第三节

曲面及其方程

一、曲面的概念

二、空间平面及其方程

三、常见空间曲面

1. 柱面
2. 旋转曲面
3. 二次曲面

一、曲面方程的概念

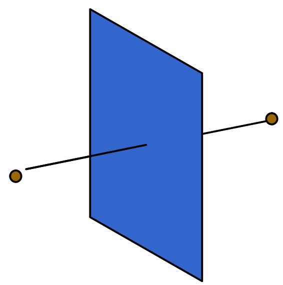
引例：求到两定点**A(1,2,3)** 和**B(2,-1,4)**等距离的点的轨迹方程.

解：设轨迹上的动点为 $M(x, y, z)$，则 $|AM| = |BM|$，即

$$\sqrt{(x-1)^2 + (y-2)^2 + (z-3)^2}$$
$$= \sqrt{(x-2)^2 + (y+1)^2 + (z-4)^2}$$

化简得　$2x - 6y + 2z - 7 = 0$

说明：动点轨迹为线段 ***AB*** 的垂直平分面.



显然在此平面上的点的坐标都满足此方程，

不在此平面上的点的坐标不满足此方程.

定义1. 如果曲面 S 与方程 $F(x, y, z)=0$ 有下述关系:

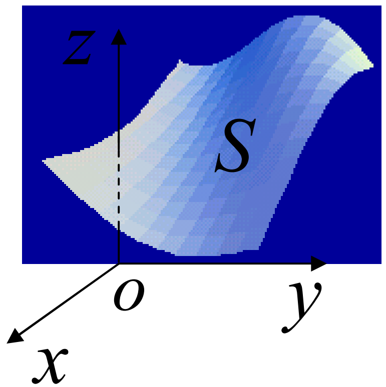
(1) 曲面 S 上的任意点的坐标都满足此方程;

(2) 不在曲面 S 上的点的坐标不满足此方程,

就称 $F(x, y, z)=0$ 为曲面 S 的方程,

曲面 S 为方程 $F(x, y, z)=0$ 的图形.

$F(x, y, z)=0$



两个基本问题:

(1) 已知一曲面作为点的几何轨迹时,

求曲面方程.

(2) 已知方程时，研究它所表示的几何形状.

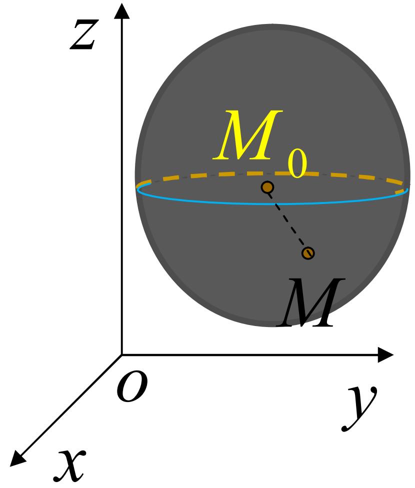
(必要时需作图)

例1. 由上节知球心为 $M_0(x_0, y_0, z_0)$，半径为 R 的球面方程为

$$(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2=R^2$$

特别，当 M_0 在原点时，球面方程为

$$x^2+y^2+z^2=R^2$$



其中：

$z=\sqrt{R^2-x^2-y^2}$ 表示上半球面，

$z=-\sqrt{R^2-x^2-y^2}$ 表示下半球面 .

二、空间平面及其方程

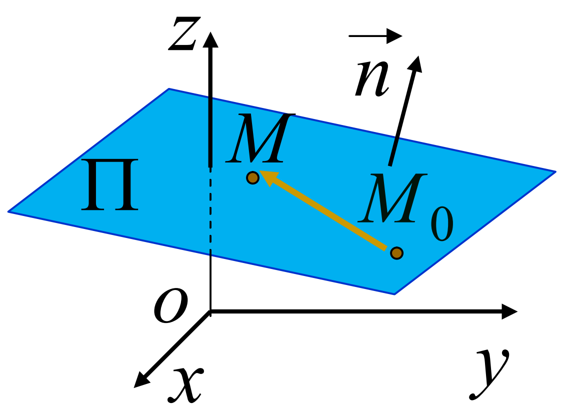
1、平面的点法式方程

2、平面的一般方程

3、两平面的夹角

1、平面的点法式方程

设平面Π过已知点 $M_0(x_0, y_0, z_0)$，且垂直于非零向量 $\vec{n}=\{A, B, C\}$，求该平面Π的方程.



任取点 $M(x, y, z) \in \Pi$，则有

$$\overrightarrow{M_0M} \perp \vec{n}$$

故

$$\overrightarrow{M_0M} \cdot \vec{n} = 0$$

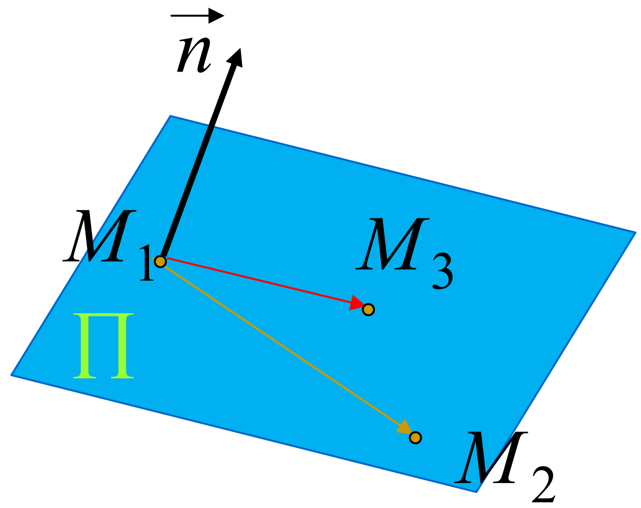
$$\overrightarrow{M_0M} = \{x - x_0, y - y_0, z - z_0\}$$

$$A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0 \qquad ①$$

称①式为平面Π的**点法式方程**，称 $\vec{n}$ 为平面Π的**法向量**.

例2. 求过三点 $M_1(2,-1,4), M_2(-1,3,-2), M_3(0,2,3)$ 的平面 Π 的方程.

