习题课

多元函数微分法

一、 基本概念

二、多元函数微分法

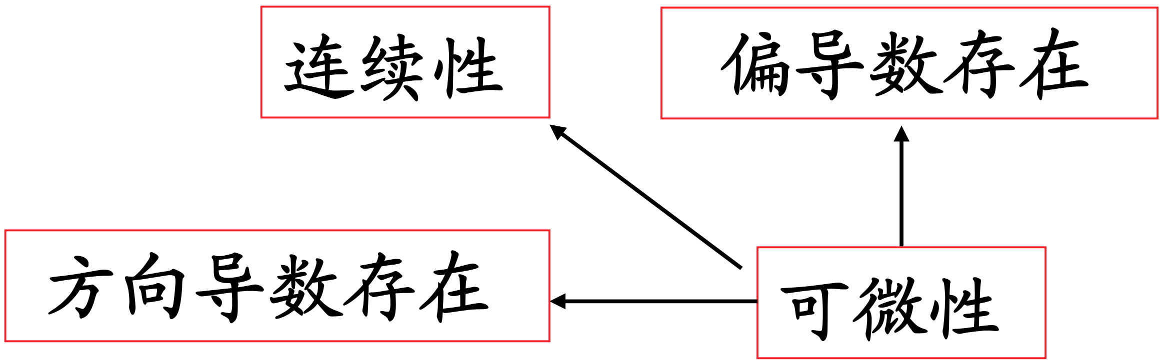
三、多元函数微分法的应用

一、 基本概念

1. 多元函数的定义、极限 、连续

- 定义域及对应规律
- 判断极限不存在及求极限的方法
- 函数的连续性及其性质

2. 几个基本概念的关系



二、多元函数微分法

1. 分析复合结构 $\begin{cases} \text{显示结构} \\ \text{隐式结构} \end{cases}$ (画变量关系图)

自变量个数 = 变量总个数 – 方程总个数

自变量与因变量由所求对象判定

2. 正确使用求导法则

"分段用乘,分叉用加,单路全导,叉路偏导"

注意正确使用求导符号

3. 利用一阶微分形式不变性

三、多元函数微分法的应用

1. 极值与最值问题

- 极值的必要条件与充分条件
- 求条件极值的方法 (消元法, 拉格朗日乘数法)
- 求解最值问题
- 最小二乘法

2. 在几何中的应用

求曲线在切线及法平面 (关键: 抓住切向量)

求曲面的切平面及法线 (关键: 抓住法向量)

1. 设 $f(x,y)=\begin{cases} xy\sin\dfrac{1}{x^2+y^2}, & (x,y)\neq(0,0), \\ 0, & (x,y)=(0,0). \end{cases}$ 证明:

（1） $f_x'(0,0), f_y'(0,0)$ 存在;

（2） $f_x'(x,y), f_y'(x,y)$ 在点 $(0,0)$ 处不连续;

（3） $f(x,y)$ 在点 $(0,0)$ 处可微.

解　（1） $=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x,0)-f(0,0)}{x}=0, f_y'(0,0)=\lim\limits_{y\to 0}\dfrac{f(0,y)-f(0,0)}{y}=0$， 因此 $f_x'(0,0)$， $f_y'(0,0)$ 存在;

（2） $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} f_x'(x,y)=\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}[y\sin\frac{1}{x^2+y^2}-\frac{2x^2y}{(x^2+y^2)^2}\cos\frac{1}{x^2+y^2}]$ 不存在，

因此 $f_x'(x,y)$ 在 $(0,0)$ 处不连续；

又 $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} f_y'(x,y)=\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}[x\sin\frac{1}{x^2+y^2}-\frac{2xy^2}{(x^2+y^2)^2}\cos\frac{1}{x^2+y^2}]$ 不存在，

因此 $f_y'(x,y)$ 在 $(0,0)$ 处也不连续；

（3） $$\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\frac{f(x,y)-f(0,0)-f_x'(0,0)x-f_y'(0,0)y}{\sqrt{x^2+y^2}}=\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\frac{xy\sin\frac{1}{x^2+y^2}}{\sqrt{x^2+y^2}}=0,$$

因而函数 $f(x,y)$ 在点 $(0,0)$ 处可微 .

