第十三章　无穷级数

- 无穷级数
  - 常数项级数
  - 幂级数
  - 傅氏级数

- 无穷级数是研究函数的工具
  - 表示函数
  - 研究性质
  - 数值计算

第一节 常数项级数的概念和性质

一、常数项级数的概念

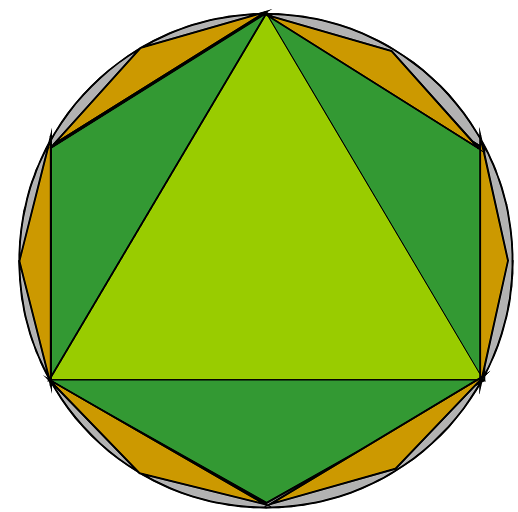
二、无穷级数的基本性质

三、级数收敛的必要条件

一、常数项级数的概念

引例1. 用圆内接正多边形面积逼近圆面积.

依次作圆内接正 $3\times 2^n\ (n=0,1,2,\cdots)$ 边形, 设 a_0 表示内接正三角形面积, a_k 表示边数增加时增加的面积, 则圆内接正 3×2^n 边形面积为



$$a_0+a_1+a_2+\cdots+a_n$$

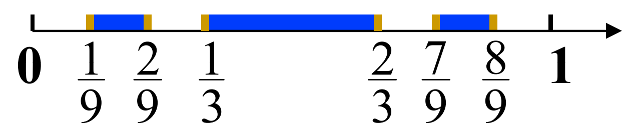
$n\to\infty$ 时, 这个和逼近于圆的面积 A .

即 $$A=a_0+a_1+a_2+\cdots+a_n+\cdots$$

引例2. (神秘的康托尔尘集) 把[0,1]区间三等分, 舍弃开区间 $(\frac{1}{3},\frac{2}{3})$, 将剩下的两个子区间分别三等分,并舍弃中间的开区间, 如此反复进行这种操作, 问丢弃部分的总长和剩下部分的总长各是多少?

丢弃的各开区间长依次为 $\frac{1}{3}, \frac{2}{3^2}, \frac{2^2}{3^3}, \frac{2^3}{3^4}, \cdots, \frac{2^{n-1}}{3^n}, \cdots$

故丢弃部分总长



$$l_{丢} = \frac{1}{3} + \frac{2}{3^2} + \frac{2^2}{3^3} + \frac{2^3}{3^4} + \cdots + \frac{2^{n-1}}{3^n} + \cdots$$

$$= \frac{1}{3}\left[1 + \frac{2}{3} + \left(\frac{2}{3}\right)^2 + \left(\frac{2}{3}\right)^3 + \cdots + \left(\frac{2}{3}\right)^{n-1} + \cdots\right] = \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{1-\frac{2}{3}} = 1$$

剩余部分总长 $l_{剩} = 1 - l_{丢} = 0$ (此式计算用到后面的例1)

剩余部分总长虽然为0, 但康托尔证明了其成员和实数"一样多", 它们象尘埃一样散落在[0, 1]区间上, 人们称其为康托尔尘集.

定义: 给定一个数列 $u_1, u_2, u_3, \cdots, u_n, \cdots$ 将各项依次相加, 简记为 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$, 即

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n = u_1 + u_2 + u_3 + \cdots + u_n + \cdots$$

称上式为**常数项级数**(或**无穷级数**), 其中第 n 项 u_n 叫做级数的**一般项**, 级数的前 n 项和

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} u_k = u_1 + u_2 + u_3 + \cdots + u_n$$

称为级数的**部分和**. 若 $\lim_{n\to\infty} S_n = S$ 存在, 则称无穷级数**收敛**, 并称 S 为级数的**和**, 记作

$$S = \sum_{n=1}^{\infty} u_n$$

若 $\lim\limits_{n\to\infty} S_n$ 不存在, 则称无穷级数发散 .

