第二节 级数的绝对收敛与条件收敛

一、交错级数及其审敛法

二、绝对收敛与条件收敛

一、交错级数及其审敛法

设$u_n > 0,\ n = 1, 2, \cdots$,则各项符号正负相间的级数

$$u_1 - u_2 + u_3 - \cdots + (-1)^{n-1} u_n + \cdots$$

称为交错级数 .

定理1 . (Leibnitz 判别法)若交错级数满足条件:

1) $u_n \ge u_{n+1} \quad (n = 1, 2, \cdots)$;

2) $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = 0$,

则级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}u_n$收敛 , 且其和 $S \le u_1$, 其余项满足

$$|r_n| \le u_{n+1} .$$

证：$\because S_{2n} = (u_1 - u_2) + (u_3 - u_4) + \cdots + (u_{2n-1} - u_{2n}) \geq 0$

$$S_{2n} = u_1 - (u_2 - u_3) - (u_4 - u_5) - \cdots - (u_{2n-2} - u_{2n-1})$$

$$- u_{2n} \leq u_1$$

$\therefore S_{2n}$ 是单调递增有界数列，故 $\lim\limits_{n\to\infty} S_{2n} = S \leq u_1$

又 $\lim\limits_{n\to\infty} S_{2n+1} = \lim\limits_{n\to\infty}(S_{2n} + u_{2n+1}) = \lim\limits_{n\to\infty} S_{2n} = S$

故级数收敛于**S**, 且 $S \leq u_1$, S_n 的余项：

$$r_n = S - S_n = \pm(u_{n+1} - u_{n+2} + \cdots)$$

$$\therefore \quad |r_n| = u_{n+1} - u_{n+2} + \cdots \leq u_{n+1}$$

用Leibnitz 判别法判别下列级数的敛散性:

1) $1-\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{3}-\dfrac{1}{4}+\cdots+(-$

2) $1-\dfrac{1}{2!}+\dfrac{1}{3!}-\dfrac{1}{4!}+\cdots+$

$$\frac{u_{n+1}}{u_n}=\frac{\dfrac{n+1}{10^{n+1}}}{\dfrac{n}{10^n}}=\frac{1}{10}\cdot\frac{n+1}{n}$$

3) $\dfrac{1}{10}-\dfrac{2}{10^2}+\dfrac{3}{10^3}-\dfrac{4}{10^4}+\cdots+(-1)^{n-1}\dfrac{n}{10^n}+\cdots$ 收敛

上述级数各项取绝对值后所成的级数是否收敛？

1) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$; 发散

2) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n!}$; 收敛

3) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{10^n}$. 收敛

例 1. 判定级数$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{1}{n^p}(p>0)$的敛散性.

解：该级数为交错级数，且$u_n=\frac{1}{n^p}(p>0)$，显然数列$\{\frac{1}{n^p}\}$单调递减，且$\lim_{n\to\infty}u_n=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^p}=0$，故由交错级数审敛法知级数$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{1}{n^p}$收敛.

特别地，当$p=1$时，交错级数

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{1}{n}=1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\cdots+(-1)^{n-1}+\cdots$$

收敛.

例 2. 判定下列交错级数的敛散性：

(1) $\sum_{n=2}^{\infty}(-1)^n\frac{\ln n}{n}$； (2) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{\sqrt{n+1}+(-1)^n}$.

解：(1) 先考察函数 $f(x)=\frac{\ln x}{x}$, $x\geq 3$. 由于

$f'(x)=\frac{1-\ln x}{x^2}<0,\ x\geq 3$，所以 $f(x)$ 在 $[3,+\infty)$ 上单调减少，

从而数列 $f(n)=\frac{\ln n}{n}(n=3,4,\cdots)$ 单调减少. 又

$$\lim_{x\to+\infty}f(x)=\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x}=0,$$

故 $\lim_{n\to\infty}\frac{\ln n}{n}=0$. 所以，级数 $\sum_{n=2}^{\infty}(-1)^n\frac{\ln n}{n}$ 收敛.

