第九章

多元函数微分学

一元函数微分学

$\downarrow$ 推广

多元函数微分学

学习方法：重点把握不同点，
关注有质变的概念和理论方法。

第一节 多元函数的基本概念

一、平面点集

二、二元函数

三、n维空间与n元函数

一、 平面点集

1. 邻域、内点、聚点、边界点

(1) 邻域

平面点集

$$U(P_0,\delta)=\{(x,y)\,|\,(x-x_0)^2+(y-y_0)^2<\delta^2\}$$

称为平面上点 $P_0(x_0,y_0)$ 的 δ 邻域（$\delta>0$）.

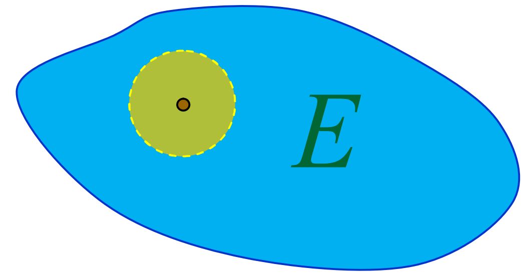
平面点集

$$\overset{o}{U}(P_0,\delta)=\{(x,y)\,|\,0<(x-x_0)^2+(y-y_0)^2<\delta^2\}$$

称为平面上点 $P_0(x_0,y_0)$ 的 δ 去心(空心)邻域.

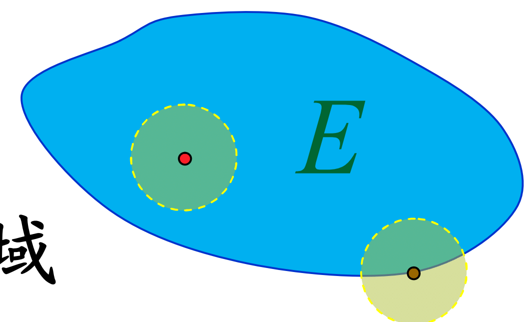
说明: 若不强调半径δ，也可写成 $U(P_0)$或 $\overset{o}{U}(P_0)$

(2) 内点



设有点集 E 及一点 P，若存在点 P 的某邻域 $U(P)\subset E$，就称 P 为 E 的内点。

(3) 聚点

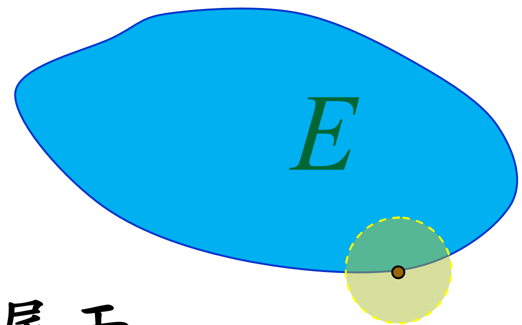


设有点集 E 及一点 P，若对任意给定的δ>0，点 P 的去心邻域 $\mathring{U}(P,\delta)$ 内总有 E 中的点，就称 P 是 E 的聚点.

注1：聚点可能属于 E，也可能不属于 E。

注2：内点必为聚点。

(4) 边界点



设有点集 E 及一点 P，若对点 P 的任一邻域 $U(P)$, $U(P)$ 既含有属于 E 中的点，也含有不属于 E 中的点，就称 P 为 E 的**边界点**.

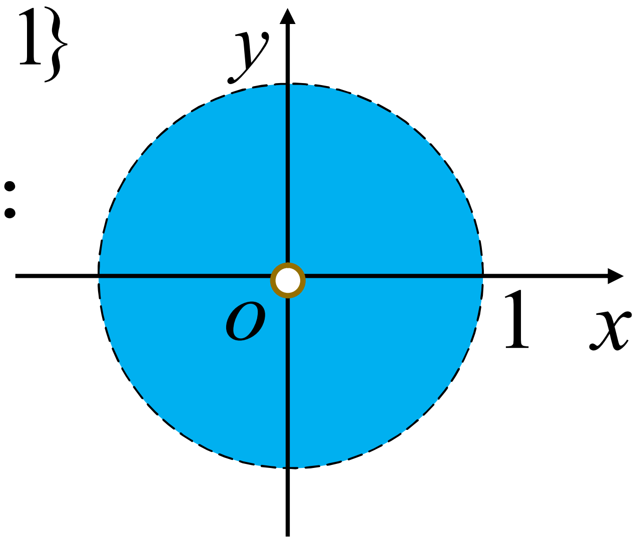
E 的边界点的全体称为 E 的**边界**.

