第二节
向量的乘积

一、向量的数量积

二、向量的向量积

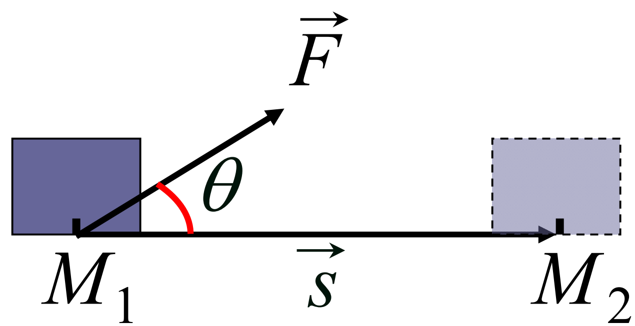
三、向量的混合积

一、向量的数量积

引例. 设一物体在常力 $\vec{F}$ 作用下, 沿与力夹角为 θ 的直线移动, 位移为 $\vec{s}$, 求力 $\vec{F}$ 所做的功。

解: 力 $\vec{F}$ 在 $\vec{s}$ 上的分力为

$$|\vec{F}|\cos\theta$$



则力 $\vec{F}$ 所做的功为

$$W = |\vec{F}|\,|\vec{s}|\cos\theta$$

1. 定义

设向量$\vec{a},\vec{b}$的夹角为θ，称

$$|\vec{a}||\vec{b}|\cos\theta$$

为$\vec{a}$与$\vec{b}$的**数量积**(点积)，记为 $\vec{a}\cdot\vec{b}$，即

$$\vec{a}\cdot\vec{b}=|\vec{a}||\vec{b}|\cos\theta.$$

注1: 数量积 $\vec{a}\cdot\vec{b}$ 为一个数。

注2: 引例中的功为 $W=\vec{F}\cdot\vec{s}$

2. 性质

(1) $\vec{a}\cdot\vec{a}=|\vec{a}|^2 \triangleq \boldsymbol{\vec{a}}^2$

(2) $\vec{a},\vec{b}$为任意两个向量，则有 $\vec{a}\cdot\vec{b}=0 \Leftrightarrow \vec{a}\perp\vec{b}$

推论 $\vec{i}\cdot\vec{i}=\vec{j}\cdot\vec{j}=\vec{k}\cdot\vec{k}=1$, $\vec{i}\cdot\vec{j}=\vec{j}\cdot\vec{k}=\vec{k}\cdot\vec{i}=0$

3. 运算律

(1) 交换律 $\vec{a}\cdot\vec{b}=\vec{b}\cdot\vec{a}$

(2) 结合律 （ λ 为实数）

$$(\lambda\vec{a})\cdot\vec{b}=\vec{a}\cdot(\lambda\vec{b})=\lambda(\vec{a}\cdot\vec{b})$$

(3) 分配律 $(\vec{a}+\vec{b})\cdot\vec{c}=\vec{a}\cdot\vec{c}+\vec{b}\cdot\vec{c}$

例1. 已知向量 $\vec{a}$, $\vec{b}$ 的夹角 $\theta=\dfrac{3\pi}{4}$, $|\vec{a}|=\sqrt{2}$, $|\vec{b}|=3$, 求 $|\vec{a}-\vec{b}|$.

解: $\because$ $|\vec{a}-\vec{b}|^2=(\vec{a}-\vec{b})\cdot(\vec{a}-\vec{b})$

$$=\vec{a}\cdot\vec{a}-2\vec{a}\cdot\vec{b}+\vec{b}\cdot\vec{b}$$

$$=|\vec{a}|^2-2|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|\cos\theta+|\vec{b}|^2$$

$$=(\sqrt{2})^2-2\sqrt{2}\cdot 3\cdot\cos\frac{3\pi}{4}+3^2$$

$$=17,$$

$\therefore$ $|\vec{a}-\vec{b}|=\sqrt{17}$ 注：此例相当于余弦定理

例 2. 设 $\vec{a}+3\vec{b}\perp 7\vec{a}-5\vec{b}$，$\vec{a}-4\vec{b}\perp 7\vec{a}-2\vec{b}$，且 $|\vec{b}|=1$，分别求 $\vec{a}\cdot\vec{b}$，$|\vec{a}|$，以及 $\vec{a}$ 与 $\vec{b}$ 的夹角 θ.