(2) 由于数列$\{\frac{1}{\sqrt{n+1}+(-1)^n}\}$不具有单调递减的性质，因而不能直接运用交错级数审敛法. 但

$$\frac{(-1)^n}{\sqrt{n+1}+(-1)^n}=\frac{(-1)^n[\sqrt{n+1}-(-1)^n]}{(n+1)-1}=(-1)^n\sqrt{\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}}-\frac{1}{n},$$

而数列$\{\sqrt{\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}}\}$单调递减，且$\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt{\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}}=0$，所以由交错级数审敛法知级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\sqrt{\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}}$收敛.

又级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$发散，故级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{\sqrt{n+1}+(-1)^n}$发散.

注 1：莱布尼兹判别法中的条件是交错项级数收敛的充分条件，而非必要条件. 故当条件不满足时，不能由此断定交错项级数是发散的.

注 2：判断交错项级数$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}f(n)$（其中$f(n)>0$）的敛散性时，如果分析$\{f(n)\}$的单调性与极限困难，则可通过分析$f(x)$的单调性及极限来完成.

例 3．设$\{u_n\}$为正项数列，下列选项正确的是（　　）．

（A）若$u_n > u_{n+1}$，则$\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}u_n$收敛；

（B）若$\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}u_n$收敛，则$u_n > u_{n+1}$；

（C）若$\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$收敛，则存在常数$p>1$，使$\lim\limits_{n\to\infty}n^p u_n$存在；

（D）若存在常数$p>1$，使$\lim\limits_{n\to\infty}n^p u_n$存在，则$\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$收敛．

答案：　选（D）.

解：$\lim\limits_{n\to\infty} n^p u_n = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{u_n}{\dfrac{1}{n^p}}$ 存在，且常数 $p>1$ 时，$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n^p}$ 收敛，

又 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ 为正项级数，故有正项级数比较判别法的极限

形式知 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ 收敛，所以（D）正确.

另外，若取 $u_n = 1+\dfrac{1}{n}$，则（A）不正确；

取 $u_n = \dfrac{2+(-1)^n}{n^2}$，则（B）不正确；

若取 $u_n = \dfrac{1}{n\ln^2 n}\ (n\geq 2)$，则（C）不正确.

二、绝对收敛与条件收敛

定义: 对任意项级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$, 若 $\sum_{n=1}^{\infty} |u_n|$ 收敛, 则称原级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 绝对收敛；

若原级数收敛, 但取绝对值以后的级数发散, 则称原级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 条件收敛.

例如：$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{1}{n}$ 为条件收敛.

$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{1}{(n-1)!}$, $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{n}{10^n}$ 均为绝对收敛.

定理2. 绝对收敛的级数一定收敛 .

证：设 $\sum_{n=1}^{\infty}|u_n|$ 收敛，令

$$v_n = \frac{1}{2}(u_n + |u_n|) \quad (n = 1, 2, \cdots)$$

显然 $v_n \geq 0$，且 $v_n \leq |u_n|$，根据比较审敛法 $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ 收敛,

$$u_n = 2v_n - |u_n|$$

$\sum_{n=1}^{\infty}|u_n|$，$\sum_{n=1}^{\infty}2v_n$ 收敛

$\sum_{n=1}^{\infty}u_n$ 也收敛

例4. 证明下列级数绝对收敛:

(1) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin n\alpha}{n^4}$; (2) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{n^2}{e^n}$.

证: (1) $\because \left| \frac{\sin n\alpha}{n^4} \right| \le \frac{1}{n^4}$, 而 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4}$ 收敛,

$\therefore \sum_{n=1}^{\infty} \left| \frac{\sin n\alpha}{n^4} \right|$ 收敛

因此 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin n\alpha}{n^4}$ 绝对收敛.

