Name, Vorname	Matrikelnummer	HOCHSCHULE ESSLINGEN
Prüfungsfach: Mathematik 2		Wintersemester 23/24
Studiengang: WKB		Seite: 1 von 15
Prüfungsnummer: IT 105 20 20		Zeit: 90 Minuten
Dozent: Karsten Runge		Punkte: 54

Hilfsmittel: Manuskript

Literatur

Taschenrechner Casio FX-87DE Plus / Casio FX-87DE Plus 2nd edition

Hinweise: Bearbeiten Sie die Aufgaben ausschließlich auf diesen Prüfungsblättern.

Begründen Sie alle Lösungsschritte.

Aufgabe 1 (10 Punkte) Hinweis: Alle Teilaufgaben können unabhängig voneinander bearbeitet werden.

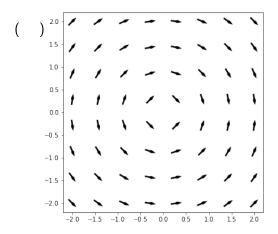
a) Ordnen Sie den Differenzialgleichungen die Richtungsfelder zu:

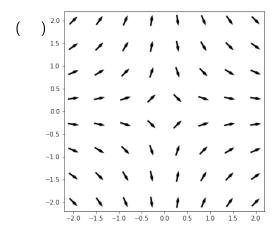
(A) 
$$y' = \frac{x}{y}$$

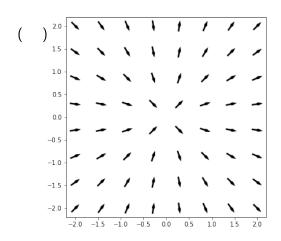
(B) 
$$y' = \frac{y}{x}$$

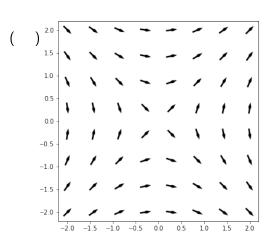
(C) 
$$y' = -\frac{x}{y}$$

(D) 
$$y' = -\frac{y}{x}$$





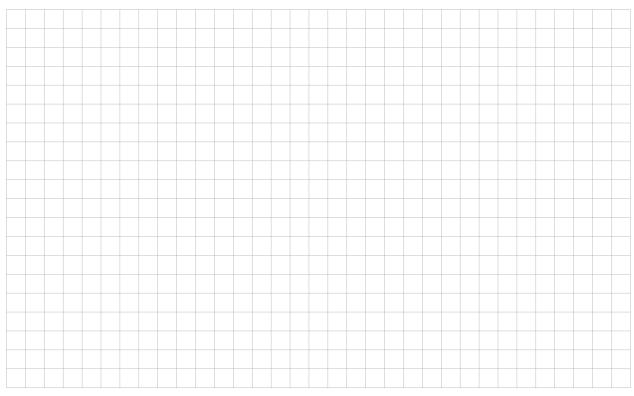




Name, Vorname	Matrikelnummer	HOCHSCHULE ESSLINGEN
Prüfungsfach: Mathematik 2		Wintersemester 23/24
Studiengang: WKB		Seite: 2 von 15

b) Bestimmen Sie die allgemeine Lösung der Differenzialgleichung

$$y'(x) = 3x^2y.$$



c) Berechnen Sie für die Lösung des Anfangswertproblems

$$y'(x) = \frac{y}{1+x^2}, \quad y(1) = 3,$$

einen Näherungswert, indem Sie einen Schritt mit dem Euler-Polygonzugverfahren mit der Schrittweite  $h=0.2\,\,\mathrm{durchf\"uhren}$ .



Name, Vorname	Matrikelnummer	HOCHSCHULE ESSLINGEN
Prüfungsfach: Mathematik 2		Wintersemester 23/24
Studiengang: WKB		Seite: 3 von 15

d) Beurteilen Sie den folgenden Dialog mit ChatGPT 3.5. Sind die Berechnungen und die Behauptungen von ChatGPT korrekt?

## You

Bitte erstelle ein Beispiel für ein lineares Differenzengleichungssystem mit zwei Unbekannten, das asymptotisch stabil ist.

