上节内容回顾

1. 任意项级数审敛法

概念：设 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 为收敛级数

$$\begin{cases} \text{若} \sum_{n=1}^{\infty} |u_n| \text{收敛，称} \sum_{n=1}^{\infty} u_n \text{绝对收敛} \\ \text{若} \sum_{n=1}^{\infty} |u_n| \text{发散，称} \sum_{n=1}^{\infty} u_n \text{条件收敛} \end{cases}$$

Leibniz判别法:

$$\left. \begin{array}{l} u_n \geq u_{n+1} > 0 \\ \lim\limits_{n\to\infty} u_n = 0 \end{array} \right\} \Longrightarrow \text{则交错级数} \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n u_n \text{收敛}$$

思考与练习

1. 若级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛，则级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n^2$ 与 $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n u_n$ 也收敛;

2. 若级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛，且 $\lim_{n\to\infty} \frac{u_n}{v_n} = 1$，则级数 $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ 也收敛.

3. 设级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n^2$ 与 $\sum_{n=1}^{\infty} v_n^2$ 均为收敛级数，证明:

（**1**）级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n v_n$ 绝对收敛;（**2**）$\sum_{n=1}^{\infty} (u_n + v_n)^2$ 收敛.

（**3**）级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{u_n}{n}$ 收敛.

4. 判别敛散性: $\sum_{n=1}^{\infty}\sin(\pi\sqrt{n^2+1})$

5．证明：交错级数$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}u_n(u_n>0,n=1,2,\cdots)$绝对收敛的充分必要条件为级数$\sum_{n=1}^{\infty}u_{2n-1}$与$\sum_{n=1}^{\infty}u_{2n}$都收敛.

6. 设正项级数$\{a_n\}$单调减少，且$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n a_n$发散，证明$\sum_{n=1}^{\infty}(\frac{1}{1+a_n})^n$收敛.

提示:

1. 否. 如: $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$ 收敛，而 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n},\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n}}$ 发散.

2. 否. 如: $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$ 收敛，而 $\sum_{n=1}^{\infty}(\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}+\frac{1}{n})$ 发散.

4. $\sin(\pi\sqrt{n^2+1}) = (-1)^n \sin(\pi\sqrt{n^2+1} - n\pi)$

$$= (-1)^n \sin\frac{\pi}{\sqrt{n^2+1}+n}$$

6. 由于 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$ 存在，设 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$，则 $a \geq 0$.

又级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n a_n$ 发散，有 $a > 0$. 所以

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\left(\frac{1}{1+a_n}\right)^n} = \frac{1}{1+a} < 1，$$ 故收敛.

第三节　幂级数

一、函数项级数的概念

二、幂级数及其收敛性

三、幂级数的运算

一、 函数项级数的概念

设 $u_n(x)\ (n=1,2,\cdots)$ 为定义在区间 I 上的函数, 称

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x) = u_1(x) + u_2(x) + \cdots + u_n(x) + \cdots$$

为定义在区间 I 上的函数项级数 .

对 $x_0 \in I$, 若常数项级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x_0)$ 收敛, 称 x_0 为其收敛点, 所有收敛点的全体称为其收敛域 ;

若常数项级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x_0)$ 发散 , 称 x_0 为其发散点, 所有发散点的全体称为其发散域 .

在收敛域上, 函数项级数的和是 x 的函数 $S(x)$, 称它为级数的和函数 , 并写成

$$S(x)=\sum_{n=1}^{\infty}u_n(x)$$

若用 $S_n(x)$ 表示函数项级数前 n 项的和, 即

$$S_n(x)=\sum_{k=1}^{n}u_k(x)$$

令余项 $\quad r_n(x)=S(x)-S_n(x)$

则在收敛域上有

$$\lim_{n\to\infty}S_n(x)=S(x)\,,\qquad \lim_{n\to\infty}r_n(x)=0$$

例如, 等比级数 $\sum_{n=0}^{\infty} x^n = 1 + x + x^2 + \cdots + x^n + \cdots$

它的收敛域是 $(-1, 1)$, 当 $x \in (-1, 1)$ 时, 有和函数

$$\sum_{n=0}^{\infty} x^n = \frac{1}{1-x}$$

它的发散域是 $(-\infty, -1]$ 及 $[1, +\infty)$, 或写作 $|x| \geq 1$.

