第二节
二元函数的极限与连续

一、二元函数的极限

二、二元函数的连续性

一、二元函数的极限

定义 1　设点 $P_0(x_0,y_0)$ 为二元函数 $f(x,y)$ 的定义域 D 的聚点，A 为常数. 若对任意的 $\varepsilon>0$，总存在 $\delta>0$，使得当点

$P(x,y)\in D\bigcap \overset{o}{U}(P_0,\delta)$，即

$$0<\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}<\delta\text{，且 } P(x,y)\in D$$

时，恒有 $|f(x,y)-A|<\varepsilon$，就称常数 A 是当 $(x,y)\to(x_0,y_0)$ 时二元函数 $f(x,y)$ 的极限，记为

$$\lim_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}} f(x,y)=A \text{ 或 } \lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y)=A.$$

例1. 设 $f(x,y)=(x^2+y^2)\sin\dfrac{1}{x^2+y^2}\quad (x^2+y^2\neq 0)$

求证: $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} f(x,y)=0.$

要证内容

证: $\because\ \left|(x^2+y^2)\sin\dfrac{1}{x^2+y^2}-0\right|\le x^2+y^2$

$\therefore\ \forall\varepsilon>0$,取$\boldsymbol{\delta}=\sqrt{\boldsymbol{\varepsilon}}$, 当$0<\rho=\sqrt{x^2+y^2}<\delta$ 时, 总有

$$|f(x,y)-0|\le x^2+y^2<\delta^2=\varepsilon$$

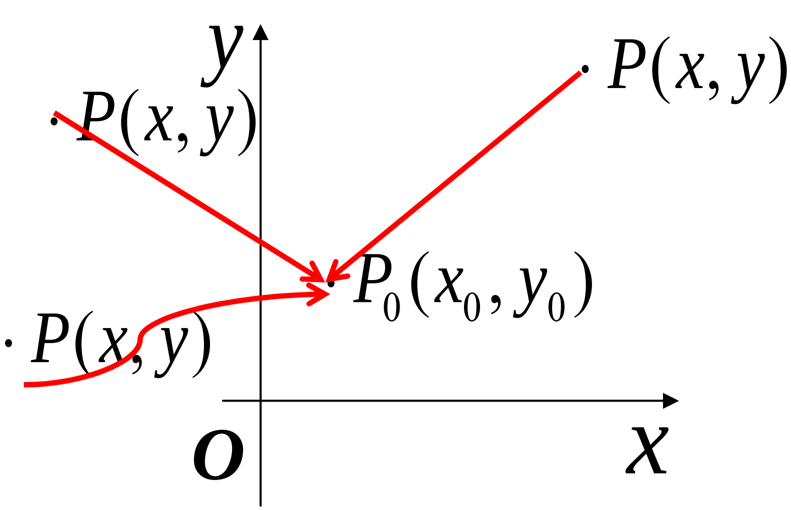
故 $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} f(x,y)=0$

对于一元函数极限 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$ 而言，$x\to x_0$ 通常可转化为

$x\to x_0^-$ 和 $x\to x_0^+$ 两种方式，即两条路径。

对于二元函数极限 $\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}} f(x,y)=A$ 而言，$(x,y)\to(x_0,y_0)$

却有无穷多种方式，即有无穷多条路径。



如果动点 (x,y) 沿任意路径趋于定点 (x_0,y_0) 时，$f(x,y)$ 都趋于同一个数值 A，则有 $\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}} f(x,y)=A$。

注：若当动点$P(x,y)$以两种不同路径趋于定点(x_0,y_0)时，函数趋于两个不同数值，则函数极限不存在．

例2. 讨论函数$f(x,y)=\dfrac{xy}{x^2+y^2}$在点$(0,0)$的极限.

解：由于

$$\lim_{\substack{y=0\\x\to 0}} f(x,y)=\lim_{x\to 0} f(x,0)=\lim_{x\to 0}\frac{x\cdot 0}{x^2+0^2}=\lim_{x\to 0}0=0$$

$$\lim_{\substack{y=x\\x\to 0}} f(x,y)=\lim_{x\to 0} f(x,x)=\lim_{x\to 0}\frac{x\cdot x}{x^2+x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{1}{2}=\frac{1}{2}$$

且$0\neq\dfrac{1}{2}$，故$f(x,y)$在**(0,0)**点极限，即

$$\lim_{\substack{x\to 0\\y\to 0}} f(x,y)=\lim_{\substack{x\to 0\\y\to 0}}\frac{xy}{x^2+y^2}$$ 不存在．

此例为经典例题，记住结论！以后会反复运用.

常见求 $\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}} f(x,y)=A$ 的方法：

(1) 利用夹逼定理;

(2) 利用有界函数乘以无穷小仍为无穷小;

(3) 等价无穷小代换;

(4) 二元函数的连续性（即将介绍）;

(5) 四则运算;

(6) 通过简单的变量代换，将二元函数极限转化为一元函数极限。

例 3. $\lim\limits_{\substack{x\to0\\y\to0}} x\sin\dfrac{1}{x^2+y^2}=0$.

