第二节

正项级数及其审敛法

一、基本定理

二、正项级数积分审敛法

三、正项级数比较审敛法

四、正项级数比值审敛法

五、正项级数根值审敛法

一、基本定理

若 $u_n \geq 0$, 则称 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ 为**正项级数**.

定理 1. 正项级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛 $\Longleftrightarrow$ 部分和序列 S_n $(n=1,2,\cdots)$ 有界.

证: "$\Longrightarrow$" 若 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛, 则 $\{S_n\}$ 收敛, 故有界.

"$\Longleftarrow$" $\because u_n \geq 0$, $\therefore$ 部分和数列 $\{S_n\}$ 单调递增, 又已知 $\{S_n\}$ 有界, 故 $\{S_n\}$ 收敛, 从而 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ 也收敛.

由定理 1 不难得出下列结论:

正项级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 发散的充分必要条件为 $\lim_{n\to\infty} S_n = +\infty$.

注: 上述定理之所以称之为基本定理是后面一系列正项级数敛散性的审敛法均源自该结论.

二、正项级数积分审敛法

由定理 1 可得如下的正项级数的积分审敛法.

定理 2（正项级数积分审敛法） 设函数 $f(x)$ 在区间 $[1,+\infty)$ 上非负连续，且单调减少，则正项级数 $\sum_{n=1}^{\infty} f(n)$ 与广义积分 $\int_1^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x$ 具有相同的敛散性.

（证明参见教材，略.）

例 1. 证明 p 级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^p}=1+\frac{1}{2^p}+\cdots+\frac{1}{n^p}+\cdots \quad (p>0)$ 当

$p>1$ 时收敛，当 $p\le 1$ 时发散.

证：令 $f(x)=\frac{1}{x^p}$，则 $f(x)$ 在 $[1,+\infty)$ 上非负连续，且单调减少. 由定理 2 知，$\sum_{n=1}^{\infty}f(n)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^p}$ 与广义积分 $\int_1^{+\infty}f(x)\mathrm{d}x=\int_1^{+\infty}\frac{1}{x^p}\mathrm{d}x$ 具有相同的敛散性，从而当 $p>1$ 时 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^p}$ 收敛，当 $p\le 1$ 时 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^p}$ 发散.

特别地，当 $p=1$ 时，即得调和级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ 发散.

例 2. 讨论级数$\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n\ln n}$的敛散性.

解: 该级数为正项级数，取$f(x)=\frac{1}{x\ln x}$，则$f(x)$在$[2,+\infty)$上非负连续，且单减.

由定理 2 知，级数$\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n\ln n}$与广义积分$\int_{2}^{+\infty}\frac{1}{n\ln n}\mathrm{d}x$具有相同的敛散性. 而 $\int_{2}^{+\infty}\frac{1}{x\ln x}\mathrm{d}x=\ln(\ln x)\Big|_{2}^{+\infty}=+\infty$，

即$\int_{2}^{+\infty}\frac{1}{x\ln x}\mathrm{d}x$发散，所以级数$\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n\ln n}$发散.

三、正项级数比较审敛法

定理3 (比较审敛法) 设 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$, $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ 是两个正项级数，且存在 $N \in \mathbf{N}_+$，对一切 $n > N$，有 $u_n \le k v_n$ (常数 $k > 0$)，

(1) 若强级数 $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ 收敛，则弱级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 也收敛；

(2) 若弱级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 发散，则强级数 $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ 也发散.

证: 因在级数前加、减有限项不改变其敛散性，故不妨设对一切 $n \in \mathbf{N}_+$，都有 $u_n \le k v_n$，

令 S_n 和 σ_n 分别表示弱级数和强级数的部分和，则有

$$S_n \le k \sigma_n$$

(1) 若强级数 $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ 收敛, 则有 $\sigma = \lim_{n\to\infty} \sigma_n$

因此对一切 $n \in \mathbf{N}_+$, 有 $S_n \le k\sigma$

由定理 1 可知, 弱级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 也收敛 .

(2) 若弱级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 发散, 则有 $\lim_{n\to\infty} S_n = \infty$,

因此 $\lim_{n\to\infty} \sigma_n = \infty$, 这说明强级数 $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ 也发散 .

