Prüfungsaufgaben mit Lösungen	HOCHSCHULE ESSLINGEN
Prüfungsfach: Mathematik 2	Sommersemester 24
Studiengang: WKB	
Prüfungsnummer: R39.04355	Zeit: 90 Minuten
Dozent: Karsten Runge	Punkte: 54

Hilfsmittel: Manuskript
Literatur
Taschenrechner Casio FX-87DE Plus / Casio FX-87DE Plus 2nd edition

Hinweise: **Bearbeiten Sie die Aufgaben ausschließlich auf diesen Prüfungsblättern.**
Begründen Sie alle Lösungsschritte.

Aufgabe 1 (8 Punkte) Hinweis: Alle Teilaufgaben können unabhängig voneinander bearbeitet werden.

a) Geben Sie eine lineare Differenzialgleichung an, die die Fundamentallösung

$$y(x) = \mathrm{e}^{-2\,x}$$

besitzt.

Eigenwert $\lambda_1 = -2$: 2 P

$$y'(x) = -2\;y(x)$$

b) Bei welchen Störfunktionen r tritt bei der Differenzialgleichung

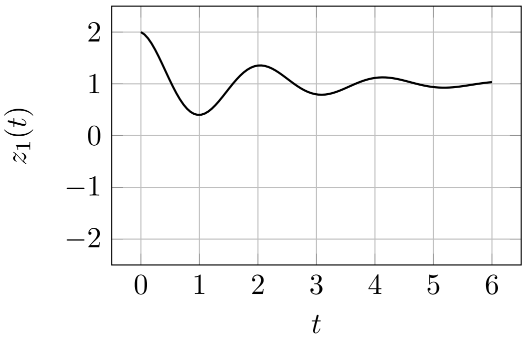
$$y'' + 9\,y = r(x)$$

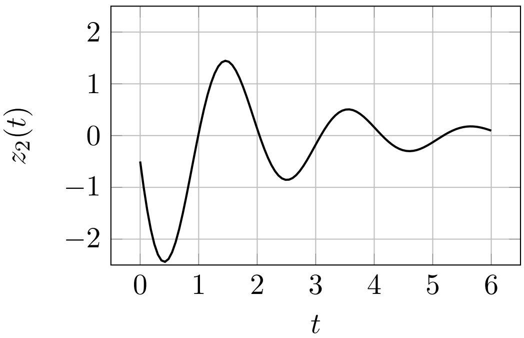
Resonanz auf? Bitte kreuzen Sie den entsprechenden Eintrag an:

$r(x) = \mathrm{e}^{-9\,x}$	☐ Resonanz	X keine Resonanz
$r(x) = \mathrm{e}^{9\,x}$	☐ Resonanz	X keine Resonanz
$r(x) = 3\,\cos(x)$	☐ Resonanz	X keine Resonanz
$r(x) = \cos(3\,x)$	X Resonanz	☐ keine Resonanz

2 P

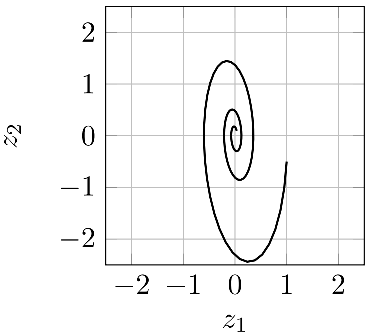
c) Die folgenden beiden Abbildungen zeigen den zeitlichen Verlauf der Zustände $z_1(t)$ und $z_2(t)$:



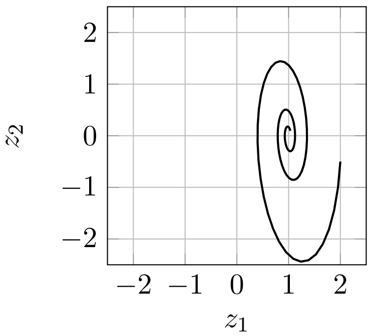


Welche der folgenden vier Abbildungen zeigt den richtigen Verlauf des Phasenporträts? Bitte begründen Sie Ihre Antwort!