又如, 级数 $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n + x^{-n}}{n^2}$ $(x \neq 0)$, 当 $|x| = 1$ 时收敛,

但当 $0 < |x| \neq 1$ 时, $\lim_{n \to \infty} u_n(x) = \infty$, 级数发散;

所以级数的收敛域仅为 $|x| = 1$.

二、幂级数及其收敛性

形如 $$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-x_0)^n = a_0 + a_1(x-x_0) + a_2(x-x_0)^2 + \cdots + a_n(x-x_0)^n + \cdots$$

的函数项级数称为幂级数，其中数列 $a_n \ (n=0,1,\cdots)$称为幂级数的系数 .

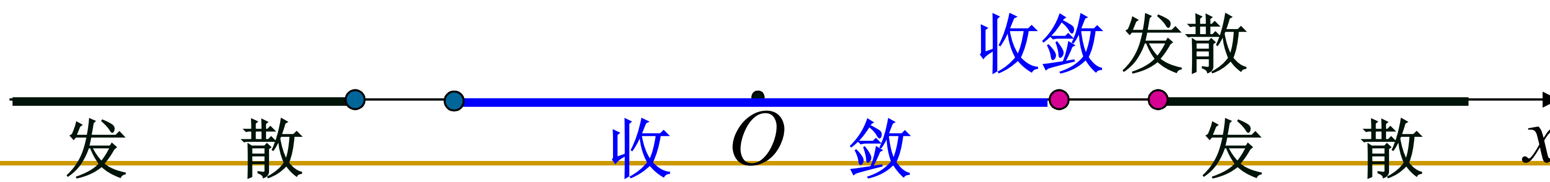
下面着重讨论 $x_0 = 0$ 的情形, 即

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n + \cdots$$

例如, 幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty} x^n = \frac{1}{1-x}$, $|x| < 1$ 即是此种情形.

定理 1. (Abel定理) 若幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 在 $x = x_0$ 点收敛，则对满足不等式 $|x| < |x_0|$ 的一切 x 幂级数都绝对收敛. 反之，若当 $x = x_0$ 时该幂级数发散，则对满足不等式 $|x| > |x_0|$ 的一切 x，该幂级数也发散 .

证：设 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x_0^n$ 收敛，则必有 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n x_0^n = 0$，于是存在常数 $M > 0$，使 $\left| a_n x_0^n \right| \le M \quad (n = 1, 2, \cdots)$



$$\left|a_n x^n\right| = \left|a_n x_0^n \frac{x^n}{x_0^n}\right| = \left|a_n x_0^n\right| \cdot \left|\frac{x}{x_0}\right|^n \le M\left|\frac{x}{x_0}\right|^n$$

当 $|x|<|x_0|$ 时, $\sum_{n=0}^{\infty} M\left|\frac{x}{x_0}\right|^n$ 收敛, $\therefore \sum_{n=0}^{\infty}\left|a_n x^n\right|$ 也收敛,

故原幂级数绝对收敛 .

反之, 若当 $x=x_0$ 时该幂级数发散 ,下面用反证法证之.

假设有一点 x_1 满足 $|x_1|>|x_0|$ 且使级数收敛 , 则由前面的证明可知, 级数在点 x_0 也应收敛, 与所设矛盾,

故假设不真. 所以若当 $x=x_0$ 时幂级数发散 , 则对一切满足不等式 $|x|>|x_0|$ 的 $\boldsymbol{x}$, 原幂级数也发散 .   证毕

由Abel 定理可以看出, $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 的收敛域是以原点为中心的区间.

