第四节
空间曲线及其方程

一、空间曲线

二、空间直线

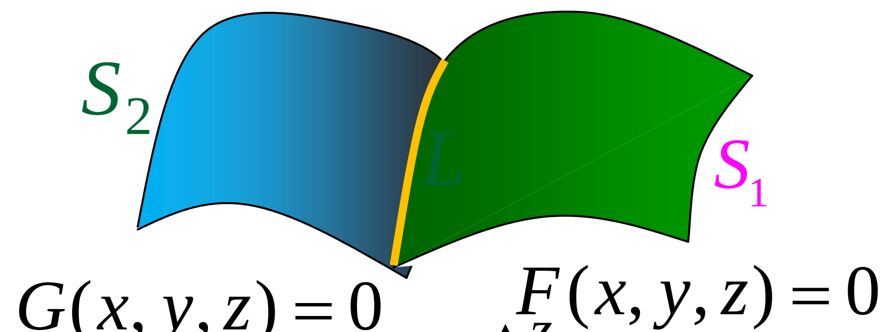
三、平面束方程

一、空间曲线

1. 空间曲线的一般方程

空间曲线可视为两曲面的交线, 其一般方程为方程组

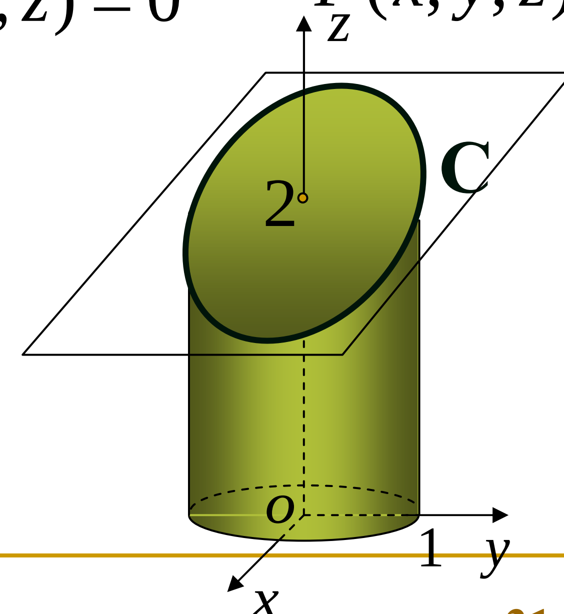
$$\begin{cases} F(x,y,z)=0 \\ G(x,y,z)=0 \end{cases}$$



例如, 方程组

$$\begin{cases} x^2+y^2=1 \\ 2x+3z=6 \end{cases}$$

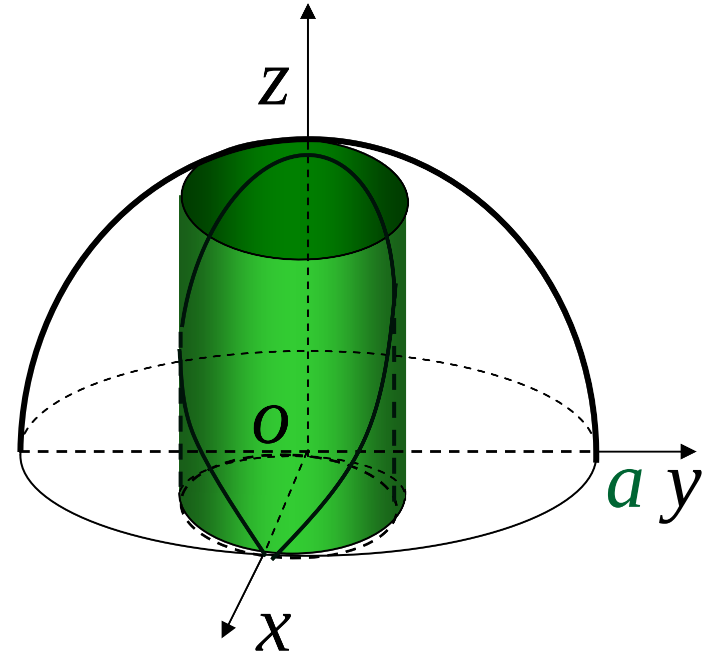
表示圆柱面与平面的交线 C.

