第七节 傅里叶级数

一、三角级数及三角函数系的正交性

二、周期为2π的函数的傅里叶展开式

三、正弦级数和余弦级数

四、周期为$2l$的函数的傅里叶展开式

一、三角级数及三角函数系的正交性

简单的周期运动：$y = A\sin(\omega t + \varphi)$ (谐波函数)

(A为振幅, ω为角频率, φ为初相)

复杂的周期运动：$y = A_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \underbrace{A_n \sin(n\omega t + \varphi_n)}_{}$

(谐波迭加)

$$\underline{A_n \sin\varphi_n} \cos n\underline{\omega t} + \underline{A_n \cos\varphi_n} \sin n\underline{\omega t}$$

令 $\dfrac{a_0}{2} = A_0,\ a_n = A_n \sin\varphi_n,\ b_n = A_n \cos\varphi_n,\ \omega t = x$

得函数项级数 $$\frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty}(a_n \cos nx + b_n \sin nx)$$

称上述形式的级数为三角级数.

定理 1. 组成三角级数的函数系

$$1,\ \cos x,\ \sin x,\ \cos 2x,\ \sin 2x,\ \cdots,\ \cos nx,\ \sin nx,\ \cdots$$

在 $[-\pi, \pi]$ 上正交，即其中任意两个不同的函数之积在 $[-\pi, \pi]$ 上的积分等于 **0** .

证: $\int_{-\pi}^{\pi} 1 \cdot \cos nx \,\mathrm{d}x = \int_{-\pi}^{\pi} 1 \cdot \sin nx \,\mathrm{d}x = 0 \qquad (n = 1, 2, \cdots)$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos kx \cos nx \,\mathrm{d}x$$

$$\cos kx \cos nx = \frac{1}{2}\left[\cos(k+n)x + \cos(k-n)x\right]$$

$$= \frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi}\left[\cos(k+n)x + \cos(k-n)x\right]\mathrm{d}x = 0 \quad (k \neq n)$$

同理可证： $\int_{-\pi}^{\pi} \sin kx \sin nx \,\mathbf{d}x = 0 \quad (k \neq n)$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos kx \sin nx \,\mathbf{d}x = 0$$

但是在三角函数系中两个相同的函数的乘积在$[-\pi, \pi]$上的积分不等于 **0**．且有

$$\int_{-\pi}^{\pi} 1 \cdot 1 \, \mathrm{d}x = 2\pi$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos^2 nx \, \mathrm{d}x = \pi \qquad (n = 1, 2, \cdots)$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \sin^2 nx \, \mathrm{d}x = \pi$$

$$\boxed{\cos^2 nx = \frac{1+\cos 2nx}{2}, \quad \sin^2 nx = \frac{1-\cos 2nx}{2}}$$

二、周期为 2π 的函数的傅里叶展开式

定理 2 . 设 $f(x)$ 是周期为 2π 的周期函数, 且

$$f(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx+b_n\sin nx) \qquad ①$$

右端级数可逐项积分, 则有

$$\begin{cases} a_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\cos nx\,\mathrm{d}x & (n=0,1,\cdots) \\ b_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\sin nx\,\mathrm{d}x & (n=1,2,\cdots) \end{cases} \qquad ②$$

证: 由定理条件, 对①在 $[-\pi,\pi]$ 逐项积分, 得

$$\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\,\mathrm{d}x=\frac{a_0}{2}\int_{-\pi}^{\pi}\mathrm{d}x+\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\int_{-\pi}^{\pi}\cos nx\,\mathrm{d}x+b_n\int_{-\pi}^{\pi}\sin nx\,\mathrm{d}x\right)$$

$$=a_0\pi$$

$$\therefore \quad a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,\mathrm{d}\,x$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos kx\,\mathrm{d}x = \frac{a_0}{2}\int_{-\pi}^{\pi}\cos kx\,\mathrm{d}x +$$

$$+\sum_{n=1}^{\infty}\left[a_n\int_{-\pi}^{\pi}\cos kx\cos nx\,\mathrm{d}x + b_n\int_{-\pi}^{\pi}\cos kx\sin nx\,\mathrm{d}x\right]$$

$$= a_k\int_{-\pi}^{\pi}\cos^2 kx\,\mathrm{d}x = a_k\,\pi$$ (利用正交性)

$$\therefore \quad a_k = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos kx\,\mathrm{d}x \quad (k = 1, 2, \cdots)$$

类似地, 用 **sin *k x*** 乘 ① 式两边, 再逐项积分可得

$$b_k = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin kx\,\mathrm{d}x \quad (k = 1, 2, \cdots)$$

$$f(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx+b_n\sin nx) \qquad ①$$

$$\begin{cases} a_n=\dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\cos nx\,\mathrm{d}x \quad (n=0,1,\cdots) \\ b_n=\dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\sin nx\,\mathrm{d}x \quad (n=1,2,\cdots) \end{cases} \qquad ②$$

由公式 ② 确定的 a_n , b_n称为函数$f(x)$的傅里叶系数；以$f(x)$的傅里叶系数为系数的三角级数

① 称为$f(x)$ 的傅里叶级数 .

