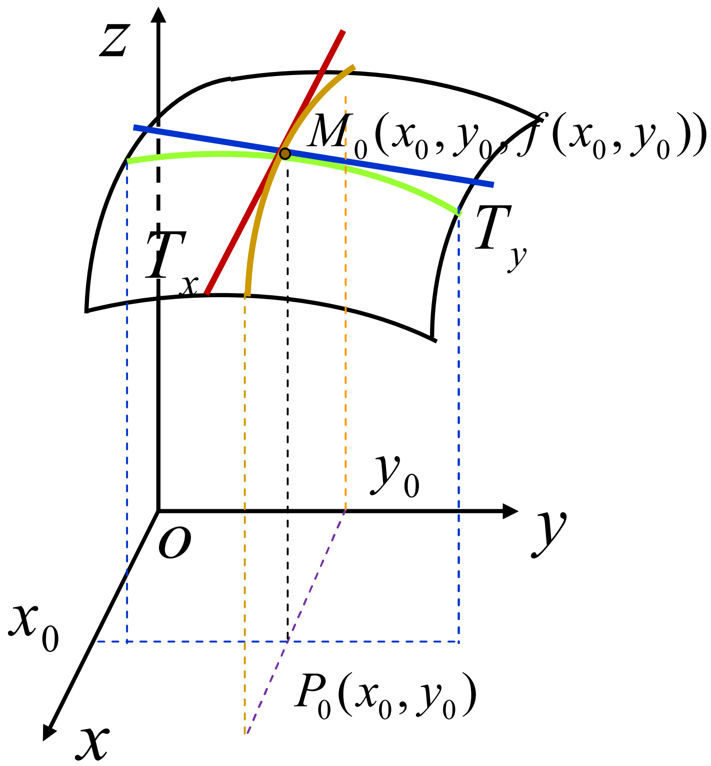
上节内容回顾

$$f_x'(x_0,y_0)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x,y_0)-f(x_0,y_0)}{\Delta x}=\frac{\mathrm{d}f(x,y_0)}{\mathrm{d}x}\Big|_{x=x_0}$$

二元函数偏导数的几何意义:

$$\frac{\partial f}{\partial x}\Big|_{(x_0,y_0)}=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}f(x,y_0)\Big|_{x=x_0}$$

是曲线$\begin{cases} z=f(x,y), \\ y=y_0 \end{cases}$在点$M_0$处的切线 M_0T_x 对x轴的斜率.



对于二元函数 $f(x,y)$,

$$\text{连续} \not\rightleftarrows \text{可偏导}$$

定理：若 $f''_{xy}(x,y)$和 $f''_{yx}(x,y)$ 都在点 (x,y) 处

连续，则

$$f''_{xy}(x,y)=f''_{yx}(x,y) \qquad \text{(证明略)}$$

思考题

1. $u = x^{\frac{z}{y}}$,求 $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x \partial z}$ 及 $\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}$.

2. 讨论在坐标原点的连续性和可偏导性:

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{x^2-y^2}{x^2+y^2}, & (x,y)\neq(0,0),\\ 1, & (x,y)=(0,0).\end{cases}$$

第四节 全微分

一、全微分的概念

二、函数可微的必要条件和充分条件

一元函数 $y=f(x)$ 的可微与微分回顾

可微 $\Delta y = \underline{A\Delta x} + o(\Delta x)$

$A = f'(x)$ 规定 $dx = \Delta x$

微分 $\mathrm{d}y = f'(x)dx$

一、全微分的概念

定义：如果$z=f(x,y)$在定义域$\boldsymbol{D}$的内点(x,y)处的**全增量** $\Delta z=f(x+\Delta x,y+\Delta y)-f(x,y)$可表示为

$$\Delta z=\boxed{A\Delta x+B\Delta y}+o(\rho),\quad \rho=\sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}$$