解: 取该平面 Π 的法向量为



$$\vec{n} = \overrightarrow{M_1M_2} \times \overrightarrow{M_1M_3}$$

$$= \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -3 & 4 & -6 \\ -2 & 3 & -1 \end{vmatrix} = \{14, 9, -1\}.$$

又 $M_1 \in \Pi$, 利用点法式得平面 Π 的方程

$$14(x-2)+9(y+1)-(z-4)=0,$$

即

$$14x+9y-z-15=0.$$

平面的三点式方程

一般情况：过不共线三点 $M_k(x_k, y_k, z_k)(k=1,2,3)$ 的平面三点式方程为

$$\begin{vmatrix} x-x_1 & y-y_1 & z-z_1 \\ x_2-x_1 & y_2-y_1 & z_2-z_1 \\ x_3-x_1 & y_3-y_1 & z_3-z_1 \end{vmatrix} = 0$$

证明提示：三个向量 $\overrightarrow{M_1M}, \overrightarrow{M_1M_2}, \overrightarrow{M_1M_3}$ 共面；或四个点 M_1, M_2, M_3, M 共面

例2中，平面Π的三点式方程为

$$\begin{vmatrix} x-2 & y+1 & z-4 \\ -3 & 4 & -6 \\ -2 & 3 & -1 \end{vmatrix} = 0 \quad 即 \quad 14x+9y-z-15=0.$$

（结果完全一样）

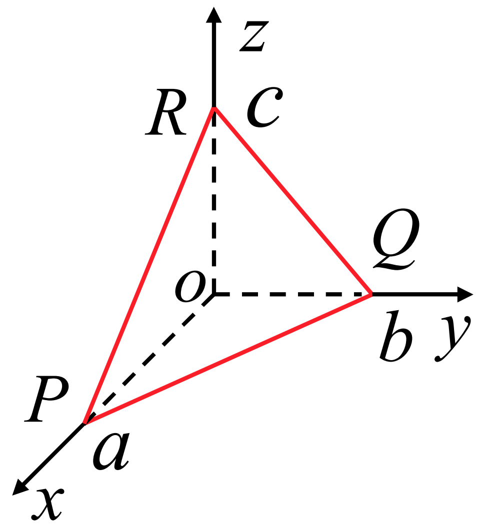
平面的截距式方程

当平面Π与三坐标轴的截距分别为 $a, b, c\ (abc \neq 0)$

时，平面方程为

$$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=1$$

此式称为平面的截距式方程.



证明提示：平面 Π 过下列三个点：

$P(a,0,0)$，$Q(0,b,0)$，$R(0,0,c)$

再用平面的三点式方程即可证明.

2、平面的一般方程

设平面Π的点法式方程为

$$A(x-x_0)+B(y-y_0)+C(z-z_0)=0$$

将其展开为

$$Ax+By+Cz-(Ax_0+B\,y_0+C\,z_0)=0$$

记 $D=-(Ax_0+B\,y_0+C\,z_0)$，则

$$Ax+By+Cz+D=0$$

此方程称为平面的**一般方程**。

显然,平面的一般方程与其点法式方程等价，并且可以相互转化。

$$Ax+By+Cz+D=0(A^2+B^2+C^2\neq 0)$$

特殊情形举例:

- 当 $D=0$ 时, $Ax+By+Cz=0$ 表示通过原点的平面;
- 当 $A=0$ 时, $By+Cz+D=0$ 表示平行于 x 轴的平面;
- 当 $A=D=0$ 时, $By+Cz=0$ 表示过 x 轴的平面;
- 当 $A=B=0$ 时, $Cz+D=0$ 表示平行于 xoy 面的平面;
- 当 $A=B=D=0$ 时, $z=0$ 表示 xoy 坐标面;

等等,·······

例3. 求通过 x 轴和点 $(4, -3, -1)$ 的平面方程.

解: 因平面通过 x 轴, 故 $A = D = 0$

设所求平面方程为

$$By + Cz = 0$$

代入已知点 $(4, -3, -1)$ 得 $C = -3B$

化简, 得所求平面方程

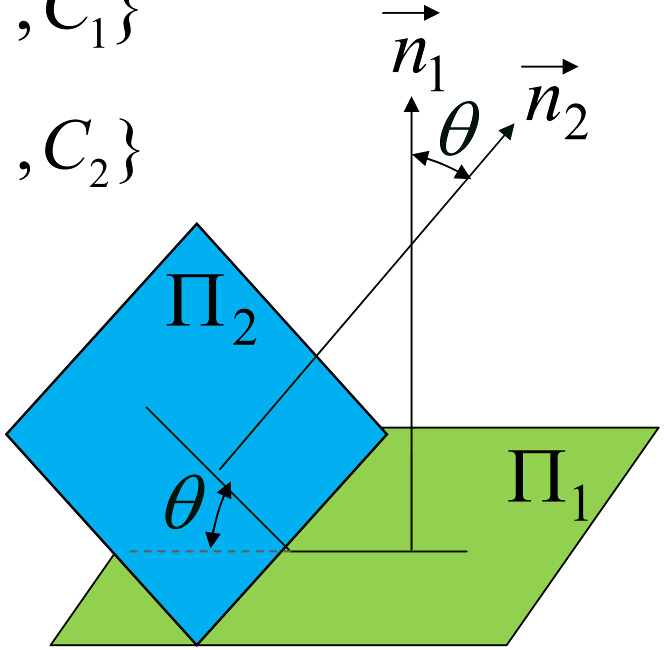
$$y - 3z = 0$$

3、两平面的夹角

两平面法向量的夹角(不取钝角)称为两平面的夹角.

