

第五节

函数展开成幂级数

两类问题：在收敛域内

$$\text{幂级数 } \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \begin{array}{c} \xrightarrow{\text{求和}} \\ \xleftarrow{\text{展开}} \end{array} \text{和函数 } S(x)$$

本节内容：

- 一、泰勒 (Taylor) 级数
- 二、函数展开成幂级数



一、泰勒 (Taylor) 级数

复习: $f(x)$ 的 n 阶泰勒公式

若函数 $f(x)$ 在 x_0 的某邻域内具有 $n+1$ 阶导数, 则在该邻域内有:

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 \\ + \cdots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n + R_n(x)$$

其中 $R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x - x_0)^{n+1}$ (ξ 在 x 与 x_0 之间)

称为拉格朗日余项.



若函数 $f(x)$ 在 x_0 的某邻域内具有任意阶导数, 则称

$$f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 \\ + \cdots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n + \cdots$$

为 $f(x)$ 的泰勒级数.

当 $x_0 = 0$ 时, 泰勒级数又称为麦克劳林级数.

待解决的问题:

- 1) 对此级数, 它的收敛域是什么?
- 2) 在收敛域上, 和函数是否为 $f(x)$?



定理1 设函数 $f(x)$ 在点 x_0 的某一邻域 $U(x_0)$ 内具有各阶导数, 则 $f(x)$ 在该邻域内能展开成泰勒级数的充要条件是 $f(x)$ 的泰勒公式余项满足: $\lim_{n \rightarrow \infty} R_n(x) = 0$.

证明:
$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} (x - x_0)^n, \quad x \in U(x_0)$$

$$\begin{array}{l} \uparrow \\ \text{令 } S_{n+1}(x) = \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} (x - x_0)^k \\ \downarrow \\ f(x) = S_{n+1}(x) + R_n(x) \end{array}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} R_n(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} [f(x) - S_{n+1}(x)] = 0, \quad x \in U(x_0)$$



定理2. 若 $f(x)$ 能展成 x 的幂级数, 则这种展开式是唯一的, 且与它的麦克劳林级数相同.

证: 设 $f(x)$ 所展成的幂级数为

$$f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_nx^n + \cdots, \quad x \in (-R, R)$$

则

$$a_0 = f(0)$$

$$f'(x) = a_1 + 2a_2x + \cdots + na_nx^{n-1} + \cdots; \quad a_1 = f'(0)$$

$$f''(x) = 2!a_2 + \cdots + n(n-1)a_nx^{n-2} + \cdots; \quad a_2 = \frac{1}{2!}f''(0)$$

.....

...

$$f^{(n)}(x) = n!a_n + \cdots;$$

$$a_n = \frac{1}{n!}f^{(n)}(0)$$

.....

...

显然结论成立.



二、函数展开成幂级数

展开方法 { 直接展开法 — 利用泰勒公式
间接展开法 — 利用已知其级数展开式的函数展开

1. 直接展开法

由泰勒级数理论可知, 函数 $f(x)$ 展开成幂级数的步骤如下:

第一步 求函数及其各阶导数在 $x = 0$ 处的值;

第二步 写出麦克劳林级数, 并求出其收敛半径 R ;

第三步 判别在收敛区间 $(-R, R)$ 内 $\lim_{n \rightarrow \infty} R_n(x)$ 是否为0.



例1. 将函数 $f(x) = e^x$ 展开成 x 的幂级数.

解: $\because f^{(n)}(x) = e^x, f^{(n)}(0) = 1 \ (n = 0, 1, \dots)$, 故得级数

$$1 + x + \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{3!}x^3 + \dots + \frac{1}{n!}x^n + \dots$$

其收敛半径为 $R = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n!} / \frac{1}{(n+1)!} = +\infty$

对任何有限数 x , 其余项满足

$$|R_n(x)| = \left| \frac{e^\xi}{(n+1)!} x^{n+1} \right| < e^{|x|} \frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$$

(ξ 在 0 与 x 之间)

$$\text{故 } e^x = 1 + x + \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{3!}x^3 + \dots + \frac{1}{n!}x^n + \dots, \quad x \in (-\infty, +\infty)$$



例2. 将 $f(x) = \sin x$ 展开成 x 的幂级数.