定理3 (收敛定理, 展开定理) 设 $f(x)$ 是周期为2π 的周期函数, 并满足狄利克雷(Dirichlet)条件:

1) 在一个周期内连续或只有有限个第一类间断点;

2) 在一个周期内只有有限个极值点,

则 $f(x)$ 的傅里叶级数收敛 , 且有

$$\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx+b_n\sin nx)$$

$$=\begin{cases} f(x), & x \text{ 为连续点} \\ \dfrac{f(x^+)+f(x^-)}{2}, & x \text{ 为间断点} \end{cases}$$

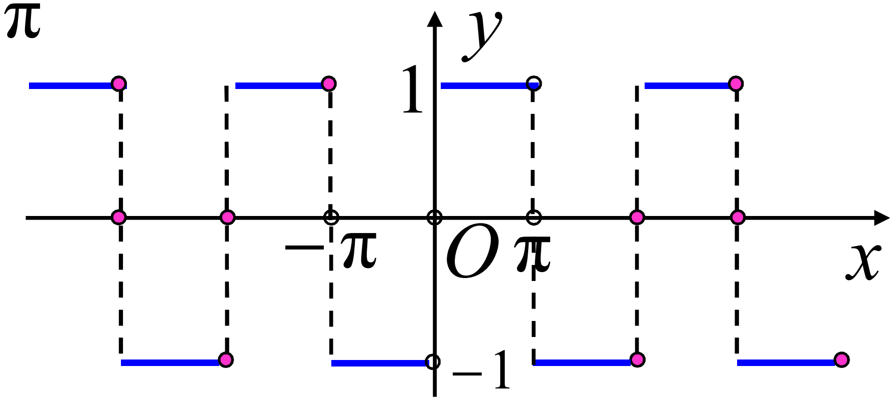
其中 a_n, b_n 为 $f(x)$ 的傅里叶系数 . (证明略)

注意: 函数展成傅里叶级数的条件比展成幂级数的条件低得多.

例1. 设 $f(x)$ 是周期为 2π 的周期函数，它在 $[-\pi,\pi)$ 上的表达式为

$$f(x)=\begin{cases}-1, & -\pi\le x<0\\ 1, & 0\le x<\pi\end{cases}$$

将 $f(x)$ 展成傅里叶级数.



解：先求傅里叶系数

$$a_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\cos nx\,\mathrm{d}x$$

$$=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{0}(-1)\cos nx\,\mathrm{d}x+\frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi}1\cdot\cos nx\,\mathrm{d}x$$

$$=0\qquad(n=0,1,2,\cdots)$$

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin nx\,\mathrm{d}\,x$$

$$= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{0}(-1)\sin nx\,\mathrm{d}\,x + \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi} 1\cdot\sin nx\mathrm{d}x$$

$$= \frac{1}{\pi}\left[\ \frac{\cos nx}{n}\ \right]_{-\pi}^{0} + \frac{1}{\pi}\left[\ -\frac{\cos nx}{n}\ \right]_{0}^{\pi} = \frac{2}{n\pi}\left[1-\cos n\pi\right]$$

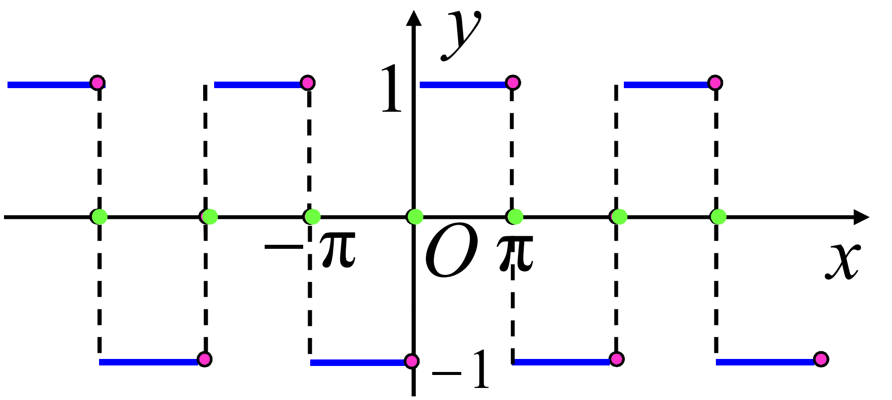
$$= \frac{2}{n\pi}\left[\ 1-(-1)^n\ \right] = \begin{cases} \dfrac{4}{n\pi}, & 当 n = 1, 3, 5, \cdots \\ 0, & 当 n = 2, 4, 6, \cdots \end{cases}$$

$$\therefore\ f(x) = \frac{4}{\pi}\left[\ \sin x + \frac{1}{3}\sin 3x + \cdots + \frac{1}{2k-1}\sin(2k-1)x + \cdots\ \right]$$

$$(-\infty < x < +\infty,\ x \neq 0, \pm\pi, \pm 2\pi, \cdots)$$

$$f(x)=\frac{4}{\pi}\left[\ \underline{\sin x+\frac{\sin 3x}{3}+\frac{\sin 5x}{5}+\frac{\sin 7x}{7}+\frac{\sin 9x}{9}}+\cdots\right]$$

$$(-\infty<x<+\infty\,,\ x\neq 0\,,\pm\pi\,,\pm 2\pi\,,\cdots)$$



说明:

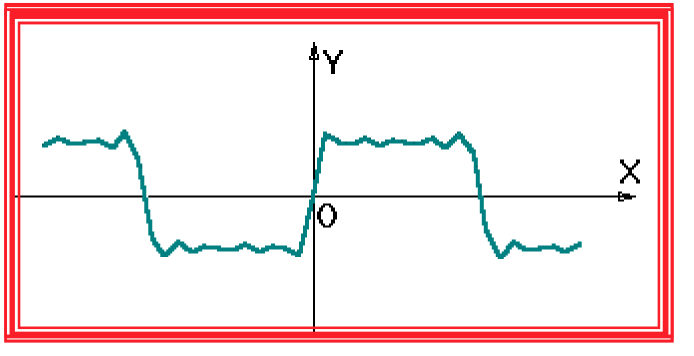
1) 根据收敛定理可知,

当$x=k\pi\ \ (k=0,\pm1,\pm2,\cdots)$

时, 级数收敛于 $\dfrac{-1+1}{2}=0$

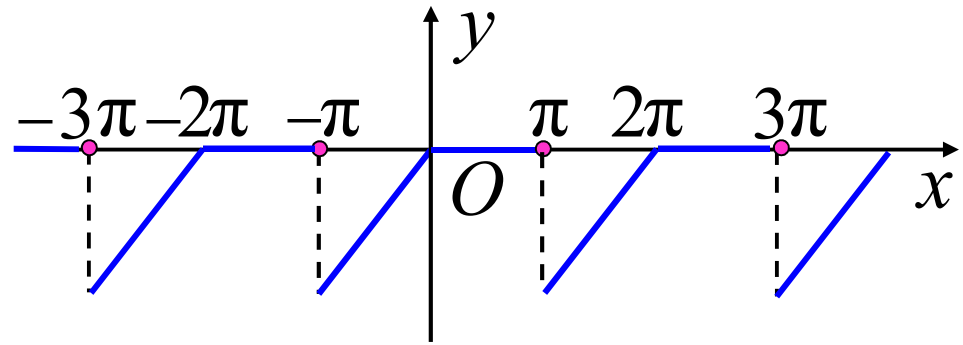
2) 傅氏级数的部分和逼近

$f(x)$ 的情况见右图.



例2. 设 $f(x)$ 是周期为 2π 的周期函数, 它在 $[-\pi, \pi)$ 上的表达式为

$$f(x)=\begin{cases} x, & -\pi \le x < 0 \\ 0, & 0 \le x < \pi \end{cases}$$



将 $f(x)$ 展成傅里叶级数.

解: $$a_0=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,\mathrm{d}x=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{0} x\,\mathrm{d}x=\frac{1}{\pi}\left[\frac{x^2}{2}\right]_{-\pi}^{0}=-\frac{\pi}{2}$$

$$a_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nx\mathrm{d}x=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{0} x\cos nx\,\mathrm{d}x$$

$$=\frac{1}{\pi}\left[\frac{x\sin nx}{n}+\frac{\cos nx}{n^2}\right]_{-\pi}^{0}=\frac{1-\cos n\pi}{n^2\pi}$$

$$a_n=\frac{1-\cos n\pi}{n^2\pi}=\begin{cases}\dfrac{2}{(2k-1)^2\pi}, & n=2k-1\\ 0, & n=2k\end{cases}\quad (k=1,2,\cdots)$$

$$b_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\sin nx\,\mathrm{d}x=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{0}x\sin nx\mathrm{d}x=\frac{(-1)^{n+1}}{n}$$

$$(n=1,2,\cdots)$$

$$f(x)=\frac{-\pi}{4}+(\frac{2}{\pi}\cos x+\sin x)-\frac{1}{2}\sin 2x+$$

$$+(\frac{2}{3^2\pi}\cos 3x+\frac{1}{3}\sin 3x)-\frac{1}{4}\sin 4x+$$

$$+(\frac{2}{5^2\pi}\cos 5x+\frac{1}{5}\sin 5x)-\cdots$$

$$(-\infty<x<+\infty,\ x\neq(2k-1)\pi,\ k=0,\pm1,\pm2,\cdots)$$

说明: 当 $x=(2k-1)\pi$ 时, 级数收敛于 $\dfrac{0+(-\pi)}{2}=-\dfrac{\pi}{2}$

定义在$[-\pi,\pi]$上的函数$f(x)$的傅氏级数展开法

$$f(x),\quad x\in[-\pi,\pi]$$

周期延拓

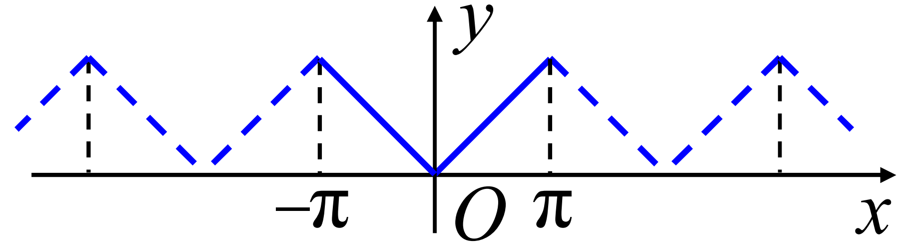
$$F(x)=\begin{cases} f(x), & x\in[-\pi,\pi) \\ f(x-2k\pi), & \text{其它} \end{cases}$$