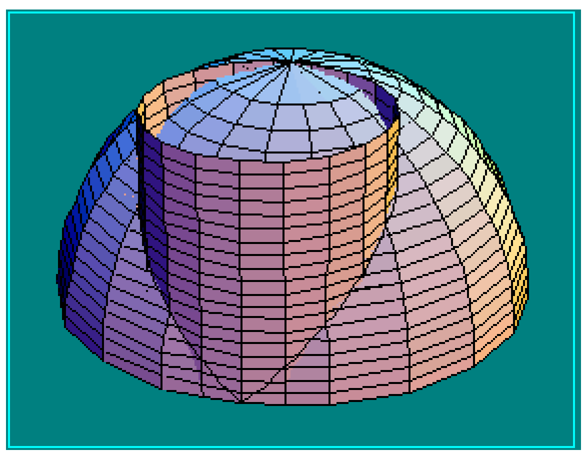


又如, 方程组

$$\begin{cases} z=\sqrt{a^2-x^2-y^2} \\ x^2+y^2-ax=0 \end{cases}$$

表示上半球面与圆柱面的交线C.



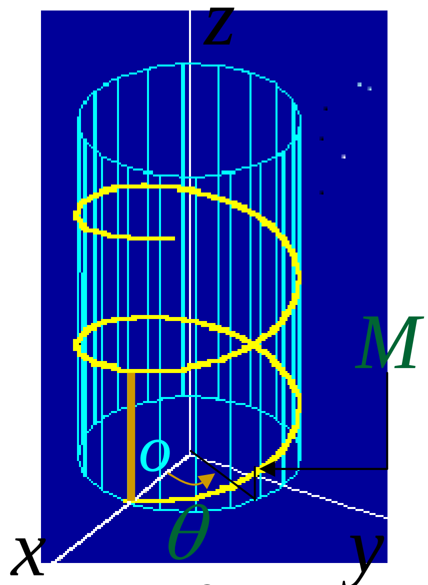


2. 空间曲线的参数方程

将曲线C上的动点坐标 x, y, z 表示成参数 t 的函数:

$$\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \\ z = z(t) \end{cases}$$

称它为空间曲线的参数方程.



例如, 圆柱螺旋线的参数方程为

$$\begin{cases} x = a\cos\omega t \\ y = a\sin\omega t \\ z = vt \end{cases} \xrightarrow{\text{令}\ \theta = \omega t,\ b = \frac{v}{\omega}} \begin{cases} x = a\cos\theta \\ y = a\sin\theta \\ z = b\theta \end{cases}$$

当 $\theta = 2\pi$时,上升高度 $h = 2\pi b$, 称为螺距 .

例1. 将曲线 $\begin{cases} x^2+y^2=1 \\ 2x+3z=6 \end{cases}$ 化为参数方程表示。

解：根据 $x^2+y^2=1$ 引入:

$$x=\cos t, \qquad y=\sin t,$$

并求得

$$z=\frac{1}{3}(6-2\cos t)$$

故所求参数方程为

$$\begin{cases} x=\cos t \\ y=\sin t \\ z=\frac{1}{3}(6-2\cos t) \end{cases} \quad (0\le t\le 2\pi)$$

