

S0-02 Típusmodellek (Programozás elmélet)

Tartalom

1. Absztrakt adattípus
2. Adattípus specifikációja
3. Adattípus osztály
4. Paraméterátadás
5. Reprezentációs függvény
6. Öröklődés és polimorfizmus
7. Liskov féle szubsztitúciós elv
8. További források

1. Absztrakt adattípus

Típus fogalma általában

Mi a típus? Biteken tárolt információk jelentése, illetve hogy hogyan kell értelmezni és módosítani őket

Típus fogalma formálisan

Egy

$$(A, F)$$

páros, ahol

- A : adattípust felépítő objektumok halmaza
- F : objektumokon értelmezett műveletek halmaza

Absztrakt adattípus (ADT)

- Szolgáltatásoknak egy halmaza, ahol a szolgáltatásokat egy megvalósító adattípus nyújtja

ADT specifikációja

- Szolgáltatások leírása, a specifikáció nem írja elő a megvalósítás módját

ADT megvalósítása

- ilyen szolgáltatásokat nyújtó adattípus

ADT korai és modernebb megközelítése

- Korai megközelítésben: azonos **STRUKTÚRÁJÚ** adatok (C struct-ok)
- Modern megközelítésben: azonos **SZOLGÁLTATÁST** nyújtó adatok (C++/Java/C# osztályok)

Szignatúra

- Programozási nyelvekben ez a deklarációnak felel meg
 - (*Gondolj a függvény típuszignatúrájára Haskell-ben*)
- Σ szignatúra egy $\Sigma = (S, OP)$
 - $S = \{S_0, S_1, \dots, S_n\}$: szortok neveinek halmaza (fajták, alaptípusok)
 - $OP = \{f_0, f_1, \dots, f_m\}$: művelet neveinek halmaza
- Az f_i művelet: egy $f_i : s_{i_1} \times s_{i_2} \times \dots \times s_{i_k} \rightarrow s_{i_0}$ parciális leképezés
 - (*művelet : argumentum szortok \rightarrow target szortok*)
- Argumentum szortok (miből): $s_{i_1} \times s_{i_2} \times \dots \times s_{i_k}, \quad k \geq 0$
- Target szort (mibe): s_{i_0}

Lényeg: a műveletek szortokból szortokba képeznek le

Szignatúra algebra

- Ez az ami jelentést rendel a szignatúrához
- Programozási nyelvekben ez a definíciónak (implementációnak) felel meg
- Az ADT lehetséges implementációját modellezi le
- $\Sigma = (S, OP)$ szignatúrához tartozó algebra: $\Sigma_A = (S_A, OP_A)$
 - $S_A = \{A_{s_0}, A_{s_1}, \dots, A_{s_n}\}$: szortok, amikhez jelentések is tartoznak (*hordozó halmaz*)
 - $OP_A = \{f_0, f_1, \dots, f_m\}$: műveletek, amikhez jelentések is tartoznak (*függvények*)
 - A f_i művelet: egy $f_i : A_{s_{i_1}} \times A_{s_{i_2}} \times \dots \times A_{s_{i_k}} \rightarrow A_{s_{i_0}}$ parciális leképezés
 - $k = 0$ esetén f_i az $A_{s_{i_0}}$ szort konstansa
- Szortok neveihez \leftarrow hordozó halmazt rendel
- Műveletek neveihez \leftarrow függvényeket rendel

2. Adattípus specifikációja

- Szignatúra és szignatúra algebra: lehet, hogy van két különböző módon viselkedő szignatúra algebra!
- Hogyan adjunk szemantikát ezekhez? Specifikációval.
- Specifikáció: szerződés a felhasználó és a megvalósító között
 - Legyen a lehető legáltalánosabb, hogy ne korlátozza a megvalósítást!

Absztrakt adattípus specifikációja

Specifikáció: $SPEC = (\sum, E)$ (alternatív jelölés: $SPEC = (S, OP, E)$)

- \sum : szignatúra
- E : műveletek szemantikáját meghatározó specifikáció

Absztrakt adattípus specifikációk fajtái

1. Állapot elvű specifikáció (Hoare-féle módszer)

- Műveletek elő- és utófeltételeinek halmaza
- $\{\varphi\}P\{\psi\}$
 - φ : előfeltétel
 - P : program
 - ψ : utófeltétel

2. Procedurális specifikáció

- Műveletek kiszámítási szabályainak halmaza
- Függvény jelentésének, kiszámítási szabályának pszeudokód-szerű definiálása