注1: E 的边界点可能属于 E, 也可能不属于 E.

注2: E 的边界点可能是聚点, 也可能不是聚点.

注3: 边界点不可能是内点, 内点也不可能是边界点.

例1. 设 $E=\{(x,y)\mid 0<x^2+y^2<1\}$



则内点、聚点、边界点及边界为:

(1)满足不等式 $0<x^2+y^2<1$ 的点 (x,y) 均为 E 的内点;

(2)满足不等式 $x^2+y^2\le 1$ 的点 (x,y) 均为 E 的聚点;

(3)满足等式 $x^2+y^2=1$ 的点 (x,y) 以及原点 $O(0,0)$ 均为 E 的边界点，因此 E 的边界为

$$\{(x,y)\mid x^2+y^2=1\}\cup\{(0,0)\}。$$

2. 有界点集与无界点集

对于点集E, 若存在正数 M, 使得对任意点$P\in E$, 总有P到原点的距离 $|OP|\leq M$,就称 D 为有界点集 ,否则称E为无界点集。

例如:

$$E_1=\{(x,y)\,|\,x^2+4y^2\leq 1\}$$ 为有界点集;

$$E_2=\{(x,y)\,|\,y>x^2\}$$ 为无界点集。

3. 开集与闭集、连通集与区域

(1) 开集与闭集

若点集 E 的每点都是内点，就称 E 为开集；

若点集 E的每个边界点都属于E，就称 E 为闭集。

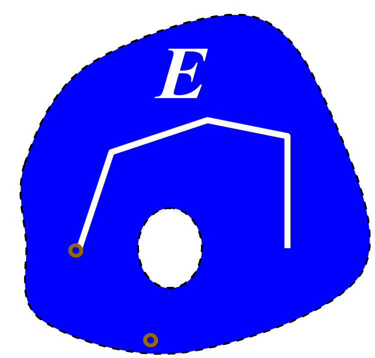
(2) 连通集、区域

若集E中任意两点都可用一完全属于E 的折线相连，就称 E是连通集；

连通的开集称为开区域 ；

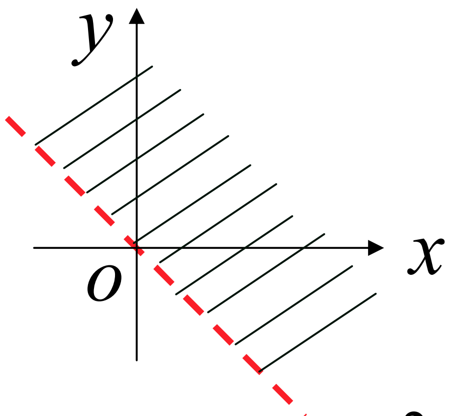
开区域连同它的边界一起称为闭区域.