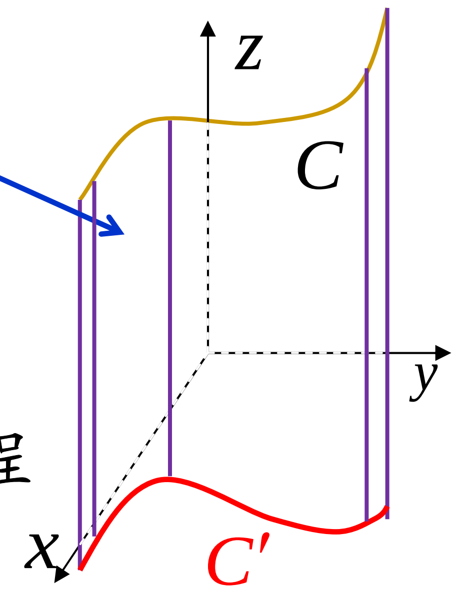
3. 空间曲线在坐标面上的投影曲线

设空间曲线 C 的一般方程为 $\begin{cases} F(x,y,z)=0 \\ G(x,y,z)=0 \end{cases}$

消去 z 得投影柱面 $H(x,y)=0$,

则 C 在 xoy 面上的投影曲线 C' 为

$$\begin{cases} H(x,y)=0 \\ z=0 \end{cases}$$

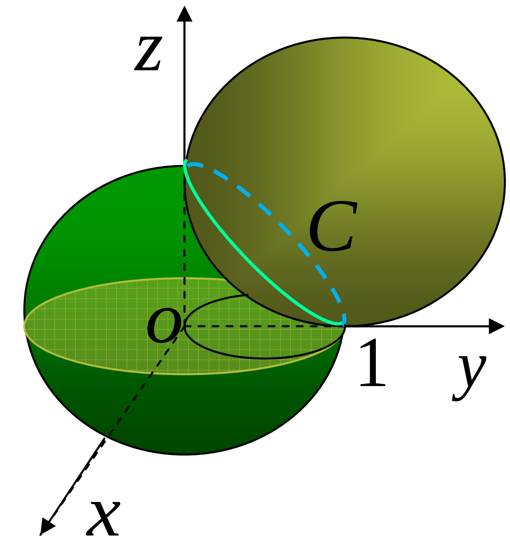


消去 x 得 C 在 yoz 面上的投影曲线方程

$$\begin{cases} R(y,z)=0 \\ x=0 \end{cases}$$

消去 y 得 C 在 zox 面上的投影曲线方程 $\begin{cases} T(x,z)=0 \\ y=0 \end{cases}$

例如，$C:\begin{cases} x^2+y^2+z^2=1 & ① \\ x^2+(y-1)^2+(z-1)^2=1 & ② \end{cases}$



①-②，得 $z=1-y$,

将此代入①，得 C 在xoy 面上的投影曲线方程为

$$\begin{cases} x^2+2y^2-2y=0 \\ z=0 \end{cases}$$

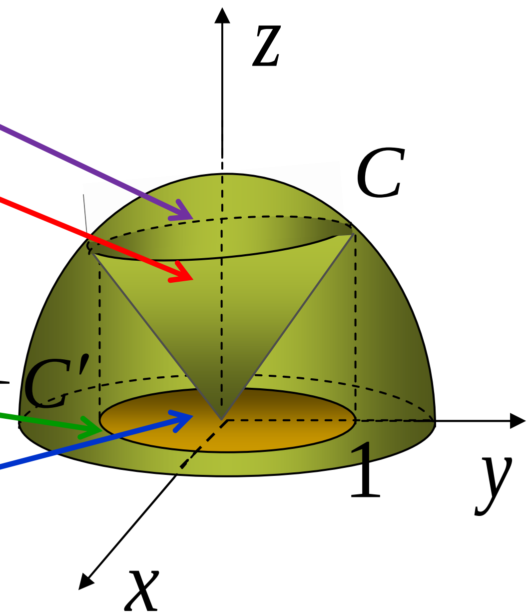
同理得 C 在yoz 面和xoz面上的投影曲线方程分别为

$$\begin{cases} y+z=1, \\ x=0 \end{cases} (0\le y\le 1); \quad \begin{cases} x^2+2z^2-2z=0 \\ y=0 \end{cases}$$

又如，

上半球面 $z=\sqrt{4-x^2-y^2}$ 和上半锥面 $z=\sqrt{3(x^2+y^2)}$ 所围的立体区域在 xoy 面上的投影区域为两者交线在 xoy 面上的投影曲线所围区域.

两者交线 $C:\begin{cases} z=\sqrt{4-x^2-y^2} \\ z=\sqrt{3(x^2+y^2)} \end{cases}$



在 xoy 面上的投影曲线 $C':\begin{cases} x^2+y^2=1 \\ z=0 \end{cases}$

投影区域: $x^2+y^2\le 1,\ z=0.$

二、空间直线

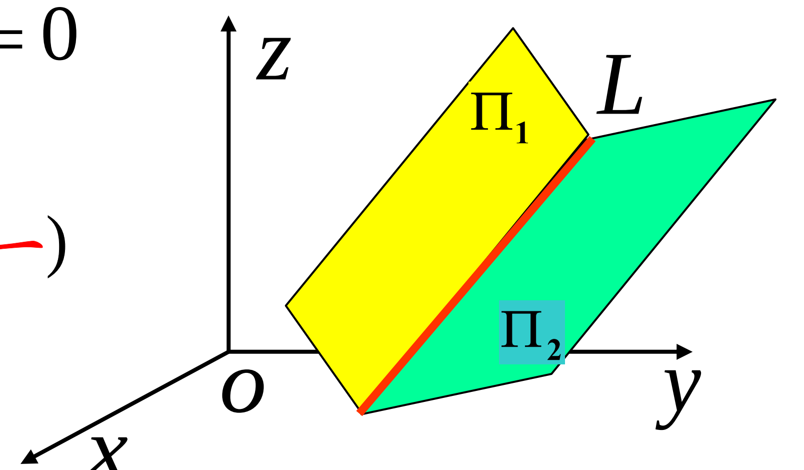
1. 空间直线的方程

(1) 空间直线的一般方程

直线可视为两平面交线，因此其一般方程为

$$\begin{cases} A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0 \\ A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0 \end{cases}$$

