第十节

多元函数微分学的几何应用

一、空间曲线的切线与法平面

二、空间曲面的切平面与法线

复习：　平面曲线的切线与法线

已知平面光滑曲线 $y=f(x)$ 在点 (x_0,y_0) 有

切线方程　$y-y_0=f'(x_0)(x-x_0)$

法线方程　$y-y_0=-\dfrac{1}{f'(x_0)}(x-x_0)$

若平面光滑曲线方程为 $F(x,y)=0$，因 $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=-\dfrac{F_x'(x,y)}{F_y'(x,y)}$

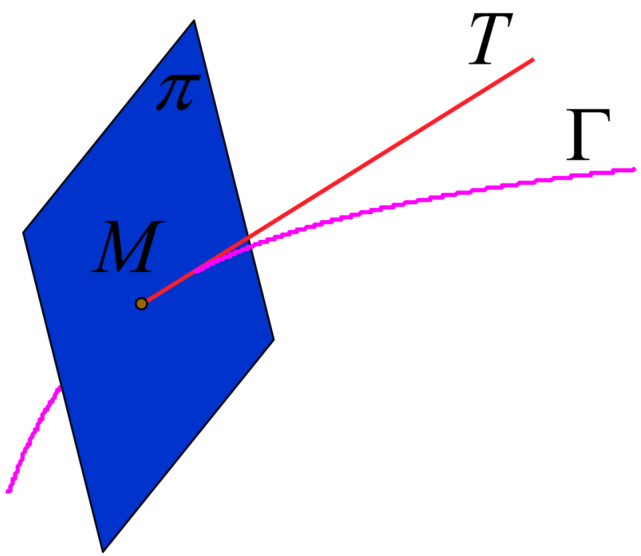
故在点 (x_0,y_0) 有

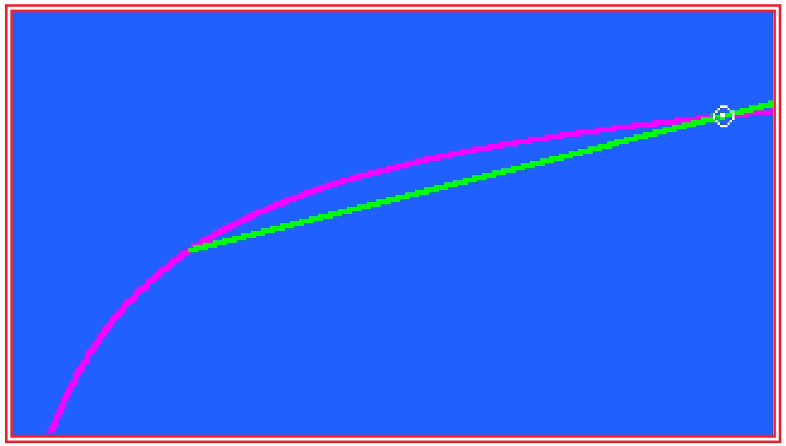
切线方程　$F_x'(x_0,y_0)(x-x_0)+F_y'(x_0,y_0)(y-y_0)=0$

法线方程　$F_y'(x_0,y_0)(x-x_0)-F_x'(x_0,y_0)(y-y_0)=0$

一、空间曲线的切线与法平面

空间光滑曲线在点M处的**切线**为此点处割线的极限位置. 过点M与切线垂直的平面称为曲线在该点的**法平面**.

