高数期中模拟考试参考答案

一、

1. 3

解　因为在$[-\pi,\pi]$上，当$x=0, x=1, x=\pm\frac{\pi}{2}$时，$f(x)$无意义，所以$x=0, x=1, x=\pm\frac{\pi}{2}$均为$f(x)$在$[-\pi,\pi]$上的间断点.

又
$$\lim_{x\to0^+} f(x)=\lim_{x\to0^+}\frac{\tan x}{x}\cdot\frac{1+e^{1-\frac{1}{x}}}{1-e^{1-\frac{1}{x}}}=1 \quad (\lim_{x\to0^+}e^{-\frac{1}{x}}=0),$$
$$\lim_{x\to0^-} f(x)=\lim_{x\to0^-}\frac{\tan x}{x}\cdot\frac{e^{\frac{1}{x}}+e}{e^{\frac{1}{x}}-e}=-1 \quad (\lim_{x\to0^-}e^{\frac{1}{x}}=0),$$
所以$x=0$是$f(x)$的跳跃间断点.

而
$$\lim_{x\to1} f(x)=\lim_{x\to1}\frac{e^{\frac{1}{x}}+e}{x(e^{\frac{1}{x}}-e)}\cdot\tan x=\infty,$$
$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}} f(x)=\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{e^{\frac{1}{x}}+e}{x(e^{\frac{1}{x}}-e)}\cdot\tan x=\infty,$$
$$\lim_{x\to-\frac{\pi}{2}} f(x)=\lim_{x\to-\frac{\pi}{2}}\frac{e^{\frac{1}{x}}+e}{x(e^{\frac{1}{x}}-e)}\cdot\tan x=\infty,$$
所以$x=1, x=\pm\frac{\pi}{2}$是$f(x)$的无穷间断点. 故$f(x)$在$[-\pi,\pi]$上的第一类间断点为$x=0$.

2.

$$(-1)^{n-1}(n-1)!\left[\frac{1}{(x+1)^n}-\frac{1}{(x-1)^n}\right].$$

具体思路如下：

$$[\ln(1-x)]'=\frac{-1}{1-x}=(x-1)^{-1},$$
$$[\ln(1-x)]''=[(x-1)^{-1}]'=(-1)(x-1)^{-2},$$
$$[\ln(1-x)]'''=[(-1)(x-1)^{-2}]'=(-1)(-2)(x-1)^{-3}=(-1)^2\cdot2!(x-1)^{-3},$$
……

一般地，$[\ln(1-x)]^{(n)}=(-1)^{n-1}\frac{(n-1)!}{(x-1)^n}$.

同理，$[\ln(1+x)]^{(n)}=(-1)^{n-1}\frac{(n-1)!}{(x+1)^n}$. 所以，

$$\left[\ln\frac{1+x}{1-x}\right]^{(n)}=[\ln(1+x)-\ln(1-x)]^{(n)}=(-1)^{n-1}(n-1)!\left[\frac{1}{(x+1)^n}-\frac{1}{(x-1)^n}\right].$$

3. 0

解 在方程两边同时对 x 求导，

$$1+y'+\cos y\cdot y'=0,$$

即
$$y'=-\frac{1}{1+\cos y}.$$

故

$$y''=(y')'=\left(-\frac{1}{1+\cos y}\right)'=\frac{(1+\cos y)'}{(1+\cos y)^2}=-\frac{\sin y\cdot y'}{(1+\cos y)^2}.$$

将上面求得的 y' 代入，有

$$y''=-\frac{\sin y\cdot\left(-\frac{1}{1+\cos y}\right)}{(1+\cos y)^2}=\frac{\sin y}{(1+\cos y)^3}.$$

当$x=-1$时，代入方程$x+y+\sin y+1=0$，得$y+\sin y=0$，根据三角函数图像的规律可知，该方程有唯一解 y=0。代入 y=0.可求得$f''(-1)$=0.

4. 12/5
 复合函数求导

5. 3

令$x^2-3x+2=0$，解得$x=1$ 或 $x=2$. 同时，$\lim\limits_{x\to\infty}\frac{y}{x}=1,\lim\limits_{x\to\infty}y-x=1$.故存在 3 条渐近线.