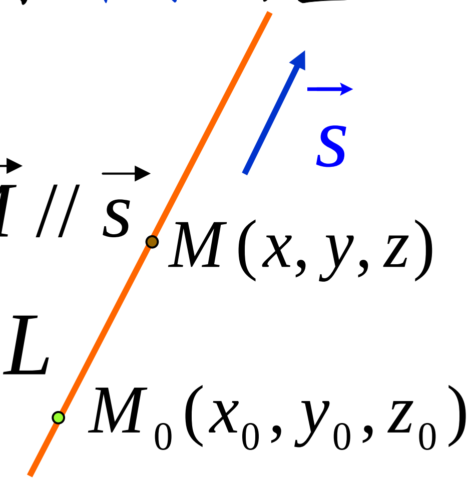
(注意：方程组形式不唯一)



(2) 对称式方程(也称为点向式方程)

已知直线 L过点 $M_0(x_0, y_0, z_0)$，且平行于非零向量 $\vec{s}=\{m, n, p\}$,求直线 L的方程。

取直线上的任一点$M(x, y, z)$，则 $\overrightarrow{M_0M} \,//\, \vec{s}$



故有
$$\frac{x-x_0}{m}=\frac{y-y_0}{n}=\frac{z-z_0}{p}$$

此式称为直线的对称式方程 (也称为点向式方程)。

其中非零向量 $\vec{s}=\{m, n, p\}$ 称为直线 L 的方向向量.

说明: 某些分母为零时, 其分子也理解为零.

例如, 当 $m=n=0,\ p\neq 0$ 时，直线方程为 $\begin{cases} x=x_0 \\ y=y_0 \end{cases}$

(3) 参数方程

令 $$\frac{x-x_0}{m}=\frac{y-y_0}{n}=\frac{z-z_0}{p}=t$$

得参数式方程：

$$\begin{cases} x=x_0+mt \\ y=y_0+nt \\ z=z_0+pt \end{cases} \quad -\infty<t<+\infty$$

注1: 直线的对称式方程与参数式方程可以很方便地转换。

注2: 直线的对称式方程及参数式方程也不惟一。

例2. 用对称式方程及参数方程表示直线

$$\begin{cases} x+y+z+1=0 \\ 2x-y+3z+4=0 \end{cases}$$

解题思路: ① 先找直线上一点;

② 再找直线的一个方向向量.

解: 先在直线上找一点.

令 $\boldsymbol{y}=\mathbf{0}$, 解得 $x=1,\ z=-2,$

故 $(1,0,-2)$ 是直线上一点.

再求直线的一个方向向量 $\vec{s}$.

交已知直线的两平面的法向量分别为

$$\vec{n}_1=\{1,1,1\},\qquad \vec{n}_2=\{2,-1,3\}$$

$\because\ \vec{s}\perp\vec{n}_1,\vec{s}\perp\vec{n}_2$ 故可取

$$\vec{s}=\vec{n}_1\times\vec{n}_2=\begin{vmatrix}\vec{i}&\vec{j}&\vec{k}\\1&1&1\\2&-1&3\end{vmatrix}=\{4,-1,-3\}$$

故所给直线的对称式方程为 $\dfrac{x-1}{4}=\dfrac{y}{-1}=\dfrac{z+2}{-3}$

参数式方程为 $\begin{cases}x=1+4t\\y=-t\\z=-2-3t\end{cases}$

2. 两直线的夹角、直线与平面的夹角

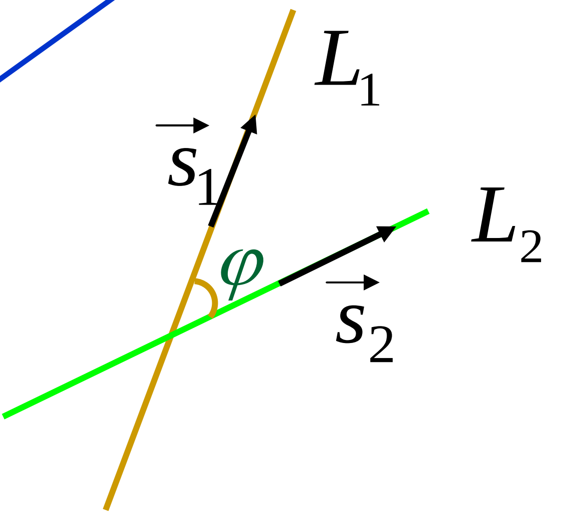
(1) 两直线的夹角

两直线的夹角指其方向向量的夹角(不取钝角)。

设直线 L_1, L_2 的方向向量分别为

$$\vec{s_1}=\{m_1,\ n_1,\ p_1\},\ \vec{s_2}=\{m_2,\ n_2,\ p_2\}$$

则两直线夹角 φ 为



$$\varphi=\arccos\frac{|\vec{s_1}\cdot\vec{s_2}|}{|\vec{s_1}||\vec{s_2}|}$$

$$=\arccos\frac{|m_1m_2+n_1n_2+p_1p_2|}{\sqrt{m_1^2+n_1^2+p_1^2}\sqrt{m_2^2+n_2^2+p_2^2}}$$