用$\pm R$ 表示幂级数收敛与发散的分界点, 则

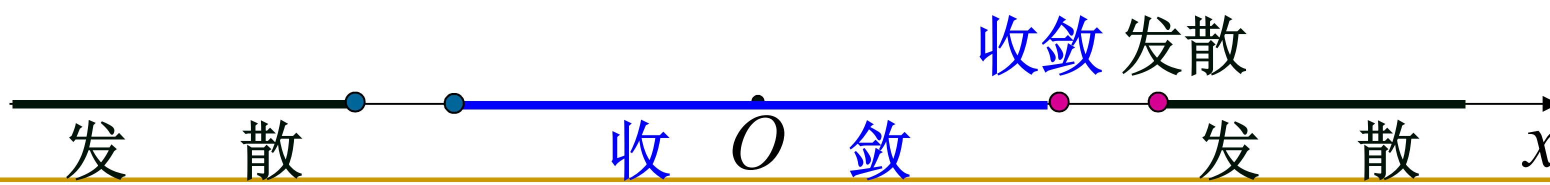
$R = 0$ 时, 幂级数仅在 $x = 0$ 收敛 ;

$R = +\infty$ 时,幂级数在 $(-\infty, +\infty)$ 收敛 ;

$0 < R < +\infty$,幂级数在 $(-R, R)$ 收敛 ;在$[-R, R]$ 外发散; 在 $x = \pm R$ 可能收敛也可能发散 .

R 称为收敛半径 , $(-R, R)$ 称为收敛区间.

$(-R, R)$ 加上收敛的端点称为收敛域.



例如, 幂级数$\sum_{n=1}^{\infty} x^n$的收敛半径为$R=1$，收敛区间为$(-1,1)$，收敛域也为$(-1,1)$.

而幂级数$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n2^n}$的收敛半径为$R=2$，收敛区间为$(-2,2)$，而收敛域为$[-2,2)$.

因此，收敛域应为

$(-R,R)$, $(-R,R]$,$[-R,R)$ 及$[-R,R]$

四个区间之一.

对于幂级数$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n$，也有类似的结论，我们可通过变量代换$t = x - x_0$立即推得，故此不再多述.

由上可知，讨论幂级数$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$或$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n$的敛散性，首先要求出其收敛半径$R$，然后再作进一步讨论.

下面给出幂级数$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$收敛半径$R$的两种常见方法.

定理2.（系数模比值法）

若 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 的系数满足 $\lim_{n\to\infty}\left|\dfrac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \rho$，则

1) 当$\rho \neq 0$ 时，$R = {1}/{\rho}$；

2) 当$\rho = 0$ 时，$R = +\infty$；

3) 当$\rho = +\infty$时，$R = 0$.

证：$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}x^{n+1}}{a_n x^n}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| \cdot |x| = \rho|x|$$

1) 若$\rho \neq 0$，则根据比值审敛法可知:

当 $\rho|x| < 1$，即 $|x| < \dfrac{1}{\rho}$ 时，原级数收敛;

当$\rho|x|>1$，即$|x|>\frac{1}{\rho}$时，原级数发散.

因此级数的收敛半径 $R=\frac{1}{\rho}$.

2) 若$\rho=0$，则根据比值审敛法可知，对任意 $\boldsymbol{x}$ 原级数绝对收敛，因此 $R=+\infty$；

3) 若 $\rho=+\infty$，则对除 $\boldsymbol{x=0}$ 以外的一切 $\boldsymbol{x}$ 原级数发散，因此 $R=0$.

说明：据此定理

$$\boxed{\sum_{n=0}^{\infty}a_n x^n \text{ 的收敛半径为 } R=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|}$$

定理3.（系数模根值法）

若 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 的系数满足 $\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{|a_n|}=\rho$,则

1) 当 $\rho \neq 0$ 时， $R = 1/\rho$;

2) 当 $\rho = 0$ 时， $R = +\infty$;

3) 当 $\rho = +\infty$ 时， $R = 0$.

(证明略.)

例1. 求幂级数 $x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\cdots+(-1)^{n-1}\frac{x^n}{n}+\cdots$ 的收敛半径及收敛域.

解: $R=\lim\limits_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{n}}{\frac{1}{n+1}}=1$

对端点 $x=1$, 级数为交错级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{1}{n}$, 收敛;

对端点 $x=-1$, 级数为 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{-1}{n}$, 发散.