设平面Π_1的法向量为 $\vec{n}_1=\{A_1,B_1,C_1\}$

平面Π_2的法向量为 $\vec{n}_2=\{A_2,B_2,C_2\}$



则两平面夹角θ 的余弦为

$$\cos\theta=\frac{|\vec{n}_1\cdot\vec{n}_2|}{|\vec{n}_1||\vec{n}_2|}\qquad \left(0\le\theta\le\frac{\pi}{2}\right)$$

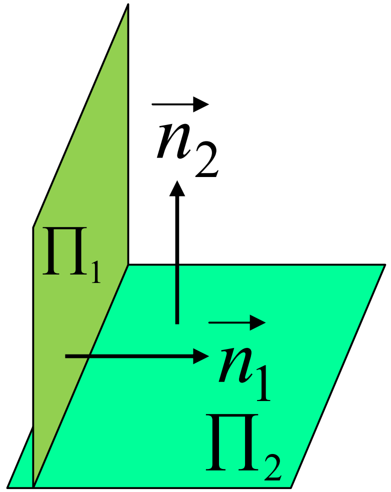
即得

$$\theta=\arccos\frac{|A_1A_2+B_1B_2+C_1C_2|}{\sqrt{A_1^2+B_1^2+C_1^2}\sqrt{A_2^2+B_2^2+C_2^2}}$$

$$\Pi_1: \vec{n}_1 = \{A_1, B_1, C_1\}$$
$$\Pi_2: \vec{n}_2 = \{A_2, B_2, C_2\}$$

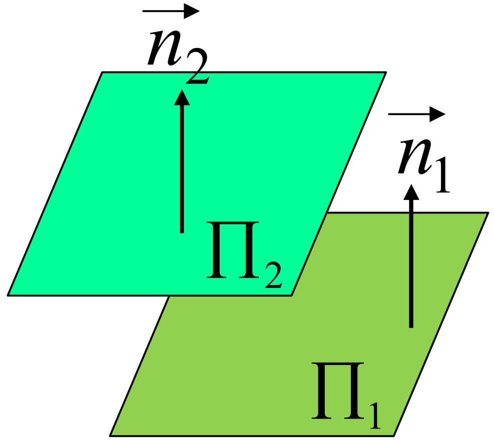
$$\cos\theta = \frac{|\vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2|}{|\vec{n}_1||\vec{n}_2|}$$

特别有下列结论:



(1) $\Pi_1 \perp \Pi_2 \Longleftrightarrow \vec{n}_1 \perp \vec{n}_2$

$$\Longleftrightarrow A_1 A_2 + B_1 B_2 + C_1 C_2 = 0$$



(2) $\Pi_1 // \Pi_2 \Longleftrightarrow \vec{n}_1 // \vec{n}_2$

$$\Longleftrightarrow \frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} = \frac{C_1}{C_2}$$

例4. 一平面通过两点 $M_1(1,1,1)$ 和 $M_2(0,1,-1)$, 且垂直于平面 $\Pi: x+y+z=0$, 求其方程.

解: 设所求平面为 $Ax+By+Cz+D=0$ ，则有

$$\begin{cases} A+B+C+D=0 \\ B-C+D=0 \\ A+B+C=0 \end{cases}$$

解得 $\underline{A:B:C:D=(-2):1:1:0}$ ，所以所求平面为

$$-2x+y+z+0=0$$

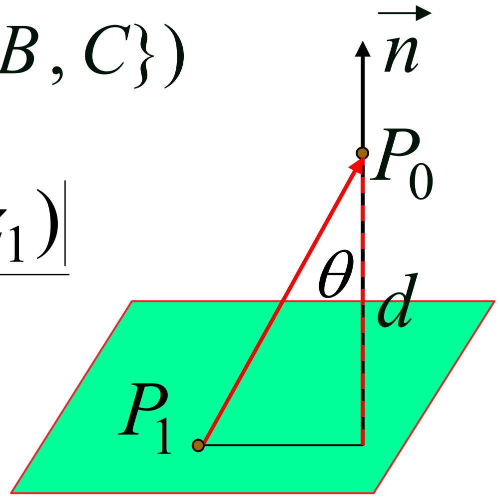
注意方法!

即 $$2x-y-z=0$$

例5. 设 $P_0(x_0,y_0,z_0)$ 是平面 $Ax+By+Cz+D=0$ 外一点, 求 P_0 到平面的距离 d.

解: 在平面上取一点 $P_1(x_1,y_1,z_1)$, 则

$$d=\left|\overrightarrow{P_1P_0}\right|\left|\cos\theta\right|=\frac{\left|\overrightarrow{P_1P_0}\cdot\vec{n}\right|}{\left|\vec{n}\right|}\qquad(\vec{n}=\{A,B,C\})$$



$$=\frac{\left|A(x_0-x_1)+B(y_0-y_1)+C(z_0-z_1)\right|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}$$

$$\Big\downarrow\ Ax_1+By_1+Cz_1+D=0$$

$$d=\frac{\left|Ax_0+By_0+Cz_0+D\right|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}$$

(点到平面的距离公式)

例6. 求过点 $(1,1,1)$，且垂直于两平面 $x-y+z=7$ 和 $3x+2y-12z+5=0$ 的平面方程.

解: 已知两平面的法向量为

$$\vec{n}_1=\{1,-1,1\},\quad \vec{n}_2=\{3,2,-12\}$$

取所求平面的法向量为

$$\vec{n}=\vec{n}_1\times\vec{n}_2=\{10,15,5\}$$

则所求平面方程为

$$10(x-1)+15(y-1)+5(z-1)=0$$

化简得 $$2x+3y+z-6=0$$

内容小结

1.平面方程:

一般式 $Ax+By+Cz+D=0\ (A^2+B^2+C^2\neq 0)$

点法式 $A(x-x_0)+B(y-y_0)+C(z-z_0)=0$

三点式 $\begin{vmatrix} x-x_1 & y-y_1 & z-z_1 \\ x_2-x_1 & y_2-y_1 & z_2-z_1 \\ x_3-x_1 & y_3-y_1 & z_3-z_1 \end{vmatrix}=0$

截距式 $\dfrac{x}{a}+\dfrac{y}{b}+\dfrac{z}{c}=1\quad (abc\neq 0)$

2.平面与平面之间的关系

平面 $\Pi_1 : A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0,\ \vec{n}_1 = \{A_1, B_1, C_1\}$

平面 $\Pi_2 : A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0,\ \vec{n}_2 = \{A_2, B_2, C_2\}$

垂直: $\vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2 = 0 \Longleftrightarrow A_1A_2 + B_1B_2 + C_1C_2 = 0$