## **ChatGPT**

Betrachten wir das folgende lineare Differenzengleichungssystem mit zwei Unbekannten:

$$x_{k+1} = 0.8 x_k + 0.2 y_k$$
$$y_{k+1} = 0.4 x_k + 0.6 y_k$$

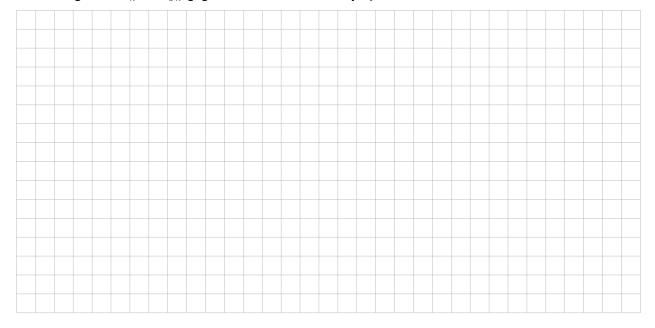
Die obigen Gleichungen können in Matrixform geschrieben werden als:

$$\begin{pmatrix} x_{k+1} \\ y_{k+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.8 & 0.2 \\ 0.4 & 0.6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_k \\ y_k \end{pmatrix}, \text{ mit der Matrix } \mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0.8 & 0.2 \\ 0.4 & 0.6 \end{pmatrix}$$

Die Matrix  $\bf A$  ist die Übertragungsmatrix des Systems. Um die asymptotische Stabilität zu überprüfen, betrachten wir die Eigenwerte dieser Matrix. Die Eigenwerte  $\lambda$  können durch das Lösen der charakteristischen Gleichung gefunden werden:

$$\begin{vmatrix} 0.8 - \lambda & 0.2 \\ 0.4 & 0.6 - \lambda \end{vmatrix} = 0 \iff (0.8 - \lambda)(0.6 - \lambda) - 0.2 \cdot 0.4 = 0 \iff \lambda^2 - 1.4 \lambda + 0.4 = 0$$

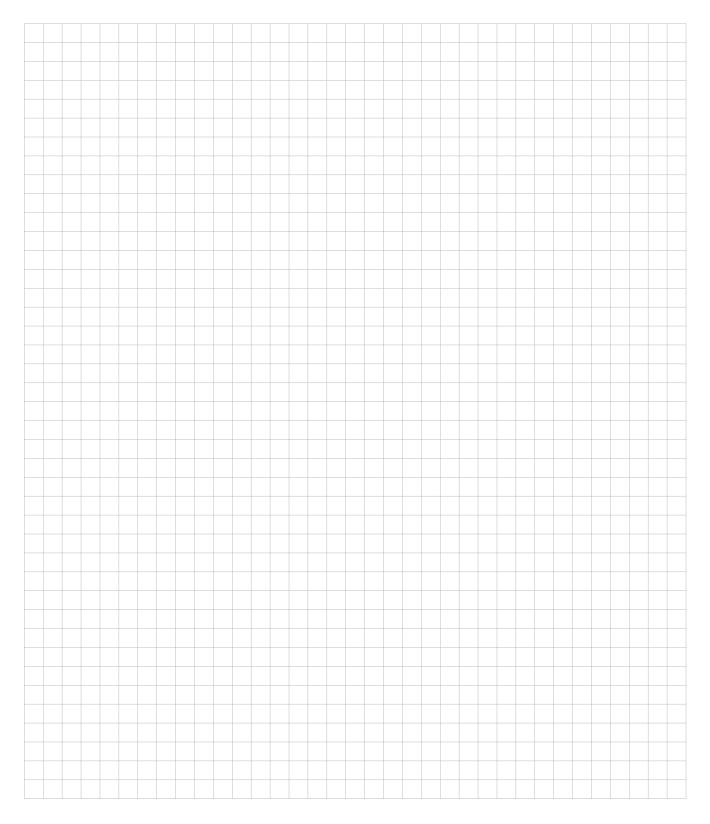
Die Lösungen dieser quadratischen Gleichung sind  $\lambda_1=1$  und  $\lambda_2=0.4$ . Beide Eigenwerte haben Beträge kleiner als 1, was darauf hinweist, dass das System asymptotisch stabil ist. In diesem Beispiel konvergieren die Lösungen für  $x_k$  und  $y_k$  gegen Null, was auf eine asymptotische Stabilität hinweist.



