第九节
多元函数的极值及其求法

一、二元函数的极值

二、条件极值

*三、条件极值存在的充分条件

四、最大值与最小值

一、 二元函数的极值

定义：若函数 $f(x,y)$ 在点 (x_0,y_0) 的某去心邻域内有

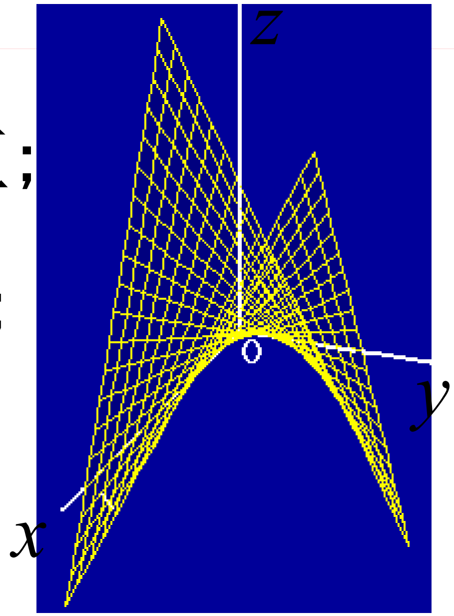
$$f(x,y)<f(x_0,y_0)(\text{或}\ f(x,y)>f(x_0,y_0))$$

就称函数在该点取得极大值（极小值）．点 (x_0,y_0) 称为极大值点（极小值点），极大值和极小值 统称为极值，极大值点和极小值点统称为极值点.

例如：$z=3x^2+4y^2$ 在点 $(0,0)$ 取极小值；

$z=-\sqrt{x^2+y^2}$ 在点 $(0,0)$ 取极大值；

$z=xy$ 在点 $(0,0)$ 不取极值.



定理1(极值存在的必要条件) 设函数 $\boldsymbol{z = f(x, y)}$ 在点 (x_0, y_0) 处可偏导，且在该点取得极值，则有

$$f'_x(x_0, y_0) = 0,\ f'_y(x_0, y_0) = 0$$

证：因 $\boldsymbol{z = f(x, y)}$ 在点 $(\boldsymbol{x_0}, \boldsymbol{y_0})$ 取得极大(小)值，故

$$z = f(x, y_0) \text{ 在 } x = x_0 \text{ 取得极大(小)值;}$$

$$z = f(x_0, y) \text{ 在 } y = y_0 \text{ 取得极大(小)值,}$$

根据一元函数极值的必要条件可知定理结论成立.

注1：使偏导数均为 0 的点称为驻点或稳定点.

注2：驻点未必是极值点.

例如, $z = xy$ 有驻点 $(0, 0)$，但在该点不取极值.

定理2(极值存在的充分条件 I) 设函数 $z = f(x,y)$ 在点 $P_0(x_0,y_0)$ 的某空心邻域 $\overset{o}{U}(P_0)$ 内有一阶连续偏导数，且在点 $P_0(x_0,y_0)$ 处连续。

(1) 如果对任意的 $(x,y)\in\overset{o}{U}(P_0)$, 均有

$$f_x'(x,y)(x-x_0)+f_y'(x,y)(y-y_0)>0 \ \ (\text{或}<0),$$

则 $z = f(x,y)$ 在点 P_0 处取得极小值(极大值) $f(x_0,y_0)$;

(2) 如果存在自 $P_0(x_0,y_0)$ 点发出的射线 l_1, l_2, 使得

$$f_x'(x,y)(x-x_0)+f_y'(x,y)(y-y_0)>0,\ (x,y)\in l_1\cap\overset{o}{U}(P_0),$$

$$f_x'(x,y)(x-x_0)+f_y'(x,y)(y-y_0)<0,\ \ (x,y)\in l_2\cap\overset{o}{U}(P_0),$$

则 $z = f(x,y)$ 在点 P_0 处不取极值。

了解定理、证明从略

定理3(极值存在的充分条件 II) 设函数 $z = f(x, y)$ 在点 $P_0(x_0, y_0)$ 的某邻域内具有二阶连续偏导数,

$$\text{且} f'_x(x_0, y_0) = 0,\ f'_y(x_0, y_0) = 0$$

令 $A = f''_{xx}(x_0, y_0),\ B = f''_{xy}(x_0, y_0),\ C = f''_{yy}(x_0, y_0)$

则

1) 当 $AC - B^2 > 0$ 时, 取极值 $\begin{cases} A<0 & \text{时取极大值;} \\ A>0 & \text{时取极小值.} \end{cases}$

2) 当 $AC - B^2 < 0$ 时, 不取极值.