例3. 讨论 p 级数 $1+\frac{1}{2^p}+\frac{1}{3^p}+\cdots+\frac{1}{n^p}+\cdots$ (常数 $p>0$)

的敛散性.

解: 1) 若 $p\le 1$, 因为对一切 $n\in\mathbf{N}_+$,

$$\frac{1}{n^p}\ge\frac{1}{n}$$

而调和级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ 发散, 由比较审敛法可知 p 级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^p}$

发散 .

2) 若 $p>1$，因为当 $n-1\le x\le n$ 时，$\dfrac{1}{n^p}\le\dfrac{1}{x^p}$，故

$$\frac{1}{n^p}=\int_{n-1}^{n}\frac{1}{n^p}\,\mathrm{d}x$$

$$\le\int_{n-1}^{n}\frac{1}{x^p}\,\mathrm{d}x=\frac{1}{p-1}\left[\frac{1}{(n-1)^{p-1}}-\frac{1}{n^{p-1}}\right]$$

$$\left[1-\frac{1}{2^{p-1}}\right]+\left[\frac{1}{2^{p-1}}-\frac{1}{3^{p-1}}\right]+\cdots+\left[\frac{1}{n^{p-1}}-\frac{1}{(n+1)^{p-1}}\right]$$

$$\sigma_n=\sum_{k=1}^{n}\left[\frac{1}{k^{p-1}}-\frac{1}{(k+1)^{p-1}}\right]=1-\frac{1}{(n+1)^{p-1}}\xrightarrow{n\to\infty}1$$

故强级数收敛，由比较审敛法知 p 级数收敛.

调和级数与 p 级数是两个常用的比较级数.

若存在 $N \in \mathbf{N}_+$, 对一切 $n \geq N$,

(1) $u_n \geq \dfrac{1}{n}$, 则 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ 发散;

(2) $u_n \leq \dfrac{1}{n^p}$ $(p>1)$, 则 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛.

例4. 证明级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n(n+1)}}$ 发散.

证: 因为

$$\frac{1}{\sqrt{n(n+1)}} \geq \frac{1}{\sqrt{(n+1)^2}} = \frac{1}{n+1} \quad (n=1,2,\cdots)$$

而级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n+1} = \sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{k}$ 发散

根据比较审敛法可知, 所给级数发散.

例 5. 判别下列正项级数的敛散性

(1) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(n+1)(n+2)}$;　(2) $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{\ln n}{n}$;　(3) $\sum_{n=1}^{\infty}\sin^2\frac{\pi}{n}$.

解: (1) 由于 $\frac{1}{n(n+1)(n+2)}<\frac{1}{n^3}$, 而 p 级数当 $p=3$ 时, $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^3}$ 收敛, 所以由比较审敛法知级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(n+1)(n+2)}$ 收敛.

(2) 当 $n\geq 3$ 时, $\frac{\ln n}{n}>\frac{1}{n}$, 而级数 $\sum_{n=3}^{\infty}\frac{1}{n}$ 发散, 所以由比较审敛法知级数 $\sum_{n=3}^{\infty}\frac{\ln n}{n}$ 发散, 故 $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{\ln n}{n}$ 发散.

(3) 由于$\sin^2\frac{\pi}{n}\le\frac{\pi^2}{n^2}$，而$p$级数当$p=2$时，$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$收敛，故级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\pi}{n^2}$收敛，所以由比较审敛法知级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\sin^2\frac{\pi}{n}$收敛.

例 6. 设$a_n\le c_n\le b_n(n=1,2,\cdots)$，且级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$与$\sum\limits_{n=1}^{\infty}b_n$都收敛，证明级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}c_n$收敛.

证：由题意知$0\le c_n-a_n\le b_n-a_n(n=1,2,\cdots)$. 又级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$与$\sum\limits_{n=1}^{\infty}b_n$都收敛，所以正项级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}(b_n-a_n)$收敛，由比较审敛法知，正项级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}(c_n-a_n)$收敛，从而级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}c_n=\sum\limits_{n=1}^{\infty}[(c_n-a_n)+a_n]$收敛.