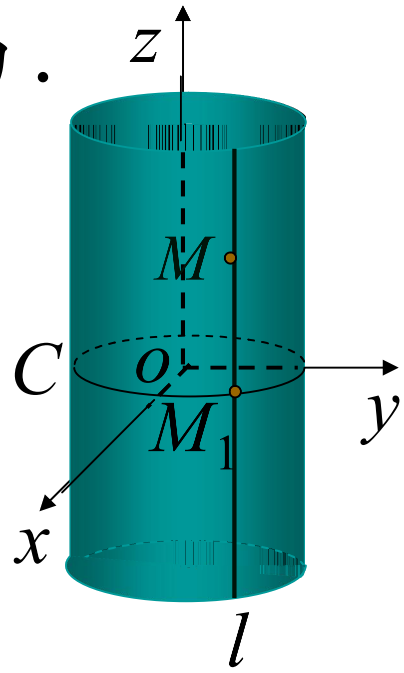
平行: $\vec{n}_1 \times \vec{n}_2 = \vec{0} \Longleftrightarrow \dfrac{A_1}{A_2} = \dfrac{B_1}{B_2} = \dfrac{C_1}{C_2}$

夹角公式: $\cos\theta = \dfrac{|\vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2|}{|\vec{n}_1||\vec{n}_2|}$

三、常见空间曲面

1. 柱面

引例. 问方程 $x^2+y^2=R^2$ 表示怎样的曲面 .



解: 在 ***xoy*** 面上, $x^2+y^2=R^2$ 表示圆 ***C***,

在圆 ***C*** 上任取一点 $M_1(x,y,0)$, 过此点作

平行 z 轴的直线 ***l***, 对任意 z , 点 $M(x,y,z)$

的坐标也满足方程 $x^2+y^2=R^2$

沿曲线 ***C*** 平行于 z 轴的一切直线所形成的曲面称为

圆柱面. 其上所有点的坐标都满足此方程, 故在空间

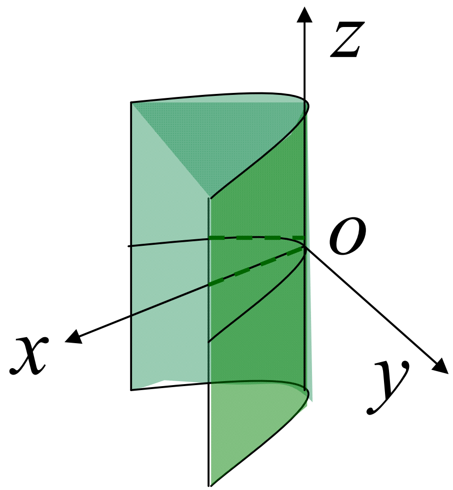
$$x^2+y^2=R^2 \text{ 表示圆柱面}$$

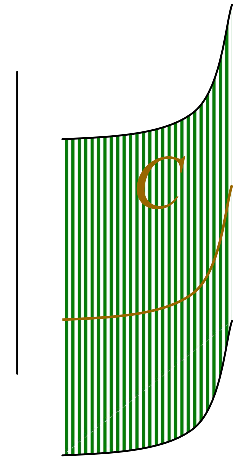
定义3. 平行定直线并沿定曲线 C 移动的直线 l 形成的轨迹叫做**柱面**. C 叫做**准线**, l 叫做**母线**.

- $y^2 = 2x$ 表示抛物柱面,

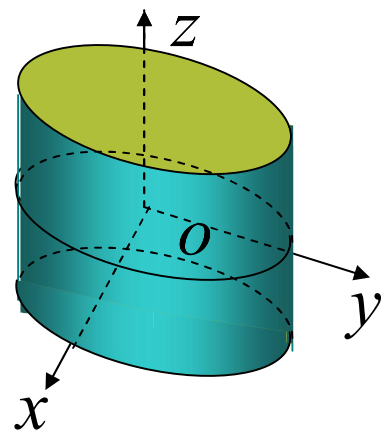
  母线平行于 z 轴;

  准线为 xoy 面上的抛物线.

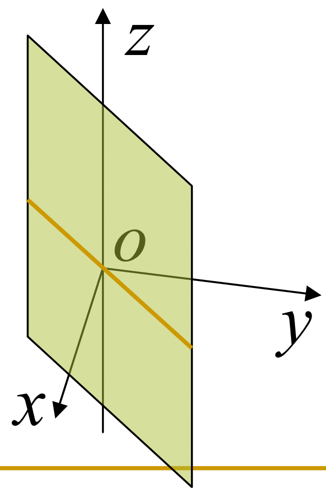




- $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$ 表示母线平行于 z 轴的椭圆柱面.



- $x - y = 0$ 表示母线平行于 z 轴的平面.
  (且 z 轴在平面上)

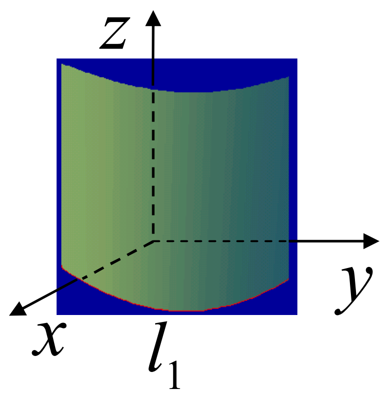


一般地，在三维空间

方程 $F(x,y)=0$ 表示柱面，

母线平行于 z 轴；

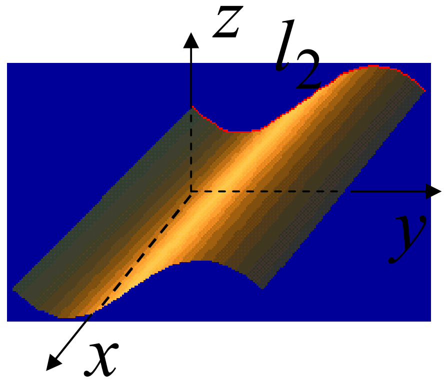
准线 xoy 面上的曲线 l_1.



