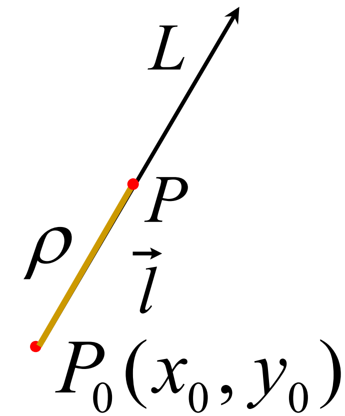
第七节
方向导数和梯度

一、方向导数

二、梯度

一、方向导数

1. 二元函数情形



定义: 若函数 $f(x, y)$ 在点 $P_0(x_0, y_0)$ 处的某邻域内有定义，$\vec{l}$ 为一非零向量，L 为自点 $P_0(x_0, y_0)$ 沿方向 $\vec{l}$ 发出的射线，点 $P(x_0+\Delta x, y_0+\Delta y)\in L$， 如果存在下列极限:

$$\lim_{\rho\to 0}\frac{\Delta f}{\rho}=\lim_{\rho\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x, y_0+\Delta y)-f(x_0, y_0)}{\rho},\ \rho=\sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}$$

就称其极限值为 $f(x, y)$在点$P_0(x_0, y_0)$ 处沿方向 $\vec{l}$ 的**方向导数**，记为 $\left.\frac{\partial z}{\partial \vec{l}}\right|_{(x_0, y_0)}$ 或 $\left.\frac{\partial f}{\partial \vec{l}}\right|_{(x_0, y_0)}$ ，即

$$\left.\frac{\partial f}{\partial \vec{l}}\right|_{(x_0,y_0)} = \lim_{\rho\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x, y_0+\Delta y)-f(x_0,y_0)}{\rho}$$

当 $\vec{l}$ 与 x 轴正向同向时，

$\Delta y = 0,$
$\rho = \Delta x,$ $\left.\frac{\partial f}{\partial \vec{l}}\right|_{(x_0,y_0)} = f'_x(x_0,y_0)$

当 $\vec{l}$ 与 x 轴正向反向时，

$\Delta y = 0,$
$\rho = -\Delta x,$ $\left.\frac{\partial f}{\partial \vec{l}}\right|_{(x_0,y_0)} = -f'_x(x_0,y_0)$

当 $\vec{l}$ 与 y 轴正向同向时，

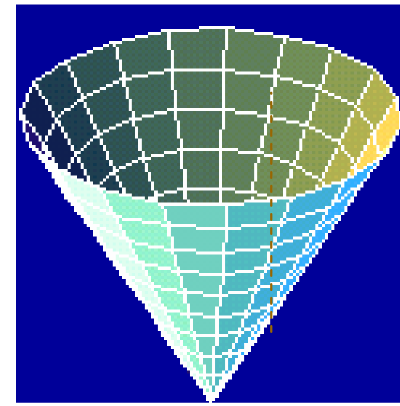
$\Delta x = 0,$
$\rho = \Delta y,$ $\left.\frac{\partial f}{\partial \vec{l}}\right|_{(x_0,y_0)} = f'_y(x_0,y_0)$

当 $\vec{l}$ 与 y 轴正向反向时，

$\Delta x = 0,$
$\rho = -\Delta y,$ $\left.\frac{\partial f}{\partial \vec{l}}\right|_{(x_0,y_0)} = -f'_y(x_0,y_0)$

方向导数是单向导数；偏导数是双向导数。

例1. 求函数 $f(x,y)=\sqrt{x^2+y^2}$ 在点 $(0,0)$ 处沿任意方向 $\vec{l}$ 的方向导数 $\left.\dfrac{\partial f}{\partial \vec{l}}\right|_{(0,0)}$。



解：

$$\left.\frac{\partial f}{\partial \vec{l}}\right|_{(0,0)}=\lim_{\rho\to 0}\frac{f(\Delta x,\Delta y)-f(0,0)}{\rho}$$

$$=\lim_{\rho\to 0}\frac{\sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}}{\sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}}=1.$$

直观意义：一个蚂蚁在顶点处沿任意方向向上爬行时，斜率总为1.