特别有:

(i) $L_1 \perp L_2 \iff \vec{s_1} \perp \vec{s_2}$

$\iff m_1 m_2 + n_1 n_2 + p_1 p_2 = 0$

(ii) $L_1 // L_2 \iff \vec{s_1} // \vec{s_2}$

$$\iff \frac{m_1}{m_2} = \frac{n_1}{n_2} = \frac{p_1}{p_2}$$

例3. 求以下两直线的夹角

$$L_1: \frac{x-1}{1}=\frac{y}{-4}=\frac{z+3}{1}; \qquad L_2: \begin{cases} x+y+2=0 \\ x+2z=0 \end{cases}$$

解: 取直线 L_1的方向向量为 $\vec{s}_1=\{1,-4,1\}$

取直线 L_2 的方向向量为 $\vec{s}_2=\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{vmatrix}=\{2,-2,-1\}$

所以二直线夹角φ 的余弦为

$$\cos\varphi=\frac{|1\times 2+(-4)\times(-2)+1\times(-1)|}{\sqrt{1^2+(-4)^2+1^2}\sqrt{2^2+(-2)^2+(-1)^2}}=\frac{\sqrt{2}}{2}$$

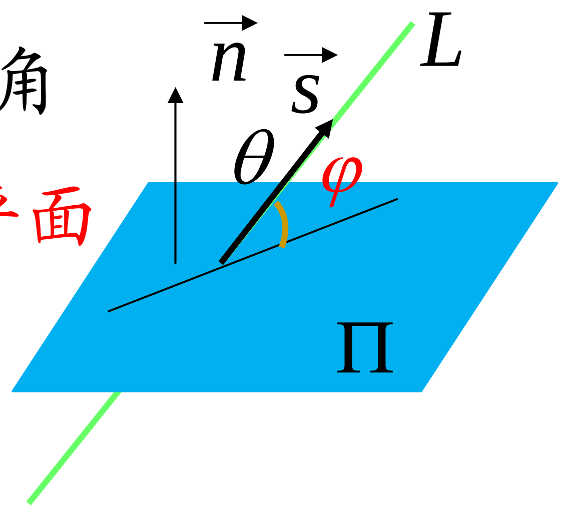
从而 $\varphi=\dfrac{\pi}{4}$

(2) 直线与平面的夹角

设直线 L 的方向向量为 $\vec{s}=\{m,n,p\}$

平面 Π 的法向量为 $\vec{n}=\{A,B,C\}$

设$\vec{s}=\{m,n,p\}$与$\vec{n}=\{A,B,C\}$ 的夹角为 θ（规定 θ 不取钝角），则直线与平面的夹角为$\varphi=\dfrac{\pi}{2}-\theta$，故



$$\sin\varphi=\cos\theta=\frac{|\vec{s}\cdot\vec{n}|}{|\vec{s}||\vec{n}|}$$

$$\varphi=\arcsin\frac{|\vec{s}\cdot\vec{n}|}{|\vec{s}||\vec{n}|}=\arcsin\frac{|Am+Bn+Cp|}{\sqrt{m^2+n^2+p^2}\sqrt{A^2+B^2+C^2}}$$

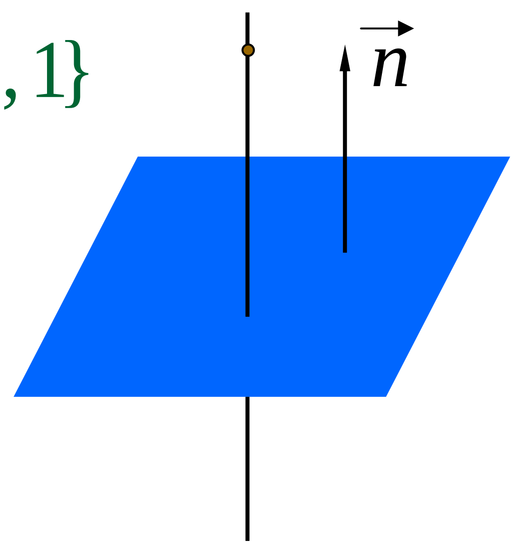
特别有:

(1) $L \perp \Pi \iff \vec{s} // \vec{n} \iff \dfrac{A}{m} = \dfrac{B}{n} = \dfrac{C}{p}$

(2) $L // \Pi \iff \vec{s} \perp \vec{n} \iff Am + Bn + Cp = 0$

例4. 求过点(1, − 2 , 4)，且与平面 $2x - 3y + z - 4 = 0$ 垂直的直线方程.