6. 1

解 $\lim\limits_{x\to0}\frac{f(x_0-2x)-f(x_0-x)}{x}$

$=\lim\limits_{x\to0}\frac{[f(x_0-2x)-f(x_0)]-[f(x_0-x)-f(x_0)]}{x}$

$=-2f'(x_0)+f'(x_0)=1$

二、

1.

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^{\sin x}-e^{x\cos x}}{x-\sin x}=\lim_{x\to 0}\frac{e^{\xi}(\sin x-x\cos x)}{x-\sin x}\ (其中\xi介于\sin x和x\cos x之间)$$

由于 $\sin x\to 0$, $x\cos x\to 0$. 故 $\xi\to 0$

$$原式=\lim_{x\to 0}\frac{\sin x-x\cos x}{x-\sin x}=\lim_{x\to 0}\frac{x-\frac{1}{6}x^3+o(x^3)-x\left[1-\frac{1}{2}x^2+o(x^2)\right]}{x-\left[x-\frac{1}{6}x^3+o(x^3)\right]}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{x-\frac{1}{6}x^3-x+\frac{1}{2}x^3+o(x^3)}{x-x+\frac{1}{6}x^3+o(x^3)}=\frac{\frac{1}{2}-\frac{1}{6}}{\frac{1}{6}}=2$$

2.

因为$\dfrac{n}{\sqrt{n^2+n}}\le\dfrac{1}{\sqrt{n^2+1}}+\dfrac{1}{\sqrt{n^2+2}}+\cdots+\dfrac{1}{\sqrt{n^2+n}}\le\dfrac{n}{\sqrt{n^2+1}}$

又$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n}{\sqrt{n^2+n}}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n}{\sqrt{n^2+1}}=1$，故原式 $=1$.

3. $\lim\limits_{x\to-\infty}x\left(\sqrt{x^2+1}+x\right)=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{x}{\sqrt{x^2+1}-x}=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{-1}{\sqrt{1+\dfrac{1}{x^2}}+1}=-\dfrac{1}{2}$

4.

$$\lim_{x\to 0^-}\frac{3-2e^{\frac{1}{x}}}{3+2e^{\frac{1}{x}}}\cdot\frac{\sin\pi x}{|x|}=\lim_{x\to 0^-}\frac{3-2e^{\frac{1}{x}}}{3+2e^{\frac{1}{x}}}\cdot\frac{\sin\pi x}{\pi x}\cdot(-\pi)=\frac{3-0}{3+0}\cdot(-\pi)=-\pi$$

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{3-2e^{\frac{1}{x}}}{3+2e^{\frac{1}{x}}}\cdot\frac{\sin\pi x}{|x|}=\lim_{x\to 0^-}\frac{3-2e^{\frac{1}{x}}}{3+2e^{\frac{1}{x}}}\cdot\frac{\sin\pi x}{\pi x}\cdot\pi=\frac{0-2}{0+2}\cdot\pi=-\pi$$

故原式 $=-\pi$.

5.

$$\lim_{x\to 0}\frac{x^2\sin\frac{1}{x}+(1+x)^{\frac{1}{x}}-e}{\sin(\sin(\tan x))}=\lim_{x\to 0}\frac{x^2\sin\frac{1}{x}+(1+x)^{\frac{1}{x}}-e}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{x^2\sin\frac{1}{x}}{x}+\lim_{x\to 0}\frac{(1+x)^{\frac{1}{x}}-e}{x}$$

其中 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{x^2\sin\frac{1}{x}}{x}=\lim\limits_{x\to 0}x\sin\frac{1}{x}=0$

$$\lim_{x\to 0}\frac{(1+x)^{\frac{1}{x}}-e}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{e^{\frac{\ln(1+x)}{x}}-e}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{e\left[e^{\frac{\ln(1+x)}{x}-1}-1\right]}{x}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{e\cdot\left[\frac{\ln(1+x)}{x}-1\right]}{x}=\lim_{x\to 0}e\cdot\frac{\ln(1+x)-x}{x^2}=\lim_{x\to 0}e\cdot\frac{x-\frac{1}{2}x^2+o(x^2)-x}{x^2}=-\frac{e}{2}$$

原式 $=0-\frac{e}{2}=-\frac{e}{2}$

6.