其中A,B不依赖于 $\Delta x,\Delta y$，仅与x,y有关，就称函数$z=f(x,y)$在点(x,y)处可微，$A\Delta x+B\Delta y$称为函数$f(x,y)$在点(x,y)处的**全微分**，记为

$$\mathrm{d}z=\mathrm{d}f=A\Delta x+B\Delta y$$

规定： $dx=\Delta x, dy=\Delta y$，则

$$\mathrm{d}z=\mathrm{d}f=A\,dx+B\,dy$$

如果函数 $z=f(x,y)$ 在点 (x,y) 处可微，则

$$\Delta z=dz+o(\rho),$$

当 $\rho=\sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}$ 充分小时，有

$$\Delta z\approx dz,$$

（由此可以利用微分进行近似计算）

若函数在区域D内各点都可微，就称此函数在D内可微.

二、函数可微的必要条件和充分条件

定理1 (可微的必要条件) 如果函数 $z=f(x,y)$ 在点 (x,y) 处可微，则

(1) $f(x,y)$在点 (x,y) 处连续；

(2) $f(x,y)$在点 (x,y) 处可偏导；且

$$A=f'_x(x,y),\ B=f'_y(x,y),$$

因此，$$\mathrm{d}z=f'_x(x,y)dx+f'_y(x,y)dy$$

或 $$\mathrm{d}z=\frac{\partial z}{\partial x}dx+\frac{\partial z}{\partial y}dy$$

证明：(1) 由全微分定义，得

$$\lim_{\substack{\Delta x\to 0\\ \Delta y\to 0}} \Delta z = \lim_{\rho\to 0}[A\Delta x + B\Delta y + o(\rho)] = 0$$

所以 $f(x,y)$ 在点 (x,y) 处连续。

(2) 在全增量

$$\Delta z = f(x+\Delta x, y+\Delta y) - f(x,y) = A\Delta x + B\Delta y + o(\rho)$$

中令 $\Delta y = 0$，得

$$\Delta_x z = f(x+\Delta x, y) - f(x,y) = A\Delta x + o(\Delta x)$$

$$\frac{f(x+\Delta x, y)-f(x, y)}{\Delta x}=A+\frac{o(\Delta x)}{\Delta x}$$

有 $$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x, y)-f(x, y)}{\Delta x}=A$$

所以 $f(x,y)$ 在点 (x,y) 处对 x可偏导，且

$$A=f'_x(x,y)$$

同理可证，$f(x,y)$ 在点 (x,y) 处对 y可偏导，且

$$B=f'_y(x,y)$$

进而知 $f(x,y)$ 在点 (x,y) 处可偏导，且

$$\mathrm{d}z=f'_x(x,y)dx+f'_y(x,y)dy$$

注1：定理1的逆否命题表明

(1)如果二元函数不连续，则必不可微。

(2)如果二元函数不可偏导，则必不可微。

注2：定理1的逆命题不成立．即

(1)如果二元函数连续，则此二元函数未必可微。

(2)如果二元函数可偏导，则此二元函数未必可微。

反例1：由第三节例2知，函数 $f(x,y)=\sqrt{x^2+y^2}$ 在点 $(0,0)$ 处不可偏导，从而不可微，但连续。

因此连续未必可微！

反例2: 由第三节例1知，函数

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{xy}{x^2+y^2}, & x^2+y^2\neq 0,\\ 0, & x^2+y^2=0,\end{cases}$$

在点 $(0,0)$ 处不连续，从而不可微，但可偏导。

因此可偏导未必可微!

误区:

有些同学以为：由于 $\mathrm{d}z=f_x'(x,y)dx+f_y'(x,y)dy,$

所以当 $f(x,y)$ 可偏导时，$f(x,y)$ 一定可微。

这是错误的!