3. Axiomatikus specifikáció (algebrai specifikáció)

- Eljárás jelentését meghatározó logikai állítások
- Függvények jelentését axiómákban írjuk le
- Axiómákat rendszerint predikátumokkal adjuk meg

Szignatúra algebrák közötti homomorfizmus

(*morfizmus: leképezés*)

- Alaphalmazok (S) és műveletek (OP)
- Legyen két szignatúra algebra:
 - $\sum_A = (S_A, OP_A)$ és $\sum_B = (S_B, OP_B)$

$h : A \rightarrow B$ egy függvénycsalád

1. Minden S -beli s szorra $h_s : A_s \rightarrow B_s$
 - azaz A szortját $\rightarrow B$ megfelelő szortjára képezi le
2. $\forall f_{A_i}$ és $\forall (A_{s_{i_1}}, A_{s_{i_2}}, \dots, A_{s_{i_k}})$ esetén: f_{B_i} megfelelő f_{A_i} -nek
 - úgy, hogy $h_{s_{i_0}}(f_{A_i}(A_{s_{i_1}}, A_{s_{i_2}}, \dots, A_{s_{i_k}})) = f_{B_i}(h_{s_{i_1}}(A_{s_{i_1}}), \dots, h_{s_{i_k}}(A_{s_{i_k}}))$
 - előző laikusán: A -n való homomorfizmus végrehajtása (formula bal oldala) után B az A leképezéseit fogja tartalmazni (formula jobb oldala)

Szignatúra algebra homomorfizmusok speciális esetei

1. Átnevezés
 - szignatúra szortjainak és műveleteinek átnevezése
2. Bővítés
 - szignatúra bővítése új szortokkal és műveletekkel
 - új szignatúra definíció a korábbi átvételével
3. Új ábrázolás
 - szignatúra átvétele, meglévő szortok helyére más szortokból képzett ábrázolások

Szignatúra algebra izomorfizmus

- 1-1 leképezés A és B között
- Jelölés: $A \simeq B$ (A izomorf B -vel)
 - (szürjektív: minden B -beli elemhez kapcsolódik valaki)
 - (injektív: minden A -beli elem különböző B -beli elemhez kapcsolódik)
 - (bijektív: egyszerre szürjektív és injektív)
- Ha egy homomorfizmus bijektív \implies akkor **izomorfizmusról** beszélünk
- Az izomorf algebraik azonosak egymással (átnevezést leszámítva)

Adattípus szignatúra algebrai megközelítésben

- Izomorfikus \sum szignatúra algebraik ekvivalencia osztálya:

$$\text{osztály}[A] = \{B \in \text{Alg}(\sum) : B \simeq A\}$$

ahol

- $[A]$: ekvivalencia osztály
- $B \in \text{Alg}(\sum)$: B az $\text{Alg}(\sum)$ szignatúra algebra része
- $B \simeq A$: B izomorf A -val

Monomorfikus és polimorfikus absztrakt típus

- **Monomorfikus**
 - Egyetlen adattípus tudja megvalósítani
 - Minden eleme izomorf
 - Csak egy ekvivalencia osztály van benne
- **Polimorfikus**
 - Több adattípus tudja megvalósítani
 - Absztrakt adattípus nem monomorfikus
 - Több ekvivalencia osztály is van benne

Specifikáció homomorfizmus

Szignatúra algebra homomorfizmus kiterjesztése a $SPEC = (\Sigma, E)$ specifikációban lévő műveleti szemantikát leíró E specifikációban lévő

- változókra
- és kifejezésekre

Specifikáció változói és kifejezései leképezhetők \rightarrow másik specifikáció változóira és kifejezéseire

