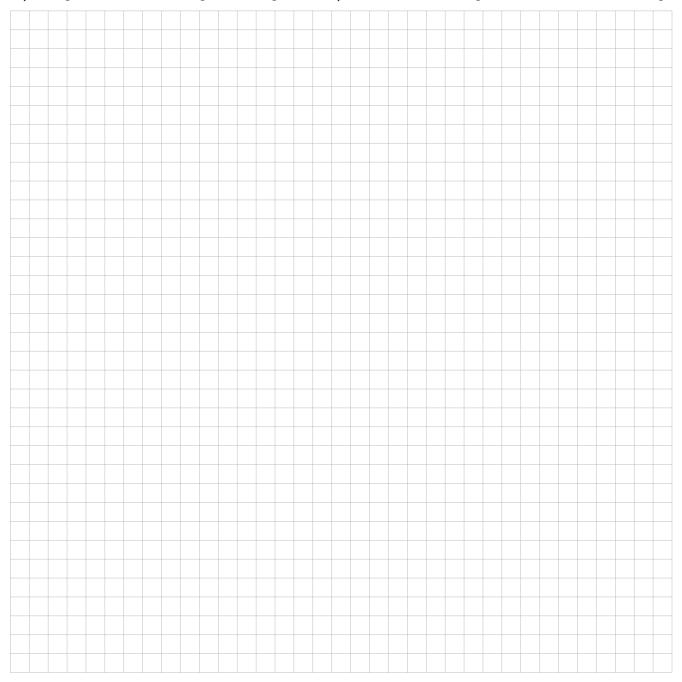


Name, Vorname	Matrikelnummer	HOCHSCHULE ESSLINGEN
Prüfungsfach: Mathematik 2		Sommersemester 24
Studiengang: WKB		Seite: 4 von 14

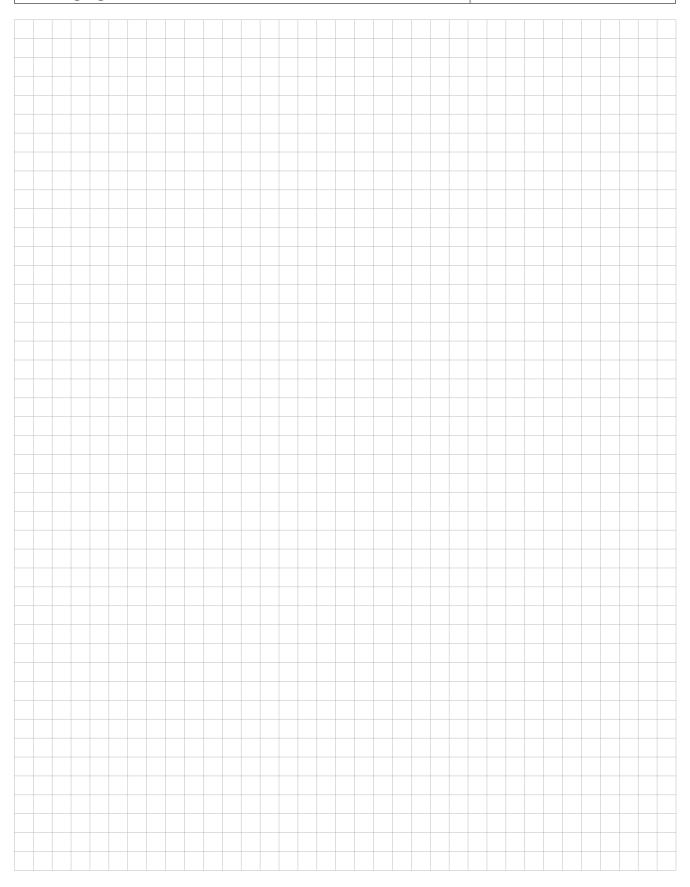
Aufgabe 2 (10 Punkte) Wir betrachten das Anfangswertproblem

$$y'(x) \cdot y(x) = \sin(x), \quad y(0) = -1.$$

- a) Handelt es sich um eine lineare oder um eine nichtlineare Differenzialgleichung?
- b) Bestimmen Sie die exakte Lösung des Anfangswertproblems.
- c) Berechnen Sie einen Näherungswert für y(1), indem Sie mit der Schrittweite $h=\frac{1}{2}$ zwei Schritte mit dem Polygonzugverfahren von Euler durchführen.
- d) Wie groß ist die Abweichung des in Aufgabenteil c) berechneten Näherungswerts von der exakten Lösung?