定理2 (可微的充分必要条件) 如果函数 $z=f(x,y)$ 在点 (x,y) 处可偏导，则 $f(x,y)$ 在点 (x,y) 处可微的充分必要条件为

$$\Delta z - f'_x(x,y)\Delta x - f'_y(x,y)\Delta y = o(\rho),$$

即

$$\lim_{\substack{\Delta x\to 0\\ \Delta y\to 0}} \frac{\Delta z - f'_x(x,y)\Delta x - f'_y(x,y)\Delta y}{\sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}} = 0.$$

其中 $\rho = \sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}$

本定理由可微的定义即可证明。

注1 定理2表明：如果函数 $z=f(x,y)$ 在点 (x,y) 处可偏导，则 $f(x,y)$ 在点 (x,y) 处不可微的充分必要条件为

$$\lim_{\substack{\Delta x\to 0\\ \Delta y\to 0}}\frac{\Delta z-f_x'(x,y)\Delta x-f_y'(x,y)\Delta y}{\sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}}\neq 0.$$

注2 $\lim\limits_{\substack{\Delta x\to 0\\ \Delta y\to 0}}\dfrac{\Delta z-f_x'(x,y)\Delta x-f_y'(x,y)\Delta y}{\sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}}\neq 0$ 包括:

(1) 此极限不存在.

(2) 此极限存在，但不等于0.

例1: 讨论函数 $f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}, & x^2+y^2\neq 0\\ 0, & x^2+y^2=0\end{cases}$

在点 $(0,0)$ 处的可微性。

解: $f(x,0)=f(0,y)=0$, 故 $f'_x(0,0)=f'_y(0,0)=0$,

$$\lim_{\substack{\Delta x\to 0\\ \Delta y\to 0}}\frac{\Delta z-\cancel{f'_x(0,0)\Delta x}-\cancel{f'_y(0,0)\Delta y}}{\sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}}$$

$$=\lim_{\substack{\Delta x\to 0\\ \Delta y\to 0}}\frac{f(\Delta x,\Delta y)-\cancel{f(0,0)}}{\sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}}=\lim_{\substack{\Delta x\to 0\\ \Delta y\to 0}}\frac{\Delta x\Delta y}{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}$$ 不存在,

因此,函数在点 $(0,0)$ 处不可微.

例2：讨论函数$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{x^2y}{\sqrt{x^2+y^2}}, & x^2+y^2\neq 0\\ 0, & x^2+y^2=0\end{cases}$

在点$(0,0)$处的可微性。

解：$f(x,0)=f(0,y)=0$, 故 $f_x'(0,0)=f_y'(0,0)=0$,

$$\lim_{\substack{\Delta x\to 0\\ \Delta y\to 0}}\frac{\Delta z-\cancel{f_x'(0,0)\Delta x}-\cancel{f_y'(0,0)\Delta y}}{\sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}}$$

$$=\lim_{\substack{\Delta x\to 0\\ \Delta y\to 0}}\frac{f(\Delta x,\Delta y)-\cancel{f(0,0)}}{\sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}}=\lim_{\substack{\Delta x\to 0\\ \Delta y\to 0}}\frac{(\Delta x)^2\,\Delta y}{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}=0,$$

因此,函数在点$(0,0)$处可微.

由例1和例2可知，讨论二元函数的可微性是一件不容易的事情。

试问，有没有比较简单和快捷的方法来判断二元函数是否可微?

定理3 (可微的充分条件) 若函数 $z=f(x,y)$ 的偏导数 $\dfrac{\partial z}{\partial x},\dfrac{\partial z}{\partial y}$ 在点 (x,y) 处连续，则函数在该点可微分.