有界函数乘以无穷小仍为无穷小

例 4. $\lim\limits_{\substack{x\to0\\y\to0}}\dfrac{\sin(x^2+y^2)}{x^2+y^2}\overset{令t=x^2+y^2}{=}\lim\limits_{t\to0^+}\dfrac{\sin t}{t}=1$.

或 $\lim\limits_{\substack{x\to0\\y\to0}}\dfrac{\sin(x^2+y^2)}{x^2+y^2}\overset{等价无穷小代换}{=}\lim\limits_{\substack{x\to0\\y\to0}}\dfrac{x^2+y^2}{x^2+y^2}=\lim\limits_{\substack{x\to0\\y\to0}}1=1$.

例 5. 求 $\lim\limits_{\substack{x\to0\\y\to0}}\dfrac{x^2y}{x^2+y^2}$。

解：由于 $0\le\left|\dfrac{x^2y}{x^2+y^2}\right|=\left|\dfrac{x^2}{x^2+y^2}\right||y|\le|y|$，且

$\lim\limits_{\substack{x\to0\\y\to0}}0=\lim\limits_{\substack{x\to0\\y\to0}}|y|=0$，所以由夹逼定理 $\lim\limits_{\substack{x\to0\\y\to0}}\dfrac{x^2y}{x^2+y^2}=0$.

将二元函数极限转化为一元函数极限时，有时该方法效果很明显，但是，也存在着一些误区．如下列关系并不总是成立的．

$$\lim_{\substack{x\to x_0\\y\to y_0}} f(x,y)=\lim_{y\to y_0}(\lim_{x\to x_0} f(x,y)),\quad \lim_{\substack{x\to x_0\\y\to y_0}} f(x,y)=\lim_{x\to x_0}(\lim_{y\to y_0} f(x,y)).$$

例 6　设 $f(x,y)=\begin{cases} x\sin\dfrac{1}{y}+y\sin\dfrac{1}{x}, & xy\neq 0,\\ 0, & xy=0.\end{cases}$ 可以证明 $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\y\to 0}} f(x,y)=0$.

但由于当 $y\neq 0$ 时，$\lim\limits_{x\to 0} f(x,y)=\lim\limits_{x\to 0}(x\sin\dfrac{1}{y}+y\sin\dfrac{1}{x})$ 不存在，

因此 $\lim\limits_{y\to 0}(\lim\limits_{x\to 0} f(x,y))$ 不存在，同理 $\lim\limits_{x\to 0}(\lim\limits_{y\to 0} f(x,y))$ 也不存在.

定理 1：如果 $\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\y\to y_0}} f(x,y)$, $\lim\limits_{y\to y_0}(\lim\limits_{x\to x_0} f(x,y))$ 和 $\lim\limits_{x\to x_0}(\lim\limits_{y\to y_0} f(x,y))$ 都存在，则三者相等.　　　　（证明从略）

二、二元函数的连续性

定义 2：设点 $P_0(x_0, y_0)$ 为函数 $z = f(x, y)$ 定义域 D 的聚点，且 $P_0(x_0, y_0) \in D$，若 $\lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ y \to y_0}} f(x, y) = f(x_0, y_0)$，就称函数 $z = f(x, y)$ 在点 $P_0(x_0, y_0)$ 处连续。

称 $\Delta x = x - x_0, \Delta y = y - y_0$ 分别为自变量 x, y 在点 $P_0(x_0, y_0)$ 处的增量，$\Delta x, \Delta y$ 不同时为零，$x = x_0 + \Delta x, y = y_0 + \Delta y$，记

$$\Delta z = f(x, y) - f(x_0, y_0) = f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0),$$

故 $z = f(x, y)$ 在点 $P_0(x_0, y_0)$ 处连续

$$\Leftrightarrow \lim_{\substack{x \to x_0 \\ y \to y_0}} [f(x, y) - f(x_0, y_0)] = 0 \quad \Leftrightarrow \lim_{\substack{\Delta x \to 0 \\ \Delta y \to 0}} \Delta z = 0$$

例 7. 讨论函数 $f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{xy}{x^2+y^2}, & (x,y)\neq(0,0),\\ 0, & (x,y)=(0,0)\end{cases}$ 在点 $O(0,0)$ 处的连续性。

参考例2

解：由于 $\lim\limits_{\substack{x\to0\\y\to0}} f(x,y)=\lim\limits_{\substack{x\to0\\y\to0}}\dfrac{xy}{x^2+y^2}$ 不存在，所以 $f(x,y)$ 在点 $O(0,0)$ 处不连续。

例 8. 讨论函数 $f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{x^2y}{x^2+y^2}, & (x,y)\neq(0,0),\\ 0, & (x,y)=(0,0)\end{cases}$ 在点 $O(0,0)$ 处的连续性。