Name, Vorname	Matrikelnummer	HOCHSCHULE ESSLINGEN
Prüfungsfach: Mathematik 2		Sommersemester 24
Studiengang: WKB		Seite: 5 von 14



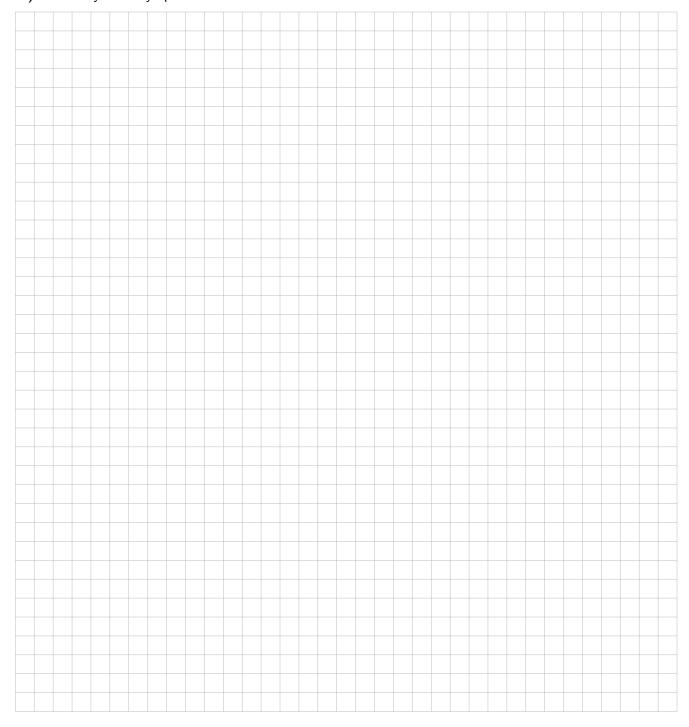
Name, Vorname	Matrikelnummer	HOCHSCHULE ESSLINGEN
Prüfungsfach: Mathematik 2		Sommersemester 24
Studiengang: WKB		Seite: 6 von 14