3. Adattípus osztály specifikációja

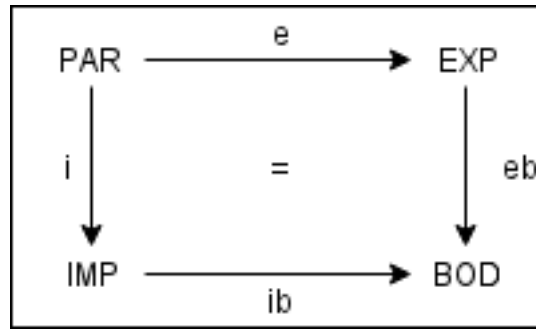


Figure 1: Adattípus osztály morfizmus diagramja

Specifikációk

- PAR : formális paraméterek tulajdonságainak specifikációja
 - paraméteres specifikáció esetén a specifikáció részei csak akkor lesznek meghatározva \implies amikor formális paraméterekkel példányosítjuk a specifikációt (*gondolj konstruktorra*)
- EXP : export felület specifikációja
 - $EXP = PAR + (S_1, OP_1, E_1)$
 - rajta értelmezett műveletek szintaxisának és szemantikájának definíciója
 - kitüntetett szortú specifikáció (*kitüntetett szort: szort ami az adattípus elemeit azonosítja*): $EXP = (S_{EXP}, OP_{EXP}, E_{EXP})$
- IMP : import felület specifikációja
 - $IMP = PAR' + (S_2, OP_2, E_2)$
 - más osztályból átvett szolgáltatások tulajdonságainak leírása
- BOD : törzsrész specifikációja
 - $BOD = IMP + eb(EXP)$
 - típusosztály megvalósítása, adatok reprezentálásának definíciója
 - modul rejtett része, szortok, műveletek axiómái
 - kitüntetett szortú specifikáció: $BOD = (S_{BOD}, OP_{BOD}, E_{BOD})$

Morfizmusok

- e : specifikációmorfizmus PAR -ból EXP -re
 - tartalmazást jelent
- i : specifikációmorfizmus PAR -ból IMP -re
 - tartalmazást és átnevezést jelent
- ib : specifikációmorfizmus IMP -ből BOD -ra
 - tartalmazást jelent
- eb : kitüntetett szortú specifikációmorfizmus EXP -ből BOD -ra
 - reprezentációt, objektumok ábrázolásával együtt megvalósuló tartalmazást jelent

Az adattípus osztályspecifikációjának részei és “szabályai”: adattípus osztály interfésze, konstrukciós része, megnyilvánulási aspektus része, megvalósítás része

1. Interfész

- osztálynév ($name$)
- paraméter felület (PAR)
- export felület (EXP)
- import felület (IMP)

2. Konstrukciós rész

- import felület (IMP)
- törzsrész (BOD)

3. Megnyilvánulási aspektus rész

- export felület (EXP)
- import felület (IMP)

4. Megvalósítás

- törzsrész (BOD)

4. Paraméterátadás, annak jelentése és morfizmus diagramja

Paraméteres specifikáció

- Specifikáció egyes részei akkor lesznek meghatározva \implies ha formális paraméterekkel példányosítjuk a specifikációt

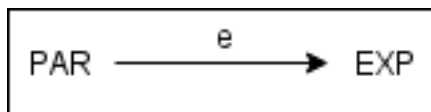


Figure 2: Paraméterátadás morfizmus diagramja

- *PAR*: paraméter specifikáció, paraméterek tulajdonságai
- *e*: specifikáció morfizmus
 - paraméterek specifikációjából \rightarrow export specifikációba
- *EXP*: export specifikáció
 - kitüntetett szortú specifikáció

Programozási nyelvekben: template-ek (C++) és generikus típusok (Java, C#)

5. Reprezentációs függvény

Adva egy adattípus absztrakt és konkrét specifikációja:

$$\begin{aligned}
 d_a &= (A, F, E_a); & d_c &= (C, G, E_c); \\
 A &= \{A_0, \dots, A_n\}; & C &= \{C_0, \dots, C_m\}; \\
 F &= \{f_0 \rightarrow A_0, \dots, f_i : A_j \dots A_k \rightarrow A_l, \dots\}; & G &= \{g_0 : \rightarrow C_0, \dots, g_i : C_j \dots C_k \rightarrow C_l, \dots\};
 \end{aligned}$$

ahol

- d_a : adattípus absztrakt specifikációja
- d_c : adattípus konkrét specifikációja
- A : absztrakt szortnevek
- C : konkrét szortnevek
- F : absztrakt műveletek
- G : konkrét műveletek

Absztrakt és konkrét objektumok egymáshoz való viszonya:

$$\begin{aligned}
 \varphi &: C \rightarrow A \\
 \varphi &= (\varphi_0, \dots, \varphi_n)
 \end{aligned}$$

ahol

$$\varphi_0 : C_0 \rightarrow A_0; \varphi_1 : C_1 \rightarrow A_1; \dots; \varphi_n : C_n \rightarrow A_n;$$

A C objektumhalmazt az A objektumhalmaz egy reprezentánsának nevezzük az adott φ mellett

- ha minden $a \in A$ objektumnak létezik legalább egy $c \in C$ reprezentánsa
- azaz $a = \varphi(c)$.