本定理的证明从略。

注1: 定理3 的逆命题不成立。即如果二元函数可微，则此二元函数的偏导数未必连续。

例3. 设函数 $z=e^{xy}$,(1) 证明该函数处处可微，并求其全微分；(2) 求在点 (2,1) 处的全微分；(3) 求在点 (2,1)处，且当 $\Delta x=0.1, \Delta y=-0.2$ 时的全微分。

解：(1)由于 $\frac{\partial z}{\partial x}=ye^{xy}, \frac{\partial z}{\partial y}=xe^{xy}$ 处处连续，所以该函数处处可微，并且 $dz=ye^{xy}dx+xe^{xy}dy.$

(2) $dz\Big|_{(2,1)}=(ye^{xy}dx+xe^{xy}dy)\Big|_{(2,1)}=e^2dx+2e^2dy.$

(3) $dz\Big|_{\substack{(2,1)\\ \Delta x=0.1,\Delta y=-0.2}}=e^2\times 0.1+2e^2\times(-0.2)=-0.3e^2.$

设函数 $z=f(x,y)$在点 (x,y) 处可微，则

$$dz=\frac{\partial z}{\partial x}dx+\frac{\partial z}{\partial y}dy.$$

分别称 $\frac{\partial z}{\partial x}dx,\frac{\partial z}{\partial y}dy$ 为 $f(x,y)$在点(x,y)处关于x和关于 y的偏微分。

结论：全微分等于所有偏微分之和。

推广：类似可讨论三元及三元以上函数的可微性问题.

例如，三元可微函数 $u=f(x,y,z)$ 的全微分为

$$du=\frac{\partial u}{\partial x}dx+\frac{\partial u}{\partial y}dy+\frac{\partial u}{\partial z}dz$$

例4. 计算函数 $u = x^2 + \sin\frac{y}{2} + e^{yz}$ 的全微分.

解: 由于

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 2x,\ \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{1}{2}\cos\frac{y}{2} + z e^{yz},\ \frac{\partial u}{\partial z} = ye^{yz}$$

处处连续，所以该函数处处可微，且

$$\mathrm{d}u = 2x\,\mathrm{d}x + \left(\frac{1}{2}\cos\frac{y}{2} + z e^{yz}\right)\mathrm{d}y + y e^{yz}\,\mathrm{d}z$$

全微分在近似计算中的应用

由全微分定义

$$\Delta z = \underbrace{f_x'(x,y)\Delta x + f_y'(x,y)\Delta y}_{\mathrm{d}\,z} + o(\rho)$$

可知当 $|\Delta x|$ 及 $|\Delta y|$ 较小时, 有近似等式:

$$\Delta z \approx \mathrm{d}z = f_x'(x,y)\Delta x + f_y'(x,y)\Delta y$$

即

$$f(x+\Delta x, y+\Delta y) \approx f(x,y) + f_x'(x,y)\Delta x + f_y'(x,y)\Delta y$$

(可用于近似计算)

例5. 有一圆柱体受压后发生形变, 半径由20cm增大到20.05cm, 高度由100cm 减少到99cm, 求此圆柱体体积的近似改变量.

解: 已知 $V=\pi r^2 h$, 则

$$\Delta V \approx 2\pi rh\Delta r+\pi r^2\Delta h$$

$$r=20,\quad h=100,$$

$$\Delta r=0.05,\quad \Delta h=-1$$

$$\Delta V \approx 2\pi\times 20\times 100\times 0.05+\pi\times 20^2\times(-1)$$

$$=-200\pi\ (\mathrm{cm}^3)$$

即受压后圆柱体体积减少了约 $200\pi\ \mathrm{cm}^3$.

例6. 计算 $1.04^{2.02}$ 的近似值.