当级数收敛时, 称差值

$$r_n = S - S_n = u_{n+1} + u_{n+2} + \cdots$$

为级数的余项. 显然

$$\lim_{n\to\infty} r_n = 0$$

例1. 讨论等比级数 (又称几何级数)

$$\sum_{n=0}^{\infty} a q^n = a + a q + a q^2 + \cdots + a q^n + \cdots \quad (a \neq 0)$$

(q 称为公比) 的敛散性.

解: 1) 若 $q \neq 1$,则部分和

$$S_n = a + a q + a q^2 + \cdots + a q^{n-1} = \frac{a - a q^n}{1 - q}$$

当 $|q| < 1$ 时，因 $\lim_{n\to\infty} q^n = 0$, 从而 $\lim_{n\to\infty} S_n = \frac{a}{1-q}$

因此级数收敛 ,其和为 $\frac{a}{1-q}$;

当 $|q| > 1$ 时，因 $\lim_{n\to\infty} q^n = \infty$, 从而 $\lim_{n\to\infty} S_n = \infty$,

因此级数发散 .

$$\sum_{n=0}^{\infty} a q^n, \ (a \neq 0)$$

2). 若 $|q| = 1$, 则

当 $q = 1$ 时, $S_n = na \to \infty$, 因此级数发散；

当 $q = -1$ 时, 级数成为

$$a - a + a - a + \cdots + (-1)^{n-1} a + \cdots$$

因此 $S_n = \begin{cases} a, & n \text{ 为奇数} \\ 0, & n \text{ 为偶数} \end{cases}$

从而 $\lim\limits_{n\to\infty} S_n$ 不存在, 因此级数发散.

综合 1)、2)可知, $|q| < 1$ 时, 等比级数收敛；

$|q| \geq 1$ 时, 等比级数发散 .

例2. 判别下列级数的敛散性:

$$(1)\ \sum_{n=1}^{\infty}\ln\frac{n+1}{n};\qquad (2)\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(n+1)}.$$

解: (1)

$$S_n=\ln\frac{2}{1}+\ln\frac{3}{2}+\ln\frac{4}{3}+\cdots+\ln\frac{n+1}{n}$$

$$=(\cancel{\ln 2}-\ln 1)+(\cancel{\ln 3}-\cancel{\ln 2})+\cancel{\cdots}+(\ln(n+1)-\cancel{\ln n})$$

$$=\ln(n+1)\to\infty\quad(n\to\infty)$$

所以级数 (1) 发散 ;

技巧:

利用“拆项相消”求和

(2) $$S_n = \frac{1}{\underline{1\cdot 2}} + \frac{1}{\underline{2\cdot 3}} + \frac{1}{\underline{3\cdot 4}} + \cdots + \frac{1}{\underline{n\cdot(n+1)}}$$

$$= \left(1 - \cancel{\frac{1}{2}}\right) + \left(\cancel{\frac{1}{2}} - \cancel{\frac{1}{3}}\right) + \left(\cancel{\frac{1}{3}} - \cancel{\frac{1}{4}}\right) + \cdots + \left(\cancel{\frac{1}{n}} - \frac{1}{n+1}\right)$$

$$= 1 - \frac{1}{n+1} \to 1 \quad (n \to \infty)$$

所以级数 (2) 收敛, 其和为 1 .

技巧:

利用 “拆项相消” 求和

例3. 判别级数 $\sum_{n=2}^{\infty} \ln\left(1-\frac{1}{n^2}\right)$ 的敛散性 .

解:

$$\because \ln\left(1-\frac{1}{n^2}\right) = \ln\frac{n^2-1}{n^2} = \ln(n+1)+\ln(n-1)-2\ln n$$

$$\therefore S_n = \sum_{k=2}^{n} \ln\left(1-\frac{1}{k^2}\right)$$

$$= [\ln 3 + \ln 1 - 2\ln 2] + [\ln 4 + \ln 2 - 2\ln 3] + [\ln 5 + \ln 3 - 2\ln 4] + \cdots + [\ln(n+1) + \ln(n-1) - 2\ln n]$$

$$= -\ln 2 + \ln(n+1) - \ln n = \ln\left(1+\frac{1}{n}\right) - \ln 2$$

$\therefore \lim_{n\to\infty} S_n = -\ln 2$, 故原级数收敛 , 其和为 $-\ln 2$.

例 4. 证明调和级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n}$发散.

证 用反证法证明.