解　由题设有 $(\vec{a}+3\vec{b})\cdot(7\vec{a}-5\vec{b})=0$，$(\vec{a}-4\vec{b})\cdot(7\vec{a}-2\vec{b})=0$，

即　$7|\vec{a}|^2+16\vec{a}\cdot\vec{b}-15|\vec{b}|^2=0$，$7|\vec{a}|^2-30\vec{a}\cdot\vec{b}+8|\vec{b}|^2=0$.

消去 $|\vec{a}|^2$，且 $|\vec{b}|=1$，得 $2\vec{a}\cdot\vec{b}=1$，所以 $\vec{a}\cdot\vec{b}=\dfrac{1}{2}$。

代回方程组可得　$|\vec{a}|=1$，

进而　$\cos\theta=\dfrac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}||\vec{b}|}=\dfrac{1}{2}$，得　$\theta=\dfrac{\pi}{3}$.

4. 数量积的坐标表示

设 $\vec{a}=a_x\vec{i}+a_y\vec{j}+a_z\vec{k}$, $\vec{b}=b_x\vec{i}+b_y\vec{j}+b_z\vec{k}$, 则

$$\vec{a}\cdot\vec{b}=(a_x\vec{i}+a_y\vec{j}+a_z\vec{k})\cdot(b_x\vec{i}+b_y\vec{j}+b_z\vec{k})$$

$$\downarrow \quad \vec{i}\cdot\vec{i}=\vec{j}\cdot\vec{j}=\vec{k}\cdot\vec{k}=1,\quad \vec{i}\cdot\vec{j}=\vec{j}\cdot\vec{k}=\vec{k}\cdot\vec{i}=0$$

$$\vec{a}\cdot\vec{b}=\{a_x,a_y,a_z\}\cdot\{b_x,b_y,b_z\}=a_xb_x+a_yb_y+a_zb_z$$

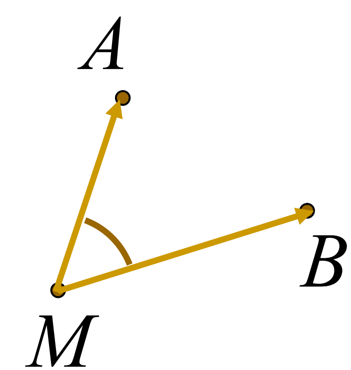
两向量的夹角公式

当 $\vec{a}$, $\vec{b}$ 为非零向量时, 由于 $\vec{a}\cdot\vec{b}=|\vec{a}||\vec{b}|\cos\theta$, 得

$$\theta=\arccos\frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}||\vec{b}|}=\arccos\frac{a_xb_x+a_yb_y+a_zb_z}{\sqrt{a_x^2+a_y^2+a_z^2}\sqrt{b_x^2+b_y^2+b_z^2}}$$

特别地，$\vec{a} \perp \vec{b} \Leftrightarrow a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z = 0.$

例3. 已知三点 $M(1,1,1), A(2,2,1), B(2,1,2)$, 求 $\angle AMB$.



解: $\overrightarrow{MA} = \{1, 1, 0\}$, $\overrightarrow{MB} = \{1, 0, 1\}$

则 $$\cos \angle AMB = \frac{\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB}}{|\overrightarrow{MA}||\overrightarrow{MB}|}$$