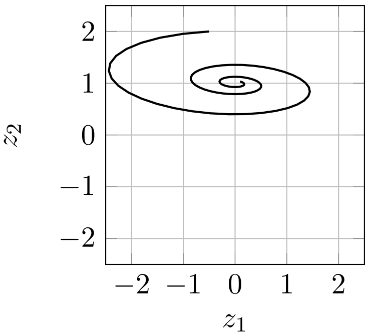
(A)



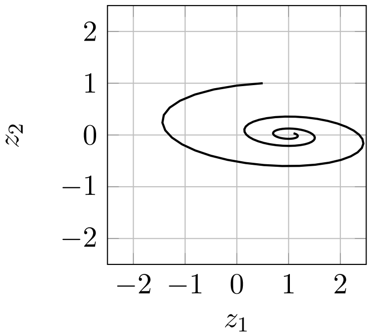
(B)



(C)



(D)



Die Spirale endet in der Nähe des Punktes mit den Koordinaten $(1 \mid 0)$. Die Werte des Zustands z_1 bewegen sich zwischen 0 und 2. Somit zeigt Abbildung (B) den richtigen Verlauf. $\boxed{2\text{ P}}$

d) Beurteilen Sie den folgenden Dialog mit ChatGPT 3.5. Sind die Berechnungen und die Behauptungen von ChatGPT korrekt? Es genügt den Fehler zu finden, die richtige Lösung muss nicht bestimmt werden!

You: Wie lautet die Lösung des Anfangswertproblems (AWP)

$$x' \cdot x = t, \quad x(0) = 1\,?$$

ChatGPT 3.5: Um das AWP zu lösen, können wir das Verfahren der Trennung der Variablen verwenden.

1. Trenne die Variablen:

$$\frac{dx}{x} = t\,dt$$

2. Integriere beide Seiten:

$$\int \frac{dx}{x} = \int t\,dt \quad \Longleftrightarrow \quad \ln|x| = \frac{t^2}{2} + C$$

3. Löse nach x auf:

$$|x| = e^{\frac{t^2}{2}+C}$$

Da $x(0) = 1$, setzen wir $t = 0$ und lösen für C:

$$|1| = e^C \quad \Longleftrightarrow \quad C = 0$$

4. Setze C ein und berücksichtige das Betragszeichen:

$$|x| = e^{\frac{t^2}{2}} \quad \Longleftrightarrow \quad x = \pm e^{\frac{t^2}{2}}$$

Da $x(0) = 1$, wählen wir das positive Vorzeichen:

$$x(t) = e^{\frac{t^2}{2}}$$

Die Trennung der Variablen ist falsch, richtig ist: 2 P

$$x \cdot \frac{dx}{dt} = t \quad \Longleftrightarrow \quad \int x\,dx = \int t\,dt$$

Hinweis: ChatGPT 4.0 bestimmt die Lösung des AWP korrekt!

Aufgabe 2 (10 Punkte) Wir betrachten das Anfangswertproblem

$$y'(x) \cdot y(x) = \sin(x), \quad y(0) = -1\,.$$

a) Handelt es sich um eine lineare oder um eine nichtlineare Differenzialgleichung?

b) Bestimmen Sie die exakte Lösung des Anfangswertproblems.

c) Berechnen Sie einen Näherungswert für $y(1)$, indem Sie mit der Schrittweite $h = \frac{1}{2}$ zwei Schritte mit dem Polygonzugverfahren von Euler durchführen.

d) Wie groß ist die Abweichung des in Aufgabenteil **c)** berechneten Näherungswerts von der exakten Lösung?

---

a) Nichtlineare Differenzialgleichung. 1 P

b) Separation: 1 P

$$\frac{\mathrm{d}\,y}{\mathrm{d}\,x} \cdot y = \sin(x) \quad \Longrightarrow \quad \int y \,\mathrm{d}\,y = \int \sin(x)\,\mathrm{d}\,x$$

Integration: 1 P

$$\frac{1}{2}\,y^2 = -\cos(x) + C$$

Allgemeine Lösung: 1 P

$$y(x) = \pm\sqrt{2\,C - 2\,\cos(x)}$$

Anfangswert $y(0) = -1$: 1 P

$$\frac{1}{2} \cdot (-1)^2 = -\cos(0) + C \quad \Longrightarrow \quad C = \frac{3}{2}$$

Lösung des Anfangswertproblems: 1 P

$$y(x) = -\sqrt{3 - 2\,\cos(x)}$$

c) 1. Schritt mit $x_0 = 0$ und $y_0 = -1$: 1 P

$$y_1 = y_0 + h\,\frac{\sin(x_0)}{y_0} = -1, \quad x_1 = x_0 + h = \frac{1}{2}$$

2. Schritt: 1 P

$$y_2 = y_1 + h\,\frac{\sin(x_1)}{y_1} = -1 - \frac{1}{2}\sin\left(\frac{1}{2}\right) \approx -1.2397, \quad x_2 = x_1 + h = 1$$

d) Exakte Lösung: 1 P

$$y(1) = -\sqrt{3 - 2\,\cos(1)} \approx -1.3854$$

Abweichung: 1 P

$$|y(1) - y_2| \approx |-1.3854 + 1.2397| \approx 0.1457$$

Aufgabe 3 (9 Punkte) Ein Differenzialgleichungssystem ist gegeben durch

$$\begin{aligned} \dot{x} &= -2\,x + 3\,y \\ \dot{y} &= 10\,x - 3\,y \end{aligned}$$

a) Bestimmen Sie die allgemeine Lösung des Differenzialgleichungssystems.

