第三节　偏导数

一、　偏导数的概念及其计算

二 、高阶偏导数

一、 偏导数的概念及其计算

定义1. 设函数 $z=f(x,y)$在点(x_0,y_0) 的某邻域内

有定义，若极限 $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{f(x_0+\Delta x,y_0)-f(x_0,y_0)}{\Delta x}$存在，

就称此极限为函数 $z=f(x,y)$在点(x_0,y_0) 处**关于*x***

的**偏导数**，记为 $\left.\dfrac{\partial z}{\partial x}\right|_{(x_0,y_0)}$； $\left.\dfrac{\partial f}{\partial x}\right|_{(x_0,y_0)}$； $\left.z'_x\right|_{(x_0,y_0)}$；

$f'_x(x_0,y_0)$； $f'_1(x_0,y_0)$. 由此

$$f'_x(x_0,y_0)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x,y_0)-f(x_0,y_0)}{\Delta x}=\left.\frac{\mathrm{d}f(x,y_0)}{\mathrm{d}x}\right|_{x=x_0}$$

同理，函数 $z=f(x,y)$ 在点 (x_0,y_0) 处关于 y 的偏导数

$$f_y'(x_0,y_0)=\lim_{\Delta y\to 0}\frac{f(x_0,y_0+\Delta y)-f(x_0,y_0)}{\Delta y}$$

$$\overset{\text{如果极限存在}}{=}\left.\frac{\mathrm{d}f(x_0,y)}{\mathrm{d}y}\right|_{y=y_0}$$

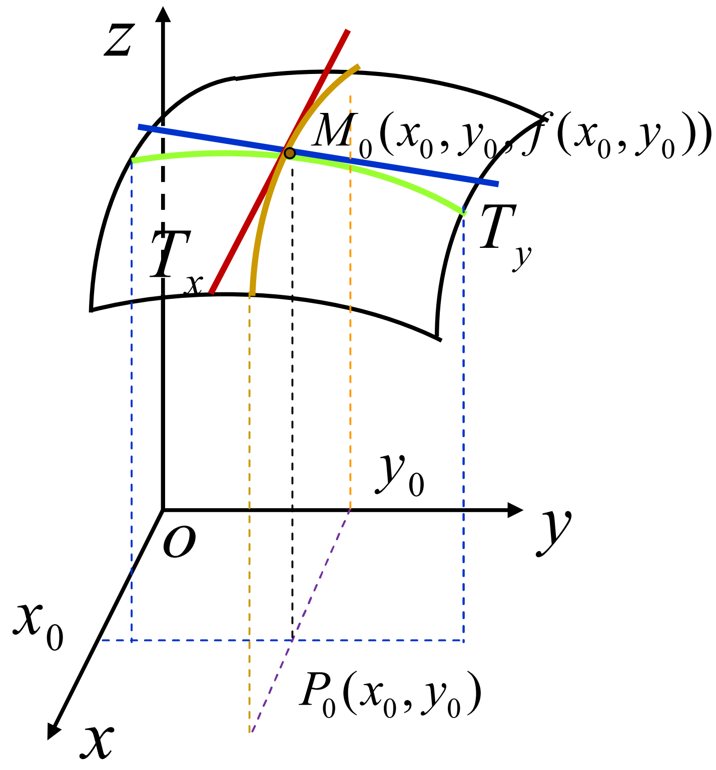
记法还有：$\left.\dfrac{\partial z}{\partial y}\right|_{(x_0,y_0)}$；$\left.\dfrac{\partial f}{\partial y}\right|_{(x_0,y_0)}$；$z_y'\big|_{(x_0,y_0)}$；$f_2'(x_0,y_0)$.

如果函数 $z=f(x,y)$ 在点 (x_0,y_0) 处对 x 和对 y 的偏导数都存在，就称函数 $z=f(x,y)$ 在点 (x_0,y_0) 处可偏导。

二元函数偏导数的几何意义:

$$\left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{(x_0,y_0)} = \left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} f(x, y_0)\right|_{x=x_0}$$

是曲线 $\begin{cases} z = f(x,y), \\ y = y_0 \end{cases}$ 在点 M_0 处的切线 M_0T_x 对 x 轴的斜率.



$$\left.\frac{\partial f}{\partial y}\right|_{(x_0,y_0)} = \left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}y} f(x_0, y)\right|_{y=y_0}$$

是曲线 $\begin{cases} z = f(x,y), \\ x = x_0 \end{cases}$ 在点 M_0 处的切线 M_0T_y 对 y 轴的斜率.