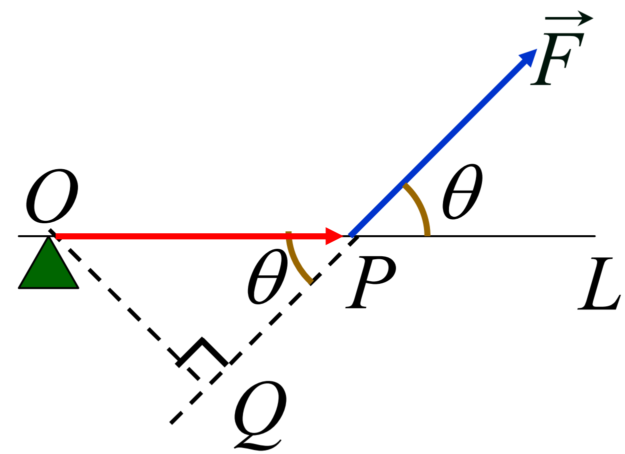
$$= \frac{1\times1+1\times0+0\times1}{\sqrt{1^2+1^2+0^2}\sqrt{1^2+0^2+1^2}} = \frac{1}{2},$$

故 $$\angle AMB = \frac{\pi}{3}.$$

二、向量的向量积

引例. 设O为杠杆L的支点，有一个与杠杆夹角为θ的力$\vec{F}$作用在杠杆的P点上，求力$\vec{F}$作用在杠杆上的力矩$\vec{M}$（向量）。

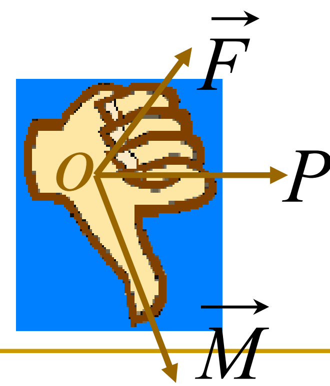
$$\left|\vec{M}\right| = |OQ|\,|\vec{F}| = |\overrightarrow{OP}|\,|\vec{F}|\sin\theta$$



$\overrightarrow{OP}, \vec{F}, \vec{M}$ 符合右手规则

$$\vec{M} \perp \overrightarrow{OP}$$

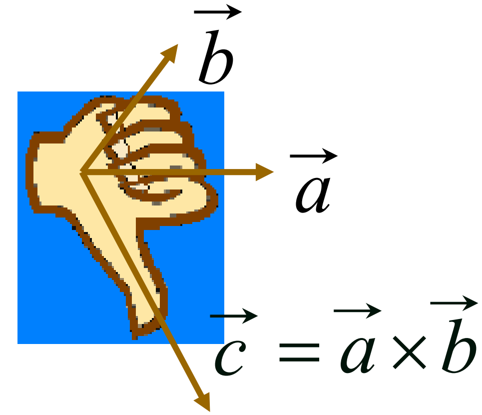
$$\vec{M} \perp \vec{F}$$



$$|OQ| = |\overrightarrow{OP}|\sin\theta$$

1. 定义

设$\vec{a},\vec{b}$的夹角为θ，定义



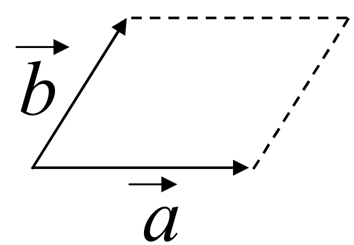
$$\text{向量}\ \vec{c}\begin{cases}\text{模：}|\vec{c}|=|\vec{a}||\vec{b}|\sin\theta\\ \text{方向：}\vec{a},\ \vec{b},\ \vec{c}\ \text{符合右手规则}\end{cases}$$

称$\vec{c}$为向量$\vec{a}$与$\vec{b}$的**向量积**(叉积)，记作

$$\vec{c}=\vec{a}\times\vec{b}.$$

注1: 向量积 $\vec{a}\times\vec{b}$ 为一个向量。

注2: 引例中的力矩 $\overrightarrow{M}=\overrightarrow{OP}\times\vec{F}$



注3: 右图平行四边形面积 $S=|\vec{a}\times\vec{b}|$

2. 性质

(1) $\vec{a}\times\vec{a}=\vec{0}$

(2) $\vec{a},\vec{b}$为任意向量, 则 $\vec{a}\times\vec{b}=\vec{0}\Leftrightarrow\vec{a}\,/\!/\,\vec{b}$