傅里叶展开

$f(x)$ 在 $[-\pi,\pi]$ 上的傅里叶级数

例3. 将函数 $f(x)=\begin{cases} -x, & -\pi \le x < 0 \\ x, & 0 \le x \le \pi \end{cases}$ 展成傅里叶级数.

解: 将 $f(x)$ 延拓成以 2π 为周期的函数 $F(x)$, 则



$$a_0=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}F(x)\,\mathrm{d}x=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\,\mathrm{d}x=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}x\,\mathrm{d}x$$

$$=\frac{2}{\pi}\left[\frac{x^2}{2}\right]_0^{\pi}=\pi$$

$$a_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}F(x)\cos nx\,\mathrm{d}x=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\cos nx\,\mathrm{d}x$$

$$=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}x\cos nx\,\mathrm{d}x=\frac{2}{\pi}\left[\frac{x\sin nx}{n}+\frac{\cos nx}{n^2}\right]_0^{\pi}$$

$$a_n=\frac{2}{n^2\pi}(\cos n\pi-1)=\begin{cases}-\dfrac{4}{(2k-1)^2\pi}, & n=2k-1\\ 0\quad, & n=2k\end{cases}$$

$$(k=1,2,\cdots)$$

$$b_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}F(x)\sin nx\,\mathrm{d}x=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\sin nx\,\mathrm{d}x=0$$

$$\therefore f(x)=\frac{\pi}{2}-\frac{4}{\pi}\left(\cos x+\frac{1}{3^2}\cos 3x+\frac{1}{5^2}\cos 5x+\cdots\right)$$

$$(-\pi\le x\le\pi)$$

说明: 利用此展式可求出几个特殊的级数的和.

如：当 $x=0$ 时, $f(0)=0$, 得

$$\frac{\pi^2}{8}=1+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{5^2}+\cdots+\frac{1}{(2n-1)^2}+\cdots$$

三、正弦级数和余弦级数

1. 周期为2π 的奇、偶函数的傅里叶级数

定理4．对周期为 2π 的奇函数 $f(x)$，其傅里叶级数为正弦级数,它的傅里叶系数为

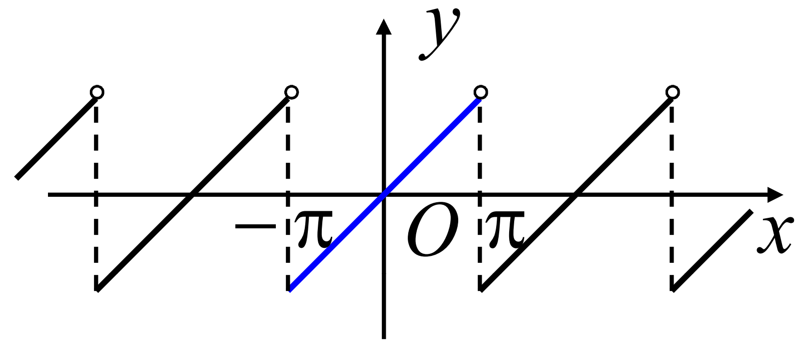
$$\begin{cases} a_n = 0 & (n = 0, 1, 2, \cdots) \\ b_n = \dfrac{2}{\pi}\displaystyle\int_0^{\pi} f(x)\sin nx\,\mathrm{d}x & (n = 1, 2, 3, \cdots) \end{cases}$$

周期为2π的偶函数 $f(x)$，其傅里叶级数为余弦级数，它的傅里叶系数为

$$\begin{cases} a_n = \dfrac{2}{\pi}\displaystyle\int_0^{\pi} f(x)\cos nx\,\mathrm{d}x & (n = 0, 1, 2, \cdots) \\ b_n = 0 & (n = 1, 2, 3, \cdots) \end{cases}$$

例4. 设 $f(x)$ 是周期为2π 的周期函数,它在$[-\pi,\pi)$上的表达式为$f(x)=x$,将 $f(x)$ 展成傅里叶级数.

