高等数学（上）重要知识点归纳

第一章 函数、极限与连续

一、极限的定义与性质

1、定义（以数列为例）

$\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a \Leftrightarrow \forall\varepsilon>0, \exists N,$ 当 $n>N$ 时，$|x_n - a| < \varepsilon$

2、性质

(1) $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = A \Leftrightarrow f(x) = A + \alpha(x)$，其中 $\alpha(x)$ 为某一个无穷小。

(2)(保号性）若 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = A > 0$，则 $\exists\delta>0,$ 当 $x\in \mathring{U}(x_0,\delta)$ 时，$f(x)>0$。

(3)*无穷小乘以有界函数仍为无穷小。

二、求极限的主要方法与工具

1、*两个重要极限公式 **(1)** $\lim\limits_{\Delta\to 0}\dfrac{\sin\Delta}{\Delta}=1$ **(2)** $\lim\limits_{\Diamond\to\infty}(1+\dfrac{1}{\Diamond})^{\Diamond}=e$

2、两个准则 **(1) *夹逼准则**

$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1!+2!+\cdots+n!}{n!}$ $\int_0^{\frac{\pi}{2}}\dfrac{1}{1+(\tan x)^{\sqrt{3}}}dx$

(2)单调有界准则

3、*等价无穷小替换法

常用替换：当 $\Delta\to 0$ 时

（1） $\sin\Delta\sim\Delta$ **（2）** $\tan\Delta\sim\Delta$

（3） $\arcsin\Delta\sim\Delta$ **（4）** $\arctan\Delta\sim\Delta$

（5） $\ln(1+\Delta)\sim\Delta$ **（6）** $e^{\Delta}-1\sim\Delta$

（7）$1-\cos\Delta\sim\frac{1}{2}\Delta^2$　　（8）$\sqrt[n]{1+\Delta}-1\sim\frac{\Delta}{n}$

4、分子或分母有理化法　5、分解因式法　6 用定积分定义

三、无穷小阶的比较*　　高阶、同阶、等价

四、连续与间断点的分类

1、连续的定义*

$f(x)$ 在 a 点连续

$$\Leftrightarrow \lim_{\Delta x\to 0}\Delta y=0 \Leftrightarrow \lim_{x\to a} f(x)=f(a) \Leftrightarrow f(a^+)=f(a^-)=f(a)$$

2、间断点的分类

- 第一类
  - 可去型（极限存在）
  - 跳跃型（左右极限存在但不相等）
- 第二类
  - 无穷型（极限为无穷大）
  - 震荡型（来回波动）
  - 其他

3、曲线的渐近线*

(1)水平渐近线：若 $\lim_{x\to\infty} f(x)=A$,则存在渐近线：$y=A$

(2)铅直渐近线：若 $\lim_{x\to a} f(x)=\infty$,则存在渐近线：$x=a$

五、闭区间连续函数性质

1、最大值与最小值定理

2、介值定理和零点定理

第二章 导数与微分

一、导数的概念

1、导数的定义*

$$y'|_{x=a}=f'(a)=\frac{dy}{dx}|_{x=a}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(a+\Delta x)-f(a)}{\Delta x}=\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}$$

2、左右导数

左导数 $f'_{-}(a)=\lim\limits_{\Delta x\to 0^{-}}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim\limits_{x\to a^{-}}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}$

右导数 $f'_{+}(a)=\lim\limits_{\Delta x\to 0^{+}}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim\limits_{x\to a^{+}}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}$

3、导数的几何意义*

$y'|_{x=a}=$曲线$f(x)$在点（$a,f(a)$)处的切线斜率k

4、导数的物理意义

若运动方程：$s=s(t)$则$s'(t)=v(t)$(速度),$s''(t)=v'(t)=a(t)$(加速度)