解: 设 $f(x,y)=x^y$, 则

$$f_x'(x,y)=y\,x^{y-1},\quad f_y'(x,y)=x^y\ln x$$

取 $x=1,\ y=2,\ \Delta x=0.04,\ \Delta y=0.02,$

则 $$1.04^{2.02}=f(1.04,\ 2.02)$$

$$\approx f(1,2)+f_x'(1,2)\Delta x+f_y'(1,2)\Delta y$$

$$=1+2\times 0.04+0\times 0.02=1.08$$

内容小结

1. 微分

$$z = f(x, y)$$

$$\Delta z = \underbrace{A\Delta x + B\Delta y}_{\downarrow} + o(\rho)$$

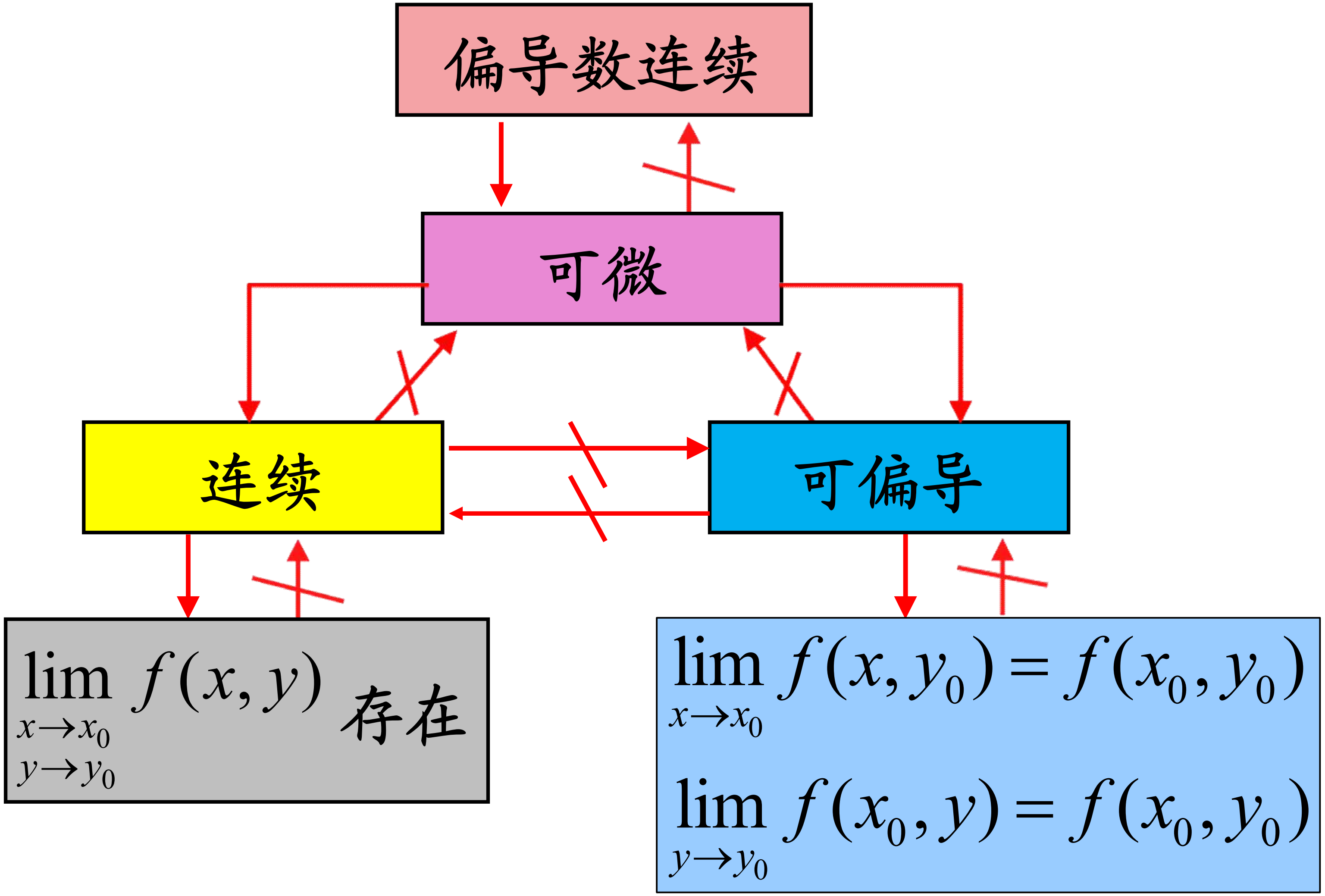
$$\rho = \sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2}$$

$$\mathrm{d}z = f_x'(x, y)\,\mathrm{d}x + f_y'(x, y)\,\mathrm{d}y$$

$$u = f(x, y, z)$$

$$\mathrm{d}u = \frac{\partial u}{\partial x}dx + \frac{\partial u}{\partial y}dy + \frac{\partial u}{\partial z}dz$$