解: $\because f^{(n)}(x) = \sin(x + n \cdot \frac{\pi}{2})$

$$\therefore f^{(n)}(0) = \begin{cases} 0, & n = 2k \\ (-1)^k, & n = 2k + 1 \end{cases} \quad (k = 0, 1, 2, \dots)$$

得级数: $x - \frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{5!}x^5 - \dots + (-1)^{n-1} \frac{1}{(2n-1)!}x^{2n-1} + \dots$

其收敛半径为 $R = +\infty$, 对任何有限数 x , 其余项满足

$$|R_n(x)| = \left| \frac{\sin(\xi + (n+1)\frac{\pi}{2})}{(n+1)!} x^{n+1} \right| < \frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$$

$$\therefore \sin x = x - \frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{5!}x^5 - \dots + (-1)^{n-1} \frac{1}{(2n-1)!}x^{2n-1} + \dots$$

$$x \in (-\infty, +\infty)$$



$$\sin x = x - \frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{5!}x^5 - \cdots + (-1)^{n-1} \frac{1}{(2n-1)!}x^{2n-1} + \cdots$$
$$x \in (-\infty, +\infty)$$

对上式两边求导可推出：

$$\cos x = 1 - \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{4!}x^4 - \cdots + (-1)^{n-1} \frac{1}{(2n)!}x^{2n} + \cdots$$
$$x \in (-\infty, +\infty)$$



例3. 将函数 $f(x) = (1+x)^m$ 展开成 x 的幂级数, 其中 m 为任意常数.

解: 易求出 $f(0) = 1, f'(0) = m, f''(0) = m(m-1),$

$$f^{(n)}(0) = m(m-1)(m-2)\cdots(m-n+1), \cdots$$

于是得 级数 $1 + mx + \frac{m(m-1)}{2!}x^2 + \cdots$
 $+ \frac{m(m-1)\cdots(m-n+1)}{n!}x^n + \cdots$

$$\text{由于 } R = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{n+1}{m-n} \right| = 1$$

因此对任意常数 m , 级数在开区间 $(-1, 1)$ 内收敛.



为避免研究余项, 设此级数的和函数为 $F(x)$, $-1 < x < 1$

$$\text{则 } F(x) = 1 + mx + \frac{m(m-1)}{2!}x^2 + \cdots \\ + \frac{m(m-1)\cdots(m-n+1)}{n!}x^n + \cdots$$

$$F'(x) = m \left[1 + \frac{m-1}{1}x + \cdots + \frac{(m-1)\cdots(m-n+1)}{(n-1)!}x^{n-1} + \cdots \right]$$

$$(1+x)F'(x) = mF(x), \quad F(0) = 1$$

推导

$$\left| \begin{array}{l} \int_0^x \frac{F'(x)}{F(x)} dx = \int_0^x \frac{m}{1+x} dx \\ \ln F(x) - \ln F(0) = m \ln(1+x) \end{array} \right.$$

$$F(x) = (1+x)^m$$



由此得

$$(1+x)^m = 1 + mx + \frac{m(m-1)}{2!}x^2 + \cdots$$

$$+ \frac{m(m-1)\cdots(m-n+1)}{n!}x^n + \cdots$$

$$(-1 < x < 1)$$

称为二项展开式.

说明:

- (1) 在 $x = \pm 1$ 处的收敛性与 m 有关.
- (2) 当 m 为正整数时, 级数为 x 的 m 次多项式, 上式就是代数学中的二项式定理.