5、可导与连续的关系: 可导$\rightarrow$连续，反之不然。

二、导数的运算

1、四则运算 $(u\pm v)'=u'\pm v'$ $(uv)'=u'v+uv'$ $(\frac{u}{v})'=\frac{u'v-uv'}{v^2}$

2、复合函数求导 设$y=f[\varphi(x)]$，一定条件下$\frac{dy}{dx}=\frac{dy}{du}\frac{du}{dx}=y'_u u'_x$

3、反函数求导 设$y=f(x)$和$x=f^{-1}(y)$互为反函数，一定条件下：$y'_x=\frac{1}{x'_y}$

4、求导基本公式*（要熟记）

5、隐函数求导* 方法：在$F(x,y)=0$两端同时对x求导，其中要注意到：y是中间变量，然后再解出y'

6、参数方程确定函数的求导* 设$\begin{cases}x=x(t)\\ y=y(t)\end{cases}$，**一定条件下**

$$y'_x=\frac{dy}{dx}=\frac{y'_t}{x'_t},\quad y''_x=\frac{dy'_x}{dx}=\frac{(\frac{y'_t}{x'_t})'_t}{x'_t}=\frac{y''_tx'_t-y'_tx''_t}{(x'_t)^3}$$ **（可以不记）**

7、常用的高阶导数公式

（1） $\sin^{(n)}x=\sin(x+\frac{n}{2}\pi),(n=0,1,2...)$

（2） $\cos^{(n)}x=\cos(x+\frac{n}{2}\pi),(n=0,1,2...)$

（3） $\ln^{(n)}(1+x)=(-1)^{n-1}\frac{(n-1)!}{(1+x)^n},(n=12...)$

（4） $(\frac{1}{1+x})^n=\frac{(-1)^n n!}{(1+x)^{n+1}},(n=0,1,2...)$

（5）（莱布尼茨公式）$(uv)^{(n)}=\sum_{k=0}^{n}C_n^k u^{(n-k)}v^{(k)}$

三、微分的概念与运算

1、微分定义 *

若$\Delta y=A\Delta x+o(\Delta x)$**，则**$y=f(x)$**可微，记**$dy=A\Delta x=Adx$

2、公式： $dy=f'(x)\Delta x=f'(x)dx$

3、可微与可导的关系* 两者等价

4、近似计算 当$|\Delta x|$较小时，$\Delta y\approx dy$， $f(x)\approx f(x+\Delta x)+f'(x)\Delta x$

第三章 导数的应用

一、微分中值定理*

1、柯西中值定理*

(1) $f(x)$、$g(x)$在$[a,b]$上连续

(2) $f(x)$、$g(x)$在(a,b)内可导

(3) $g(x)\neq 0$,则:

$\exists\xi\in(a,b)$,使得:$\dfrac{f'(\xi)}{g'(\xi)}=\dfrac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}$

当取$g(x)=x$时，定理演变成:

2、拉格朗日中值定理*

$\exists\xi\in(a,b)$,使得:$f'(\xi)=\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}\Leftrightarrow f(b)-f(a)=f'(\xi)(b-a)$

当加上条件$f(a)=f(b)$则演变成:

3、罗尔定理* $\exists\xi\in(a,b)$,使得:$f'(\xi)=0$

4、泰勒中值定理:在一定条件下:

$$f(x)=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)+\ldots+\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n+R_n(x)$$

其中$R_n(x)=\dfrac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}=o((x-x_0)^n),\xi$**介于**$x_0$、$x$**之间.**

当公式中 n=0 时，定理演变成拉格朗日定理.

当$x_0=0$时，公式变成:

5、麦克劳林公式 $f(x)=f(0)+f'(0)x+\ldots+\dfrac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n+R_n(x)$

6、常用麦克劳林展开式

(1) $e^x=1+x+\dfrac{x^2}{2!}+\ldots+\dfrac{1}{n!}x^n+o(x^n)$

（2）$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} \ldots + \frac{(-1)^{n-1}}{(2n-1)!} x^{2n-1} + o(x^{2n})$

（3）$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} \ldots + \frac{(-1)^n}{(2n)!} x^{2n} + o(x^{2n+1})$

（4）$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} \ldots + \frac{(-1)^{n-1}}{n} x^n + o(x^n)$

二、罗比达法则*

记住：法则仅能对$\frac{0}{0}, \frac{\infty}{\infty}$型直接用，对于$0 \cdot \infty, \infty - \infty, 1^\infty, 0^0, \infty^0$,转化后用.　　幂指函数恒等式* $f^g = e^{g \ln f}$

三、单调性判别*

1、$y' > 0 \Rightarrow y \uparrow$,　$y' < 0 \Rightarrow y \downarrow$

2、单调区间分界点：驻点和不可导点.