开区域、闭区域或开区域连同其部分边界点的集合统称为区域 。



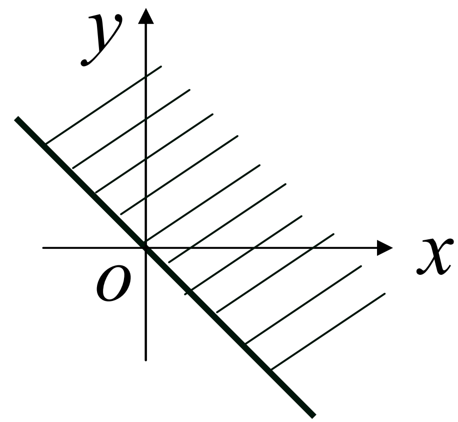
例如，在平面上

- $\{(x,y)\mid x+y>0\}$



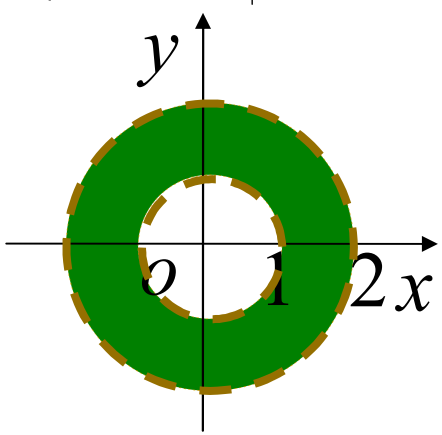
无界开区域

$\{(x,y)\mid x+y\geq 0\}$



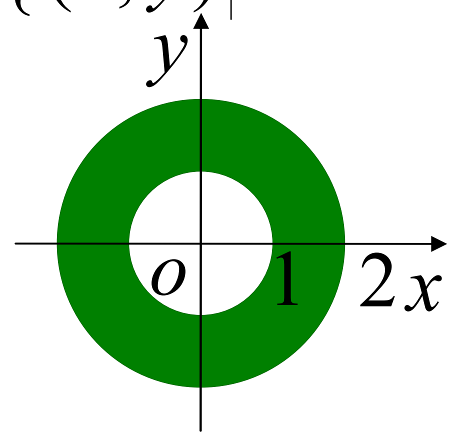
无界闭区域

- $\{(x,y)\mid 1<x^2+y^2<4\}$



有界开区域

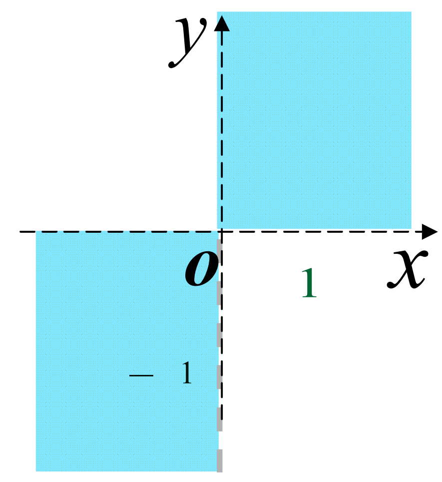
$\{(x,y)\mid 1\leq x^2+y^2\leq 4\}$



有界闭区域

- 整个平面 是最大的开区域, 也是最大的闭区域;

- 点集 $\{(x,y) \mid xy>0\}$是开集,
但由于不是连通集，因此不是开区域．



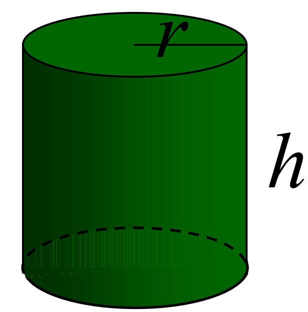
- 点集 $\{(0,1),(1,0),(1,1)\}$没有内点，故不是开集;
点 $(0,1),(1,0),(1,1)$ 均为边界点，因此是闭集.

二、二元函数

引例:

- 圆柱体的体积

$$V = \pi r^2 h, \quad \{(r,h) \mid r > 0, h > 0\}$$



- 定量理想气体的压强

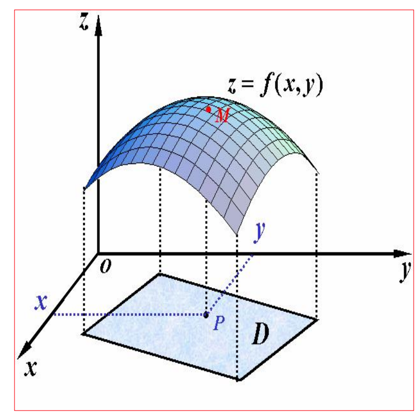
$$p = \frac{RT}{V} \ (R\text{为常数}), \quad \{(V,T) \mid V > 0, T > T_0\}$$

定义 1. 设 x, y, z 为三个变量，D 为平面上非空点集，如果 (x, y) 在 D 中任取一个确定的点时，变量 z 按照一定的法则 f 总有惟一确定的数值与之对应，就称 z 是 x, y 的函数，或称 f 为定义在 D 上的二元函数，记为