偏增量:

$$\Delta_x z = f(x_0 + \Delta x, y_0) - f(x_0, y_0) \quad (\Delta y = 0)$$

称为函数 $z = f(x, y)$ 在点 (x_0, y_0) 关于 x 的偏增量;

$$\Delta_y z = f(x_0, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0) \quad (\Delta x = 0)$$

称为函数 $z = f(x, y)$ 在点 (x_0, y_0) 关于 y 的偏增量;

全增量:

$$\Delta z = f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0)$$

称为函数 $z = f(x, y)$ 在点 (x_0, y_0) 的全增量。

简单地说，偏导数就是偏增量之比的极限。

$$f_x'(x_0, y_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta_x z}{\Delta x} \qquad f_y'(x_0, y_0) = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{\Delta_y z}{\Delta y}$$

例1. 求 $z = x^2 + 3xy + y^2$ 在点(1,2)处的偏导数.

解: $$z\big|_{y=2} = x^2 + 6x + 4$$

$$\left.\frac{\partial z}{\partial x}\right|_{(1,\,2)} = \left.\frac{d}{dx}(x^2 + 6x + 4)\right|_{x=1}$$

$$= (2x+6)\Big|_{x=1} = 8;$$

$$z\big|_{x=1} = 1 + 3y + y^2$$

$$\left.\frac{\partial z}{\partial y}\right|_{(1,\,2)} = \left.\frac{d}{dy}(1 + 3y + y^2)\right|_{y=2}$$

$$= (3+2y)\Big|_{y=2} = 7.$$

例2：设函数 $f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{xy}{x^2+y^2}, & x^2+y^2\neq 0,\\ 0, & x^2+y^2=0,\end{cases}$ 求 $f_x'(0,0)$ 和 $f_y'(0,0)$ 。

解：显然 $f(x,0)=0,\ f(0,y)=0,$ 故

$$f_x'(0,0)=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}f(x,0)\Big|_{x=0}=\frac{\mathrm{d}0}{\mathrm{d}x}\Big|_{x=0}=0$$

$$f_y'(0,0)=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}y}f(0,y)\Big|_{y=0}=\frac{\mathrm{d}0}{\mathrm{d}y}\Big|_{y=0}=0$$

例2表明 $f(x,y)$在点 $(0,0)$ 处可偏导，但不连续！

例3：讨论函数 $f(x,y)=\sqrt{x^2+y^2}$ 在点 $(0,0)$ 处的可偏导性。

解：由于 $f(x,0)=|x|$ 在点 $x=0$ 处不可导，$f(0,y)=|y|$ 在点 $y=0$ 处不可导，故

$f'_x(0,0)$ 和 $f'_y(0,0)$ 均不存在，

从而 $f(x,y)=\sqrt{x^2+y^2}$ 在点 $(0,0)$ 处的不可偏导。

例2表明 $f(x,y)$ 在点 $(0,0)$ 处连续，但不可偏导！

重要结论：对于二元函数 $f(x,y)$，

连续 $\not\rightleftarrows$ 可偏导

如果函数$z=f(x,y)$在区域$\boldsymbol{D}$内的任一点均可偏导，

就称函数$z=f(x,y)$在区域$\boldsymbol{D}$内可偏导，其偏导数

称为偏导函数，记为

$$\frac{\partial z}{\partial x};\frac{\partial f}{\partial x};\ z'_x;f'_x(x,y);f'_1(x,y);$$

$$\frac{\partial z}{\partial y};\frac{\partial f}{\partial y};z'_y;f'_y(x,y);f'_2(x,y).$$

且有

$$f'_x(x_0,y_0)=f'_x(x,y)\Big|_{(x_0,y_0)},\quad f'_y(x_0,y_0)=f'_y(x,y)\Big|_{(x_0,y_0)};$$

例1. 求 $z = x^2 + 3xy + y^2$ 在点(1, 2) 处的偏导数.

解法二: $\dfrac{\partial z}{\partial x} = 2x + 3y$, $\dfrac{\partial z}{\partial y} = 3x + 2y$

$$\therefore \quad \left.\frac{\partial z}{\partial x}\right|_{(1,2)} = 2\cdot 1 + 3\cdot 2 = 8, \quad \left.\frac{\partial z}{\partial y}\right|_{(1,2)} = 3\cdot 1 + 2\cdot 2 = 7$$

例4. 设 $z = x^y \ (x > 0,\ x \neq 1)$, 验证 $\dfrac{x}{y}\dfrac{\partial z}{\partial x} + \dfrac{1}{\ln x}\dfrac{\partial z}{\partial y} = 2z$

证: $\because \ \dfrac{\partial z}{\partial x} = yx^{y-1}$, $\dfrac{\partial z}{\partial y} = x^y \ln x$,

$$\therefore \quad \frac{x}{y}\frac{\partial z}{\partial x} + \frac{1}{\ln x}\frac{\partial z}{\partial y} = x^y + x^y = 2x^y = 2z.$$