解: 取已知平面的法向量 $\vec{n} = \{2, -3, 1\}$ 为所求直线的方向向量.

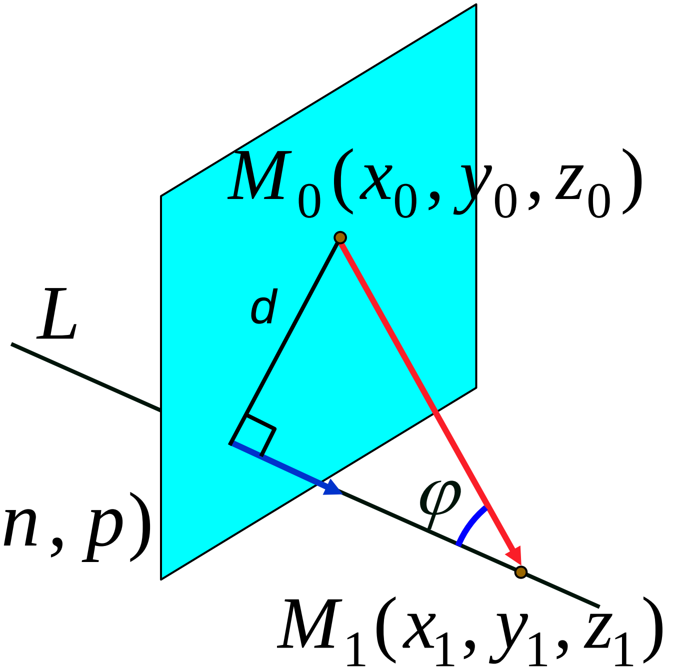


则直线的对称式方程为

$$\frac{x-1}{2} = \frac{y+2}{-3} = \frac{z-4}{1}$$

(3) 点$M_0(x_0,y_0,z_0)$到直线

$$L:\frac{x-x_1}{m}=\frac{y-y_1}{n}=\frac{z-z_1}{p}$$



的距离为

$$d=\frac{|\overrightarrow{M_0M_1}\times\vec{s}|}{|\vec{s}|}\qquad \vec{s}=(m,n,p)$$

$$=\frac{1}{\sqrt{m^2+n^2+p^2}}\left|\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ x_1-x_0 & y_1-y_0 & z_1-z_0\\ m & n & p\end{vmatrix}\right|$$

例 5. 直线 $L:\dfrac{x+3}{-2}=\dfrac{y+4}{-7}=\dfrac{z}{3}$ 与平面 $\pi:4x-2y-2z=3$ 的关系是（　　）.

（A）平行且无交点　　（B）直线 L 在平面 π 上

（C）垂直相交　　（D）相交但不垂直

解：直线 L 的方向向量 $\vec{s}=\{-2,-7,3\}$，平面 π 的法向量 $\vec{n}=\{4,-2,-2\}$，$\vec{s}$ 与 $\vec{n}$ 不平行，排除（C）。又因 $\vec{s}\cdot\vec{n}=-2\times4+(-7)\times(-2)+3\times(-2)=0$，排除（D）。

而直线 L 上的一点 $M(-3,-4,0)$ 不在平面 π 上，故直线 L 与平面 π 平行，且无交点，选（A）.

例 6. 在 xoy 面上求过原点，且与直线 $x = y = z$ 的夹角为 $\frac{\pi}{3}$ 的直线方程.

解：设所求直线L的方程为 $\begin{cases} y = Ax, \\ z = 0, \end{cases}$ 即 $\frac{x}{1} = \frac{y}{A} = \frac{z}{0}$,

直线L的方向向量 $\vec{s} = \{1, A, 0\}$.

所以 $\cos\frac{\pi}{3} = \frac{|1 + A|}{\sqrt{3}\sqrt{1 + A^2}} = \frac{1}{2}$, 故 A$= -4 \pm \sqrt{15}$.

于是，所求直线方程为

$$\begin{cases} y = (-4 + \sqrt{15})x, \\ z = 0, \end{cases} \quad \text{或} \quad \begin{cases} y = (-4 - \sqrt{15})x, \\ z = 0. \end{cases}$$

三、平面束方程

过直线 L 的全体平面称为过直线 L 的平面束.

设直线 L 的一般方程为

$$\begin{cases} A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0, \\ A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0. \end{cases} \qquad (1)$$

其中 A_1, B_1, C_1 与 A_2, B_2, C_2 不成比例. 作含有参数 λ, μ 的方程

$$\boxed{\lambda(A_1x + B_1y + C_1z + D_1) + \mu(A_2x + B_2y + C_2z + D_2) = 0}, \qquad (2)$$

其中参数 λ, μ 为不同时为零的常数.