假设$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n}$收敛，其和为$s$. 记其部分和数列为$\{s_n\}$，则有

$$\lim_{n\to\infty} s_n = s\,,\quad \lim_{n\to\infty} s_{2n} = s\,.$$

一方面，$\lim\limits_{n\to\infty}(s_{2n}-s_n)=s-s=0$；另一方面，

$$s_{2n}-s_n=\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\cdots+\frac{1}{2n}\geq\frac{1}{2n}+\frac{1}{2n}+\cdots+\frac{1}{2n}=\frac{n}{2n}=\frac{1}{2},$$

由极限的保号性知$\lim\limits_{n\to\infty}(s_{2n}-s_n)\geq\dfrac{1}{2}$，矛盾. 故级数发散.

注：等比级数、调和级数等都是重要的级数，其敛散性的结论在后面可直接引用.

二、无穷级数的基本性质

性质1. 若级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛于 S，即 $S=\sum_{n=1}^{\infty} u_n$，则各项乘以常数 c 所得级数 $\sum_{n=1}^{\infty} c u_n$ 也收敛，其和为 cS.

证: 令 $S_n=\sum_{k=1}^{n} u_k$，则 $\sigma_n=\sum_{k=1}^{n} c u_k = c S_n$，

$$\therefore \quad \lim_{n\to\infty} \sigma_n = c \lim_{n\to\infty} S_n = c S$$

这说明 $\sum_{n=1}^{\infty} c u_n$ 收敛，其和为 cS.

说明: 级数各项乘以非零常数后其敛散性不变.

性质2. 设有两个收敛级数

$$S=\sum_{n=1}^{\infty}u_n, \qquad \sigma=\sum_{n=1}^{\infty}v_n$$

则级数 $\sum_{n=1}^{\infty}(u_n \pm v_n)$ 也收敛, 其和为 $S \pm \sigma$.

证: 令 $S_n=\sum_{k=1}^{n}u_k$, $\sigma_n=\sum_{k=1}^{n}v_k$, 则

$$\tau_n=\sum_{k=1}^{n}(u_k \pm v_k)=S_n \pm \sigma_n \to S \pm \sigma \quad (n\to\infty)$$

这说明级数 $\sum_{n=1}^{\infty}(u_n \pm v_n)$ 也收敛, 其和为 $S \pm \sigma$.

说明:

(1) 性质2 表明收敛级数可逐项相加或相减 .

(2) 若两级数中一个收敛一个发散 , 则 $\sum_{n=1}^{\infty}(u_n \pm v_n)$ 必发散 . (用反证法可证)

但若二级数都发散 , $\sum_{n=1}^{\infty}(u_n \pm v_n)$ 不一定发散.

例如, 取 $u_n = (-1)^{2n}$, $v_n = (-1)^{2n+1}$,

而 $u_n + v_n = 0$

性质3. 增加、删除或改变级数前有限项, 不会影响级数的敛散性.

证: 将级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 的前 k 项去掉, 所得新级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_{k+n}$ 的部分和为

$$\sigma_n = \sum_{l=1}^{n} u_{k+l} = S_{k+n} - S_k$$

由于 $n \to \infty$时, σ_n 与 S_{k+n} 极限状况相同, 故新旧两级数敛散性相同.

当级数收敛时, 其和的关系为 $\sigma = S - S_k$.

类似可证增加或改变前有限项的情况 .

性质4. 收敛级数加括弧后所成的级数仍收敛于原级数的和.

证: 设收敛级数 $S=\sum_{n=1}^{\infty}u_n$, 若按某一规律加括弧, 例如

$$(u_1+u_2)+(u_3+u_4+u_5)+\cdots$$

则新级数的部分和序列 $\sigma_m\ (m=1,2,\cdots)$ 为原级数部分和序列 $S_n\ (n=1,2,\cdots)$ 的一个子序列, 因此必有

$$\lim_{m\to\infty}\sigma_m=\lim_{n\to\infty}S_n=S$$

用反证法可证

推论: 若加括弧后的级数发散, 则原级数必发散.

注意: 收敛级数去括弧后所成的级数不一定收敛.

例如, $(1-1)+(1-1)+\cdots=0$, 但 $1-1+1-1+\cdots$ 发散.