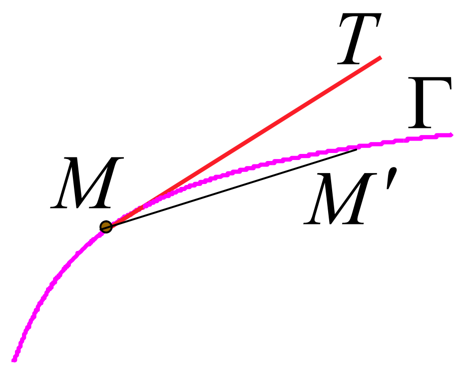




切线的生成

点击图中任意点动画开始或暂停

1.　曲线方程为参数方程的情况



$$\Gamma: \quad x=\varphi(t),\ y=\psi(t),\ z=\omega(t)$$

设 $t=t_0$ 对应 $M(x_0,y_0,z_0)$

$t=t_0+\Delta t$ 对应 $M'(x_0+\Delta x, y_0+\Delta y, z_0+\Delta z)$

割线 MM' 的方程：

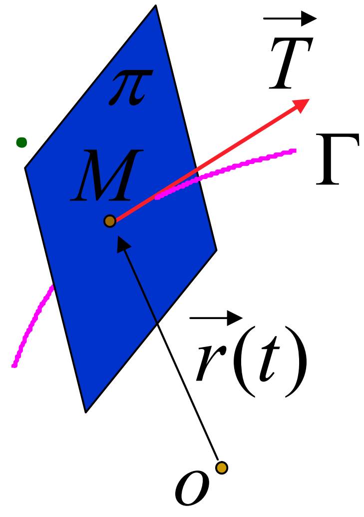
$$\frac{x-x_0}{\Delta x}=\frac{y-y_0}{\Delta y}=\frac{z-z_0}{\Delta z}$$

上述方程之分母同除以 Δt，令 $\Delta t\to 0$，得

切线方程　$$\frac{x-x_0}{\varphi'(t_0)}=\frac{y-y_0}{\psi'(t_0)}=\frac{z-z_0}{\omega'(t_0)}$$

此处要求$\varphi'(t_0),\psi'(t_0),\omega'(t_0)$不全为0,

如其中个别为0，则理解为相应分子也为0 .



切线的方向向量:

$$\vec{T}=\{\varphi'(t_0),\psi'(t_0),\omega'(t_0)\}$$

称为曲线在点M的切向量 .

$\vec{T}$也是法平面的法向量,因此得法平面方程

$$\varphi'(t_0)(x-x_0)+\psi'(t_0)(y-y_0)+\omega'(t_0)(z-z_0)=0$$

特别地，若Γ为 $x=x,y=y(x),z=z(x)$, 则

$$\vec{T}=\{1,y'(x_0),z'(x_0)\}$$

例1. 求圆柱螺旋线 $x=3\cos\theta, y=3\sin\theta, z=2\theta$ 在 $\theta=\frac{\pi}{2}$ 对应点处的切线方程和法平面方程.

解: 由于 $x'=-3\sin\theta, y'=3\cos\theta, z'=2$, 当 $\theta=\frac{\pi}{2}$ 时,

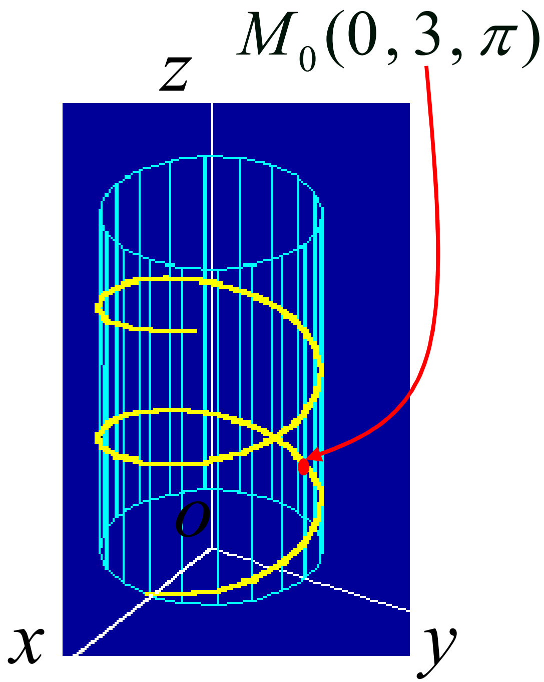
对应点为 $M_0(0,3,\pi)$, 切向量为 $\vec{T}=\{-3,0,2\}$, 故