(2) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{n^2}{e^n}$

(2) 令 $u_n=\dfrac{n^2}{e^n}$,

$$\because\quad \lim_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{\dfrac{(n+1)^2}{e^{n+1}}}{\dfrac{n^2}{e^n}}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{e}\left(\frac{n+1}{n}\right)^2=\frac{1}{e}<1$$

$\therefore\ \sum_{n=1}^{\infty}\left|(-1)^n\dfrac{n^2}{e^n}\right|$ 收敛，因此 $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\dfrac{n^2}{e^n}$ 绝对收敛.

例 5. 判定下列级数的敛散性，如果收敛，指出是绝对收敛还是条件收敛.

(1) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{n^5}{2^n}$； (2) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\ln(1+\frac{1}{n})$； (3) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{n^{n+1}}{(n+1)!}$.

解：(1) 考虑正项级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\left|(-1)^{n+1}\frac{n^5}{2^n}\right|$，即 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^5}{2^n}$.

由于 $\lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)^5}{2^{n+1}}\Big/\frac{n^5}{2^n}=\frac{1}{2}\lim_{n\to\infty}(1+\frac{1}{n})^5=\frac{1}{2}<1$，所以

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left|(-1)^{n+1}\frac{n^5}{2^n}\right|\text{收敛，即}\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{n^5}{2^n}\text{绝对收敛.}$$

(2) 考虑到级数$\sum_{n=1}^{\infty}\left|(-1)^{n-1}\ln(1+\frac{1}{n})\right|=\sum_{n=1}^{\infty}\ln(1+\frac{1}{n})$，由于$\ln(1+\frac{1}{n})\sim\frac{1}{n}\quad(n\to\infty)$，而$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$发散，所以级数$\sum_{n=1}^{\infty}\left|(-1)^{n-1}\ln(1+\frac{1}{n})\right|$发散，即级数$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\ln(1+\frac{1}{n})$不绝对收敛.

但是$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\ln(1+\frac{1}{n})$为交错级数，且数列$\{\ln(1+\frac{1}{n})\}$单调递减，$\lim_{n\to\infty}\ln(1+\frac{1}{n})=0$. 由交错级数审敛法可知$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\ln(1+\frac{1}{n})$收敛.

故级数$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\ln(1+\frac{1}{n})$为条件收敛.

(3) 考虑级数$\sum_{n=1}^{\infty}\left|(-1)^{n-1}\frac{n^{n+1}}{(n+1)!}\right|$，即$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^{n+1}}{(n+1)!}$. 由于

$$\lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)^{n+2}}{(n+2)!}\Big/\frac{n^{n+1}}{(n+1)!}=\lim_{n\to\infty}(1+\frac{1}{n})^{n}\frac{(n+1)^{2}}{n(n+2)}=e>1\quad,$$

所以存在正整数N，当$n>N$时，有$\frac{(n+1)^{n+2}}{(n+2)!}>\frac{n^{n+1}}{(n+1)!}>0$.

由上可知，从第$N+1$项开始，$\{\frac{n^{n+1}}{(n+1)!}\}$为正的单增数列，

从而$\lim_{n\to\infty}\frac{n^{n+1}}{(n+1)!}\neq 0$，所以$\lim_{n\to\infty}(-1)^{n-1}\frac{n^{n+1}}{(n+1)!}\neq 0$.

故$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{n^{n+1}}{(n+1)!}$发散.

例 6. 讨论级数$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n2^n}$敛散性.

解: 先考察级数$\sum_{n=1}^{\infty}\left|\frac{x^n}{n2^n}\right|=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{|x|^n}{n2^n}$的敛散性. 由于

$$\lim_{n\to\infty}\frac{|x|^{n+1}}{(n+1)2^{n+1}}\Big/\frac{|x|^n}{n2^n}=\lim_{n\to\infty}\frac{|x|n}{(n+1)}=\frac{1}{2}|x|,$$

所以当$|x|<2$时，级数$\sum_{n=1}^{\infty}\left|\frac{x^n}{n2^n}\right|$收敛，即级数$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n2^n}$绝对收敛.