(3) $\vec{a}\times\vec{b}\perp\vec{a},\ \vec{a}\times\vec{b}\perp\vec{b}$

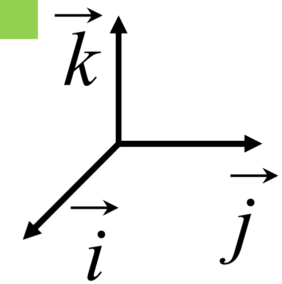
特别注意

3. 运算律

(1) 反交换律 $\vec{a}\times\vec{b}=-\vec{b}\times\vec{a}$

(2) 分配律 $(\vec{a}+\vec{b})\times\vec{c}=\vec{a}\times\vec{c}+\vec{b}\times\vec{c}$

(3) 结合律 $(\lambda\vec{a})\times\vec{b}=\vec{a}\times(\lambda\vec{b})=\lambda(\vec{a}\times\vec{b})$



推论 $\vec{i}\times\vec{i}=\vec{j}\times\vec{j}=\vec{k}\times\vec{k}=\vec{0},\ \vec{i}\times\vec{j}=\vec{k},\ \vec{j}\times\vec{i}=-\vec{k},$

$$\vec{j}\times\vec{k}=\vec{i},\ \vec{k}\times\vec{j}=-\vec{i},\ \vec{k}\times\vec{i}=\vec{j},\ \vec{i}\times\vec{k}=-\vec{j}.$$

4. 向量积的坐标表示式

设 $\vec{a}=a_x\vec{i}+a_y\vec{j}+a_z\vec{k}$, $\vec{b}=b_x\vec{i}+b_y\vec{j}+b_z\vec{k}$, 则

$$\vec{a}\times\vec{b}=(a_x\vec{i}+a_y\vec{j}+a_z\vec{k})\times(b_x\vec{i}+b_y\vec{j}+b_z\vec{k})$$

$$=\cancel{a_xb_x(\vec{i}\times\vec{i})}+a_xb_y(\underline{\vec{i}\times\vec{j}})+a_xb_z(\underline{\vec{i}\times\vec{k}})$$

$$+a_yb_x(\underline{\vec{j}\times\vec{i}})+\cancel{a_yb_y(\vec{j}\times\vec{j})}+a_yb_z(\underline{\vec{j}\times\vec{k}})$$

$$+a_zb_x(\underline{\vec{k}\times\vec{i}})+a_zb_y(\underline{\vec{k}\times\vec{j}})+\cancel{a_zb_z(\vec{k}\times\vec{k})}$$

$$=(a_yb_z-a_zb_y)\vec{i}+(a_zb_x-a_xb_z)\vec{j}$$

$$+(a_xb_y-a_yb_x)\vec{k}$$

向量积的行列式表示

$$\vec{a}\times\vec{b}=(a_yb_z-a_zb_y)\vec{i}+(a_zb_x-a_xb_z)\vec{j}+(a_xb_y-a_yb_x)\vec{k}$$

$$=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ a_x & a_y & a_z\\ b_x & b_y & b_z\end{vmatrix}$$

$$\boxed{\begin{aligned}\vec{a}&=a_x\vec{i}+a_y\vec{j}+a_z\vec{k}\\ \vec{b}&=b_x\vec{i}+b_y\vec{j}+b_z\vec{k}\end{aligned}}$$

$$=\begin{vmatrix}a_y & a_z\\ b_y & b_z\end{vmatrix}\vec{i}+\begin{vmatrix}a_z & a_x\\ b_z & b_x\end{vmatrix}\vec{j}+\begin{vmatrix}a_x & a_y\\ b_x & b_y\end{vmatrix}\vec{k}$$

$$=\left\{\begin{vmatrix}a_y & a_z\\ b_y & b_z\end{vmatrix},\begin{vmatrix}a_z & a_x\\ b_z & b_x\end{vmatrix},\begin{vmatrix}a_x & a_y\\ b_x & b_y\end{vmatrix}\right\}$$