上述幂级数的收敛域与 m 的取值有关（当 m 不是非负整数时）。具体情况如下：

当 $m \leq -1$ 时，收敛域为 $(-1, 1)$ ；

当 $-1 < m < 0$ 时，收敛域为 $(-1, 1]$ ；

当 $m > 0$ 时，收敛域为 $[-1, 1]$ 。



对应 $m = \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, -1$ 的二项展开式分别为

$$\sqrt{1+x} = 1 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{2 \cdot 4}x^2 + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4 \cdot 6}x^3 - \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 8}x^4 + \dots$$

$$(-1 \leq x \leq 1)$$

$$\frac{1}{\sqrt{1+x}} = 1 - \frac{1}{2}x + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4}x^2 - \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6}x^3 + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 8}x^4 - \dots$$

$$(-1 < x \leq 1)$$

$$\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - x^3 + \dots + (-1)^n x^n + \dots$$

$$(-1 < x < 1)$$



$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + \dots + x^n + \dots$$

$$(-1 < x < 1)$$



例3 附注

$$\begin{aligned}
 F'(x) &= m \left[1 + \frac{m-1}{1}x + \frac{(m-1)(m-2)}{2!}x^2 + \cdots \right. \\
 &\quad \left. + \frac{(m-1)\cdots(m-n)}{n!}x^n + \cdots \right] \\
 xF'(x) &= m \left[x + \frac{m-1}{1}x^2 + \cdots \right. \\
 &\quad \left. + \frac{(m-1)\cdots(m-n+1)}{(n-1)!}x^n + \cdots \right] \\
 (1+x)F'(x) &= m \left[1 + mx + \frac{m(m-1)}{2!}x^2 + \cdots \right. \\
 &\quad \left. + \frac{m(m-1)\cdots(m-n+1)}{n!}x^n + \cdots \right] = mF(x)
 \end{aligned}$$



2. 间接展开法

利用一些已知的函数展开式及幂级数的运算性质，
将所给函数展开成 幂级数.

例4. 将函数 $\frac{1}{1+x^2}$ 展开成 x 的幂级数.

解: 因为

$$\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - \cdots + (-1)^n x^n + \cdots \quad (-1 < x < 1)$$

把 x 换成 x^2 , 得

$$\frac{1}{1+x^2} = 1 - x^2 + x^4 - \cdots + (-1)^n x^{2n} + \cdots$$
$$(-1 < x < 1)$$



例5. 将函数 $f(x) = \ln(1+x)$ 展开成 x 的幂级数.

解: $f'(x) = \frac{1}{1+x} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^n \quad (-1 < x < 1)$

从 0 到 x 积分, 得

$$\ln(1+x) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \int_0^x x^n dx = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n+1} x^{n+1}, \quad -1 < x \leq 1$$

上式右端的幂级数在 $x=1$ 收敛, 而 $\ln(1+x)$ 在 $x=1$ 有定义且连续, 所以展开式对 $x=1$ 也是成立的, 于是收敛域为 $-1 < x \leq 1$.

利用此题可得

$$\ln 2 = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \cdots + (-1)^n \frac{1}{n+1} + \cdots$$



例6. 将 $\sin x$ 展成 $x - \frac{\pi}{4}$ 的幂级数.

$$\begin{aligned}
 \text{解: } \sin x &= \sin\left[\frac{\pi}{4} + \left(x - \frac{\pi}{4}\right)\right] \\
 &= \sin \frac{\pi}{4} \cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right) + \cos \frac{\pi}{4} \sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right) \\
 &= \frac{1}{\sqrt{2}} \left[\cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right) + \sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right) \right] \\
 &= \frac{1}{\sqrt{2}} \left[\left(1 - \frac{1}{2!} \left(x - \frac{\pi}{4}\right)^2 + \frac{1}{4!} \left(x - \frac{\pi}{4}\right)^4 - \dots \right) \right. \\
 &\quad \left. + \left(\left(x - \frac{\pi}{4}\right) - \frac{1}{3!} \left(x - \frac{\pi}{4}\right)^3 + \frac{1}{5!} \left(x - \frac{\pi}{4}\right)^5 - \dots \right) \right] \\
 &= \frac{1}{\sqrt{2}} \left[1 + \left(x - \frac{\pi}{4}\right) - \frac{1}{2!} \left(x - \frac{\pi}{4}\right)^2 - \frac{1}{3!} \left(x - \frac{\pi}{4}\right)^3 + \dots \right] \\
 &\quad \quad \quad (-\infty < x < +\infty)
 \end{aligned}$$



例7. 将 $\frac{1}{x^2 + 4x + 3}$ 展成 $x-1$ 的幂级数.