例5. 判断级数的敛散性:

$$\frac{1}{\sqrt{2}-1}-\frac{1}{\sqrt{2}+1}+\frac{1}{\sqrt{3}-1}-\frac{1}{\sqrt{3}+1}+\frac{1}{\sqrt{4}-1}-\frac{1}{\sqrt{4}+1}+\cdots$$

解: 考虑加括号后的级数

$$\left(\frac{1}{\sqrt{2}-1}-\frac{1}{\sqrt{2}+1}\right)+\left(\frac{1}{\sqrt{3}-1}-\frac{1}{\sqrt{3}+1}\right)+\left(\frac{1}{\sqrt{4}-1}-\frac{1}{\sqrt{4}+1}\right)+\cdots$$

$$a_n=\frac{1}{\sqrt{n}-1}-\frac{1}{\sqrt{n}+1}=\frac{2}{n-1}$$

$\therefore \quad \sum_{n=2}^{\infty} a_n=2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ 发散, 从而原级数发散.

三、级数收敛的必要条件

定理： 设收敛级数 $S=\sum_{n=1}^{\infty}u_n$，则必有 $\lim_{n\to\infty}u_n=0$.

证： $u_n=S_n-S_{n-1}$

$$\therefore \quad \lim_{n\to\infty}u_n=\lim_{n\to\infty}S_n-\lim_{n\to\infty}S_{n-1}=S-S=0$$

可见：若级数的一般项不趋于0，则级数必发散.

例如，$\frac{1}{2}-\frac{2}{3}+\frac{3}{4}-\frac{4}{5}+\cdots+(-1)^{n-1}\frac{n}{n+1}+\cdots$，其一般项为

$$u_n=(-1)^{n-1}\frac{n}{n+1}$$

当 $n\to\infty$ 时，u_n 不趋于0，因此这个级数发散.

注意: $\lim_{n\to\infty} u_n = 0$ 并非级数收敛的充分条件.

例如, 调和级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n} = 1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}+\cdots$

虽然 $\lim_{n\to\infty} u_n = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n} = 0$, 但此级数发散 .

例 6. 判别下列级数的敛散性，如果收敛，求出其和.

（1） $\sum_{n=1}^{\infty}[\frac{1}{3^n}+(-1)^{n-1}\frac{3}{2^{n-1}}]$；

（2） $\sum_{n=1}^{\infty}[\frac{3}{(n+1)(n+2)}+(1+\frac{1}{n})^{-n}]$.

解：（1）等比级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{3^n}$ 收敛于 $\frac{\frac{1}{3}}{1-\frac{1}{3}}=\frac{1}{2}$；

$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{3}{2^{n-1}}=3\sum_{n=1}^{\infty}(-\frac{1}{2})^{n-1}$ 收敛于 $3\cdot\frac{1}{1-(-\frac{1}{2})}=2$，

所以由性质 2 知，级数 $\sum_{n=1}^{\infty}[\frac{1}{3^n}+(-1)^{n-1}\frac{3}{2^{n-1}}]$ 收敛，其和为

$\frac{1}{2}+2=\frac{5}{2}$.

（2）由于级数$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(n+1)(n+2)}$为$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(n+1)}$中删除第一项后所得级数，且由例 2 知$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(n+1)}$收敛，从而根据性质 3，级数$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(n+1)(n+2)}$收敛．再由性质 1，级数$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3}{(n+1)(n+2)}$收敛．

又因为$\lim_{n\to\infty}(1+\frac{1}{n})^{-n}=\frac{1}{e}\neq 0$，由级数收敛的必要条件可知，级数$\sum_{n=1}^{\infty}(1+\frac{1}{n})^{-n}$发散．故$\sum_{n=1}^{\infty}[\frac{3}{(n+1)(n+2)}+(1+\frac{1}{n})^{-n}]$发散．

内容小结

1. 定义 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n = u_1 + u_2 + u_3 + \cdots + u_n + \cdots$

2. 性质

(1) 线性运算

(2) 调整不变性:

① 增加、删除或改变级数前有限项, 不会影响级数的敛散性.

② 收敛级数加括弧后所成的级数仍收敛于原级数的和.

(3) 必要性: 设收敛级数 $S = \sum_{n=1}^{\infty} u_n$, 则必有 $\lim_{n\to\infty} u_n = 0$.

思考与练习

1. 判断下列级数的敛散性, 若收敛求其和:

(1) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^n n!}{n^n}$; (2) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^3+3n^2+2n}$; (3) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n-1}{2^n}$.

解: (1) 令 $u_n = \frac{e^n n!}{n^n}$, 则

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n < e < \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}$$

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{\frac{e^{n+1}(n+1)!}{(n+1)^{n+1}}}{\frac{e^n n!}{n^n}} = \frac{e}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n} > 1 \quad (n=1,2,\cdots)$$

从而 $\lim_{n\to\infty} u_n \neq 0$, 这说明级数(1) 发散.