四、极值求法*

1、极值点来自：驻点或不可导点（可疑点）.

2、求出可疑点后再加以判别.

3、第一判别法：左右导数要异号，由正变负为极大，由负变正为极小.

4、第二判别法：一阶导等于 0，二阶导不为 0 时，是极值点. 正为极小，负为极大.

五、闭区间最值求法*

找出区间内所有驻点、不可导点、区间端点，比较大小.

六、凹凸性与拐点*

1、$y'' > 0 \Rightarrow y \cup$,　$y'' < 0 \Rightarrow y \cap$

2、拐点：曲线上凹凸分界点(x_0, y_0)**.**

横坐标x_0**不外乎** $f''(x_0)=0,$或$f''(x_0)$不存在**，找到后再加以判别**x_0**附近的二阶导数是否变号.**

七、曲率与曲率半径

1、曲率公式$K=\dfrac{|y''|}{(1+y'^2)^{\frac{3}{2}}}$

2、曲率半径$R=\dfrac{1}{K}$

第四章 不定积分

一、不定积分的概念*

若在区间 I **上，** $F'(x)=f(x)$,亦$dF(x)=f(x)dx$**，**

则称 $F(x)$为$f(x)$的原函数.

称全体原函数 F(x)+c 为 f(x)的不定积分，记为$\int f(x)dx$**.**

二、微分与积分的互逆关系

1、 $[\int f(x)dx]'=f(x)\Leftrightarrow d\int f(x)dx=f(x)dx$

2、 $\int f'(x)dx=f(x)+c\Leftrightarrow\int df(x)=f(x)+c$

三、积分法*

1、凑微分法*

2、第二类换元法

3、分部积分法* $\int udv=uv-\int vdu$

4、常用的基本积分公式(要熟记).

第五章 定积分

一、定积分的定义 $\int_a^b f(x)dx = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \sum\limits_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i$

二、可积的必要条件　有界.

三、可积的充分条件　连续或只有有限个第一类间断点或单调.

四、几何意义　定积分等于面积的代数和.

五、**主要性质***

1、可加性 $\int_a^b = \int_a^c + \int_c^b$

2、估值 在[a,b]上，$m(b-a) \le \int_a^b f(x)dx \le M(b-a)$

3、积分中值定理*

当 f(x)在[a,b]上连续时：$\int_a^b f(x)dx = f(\xi)(b-a), \xi \in [a,b]$

4、函数平均值：$\dfrac{\int_a^b f(x)dx}{b-a}$

六、变上限积分函数*

1、若$f(x)$在$[a,b]$连续，则$F(x)=\int_a^x f(t)dt$可导，且$[\int_a^x f(t)dt]' = f(x)$

2、若$f(x)$在$[a,b]$连续，$\varphi(x)$可导，则:$[\int_a^{\varphi(x)} f(t)dt]' = f[\varphi(x)]\varphi'(x)$

七、牛-莱公式*

若$f(x)$在$[a,b]$连续，则$\int_a^b f(x)dx = [\int f(x)dx]|_a^b = F(b)-F(a)$

八、定积分的积分法*

1、换元法　　牢记：换元同时要换限

2、**分部积分法**　　$\int_a^b udv = uv|_a^b - \int_a^b vdu$

3、特殊积分

（1） $\int_{-a}^{a} f(x)dx=\begin{cases}0,当f(x)为奇函数时\\2\int_{0}^{a} f(x)dx,当f(x)为偶函数时\end{cases}$