解: 若不计 $x=(2k+1)\pi \ (k=0,\pm1,\pm2,\cdots)$, 则$f(x)$是周期为 2π 的奇函数, 因此



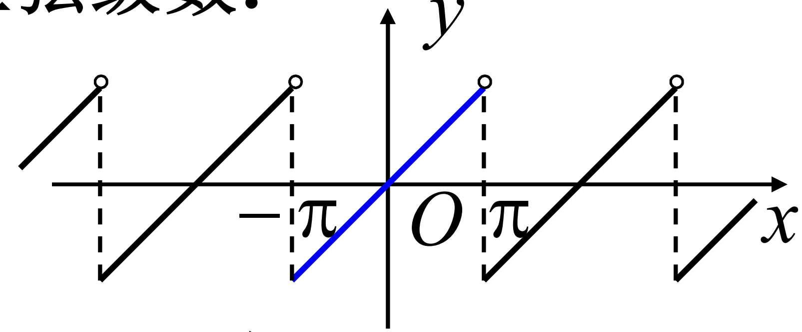
$$a_n=0 \quad (n=0,1,2,\cdots)$$

$$b_n=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\sin nx\,\mathrm{d}x$$

$$=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} x\sin nx\,\mathrm{d}x=\frac{2}{\pi}\left[-\frac{x\cos nx}{n}+\frac{\sin nx}{n^2}\right]\Bigg|_0^{\pi}$$

$$=-\frac{2}{n}\cos n\pi=\frac{2}{n}(-1)^{n+1} \quad (n=1,2,3,\cdots)$$

根据收敛定理可得 $f(x)$ 的正弦级数:

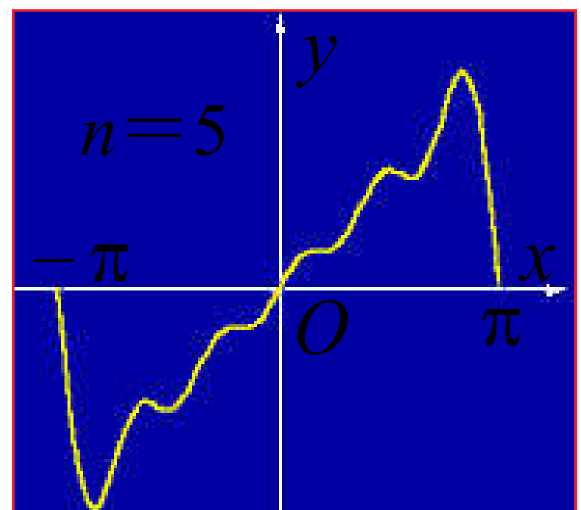


$$f(x)=2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n}\sin nx$$

$$=2(\sin x-\frac{1}{2}\sin 2x+\frac{1}{3}\sin 3x-\cdots)$$

$$(-\infty<x<+\infty\,,\ x\neq(2k+1)\pi\,,k=0,\pm1\,,\cdots)$$

思考: 在点 $x=(2k+1)\pi$ 处, 级数的和为何值？为0.

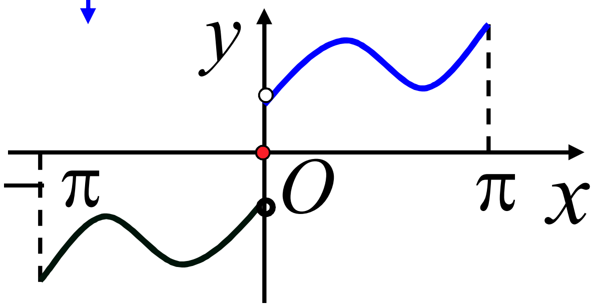


在 $[-\pi,\pi)$上级数的部分和逼近 $f(x)$ 的情况见右图.

2. 定义在[0,π]上的函数展成正弦级数与余弦级数

$f(x),\ x\in[0,\pi]$

奇延拓

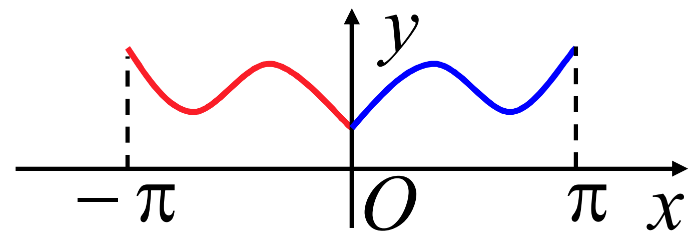


$$F(x)=\begin{cases} f(x), & x\in(0,\pi] \\ 0, & x=0 \\ -f(-x), & x\in(-\pi,0) \end{cases}$$

周期延拓 $F(x)$

$f(x)$ 在 $[0,\pi]$ 上展成正弦级数

偶延拓



$$F(x)=\begin{cases} f(x), & x\in[0,\pi] \\ f(-x), & x\in(-\pi,0) \end{cases}$$

周期延拓 $F(x)$

$f(x)$ 在 $[0,\pi]$上展成余弦级数

例**5.** 将函数 $f(x)=x+1\ (0\le x\le\pi)$ 展成正弦级数.