方程 $G(y,z)=0$ 表示柱面，

母线平行于 x 轴；

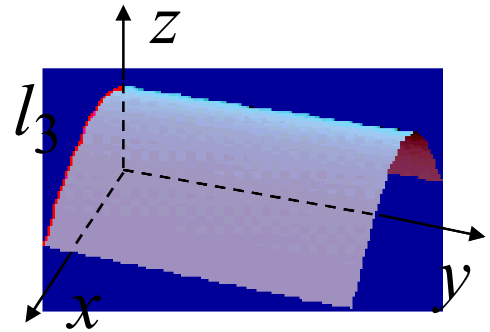
准线 yoz 面上的曲线 l_2.



方程 $H(z,x)=0$ 表示柱面，

母线平行于 y 轴；

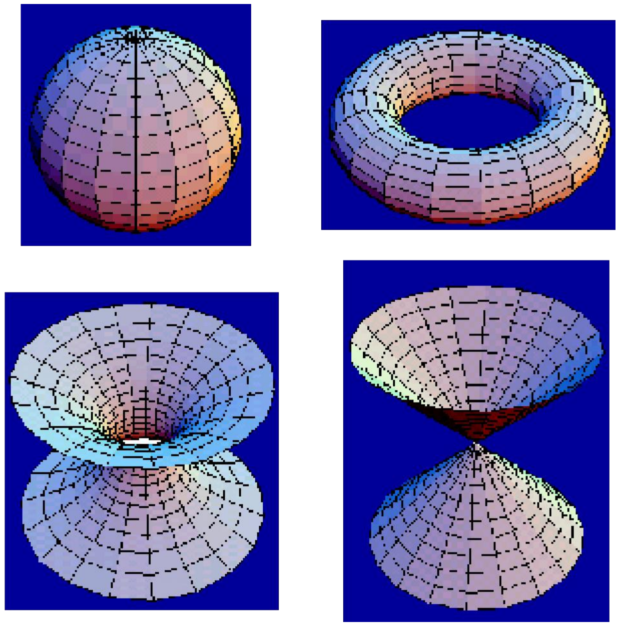
准线 xoz 面上的曲线 l_3.

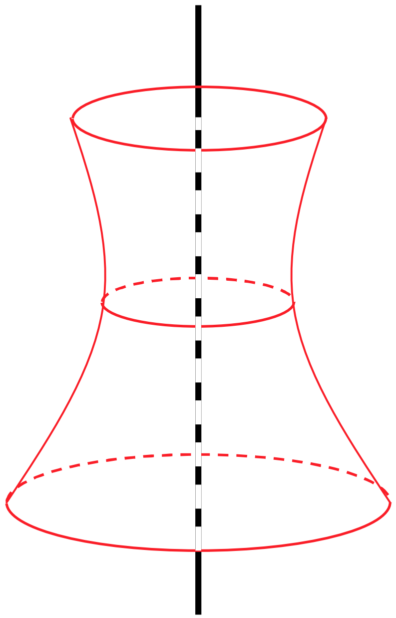


2. 旋转曲面

定义2. 一条平面曲线绕其平面上一条定直线旋转一周所形成的曲面叫做旋转曲面. 该定直线称为旋转轴.

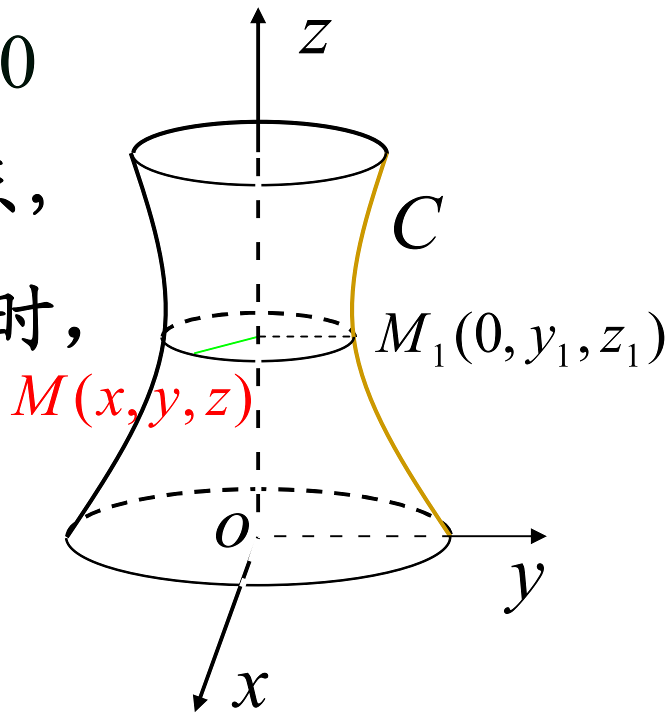
例如：





建立yoz面上曲线C 绕z轴旋转所成曲面的方程:

给定 yoz 面上曲线 C: $f(y,z)=0$



设 $M(x,y,z)$ 为曲面上任意一点，

当该点转到曲线C 上 $M_1(0,y_1,z_1)$时，

则有 $f(y_1,z_1)=0$

由于

$$z=z_1,\quad \sqrt{x^2+y^2}=|y_1|$$

故旋转曲面方程为

$$f(\pm\sqrt{x^2+y^2},z)=0$$

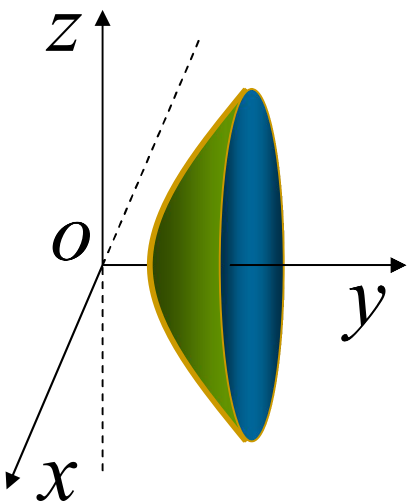
特点： x和y一定是以 x^2+y^2 整体形式一道出现。

yoz 面上曲线 ***C***: $f(y,z)=0$ 绕 **z** 轴旋转所成曲面的方程

替换　　不变

$$f(\pm\sqrt{x^2+y^2},z)=0$$

思考：当曲线 ***C*** 绕 ***y*** 轴旋转时，曲面方程如何？



$$C: f(y,z)=0$$

不变　　替换

$$f(y,\pm\sqrt{x^2+z^2})=0$$

例7. 试建立顶点在原点, 旋转轴为z 轴, 半顶角为 α 的圆锥面方程.