切线方程 $\dfrac{x}{-3}=\dfrac{y-3}{0}=\dfrac{z-\pi}{2}$

即 $\begin{cases}2x+3z-3\pi=0\\ y-3=0\end{cases}$

法平面方程 $-3x+2(z-\pi)=0$

即 $3x-2z+2\pi=0$



2. 曲线为一般式的情况

光滑曲线 $\Gamma:\begin{cases} F(x,y,z)=0 \\ G(x,y,z)=0 \end{cases}$ 点 $M(x_0,y_0,z_0)$

当 $J=\left.\dfrac{\partial(F,G)}{\partial(y,z)}\right|_M \neq 0$ 时，Γ可表示为 $\begin{cases} y=y(x) \\ z=z(x) \end{cases}$，且有

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{1}{J}\frac{\partial(F,G)}{\partial(z,x)},\qquad \frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x}=\frac{1}{J}\frac{\partial(F,G)}{\partial(x,y)},$$

曲线上一点 $M(x_0,y_0,z_0)$ 处的切向量为

$$\vec{T}=\{1,\left.\frac{dy}{dx}\right|_{x_0},\left.\frac{dz}{dx}\right|_{x_0}\}$$

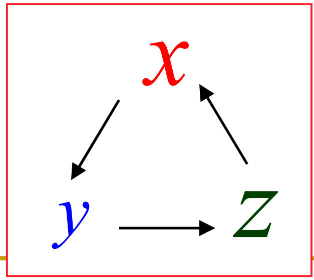
$$=\left\{1,\left.\frac{1}{J}\frac{\partial(F,G)}{\partial(z,x)}\right|_M,\left.\frac{1}{J}\frac{\partial(F,G)}{\partial(x,y)}\right|_M\right\}$$

或 $\vec{T}=\left\{ \left.\dfrac{\partial(F,G)}{\partial(y,z)}\right|_M, \left.\dfrac{\partial(F,G)}{\partial(z,x)}\right|_M, \left.\dfrac{\partial(F,G)}{\partial(x,y)}\right|_M \right\}$

则在点 $M(x_0,y_0,z_0)$ 有

切线方程 $$\frac{x-x_0}{\left.\dfrac{\partial(F,G)}{\partial(y,z)}\right|_M}=\frac{y-y_0}{\left.\dfrac{\partial(F,G)}{\partial(z,x)}\right|_M}=\frac{z-z_0}{\left.\dfrac{\partial(F,G)}{\partial(x,y)}\right|_M}$$

法平面方程 $$\left.\frac{\partial(F,G)}{\partial(y,z)}\right|_M(x-x_0)+\left.\frac{\partial(F,G)}{\partial(z,x)}\right|_M(y-y_0)+\left.\frac{\partial(F,G)}{\partial(x,y)}\right|_M(z-z_0)=0$$



法平面方程

$$\left.\frac{\partial(F,G)}{\partial(y,z)}\right|_M (x-x_0)+\left.\frac{\partial(F,G)}{\partial(z,x)}\right|_M (y-y_0)$$

$$+\left.\frac{\partial(F,G)}{\partial(x,y)}\right|_M (z-z_0)=0$$

也可表为

$$\begin{vmatrix} x-x_0 & y-y_0 & z-z_0 \\ F'_x(x_0,y_0,z_0) & F'_y(x_0,y_0,z_0) & F'_z(x_0,y_0,z_0) \\ G'_x(x_0,y_0,z_0) & G'_y(x_0,y_0,z_0) & G'_z(x_0,y_0,z_0) \end{vmatrix}=0$$

例2. 求曲线 $x^2+y^2+z^2=6, x+y+z=0$ 在点 $M(1,-2,1)$ 处的切线方程与法平面方程.