注意到 $f(x,y)=\sqrt{x^2+y^2}$ 在点 $(0,0)$ 处不可偏导，所以

沿任意方向的方向导数存在 $\not\longrightarrow$ 可偏导

例2. 讨论函数 $f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{xy}{x^2+y^2}, & x^2+y^2\neq 0,\\ 0, & x^2+y^2=0\end{cases}$ 在点 $(0,0)$ 处沿方向 $\vec{l}=\{1,1\}$ 方向导数的存在性。

解：$\vec{l}=\{1,1\}$ 表明射线 L 为 $y=x, x:0\to+\infty$。此时，

$$\lim_{\rho\to 0}\frac{\Delta f}{\rho}=\lim_{\rho\to 0}\frac{f(\Delta x,\Delta x)-f(0,0)}{\rho}=\lim_{\rho\to 0}\frac{\frac{1}{2}-0}{\rho}=\lim_{\rho\to 0}\frac{1}{2\rho}=+\infty,$$

所以所讨论的方向导数不存在。

注： 例2表明

$$\boxed{\text{可偏导} \;\not\longrightarrow\; \text{沿任意方向的方向导数存在}}$$

定理1: 若函数 $f(x,y)$ 在点 $P_0(x_0,y_0)$ 处可微，则 $f(x,y)$ 在该点沿任意方向 $\vec{l}$ 的方向导数均存在，且有

$$\left.\frac{\partial f}{\partial \vec{l}}\right|_{(x_0,y_0)} = f_x'(x_0,y_0)\cos\alpha + f_y'(x_0,y_0)\sin\alpha.$$

其中α为$\vec{l}$对x 轴正向的转角(逆时针方向)。

$$\frac{\Delta x}{\rho} = \cos\alpha \qquad \frac{\Delta y}{\rho} = \sin\alpha$$

证明: 由函数 $f(x,y)$在点 P_0处可微，得

$$\Delta f = f_x'(x_0,y_0)\Delta x + f_y'(x_0,y_0)\Delta y + o(\rho)$$

$$\frac{\Delta f}{\rho} = f_x'(x_0,y_0)\cos\alpha + f_y'(x_0,y_0)\sin\alpha + \frac{o(\rho)}{\rho}$$

故 $$\left.\frac{\partial f}{\partial \vec{l}}\right|_{(x_0,y_0)} = \lim_{\rho\to 0}\frac{\Delta f}{\rho} = f_x'(x_0,y_0)\cos\alpha + f_y'(x_0,y_0)\sin\alpha.$$

注： 在例2中，虽然 $f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{xy}{x^2+y^2}, & x^2+y^2\neq 0,\\ 0, & x^2+y^2=0\end{cases}$

在点 $(0,0)$ 可偏导， 且 $f_x'(0,0)=f_y'(0,0)=0$, 但不可微，

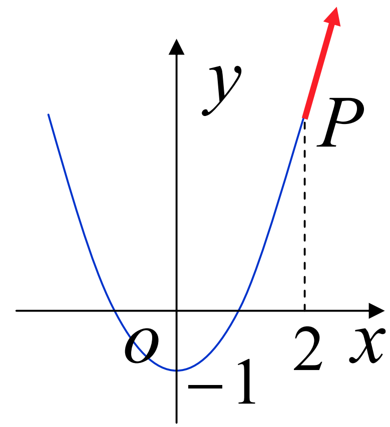
故不能利用定理1中的公式计算出方向导数，即

$$\left.\frac{\partial f}{\partial \vec{l}}\right|_{(0,0)} \cancel{=} f_x'(0,0)\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}+f_y'(0,0)\frac{\sqrt{2}}{2}=0.$$

（实际上 $\left.\dfrac{\partial f}{\partial \vec{l}}\right|_{(0,0)}=+\infty$ 不存在）。因此例2表明定理1

条件中的“可微”不可减弱为“可偏导”。

例3. 求函数 $z=3x^2y-y^2$ 在点 $P(2, 3)$ 沿曲线 $y=x^2-1$ 朝 x 增大方向的方向导数.