2．设一块金属板在 xoy 平面上占据的区域是 $0 \le x \le 1, 0 \le y \le 1$，已知板上各点的温度是 $T(x,y) = 500xy(1-x)(1-y)+10$ （${}^0C$）问在点 $\left(\frac{1}{4},\frac{1}{3}\right)$ 处的一只昆虫为尽快地逃离到较凉的地方，它应当沿什么方向运动？

解：$$T'_x\left(\frac{1}{4},\frac{1}{3}\right) = 500(1-2x)(y-y^2)\Big|_{\left(\frac{1}{4},\frac{1}{3}\right)} = \frac{500}{9},$$

$$T'_y\left(\frac{1}{4},\frac{1}{3}\right) = 500(x-x^2)(1-2y)\Big|_{\left(\frac{1}{4},\frac{1}{3}\right)} = \frac{500}{16},$$

故昆虫应沿 $-gradT\left(\frac{1}{4},\frac{1}{3}\right) = \left\{-\frac{500}{9},\frac{500}{16}\right\}$ 的方向运动.

3. 求下列函数的极值:

$f(x,y)=xy(a-x-y)$,（$a\neq 0$）;

解: 由 $\begin{cases} f_x'(x,y)=y(a-2x-y)=0, \\ f_x'(x,y)=x(a-x-2y)=0, \end{cases}$，解得驻点为

$(0,0)$、$\left(\dfrac{a}{3},\dfrac{a}{3}\right)$，$(0,a)$，$(a,0)$.

4. 设 $f(x)=\dfrac{1}{1+x^2}$，试确定常数 a 与 b，使得 $\int_0^1\left[ax+b-f(x)\right]^2dx$ 的值最小.

解: $$\int_0^1\left[ax+b-f(x)\right]^2dx=\frac{a^2}{3}+b^2+ab-a\ln 2-\frac{\pi}{2}b+\int_0^1 f^2(x)dx$$

令 $$F(a,b)=\int_0^1\left[ax+b-f(x)\right]^2dx$$

由 $$\begin{cases} F_a'(a,b)=\dfrac{2}{3}a+b-\ln 2=0 \\ F_b'(a,b)=2b+a-\dfrac{\pi}{2}=0 \end{cases}$$

解得唯一驻点 $\left(6\ln 2-\dfrac{3\pi}{2},\pi-3\ln 2\right)$，又

$$F_{aa}''(a,b)=\frac{2}{3}>0\text{，}\quad F_{ab}''(a,b)=1\text{，}\quad F_{bb}''(a,b)=2\text{，}$$

且 $$F''_{aa}(a,b)\cdot F''_{bb}(a,b)-\left[F''_{ab}(a,b)\right]^2=\frac{1}{3}>0$$

故 $\left(6\ln 2-\dfrac{3\pi}{2},\pi-3\ln 2\right)$ 为 $F(a,b)$ 的最小值点，即当 $a=6\ln 2-\dfrac{3\pi}{2}$，$b=\pi-3\ln 2$ 时积分值最小.

5. 求函数 $f(x,y)=e^{-xy}$ 在区域 $D=\{(x,y)\mid x^2+4y^2\le 1\}$ D 上的最值.

解: 由于各二元函数 $f(x,y)$ 在闭区域 D 上连续，故最值存在.

（1） 由 $\begin{cases} f'_x(x,y)=-ye^{-xy}=0 \\ f'_y(x,y)=-xe^{-xy}=0 \end{cases}$，可得 D 内有驻点 $(0,0)$，且 $f(0,0)=1$，

（2）在边界 $x^2+4y^2=1$ 上，构造 Lagrange 函数

$$\boldsymbol{L(x,y,\lambda)=e^{-xy}+\lambda\left(x^2+4y^2-1\right)}$$

令 $\begin{cases} L'_x(x,y,\lambda)=-ye^{-xy}+2\lambda x=0 \\ L'_y(x,y,\lambda)=-xe^{-xy}+8\lambda y=0 \\ L'_\lambda(x,y,\lambda)=x^2+4y^2-1=0 \end{cases}$

得可能的极值点: $(\frac{\sqrt{2}}{2},\frac{\sqrt{2}}{4})$、$(\frac{\sqrt{2}}{2},-\frac{\sqrt{2}}{4})$、$(-\frac{\sqrt{2}}{2},\frac{\sqrt{2}}{4})$、$(-\frac{\sqrt{2}}{2},-\frac{\sqrt{2}}{4})$，