b) Ist das System asymptotisch stabil?

a) Homogenes System in Matrixform:

$$\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 3 \\ 10 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$ 1 P

Charakteristische Gleichung und Eigenwerte:

$$\begin{vmatrix} -2-\lambda & 3 \\ 10 & -3-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 + 5\lambda - 24 = 0 \quad \Longrightarrow \quad \lambda_1 = -8,\ \lambda_2 = 3$$ 2 P

Berechnung eines Eigenvektors $\begin{pmatrix} u_1 \\ v_1 \end{pmatrix}$ zum Eigenwert $\lambda_1 = -8$:

$$\begin{pmatrix} 6 & 3 \\ 10 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ v_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \Longrightarrow \quad v_1 = -2\,u_1 \quad \Longrightarrow \quad \begin{pmatrix} u_1 \\ v_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}$$ 2 P

Berechnung eines Eigenvektors $\begin{pmatrix} u_2 \\ v_2 \end{pmatrix}$ zum Eigenwert $\lambda_2 = 3$:

$$\begin{pmatrix} -5 & 3 \\ 10 & -6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_2 \\ v_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \Longrightarrow \quad 5\,u_2 = 3\,v_2 \quad \Longrightarrow \quad \begin{pmatrix} u_2 \\ v_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \end{pmatrix}$$ 2 P

Allgemeine Lösung des homogenen Differenzialgleichungssytems:

$$\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = C_1\, \mathrm{e}^{-8\,t} \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix} + C_2\, \mathrm{e}^{3\,t} \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \end{pmatrix}$$ 1 P

b) Das System ist nicht asymptotisch stabil, da nicht alle Eigenwerte λ die Bedingung $\mathrm{Re}(\lambda) < 0$ erfüllen, $\mathrm{Re}(\lambda_2) = 3 > 0$. 1 P

Aufgabe 4 (10 Punkte) Eine Differenzengleichung erster Ordnung ist gegeben durch

$$20\,x_{k+1} - 21\,x_k = -200, \quad x_0 = 100, \quad k = 0, 1, 2, 3, \dots .$$

a) Geben Sie die Zahlenwerte von x_1 und x_2 an.

b) Bestimmen Sie die Lösung der Differenzengleichung.

c) Interpretieren Sie die Zahlenfolge (x_k) als Kontostand nach k Jahren, eines Kontos mit festem Zinsatz von dem am Ende jeden Jahres der selbe Betrag abgehoben wird. Wie hoch sind Zinsatz und Betrag? Wie oft kann der Betrag von dem Konto abgehoben werden bevor der Kontostand negativ wird?

a) Rekursionsformel auflösen: 1 P

$$x_{k+1} = \frac{21}{20}\,x_k - 10\,.$$

Zahlenwerte: 1 P

$$k = 0: \; x_1 = \frac{21}{20}\,x_0 - 10 = \frac{21}{20} \cdot 100 - 10 = 95\,.$$
$$k = 1: \; x_2 = \frac{21}{20}\,x_1 - 10 = \frac{21}{20} \cdot 95 - 10 = 89.75\,.$$

b) Homogene Lösung: 1 P

$$20\,x_{k+1} - 21\,x_k = 0, \quad \Longrightarrow \quad 20\,\lambda - 21 = 0 \quad \Longrightarrow \quad \lambda = \frac{21}{20} \quad \Longrightarrow \quad x_k^h = C \cdot \left(\frac{21}{20}\right)^k .$$

Partikuläre Lösung: 1 P

$$x_k^p = A \quad \Longrightarrow \quad 20\,A - 21\,A = -200 \quad \Longrightarrow \quad A = 200\,.$$

Allgemeine Lösung: 1 P

$$x_k = x_k^h + x_k^p = C \cdot \left(\frac{21}{20}\right)^k + 200\,.$$

Anfangswert $x_0 = 100$: 1 P

$$k = 0: \quad x_0 = C \cdot \left(\frac{21}{20}\right)^0 + 200 \quad \Longrightarrow \quad 100 = C + 200 \quad \Longrightarrow \quad C = -100\,.$$