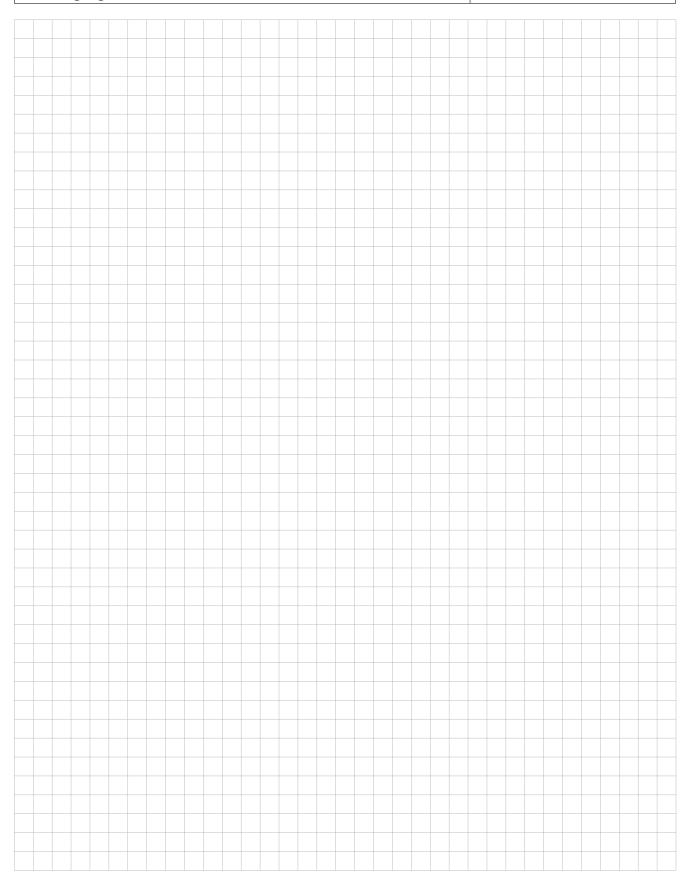
Name, Vorname	Matrikelnummer	THOCHSCHULE ESSLINGEN
Prüfungsfach: Mathematik 2		Wintersemester 23/24
Studiengang: WKB		Seite: 4 von 15

Aufgabe 2 (9 Punkte) Bestimmen Sie die allgemeine reelle Lösung der Differenzialgleichung

$$y''(x) + 4y(x) = 8\cos(2x) - 4\sin(2x).$$



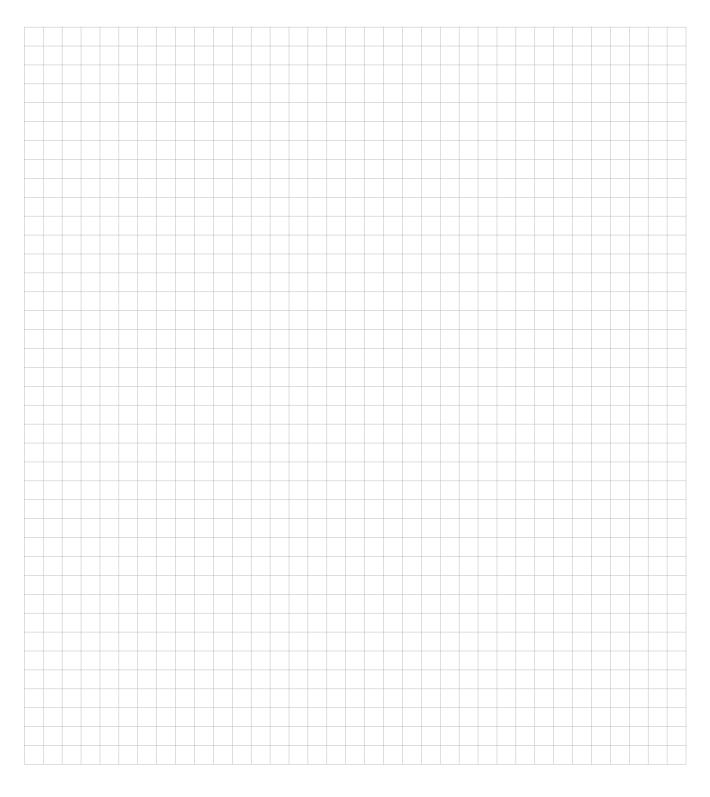
Name, Vorname	Matrikelnummer	HOCHSCHULE ESSLINGEN
Prüfungsfach: Mathematik 2		Wintersemester 23/24
Studiengang: WKB		Seite: 5 von 15