且 $f\left(\frac{\sqrt{2}}{2},\frac{\sqrt{2}}{4}\right)=f\left(-\frac{\sqrt{2}}{2},-\frac{\sqrt{2}}{4}\right)=e^{-\frac{1}{4}}$，$f\left(-\frac{\sqrt{2}}{2},\frac{\sqrt{2}}{4}\right)=f\left(\frac{\sqrt{2}}{2},-\frac{\sqrt{2}}{4}\right)=e^{\frac{1}{4}}$

比较函数值可得 $f(x,y)$ 有：$f_{\min}\left(\frac{\sqrt{2}}{2},\frac{\sqrt{2}}{4}\right)=f_{\min}\left(-\frac{\sqrt{2}}{2},-\frac{\sqrt{2}}{4}\right)=e^{-\frac{1}{4}}$

$$f_{\max}\left(-\frac{\sqrt{2}}{2},\frac{\sqrt{2}}{4}\right)=f_{\max}\left(\frac{\sqrt{2}}{2},-\frac{\sqrt{2}}{4}\right)=e^{\frac{1}{4}}.$$

总复习题九

1. 填空题

（3）由曲线 $\begin{cases} 3x^2+2y^2=12, \\ z=0, \end{cases}$ 绕 y 轴旋转一周得到的旋转面在点 $\left(0,\sqrt{3},\sqrt{2}\right)$ 处的指向外侧的单位法向量为________；

解：旋转曲面方程为 $3x^2+2y^2+3z^2-12=0$，则在点 $\left(0,\sqrt{3},\sqrt{2}\right)$ 的法向量为 $\vec{n}=\{6x,4y,6z\}_{\left(0,\sqrt{3},\sqrt{2}\right)}=\left\{0,4\sqrt{3},6\sqrt{2}\right\}$，

则单位法向量为 $\vec{n}^0=\dfrac{1}{\sqrt{5}}\left\{0,\sqrt{2},\sqrt{3}\right\}$；

2. 选择题

（2）由设函数 $f(x,y)$ 在点 $(0,0)$ 附近有定义，且 $f_x'(0,0)=-3$，$f_y'(0,0)=1$，则（　　）;

（A）$dz\big|_{(0,0)}=-3dx+dy$

（B）曲面 $z=f(x,y)$ 在点 $(0,0,f(0,0))$ 的法向量为 $\{-3,1,1\}$

（C）曲线 $\begin{cases} z=f(x,y) \\ y=0 \end{cases}$ 在点 $(0,0,f(0,0))$ 的切向量为 $\{1,0,-3\}$

（D）曲线 $\begin{cases} z=f(x,y) \\ y=0 \end{cases}$ 在点 $(0,0,f(0,0))$ 的切向量为 $\{-3,0,1\}$

解： 由于函数 $f(x,y)$ 虽然在 $(0,0)$ 处两个偏导数存在，但不一定可微，故（A）不对，取 x 为参数，则曲线 $x=x$， $y=0$， $z=f(x,0)$ 在点 $(0,0,f(0,0))$ 的切向量为 $\{1,0,-3\}$；

故（2）答案 选（C）.

（3）设函数 $z=f(x,y)$ 的全微分为 $dz=xdx+ydy$，则点 $(0,0)$（ ）；

（A）不是 $f(x,y)$ 的连续点

（B）不是 $f(x,y)$ 的极值点

（C）是 $f(x,y)$ 的极大值点

（D）是 $f(x,y)$ 的极小值点

解: $dz = xdx + ydy = d\frac{1}{2}\left(x^2 + y^2\right)$，则 $z = \frac{1}{2}\left(x^2 + y^2\right) + C \geq C$，其中 C 为常数，故 $z = f(x,y)$ 在 $(0,0)$ 处取极小值;

故（3）答案 选（D）.

（4）设函在曲线 $x = t$，$y = t^2$，$z = t^3$ 的所有切线中，与平面 $x + 2y + z = 4$ 平行的切线（ ）.

（A）只有1条 （B）只有2条 （C）至少有3条 （D）不存在

解: 对应于 t_0 处曲线切线的方向向量为 $\vec{\tau} = \{1, 2t_0, 3t_0^2\}$，平面的法向量为 $\vec{n} = \{1,2,1\}$.由题设知 $\vec{\tau} \cdot \vec{n} = 0$，即 $1 - 4t_0 + 3t_0^2 = 0$，解得 $t_0 = 1$ 或 $t_0 = \frac{1}{3}$;

故（4）答案 选（B）.