3) 当 $AC - B^2 = 0$ 时, 不能确定是否取极值(见例2).

证明从略

例1．求函数 $f(x,y)=x^3-y^3+3x^2+3y^2-9x$ 的极值.

解： 第一步 求驻点.

解方程组 $\begin{cases} f_x'(x,y)=3x^2+6x-9=0 \\ f_y'(x,y)=-3y^2+6y=0 \end{cases}$

得驻点：(1, 0), (1, 2), (－3, 0), (－3, 2).

第二步 判别.

求二阶偏导数

$f''_{xx}(x,y)=6x+6,$ ← A

$f''_{xy}(x,y)=0,$ ← B

$f''_{yy}(x,y)=-6y+6$ ← C

列表计算

驻点	(1, 0)	(1, 2)	(–3, 0)	(–3, 2)
A	12	12	-12	-12
B	0	0	0	0
C	6	-6	6	-6
$AC-B^2$	72>0	-72<0	-72<0	72>0
极值情况	极小值	不取极值	不取极值	极大值

第三步　计算.

所以 $f(x,y)$ 的极小值为 $f(1,0)=-5$,

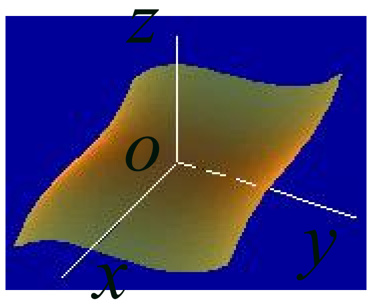
极大值为 $f(-3,2)=31.$

例2. 讨论函数 $z = x^3 + y^3$ 及 $z = (x^2 + y^2)^2$ 在点 $(0, 0)$ 是否取得极值.

解: 显然, $(0, 0)$ 都是它们的驻点 ,并且在 $(0, 0)$ 都有

$$AC - B^2 = 0 \cdot 0 - 0^2 = 0$$

$z = x^3 + y^3$ 在 $(0, 0)$ 点任意邻域内的取值



可能为 正, 负, 0, (比如取路径) $y = 0$

因此 $\boldsymbol{z}(0, 0)$ 不是极值.

当 $\boldsymbol{x}^2 + \boldsymbol{y}^2 \neq \boldsymbol{0}$ 时, $z = (x^2 + y^2)^2 > z\big|_{(0,0)} = 0$

因此 $z(0,0) = (x^2 + y^2)^2\big|_{(0,0)} = 0$ 为极小值.

二、条件极值

极值问题 $\begin{cases} \text{(无条件)极值: 自变量在定义域内取值;} \\ \text{条件极值 : 自变量在定义域内取值外,} \\ \quad \text{还有其它条件限制。} \end{cases}$

例如,在条件$\phi(x,y)=0$下,求函数$z=f(x,y)$的极值.

条件极值的两种求法:

方法1　化为无条件极值法. 如

转化 ↓ 从条件$\phi(x,y)=0$中解出$y=\psi(x)$

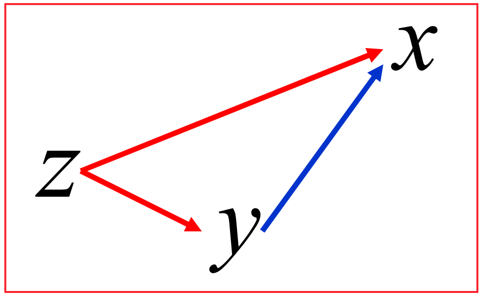
求一元函数$z=f(x,\psi(x))$的无条件极值问题。

方法2 拉格朗日乘数法（经典方法）.

例如，在条件$\phi(x,y)=0$下，求函数$z=f(x,y)$的极值.