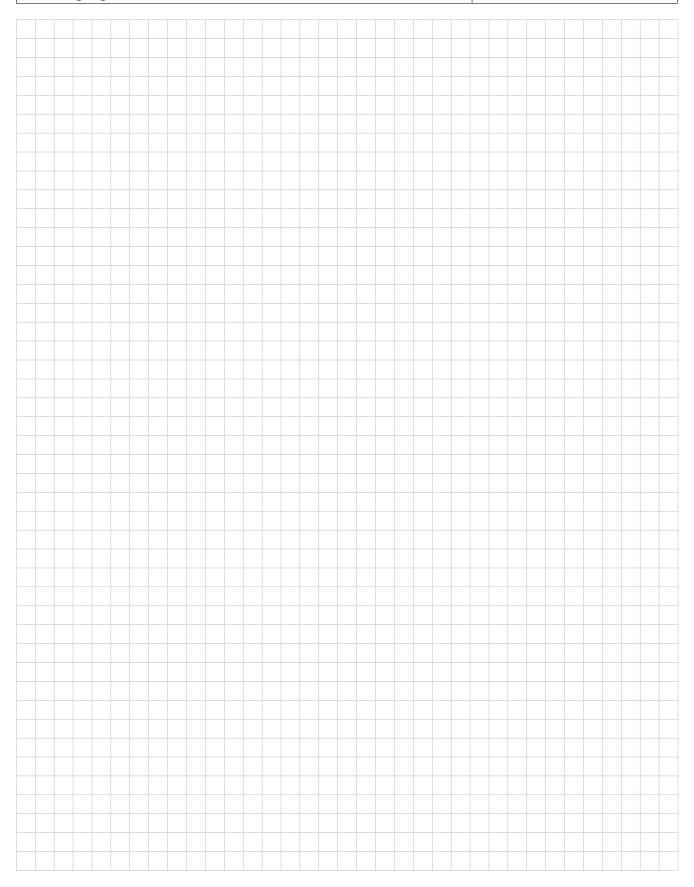
Name, Vorname	Matrikelnummer	HOCHSCHULE ESSLINGEN
Prüfungsfach: Mathematik 2		Wintersemester 23/24
Studiengang: WKB		Seite: 6 von 15

Aufgabe 3 (10 Punkte) Bestimmen Sie die allgemeine reelle Lösung des Differenzialgleichungssystems

$$\dot{x}_1 = -2x_1 + 3x_2 + 6e^{-2t},$$
  
 $\dot{x}_2 = 2x_1 + 3x_2 .$ 



Name, Vorname	Matrikelnummer	HOCHSCHULE ESSLINGEN
Prüfungsfach: Mathematik 2		Wintersemester 23/24
Studiengang: WKB		Seite: 7 von 15