故收敛域为 $(-1,1]$.

例2. 求下列幂级数的收敛域：

规定: $0\,!=1$

(1) $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}x^n$;　　(2) $\sum_{n=0}^{\infty}n!\,x^n$.

解: (1)

$$\because\ R=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{n!}}{\frac{1}{(n+1)!}}=\lim_{n\to\infty}(n+1)=+\infty$$

所以收敛域为 $(-\infty,+\infty)$.

(2) $$\because\ R=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|=\lim_{n\to\infty}\frac{n\,!}{(n+1)\,!}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n+1}=0$$

所以级数仅在 $x=0$ 处收敛.

例3. 求幂级数$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(x-1)^n}{2^n n}$的收敛域.

解: 令 $t=x-1$, 级数变为$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n n}t^n$

$$\therefore R=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{2^n n}\Big/\frac{1}{2^{n+1}(n+1)}=\lim_{n\to\infty}\frac{2^{n+1}(n+1)}{2^n n}=2$$

当 $t=2$ 时, 级数为$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$, 此级数发散;

当 $t=-2$ 时, 级数为$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n}$, 此级数条件收敛;

因此级数的收敛域为 $-2\le t<2$, 故原级数的收敛域为 $-2\le x-1<2$, 即 $-1\le x<3$.

例 **4.** 求幂级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{2+(-1)^n}{2^n n^2}x^n$ 的收敛半径和收敛域.

解：由于 $\sqrt[n]{|a_n|}=\sqrt[n]{\dfrac{2+(-1)^n}{2^n n^2}}=\dfrac{1}{2}\sqrt[n]{2+(-1)^n}\,n^{-\frac{2}{n}}$，故有

$$\frac{1}{2}n^{-\frac{2}{n}}\le\sqrt[n]{|a_n|}\le\frac{1}{2}3^{\frac{1}{n}}n^{-\frac{2}{n}}.$$

因为 $\lim\limits_{n\to\infty}n^{-\frac{2}{n}}=1,\ \lim\limits_{n\to\infty}3^{\frac{1}{n}}=1$，所以由夹逼定理得

$\rho=\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{|a_n|}=\dfrac{1}{2}$，从而该幂级数的收敛半径为 $R=2$，

收敛区间为 $(-2,2)$.

当$x=2$及$x=-2$时，级数为

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2+(-1)^n}{n^2}\text{和}\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{2+(-1)^n}{n^2}.$$

由于$0<\frac{2+(-1)^n}{n^2}\le\frac{3}{n^2}$，且级数$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$收敛，所以正项级数$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2+(-1)^n}{n^2}$收敛，进而知级数$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{2+(-1)^n}{n^2}$绝对收敛.

因此该幂级数收敛域为$[-2,2]$.

由上述例子可知，在计算ρ时．应根据幂级数$\sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n$的系数$a_n (n=0,1,2,\cdots)$的特点，选择系数模比值法法或系数模根值法，使得求解过程简洁明了．

特别要注意在例 4 中，尽管我们已经求得

$$\rho = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \frac{1}{2},$$

但是极限 $\lim_{n\to\infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \frac{1}{2} \lim_{n\to\infty} \frac{n^2}{(n+1)^2} \frac{2+(-1)^{n+1}}{2+(-1)^n}$不存在（也不是$+\infty$），这说明利用系数模比值法不能解决问题，反映了选择方法的重要性．

同时，此例还告诉我们如果极限$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|$ 和$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{|a_n|}$不存在（也不是$+\infty$），不能说明收敛半径$R$不存在。由阿贝尔定理可知，对每个幂级数，其收敛半径R总是存在的，此时应改用其它方法求收敛半径R.

例5.求幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(2n)!}{(n!)^2}x^{2n}$ 的收敛半径 .

解: 级数缺少奇次幂项,不能直接应用定理2和定理3,故直接由比值审敛法求收敛半径.