当$|x|>2$时，$\lim_{n\to\infty}\frac{x^n}{n2^n}=\infty(\neq 0)$，故级数$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n2^n}$发散;

当$x=2$时，原级数为$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$，发散；当$x=-2$时，原级数为$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{n}$，条件收敛.

综上，$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n2^n}$当$x\in[-2,2)$时收敛，当$x\in(-\infty,2)\cup[2,+\infty)$时发散.

例 7. 设交错级数$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}u_n(u_n>0,n=1,2,\cdots)$条件收敛，证明级数$\sum_{n=1}^{\infty}u_{2n-1}$与$\sum_{n=1}^{\infty}u_{2n}$都发散.

证：因为级数$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}u_n$条件收敛，所以由收敛级数的基本性质知，下列加括号后的级数

$$\sum_{n=1}^{\infty}(u_{2n-1}-u_{2n})=(u_1-u_2)+(u_3-u_4)+\cdots+(u_{2n-1}-u_{2n})+\cdots$$

仍收敛，而各项取绝对值后的级数

$$\sum_{n=1}^{\infty}u_n=u_1+u_2+\cdots+u_n+\cdots$$

发散.

由于$\sum_{n=1}^{\infty} u_n$为正项级数，其部分和数列$\{s_n\}$的极限为$+\infty$，即

$$\lim_{n\to\infty} s_n = +\infty .$$

又正项级数$\sum_{n=1}^{\infty}(u_{2n-1}+u_{2n})$的部分和数列为$\{s_n\}$的偶子数列$\{s_{2n}\}$，从而有$\lim_{n\to\infty} s_{2n} = +\infty$，故级数$\sum_{n=1}^{\infty}(u_{2n-1}+u_{2n})$发散．因为

$$u_{2n-1} = \frac{1}{2}[(u_{2n-1}+u_{2n})+(u_{2n-1}-u_{2n})],$$

$$u_{2n} = \frac{1}{2}[(u_{2n-1}+u_{2n})-(u_{2n-1}-u_{2n})],$$

所以，级数$\sum_{n=1}^{\infty} u_{2n-1}$与$\sum_{n=1}^{\infty} u_{2n}$都发散．

内容小结

1. 任意项级数审敛法

概念：设 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 为收敛级数

$$
\begin{cases}
\text{若} \sum_{n=1}^{\infty} |u_n| \text{收敛，称} \sum_{n=1}^{\infty} u_n \text{绝对收敛} \\[2ex]
\text{若} \sum_{n=1}^{\infty} |u_n| \text{发散，称} \sum_{n=1}^{\infty} u_n \text{条件收敛}
\end{cases}
$$

Leibniz判别法:

$$
\left.\begin{array}{l} u_n \geq u_{n+1} > 0 \\[2ex] \lim\limits_{n\to\infty} u_n = 0 \end{array}\right\} \Longrightarrow \text{则交错级数} \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n u_n \text{收敛}
$$

思考与练习

1. 若级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛，则级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n^2$ 与 $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n u_n$ 也收敛；

2. 若级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛，且 $\lim_{n\to\infty} \frac{u_n}{v_n} = 1$，则级数 $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ 也收敛.

3. 设级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n^2$ 与 $\sum_{n=1}^{\infty} v_n^2$ 均为收敛级数，证明：

（1）级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n v_n$ 绝对收敛；（2） $\sum_{n=1}^{\infty} (u_n + v_n)^2$ 收敛.

（3）级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{u_n}{n}$ 收敛.

4. 判别敛散性: $\sum_{n=1}^{\infty}\sin(\pi\sqrt{n^2+1})$;

5. 证明交错级数$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}u_n(u_n>0,n=1,2,\cdots)$绝对收敛的充分必要条件为级数$\sum_{n=1}^{\infty}u_{2n-1}$与$\sum_{n=1}^{\infty}u_{2n}$都收敛.

6. 设正项级数$\{a_n\}$单调减少，且$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n a_n$发散，证明$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{1+a_n}\right)^n$收敛.