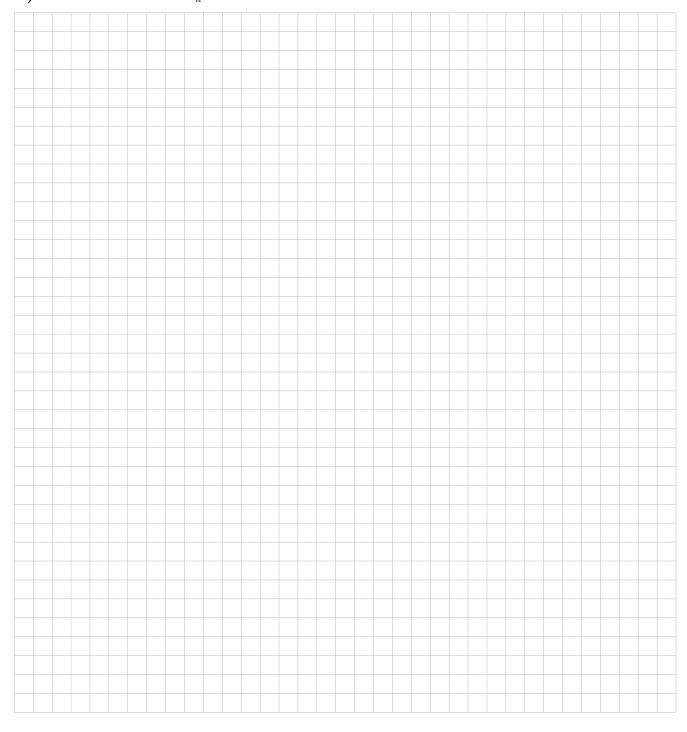


Name, Vorname	Matrikelnummer	THOCHSCHULE ESSLINGEN
Prüfungsfach: Mathematik 2		Wintersemester 23/24
Studiengang: WKB		Seite: 8 von 15

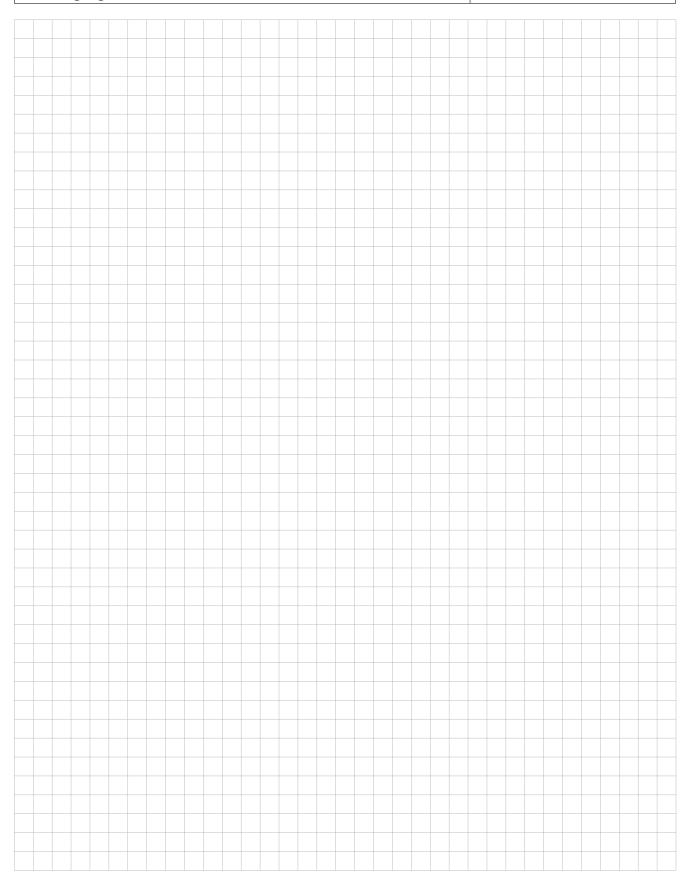
Aufgabe 4 (8 Punkte) Eine Differenzengleichung erster Ordnung ist gegeben durch

$$x_{k+1} = 1.05 x_k - 1, \quad x_0 = 10, \quad k = 0, 1, 2, 3, \dots$$

- a) Geben Sie die Zahlenwerte von  $x_1$  und  $x_2$  an.
- b) Bestimmen Sie die Lösung der Differenzengleichung.
- c) Für welche Indizes k ist  $x_k < 0$ ?