由定理 3 可得下面推论.

推论 设$\sum_{n=1}^{\infty} u_n$与$\sum_{n=1}^{\infty} v_n$为两个正项级数，且当$n \geq N(N$为某一正整数）时，存在常数$C_1 > 0, C_2 > 0$，使得

$$C_1 v_n \leq u_n \leq C_2 v_n,$$

则级数$\sum_{n=1}^{\infty} u_n$与$\sum_{n=1}^{\infty} v_n$具有相同的敛散性.

在定理 3 中，建立不等式往往是非常困难的，下面介绍正项级数比较审敛法的极限形式，在一定程度上回避了建立不等式所产生的困难，使用起来更加方便.

定理4. (比较审敛法的极限形式) 设两正项级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n, \sum_{n=1}^{\infty} v_n$ 满足 $\lim_{n\to\infty} \frac{u_n}{v_n} = l$, 则有

(1) 当 $0 < l < \infty$ 时，两个级数同时收敛或发散；

(2) 当 $l = 0$ 且 $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ 收敛时，$\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 也收敛；

(3) 当 $l = \infty$ 且 $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ 发散时，$\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 也发散 .

证: 据极限定义, 对 $\varepsilon > 0$, 存在 $N \in \mathbf{N}_+$, 当 $n > N$ 时,

$$\left| \frac{u_n}{v_n} - l \right| < \varepsilon \qquad (\, l \neq \infty \,)$$

$$(l-\varepsilon)v_n \le u_n \le (l+\varepsilon)v_n \qquad (n>N)$$

(1) 当 $0<l<\infty$ 时，取 $\varepsilon<l$，由定理 2 可知 $\sum_{n=1}^{\infty}u_n$ 与 $\sum_{n=1}^{\infty}v_n$ 同时收敛或同时发散；

(2) 当 $l=0$ 时，利用 $u_n<(l+\varepsilon)v_n \ (n>N)$，由定理2 知若 $\sum_{n=1}^{\infty}v_n$ 收敛，则 $\sum_{n=1}^{\infty}u_n$ 也收敛；

(3) 当 $l=\infty$ 时，存在 $N\in\mathbf{N}_+$，当 $n>N$ 时，$\dfrac{u_n}{v_n}>1$，即

$$u_n>v_n$$

由定理2可知，若 $\sum_{n=1}^{\infty}v_n$ 发散，则 $\sum_{n=1}^{\infty}u_n$ 也发散.

$\sum u_n, \sum v_n$ 是两个正项级数，$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{u_n}{v_n}=l$，

(1) 当 $0<l<\infty$ 时，两个级数同时收敛或发散；

(2) 当 $l=0$ 且 $\sum v_n$ 收敛时，$\sum u_n$ 也收敛；

(3) 当 $l=\infty$ 且 $\sum v_n$ 发散时，$\sum u_n$ 也发散.

注：

1) u_n, v_n 均为无穷小时，l 的值反映了它们不同阶的比较.

2) 特别取 $v_n=\dfrac{1}{n^p}$，对正项级数 $\sum u_n$，可得如下结论：

$$\lim_{n\to\infty} n^p u_n = l \begin{cases} p\le 1,\ 0<l\le\infty \Longrightarrow \sum u_n \text{ 发散} \\ p>1,\ 0\le l<\infty \Longrightarrow \sum u_n \text{ 收敛} \end{cases}$$

例7. 判别级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\sin\frac{1}{n}$ 的敛散性.

$$\sin\frac{1}{n}\sim\frac{1}{n}$$

解: $\because \lim_{n\to\infty} n\sin\frac{1}{n}=\lim_{n\to\infty} n\cdot\frac{1}{n}=1$

根据比较审敛法的极限形式知 $\sum_{n=1}^{\infty}\sin\frac{1}{n}$ 发散.

例8. 判别级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\ln[1+\frac{1}{n^2}]$ 的敛散性.

$$\ln(1+\frac{1}{n^2})\sim\frac{1}{n^2}$$

解: $\because \lim_{n\to\infty} n^2\ln[1+\frac{1}{n^2}]=\lim_{n\to\infty} n^2\cdot\frac{1}{n^2}=1$

根据比较审敛法的极限形式知 $\sum_{n=1}^{\infty}\ln[1+\frac{1}{n^2}]$ 收敛.