2. 重要关系： $z=f(x,y)$


偏导数连续
可微
连续
可偏导
$\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}} f(x,y)$ 存在
$\lim\limits_{x\to x_0} f(x,y_0)=f(x_0,y_0)$
$\lim\limits_{y\to y_0} f(x_0,y)=f(x_0,y_0)$

思考与练习

例 1: 设函数 $f(x,y)$ 在点 $P(x_0,y_0)$ 处的两个偏导数 $f_x'(x_0,y_0)$ 和 $f_y'(x_0,y_0)$ 都存在，则（　　）.

(A) $f(x,y)$ 在点 P 处连续

(B) $f(x,y)$ 在点 P 处可微分

(C) $\lim\limits_{x\to x_0} f(x,y_0)=\lim\limits_{y\to y_0} f(x_0,y)=f(x_0,y_0)$

(D) $\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}} f(x,y)$ 存在

【答案】选（C）.

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{xy}{x^2+y^2}, & x^2+y^2\neq 0,\\ 0, & x^2+y^2=0,\end{cases}$$

例 2：考虑函数 $f(x,y)$ 的下面 4 条性质：

①$f(x,y)$ 在点 (x_0,y_0) 处连续，

②$f(x,y)$ 在点 (x_0,y_0) 处的两个偏导数连续，

③$f(x,y)$ 在点 (x_0,y_0) 处可微，

④$f(x,y)$ 在点 (x_0,y_0) 处的两个偏导数存在.

若用"$P \Rightarrow Q$"表示可由性质 P 推出性质 Q，则有（　　）

(A) ②⇒③⇒①　　(B) ③⇒②⇒①

(C) ③⇒④⇒①　　(D) ③⇒①⇒④

【答案】选（A）.

例 3：二元函数 $f(x,y)$ 在点 $(0,0)$ 处可微的一个充分条件是（　）.

（A）$\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}[f(x,y)-f(0,0)]=0$

（B）$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{f(x,0)-f(0,0)}{x}=0$，且 $\lim\limits_{y\to0}\dfrac{f(0,y)-f(0,0)}{y}=0$

（C）$\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\dfrac{f(x,y)-f(0,0)}{\sqrt{x^2+y^2}}=0$

（D）$\lim\limits_{x\to0}[f_x'(x,0)-f_x'(0,0)]=0$，且 $\lim\limits_{y\to0}[f_y'(0,y)-f_y'(0,0)]=0$

【答案】选（C）.

（D）表明 $f_x'(x,0)$ 在点 $x=0$ 处连续，且 $f_y'(0,y)$ 在点 $y=0$ 处连续.

（A）表明 $f(x,y)$ 在点 $(0,0)$ 处连续.

（B）表明 $f_x'(0,0)=0$，$f_y'(0,0)=0$.

（C）表明 $\Delta z=0\cdot\Delta x+0\cdot\Delta y+o(\rho)$.

例 4： 讨论函数

$$f(x,y)=\begin{cases}(x^2+y^2)\sin\dfrac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}, & x^2+y^2\neq 0,\\ 0, & x^2+y^2=0,\end{cases}$$

在 $(0,0)$ 点的

(1) 连续性； (2) 可偏导性；

(3) 可微性； (4) 偏导函数的连续性.

解：(1) $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} f(x,y)=\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}(x^2+y^2)\sin\dfrac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}=0=f(0,0)$,

故 $f(x,y)$ 在点 $(0,0)$ 连续.