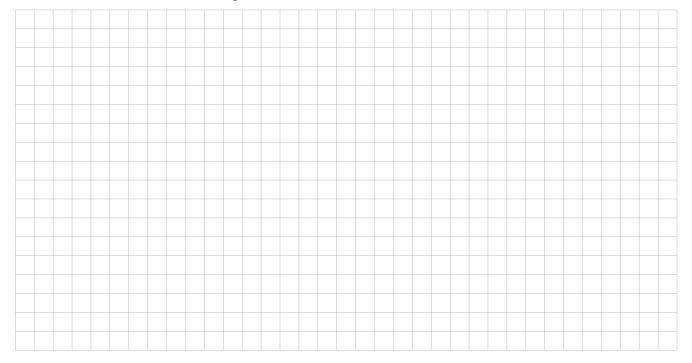
Name, Vorname	Matrikelnummer	HOCHSCHULE ESSLINGEN
Prüfungsfach: Mathematik 2		Wintersemester 23/24
Studiengang: WKB		Seite: 9 von 15



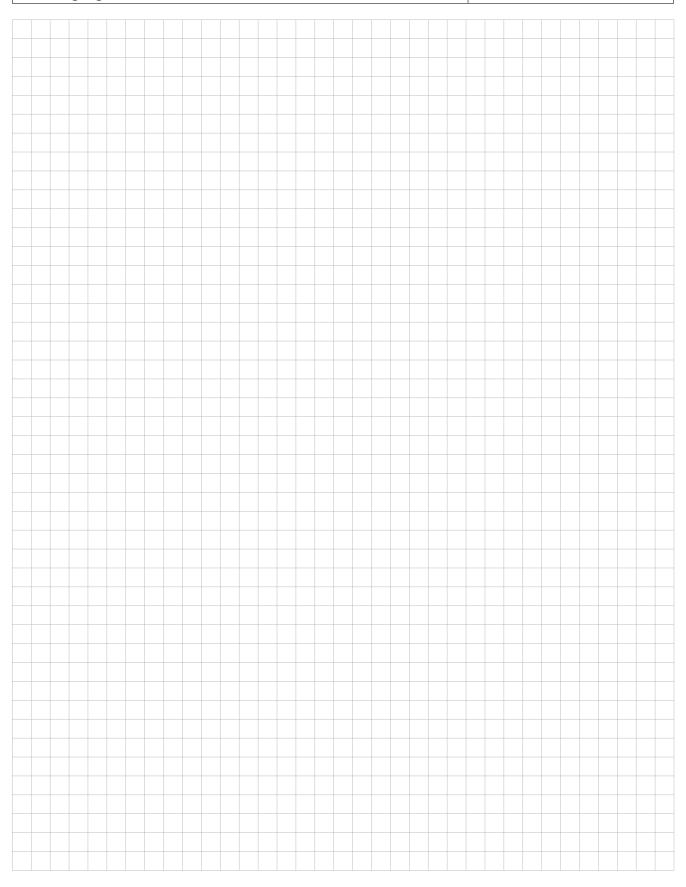
Name, Vorname	Matrikelnummer	HOCHSCHULE ESSLINGEN
Prüfungsfach: Mathematik 2		Wintersemester 23/24
Studiengang: WKB		Seite: 10 von 15

Aufgabe 5 (8 Punkte) Die Geschwister Fin und Ans haben ein Baugrundstück geerbt und planen darauf ein Gebäude mit 10 Mietwohnungen errichten zu lassen. Sie können zusammen ein Eigenkapital von 500.000 Euro aufbringen, der Rest muss über einen Kredit finanziert werden.