如方法1所述 ，设 $\varphi(x,y)=0$ 可确定隐函数 $y=\psi(x)$，则问题等价于一元函数 $z=f(x,\psi(x))$ 的极值问题，故极值点必满足

$$\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x}=f'_x+f'_y\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=0$$



因 $\frac{\mathbf{d}y}{\mathbf{d}x}=-\frac{\varphi'_x}{\varphi'_y}$， 故有 $f'_x-f'_y\frac{\varphi'_x}{\varphi'_y}=0$，

记
$$\frac{f'_x}{\varphi'_x}=\frac{f'_y}{\varphi'_y}=-\lambda$$

极值点必满足 $\begin{cases} f'_x + \lambda \varphi'_x = 0 \\ f'_y + \lambda \varphi'_y = 0 \\ \varphi = 0 \end{cases}$

引入辅助函数 $F(x, y, \lambda) = f(x, y) + \lambda\varphi(x, y)$

则极值点满足: $\begin{cases} F'_x = f'_x + \lambda \varphi'_x = 0 \\ F'_y = f'_y + \lambda \varphi'_y = 0 \\ F'_\lambda = \varphi = 0 \end{cases}$ ①

辅助函数***F*** 称为拉格朗日(**Lagrange**)函数. 利用拉格朗日函数求极值的方法称为拉格朗日乘数法.

λ 称为拉格朗日乘数，方程组①的解 (x_0, y_0, λ_0)或 (x_0, y_0)称为拉格朗日稳定点或拉格朗日驻点.

*三、条件极值存在的充分条件

拉格朗日稳定点为可能的条件极值点.

拉格朗日稳定点是否为条件极值点，还需要进一步判断.

在本教材中，给出了一些判定条件极值存在性的方法，但由于内容比较复杂，故在此不再介绍.

特别是拉格朗日稳定点惟一时，往往根据实际问题，判断条件极值存在，故在惟一的拉格朗日稳定点处取得条件极值.

注：对于拉格朗日函数的不可偏导点，暂不作讨论.

拉格朗日乘数法解题步骤：

第一步： 引入 $F(x,y,\lambda)=f(x,y)+\lambda\varphi(x,y)$

第二步： 建立方程组

$$\begin{cases} F'_x=f'_x+\lambda\varphi'_x=0 \\ F'_y=f'_y+\lambda\varphi'_y=0 \\ F'_\lambda=\varphi=0 \end{cases}$$

并求出所有拉格朗日稳定点 (x_0,y_0)

第三步： 由实际问题判断条件极值的存在性，并求出条件极值。

例3. 求$f(x,y)=xy$ 在条件$x+y=1$下的条件极值.

解法1（化为无条件极值法）： 由$x+y=1$ 解得

$y=1-x$, 故 $f(x,y)=f(x,1-x)=x(1-x)=\frac{1}{4}-(x-\frac{1}{2})^2$,

所以当$x=\frac{1}{2}, y=\frac{1}{2}$ 时，$f(x,y)$ 取得条件极大值 $\frac{1}{4}$.

解法2（拉格朗日乘数法）： 令 $F=xy+\lambda(x+y-1)$

解方程组 $\begin{cases} F'_x=y+\lambda=0 \\ F'_y=x+\lambda=0 \\ F'_\lambda=x+y-1=0 \end{cases}$

解得惟一驻点 $(\frac{1}{2},\frac{1}{2})$.

由于$\begin{cases} z=xy \\ x+y=1 \end{cases}$ 表示一条开口向下的抛物线，故 $f(x,y)=xy$ 在条件 $x+y=1$ 下的条件极大值为 $f(\frac{1}{2},\frac{1}{2})=\frac{1}{4}$.

例4. 要设计一个容量为 V_0 的长方体开口水箱, 试问水箱长、宽、高等于多少时所用材料最省？

解：设x, y, z 分别表示长, 宽, 高, 则问题为求x, y, z 使在条件 $xyz = V_0$下水箱表面积 $S = 2(xz + yz) + xy$ 最小.

令 $F = 2(xz + yz) + xy + \lambda(xyz - V_0)$

解方程组

$$\begin{cases} F'_x = 2z + y + \lambda yz = 0 \\ F'_y = 2z + x + \lambda xz = 0 \\ F'_z = 2(x + y) + \lambda xy = 0 \\ F'_\lambda = xyz - V_0 = 0 \end{cases}$$

得惟一驻点 $(\sqrt[3]{2V_0}, \sqrt[3]{2V_0}, \sqrt[3]{\frac{V_0}{4}})$.