解: 在yoz面上直线L 的方程为

$$z = y\cot\alpha$$

绕z 轴旋转时, 圆锥面的方程为

$$z = \pm\sqrt{x^2 + y^2}\cot\alpha$$

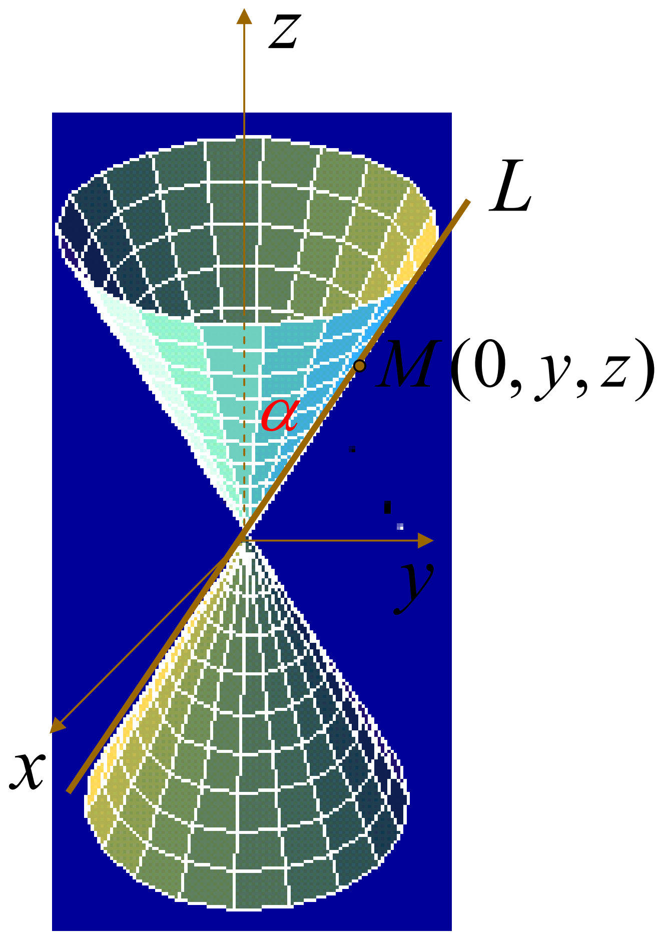
令 $a = \cot\alpha$ 两边平方

$$z^2 = a^2(x^2 + y^2)$$

特例

上半圆锥: $z = a\sqrt{x^2 + y^2}$

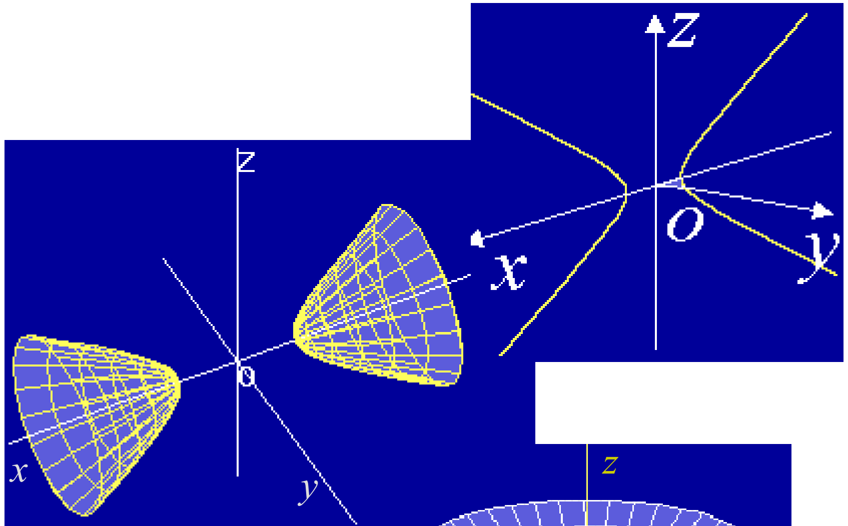
下半圆锥: $z = -a\sqrt{x^2 + y^2}$



例8. 求坐标面 xoz 上的双曲线 $\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{z^2}{c^2}=1$ 分别绕 x 轴和 z 轴旋转一周所生成的旋转曲面方程.

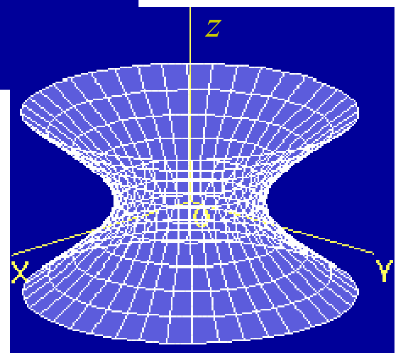
解：绕 x 轴旋转所成曲面方程为

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2+z^2}{c^2}=1$$



绕 z 轴旋转所成曲面方程为

$$\frac{x^2+y^2}{a^2}-\frac{z^2}{c^2}=1$$



这两种曲面都叫做**旋转双曲面**.

3. 二次曲面

三元二次方程

$$Ax^2 + By^2 + Cz^2 + Dxy + Eyz + Fxz$$
$$+ Gx + Hy + Iz + J = 0$$

(二次项系数不全为 **0**)

的图形通常为二次曲面. 其基本类型有:

椭球面、抛物面、双曲面、锥面

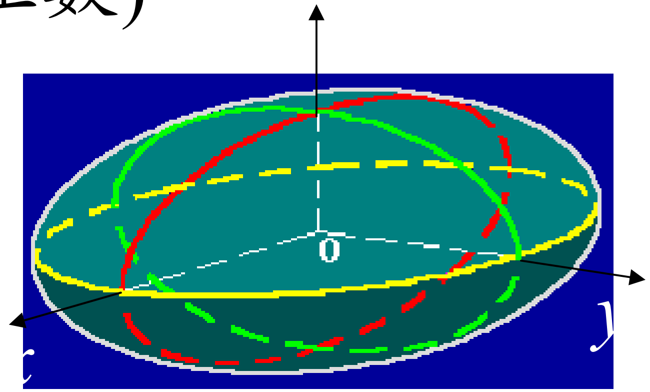
适当选取直角坐标系可得它们的标准方程,

下面仅就几种常见标准型的特点进行介绍 .