Ergebnis: 1 P

$$x_k = -100 \cdot \left(\frac{21}{20}\right)^k + 200\,.$$

c) Zinssatz $\frac{21}{20} - 1 = \frac{1}{20} = 5\%$, Betrag 10. 1 P

Bedingung $x_k = 0$: 1 P

$$100 \cdot \left(\frac{21}{20}\right)^k = 200 \quad \Longleftrightarrow \quad \left(\frac{21}{20}\right)^k = 2$$

Nach k auflösen: 1 P

$$\ln(2) = \ln\left(\frac{21}{20}\right)^k \quad \Longleftrightarrow \quad \ln(2) = k\,\ln\left(\frac{21}{20}\right) \quad \Longleftrightarrow \quad k = \frac{\ln(2)}{\ln\left(\frac{21}{20}\right)} \approx 14.2$$

Der Betrag kann 14 mal abgehoben werden.

Alternative Lösung für **b)** mit Lösungsformel für lineare Differenzengleichung erster Ordnung:

$$x_{k+1} = \lambda\, x_k + r_k \quad \Longrightarrow \quad x_k = \lambda^k \cdot x_0 + \sum_{l=0}^{k-1} \lambda^{k-1-l} r_l\,.$$

Mit $\lambda = \frac{21}{20}$, $r_k = -10$, $x_0 = 100$:

$$x_k = \left(\frac{21}{20}\right)^k \cdot 100 + \sum_{l=0}^{k-1} \left(\frac{21}{20}\right)^{k-1-l} \cdot (-10)\,.$$

Geometrische Reihe:

$$\sum_{l=0}^{k-1} q^{k-1-l} = \frac{1-q^k}{1-q}\,.$$

Mit $q = \frac{21}{20}$:

$$x_k = 100\left(\frac{21}{20}\right)^k - 10\,\frac{1-\left(\frac{21}{20}\right)^k}{1-\frac{21}{20}} = 100\left(\frac{21}{20}\right)^k + 200\left(1 - \left(\frac{21}{20}\right)^k\right) = -100 \cdot \left(\frac{21}{20}\right)^k + 200\,.$$

Aufgabe 5 (8 Punkte) Insa möchte ihrem Bruder Till **5000 Euro** leihen, die ihm noch fehlen, um ein Auto finanzieren zu können. In dieser Aufgabe werde mit einem Zinssatz von **2% p.a.** gerechnet.

a) Insa möchte, dass ihr Bruder in **5 jährlichen Raten** von jeweils **1000 Euro** den Kredit zurückzahlt. Dabei soll nach einem Jahr die erste Rate gezahlt werden. Welchen Verlust macht Insa bei dieser Rückzahlunsvariante, wenn als Zeitpunkt für die Berechnung die Auszahlung der 5000 Euro an Till genommen wird?

b) Durch welche jährliche Rate E müssten die 1000 Euro in Aufgabe a) ersetzt werden, damit Insa keinen Verlust macht?

c) Till ist seiner Schwester besonders dankbar und macht daher folgenden Vorschlag: Er könnte unbegrenzt jedes Jahr eine Rate von **400 Euro** zahlen ohne jemals die Zahlungen einzustellen. Auch bei dieser Variante werde die erste Rate nach einem Jahr bezahlt. Welchen Barwert hätte diese Zahlungsfolge, wenn man annimmt, dass die Zahlungen tatsächlich niemals aufhören?

a) Der Barwert der Zahlungsfolge liegt bei **2 P**

$$B = \frac{1000}{1.02} + \frac{1000}{1.02^2} + \frac{1000}{1.02^3} + \frac{1000}{1.02^4} + \frac{1000}{1.02^5} = 1000 \cdot \frac{1.02^5 - 1}{1.02^5 \cdot (1.02 - 1)} \approx 4713.46 \text{ (Euro)}$$

Insas Verlust bezogen auf den Auszahlungszeitpunkt beträgt damit **1 P**

$$5000 - 4713,46 = 286.54 \text{ (Euro)}$$

b) Setze **2 P**

$$5000 = E \cdot \frac{1.02^5 - 1}{1.02^5 \cdot (1.02 - 1)}$$

Umstellen nach E ergibt

$$E = 5000 \cdot \frac{1.02^5 \cdot (1.02 - 1)}{1.02^5 - 1} \approx 1060.79 \text{ (Euro)}$$

c) Für den Barwert B der unendlichen Zahlungsfolge ergibt sich mit der geometrischen Reihe **3 P**

$$B = 400 \cdot \left(\frac{1}{1.02} + \frac{1}{1.02^2} + \frac{1}{1.02^3} + ...\right) = 400 \cdot \frac{1}{1.02} \cdot \frac{1}{1 - \frac{1}{1.02}} = 400 \cdot \frac{1}{1.02} \cdot \frac{1.02}{1.02 - 1}$$

und damit

$$B = \frac{400}{0.02} = 20000 \text{ (Euro)}$$

Aufgabe 6 (9 Punkte)