解法1 令 $F=x^2+y^2+z^2-6,\ G=x+y+z,$ 则

$$\left.\frac{\partial(F,G)}{\partial(y,z)}\right|_M=\left.\begin{vmatrix}2y & 2z\\ 1 & 1\end{vmatrix}\right|_M=2(y-z)\Big|_M=-6;$$

同理有, $\left.\dfrac{\partial(F,G)}{\partial(z,x)}\right|_M=0;\quad \left.\dfrac{\partial(F,G)}{\partial(x,y)}\right|_M=6$

所以切向量 $\vec{T}=\{-6,\ 0,\ 6\}$

切线方程 $\dfrac{x-1}{-6}=\dfrac{y+2}{0}=\dfrac{z-1}{6}$ 即 $\begin{cases}x+z-2=0\\ y+2=0\end{cases}$

法平面方程 $-6\cdot(x-1)+0\cdot(y+2)+6\cdot(z-1)=0$

即 $x-z=0$

解法2. 方程组两边对x求导，得 $\begin{cases} y\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}+z\dfrac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x}=-x \\ \dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}+\dfrac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x}=-1 \end{cases}$

解得 $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\dfrac{z-x}{y-z},\ \dfrac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x}=\dfrac{x-y}{y-z}$

曲线在点$M(1,-2,\ 1)$处有:

切向量 $\vec{T}=\left\{1,\ \left.\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right|_M,\ \left.\dfrac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x}\right|_M\right\}=\{1,0,-1\}$

同理可得 切线方程 $\begin{cases} x+z-2=0 \\ y+2=0 \end{cases}$ 法平面方程 $x-z=0$

解法3. 曲面 $x^2+y^2+z^2=6, x+y+z=0$在点

$M(1,-2,\ 1)$处的法向量分别为

见后法向量

$$\boxed{\vec{n_1}=\{2,-4,2\}}, \vec{n_2}=\{1,1,1\}$$

故切向量为

$$\vec{T}=\vec{n_1}\times\vec{n_2}=\{2,-4,2\}, =\{-6,0,6\}$$

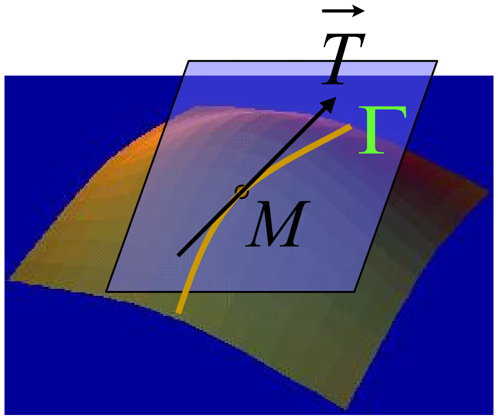
以下同解法1，得

切线方程 $\begin{cases} x+z-2=0 \\ y+2=0 \end{cases}$ 法平面方程 $x-z=0$

二、空间曲面的切平面与法线

设有光滑曲面 $\Sigma: F(x, y, z) = 0$

过定点 $M(x_0, y_0, z_0)$任意引一条Σ上的光滑曲线 $\Gamma: x = \varphi(t), y = \psi(t), z = \omega(t)$，设 $t = t_0$ 对应点M，且 $\varphi'(t_0), \psi'(t_0), \omega'(t_0)$不全为0. 则$\Gamma$在点$M$的切向量为

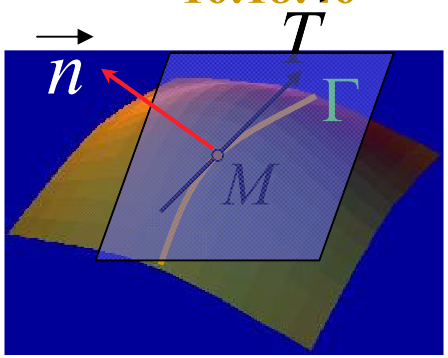


$$\vec{T} = \{\varphi'(t_0), \psi'(t_0), \omega'(t_0)\}$$

切线方程为 $$\frac{x - x_0}{\varphi'(t_0)} = \frac{y - y_0}{\psi'(t_0)} = \frac{z - z_0}{\omega'(t_0)}$$

下面证明：Σ上过点M的任何曲线在该点的切线都在同一平面上. 并称此平面为Σ在该点的切平面.