研究二次曲面特性的基本方法: 截痕法

(1) 椭球面

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1 \quad (a,b,c\text{为正数})$$



①范围:

$$|x|\le a,\quad |y|\le b,\quad |z|\le c$$

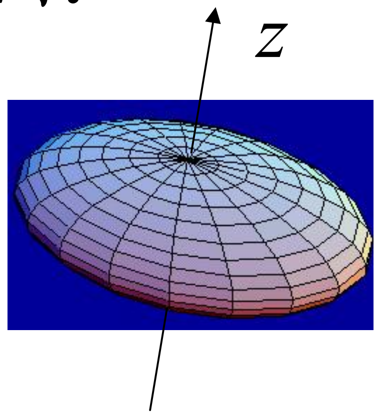
②与坐标面的交线：椭圆

$$\begin{cases}\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1\\ z=0\end{cases},\quad \begin{cases}\dfrac{y^2}{b^2}+\dfrac{z^2}{c^2}=1\\ x=0\end{cases},\quad \begin{cases}\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{z^2}{c^2}=1\\ y=0\end{cases}$$

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1 \quad (a,b,c\text{为正数})$$

③ 截痕: 与$z=z_1$ $(|z_1|<c)$的交线为椭圆:

$$\begin{cases} \dfrac{x^2}{\frac{a^2}{c^2}(c^2-z_1{}^2)}+\dfrac{y^2}{\frac{b^2}{c^2}(c^2-z_1{}^2)}=1 \\ z=z_1 \end{cases}$$



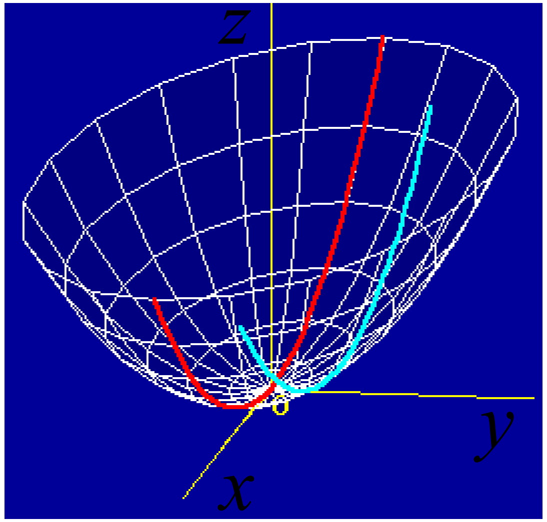
同样 $y=y_1$ $(|y_1|\le b)$ 及 $x=x_1$ $(|x_1|\le a)$的截痕

也为椭圆.

④ 当 $a=b$ 时为旋转椭球面; 当$a=b=c$ 时为球面.

(2) 抛物面

① 椭圆抛物面

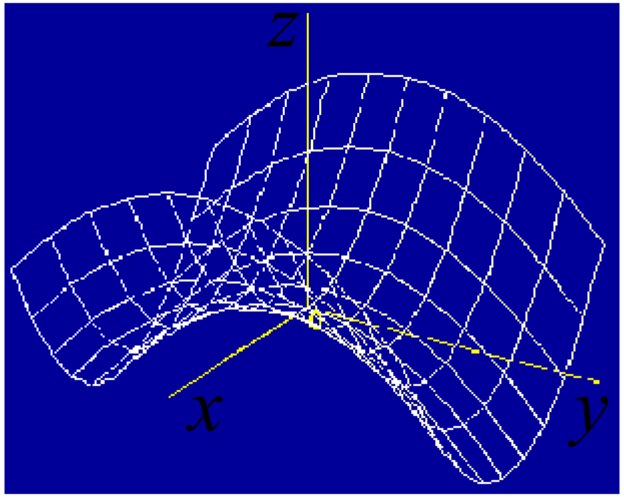


$$\frac{x^2}{2p}+\frac{y^2}{2q}=z \quad (p,q\ 同号)$$

特别, 当 $p=q$ 时为绕 z 轴的旋转抛物面.

如: $z=x^2+y^2$ ⟶ 图形如碗

② 双曲抛物面（鞍形曲面）



$$-\frac{x^2}{2p}+\frac{y^2}{2q}=z \quad (p,q\ 同号)$$

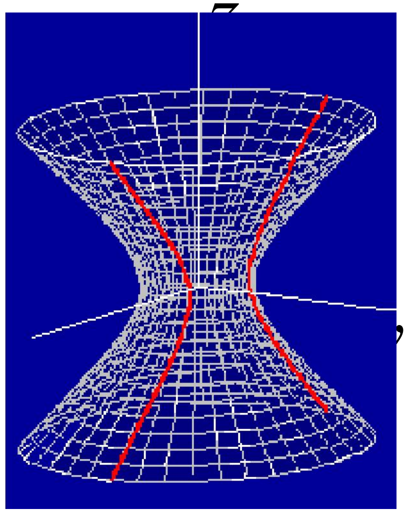
如:

$z=x^2-y^2, z=xy$ ⟶ 形如马鞍

(3) 双曲面

① 单叶双曲面

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1 \quad (a,b,c\text{ 为正数})$$



平面 $\mathbf{z}=\mathbf{z}_1$ 上的截痕为椭圆.

