

高等数学 A (上) 期中考试

班级 _____ 姓名 _____ 学号 _____

一、填空题 ($6 \times 5' = 30'$)

1. 函数 $f(x) = \frac{\frac{1}{(e^x+e)}\tan x}{x(e^x-e)}$ 在 $[-\pi, \pi]$ 上有 _____ 个无穷间断点.
2. 若 $f(x) = \ln \frac{1+x}{1-x}$, 则 $f(x)^{(n)} =$ _____.
3. 已知 $x + y + \sin y + 1 = 0$ 确定了隐函数 $y = f(x)$, 求 $f''(-1) =$ _____.
4. 设 $f(x) = x^{x+1} + \arctan(x^2 + 1)$, 则 $f'(1) =$ _____.
5. 曲线 $y = \frac{x^3}{x^2-3x+2}$ 有 _____ 条渐近线.
6. 已知 $f'(x_0) = -1$. 则 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x_0-2x)-f(x_0-x)}{x} =$ _____.

二、(30 分) 计算下面极限。

- (1). $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{\sin x} - e^{x \cos x}}{x - \sin x};$
- (2). $\lim_{n \rightarrow \infty} (\frac{1}{\sqrt{n^2+1}} + \frac{1}{\sqrt{n^2+2}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{n^2+n}})$
- (3). $\lim_{x \rightarrow -\infty} x(\sqrt{x^2+1} + x);$
- (4). $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{3-2e^{\frac{1}{x}}}{3+2e^{\frac{1}{x}}} \cdot \frac{\sin \pi x}{|x|};$
- (5). $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 \sin \frac{1}{x} + (1+x)^{\frac{1}{x}} - e}{\sin(\sin(\sin x))};$
- (6). $\lim_{x \rightarrow 0} (\frac{2^x+3^x}{2})^{\frac{1}{e^{\sin x}-1}}$

三、(12 分) 讨论函数 $f(x) = \begin{cases} x^2 \sin \frac{1}{x}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$ 在 $x=0$ 处的连续性, 可导性。求出 $f(x)$ 的导函数并讨论导函数的连续性。

四、(10 分) 已知数列 $\{x_n\}$ 满足关系 $x_1 = \frac{1921}{2021}, x_{n+1} = 2x_n - x_n^2 (n = 1, 2, 3, \cdots)$, 请用单调有界收敛原理求解 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n$.

五、(13 分) 求参数方程 $\begin{cases} x = a(t - \sin t) \\ y = a(1 - \cos t) \end{cases}$ 所确定的 y 关于 x 的函数的导数 $\frac{dy}{dx}, \frac{d^2y}{dx^2}, \frac{d^3y}{dx^3}$.

六、(5 分) 设函数 $f(x), g(x)$ 在 $[a, b]$ 上连续, 在 (a, b) 内可导, 且 $f(a) = f(b) = 0$, 证明: 至少存在一点 $\xi \in (a, b)$, 使得

$$f'(\xi) + f(\xi)g'(\xi) = 0.$$