证：$\because \Gamma: x=\varphi(t), y=\psi(t), z=\omega(t)$ 在 Σ 上，



$$\therefore \quad F(\varphi(t), \psi(t), \omega(t)) \equiv 0$$

两边在 $t=t_0$ 处求导，注意 $t=t_0$ 对应点 M，

得

$$\boxed{F'_x(x_0,y_0,z_0)\,\varphi'(t_0)+F'_y(x_0,y_0,z_0)\,\psi'(t_0)+F'_z(x_0,y_0,z_0)\,\omega'(t_0)=0}$$

令 $\vec{T}=\{\varphi'(t_0), \psi'(t_0), \omega'(t_0)\}$

$\vec{n}=\{F'_x(x_0,y_0,z_0), F'_y(x_0,y_0,z_0), F'_z(x_0,y_0,z_0)\}$

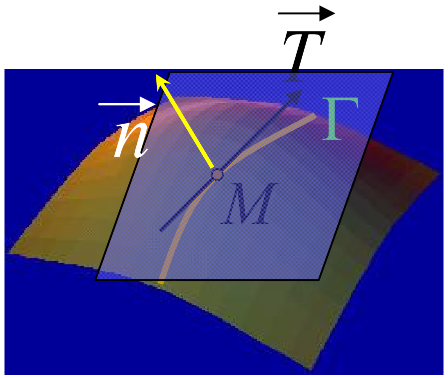
切向量 $\vec{T} \perp \vec{n}$

由于曲线 Γ 的任意性，表明这些切线都在过点 $\boldsymbol{M}$，

且以 $\vec{n}$ 为法向量 的平面上 ，从而切平面是存在的 .

当 $\vec{n}=\{F'_x(x_0,y_0,z_0),F'_y(x_0,y_0,z_0),F'_z(x_0,y_0,z_0)\}\neq\vec{0}$时，

称之为曲面Σ在点M的法向量。



进而得到

切平面方程

$$F'_x(x_0,y_0,z_0)(x-x_0)+F'_y(x_0,y_0,z_0)(y-y_0)$$
$$+F'_z(x_0,y_0,z_0)(z-z_0)=0$$

法线方程

$$\frac{x-x_0}{F'_x(x_0,y_0,z_0)}=\frac{y-y_0}{F'_y(x_0,y_0,z_0)}=\frac{z-z_0}{F'_z(x_0,y_0,z_0)}$$

特别，当光滑曲面Σ 的方程为显式 $z=f(x,y)$时，令

$$F(x,y,z)=f(x,y)-z \quad \text{或} \quad =z-f(x,y)$$

$$F'_x(x,y,z)=\pm f'_x(x,y), F'_y(x,y,z)=\pm f'_y(x,y),\ F'_z(x,y,z)=\mp 1$$

$$\vec{n}=\pm\{f'_x(x_0,y_0),\ f'_y(x_0,y_0),\ -1\}$$

故当函数 $f(x,y)$在点(x_0,y_0)有连续偏导数时，曲面 Σ 在点(x_0,y_0,z_0)有

切平面方程

$$z-z_0=f'_x(x_0,y_0)(x-x_0)+f'_y(x_0,y_0)(y-y_0)$$

法线方程

$$\frac{x-x_0}{f'_x(x_0,y_0)}=\frac{y-y_0}{f'_y(x_0,y_0)}=\frac{z-z_0}{-1}$$

用 α, β, γ 表示法向量的方向角，并假定法向量方向向上，则 γ 为锐角.

取法向量 $\vec{n}=\{-f_x'(x_0, y_0), -f_y'(x_0, y_0), 1\}$

为正

将 $f_x'(x_0, y_0), f_y'(x_0, y_0)$ 分别简记为 f_x', f_y'，则

法向量 $\vec{n}$ 的方向余弦：

$$\cos\alpha = \frac{-f_x'}{\sqrt{1+f_x'^2+f_y'^2}}, \qquad \cos\beta = \frac{-f_y'}{\sqrt{1+f_x'^2+f_y'^2}},$$

$$\cos\gamma = \frac{1}{\sqrt{1+f_x'^2+f_y'^2}}$$

为多元函数积分作准备。

例3. 求椭球面 $x^2+2y^2+3z^2=36$ 在点(1 , 2 , 3) 处的切平面及法线方程.