可以证明，当 λ, μ 的取值任意变化时，由式**(2)**可得过直线 L 的任一平面方程，所以式 **(2)** 为过直线 $\boldsymbol{L}$ 的平面束方程.

有时设含有一个参数λ的方程

$$A_1x+B_1y+C_1z+D_1+\lambda(A_2x+B_2y+C_2z+D_2)=0 \qquad \textbf{(3)}$$

为过直线 L 的平面束方程.

实际上, 式**(3)**是少了一个平面 $A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0$ 的直线 L 的平面束方程.

在不影响问题求解的前提下，利用式**(3)**，往往使得问题求解更加简便.

例 7　求直线 $L:\begin{cases} x+y-z-1=0 \\ x-y+z+1=0 \end{cases}$ 与平面 $\boldsymbol{\pi}: x+y+z=0$ 的夹角 φ

以及直线 L 在平面 $\boldsymbol{\pi}$ 上的投影直线 L_1 的方程.

解　先求直线 L 与平面 $\boldsymbol{\pi}$ 的夹角 φ.

直线 L 的方向向量 $\boldsymbol{s}$ 可取

$$\boldsymbol{s}=\begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix}=-2\boldsymbol{j}-2\boldsymbol{k}=\{0,-2,-2\},$$

又平面 $\boldsymbol{\pi}$ 的法向量 $\boldsymbol{n}=\{1,1,1\}$，由夹角公式得

$$\varphi=\arcsin\frac{|0\times1+(-2)\times1+(-2)\times1|}{\sqrt{0^2+(-2)^2+(-2)^2}\sqrt{1^2+1^2+1^2}}=\arcsin\frac{\sqrt{6}}{3}.$$

合肥工业大学 HEFEI UNIVERSITY OF TECHNOLOGY

下面求直线 L 在平面 π 上的投影直线 L_1 的方程.

关键在于求出过直线 L 且与平面 π 垂直的平面 π_1 的方程.

显然平面 $x-y+z+1=0$ 不与平面 π 垂直，因此平面 π_1 应包含在如下过直线 L 的平面束中

$$x+y-z-1+\lambda(x-y+z+1)=0.$$

整理得 $$(1+\lambda)x+(1-\lambda)y+(\lambda-1)z+(\lambda-1)=0,$$

其中 λ 为待定常数.

上述平面的法向量为$\{1+\lambda,1-\lambda,\lambda-1\}$. 要求平面 π_1，使之垂直于平面 π，就是要确定常数 λ 使得两平面的法向量垂直，

由

$$(1+\lambda)\times 1+(1-\lambda)\times 1+(\lambda-1)\times 1=0，得\ \lambda=-1.$$

因此平面 $\boldsymbol{\pi}_1$ 的方程为 $y-z-1=0$，所以所求投影直线 $\boldsymbol{L}_1$ 的方程为

$$\begin{cases} x+y+z=0, \\ y-z-1=0. \end{cases}$$

注: 本例中，平面 $\boldsymbol{\pi}_1$ 的方程也可通过直线 $\boldsymbol{L}$ 与平面 π 的交点 $(0,\frac{1}{2},-\frac{1}{2})$ 以及平面 $\boldsymbol{\pi}_1$ 的法向量 $\boldsymbol{n}_1=\boldsymbol{s}\times\boldsymbol{n}=\{0,-2,2\}$，由点法式方程求得，结果完全一样.

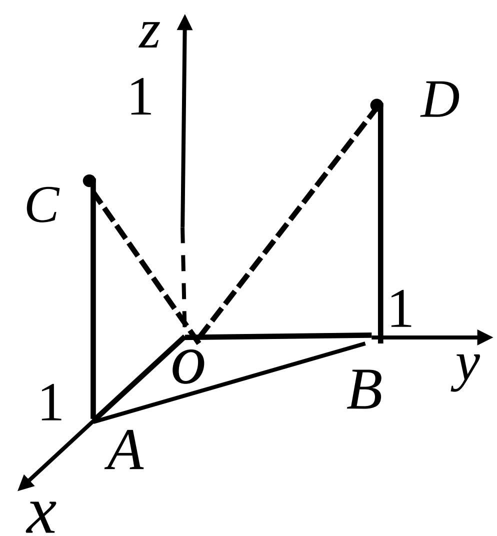
空间作图的一般思路

例 8　画出曲面 $z=xy, z=\sqrt{x^2+y^2}, y=0, x=0, x+y=1$ 所围成的空间立体区域 Ω，以及 Ω 在 xOy 坐标面上的投影区域 D_{xy} .