(2)由于 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{f(x,0)-f(0,0)}{x}=\lim\limits_{x\to0}x\sin\dfrac{1}{|x|}=0$，所以

$f_x'(0,0)=0$，同理 $f_y'(0,0)=0$.

(3)因为

$$\lim_{\substack{\Delta x\to0\\ \Delta y\to0}}\frac{[f(\Delta x,\Delta y)-\cancel{f(0,0)}]-[\cancel{f_x'(0,0)\Delta x}+\cancel{f_y'(0,0)\Delta y}]}{\sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}}$$

$$=\lim_{\substack{\Delta x\to0\\ \Delta y\to0}}\sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}\sin\frac{1}{\sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}}=0,$$

所以 $f(x,y)$ 在点 $(0,0)$ 可微.

(4)当 $x^2+y^2\neq 0$ 时，有

$$f_x'(x,y)=2x\sin\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}-\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}\cos\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}},$$

$$f_y'(x,y)=2y\sin\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}-\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}\cos\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}},$$

因为 $\lim\limits_{\substack{y=0\\x\to 0}} f_x'(x,y)=\lim\limits_{x\to 0}(2x\sin\frac{1}{|x|}-\frac{x}{|x|}\cos\frac{1}{|x|})$ 不存在，所以 $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\y\to 0}} f_x'(x,y)$ 不存在，进而 $f_x'(x,y)$ 在点 $(0,0)$ 处不连续，

同理 $f_y'(x,y)$ 在点 $(0,0)$ 处不连续.

例5：函数$f(x,y)$在(a,b)处的偏导数存在，则

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(a+x,b)-f(a-x,b)}{x}=(\ \mathbf{C}\ )$$

（**A**）$f_x'(a,b)$;　　　　(**B**) $f_x'(2a,b)$;

(**C**)$2f_x'(a,b)$;　　　　(**D**) $\dfrac{f_x'(a,b)}{2}$.

例 6. 设连续函数 $z=f(x,y)$ 满足 $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 1}}\dfrac{f(x,y)-2x+y-2}{\sqrt{x^2+(y-1)^2}}=0$，

则 $dz\big|_{(0,1)}=$________________.

答案　填 "$2dx-dy$".

解：　因为 $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 1}}\dfrac{f(x,y)-2x+y-2}{\sqrt{x^2+(y-1)^2}}=0$，所以 $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 1}}[f(x,y)-2x+y-2]=0$.

又因为 $f(x,y)$ 连续，所以 $f(0,1)-0+1-2=0$，即 $f(0,1)=1$，故

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 1}}\frac{f(x,y)-f(0,1)-2x+(y-1)}{\sqrt{x^2+(y-1)^2}}=0,$$

所以 $f(x,y)-f(0,1)=2(x-0)-(y-1)+o(\rho)$，其中 $\rho=\sqrt{x^2+(y-1)^2}$.

由全微分的定义可知 $dz\big|_{(0,1)}=2dx-dy$.

随堂测验

1. 求下列函数的偏导数:

（1） $f(x,y)=e^{-x}\sin(x+2y)$，求 $f'_x(0,\dfrac{\pi}{4})$ 及 $f'_y(0,\dfrac{\pi}{4})$；

（2） $z=x\ln(xy)$，求 $\dfrac{\partial^3 z}{\partial x^2\partial y}$ 及 $\dfrac{\partial^3 z}{\partial x\partial y^2}$；

2. 设 $f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{xy^3}{x^2+2y^2},(x,y)\neq(0,0),\\ 0, \quad (x,y)=(0,0),\end{cases}$ 求 $f''_{xy}(0,0)$ 及 $f''_{yx}(0,0)$.

3. 设 $f(x,y)=\begin{cases}xy\sin\dfrac{1}{x^2+y^2}, & (x,y)\neq(0,0),\\ 0, & (x,y)=(0,0).\end{cases}$

讨论在原点处函数的可微性及一阶偏导数的连续性.