解：令 $F(x,y,z)=x^2+2y^2+3z^2-36$

法向量 $\vec{n}=\{2x,4y,6z\}$

$$\vec{n}\Big|_{(1,2,3)}=\{2,8,18\}$$

所以球面在点 (1 , 2 , 3) 处有:

切平面方程 $2(x-1)+8(y-2)+18(z-3)=0$

即 $x+4y+9z-36=0$

法线方程 $\dfrac{x-1}{1}=\dfrac{y-2}{4}=\dfrac{z-3}{9}$

例4. 确定正数σ 使曲面 $xyz=\sigma$与球面 $x^2+y^2+z^2=a^2$在点 $M(x_0,y_0,z_0)$相切.

解: 二曲面在M点的法向量分别为

$$\vec{n}_1=\{y_0z_0\,,\,x_0z_0\,,\,x_0y_0\}\,,\qquad \vec{n}_2=\{x_0\,,\,y_0\,,\,z_0\}$$

二曲面在点M相切, 故 $\vec{n}_1\,//\,\vec{n}_2$, 因此有

$$\frac{x_0\,y_0z_0}{x_0{}^2}=\frac{x_0\,y_0\,z_0}{y_0{}^2}=\frac{x_0y_0\,z_0}{z_0{}^2}$$

$\therefore\quad x_0^2=y_0^2=z_0^2$, 又点$M$ 在球面上, 故

$$x_0^2=y_0^2=z_0^2=\frac{a^2}{3}\quad 得\quad |x_0|=|y_0|=|z_0|=\frac{a}{\sqrt{3}}$$

于是正数 $\sigma=\dfrac{a^3}{3\sqrt{3}}$

例5. 证明曲面 $F(x-my, z-ny)=0$的所有切平面恒与定直线平行, 其中$\boldsymbol{F(u,v)}$可微.

证: 曲面上任一点的法向量为

$$\vec{n}=\{F_1',\ F_1'\cdot(-m)+F_2'\cdot(-n),\ F_2'\}$$

$$=\{F_1',-mF_1'-nF_2',F_2'\}$$

取定直线的方向向量为 $\vec{l}=\{m,1,n\}$. (为定向量)

有 $\vec{l}\cdot\vec{n}=0$, 故 $\vec{l}\perp\vec{n}$, 所以结论成立 .

内容小结

1. 空间曲线的切线与法平面

1) 参数式情况空间光滑曲线 $\Gamma:\begin{cases} x=\varphi(t) \\ y=\psi(t) \\ z=\omega(t) \end{cases}$

切向量 $\vec{T}=\{\varphi(t_0),\psi'(t_0),\omega'(t_0)\}$

切线方程 $$\frac{x-x_0}{\varphi'(t_0)}=\frac{y-y_0}{\psi'(t_0)}=\frac{z-z_0}{\omega'(t_0)}$$

法平面方程

$$\varphi'(t_0)(x-x_0)+\psi'(t_0)(y-y_0)+\omega'(t_0)(z-z_0)=0$$

2) 一般式情况. 空间光滑曲线 $\Gamma:\begin{cases} F(x,y,z)=0 \\ G(x,y,z)=0 \end{cases}$

切向量 $\vec{T}=\left\{\left.\frac{\partial(F,G)}{\partial(y,z)}\right|_M,\ \left.\frac{\partial(F,G)}{\partial(z,x)}\right|_M,\ \left.\frac{\partial(F,G)}{\partial(x,y)}\right|_M\right\}$

切线方程 $$\frac{x-x_0}{\left.\frac{\partial(F,G)}{\partial(y,z)}\right|_M}=\frac{y-y_0}{\left.\frac{\partial(F,G)}{\partial(z,x)}\right|_M}=\frac{z-z_0}{\left.\frac{\partial(F,G)}{\partial(x,y)}\right|_M}$$

