高等数学 A（上）期中考试

班级 ___________　　　　姓名 ___________　　　　学号 ___________

一、填空题（$6\times 5' = 30'$）

1. 函数 $f(x)=\frac{(e^{\frac{1}{x}}+e)\tan x}{x(e^{\frac{1}{x}}-e)}$在$[-\pi,\pi]$上有_____ 个无穷间断点.

2. 若 $f(x)=\ln\frac{1+x}{1-x}$ ，则$f(x)^{(n)}$=_________.

3. 已知 $x+y+\sin y+1=0$ 确定了隐函数 $y=f(x)$, 求$f''(-1)=$ _________.

4. 设 $f(x)=x^{x+1}+\arctan(x^2+1)$, 则$f'(1)=$ _________.

5. 曲线 $y=\frac{x^3}{x^2-3x+2}$有_____条渐近线.

6. 已知$f'(x_0)=-1$. 则$\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x_0-2x)-f(x_0-x)}{x}=$ _________.

二、(30 分)计算下面极限。

(1). $\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^{\sin x}-e^{x\cos x}}{x-\sin x}$;

(2). $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1}{\sqrt{n^2+1}}+\frac{1}{\sqrt{n^2+2}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{n^2+n}}\right)$

(3). $\lim\limits_{x\to-\infty}x(\sqrt{x^2+1}+x)$;

(4). $\lim\limits_{x\to 0}\frac{3-2e^{\frac{1}{x}}}{3+2e^{\frac{1}{x}}}\cdot\frac{\sin\pi x}{|x|}$;

(5). $\lim\limits_{x\to 0}\frac{x^2\sin\frac{1}{x}+(1+x)^{\frac{1}{x}}-e}{\sin(\sin(\sin x))}$;

(6). $\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{2^x+3^x}{2}\right)^{\frac{1}{e^{\sin x}-1}}$

三、(12 分)讨论函数$f(x)=\begin{cases}x^2\sin\frac{1}{x}, x\neq 0\\ 0, \quad x=0\end{cases}$在 x=0 处的连续性，可导性。求出$f(x)$的导函数并讨论导函数的连续性。

四、(10 分)已知数列$\{x_n\}$满足关系$x_1=\frac{1921}{2021}, x_{n+1}=2x_n-x_n^2(n=1,2,3,\cdots)$，请用单调有界收敛原理求解$\lim\limits_{n\to\infty}x_n$.

五、(13 分)求参数方程$\begin{cases}x=a(t-\sin t)\\ y=a(1-\cos t)\end{cases}$所确定的 y 关于 x 的函数的导数$\frac{dy}{dx}$, $\frac{d^2y}{dx^2}$, $\frac{d^3y}{dx^3}$.

六、(5 分)设函数 f(x)，g(x)在$[a,b]$上连续，在(a,b)内可导，且 $f(a)=f(b)=0$，证明：至少存在一点$\xi\in(a,b)$，使得

$$f'(\xi)+f(\xi)g'(\xi)=0.$$