二阶行列式 $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}.$

三阶行列式

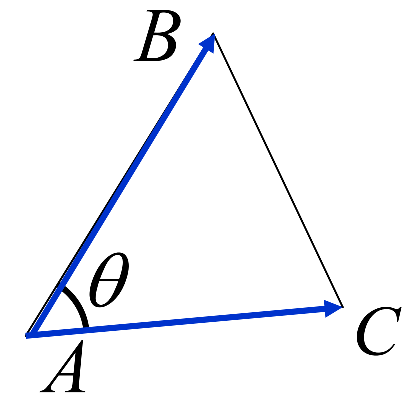
$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{13}a_{22}a_{31}.$$

规律:

$$\begin{array}{ccc|cc} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{31} & a_{32} \\ - & - & - & & \\ & & + & + & + \end{array}$$

记住，不需要写出。

例4. 已知三点 $A(1,2,3)$, $B(3,4,5)$, $C(2,4,7)$, 求三角形 $\boldsymbol{ABC}$ 的面积。



解：如图所示，

$$S_{\Delta ABC} = \frac{1}{2}\left|\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}\right|$$

$$= \frac{1}{2}\left|\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 2 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 4 \end{vmatrix}\right| = \frac{1}{2}\left|4\vec{i} - 6\vec{j} + 2\vec{k}\right|$$

$$= \frac{1}{2}\sqrt{4^2 + (-6)^2 + 2^2} = \sqrt{14}$$

例 5. 某向量同时垂直于向量 $\vec{a}=\{1,1,1\}$ 和向量 $\vec{b}=\{1,0,-1\}$，求此向量的方向余弦.

解　由向量积的定义知，所求向量可取为

$$\vec{c}=\vec{a}\times\vec{b}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ 1 & 1 & 1\\ 1 & 0 & -1\end{vmatrix}=-\vec{i}+2\vec{j}-\vec{k}=\{-1,2,-1\}.$$

因此 $\vec{c}^{\,0}=\frac{1}{\sqrt{6}}\{-1,2,-1\}$. 考虑到 $\vec{c}^{\,0}$ 与 $-\vec{c}^{\,0}$ 均垂直于 $\vec{a},\vec{b}$，

故所求方向余弦为

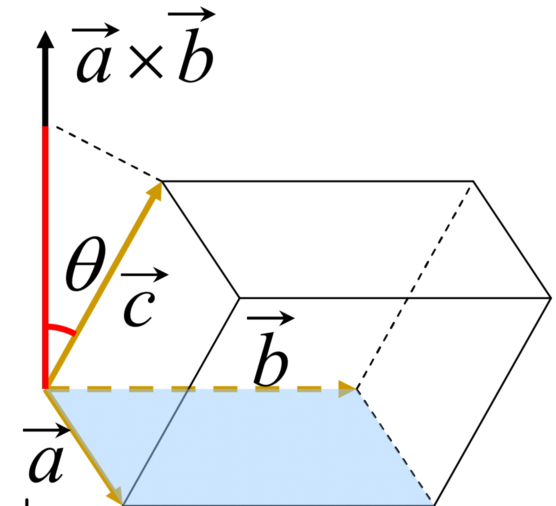
$$\cos\alpha=\mp\frac{1}{\sqrt{6}},\cos\beta=\pm\frac{2}{\sqrt{6}},\cos\gamma=\mp\frac{1}{\sqrt{6}}.$$

三、向量的混合积

1. 定义 已知三向量 $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$, 称数量

$$(\vec{a}\times\vec{b})\cdot\vec{c} \xlongequal{\text{记作}} [\vec{a}\,\vec{b}\,\vec{c}]$$

为 $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ 的混合积.