由题意可知，合理的设计是存在的，因此, 当高为 $\sqrt[3]{\frac{V_0}{4}}$, 长、宽均为 $\sqrt[3]{2V_0}$, 时，所用材料最省.

四、最大值与最小值

存在性

函数$f(x,y)$在有界闭区域上连续

$\Downarrow$

函数$f(x,y)$在有界闭区域上可达到最值

有界闭区域上连续函数最值的解题步骤：

第一步：求出区域内部所有可能的最值点
（驻点和不可偏导点）

第二步：求出区域边界上所有可能的最值点
（利用条件极值的方法）

第三步：计算上述点处的函数值，并比较得出结论。

例 5.求函数 $z = f(x,y) = x^2 - y^2 + 2y$ 在由上半椭圆

$x^2 + \dfrac{y^2}{4} = 1\,(y \geq 0)$ 与 x 轴所围成的平面闭区域 D 上的

最大值和最小值.

解. (1)在 D 的内部

$f(x,y)$ 无不可偏导点。

令 $\begin{cases} \dfrac{\partial z}{\partial x} = 2x = 0, \\ \dfrac{\partial z}{\partial y} = -2y + 2 = 0, \end{cases}$ 得 $f(x,y)$ 的驻点 $(0,1)$.

(2)在 D 的边界上

①在 $y=0,-1\le x\le 1$ 上，$z=x^2$，故此时的最大值点为 $(\pm 1,0)$，最小值点为 $(0,0)$．

②在上半椭圆 $x^2+\dfrac{y^2}{4}=1\ (y\ge 0)$ 上，记

$$F=x^2-y^2+2y+\lambda(x^2+\frac{y^2}{4}-1),$$

令
$$\begin{cases} F_x'=2x+2\lambda x=0, \\ F_y'=-2y+2+\dfrac{\lambda}{2}y=0, \\ x^2+\dfrac{y^2}{4}-1=0, \end{cases}$$
得驻点 $(0,2)$，$(\pm\dfrac{\sqrt{21}}{5},\dfrac{4}{5})$．

(3)计算函数值，并比较大小

$$f(0,1)=1,$$

$$f(\pm 1,0)=1,\ f(0,0)=0,$$

$$f(0,2)=0,\quad f(\pm\frac{\sqrt{21}}{5},\frac{4}{5})=\frac{9}{5},$$

由上可知，$f(x,y)$ 在 D 上的最小值为 $f(0,0)=0$，

最大值为 $f(\pm\frac{\sqrt{21}}{5},\frac{4}{5})=\frac{9}{5}$.

推广 拉格朗日乘数法可推广到多个自变量和多个约束条件的情形.

例如, 求函数 $u = f(x, y, z)$ 在条件 $\varphi(x, y, z) = 0$, $\psi(x, y, z) = 0$下的极值.

设 $F(x, y, z, \lambda, \mu) = f(x, y, z) + \lambda\varphi(x, y, z) + \mu\psi(x, y, z)$

解方程组 $\begin{cases} F'_x = f'_x + \lambda\varphi'_x + \mu\psi'_x = 0 \\ F'_y = f'_y + \lambda\varphi'_y + \mu\psi'_y = 0 \\ F'_z = f'_z + \lambda\varphi'_z + \mu\psi'_z = 0 \\ F'_\lambda = \varphi = 0 \\ F'_\mu = \psi = 0 \end{cases}$

可得到拉格朗日稳定点.

例 6. 旋转抛物面 $z = x^2 + y^2$ 被平面 $x + y + z = 1$ 截成一个椭圆，求此椭圆到坐标原点的最长距离与最短距离.