平面 $y=y_1$上的截痕情况:

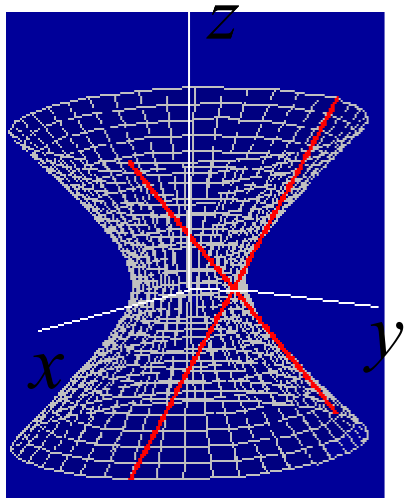
1) $|y_1|<b$ 时, 截痕为双曲线:

$$\begin{cases}\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{z^2}{c^2}=1-\dfrac{y_1^2}{b^2}\\ y=y_1\end{cases}$$

(实轴平行于x 轴;
虚轴平行于$\mathbf{z}$ 轴)

2) $|y_1| = b$ 时, 截痕为相交直线:

$$\begin{cases} \dfrac{x}{a} \pm \dfrac{z}{c} = 0 \\ y = b\,(\text{或}\ -b) \end{cases}$$

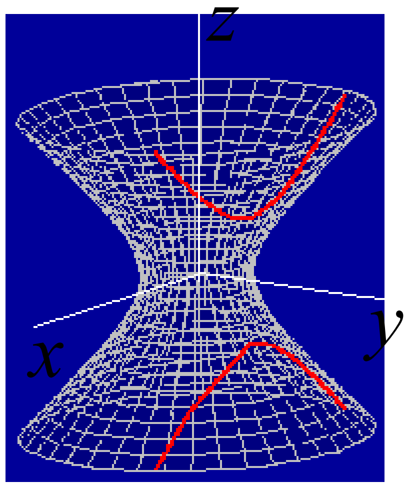


3) $|y_1| > b$时, 截痕为双曲线:

$$\begin{cases} \dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{z^2}{c^2} = \underline{1 - \dfrac{y_1^2}{b^2}} < 0 \\ y = y_1 \end{cases}$$

(实轴平行于z 轴;

虚轴平行于x 轴)



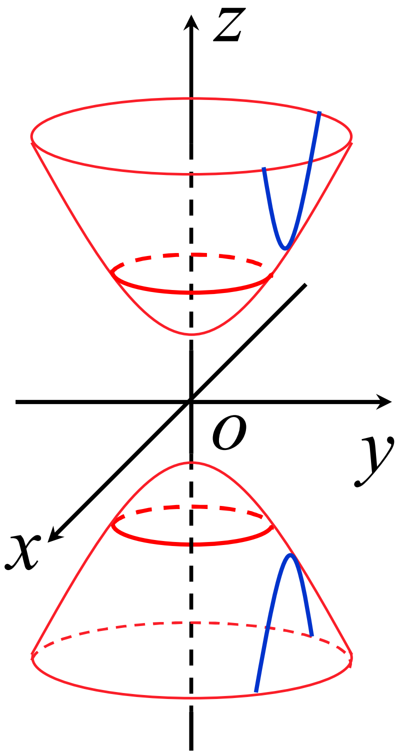
② 双叶双曲面

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=-1 \quad (a,b,c\text{为正数})$$

平面 $y=y_1$ 上的截痕为双曲线

平面 $x=x_1$ 上的截痕为双曲线

平面 $z=z_1 \quad (|z_1|>c)$上的截痕为椭圆

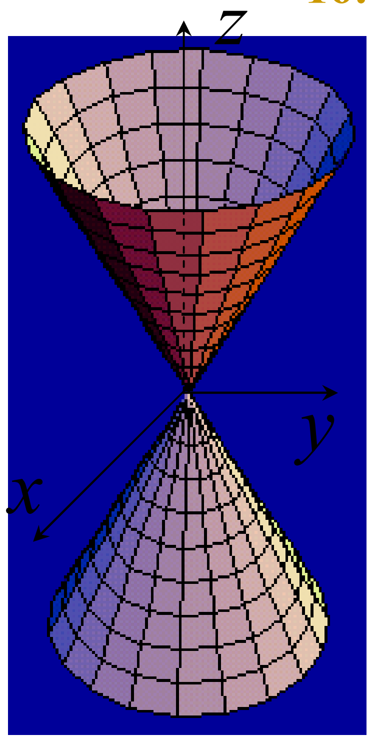


注意单叶双曲面与双叶双曲面的区别:

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=\begin{cases} 1 & \text{单叶双曲面} \\ -1 & \text{双叶双曲面} \end{cases}$$

(4) 椭圆锥面

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=z^2 \quad (a, b\text{ 为正数})$$



在平面 $z=t$ 上的截痕为椭圆

$$\frac{x^2}{(at)^2}+\frac{y^2}{(bt)^2}=1,\ z=t \qquad ①$$

在平面 $x=0$ 或 $y=0$ 上的截痕为过原点的两直线.

可以证明, 椭圆①上任一点与原点的连线均在曲面上.

当 $a=b$ 时为圆锥面。

内容小结

1. 空间曲面 $\longleftrightarrow$ 三元方程 $F(x, y, z) = 0$

- 球面 $(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2 = R^2$

- 旋转曲面

如, 曲线 $\begin{cases} f(y, z) = 0 \\ x = 0 \end{cases}$ 绕 z 轴的旋转曲面:

$$f(\pm\sqrt{x^2 + y^2}\,, z) = 0$$

- 柱面

如,曲面 $F(x, y) = 0$ 表示母线平行 z 轴的柱面.

又如,椭圆柱面, 双曲柱面, 抛物柱面等 .

2. 二次曲面 $\longleftrightarrow$ 三元二次方程

- 椭球面 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}+\dfrac{z^2}{c^2}=1$

- 抛物面:
  (p,q 同号)

  椭圆抛物面 $\dfrac{x^2}{2p}+\dfrac{y^2}{2q}=z$

  双曲抛物面 $-\dfrac{x^2}{2p}+\dfrac{y^2}{2q}=z$

- 双曲面:

  单叶双曲面 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}-\dfrac{z^2}{c^2}=1$

  双叶双曲面 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}-\dfrac{z^2}{c^2}=-1$

- 椭圆锥面: $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=z^2$

平面解析几何与空间解析几何的对比

1. 指出下列方程的图形：

方 程	平面解析几何中	空间解析几何中
$x=5$	平行于 y 轴的直线	平行于 yoz 面的平面
$x^2+y^2=9$	圆心在(0,0) 半径为 3 的圆	以 z 轴为中心轴的圆柱面
$y=x+1$	斜率为1的直线	平行于 z 轴的平面