解：沿曲线 $y=x^2-1$ 朝 x 增大的方向指的是切线方向（如图）。

$$\tan\alpha = y'\big|_{x=2} = 2x\big|_{x=2} = 4,$$ 进而得

$$\cos\alpha=\frac{1}{\sqrt{17}},\quad \sin\alpha=\frac{4}{\sqrt{17}},$$ 所以

$$\left.\frac{\partial z}{\partial \vec{l}}\right|_P=\left.\left[6xy\cdot\frac{1}{\sqrt{17}}+(3x^2-2y)\cdot\frac{4}{\sqrt{17}}\right]\right|_{(2,3)}=\frac{60}{\sqrt{17}}$$

2. 三元函数情形

函数 $f(x,y,z)$ 点$P(x,y,z)$ 方向 $\vec{l}$

$$\frac{\partial f}{\partial \vec{l}} = \lim_{\rho \to 0} \frac{\Delta f}{\rho}$$

$$= \lim_{\rho \to 0} \frac{f(x+\Delta x, y+\Delta y, z+\Delta z) - f(x,y,z)}{\rho}$$

其中 $\rho = \sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2 + (\Delta z)^2}$,

称 $\frac{\partial f}{\partial \vec{l}}$ 为函数$f(x,y,z)$在点$P(x,y,z)$处沿方向 $\vec{l}$ 的**方向导数.**

定理2: 若函数 $f(x,y,z)$ 在点 $P(x,y,z)$ 处可微，则函数在该点沿任意方向 $\vec{l}$ 的方向导数存在，且有

$$\frac{\partial f}{\partial \vec{l}} = \frac{\partial f}{\partial x}\cos\alpha + \frac{\partial f}{\partial y}\cos\beta + \frac{\partial f}{\partial z}\cos\gamma$$

其中 α, β, γ 为 $\vec{l}$ 的方向角.

例4. 求 $u = x^2yz$ 在点 $P(1,1,1)$处沿方向 $\vec{l} = \{2,-1,3\}$ 的方向导数.

解: 由 $\vec{l} = \{2,-1,3\}$ 得 $\cos\alpha = \dfrac{2}{\sqrt{14}}, \cos\beta = \dfrac{-1}{\sqrt{14}}, \cos\gamma = \dfrac{3}{\sqrt{14}}$,

$$\therefore \left.\frac{\partial u}{\partial \vec{l}}\right|_P = \left.\left(2xyz\cdot\frac{2}{\sqrt{14}} - x^2z\cdot\frac{1}{\sqrt{14}} + x^2y\cdot\frac{3}{\sqrt{14}}\right)\right|_{(1,1,1)} = \frac{6}{\sqrt{14}}$$

二、梯度

方向导数公式 $\dfrac{\partial f}{\partial \vec{l}} = \dfrac{\partial f}{\partial x}\cos\alpha + \dfrac{\partial f}{\partial y}\cos\beta + \dfrac{\partial f}{\partial z}\cos\gamma$

令向量 $\vec{G} = \{\dfrac{\partial f}{\partial x}, \dfrac{\partial f}{\partial y}, \dfrac{\partial f}{\partial z}\}$

$$\vec{l}^{\,0} = \{\cos\alpha\ , \cos\beta\ , \cos\gamma\}$$

$$\frac{\partial f}{\partial \vec{l}} = \vec{G}\cdot\vec{l}^{\,0} = |\vec{G}|\cos(\vec{G}, \vec{l}^{\,0}) \qquad (\ |\vec{l}^{\,0}| = 1\ )$$