解. 设椭圆上任一点为 (x, y, z)，则 (x, y, z) 满足

$$z = x^2 + y^2 \text{ 和 } x + y + z = 1,$$

它到原点的距离为 $d = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$，

将其转化为 $d^2 = x^2 + y^2 + z^2$ 求解。

作拉格朗日函数

$$F = x^2 + y^2 + z^2 + \lambda\left(x^2 + y^2 - z\right) + \mu\left(x + y + z - 1\right)$$

解方程组

$$\begin{cases} F'_x = 2x + 2\lambda x + \mu = 0, \\ F'_y = 2y + 2\lambda y + \mu = 0, \\ F'_z = 2z - \lambda + \mu = 0, \\ z = x^2 + y^2, \\ x + y + z = 1, \end{cases}$$

解得驻点为

$$\left(\frac{-1+\sqrt{3}}{2}, \frac{-1+\sqrt{3}}{2}, 2-\sqrt{3}\right),$$

$$\left(\frac{-1-\sqrt{3}}{2}, \frac{-1-\sqrt{3}}{2}, 2+\sqrt{3}\right),$$

将两个驻点分别代入

$d = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$，得 $d_1 = \sqrt{9 - 5\sqrt{3}}$ 或 $d_2 = \sqrt{9 + 5\sqrt{3}}$ 。

由实际意义知，最长距离和最短距离均存在，故最长距离为 $\sqrt{9 + 5\sqrt{3}}$，最短距离为 $\sqrt{9 - 5\sqrt{3}}$.

内容小结

1. 函数的极值问题

第一步　利用必要条件在定义域内找驻点.

如对二元函数 $z = f(x,y)$, 即解方程组

$$\begin{cases} f_x'(x,y) = 0 \\ f_y'(x,y) = 0 \end{cases}$$

第二步　利用充分条件判别驻点是否为极值点 .

2. 函数的条件极值问题

(1) 化为无条件极值法

(2) 拉格朗日乘数法

求二元函数 $z = f(x,y)$ 在条件 $\varphi(x,y)=0$ 下的极值,

设拉格朗日函数 $\boldsymbol{F = f(x,y) + \lambda\phi(x,y)}$,

解方程组 $\begin{cases} F'_x = f'_x + \lambda\varphi'_x = 0 \\ F'_y = f'_y + \lambda\varphi'_y = 0 \\ F'_\lambda = \varphi = 0 \end{cases}$ ， 求驻点.

3. 函数的最值问题

第一步 建立目标函数, 确定定义域(及约束条件)

第二步 判别 • 根据问题的实际意义确定最值

• 比较内部的驻点及边界上可能极值点处的函数值大小

思考题

例 1　设函数 $f(x)$ 具有二阶连续导数，且 $f(x)>0$， $f'(0)=0$，则函数 $z=f(x)\ln f(y)$ 在点 $(0,0)$ 处取得极小值的一个充分条件是（　　）.

（A） $f(0)>1$， $f''(0)>0$　　（B） $f(0)>1$， $f''(0)<0$

（C） $f(0)<1$， $f''(0)>0$　　（D） $f(0)<1$， $f''(0)<0$

答案　选（A）.

解： $\dfrac{\partial z}{\partial x}=f'(x)\ln f(y),\dfrac{\partial z}{\partial y}=\dfrac{f(x)}{f(y)}f'(y)$，得 $\left.\dfrac{\partial z}{\partial x}\right|_{(0,0)}=\left.\dfrac{\partial z}{\partial y}\right|_{(0,0)}=0$，

所以 $(0,0)$ 是函数的驻点.

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = f''(x)\ln f(y), \quad \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = f'(x)\frac{f'(y)}{f(y)},$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = f(x)\frac{f''(y)f(y) - [f'(y)]^2}{f^2(y)},$$

计算得

$$A = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\bigg|_{(0,0)} = f''(0)\ln f(0), \quad B = \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}\bigg|_{(0,0)} = 0, \quad C = \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}\bigg|_{(0,0)} = f''(0),$$

$$AC - B^2 = [f''(0)]^2 \ln f(0).$$

当 $\ln f(0) > 0$，即 $f(0) > 1$，且 $f''(0) \neq 0$ 时，$AC - B^2 > 0$，函数取值．而当 $f''(0) > 0$ 时，函数取极小值，故选（A）.

例 2 $z=z(x,y)$ 是由方程 $x^2-6xy+10y^2-2yz-z^2+18=0$ 确定的函数，求 $z=z(x,y)$ 的极值点和极值.