Aufgabe 3 (9 Punkte) Ein Differenzialgleichungssystem ist gegeben durch

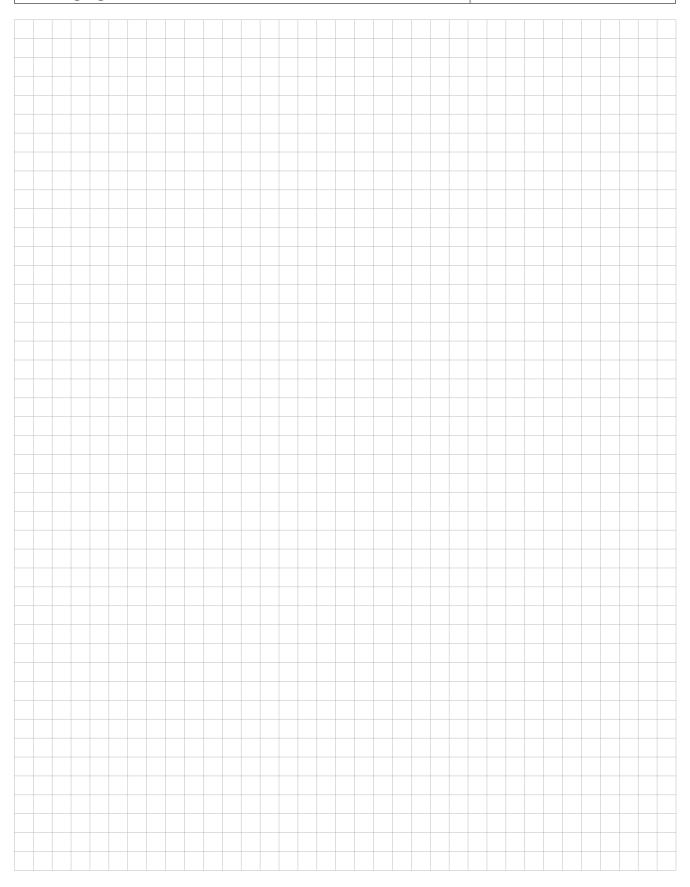
$$\dot{x} = -2x + 3y$$

$$\dot{y} = 10x - 3y$$

- a) Bestimmen Sie die allgemeine Lösung des Differenzialgleichungssystems.
- b) Ist das System asymptotisch stabil?



Name, Vorname	Matrikelnummer	HOCHSCHULE ESSLINGEN
Prüfungsfach: Mathematik 2		Sommersemester 24
Studiengang: WKB		Seite: 7 von 14

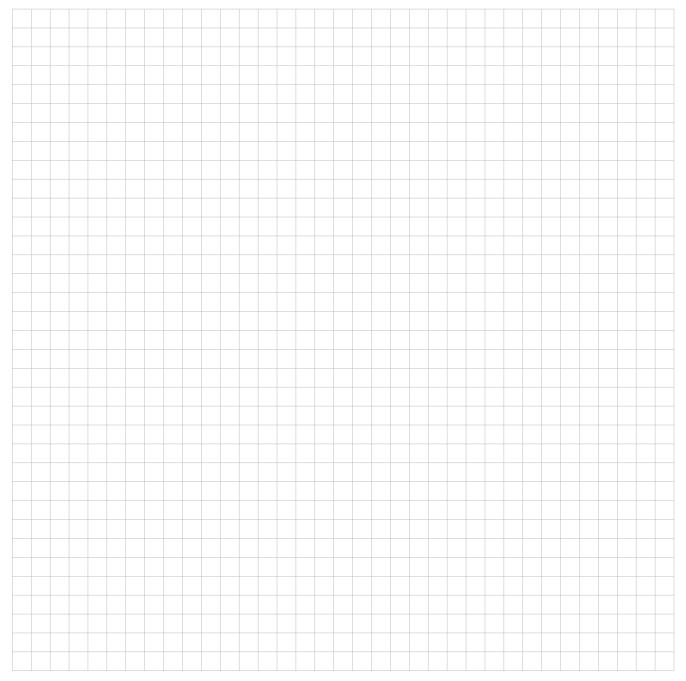


Name, Vorname	Matrikelnummer	HOCHSCHULE ESSLINGEN
Prüfungsfach: Mathematik 2		Sommersemester 24
Studiengang: WKB		Seite: 8 von 14

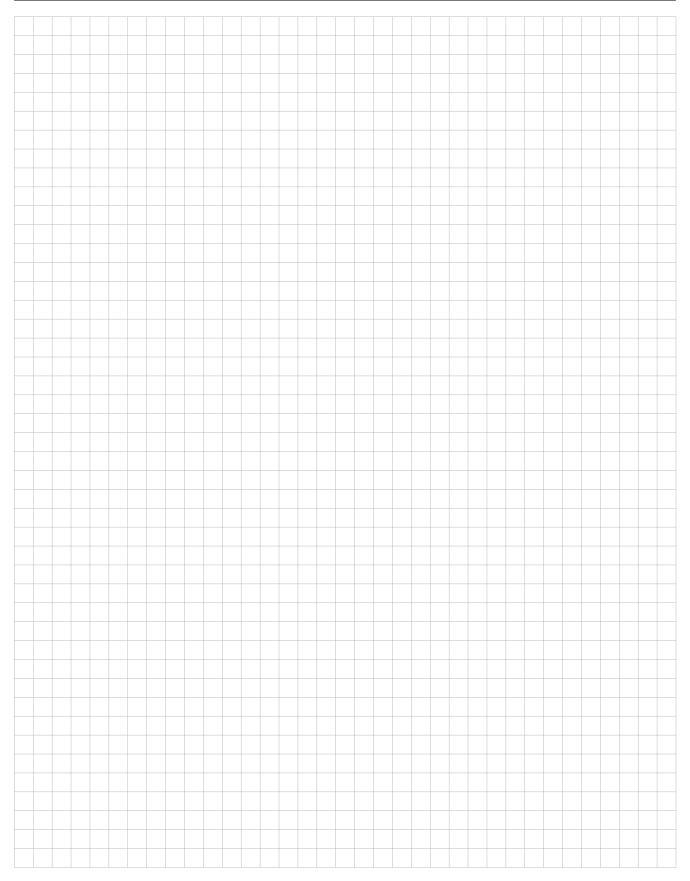
Aufgabe 4 (10 Punkte) Eine Differenzengleichung erster Ordnung ist gegeben durch