几何意义:

以 $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ 为棱作平行六面体, 则其

底面积 $A=|\vec{a}\times\vec{b}|$, 高 $h=|\vec{c}|\,|\cos\theta|$

故平行六面体体积为

$$V=A\,h=|\vec{a}\times\vec{b}|\,|\vec{c}|\,|\cos\theta| = |(\vec{a}\times\vec{b})\cdot\vec{c}|$$

$$=|[\vec{a}\,\vec{b}\,\vec{c}]|$$

2. 混合积的坐标表示

设 $\vec{a}=\{a_x,a_y,a_z\}$, $\vec{b}=\{b_x,b_y,b_z\}$, $\vec{c}=\{c_x,c_y,c_z\}$

$$\vec{a}\times\vec{b}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ a_x & a_y & a_z\\ b_x & b_y & b_z\end{vmatrix}=\left\{\begin{vmatrix}a_y & a_z\\ b_y & b_z\end{vmatrix},\begin{vmatrix}a_z & a_x\\ b_z & b_x\end{vmatrix},\begin{vmatrix}a_x & a_y\\ b_x & b_y\end{vmatrix}\right\}$$

$$[\vec{a}\,\vec{b}\,\vec{c}]=(\vec{a}\times\vec{b})\cdot\vec{c}=\begin{vmatrix}a_y & a_z\\ b_y & b_z\end{vmatrix}c_x+\begin{vmatrix}a_z & a_x\\ b_z & b_x\end{vmatrix}c_y+\begin{vmatrix}a_x & a_y\\ b_x & b_y\end{vmatrix}c_z$$

$$=\begin{vmatrix}a_x & a_y & a_z\\ b_x & b_y & b_z\\ c_x & c_y & c_z\end{vmatrix}$$

3. 性质

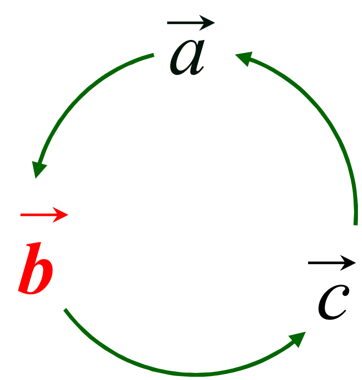
(1) 三个非零向量 $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ 共面的充要条件是

$$[\vec{a}\,\vec{b}\,\vec{c}]=0$$

(2) 轮换对称性：

$$[\vec{a}\ \vec{b}\ \vec{c}]=[\vec{b}\ \vec{c}\ \vec{a}]=[\vec{c}\ \vec{a}\ \vec{b}]$$

(可用三阶行列式推出)

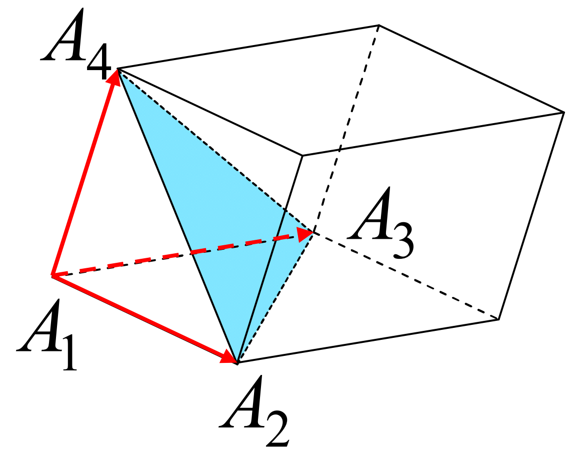


利用反对称性，可得

$$[\vec{a}\ \vec{b}\ \vec{c}]=-[\vec{b}\ \vec{a}\ \vec{c}]$$

例6. 已知一四面体的顶点 $A_k(x_k, y_k, z_k)\,(k=1,2,3,4)$, 求该四面体体积.

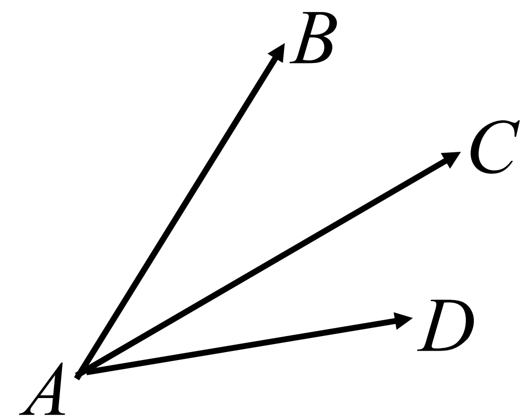
解：已知四面体的体积等于以向量 $\overrightarrow{A_1A_2}$, $\overrightarrow{A_1A_3}$, $\overrightarrow{A_1A_4}$ 为棱的平行六面体体积的 $\frac{1}{6}$, 故