当 $\vec{l}^{\,0}$ 与 $\vec{G}$ 方向一致时，方向导数取得最大值

$$\max\frac{\partial f}{\partial \vec{l}} = |\vec{G}|$$

这说明 $\vec{G}$: $\begin{cases} \text{方向：} f \text{ 的方向导数最大的方向；} \\ \text{模 ：} f \text{ 的最大的方向导数。} \end{cases}$

定义：称向量 $\{\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z}\}$ 为函数 $f(x,y,z)$ 在点 $P(x,y,z)$ 处的梯度 **(gradient)**, 记作 **grad** f, 即

$$\mathbf{grad}\, f = \{\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z}\} = \frac{\partial f}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial f}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial f}{\partial z}\vec{k}$$

同样可定义二元函数 $f(x,y)$ 在点 $P(x,y)$ 处的梯度为

$$\mathbf{grad}\, f = \{\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}\} = \frac{\partial f}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial f}{\partial y}\vec{j}$$

注：梯度的方向为 f 的方向导数最大的方向，

梯度的模为 f 的最大的方向导数。

例 5：设u是由方程$e^{z+u}-xy-yz-zu=0$确定的x,y,z的隐函数，求$u=u(x,y,z)$在点$P(1,1,0)$处的方向导数的最大值.

解：由所给方程两边求微分，有

$$e^{z+u}(dz+du)-(ydx+xdy-(ydz+zdy)-(zdu+udz)=0$$

当$x=1,y=1,z=0$时，$u=0$，代入得$du\big|_P=dx+dy$

故 $\left.\dfrac{\partial u}{\partial x}\right|_P=1,\ \left.\dfrac{\partial u}{\partial y}\right|_p=1,\ \left.\dfrac{\partial u}{\partial z}\right|_p=0$，$gradu\big|_p=\{1,1,0\}$，

所以最大值为$\left|gradu\right|_p=\sqrt{1^2+1^2+0^2}=\sqrt{2}$.

3. 梯度的基本运算公式

(1) $\operatorname{grad} C = \vec{0}$

(2) $\operatorname{grad}(C u) = C \operatorname{grad} u$

(3) $\operatorname{grad}(u \pm v) = \operatorname{grad} u \pm \operatorname{grad} v$

(4) $\operatorname{grad}(u v) = u \operatorname{grad} v + v \operatorname{grad} u$

(5) $\operatorname{grad} f(u) = f'(u) \operatorname{grad} u$

内容小结

1. 方向导数

- 二元函数 $f(x,y)$ 在点 $P(x,y)$ 沿方向 $\vec{l}$ (方向角为 α,β)的方向导数为

$$\frac{\partial f}{\partial \vec{l}}=\frac{\partial f}{\partial x}\cos\alpha+\frac{\partial f}{\partial y}\cos\beta=\frac{\partial f}{\partial x}\cos\alpha+\frac{\partial f}{\partial y}\sin\alpha$$

- 三元函数 $f(x,y,z)$ 在点 $P(x,y,z)$ 沿方向 $\vec{l}$ (方向角为 α,β,γ) 的方向导数为

$$\frac{\partial f}{\partial \vec{l}}=\frac{\partial f}{\partial x}\cos\alpha+\frac{\partial f}{\partial y}\cos\beta+\frac{\partial f}{\partial z}\cos\gamma$$

2. 梯度

- 三元函数 $f(x,y,z)$ 在点 $P(x,y,z)$ 处的梯度为

$$\operatorname{grad} f=\{\frac{\partial f}{\partial x},\frac{\partial f}{\partial y},\frac{\partial f}{\partial z}\}$$

- 二元函数 $f(x,y)$ 在点 $P(x,y)$ 处的梯度为

$$\operatorname{grad} f=\{f_x(x,y)\,,\,f_y(x,y)\}$$

3. 关系

- 可微 $\overset{\Longrightarrow}{\not\Longleftarrow}$ 方向导数存在 $\overset{\not\Longrightarrow}{\not\Longleftarrow}$ 偏导数存在