$$20 x_{k+1} - 21 x_k = -200, \quad x_0 = 100, \quad k = 0, 1, 2, 3, \dots$$

- a) Geben Sie die Zahlenwerte von x_1 und x_2 an.
- b) Bestimmen Sie die Lösung der Differenzengleichung.
- c) Interpretieren Sie die Zahlenfolge (x_k) als Kontostand nach k Jahren, eines Kontos mit festem Zinsatz von dem am Ende jeden Jahres der selbe Betrag abgehoben wird. Wie hoch sind Zinsatz und Betrag? Wie oft kann der Betrag von dem Konto abgehoben werden bevor der Kontostand negativ wird?



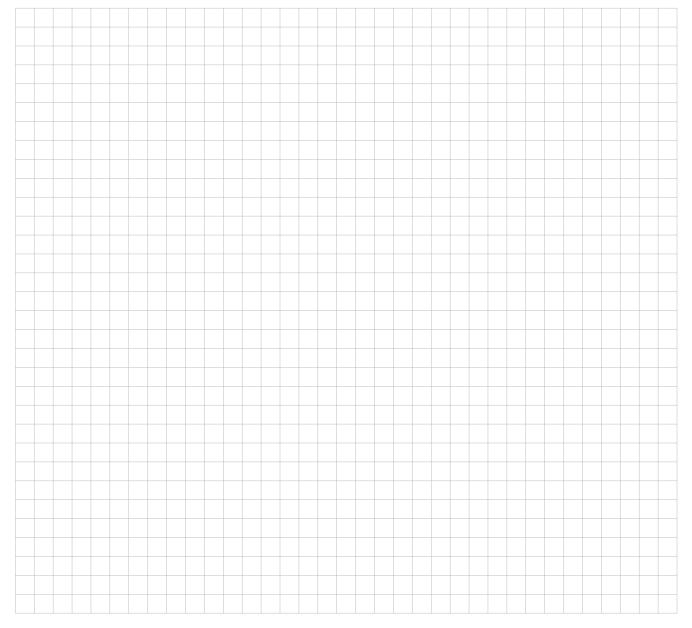
Name, Vorname	Matrikelnummer	THOCHSCHULE ESSLINGEN
Prüfungsfach: Mathematik 2		Sommersemester 24
Studiengang: WKB		Seite: 9 von 14