解： 由 $x^2-6xy+10y^2-2yz-z^2+18=0$，得

$$2x-6y-2y\frac{\partial z}{\partial x}-2z\frac{\partial z}{\partial x}=0,\quad -6x+20y-2z-2y\frac{\partial z}{\partial y}-2z\frac{\partial z}{\partial y}=0.$$

令 $\begin{cases}\dfrac{\partial z}{\partial x}=0,\\[2mm] \dfrac{\partial z}{\partial y}=0,\end{cases}$ 得 $\begin{cases}x-3y=0,\\ -3x+10y-z=0,\end{cases}$ 故 $\begin{cases}x=3y,\\ z=y.\end{cases}$

将上式代入原方程，解得可得 $\begin{cases}x=9,\\ y=3,\\ z=3.\end{cases}$ 或 $\begin{cases}x=-9,\\ y=-3,\\ z=-3.\end{cases}$

由于

$$2-2y\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}-2(\frac{\partial z}{\partial x})^2-2z\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=0,$$

$$-6-2\frac{\partial z}{\partial x}-2y\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}-2\frac{\partial z}{\partial y}\cdot\frac{\partial z}{\partial x}-2z\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=0,$$

$$20-2\frac{\partial z}{\partial y}-2\frac{\partial z}{\partial y}-2y\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}-2(\frac{\partial z}{\partial y})^2-2z\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=0,$$

所以 $A_1=\left.\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\right|_{(9,3,3)}=\frac{1}{6}$， $B_1=\left.\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}\right|_{(9,3,3)}=-\frac{1}{2}$， $C_1=\left.\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}\right|_{(9,3,3)}=\frac{5}{3}$，

故 $A_1C_1-B_1^2=\frac{1}{36}>0$．又 $A_1=\frac{1}{6}>0$，从而点 $(9,3)$ 是 $z(x,y)$ 的极小值点，极小值为 $z(9,3)=3$．

类似地，由

$$A_2 = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\bigg|_{(-9,-3,-3)} = -\frac{1}{6}，\quad B_2 = \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}\bigg|_{(-9,-3,-3)} = \frac{1}{2}，\quad C_2 = \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}\bigg|_{(-9,-3,-3)} = -\frac{5}{3}，$$

可知 $A_2C_2 - B_2{}^2 = \frac{1}{36} > 0$．又 $A_2 = -\frac{1}{6} < 0$，从而点 $(-9,-3)$ 是 $z(x,y)$ 的极大值点，极大值为 $z(-9,-3) = -3$．

例 3　设 $f(x,y)$ 与 $\varphi(x,y)$ 均为可微函数，且 $\varphi'_y(x,y)\neq 0$，已知 (x_0,y_0) 是 $f(x,y)$ 在约束条件 $\varphi(x,y)=0$ 下的一个极值点，下列选项正确的是（　　）.

（A）若 $f'_x(x_0,y_0)=0$，则 $f'_y(x_0,y_0)=0$

（B）若 $f'_x(x_0,y_0)=0$，则 $f'_y(x_0,y_0)\neq 0$

（C）若 $f'_x(x_0,y_0)\neq 0$，则 $f'_y(x_0,y_0)=0$

（D）若 $f'_x(x_0,y_0)\neq 0$，则 $f'_y(x_0,y_0)\neq 0$

答案　选（D）.

解： 作$L(x,y,\lambda)=f(x,y)+\lambda\varphi(x,y)$，则$(x_0,y_0,\lambda_0)$是

$$\begin{cases} L_x'(x,y,\lambda)=f_x'(x,y)+\lambda\varphi_x'(x,y)=0, \\ L_y'(x,y,\lambda)=f_y'(x,y)+\lambda\varphi_y'(x,y)=0, \\ L_\lambda'(x,y,\lambda)=\varphi(x,y)=0 \end{cases}$$

的一个解.

因为$\phi_y'(x,y)\neq 0$，所以由第二式解得$\lambda_0=-\dfrac{f_y'(x_0,y_0)}{\varphi_y'(x_0,y_0)}$，代入第一式可得：

$$f_x'(x_0,y_0)=\frac{f_y'(x_0,y_0)\varphi_x'(x_0,y_0)}{\varphi_y'(x_0,y_0)}.$$

当$f_x'(x,y)\neq 0$时，有$f_y'(x,y)\neq 0$， 故选（D).