提示:

1. 否.如: $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$ 收敛，而 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n},\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n}}$ 发散.

2. 否.如: $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$ 收敛，而 $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}+\frac{1}{n}\right)$ 发散.

4. $\sin(\pi\sqrt{n^2+1}) = (-1)^n \sin(\pi\sqrt{n^2+1} - n\pi)$

$$= (-1)^n \sin\frac{\pi}{\sqrt{n^2+1}+n}$$

6. 由于 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$ 存在，设 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$，则 $a \geq 0$.

又级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n a_n$ 发散，有 $a > 0$. 所以

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\left(\frac{1}{1+a_n}\right)^n} = \frac{1}{1+a} < 1，$$ 故收敛.

备用题

1. 考察 级数 $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n+x^{-n}}{n^2}$ $(x\neq 0)$ 的 判别敛散性.

提示：当$|x|=1$时收敛，但当$0<|x|\neq 1$时,

$\lim_{n\to\infty} u_n(x)=\infty$，级数发散 .

2. 设 $u_n \neq 0\,(n=1,2,3,\cdots)$，且 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n}{u_n}=1$，则级数

$\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\left(\dfrac{1}{u_n}+\dfrac{1}{u_{n+1}}\right)$ （ *C* ）.

(*A*) 发散； ~~(*B*)~~ 绝对收敛;

(*C*) 条件收敛； (*D*) 收敛性根据条件不能确定.

分析： 由于

$$S_n=-\left(\frac{1}{u_1}+\cancel{\frac{1}{u_2}}\right)+\left(\cancel{\frac{1}{u_2}}+\cancel{\frac{1}{u_3}}\right)-\left(\cancel{\frac{1}{u_3}}+\cancel{\frac{1}{u_4}}\right)+\left(\cancel{\frac{1}{u_4}}+\frac{1}{u_5}\right)$$

$$+\cdots+(-1)^{n+1}\left(\cancel{\frac{1}{u_n}}+\frac{1}{u_{n+1}}\right)$$

$$=-\frac{1}{u_1}+(-1)^{n+1}\frac{1}{u_{n+1}}\xrightarrow{n\to\infty}-\frac{1}{u_1}\qquad(\because u_n\to\infty)$$

由$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n}{u_n}=1$,可得

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\left|\frac{1}{u_n}+\frac{1}{u_{n+1}}\right|}{\frac{1}{n}}=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{n}{u_n}+\frac{n}{n+1}\cdot\frac{n+1}{u_{n+1}}\right|=2,$$

所以$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left|(-1)^{n+1}(\frac{1}{u_n}+\frac{1}{u_{n+1}})\right|$发散，故$\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}(\frac{1}{u_n}+\frac{1}{u_{n+1}})$

条件收敛.

$\therefore$ 选(C).

3. 已知级数$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\sqrt{n}\sin\frac{1}{n^{\alpha}}$绝对收敛，级数$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^{2-\alpha}}$条件收敛，则(　　).

（A）$0<\alpha\le\frac{1}{2}$　（B）$\frac{1}{2}<\alpha\le 1$　（C）$1<\alpha\le\frac{3}{2}$　（D）$\frac{3}{2}<\alpha<2$

答案：选（**D**）.

解：因为$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\sqrt{n}\sin\frac{1}{n^{\alpha}}$绝对收敛，从而$\sum_{n=1}^{\infty}\sqrt{n}\sin\frac{1}{n^{\alpha}}$收敛，而$\sqrt{n}\sin\frac{1}{n^{\alpha}}\overset{n\to\infty}{\sim}\frac{1}{n^{\alpha-\frac{1}{2}}}$，可得$\alpha-\frac{1}{2}>1$，即$\alpha>\frac{3}{2}$．再由$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^{2-\alpha}}$条件收敛可得$0<2-\alpha\le 1$，即$1\le\alpha<2$．由此可得$\frac{3}{2}<\alpha<2$．所以选（**D**）.