例 9. 设$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$为正项级数，下列正确的是（　　）.

（A）若$\lim_{n\to\infty} na_n = 0$，则级数$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$收敛;

（B）若存在非零常数λ，使得$\lim_{n\to\infty} na_n = \lambda$，则级数$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$发散;

（C）若级数$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$收敛，则$\lim_{n\to\infty} n^2 a_n = 0$;

（D）若级数$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$发散，则存在非零常数λ，使得$\lim_{n\to\infty} na_n = \lambda$.

答案：选（B）.

解：取$a_n=\dfrac{1}{n\ln n}(n=2,3,\cdots)$，则$\lim\limits_{n\to\infty}na_n=0$，但$\sum\limits_{n=2}^{\infty}a_n=\sum\limits_{n=2}^{\infty}\dfrac{1}{n\ln n}$发散，排除（A）和（D）.

又取$a_n=\dfrac{1}{n\sqrt{n}}$，则级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$收敛，但$\lim\limits_{n\to\infty}n^2a_n=\infty$，排除（C）.

对于（B），若存在非零常数λ，使得$\lim\limits_{n\to\infty}na_n=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_n}{\frac{1}{n}}=\lambda$，

则a_n与$\dfrac{1}{n}$为同阶无穷小，所以级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$发散. 故（B）正确.

四、正项级数比值审敛法

定理5 . 比值审敛法 (D'alembert 判别法)

设 $\sum u_n$ 为正项级数, 且 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{u_{n+1}}{u_n}=\rho$, 则

(1) 当 $\rho<1$ 时, 级数收敛 ;

(2) 当 $\rho>1$ 或 $\rho=\infty$ 时, 级数发散 .

证: (1) 当 $\rho<1$ 时, 取 ε 使 $\rho+\varepsilon<1$, 由 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{u_{n+1}}{u_n}=\rho$ 知

存在 $N\in\mathrm{N}_+$, 当 $n>N$ 时, $\dfrac{u_{n+1}}{u_n}<\rho+\varepsilon<1$

$$\therefore\ u_{n+1} < (\rho+\varepsilon)u_n < (\rho+\varepsilon)^2 u_{n-1} < \cdots$$

$$< (\rho+\varepsilon)^{n-N} u_{N+1}$$

$\sum(\rho+\varepsilon)^k$ 收敛，由比较审敛法可知 $\sum u_n$ 收敛.

(2) 当 $\rho > 1$ 或 $\rho = \infty$ 时，必存在 $N \in \mathrm{N}_+$，$u_N \neq 0$，当 $n \geq N$

时 $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} > 1$，从而

$$u_{n+1} > u_n > u_{n-1} > \cdots > u_N$$

因此 $\lim\limits_{n\to\infty} u_n \geq u_N \neq 0$，所以级数发散.

说明: 1. 当 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{u_{n+1}}{u_n}=1$ 时, 级数可能收敛也可能发散.

例如, $p-$级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n^p}$: $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{u_{n+1}}{u_n}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\frac{1}{(n+1)^p}}{\frac{1}{n^p}}=1$

但 $\begin{cases} p>1, \text{级数收敛;} \\ p\le 1, \text{级数发散.} \end{cases}$

2. 如果极限$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{u_{n+1}}{u_n}$不存在，则不能判定级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$的敛散性.

例如，对正项级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{2+(-1)^n}{n}$与$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{2+(-1)^n}{n^2}$而言，极限

$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{u_{n+1}}{u_n}$均不存在，但由于

$$\frac{2+(-1)^n}{n}\geq\frac{1}{n},\quad \frac{2+(-1)^n}{n^2}\leq\frac{3}{n^2},$$

所以$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{2+(-1)^n}{n}$发散，$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{2+(-1)^n}{n^2}$收敛.