6. 设函数 $u=f(x,y,z)$ 具有一阶连续偏导数，函数 $y=y(x)$ 及 $z=z(x)$ 分别由下列方程 $e^{xy}-xy=2$ 和 $e^x=\int_0^{x-z}\frac{\sin t}{t}dt$ 确定，求 $\frac{du}{dx}$.

解：　由隐函数微分法，方程两边对 x 求导

$$e^{xy}\left(x\frac{dy}{dx}+y\right)-\left(x\frac{dy}{dx}+y\right)=0，\text{解得}\quad \frac{dy}{dx}=-\frac{y}{x},$$

$$e^x=\frac{\sin(x-z)}{x-z}\left(1-\frac{dz}{dx}\right),\qquad \text{解得}\quad \frac{dz}{dx}=1-\frac{e^x(x-z)}{\sin(x-z)},$$

则
$$\frac{du}{dx}=f_x'+f_y'\cdot\frac{dy}{dx}+f_z'\cdot\frac{dz}{dx}$$

$$=f_x'+f_y'\cdot\left(-\frac{y}{x}\right)+f_z'\cdot\left[1-\frac{e^x(x-z)}{\sin(x-z)}\right].$$

9. 设函数$u=f(x,y)$具有二阶连续偏导数，且满足等式

$6\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}-\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=0$，确定$a$的值，使等式在变换$\begin{cases}\xi=x-2y\\ \eta=x+ay\end{cases}$下简

化为$\frac{\partial^2 z}{\partial\xi\partial\eta}=0$.

解：$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{\partial z}{\partial\xi}\frac{\partial\xi}{\partial x}+\frac{\partial z}{\partial\eta}\frac{\partial\eta}{\partial x}=\frac{\partial z}{\partial\xi}+\frac{\partial z}{\partial\eta}$，$\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{\partial z}{\partial\xi}\frac{\partial\xi}{\partial y}+\frac{\partial z}{\partial\eta}\frac{\partial\eta}{\partial y}=-2\frac{\partial z}{\partial\xi}+a\frac{\partial z}{\partial\eta}$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=\frac{\partial^2 z}{\partial\xi^2}+\frac{\partial^2 z}{\partial\xi\partial\eta}+\frac{\partial^2 z}{\partial\eta\partial\xi}+\frac{\partial^2 z}{\partial\eta^2}=\frac{\partial^2 z}{\partial\xi^2}+2\frac{\partial^2 z}{\partial\xi\partial\eta}+\frac{\partial^2 z}{\partial\eta^2}$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=-2\frac{\partial^2 z}{\partial\xi^2}+a\frac{\partial^2 z}{\partial\xi\partial\eta}-2\frac{\partial^2 z}{\partial\eta\partial\xi}+a\frac{\partial^2 z}{\partial\eta^2}=-2\frac{\partial^2 z}{\partial\xi^2}+(a-2)\frac{\partial^2 z}{\partial\xi\partial\eta}+a\frac{\partial^2 z}{\partial\eta^2}$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=4\frac{\partial^2 z}{\partial\xi^2}-2a\frac{\partial^2 z}{\partial\xi\partial\eta}-2a\frac{\partial^2 z}{\partial\eta\partial\xi}+a^2\frac{\partial^2 z}{\partial\eta^2}=4\frac{\partial^2 z}{\partial\xi^2}-4a\frac{\partial^2 z}{\partial\xi\partial\eta}+a^2\frac{\partial^2 z}{\partial\eta^2}$$

将上述结果代入原方程，经整理后得

$$(10+5a)\frac{\partial^2 z}{\partial\xi\partial\eta}+\left(6+a-a^2\right)\frac{\partial^2 z}{\partial\eta^2}=0,$$

依题意 a 应满足

$$6+a-a^2=0 \quad 且 \quad 10+5a\neq 0,$$

解得 $a=3$.

9. 设函数 $u=f(x,y)$ 具有二阶连续偏导数，且满足等式

$6\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}-\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=0$，确定 a 的值，使等式在变换 $\begin{cases}\xi=x-2y\\ \eta=x+ay\end{cases}$ 下简

化为 $\frac{\partial^2 z}{\partial\xi\partial\eta}=0$.