(2) 因

$$\frac{1}{n^3+3n^2+2n}=\frac{1}{n(n+1)(n+2)}=\frac{1}{2}\frac{(n+2)-n}{n(n+1)(n+2)}$$

$$=\frac{1}{2}\left[\frac{1}{n(n+1)}-\frac{1}{(n+1)(n+2)}\right]\quad(n=1,2,\cdots)$$

$$S_n=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k^3+3k^2+2k}=\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}\left[\frac{1}{k(k+1)}-\frac{1}{(k+1)(k+2)}\right]$$

$$=\frac{1}{2}\left[\frac{1}{1\cdot 2}-\frac{1}{(n+1)(n+2)}\right]$$

$\boxed{\text{进行拆项相消}}$

$\therefore \lim\limits_{n\to\infty} S_n=\frac{1}{4}$, 这说明原级数收敛，其和为 $\frac{1}{4}$.

(3) $S_n = \frac{1}{2} + \frac{3}{2^2} + \frac{5}{2^3} + \cdots + \frac{2n-1}{2^n}$

$S_n - \frac{1}{2} S_n$

$$= \left(\frac{1}{2} + \frac{3}{2^2} + \frac{5}{2^3} + \cdots + \frac{2n-1}{2^n} \right) - \left(\frac{1}{2^2} + \frac{3}{2^3} + \frac{5}{2^4} + \cdots + \frac{2n-1}{2^{n+1}} \right)$$

$$= \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \cdots + \frac{1}{2^{n-1}} - \frac{2n-1}{2^{n+1}}$$

$$= \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \frac{1 - \frac{1}{2^{n-1}}}{1 - \frac{1}{2}} - \frac{2n-1}{2^{n+1}} = \frac{1}{2} + 1 - \frac{1}{2^{n-1}} - \frac{2n-1}{2^{n+1}}$$

$\therefore \quad S_n = 3 - \frac{1}{2^{n-2}} - \frac{2n-1}{2^n}$, 故 $\lim\limits_{n \to \infty} S_n = 3$

这说明原级数收敛, 其和为 **3** .

2. 设有以下命题

① 若$\sum\limits_{n=1}^{\infty}(u_{2n-1}+u_{2n})$收敛，则$\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$收敛；

② 若$\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$收敛，则$\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_{n+100}$收敛；

③ 若$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{u_{n+1}}{u_n}>1$，则$\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$发散；

④ 若$\sum\limits_{n=1}^{\infty}(u_n+v_n)$收敛，则$\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$，$\sum\limits_{n=1}^{\infty}v_n$都收敛，

则以上命题中正确的是（　　）.

（A）①②　　（B）②③　　（C）③④　　（D）①④

答案　选（B）.

解：①错误：取$u_n=(-1)^{n-1}$，则$\sum_{n=1}^{\infty}(u_{2n-1}+u_{2n})=\sum_{n=1}^{\infty}0$收敛，但$\sum_{n=1}^{\infty}u_n$发散.

②正确：根据性质 3 即得.

③正确：若$\lim_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}>1$,则有极限的保号性知，存在$N$，当$n>N$时，$|u_{n+1}|>|u_n|$，所以$\lim_{n\to\infty}|u_n|\neq 0$，从而$\lim_{n\to\infty}u_n\neq 0$，故$\sum_{n=1}^{\infty}u_n$发散.

④错误：如$\sum_{n=1}^{\infty}[(-1)^{n-1}+(-1)^n]=\sum_{n=1}^{\infty}0$收敛，而$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}$与$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n$均发散.

3. 判断级数的敛散性:

$$1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\frac{1}{4}+\frac{1}{7}+\frac{1}{9}+\frac{1}{11}-\frac{1}{6}+\cdots$$

解: 考虑加括号后的级数

$$(1-\tfrac{1}{2})+(\tfrac{1}{3}+\tfrac{1}{5}-\tfrac{1}{4})+(\tfrac{1}{7}+\tfrac{1}{9}+\tfrac{1}{11}-\tfrac{1}{6})+\cdots$$

$$a_n=\frac{1}{2\times\frac{n(n-1)}{2}+1}+\frac{1}{2\times\frac{n(n-1)}{2}+3}+\cdots$$

$$+\frac{1}{2\times\frac{n(n-1)}{2}+2n-1}-\frac{1}{2n}\geq\frac{1}{2n}$$

而$\sum\limits_{n=2}^{\infty}\dfrac{1}{2n}=2\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n}$ 发散，从而原级数发散.