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{u_{n+1}(x)}{u_n(x)}\right| = \lim_{n\to\infty}\frac{\frac{[2(n+1)]!}{[(n+1)!]^2}x^{2(n+1)}}{\frac{[2n]!}{[n!]^2}x^{2n}}$$

$$= \lim_{n\to\infty}\frac{(2n+1)(2n+2)}{(n+1)^2}x^2 = 4x^2$$

$$\left.\begin{array}{l}\text{当}4x^2<1\text{即}\,|x|<\frac{1}{2}\text{时级数收敛}\\ \text{当}4x^2>1\text{即}\,|x|>\frac{1}{2}\text{时级数发散}\end{array}\right\}\text{故收敛半径为}\ R=\frac{1}{2}.$$

例 6. 已知幂级数$\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x+2)^n$在点$x=0$处收敛，在点$x=-4$处发散，则幂级数$\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-3)^n$的收敛域为__________.

答案：填“$(1,5]$”.

解： 由题意$\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x+2)^n$的收敛域为$(-4,0]$，则$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$的收敛域为$(-2,2]$，所以$\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-3)^n$的收敛域为$(1,5]$.

例 7. 若幂级数$\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_n(x-1)^n$在点$x=-1$处收敛，则此级数在点$x=2$处（　　）.

（A）发散 （B）绝对收敛 （C）条件收敛 （D）敛散性不能确定

答案：　选（B）.

解：　令$t=x-1$，因级数$\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_n(x-1)^n$在点$x=-1$处收敛，即级数$\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_nt^n$在点$t=-2$处收敛，从而级数$\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_nt^n$在$(-2,2)$内绝对收敛，也即级数$\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_n(x-1)^n$在$(0,3)$内绝对收敛，显然$2\in(0,3)$，故此级数在点$x=2$处绝对收敛，选（B）.

例 8. 已知幂级数$\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-1)^n$在点$x=2$处条件收敛，求其收敛区间.

解： 令$t=x-1$，则$\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-1)^n=\sum_{n=0}^{\infty} a_n t^n$，且幂级数$\sum_{n=0}^{\infty} a_n t^n$在$t=1$处条件收敛，由阿贝尔定理知点$t=1$和$t=-1$为$\sum_{n=0}^{\infty} a_n t^n$收敛区间的端点，所以幂级数$\sum_{n=0}^{\infty} a_n t^n$的收敛区间为$t\in(-1,1)$.

又因为$t=x-1$，由$-1<x-1<1$得$0<x<2$，所以幂级数$\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-1)^n$的收敛区间为$(0,2)$.

三、幂级数的运算

定理3. 设幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 及 $\sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n$ 的收敛半径分别为 R_1, R_2, 令 $R = \min\{R_1, R_2\}$, 则有：

$$\lambda \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = \sum_{n=0}^{\infty} \lambda a_n x^n \quad (\lambda\text{为常数}) \qquad |x| < R_1$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \pm \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n = \sum_{n=0}^{\infty} (a_n \pm b_n) x^n, \qquad |x| < R$$

$$\left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n\right)\left(\sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n\right) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n, \qquad |x| < R$$

其中 $c_n = \sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k}$

以上结论可用部分和的极限证明.

说明: 两个幂级数相除所得幂级数的收敛半径可能比原来两个幂级数的收敛半径小得多. 例如, 设

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = 1 \quad (a_0 = 1, a_n = 0, n = 1, 2, \cdots)$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n = 1 - x \quad \begin{pmatrix} b_0 = 1, b_1 = -1, \\ b_n = 0,\ n = 2, 3, \cdots \end{pmatrix}$$

它们的收敛半径均为 $R = \infty$, 但是

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \Big/ \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n = \frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + \cdots + x^n + \cdots$$

其收敛半径只是 $R = 1$.

定理4 若幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 的收敛半径 $R>0$，则其和函数 $S(x)$ 在收敛域上连续，且在收敛区间内可逐项求导与逐项求积分，运算前后收敛半径相同：

$$S'(x)=\sum_{n=0}^{\infty}(a_n x^n)'=\sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1}, \quad x\in(-R,R)$$

$$\int_0^x S(x)\,\mathrm{d}x=\sum_{n=0}^{\infty} a_n \int_0^x x^n\,\mathrm{d}x=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{a_n}{n+1}x^{n+1},$$

$$x\in(-R,R)$$

注：逐项积分时，运算前后端点处的敛散性不变.