（2）当 f(x)为周期为 T 的周期函数时：

$\int_{a}^{a+nT} f(x)dx=n\int_{0}^{T} f(x)dx,n\in Z^{+}$

（3）一定条件下: $\int_{0}^{\pi} xf(\sin x)dx=\frac{\pi}{2}\int_{0}^{\pi} f(\sin x)dx$

（4） $\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}\sin^{n} xdx=\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}\cos^{n} xdx=\begin{cases}\frac{(n-1)!!}{n!}，n是正奇数时\\\frac{(n-1)!!}{n!!}\frac{\pi}{2}，n是正偶数时\end{cases}$

（5） $\int_{0}^{\pi}\sin^{n} xdx=2\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}\sin^{n} xdx$

九、反常积分*

1、无穷区间上

$\int_{a}^{+\infty} f(x)dx=\lim_{x\to+\infty}\int_{a}^{x} f(t)dt=F(x)|_{a}^{+\infty}=F(+\infty)-F(a)$ **其他类似**

2、p 积分： $\int_{a}^{+\infty}\frac{1}{x^{p}}dx(a>0):\begin{cases}p>1时收敛\\p\le 1时发散\end{cases}$

3、瑕积分：若 a 为瑕点：

则 $\int_{a}^{b} f(x)dx=\lim_{x\to a^{+}}\int_{x}^{b} f(t)dt=F(x)|_{a^{+}}^{b}=F(b)-F(a^{+})$ **其他类似处理**

第六章　定积分应用

一、几何应用

1、面积

（1）$A=\int_a^b(y_{上}-y_{下})\ dx$

$A=\int_a^b(x_{右}-x_{左})\ dy$

（2）$C:\begin{cases}x=x(t)\\y=y(t)\end{cases},(\alpha\le t\le\beta)$,则 $A=\int_\alpha^\beta|y(t)x'(t)|dt$

（3）$C:\rho=\rho(\theta)$,与$\theta=\alpha$，$\theta=\beta$，（$\alpha\le\theta\le\beta$)围成图形面积

$\mathrm{A}=\frac{1}{2}\int_\alpha^\beta\rho^2(\theta)\ d\theta$

2、体积*

（1）**旋转体体积***$V_x=\pi\int_a^b y^2dx\quad V_y=\pi\int_c^d x^2dy$　**或**$V_y=2\pi\int_a^b xy\ dx$

（2）**截面面积为**$A=A(x)$**的立体体积为**$V=\int_a^b A(x)dx$

3、弧长

（1）$s=\int_a^b\sqrt{1+y'^2}dx(a\le x\le b)$

（2）$s=\int_\alpha^\beta\sqrt{x'^2(t)+y'^2(t)}dt,(\alpha\le t\le\beta)$

（3）$s=\int_\alpha^\beta\sqrt{\rho^2+\rho'^2}d\theta,(\alpha\le\theta\le\beta)$

二、物理应用

1、变力作功

一般地：先求功元素：$dw=F(x)dx,x\in[a,b]$**，再积分** $w=\int_a^b F(x)dx$

克服重力作功的功元素 dw=体积$\times\rho\times g\times$**位移**

2、水压力

dP=水深$\times$**面积**$\times\rho\times g$

第七章　微分方程

一、可分离变量的微分方程

形式： $\frac{dy}{dx}=f(x)g(y)$ **or**

$$M_1(x)M_2(y)\,\mathrm{d}x+N_1(x)\ N_2(y)\,\mathrm{d}y=0$$

二、齐次微分方程*

形式： $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\varphi(\frac{y}{x})$

$$y^2\mathrm{d}x+(2x^2-xy)\mathrm{d}y=0$$

二、一阶线性微分方程*

1、线性齐次： $y'+p(x)y=0$

通解公式*： $y=Ce^{-\int p(x)dx}$

2、线性非齐次 $y'+p(x)y=q(x)$

通解公式*： $y=e^{-\int p(x)dx}[\int e^{\int p(x)dx}q(x)dx+C)$