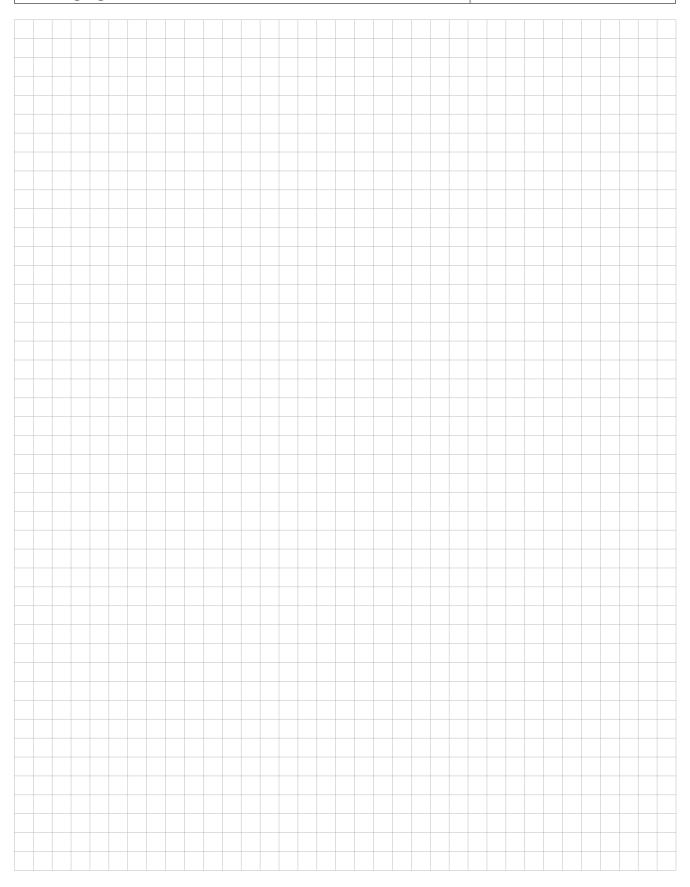
Name, Vorname	Matrikelnummer	HOCHSCHULE ESSLINGEN
Prüfungsfach: Mathematik 2		Sommersemester 24
Studiengang: WKB		Seite: 10 von 14

Aufgabe 5 (8 Punkte) Insa möchte ihrem Bruder Till 5000 Euro leihen, die ihm noch fehlen, um ein Auto finanzieren zu können. In dieser Aufgabe werde mit einem Zinssatz von 2% p.a. gerechnet.

- a) Insa möchte, dass ihr Bruder in 5 jährlichen Raten von jeweils 1000 Euro den Kredit zurückzahlt. Dabei soll nach einem Jahr die erste Rate gezahlt werden. Welchen Verlust macht Insa bei dieser Rückzahlunsvariante, wenn als Zeitpunkt für die Berechnung die Auszahlung der 5000 Euro an Till genommen wird?
- **b)** Durch welche jährliche Rate E müssten die 1000 Euro in Aufgabe a) ersetzt werden, damit Insa keinen Verlust macht?
- c) Till ist seiner Schwester besonders dankbar und macht daher folgenden Vorschlag: Er könnte unbegrenzt jedes Jahr eine Rate von 400 Euro zahlen ohne jemals die Zahlungen einzustellen. Auch bei dieser Variante werde die erste Rate nach einem Jahr bezahlt. Welchen Barwert hätte diese Zahlungsfolge, wenn man annimmt, dass die Zahlungen tatsächlich niemals aufhören?



Name, Vorname	Matrikelnummer	HOCHSCHULE ESSLINGEN
Prüfungsfach: Mathematik 2		Sommersemester 24
Studiengang: WKB		Seite: 11 von 14



Name, Vorname	Matrikelnummer	HOCHSCHULE ESSLINGEN
Prüfungsfach: Mathematik 2		Sommersemester 24
Studiengang: WKB		Seite: 12 von 14

Aufgabe 6 (9 Punkte)

Gegeben ist das lineare Optimierungsproblem

$$f(\vec{x}) = \vec{c} \cdot \vec{x} \stackrel{!}{=} \text{Max}, \quad \mathbf{A}\vec{x} \leq \vec{b}, \quad \vec{x} \geq 0,$$