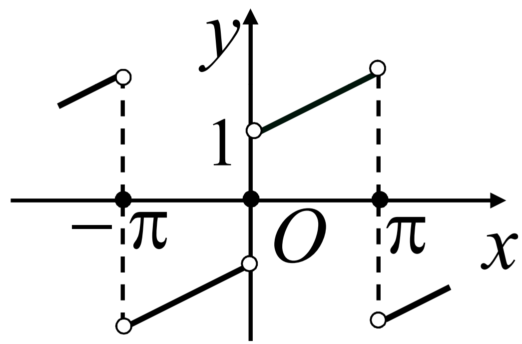
解: 先求正弦级数. 去掉端点, 将 $f(x)$ 作奇周期延拓,

$$b_n=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}f(x)\sin nx\,\mathrm{d}x=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}(x+1)\sin nx\,\mathrm{d}x$$

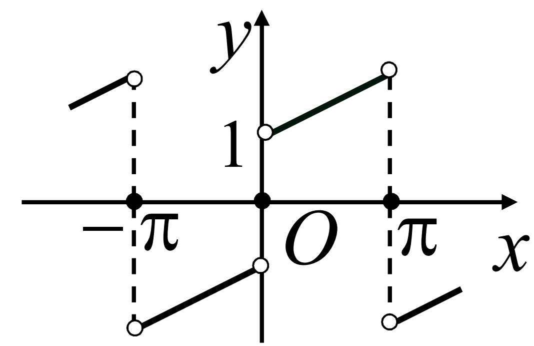
$$=\frac{2}{\pi}\left[-\frac{x\cos nx}{n}+\frac{\sin nx}{n^2}-\frac{\cos nx}{n}\right]\Bigg|_0^{\pi}$$

$$=\frac{2}{n\pi}(1-\pi\cos n\pi-\cos n\pi)$$

$$=\begin{cases}\dfrac{2}{\pi}\cdot\dfrac{\pi+2}{2k-1}, & n=2k-1\\[2ex] -\dfrac{1}{k}, & n=2k\end{cases}\qquad (k=1,2,\cdots)$$



$$b_n = \begin{cases} \dfrac{2}{\pi}\cdot\dfrac{\pi+2}{2k-1}, & n=2k-1 \\ -\dfrac{1}{k}, & n=2k \end{cases} \qquad (k=1,2,\cdots)$$



因此得

$$x+1=\frac{2}{\pi}\left[(\pi+2)\sin x-\frac{\pi}{2}\sin 2x\right.$$
$$\left.+\frac{\pi+2}{3}\sin 3x-\frac{\pi}{4}\sin 4x+\cdots\right] \quad (0<x<\pi)$$

思考: 在端点 $x=0,\pi$ 处，级数的和为何值？

说明: 根据收敛定理可知，级数收敛于0，与 $f(x)=x+1$ 的值不同 .

四、周期为2 l 的周期函数的傅里叶级数

周期为 $2l$ 的函数 $f(x)$

$\Big\Downarrow$ 变量代换 $z=\dfrac{\pi x}{l}$

周期为 2π 的函数 $F(z)$

$\Big\Downarrow$ 将$F(z)$ 作傅氏展开

$f(x)$ 的傅氏展开式

定理5. 设周期为$2l$的周期函数$f(x)$满足收敛定理条件,则它的傅里叶级数展开式为

$$f(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\cos\frac{n\pi x}{l}+b_n\sin\frac{n\pi x}{l}\right)$$

(在$f(x)$的连续点处)

其中

$$\begin{cases} a_n=\dfrac{1}{l}\displaystyle\int_{-l}^{l}f(x)\cos\frac{n\pi x}{l}\,\mathrm{d}x & (n=0,1,2,\cdots) \\ b_n=\dfrac{1}{l}\displaystyle\int_{-l}^{l}f(x)\sin\frac{n\pi x}{l}\,\mathrm{d}x & (n=1,2,\cdots) \end{cases}$$

证明: 令 $z=\dfrac{\pi x}{l}$, 则 $x\in[-l,l]$ 变成 $z\in[-\pi,\pi]$,

令 $F(z)=f(x)=f(\dfrac{lz}{\pi})$, 则

$$F(z+2\pi)=f(\frac{l(z+2\pi)}{\pi})=f(\frac{lz}{\pi}+2l)$$

$$=f(\frac{lz}{\pi})=F(z)$$

所以$F(z)$是以2π为周期的周期函数, 且它满足收敛定理条件, 将它展成傅里叶级数:

$$F(z)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nz+b_n\sin nz)$$

(在 $F(z)$ 的连续点处)

其中 $\begin{cases} a_n = \dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} F(z)\cos nz \,\mathrm{d}z & (n=0,1,2,\cdots) \\ b_n = \dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} F(z)\sin nz \,\mathrm{d}z & (n=1,2,3,\cdots) \end{cases}$

令 $z = \dfrac{\pi x}{l}$

$$\begin{cases} a_n = \dfrac{1}{l}\displaystyle\int_{-l}^{l} f(x)\cos\dfrac{n\pi x}{l}\,\mathrm{d}x & (n=0,1,2,\cdots) \\ b_n = \dfrac{1}{l}\displaystyle\int_{-l}^{l} f(x)\sin\dfrac{n\pi x}{l}\,\mathrm{d}x & (n=1,2,3,\cdots) \end{cases}$$

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\cos\frac{n\pi x}{l} + b_n\sin\frac{n\pi x}{l} \right)$$

(在 $f(x)$ 的 连续点处)　　证毕

说明: 如果 $f(x)$ 为奇函数, 则有

$$f(x)=\sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin\frac{n\pi x}{l} \quad (\text{在 } f(x) \text{ 的连续点处})$$