例 **10.** 判定下列正项级数的敛散性

$$(1)\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(n!)^2}{2^{n^2}};\qquad (2)\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^n}{n^2}.$$

解: (1) 由于 $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{[(n+1)!]^2 2^{n^2}}{(n!)^2 2^{(n+1)^2}}=\lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)^2}{2^{2n+1}}$,

且 $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\frac{(x+1)^2}{2^{2x+1}}=\frac{1}{\ln 4}\lim_{x\to+\infty}\frac{x+1}{4^x}=\frac{1}{(\ln 4)^2}\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{4^x}=0$,

故 $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}=0<1$, 所以级数 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(n!)^2}{2^{n^2}}$ 收敛.

(2) 由于 $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{\dfrac{2^{n+1}}{(n+1)!}}{\dfrac{2^n}{n^2}}=2\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n}{n+1}\right)^2=2>1$,

所以级数 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^n}{n^2}$ 发散.

例11. 讨论级数 $\sum_{n=1}^{\infty} n x^{n-1}\ (x>0)$ 的敛散性 .

解: $\because \lim_{n\to\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)x^n}{n x^{n-1}} = x$

根据定理5可知:

当 $0<x<1$ 时, 级数收敛 ;

当 $x>1$ 时, 级数发散 ;

当 $x=1$ 时, 级数 $\sum_{n=1}^{\infty} n$ 发散.

例 **12.** 利用级数收敛的必要条件证明 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{2^n n!}{n^n}=0$.

证：记 $u_n=\dfrac{2^n n!}{n^n}$，作正项级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$，由于

$$\lim_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{2^{n+1}(n+1)!}{(n+1)^{n+1}}\cdot\frac{n^n}{2^n n!}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{2n^n}{(n+1)^n}=2\lim_{n\to\infty}\frac{1}{(1+\frac{1}{n})^n}=\frac{2}{e}<1,$$

所以由正项级数比值审敛法知级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ 收敛，从而有

$\lim\limits_{n\to\infty}u_n=0$，即 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{2^n n!}{n^n}=0$.

五、正项级数根值审敛法

定理6. 根值审敛法 (Cauchy判别法) 设 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 为正项级数，且 $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{u_n} = \rho$，则

(1) 当 $\rho < 1$ 时，级数收敛；

(2) 当 $\rho > 1$ 或 $\rho = \infty$ 时，级数发散.

证明提示：$\because \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{u_n} = \rho$，$\therefore$ 对任意给定的正数 ε

$(\varepsilon < |1-\rho|)$，存在 $N \in \mathrm{N}_+$，当 $n > N$ 时，有

$$\rho-\varepsilon<\sqrt[n]{u_n}<\rho+\varepsilon$$

即 $$(\rho-\varepsilon)^n<u_n<(\rho+\varepsilon)^n$$

$$\boxed{\begin{array}{l}\rho<1 \Longrightarrow \rho+\varepsilon<1 \\ \rho>1 \Longrightarrow \rho-\varepsilon>1\end{array}}$$

分别利用上述不等式的左,右部分,可推出结论正确.

说明： $\rho=1$ 时，级数可能收敛也可能发散.

例如，p – 级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^p}$：

$$u_n=\frac{1}{n^p},\quad \sqrt[n]{u_n}=\left(\frac{1}{\sqrt[n]{n}}\right)^p\to 1\ (n\to\infty)$$

但 $\begin{cases} p>1, \text{级数收敛；} \\ p\le 1, \text{级数发散.}\end{cases}$

例 13. 判定下列正项级数的敛散性:

(1) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^n}$; (2); $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2+(-1)^n}{3^n-2^n}$; (3) $\sum_{n=1}^{\infty}3^n(1-\frac{1}{n})^{n^2}$.

解: (1) 因为 $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{u_n}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}=0<1$，由定理 6 知，$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^n}$ 收敛.