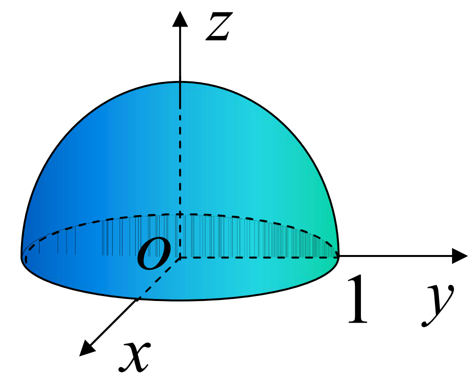
$$z = f(x, y), \quad (x, y) \in D$$

平面点集 D 称为定义域，x, y 称为自变量，z 称为因变量或函数，函数值的集合称为值域。

几何意义： 二元函数 $z = f(x, y)$ 在几何上表示一张空间曲面，其定义域为曲面在 xoy 平面上的投影区域。

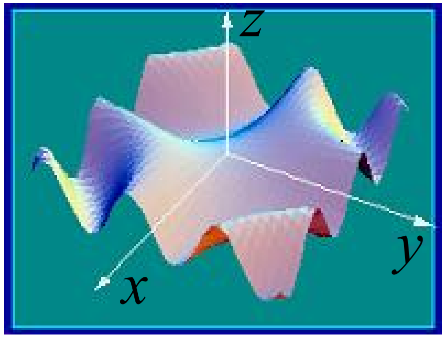


例如，二元函数 $z=\sqrt{1-x^2-y^2}$



定义域为闭圆盘 $\{(x,y)\,|\,x^2+y^2\le 1\}$

曲面为中心在原点，半径为 1的上半球面.



又如，$z=\sin(xy),(x,y)\in \mathrm{R}^2$

3. n 维空间与n元函数

(1) n 维空间

n 元有序数组 $(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ **的全体称为 n 维空间，记作** R^n，**即**

$$\mathrm{R}^n = \mathrm{R} \times \mathrm{R} \times \cdots \times \mathrm{R}$$

$$= \{ (x_1, x_2, \cdots, x_n) \mid x_k \in \mathrm{R}, k = 1, 2, \cdots, n \}$$

n 维空间中的每一个元素 $(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ **称为空间中的一个点，数** x_k **称为该点的第 k 个坐标．**

当 $n = 2$ 时为二维空间 R^2，即 xoy 平面;

当 $n = 3$ 时为三维空间 R^3，即现实空间。

R^n 中的点 $P_1(x_1, x_2, \cdots, x_n)$和 $P_2(y_1, y_2, \cdots, y_n)$ 之间的距离记作 $\rho(P_1, P_2)$, 定义为

$$\rho(P_1, P_2) = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2 + \cdots + (x_n - y_n)^2}$$

当 $n = 1, 2, 3$ 时, $\rho(P_1, P_2) = |P_1P_2|$.

利用 $\rho(P_1, P_2)$, 我们同理可定义 R^n 中的邻域、内点、聚点、边界点、连通集、开集、闭集、开区域、闭区域、有界集和无界集等等，例如

R^n 中点 $P_0(x_1, x_2, \cdots, x_n)$的$\delta$ 邻域定义为

$$U(P_0, \delta) = \{P \mid P \in \mathbf{R}^n, \rho(P, P_0) < \delta\}$$

(2) 多元函数的概念

定义 2. 设有 $n+1$ 个变量 $x_1, x_2, \cdots, x_n, u$，D 为 R^n 中的一个非空点集，如果 $(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ 在 D 中任取一个确定的点时，变量 u 按照一定的法则 f 总有惟一确定的数值与之对应，就称 u 是 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ 的函数，或称 f 为定义在 D 上的 n 元函数，记为

$$u = f(x_1, x_2, \cdots, x_n), \quad (x_1, x_2, \cdots, x_n) \in D$$

点集 D 称为定义域，$x_1, x_2, \cdots, x_n$ 称为自变量，u 称为因变或函数，函数值的集合称为值域。

特别地，当 $n=1$ 时，有一元函数

$$y=f(x),\quad x\in D\subset \mathbf{R}$$

当 $n=2$ 时，有二元函数

$$z=f(x,y),\quad (x,y)\in D\subset \mathrm{R}^2$$

当 $n=3$ 时，有三元函数

$$u=f(x,y,z),\quad (x,y,z)\in D\subset \mathrm{R}^3$$

当 $n\geq 2$ 时，n 元函数也称为多元函数。

三元函数 $u=\arcsin(x^2+y^2+z^2)$

其定义域为 单位闭球体 $\{(x,y,z)\mid x^2+y^2+z^2\le 1\}$

其图形为 R^4 空间中的超曲面.

一元函数与多元函数的差别关键在于一元函数与二元函数的差别.