其中 $b_n=\frac{2}{l}\int_0^l f(x)\sin\frac{n\pi x}{l}\,\mathrm{d}x \quad (n=1,2,\cdots)$

如果 $f(x)$ 为偶函数, 则有

$$f(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos\frac{n\pi x}{l} \quad (\text{在 } f(x) \text{ 的连续点处})$$

其中 $a_n=\frac{2}{l}\int_0^l f(x)\cos\frac{n\pi x}{l}\,\mathrm{d}x \quad (n=0,1,2,\cdots)$

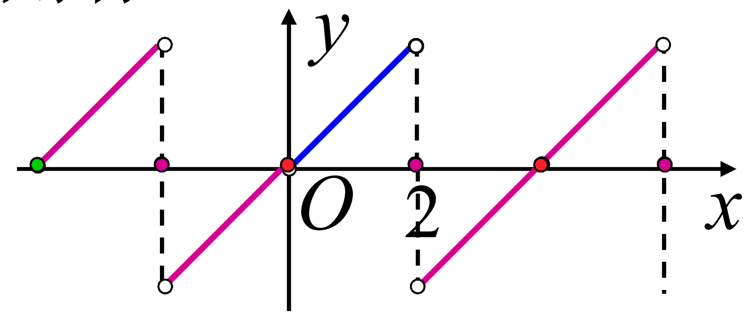
注: 无论哪种情况 , 在 $f(x)$ 的间断点 x 处, 傅里叶级数都收敛于 $\frac{1}{2}[f(x^-)+f(x^+)]$.

例6. 把 $f(x)=x\ \ (0<x<2)$ 展开成

(1) 正弦级数; (2) 余弦级数.

在 $x=2k$ 处级数收敛于何值?

解: (1) 将 $f(x)$ 作奇周期延拓, 则有



$$a_n=0\quad (n=0,1,2,\cdots)$$

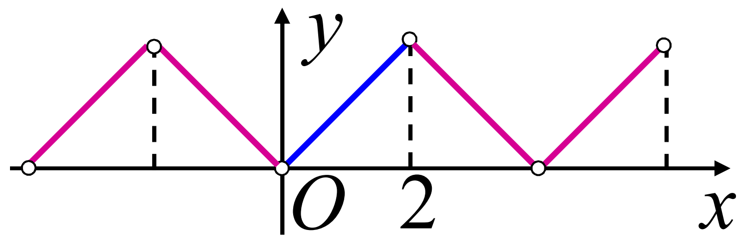
$$b_n=\frac{2}{2}\int_0^2 x\cdot\sin\frac{n\pi x}{2}\,\mathrm{d}x$$

$$=\left[-\frac{2}{n\pi}x\cos\frac{n\pi x}{2}+\left(\frac{2}{n\pi}\right)^2\sin\frac{n\pi x}{2}\right]_0^2$$

$$=-\frac{4}{n\pi}\cos n\pi=\frac{4}{n\pi}(-1)^{n+1}\quad (n=1,2,\cdots)$$

$$\therefore\ f(x)=\frac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n}\sin\frac{n\pi x}{2}\qquad (0<x<2)$$

(2) 将$f(x)$作偶周期延拓, 则有



$$a_0=\frac{2}{2}\int_0^2 x\,\mathrm{d}x=2$$

$$b_n=0\quad(n=1,2,\cdots)$$

$$a_n=\frac{2}{2}\int_0^2 x\cdot\cos\frac{n\pi x}{2}\,\mathrm{d}x$$

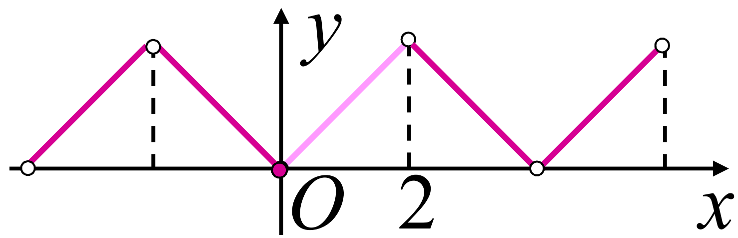
$$=\left[\frac{2}{n\pi}x\sin\frac{n\pi x}{2}+\left(\frac{2}{n\pi}\right)^2\cos\frac{n\pi x}{2}\right]_0^2$$

$$=-\frac{4}{n^2\pi^2}\left[(-1)^n-1\right]=\begin{cases}0, & n=2k\\ \dfrac{-8}{(2k-1)^2\pi^2}, & n=2k-1\end{cases}\quad(k=1,2,\cdots)$$

$$\therefore\ f(x)=x=1-\frac{8}{\pi^2}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{(2k-1)^2}\cos\frac{(2k-1)\pi x}{2}\quad(0<x<2)$$

$$f(x)=x=1-\frac{8}{\pi^2}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{(2k-1)^2}\cos\frac{(2k-1)\pi x}{2}\quad(0<x<2)$$