$$\begin{aligned}
 \text{解: } \frac{1}{x^2 + 4x + 3} &= \frac{1}{(x+1)(x+3)} = \frac{1}{2(1+x)} - \frac{1}{2(3+x)} \\
 &= \frac{1}{4\left(1 + \frac{x-1}{2}\right)} - \frac{1}{8\left(1 + \frac{x-1}{4}\right)} \quad (|x-1| < 2) \\
 &= \frac{1}{4} \left[1 - \frac{x-1}{2} + \frac{(x-1)^2}{2^2} + \cdots + (-1)^n \frac{(x-1)^n}{2^n} + \cdots \right] \\
 &\quad - \frac{1}{8} \left[1 - \frac{x-1}{4} + \frac{(x-1)^2}{4^2} + \cdots + (-1)^n \frac{(x-1)^n}{4^n} + \cdots \right] \\
 &= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \left(\frac{1}{2^{n+2}} - \frac{1}{2^{2n+3}} \right) (x-1)^n \quad (-1 < x < 3)
 \end{aligned}$$



内容小结

1. 函数的幂级数展开法

(1) 直接展开法 — 利用泰勒公式；

(2) 间接展开法 — 利用幂级数的性质及已知展开式的函数。

2. 常用函数的幂级数展开式

- $$e^x = 1 + x + \frac{1}{2!}x^2 + \cdots + \frac{1}{n!}x^n + \cdots, \quad x \in (-\infty, +\infty)$$
- $$\ln(1+x) = x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{4}x^4 + \cdots + \frac{(-1)^n}{n+1}x^{n+1} + \cdots$$
$$x \in (-1, +1]$$



$$\bullet \sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + \cdots$$

$$x \in (-\infty, +\infty)$$

$$\bullet \cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + \cdots$$

$$x \in (-\infty, +\infty)$$

$$\bullet (1+x)^m = 1 + mx + \frac{m(m-1)}{2!}x^2 + \cdots + \frac{m(m-1)\cdots(m-n+1)}{n!}x^n + \cdots \quad x \in (-1, 1)$$

当 $m = -1$ 时

$$\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - x^3 + \cdots + (-1)^n x^n + \cdots, \quad x \in (-1, 1)$$



思考与练习

1. 函数 $f(x)$ 在 x_0 处 “有泰勒级数” 与 “能展成泰勒级数” 有何不同？

提示：后者必需证明 $\lim_{n \rightarrow \infty} R_n(x) = 0$, 前者无此要求.

2. 如何求 $y = \sin^2 x$ 的幂级数？

提示：

$$y = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \cos 2x = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{(2n)!} (2x)^{2n}$$
$$= -\frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{4^n}{(2n)!} x^{2n}, \quad x \in (-\infty, +\infty)$$



备用题

1. 将下列函数展开成 x 的幂级数

$$f(x) = \arctan \frac{1+x}{1-x}$$

$$\text{解: } f'(x) = \frac{1}{1+x^2} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^{2n}, \quad x \in (-1, 1)$$

$$\therefore f(x) - f(0) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \int_0^x x^{2n} dx = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} x^{2n+1}$$

$x = \pm 1$ 时, 此级数条件收敛, $f(0) = \frac{\pi}{4}$, 因此

$$f(x) = \frac{\pi}{4} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} x^{2n+1}, \quad x \in [-1, 1]$$



2. 将 $f(x) = \ln(2 + x - 3x^2)$ 在 $x = 0$ 处展为幂级数.

解: $f(x) = \ln(1 - x) + \ln 2 + \ln(1 + \frac{3}{2}x)$

$$\ln(1 - x) = - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n} \quad (-1 \leq x < 1)$$

$$\ln(1 + \frac{3}{2}x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} (\frac{3}{2}x)^n \quad (-\frac{2}{3} < x \leq \frac{2}{3})$$

因此

$$\begin{aligned} f(x) &= \ln 2 - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} (\frac{3}{2}x)^n \\ &= \ln 2 - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} [1 + (-\frac{3}{2})^n] x^n \quad (-\frac{2}{3} < x \leq \frac{2}{3}) \end{aligned}$$