例9. 求幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)x^n$ 的和函数 $S(x)$.

解: 易求出幂级数的收敛半径为 1 , $x=\pm1$ 时级数发散, 故当 $x\in(-1,1)$时,

$$S(x)=\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)x^n=[\int_0^x(\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)t^n)dt]'$$

$$=[\sum_{n=0}^{\infty}\int_0^x(n+1)t^n dt]'=(\sum_{n=0}^{\infty}x^{n+1})'$$

$$=\left(\frac{x}{1-x}\right)'=\frac{1}{(1-x)^2}$$

例10. 求幂级数 $\sum_{n=1}^{\infty} n x^n$ 的和函数 $S(x)$.

解: 易求出幂级数的收敛半径为 1 , $x = \pm 1$ 时级数发散, 故当 $x \in (-1, 1)$时,

$$S(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n x^n = x \sum_{n=1}^{\infty} n x^{n-1}$$

$$= x \sum_{n=1}^{\infty} (x^n)' = x\left(\sum_{n=1}^{\infty} x^n \right)'$$

$$= x \left(\frac{x}{1-x} \right)' = \frac{x}{(1-x)^2}$$

例11. 求幂级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n}$ 的和函数 $S(x)$.

解: 易求出幂级数的收敛半径为 1 , $x=1$ 时级数发散

$x=-1$ 时级数收敛，故收敛域为 $x\in[-1,1)$.

$$S(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n}=\int_0^x(\sum_{n=1}^{\infty}\frac{t^n}{n})'dt+s(0)$$

$$=\int_0^x\sum_{n=1}^{\infty}(\frac{t^n}{n})'dt=\int_0^x\sum_{n=1}^{\infty}t^{n-1}dt$$

$$=\int_0^x\frac{1}{1-t}dt=\ln\frac{1}{1-x},\quad x\in(-1,1).$$

由连续性可得: $S(x)=\ln\frac{1}{1-x},\quad x\in[-1,1).$

例12. 求级数 $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n+1}$ 的和函数 $S(x)$.

解: 易求出幂级数的收敛半径为 1 , 且 $x=-1$时级数收敛 , $x=1$ 时级数发散, 则在 $[-1,1)$ 中, 当 $x\neq 0$ 时, 有

$$S(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n+1}=\frac{1}{x}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{n+1}}{n+1}=\frac{1}{x}\sum_{n=0}^{\infty}\int_0^x x^n\,\mathrm{d}x$$

$$=\frac{1}{x}\int_0^x\left(\sum_{n=0}^{\infty}x^n\right)\mathrm{d}x=\frac{1}{x}\int_0^x\frac{1}{1-x}\,\mathrm{d}x$$

$$=-\frac{1}{x}\ln(1-x)\qquad(0<|x|<1 \text{ 及 } x=-1)$$

$$S(x)=-\frac{1}{x}\ln(1-x),\ (0<|x|<1 \text{ 及 } x=-1)$$

而 $x=0$ 时级数收敛于1, $\lim\limits_{x\to 0}\left(-\frac{\ln(1-x)}{x}\right)=1$,

因此由和函数的连续性得:

$$S(x)=\begin{cases}-\frac{1}{x}\ln(1-x), & x\in[-1,0)\cup(0,1)\\ 1, & x=0\end{cases}$$

例 13. 设级数$1+x+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\cdots\ (-\infty<x<+\infty)$的和函数为$s(x)$.

求：⑴ $s(x)$所满足的一阶微分方程；⑵ $s(x)$的表达式.

解： ⑴ 由$s(x)=1+x+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\cdots\ (-\infty<x<+\infty)$，

得 $s'(x)=1+x+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\cdots\ =s(x)$

因此$s(x)$所满足的一阶微分方程为$s'(x)=s(x)$.

⑵ 一阶线性微分方程$s'(x)=s(x)$的通解为$s(x)=Ce^x$.