Gegeben ist das lineare Optimierungsproblem

$$f(\vec{x}) = \vec{c} \cdot \vec{x} \stackrel{!}{=} \text{Max}, \quad \mathbf{A}\vec{x} \leq \vec{b}, \quad \vec{x} \geq 0,$$

mit

$$\vec{c} = \begin{pmatrix} 2 \\ 6 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}, \quad \vec{b} = \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \end{pmatrix}.$$

a) Zeichnen Sie den zulässigen Bereich in das gegebene Koordinatensystem ein.

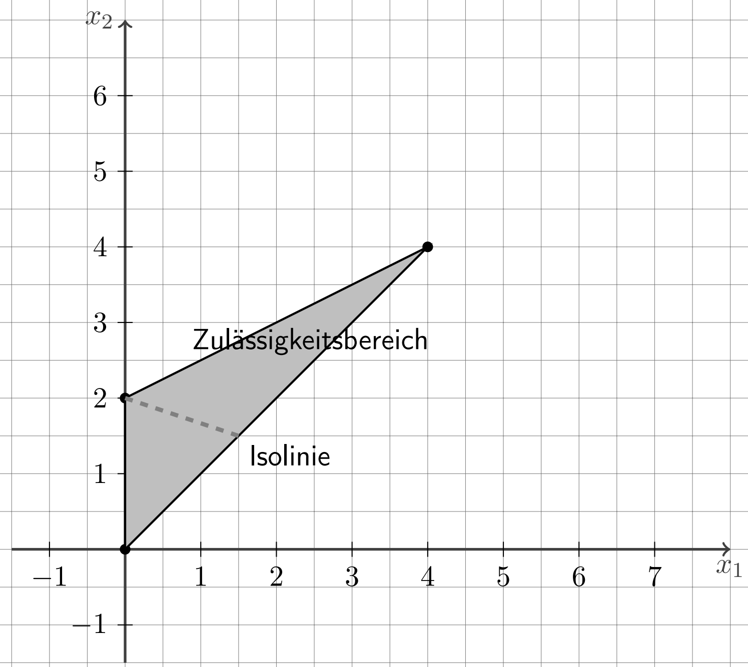
b) Zeichnen Sie im zulässigen Bereich alle Punkte (x_1, x_2) mit $f(x_1, x_2) = 12$ ein.

c) Wenden Sie den Primalen Simplex-Algorithmus auf dieses Optimierungsproblem an.

d) Wäre das gegebene Optimierungsproblem für

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} -2 & 2 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$$

lösbar? Begründen Sie Ihre Antwort.



a) Zulässigkeitsbereich: siehe Skizze. 2

b) Isolinie $f(x_1, x_2) = 6$: siehe Skizze. 1

c) Das LOP ist in Standardformat gegeben, d.h. eine zulässige Basislösung existiert.
Das Ausgangstableau lautet

BV	x_1	x_2	z_1	z_2	b_i
z_1	2	-2	1	0	0
z_2	-1	2	0	1	4
f	2	6	0	0	0

1

1. Schritt: Pivot-Spalte: 2; Pivot-Zeile: 2. Die Nichbasisvariable x_2 wird in die Basis aufgenommen. Dies führt auf das Tableau

BV	x_1	x_2	z_1	z_2	b_i
z_1	1	0	1	1	4
x_1	$-\frac{1}{2}$	1	0	$\frac{1}{2}$	2
f	5	0	0	-3	-12

2

2. Schritt: Pivot-Spalte: 1; Pivot-Zeile: 1. Die Nichbasisvariable x_1 wird in die Basis aufgenommen. Dies führt auf das Tableau

BV	x_1	x_2	z_1	z_2	b_i
x_2	1	0	1	1	4
x_1	0	1	$\frac{1}{2}$	1	4
f	0	0	-5	-8	-32

2

Die Zielfunktionszeile enthält nur Elemente ≤ 0. Dies entspricht der 1. Abbruchbedingung.
Die optimale zulässige Lösung ist $(x_1, x_2) = (4, 4)$ mit $f(x_1, x_2) = 32$.

d) Nein, denn der Zulässigkeitsbereich wäre unbeschränkt. 1