$$V = \frac{1}{6}\left|\,[\overrightarrow{A_1A_2}\ \overrightarrow{A_1A_3}\ \overrightarrow{A_1A_4}]\,\right|$$

$$= \frac{1}{6}\left|\begin{vmatrix} x_2-x_1 & y_2-y_1 & z_2-z_1 \\ x_3-x_1 & y_3-y_1 & z_3-z_1 \\ x_4-x_1 & y_4-y_1 & z_4-z_1 \end{vmatrix}\right|$$

例7. 证明四点 $A(1,1,1), B(4,5,6), C(2,3,3)$, $D(10,15,17)$共面 .



证：因

$$[\ \overrightarrow{AB}\ \overrightarrow{AC}\ \overrightarrow{AD}\ ] = \begin{vmatrix} 3 & 4 & 5 \\ 1 & 2 & 2 \\ 9 & 14 & 16 \end{vmatrix} = 0$$

故 A, B, C, D 四点共面 .

内容小结

设 $\vec{a}=\{a_x,a_y,a_z\},\vec{b}=\{b_x,b_y,b_z\},\vec{c}=\{c_x,c_y,c_z\}$

加减: $\vec{a}\pm\vec{b}=\{a_x\pm b_x,a_y\pm b_y,a_z\pm b_z\}$

数乘: $\lambda\vec{a}=\{\lambda a_x,\lambda a_y,\lambda a_z\}$

数量积: $\vec{a}\cdot\vec{b}=a_xb_x+a_yb_y+a_zb_z$

向量积: $\vec{a}\times\vec{b}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ a_x & a_y & a_z\\ b_x & b_y & b_z\end{vmatrix}$

混合积: $[\vec{a}\,\vec{b}\,\vec{c}]=(\vec{a}\times\vec{b})\cdot\vec{c}=\begin{vmatrix}a_x & a_y & a_z\\ b_x & b_y & b_z\\ c_x & c_y & c_z\end{vmatrix}$

向量的位置关系

$$\vec{a}//\vec{b} \Leftrightarrow \vec{a}\times\vec{b}=\vec{0} \Leftrightarrow \frac{b_x}{a_x}=\frac{b_y}{a_y}=\frac{b_z}{a_z}$$

$$\vec{a}\perp\vec{b} \Leftrightarrow \vec{a}\cdot\vec{b}=0 \Leftrightarrow a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z = 0$$

$$\vec{a},\vec{b},\vec{c}\text{共面} \Leftrightarrow (\vec{a}\times\vec{b})\cdot\vec{c}=0$$

$$\Leftrightarrow \begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \end{vmatrix} = 0$$

思考与练习

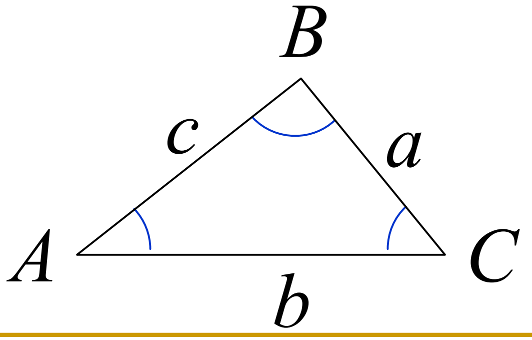
1. 设 $\vec{a}=\vec{i}+2\vec{j}-\vec{k}$, $\vec{b}=-\vec{i}+\vec{j}$, 计算 $\vec{a}\cdot\vec{b}$ 及 $\vec{a}\times\vec{b}$, 并求 $\vec{a},\vec{b}$ 夹角 θ 的正弦与余弦.