注： 偏导数的概念可以推广到二元以上的函数上去．

如， 三元函数 $u=f(x,y,z)$ 在点 (x,y,z) 处对 x 的偏导数定义为

$$f_x'(x,y,z)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x,y,z)-f(x,y,z)}{\Delta x}$$

$f_y'(x,y,z)=?\quad f_z'(x,y,z)=?$ （请自己写出）

例5. 设 $r=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$，求 $x\dfrac{\partial r}{\partial x}+y\dfrac{\partial r}{\partial y}+z\dfrac{\partial r}{\partial z}$. $\boxed{=r^2}$

解： $\dfrac{\partial r}{\partial x}=\dfrac{2x}{2\sqrt{x^2+y^2+z^2}}=\dfrac{x}{r}$，同理 $\dfrac{\partial r}{\partial y}=\dfrac{y}{r},\ \dfrac{\partial r}{\partial z}=\dfrac{z}{r}$

所以 $x\dfrac{\partial r}{\partial x}+y\dfrac{\partial r}{\partial y}+z\dfrac{\partial r}{\partial z}=\dfrac{\boxed{x^2+y^2+z^2}}{r}=r.$

例6. 已知理想气体的状态方程 $pV = RT$ (R 为常数)，

求证: $\dfrac{\partial p}{\partial V}\cdot\dfrac{\partial V}{\partial T}\cdot\dfrac{\partial T}{\partial p} = -1$

证: $p = \dfrac{RT}{V}$, $\quad \dfrac{\partial p}{\partial V} = -\dfrac{RT}{V^2}$

$V = \dfrac{RT}{p}$, $\quad \dfrac{\partial V}{\partial T} = \dfrac{R}{p}$

$T = \dfrac{pV}{R}$, $\quad \dfrac{\partial T}{\partial p} = \dfrac{V}{R}$

$$\therefore \quad \frac{\partial p}{\partial V}\cdot\frac{\partial V}{\partial T}\cdot\frac{\partial T}{\partial p} = -\frac{RT}{pV} = -1$$

说明：此例表明，偏导数记号是一个整体记号，不能看作分子与分母的商！

二、高阶偏导数

设 $z=f(x,y)$在区域$\boldsymbol{D}$内可偏导，

$$\frac{\partial z}{\partial x}=f'_x(x,y)\,,\qquad \frac{\partial z}{\partial y}=f'_y(x,y)$$

若这两个偏导数仍存在偏导数，就称它们是$z=f(x,y)$的二阶偏导数 .按求偏导顺序不同，有四个二阶偏导数:

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)=\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=f''_{xx}(x,y);\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)=\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=f''_{yy}(x,y)$$

$$\underbrace{\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)=\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=f''_{xy}(x,y)}_{\text{二阶混合偏导数}};\underbrace{\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)=\frac{\partial^2 z}{\partial y\partial x}=f''_{yx}(x,y)}_{\text{二阶混合偏导数}}.$$

二阶混合偏导数

例7. 求函数 $z = e^{x+2y}$ 的所有二阶偏导数。

解：$\dfrac{\partial z}{\partial x} = e^{x+2y}$ $\qquad$ $\dfrac{\partial z}{\partial y} = 2e^{x+2y}$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = e^{x+2y} \qquad \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = 2e^{x+2y}$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} = 2e^{x+2y} \qquad \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 4e^{x+2y}$$

注意: 此处 $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \dfrac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}$, 但这一结论并不总成立.

例8. $f(x,y)=\begin{cases} xy\dfrac{x^2-y^2}{x^2+y^2}, & x^2+y^2\neq 0 \\ 0, & x^2+y^2=0 \end{cases}$，求(0,0)处

解：$f'_x(x,y)=\begin{cases} \boxed{y\dfrac{x^4+4x^2y^2-y^4}{(x^2+y^2)^2}}, & x^2+y^2\neq 0 \\ 0\,, & x^2+y^2=0 \end{cases}$

$f'_y(x,y)=\begin{cases} \boxed{x\dfrac{x^4-4x^2y^2-y^4}{(x^2+y^2)^2}}, & x^2+y^2\neq 0 \\ 0, & x^2+y^2=0 \end{cases}$

此例了解结论！

$$\left.\begin{aligned} f''_{xy}(0,0)&=\lim_{\Delta y\to 0}\frac{\boxed{f'_x(0,\Delta y)}-f_x(0,0)}{\Delta y}=\lim_{\Delta y\to 0}\frac{-\Delta y}{\Delta y}=-1 \\ f''_{yx}(0,0)&=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\boxed{f'_y(\Delta x,0)}-f_y(0,0)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta x}{\Delta x}=1 \end{aligned}\right\}$$ 二者不等