(2) 由于 $\frac{1}{3^n-2^n}\le u_n\le\frac{3}{3^n-2^n}$，因此有

$$\frac{1}{3}\frac{1}{\sqrt[n]{1-(\frac{2}{3})^n}}\le\sqrt[n]{u_n}\le\frac{1}{3}\frac{\sqrt[n]{3}}{\sqrt[n]{1-(\frac{2}{3})^n}}.$$

又$\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{1-(\frac{2}{3})^n}=1, \lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{3}=1$，故

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{3}\frac{1}{\sqrt[n]{1-(\frac{2}{3})^n}}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{3}\frac{\sqrt[n]{3}}{\sqrt[n]{1-(\frac{2}{3})^n}}=\frac{1}{3},$$

由夹逼定理知$\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{u_n}=\frac{1}{3}<1$，所以由定理 6 知，

$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{2+(-1)^n}{3^n-2^n}$收敛.

(3) 由于$\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{3^n(1-\frac{1}{n})^{n^2}}=3\lim\limits_{n\to\infty}(1-\frac{1}{n})^n=\frac{3}{e}>1$，所以由

定理 6 知，级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}3^n(1-\frac{1}{n})^{n^2}$发散.

内容小结

1. $\sum u_n$ 收敛 $\Leftrightarrow$ 部分和数列 $\{S_n\}$ 有极限

2. 判别正项级数敛散性的方法与步骤

必要条件 $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = 0$ $\xrightarrow[\text{不满足}]{}$ 发 散

$\downarrow$ 满足

比值审敛法 $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{u_{n+1}}{u_n} = \rho$

$\downarrow \quad \not\uparrow$

根值审敛法 $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{u_n} = \rho$

$\xrightarrow[\text{用它法判别}]{\rho = 1}$ 不定 $\begin{cases} \text{比较审敛法} \\ \text{部分和极限} \\ \text{积分判别法} \end{cases}$

$\rho < 1$ $\downarrow$ 收 敛

$\rho > 1$ $\downarrow$ 发 散

思考与练习

1. 用适当方法判别下列级数敛散性:

（1）$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{(2n+1)(2n-1)}}$ ；（2）$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n+1}}\ln\frac{n+2}{n}$ ；

（3）$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^{10}}{n!}$ ；（4）$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a^n}{\ln(1+n)}(a>0)$.

2. 设 $u_n > 0, v_n > 0$，且 $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} \leq \dfrac{v_{n+1}}{v_n} \ (n = 1, 2, \cdots)$，证明：若 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} v_n$ 收敛，则 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ 也收敛.

提示：数列 $\left\{\dfrac{u_n}{v_n}\right\}$ 是单减正项数列，且

$$u_n \leq \frac{u_{n-1}}{v_{n-1}} v_n \leq \frac{u_1}{v_1} v_n = a v_n, a = \frac{u_1}{v_1} \ (n = 2, 3, \cdots)$$

级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a v_n$ 收敛，因此级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ 也收敛.

3. 设正项级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛，能否推出 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n^2$ 收敛？

提示：$\because \lim_{n\to\infty} \frac{u_n^2}{u_n} = \lim_{n\to\infty} u_n = 0$

由比较判敛法可知 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n^2$ 收敛.

注意：反之不成立. 例如，

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \text{ 收敛}, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \text{ 发散}.$$

4．设 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 为收敛的正项级数，证明:

（1）级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{u_n u_{n+1}}$ 收敛;　　（2）$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{u_n}}{n}$ 收敛.

提示:（1）由 $\sqrt{u_n u_{n+1}} \le \frac{1}{2}(u_n + u_{n+1})(n = 1, 2, \cdots)$ 可得证。

（2）因为 $\frac{\sqrt{u_n}}{n} \le \frac{1}{2}(u_n + \frac{1}{n^2})$，而级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2}(u_n + \frac{1}{n^2})$ 收敛，

因此 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{u_n}}{n}$ 也收敛.

备用题

不是 p–级数

1. 判别级数的敛散性:

(1) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\ln(n+1)}$; (2) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n\sqrt[n]{n}}$.

解: (1) $\because\ \ln(n+1) < n,\quad \therefore\ \frac{1}{\ln(n+1)} > \frac{1}{n}$

$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ 发散，故原级数发散.

(2) $\because\ \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n\sqrt[n]{n}}\Big/\frac{1}{n} = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt[n]{n}} = 1$

p – 级数 : $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^p}$

$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ 发散，故原级数发散.