解　(1) 作 xOy 坐标面上的点 $A(1,0,0)$ 和 $B(0,1,0)$, 进而得平面线段 AB ;

(2) 作空间点 $C(1,0,1)$ 和 $D(0,1,1)$,

连线 AC, BD, OC 和 OD ;



(3) 作空间曲线 $\overset{\frown}{AMB}$：$\begin{cases} z = xy, \\ x + y = 1 \end{cases}$ 和 $\overset{\frown}{CND}$：$\begin{cases} z = \sqrt{x^2 + y^2}, \\ x + y = 1, \end{cases}$

(4) 由此得五个平面片或曲面片：

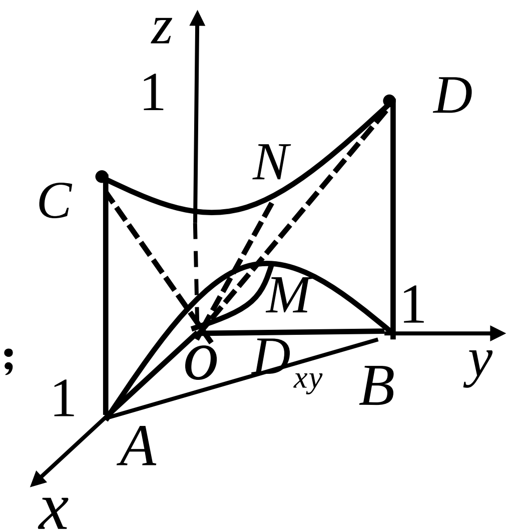
①点 O, A, C 所确定的平面片（$y = 0$）；

②点 O, B, D 所确定的平面片（$x = 0$）；

③点 A, M, B, D, N, C 所确定的平面片（$x + y = 1$）；

④点 O, A, M, B 所确定的曲面片（$z = xy$）；

⑤点 O, C, N, D 所确定的曲面片（$z = \sqrt{x^2 + y^2}$）；



为增加效果，可添加曲线段 $\overset{\frown}{OM}$ 和直线段 ON .

(5) 上述五个平面片或曲面片所围空间立体区域即为 Ω .

投影区域 D_{xy} 为以 O, A, B 为顶点的 xOy 坐标面上的三角形区域.

内容小结

1. 空间直线方程

一般式 $\begin{cases} A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0 \\ A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0 \end{cases}$

对称式 $\dfrac{x-x_0}{m}=\dfrac{y-y_0}{n}=\dfrac{z-z_0}{p}$

参数式 $\begin{cases} x=x_0+mt \\ y=y_0+nt \\ z=z_0+pt \end{cases}$

$(m^2+n^2+p^2\neq 0)$

2. 直线与直线的关系

直线 L_1: $\dfrac{x-x_1}{m_1}=\dfrac{y-y_1}{n_1}=\dfrac{z-z_1}{p_1}$, $\vec{s}_1=\{m_1, n_1, p_1\}$

直线 L_2: $\dfrac{x-x_2}{m_2}=\dfrac{y-y_2}{n_2}=\dfrac{z-z_2}{p_2}$, $\vec{s}_2=\{m_2, n_2, p_2\}$

$$L_1 \perp L_2 \Longleftrightarrow \vec{s}_1 \cdot \vec{s}_2 = 0 \Longleftrightarrow m_1m_2+n_1n_2+p_1p_2=0$$

$$L_1 // L_2 \Longleftrightarrow \vec{s}_1 \times \vec{s}_2 = \vec{0} \Longleftrightarrow \frac{m_1}{m_2}=\frac{n_1}{n_2}=\frac{p_1}{p_2}$$

夹角公式: $\varphi = arc\cos\dfrac{|\vec{s}_1\cdot\vec{s}_2|}{|\vec{s}_1||\vec{s}_2|}$

3. 平面与直线间的关系

平面 Π： $Ax+By+Cz+D=0$, $\vec{n}=\{A,B,C\}$

直线 L: $\dfrac{x-x}{m}=\dfrac{y-y}{n}=\dfrac{z-z}{p}$, $\vec{s}=\{m,n,p\}$

$$L\perp\Pi \Longleftrightarrow \vec{s}\times\vec{n}=\vec{0} \Longleftrightarrow \frac{m}{A}=\frac{n}{B}=\frac{p}{C}$$

$$\mathrm{L}\,//\,\Pi \Longleftrightarrow \vec{s}\cdot\vec{n}=0 \Longleftrightarrow mA+nB+pC=0$$

夹角公式: $\varphi=\arcsin\dfrac{|\vec{s}\cdot\vec{n}|}{|\vec{s}||\vec{n}|}$