参考例5

解：由于 $\lim\limits_{\substack{x\to0\\y\to0}} f(x,y)=\lim\limits_{\substack{x\to0\\y\to0}}\dfrac{x^2y}{x^2+y^2}=0=f(0,0)$，所以 $f(x,y)$ 在点 $O(0,0)$ 处连续。

若函数$z=f(x,y)$在平面开区域D内每一点处均连续，就称$z=f(x,y)$在开区域D内连续。

设D为闭区域，若函数$z=f(x,y)$在D内连续，且$z=f(x,y)$在D的边界点处也连续，就称$z=f(x,y)$在闭区域D上连续。

二元连续函数的性质:

(1) 二元连续函数的和、差、积、商（分母不为零）均连续。

(2) 二元连续函数的复合函数也是连续函数。

(3) 二元初等函数在其定义区域内（上）是连续函数。

例 9. 函数 $f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{x^2y}{x^2+y^2}, & (x,y)\neq(0,0),\\ 0, & (x,y)=(0,0)\end{cases}$ 在全平面上处处连续。

利用连续性求二元函数的极限:

(1) 若二元函数 $f(x,y)$ 在点 $P_0(x_0,y_0)$ 处连续，则

$$\lim_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}} f(x,y)=f(x_0,y_0)\text{。}$$

(2) 若二元函数 $f(x,y)$ 为二元初等函数，且点 $P_0(x_0,y_0)$ 为其定义域内（上）的一点，则

$$\lim_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}} f(x,y)=f(x_0,y_0)\text{。}$$

例 10. 求 $\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ y\to 0}} \dfrac{\ln(x^2+y+1)}{x^2+y^2}$。

解：由于 $\dfrac{\ln(x^2+y+1)}{x^2+y^2}$ 为二元初等函数，且点 $(1,0)$ 为其定义域内一点，所以

$$\lim_{\substack{x\to 1\\ y\to 0}} \frac{\ln(x^2+y+1)}{x^2+y^2} = \frac{\ln(1^2+0+1)}{1^2+0^2} = \ln 2$$

例 11. $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \dfrac{x^2+y^2}{\sqrt{x^2+y^2+1}-1} = \lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} (\sqrt{x^2+y^2+1}+1)$。

$$= \sqrt{0^2+0^2+1}+1 = 2$$ 。

对照有界闭区间上一元连续函数的性质，我们有

有界闭区域上二元连续函数的性质:

定理 2：如果二元函数 $f(x,y)$ 在有界闭区域 E 上连续，则

(1) （最值定理） $f(x,y)$ 在 E 上必存在最大值 M 和最小值 m。

(2) （有界定理） $f(x,y)$ 在 E 上必有界。

(3) （介值定理） 对于 $\forall C\in[m,M]$, $\exists(\xi,\eta)\in E$, 使得 $f(\xi,\eta)=C$。

(4) （零点定理） 当 $m<0, M>0$ 时， $\exists(\xi,\eta)\in E$, 使得 $f(\xi,\eta)=0$。

二元函数的极限、连续性及其性质可推广到三元及以上的函数上去。

问题集

8/P36. 确定常数 k 的值，使得平面 $y=kz$ 与椭球面 $2x^2+y^2+4z^2=1$ 的交线为圆.

解法1:

由于 $\begin{cases} y=kz \\ 2x^2+y^2+4z^2=1 \end{cases}$

等价于 $\begin{cases} y=kz \\ 2x^2+2y^2+(4-k^2)z^2=1 \end{cases}$

所以，当 $4-k^2=2$ 时，交线为圆.

即 $k=\pm\sqrt{2}$.

反例：设函数 $f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{xy^2}{x^2+y^4}, & x^2+y^2\neq 0,\\ 0, & x^2+y^2=0,\end{cases}$ 则

函数在原点处极限不存在，但沿任一直线逼近原点时极限存在。

证明：当 $\mathrm{P}(x,y)$ 沿直线 $x=0$ 逼近原点时，有

$$\lim_{\substack{x=0\\ y\to 0}} f(x,y)=0$$

当 $\mathrm{P}(x,y)$ 沿直线 $y=kx$ 趋向原点时，有

$$\lim_{\substack{y=kx\\ x\to 0}} f(x,y)=\lim_{\substack{y=kx\\ x\to 0}}\frac{k^2x^3}{x^2+k^4x^4}=\lim_{\substack{y=kx\\ x\to 0}}\frac{k^2x}{1+k^4x^2}=0.$$

当 P(x,y) 沿曲线 $y=x^{\frac{1}{2}}$趋向原点时，有

$$\lim_{\substack{y=kx\\x\to 0}} f(x,y)=\lim_{\substack{y=x^{\frac{1}{2}}\\x\to 0}}\frac{x^2}{x^2+x^2}=\frac{1}{2},$$

故函数在原点处极限不存在。