而$s(0)=1$，得$C=1$，故所求和函数为

$$s(x)=e^x，\ -\infty<x<+\infty .$$

例14. 求极限 $\lim\limits_{n\to\infty}(\frac{1}{a}+\frac{2}{a^2}+\cdots+\frac{n}{a^n})$, 其中 $a>1$.

解: 令 $S_n=\frac{1}{a}+\frac{2}{a^2}+\cdots+\frac{n}{a^n}=\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{k}{a^k}$

作幂级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}n\,x^n$, 易知其收敛半径为 1, 设其和为 $S(x)$,

则
$$S(x)=\sum_{n=1}^{\infty}n\,x^n=x\sum_{n=1}^{\infty}n\,x^{n-1}=x\Big(\sum_{n=1}^{\infty}x^n\Big)'$$

$$=x\cdot\Big(\frac{x}{1-x}\Big)'=\frac{x}{(1-x)^2}$$

$$\therefore\quad \lim_{n\to\infty}S_n=S(\tfrac{1}{a})=\frac{a}{(a-1)^2}$$

内容小结

1. 求幂级数收敛域的方法

1) 对标准型幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \ (a_n \neq 0)$

先求收敛半径，再讨论端点的收敛性.

2) 对非标准型幂级数(缺项或通项为一般式)

求收敛半径时直接用比值法或根值法,

也可通过换元化为标准型再求.

2. 幂级数的性质

1) 两个幂级数在公共收敛区间内可进行加、减与乘法运算.

2) 在收敛区间内幂级数的和函数连续;

3) 幂级数在收敛区间内可逐项求导和求积分.

3. 求和函数的常用方法 — 利用幂级数的性质

思考与练习

1. 已知 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 在 $x = x_0$ 处条件收敛，问该级数收敛半径是多少？

答：根据Abel 定理可知，级数在 $|x| < |x_0|$ 收敛，$|x| > |x_0|$ 时发散. 故收敛半径为 $R = |x_0|$.

2. 在幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{2+(-1)^n}{2^n}x^n$ 中,

$$\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \frac{1}{2}\,\frac{2+(-1)^{n+1}}{2+(-1)^n} = \begin{cases} 3/2\,, & n \text{ 为奇数} \\ 1/6\,, & n \text{ 为偶数} \end{cases}$$

能否确定它的收敛半径不存在 ?

答: 不能. 因为

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{|u_n(x)|} = \lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{2+(-1)^n}\,\frac{|x|}{2} = \frac{|x|}{2}$$

当 $|x| < 2$ 时级数收敛 , $|x| > 2$ 时级数发散 , $\therefore R = 2.$

说明: 可以证明

比值判别法成立 $\underset{\not\longleftarrow}{\longrightarrow}$ 根值判别法成立

备用题

1 求数项级数 $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{(n^2-1)2^n}$ 的和.

解: 设 $S(x)=\sum_{n=2}^{\infty}\frac{x^n}{n^2-1}$, $x\in(-1,1)$, 则

$$S(x)=\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{2}\left(\frac{1}{n-1}-\frac{1}{n+1}\right)x^n$$

$$=\frac{x}{2}\sum_{n=2}^{\infty}\frac{x^{n-1}}{n-1}-\frac{1}{2x}\sum_{n=2}^{\infty}\frac{x^{n+1}}{n+1}\qquad(x\neq 0)$$

$$=\frac{x}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n}-\frac{1}{2x}\sum_{n=3}^{\infty}\frac{x^n}{n}$$

$$S(x)=\left(\frac{x}{2}-\frac{1}{2x}\right)\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n}+\frac{1}{2x}\left(x+\frac{x^2}{2}\right)\qquad(x\neq 0)$$

而 $$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n}=\sum_{n=1}^{\infty}\int_0^x x^{n-1}\,\mathrm{d}x=\int_0^x\left(\sum_{n=1}^{\infty}x^{n-1}\right)\mathrm{d}x=\int_0^x\frac{\mathrm{d}x}{1-x}$$

$$=-\ln(1-x)$$

$\therefore$ $$S(x)=\frac{1-x^2}{2x}\ln(1-x)+\frac{2+x}{4}\qquad(x\neq 0)$$

故 $$\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{(n^2-1)2^n}=S\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{5}{8}-\frac{3}{4}\ln 2$$

2. 设 $I_n=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\sin^n x\cos x dx,\ n=0,1,2,\cdots$，求 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} I_n$.