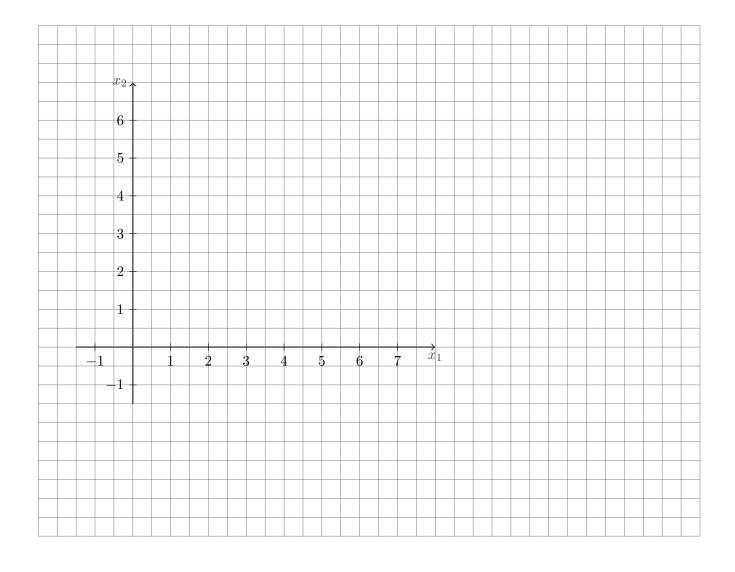
mit

$$\vec{c} = \begin{pmatrix} 2 \\ 6 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}, \quad \vec{b} = \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \end{pmatrix}.$$

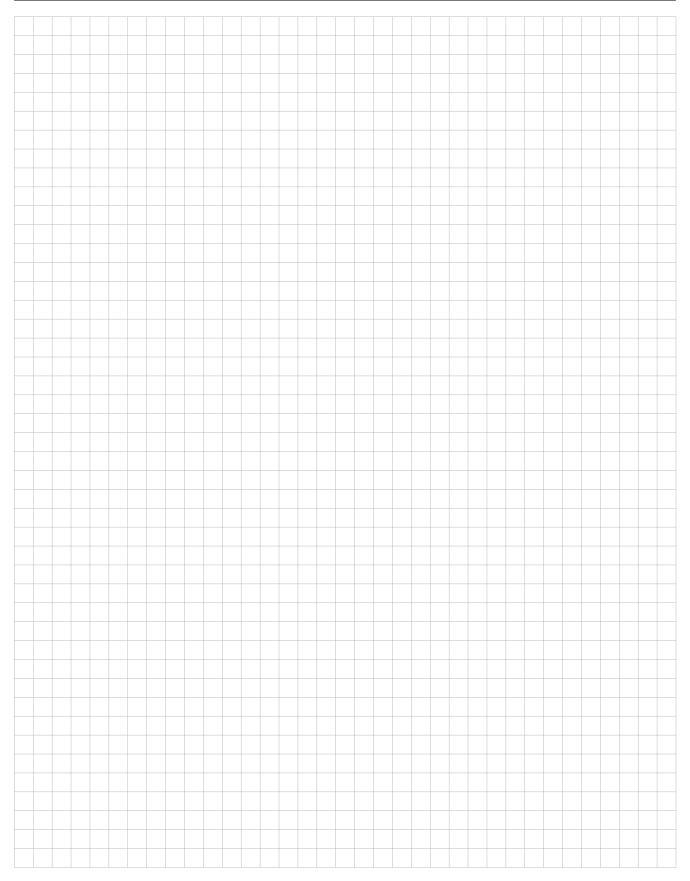
- a) Zeichnen Sie den zulässigen Bereich in das gegebene Koordinatensystem ein.
- **b)** Zeichnen Sie im zulässigen Bereich alle Punkte (x_1, x_2) mit $f(x_1, x_2) = 12$ ein.
- c) Wenden Sie den Primalen Simplex-Algorithmus auf dieses Optimierungsproblem an.
- d) Wäre das gegebene Optimierungsproblem für

$$\mathbf{A} = \left(\begin{array}{cc} -2 & 2 \\ -1 & 2 \end{array} \right)$$

lösbar? Begründen Sie Ihre Antwort.



Name, Vorname	Matrikelnummer	THOCHSCHULE ESSLINGEN
Prüfungsfach: Mathematik 2		Sommersemester 24
Studiengang: WKB		Seite: 13 von 14



Name, Vorname	Matrikelnummer	HOCHSCHULE ESSLINGEN
Prüfungsfach: Mathematik 2		Sommersemester 24
Studiengang: WKB		Seite: 14 von 14