Ennek jelentősége kettős specifikációnál: eb megmondja hogyan reprezentáljuk IMP -el $PAR + EXP$ -et

6. Típusöröklés

- Az öröklődéssel létrehozott osztály objektuma
- Helyettesítheti az eredeti osztály, a szuperosztály (superclass) megfelelő objektumát
- Öröklődés során azonban a szuperosztály leképezései (publikus metódusai) újradefiniálhatók
 - de csak úgy, hogy azok szintaktikai formája ne változzon meg.

Típusöröklődés definíciója:

- Adva $C = (PAR, EXP, IMP, BOD, e, i, eb, ib)$ osztállyspecifikáció
- Adva $C' = (PAR', EXP', IMP', BOD', e', i', eb', ib')$ osztállyspecifikáció

Adva $f_s = (f_{S_P}, f_{S_E})$ morfizmus:

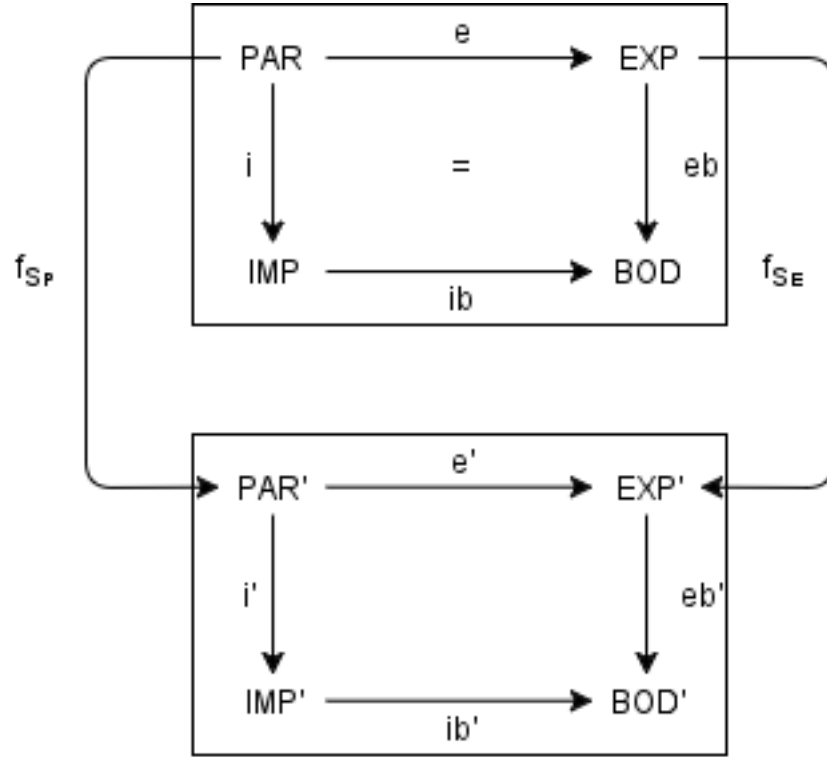


Figure 3: Öröklődés morfizmus diagramja

úgy, hogy

- $e' \circ f_{S_P} = f_{S_E} \circ e$
- $pt(EXP') = f_{S_E}(pt(EXP))$

Morfizmus során az operációk szintaktikai formája megőrződik

7. Liskov féle szubsztitúciós elv

Más néven: szemantikai öröklődési követelmény

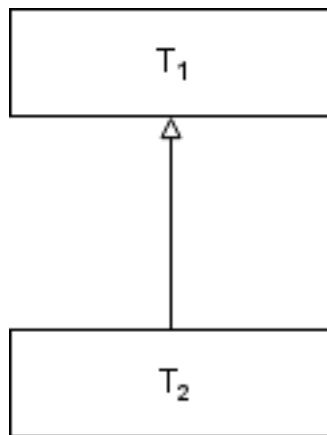


Figure 4: Szemantikai öröklődés T_1 -ből T_2 -be

Ha a T_1 típusnak minden o_1 objektumához létezik a T_2 típusnak egy olyan o_2 objektuma, amelyre igaz a következő:

- minden olyan P programban amely T_1 típusú termként van definiálva,
- a P program viselkedése nem változik meg, valahányszor az o_1 objektumot o_2 objektumra cseréljük ki,

\implies akkor a T_2 a T_1 típus altípusa!

8. További források

- Előadás diasor