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{2^x+3^x}{2}\right)^{\frac{1}{e^{\sin x}-1}}=\lim_{x\to 0}e^{\frac{\ln\left(\frac{2^x+3^x}{2}\right)}{e^{\sin x}-1}}$$

$$=\lim_{x\to 0}e^{\frac{\ln\left(\frac{2^x+3^x-2}{2}+1\right)}{\sin x}}=\lim_{x\to 0}e^{\frac{\frac{2^x+3^x-2}{2}}{x}}=\lim_{x\to 0}e^{\frac{2^x+3^x-2}{2x}}$$

$$\cancel{=\lim_{x\to 0}e^{\frac{x\ln 2+\cdots}{2}}}=\lim_{x\to 0}e^{\frac{2^x-1+3^x-1}{2x}}=\lim_{x\to 0}e^{\frac{\ln 2+\ln 3}{2}}=\sqrt{6}$$

三、

4.（1）$\lim\limits_{x\to 0}f(x)=\lim\limits_{x\to 0}x^2\sin\frac{1}{x}=0=f(0)$， $f(x)$ 在 $x=0$ 处连续；

（2）$\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x}=\lim\limits_{x\to 0}x\sin\frac{1}{x}=0, f'(0)=0$， $f(x)$ 在 $x=0$ 处可导；

（3）$x\neq 0$ 时， $f'(x)=2x\sin\frac{1}{x}-\cos\frac{1}{x}$， $\lim\limits_{x\to 0}f'(x)=\lim\limits_{x\to 0}\left(2x\sin\frac{1}{x}-\cos\frac{1}{x}\right)$ 不存在，因而 $f'(x)$ 在 $x=0$ 处不连续．

四、

由 $x_{n+1}-1=-(1-x_n)^2\leqslant 0$，可知该数列有上界 1.

由 $x_{n+1}=x_n(2-x_n)$ 用数学归纳法易证 $x_n>0$. 再由 $x_{n+1}-x_n=x_n(1-x_n)\geqslant 0$ 可知该数列单调增加. 由单调有界原理知 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n$ 存在，设其为 a，在递推公式两端取极限得到 $a=2a-a^2$，解此方程得到 $a=1$.

五、

27. 答 $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{\sin t}{1-\cos t}$，$\dfrac{d^2y}{dx^2}=\dfrac{1}{a(1-\cos t)^2}$，$\dfrac{d^3y}{dx^3}=\dfrac{-2\sin t}{a^2(1-\cos t)^4}$.

由参数方程可以得到 $\begin{cases}\dfrac{dx}{dt}=a(1-\cos t),\\ \dfrac{dy}{dt}=a\sin t,\end{cases}$ 利用参数方程导数的计算公式得到

$$\frac{dy}{dx}=\frac{dy}{dt}\Big/\frac{dx}{dt}=\frac{\sin t}{1-\cos t}.$$

用同样的方法可以得到 y 对 x 的二阶、三阶导数如下：

$$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dx}\right)=\frac{d}{dt}\left(\frac{dy}{dx}\right)\Big/\frac{dx}{dt}=\frac{1}{a(1-\cos t)^2}$$

及

$$\frac{d^3y}{dx^3}=\frac{d}{dx}\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)=\frac{d}{dt}\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)\Big/\frac{dx}{dt}=\frac{-2\sin t}{a^2(1-\cos t)^4}.$$

六、

十五、解：令 $F(x)=e^{g(x)}f(x)$，由已知条件，$F(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，在 (a,b) 内可导，且

$$F(a)=e^{g(a)}f(a)=0,\quad F(b)=e^{g(b)}f(b)=0.$$

由洛尔定理知至少存在一点 $\xi\in(a,b)$，使得 $F'(\xi)=0$. 而

$$F'(x)=e^{g(x)}\cdot g'(x)\cdot f(x)+e^{g(x)}\cdot f(x),$$

由 $F(\xi)=0$ 知 $\quad e^{g(\xi)}\cdot g'(\xi)\cdot f(\xi)+e^{g(\xi)}\cdot f'(\xi)=0,$

即 $\quad f'(\xi)+f(\xi)g'(\xi)=0.$