答案: $\vec{a}\cdot\vec{b}=1$, $\quad \vec{a}\times\vec{b}=(1,1,3)$

$$\cos\theta=\frac{1}{2\sqrt{3}},\quad \sin\theta=\sqrt{\frac{11}{12}}$$

2. 用向量方法证明正弦定理:

$$\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}$$



证:　由三角形面积公式

$$S_{\Delta ABC}=\frac{1}{2}\left|\overrightarrow{AC}\times\overrightarrow{AB}\right|$$

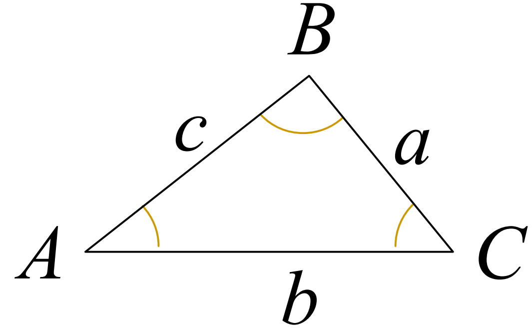
$$=\frac{1}{2}\left|\overrightarrow{BA}\times\overrightarrow{BC}\right|=\frac{1}{2}\left|\overrightarrow{CB}\times\overrightarrow{CA}\right|$$

因

$$\left|\overrightarrow{AC}\times\overrightarrow{AB}\right|=b\cdot c\cdot\sin A$$

$$\left|\overrightarrow{BA}\times\overrightarrow{BC}\right|=c\cdot a\cdot\sin B$$

$$\left|\overrightarrow{CB}\times\overrightarrow{CA}\right|=a\cdot b\cdot\sin C$$



所以

$$\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}$$

备用题

1. 已知向量 $\vec{a}$, $\vec{b}$ 的夹角 $\theta=\frac{3\pi}{4}$, $|\vec{a}|=\sqrt{2}$, $|\vec{b}|=3$,

求 $|a-b|$.

解: $\because\ |\vec{a}-\vec{b}|^2=(\vec{a}-\vec{b})\cdot(\vec{a}-\vec{b})$

$$=\vec{a}\cdot\vec{a}-2\,\vec{a}\cdot\vec{b}+\vec{b}\cdot\vec{b}$$

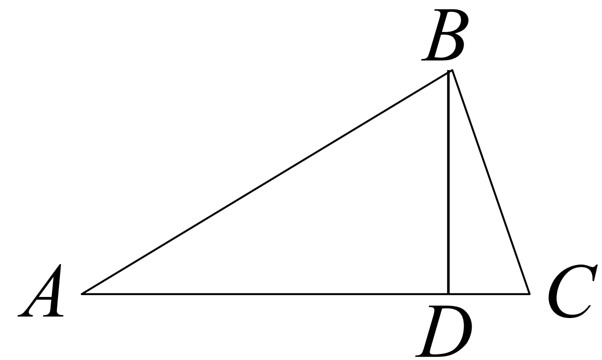
$$=|\vec{a}|^2-2|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|\cos\theta+|\vec{b}|^2$$

$$=(\sqrt{2})^2-2\sqrt{2}\cdot 3\cdot\cos\frac{3\pi}{4}+3^2$$

$$=17$$

$\therefore\ |\vec{a}-\vec{b}|=\sqrt{17}$

2. 在顶点为 $A(1,-1,2)$，$B(1,1,0)$ 和 $C(1,3,-1)$ 的三角形中，求 AC 边上的高 BD.



解：$\overrightarrow{AC}=(0,4,-3)$

$\overrightarrow{AB}=(0,2,-2)$

三角形 ABC 的面积为

$$S=\frac{1}{2}|\overrightarrow{AC}\times\overrightarrow{AB}|=\frac{1}{2}\sqrt{(-2)^2+0^2+0^2}=1$$

而 $|\overrightarrow{AC}|=\sqrt{4^2+(-3)^2}=5,\quad S=\frac{1}{2}|\overrightarrow{AC}|\,|BD|$

故有 $1=\frac{1}{2}\cdot 5\cdot|BD|\qquad \therefore\quad |BD|=\frac{2}{5}$