法平面方程 $$\left.\frac{\partial(F,G)}{\partial(y,z)}\right|_M(x-x_0)+\left.\frac{\partial(F,G)}{\partial(z,x)}\right|_M(y-y_0)+\left.\frac{\partial(F,G)}{\partial(x,y)}\right|_M(z-z_0)=0$$

2. 曲面的切平面与法线

1) 隐式情况. 空间光滑曲面 $\Sigma: F(x,y,z)=0$

曲面Σ在点 $M(x_0,y_0,z_0)$ 的法向量

$$\vec{n}=\{F'_x(x_0,y_0,z_0),F'_y(x_0,y_0,z_0),F'_z(x_0,y_0,z_0)\}$$

切平面方程

$$F'_x(x_0,y_0,z_0)(x-x_0)+F'_y(x_0,y_0,z_0)(y-y_0)+F'_z(x_0,y_0,z_0)(z-z_0)=0$$

法线方程

$$\frac{x-x_0}{F'_x(x_0,y_0,z_0)}=\frac{y-y_0}{F'_y(x_0,y_0,z_0)}=\frac{z-z_0}{F'_z(x_0,y_0,z_0)}$$

2) 显式情况. 空间光滑曲面 $\Sigma: z = f(x, y)$

法向量 $\vec{n} = \{-f_x'(x_0, y_0), -f_y'(x_0, y_0), 1\}$

法线的方向余弦

$$\cos\alpha = \frac{-f_x'}{\sqrt{1+f_x'^2+f_y'^2}}, \quad \cos\beta = \frac{-f_y'}{\sqrt{1+f_x'^2+f_y'^2}},$$

$$\cos\gamma = \frac{1}{\sqrt{1+f_x'^2+f_y'^2}}$$

切平面方程

$$z - z_0 = f_x'(x_0, y_0)(x - x_0) + f_y'(x_0, y_0)(y - y_0)$$

法线方程 $$\frac{x - x_0}{f_x'(x_0, y_0)} = \frac{y - y_0}{f_y'(x_0, y_0)} = \frac{z - z_0}{-1}$$

思考与练习

1. 如果平面 $3x+\lambda y-3z+16=0$ 与椭球面 $3x^2+y^2+z^2=16$ 相切, 求 λ.

提示: 设切点为 $M(x_0, y_0, z_0)$, 则

$$\begin{cases} \dfrac{6x_0}{3}=\dfrac{2y_0}{\lambda}=\dfrac{2z_0}{-3} & \text{(二法向量平行)} \\ 3x_0+\lambda y_0-3z_0+16=0 & \text{(切点在平面上)} \\ 3x_0^2+y_0^2+z_0^2=16 & \text{(切点在椭球面上)} \end{cases}$$

$\longrightarrow \lambda=\pm 2$

2. 求曲线 $\begin{cases} x^2+y^2+z^2-3x=0 \\ 2x-3y+5z-4=0 \end{cases}$ 在点(1,1,1) 的切线与法平面.

解: 点 (1,1,1) 处两曲面的法向量为

$$\vec{n}_1=(2x-3,2y,2z)\big|_{(1,1,1)}=(-1,2,2)$$

$$\vec{n}_2=(2,-3,5)$$

因此切线的方向向量为 $\vec{l}=\vec{n}_1\times\vec{n}_2=(16,9,-1)$

由此得切线: $\dfrac{x-1}{16}=\dfrac{y-1}{9}=\dfrac{z-1}{-1}$

法平面: $16(x-1)+9(y-1)-(z-1)=0$

即 $16x+9y-z-24=0$

备用题

1. 设 $f(u)$ 可微， 证明 曲面 $z = xf(\frac{y}{x})$ 上任一点处的切平面都通过原点.

提示：在曲面上任意取一点 $M(x_0, y_0, z_0)$，则通过此点的切平面为

$$z - z_0 = \left.\frac{\partial z}{\partial x}\right|_M (x - x_0) + \left.\frac{\partial z}{\partial y}\right|_M (y - y_0)$$

证明原点坐标满足上述方程 .