解： 由于 $I_n=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\sin^n x d(\sin x)=\frac{1}{n+1}\sin^{n+1}x\Big|_0^{\frac{\pi}{4}}=\frac{1}{n+1}(\frac{\sqrt{2}}{2})^{n+1}$，所以

$$\sum_{n=0}^{\infty} I_n=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n+1}(\frac{\sqrt{2}}{2})^{n+1}.$$

记 $s(x)=\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n+1}x^{n+1}$，则其收敛半径 $R=1$，在 $(-1,1)$ 内有

$$s'(x)=\sum_{n=0}^{\infty}x^n=\frac{1}{1-x},\quad s(x)=s(0)+\int_0^x\frac{1}{1-t}dt=-\ln|1-x|.$$

令 $x=\frac{\sqrt{2}}{2}\in(-1,1)$，则 $s(\frac{\sqrt{2}}{2})=\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n+1}(\frac{\sqrt{2}}{2})^{n+1}=-\ln\left|1-\frac{\sqrt{2}}{2}\right|$，从而

$$\sum_{n=0}^{\infty} I_n=\ln(2+\sqrt{2}).$$

3. 设级数$\frac{x^4}{2\cdot 4}+\frac{x^6}{2\cdot 4\cdot 6}+\frac{x^8}{2\cdot 4\cdot 6\cdot 8}+\cdots\ (-\infty<x<+\infty)$的和函数为$s(x)$．求：

(1) $s(x)$所满足的一阶微分方程；(2) $s(x)$的表达式．

解： (1) 由$s(x)=\frac{x^4}{2\cdot 4}+\frac{x^6}{2\cdot 4\cdot 6}+\frac{x^8}{2\cdot 4\cdot 6\cdot 8}+\cdots\ (-\infty<x<+\infty)$，

得 $$s'(x)=\frac{x^3}{2}+\frac{x^5}{2\cdot 4}+\frac{x^7}{2\cdot 4\cdot 6}+\cdots=x(\frac{x^2}{2}+\frac{x^4}{2\cdot 4}+\frac{x^6}{2\cdot 4\cdot 6}+\cdots)$$

$$=x[\frac{1}{2}x^2+s(x)],$$

因此$s(x)$所满足的一阶微分方程为$s'(x)-xs(x)=\frac{1}{2}x^3$．

(2) 一阶线性微分方程 $s'(x)-xs(x)=\frac{1}{2}x^3$ 的通解为

$$s(x)=e^{\int x\,dx}\left[\int\frac{1}{2}x^3e^{-\int x\,dx}dx+C\right]=-\frac{1}{2}x^2-1+Ce^{\frac{1}{2}x^2}.$$

由 $s(x)=\frac{x^4}{2\cdot4}+\frac{x^6}{2\cdot4\cdot6}+\frac{x^8}{2\cdot4\cdot6\cdot8}+\cdots$ 知 $s(0)=0$，得 $C=1$，

故所求和函数为

$$s(x)=-\frac{1}{2}x^2+e^{\frac{1}{2}x^2}-1,\quad -\infty<x<+\infty.$$

4. 求幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!}$ 的和函数 .

解: 易求出幂级数的收敛半径 $R=+\infty$. 设

$$S(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!}\qquad(-\infty<x<+\infty)$$

则 $$S'(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{n-1}}{(n-1)!}=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{x^k}{k!}=S(x)$$

$$(-\infty<x<+\infty)$$

故有 $$\left(\mathrm{e}^{-x}S(x)\right)'=0$$

因此得 $$S(x)=C\mathrm{e}^x$$

由 $S(0)=1$ 得 $S(x)=\mathrm{e}^x$, 故得 $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!}=\mathrm{e}^x$.