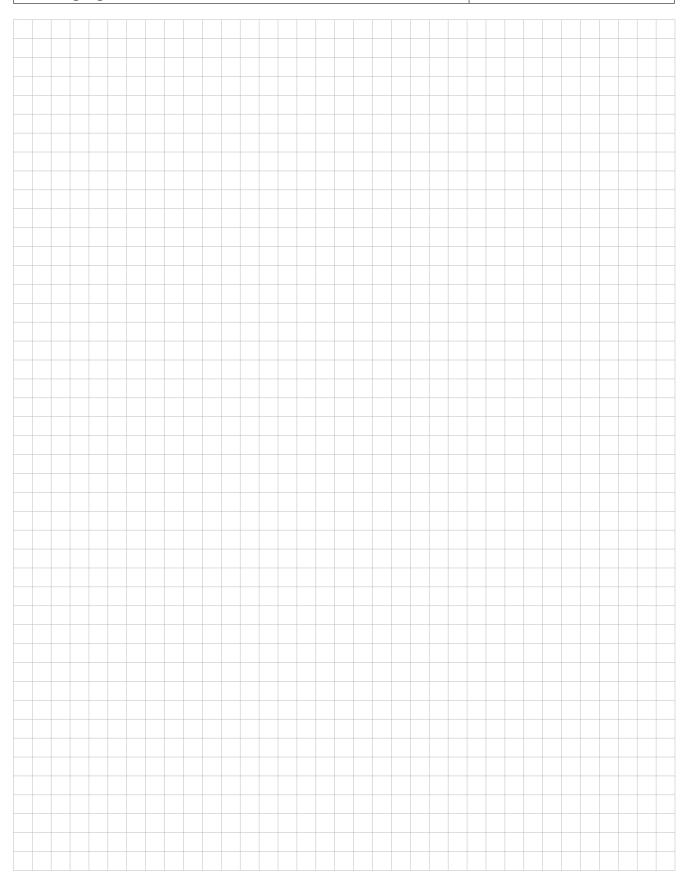
- a) Aufgrund stark gestiegener Kreditzinsen könnte der Bau von Sozialwohnungen eine attraktive Möglichkeit darstellen. Durch staatliche Förderung liegt der Zinssatz hier bei 1.2% p.a. bei unterjähriger, genauer monatlicher Verzinsung, d.h. der Zinssatz je Monat liegt bei 0.1%. Der Bau der 10 Wohnungen soll 1.5 Millionen Euro kosten, es muss also 1 Million Euro Kredit aufgenommen werden.
  - Bestimmen Sie den effektiven Jahreszins (auf zwei Nachkommastellen genau).
  - Welche Rate R muss jeweils zum Ende des Monats gezahlt werden, damit der Kredit nach genau 20
    Jahren (also 240 Monaten) getilgt ist?
    Hinweis: Sie können z.B. die Zahlung der 240 Raten als konstante Zahlungsfolge betrachten, deren
    Barwert oder Endwert mit einem geeigneten Wert gleich zu setzen ist.
  - Welche monatliche Kaltmiete muss für jede der 10 Wohnungen erhoben werden, damit aus den Mieteinnahmen die Kreditraten R beglichen werden können? Dabei sollen zusätzliche Kosten für Instandhaltung oder Steuern vernachlässigt werden.
- b) Werden Wohnungen für den freien Markt gebaut, sind die Zinsen wesentlich höher. Sie liegen bei 4.8% p.a. bei monatlicher Verzinsung. Zusätzlich werden höhere Baukosten von 2 Millionen Euro (also ein Kredit von 1.5 Millionen Euro) eingeplant, um einen erhöhten Wohnkomfort zu erreichen.
  - Bestimmen Sie den effektiven Jahreszins (auf zwei Nachkommastellen genau).
  - Welche Rate R muss jeweils zum Ende des Monats gezahlt werden, damit der Kredit nach genau 20 Jahren getilgt ist?
  - Welche monatliche Kaltmiete muss für jede der 10 Wohnungen erhoben werden, damit aus den Mieteinnahmen die Kreditraten R beglichen werden können?



Name, Vorname	Matrikelnummer	HOCHSCHULE ESSLINGEN
Prüfungsfach: Mathematik 2		Wintersemester 23/24
Studiengang: WKB		Seite: 11 von 15



Name, Vorname	Matrikelnummer	HOCHSCHULE ESSLINGEN
Prüfungsfach: Mathematik 2		Wintersemester 23/24
Studiengang: WKB		Seite: 12 von 15



Name, Vorname	Matrikelnummer	HOCHSCHULE ESSLINGEN
Prüfungsfach: Mathematik 2		Wintersemester 23/24
Studiengang: WKB		Seite: 13 von 15