定理：若 $f''_{xy}(x,y)$和 $f''_{yx}(x,y)$ 都在点 (x,y) 处连续，则

$$f''_{xy}(x,y)=f''_{yx}(x,y)$$ (证明略)

不难发现，在例 7 中，$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}$和$\frac{\partial^2 z}{\partial y\partial x}$处处连续，所以

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=\frac{\partial^2 z}{\partial y\partial x}$$（对任意点对都成立）。

同时，本定理表明，在例 8 中，$f''_{xy}(x,y)$和$f''_{yx}(x,y)$在点$(0,0)$处不连续。

例9. 证明函数$u=\frac{1}{r}$, $r=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$满足

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}=0$$ （称为拉普拉斯方程）

证: $$\frac{\partial u}{\partial x}=-\frac{1}{r^2}\frac{\partial r}{\partial x}=-\frac{1}{r^2}\cdot\frac{x}{r}=-\frac{x}{r^3}$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=-\frac{1}{r^3}+\frac{3x}{r^4}\cdot\frac{\partial r}{\partial x}=-\frac{1}{r^3}+\frac{3x^2}{r^5}$$

利用对称性, 有 $$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=-\frac{1}{r^3}+\frac{3y^2}{r^5},\quad \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}=-\frac{1}{r^3}+\frac{3z^2}{r^5}$$

$$\therefore\quad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}=-\frac{3}{r^3}+\frac{3(\boxed{x^2+y^2+z^2})}{r^5}=0$$

$$\boxed{=r^2}$$

类似可以定义更高阶的偏导数.

例如，$z = f(x, y)$ 关于$\boldsymbol{x}$的三阶偏导数及关于$\boldsymbol{x}$ 的二阶偏导数，再关于$\boldsymbol{y}$的一阶偏导数分别为：

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\right) = \frac{\partial^3 z}{\partial x^3}, \qquad \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\right) = \frac{\partial^3 z}{\partial x^2 \partial y}$$

又如，$u = f(x, y, z)$，$\displaystyle \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)\right) = \frac{\partial^3 u}{\partial x \partial y \partial z}$

在例7中，$z = e^{x+2y}$，则有

$$\frac{\partial^3 z}{\partial y \partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}\right) = \frac{\partial}{\partial x}(2e^{x+2y}) = 2e^{x+2y}$$

例 10： 设函数 $z=f(x,y)$ 满足

$$f''_{xy}(x,y)=6, f'_x(x,0)=x^2, f(0,y)=1,$$

求 $f(x,y)$.

解：由 $f''_{xy}(x,y)=6$ 得 $f'_x(x,y)=6y+\varphi(x)$.

由 $f'_x(x,0)=x^2$ 代入上式可得 $\varphi(x)=x^2$，所以

$$f'_x(x,y)=6y+x^2.$$

该式两端关于 x 积分，得 $f(x,y)=6xy+\dfrac{1}{3}x^3+\psi(y)$.

由 $f(0,y)=1$ 可得 $\psi(y)=1$, 从而 $f(x,y)=6xy+\dfrac{1}{3}x^3+1$.

内容小结

1. 偏导数的概念及有关结论

- 定义; 记号; 几何意义
- 二元函数可偏导 $\not\rightleftarrows$ 二元函数连续
- 混合偏导数连续 $\longrightarrow$ 与求导顺序无关

2. 偏导数的计算方法

- 求一点处偏导数的方法 $\begin{cases}\text{先代后求}\\ \text{先求后代}\\ \text{利用定义}\end{cases}$
- 求高阶偏导数的方法 —— 逐次向上求导法

思考题

1. 求下列函数的一阶偏导数:

(1) $z = \tan(x + y) + \cos^2(xy)$,

(2) $z = (1 + xy)^y$.

2. $u = x^{\frac{z}{y}}$,求 $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x \partial z}$ 及 $\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}$.

3. 讨论在坐标原点的连续性和可偏导性:

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}, & (x,y) \neq (0,0), \\ 1, & (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

备用题

1. 曲线 $\begin{cases} z=\dfrac{x^2+y^2}{4} \\ y=4 \end{cases}$，在点 $(2,4,5)$ 处切线与 x 轴正向所成的倾角为________.

答案　填“$\dfrac{\pi}{4}$”.

解　$\dfrac{\partial z}{\partial x}=\dfrac{1}{2}x$，由偏导数的几何意义，所求倾角的正切为

$$\tan\alpha=\frac{1}{2}x\Big|_{x=2}=1,$$

所以 $\alpha=\dfrac{\pi}{4}$.