## Aufgabe 6 (9 Punkte)

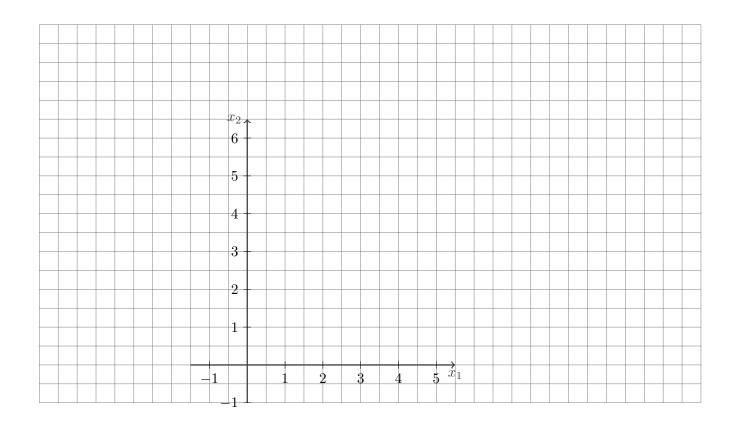
Gegeben ist das lineare Optimierungsproblem

$$f(\vec{x}) = \vec{c} \cdot \vec{x} \stackrel{!}{=} \text{Max}, \quad \mathbf{A}\vec{x} \leq \vec{b}, \quad \vec{x} \geq 0,$$

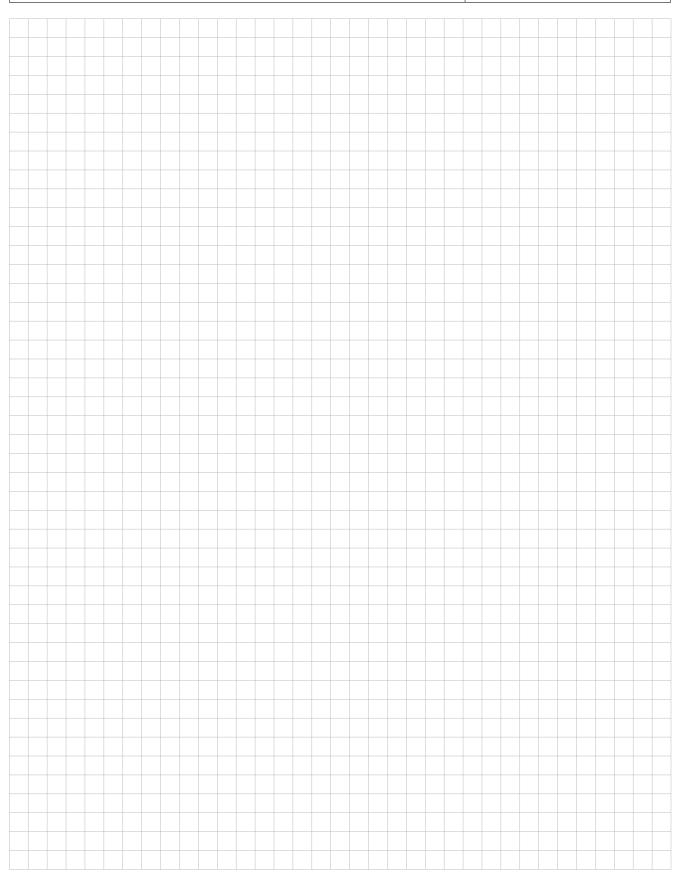
mit

$$\vec{c} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{A} = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \vec{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

- a) Zeichnen Sie den zulässigen Bereich in das gegebene Koordinatensystem ein.
- b) Zeichnen Sie im zulässigen Bereich alle Punkte  $(x_1, x_2)$  mit  $f(x_1, x_2) = 1$  ein.
- c) Wenden Sie den Primalen Simplex-Algorithmus auf das lineare Optimierungsproblem an.



Name, Vorname	Matrikelnummer	HOCHSCHULE ESSLINGEN
Prüfungsfach: Mathematik 2		Wintersemester 23/24
Studiengang: WKB		Seite: 14 von 15



Name, Vorname	Matrikelnummer	HOCHSCHULE ESSLINGEN
Prüfungsfach: Mathematik 2		Wintersemester 23/24
Studiengang: WKB		Seite: 15 von 15