说明: 此式对 $x=0$ 也成立,



据此有 $$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{(2k-1)^2}=\frac{\pi^2}{8}$$

由此还可导出

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{(2k-1)^2}+\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{(2k)^2}=\frac{\pi^2}{8}+\frac{1}{4}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$$

$$\therefore\quad\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}=\frac{\pi^2}{6}$$

当函数定义在任意有限区间上时,其展开方法为:

方法1　$f(x)$, $x\in[a,b]$

$$a \qquad \frac{a+b}{2} \qquad b \qquad x$$

令 $x=z+\dfrac{b+a}{2}$, 即 $z=x-\dfrac{b+a}{2}$

$$F(z)=f(x)=f(z+\frac{b+a}{2}),\quad z\in[-\frac{b-a}{2},\frac{b-a}{2}]$$

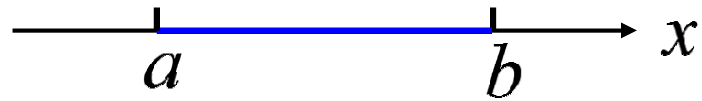
周期延拓

$F(z)$在$[-\dfrac{b-a}{2},\dfrac{b-a}{2}]$上展成傅里叶级数

将 $z=x-\dfrac{b+a}{2}$ 代入展开式

$f(x)$ 在 $[a,b]$ 上的傅里叶级数

方法2 $f(x)$，$x\in[a,b]$



$\Big\downarrow$ 令 $x=z+a$，即 $z=x-a$

$$F(z)=f(x)=f(z+a),\quad z\in[0,b-a]$$

$\Big\downarrow$ 奇或偶式周期延拓

$F(z)$ 在 $[0,b-a]$ 上展成正弦或余弦级数

$\Big\downarrow$ 将 $z=x-a$ 代入展开式

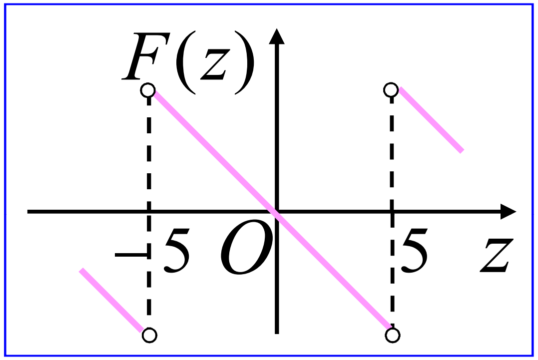
$f(x)$ 在 $[a,b]$ 上的正弦或余弦级数

例7. 将函数 $f(x)=10-x\ (5<x<15)$ 展成傅里叶级数.

解: 令 $z=x-10$, 设

$$F(z)=f(x)=f(z+10)=-z \qquad (-5<z<5)$$

将 $F(z)$ 延拓成周期为 10 的周期函数,则它满足收敛定理条件. 由于 $F(z)$ 是奇函数, 故



$$a_n=0 \quad (n=0,1,2,\cdots)$$

$$b_n=\frac{2}{5}\int_0^5 -z\sin\frac{n\pi z}{5}\,\mathrm{d}z=(-1)^n\frac{10}{n\pi}$$

$$(n=1,2,\cdots)$$

$$F(z)=\frac{10}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n}\sin\frac{n\pi z}{5} \quad (-5<z<5)$$

$$\therefore\ 10-x=\frac{10}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n}\sin\frac{n\pi x}{5} \qquad (5<x<15)$$

内容小结

1. 周期为 2π 的函数的傅里叶级数及收敛定理

$$f(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx+b_n\sin nx)\quad (x\neq 间断点)$$

$$其中\begin{cases} a_n=\dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\cos nx\,\mathrm{d}x & (n=0,1,2,\cdots)\\ b_n=\dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\sin nx\,\mathrm{d}x & (n=1,2,\cdots)\end{cases}$$

注意: 若 x_0为间断点, 则级数收敛于 $\dfrac{f(x_0^{-})+f(x_0^{+})}{2}$

2. 周期为 2π 的奇、偶函数的傅里叶级数

- 奇函数 ——→ 正弦级数
- 偶函数 ——→ 余弦级数

3. 在 [0, π] 上函数的傅里叶展开法

- 作奇周期延拓，展开为正弦级数
- 作偶周期延拓，展开为余弦级数

4. 周期为2*l* 的函数的傅里叶级数展开公式

$$f(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\cos\frac{n\pi x}{l}+b_n\sin\frac{n\pi x}{l}\right)$$

($x\neq$间断点)

其中$\begin{cases} a_n = \dfrac{1}{l}\displaystyle\int_{-l}^{l} f(x)\cos\dfrac{n\pi x}{l}\,\mathrm{d}x & (n=0,1,\cdots) \\ b_n = \dfrac{1}{l}\displaystyle\int_{-l}^{l} f(x)\sin\dfrac{n\pi x}{l}\,\mathrm{d}x & (n=1,2,\cdots) \end{cases}$

当$f(x)$为奇(偶)函数时, 为正弦(余弦) 级数.

5. 在任意有限区间上函数的傅里叶展开法$\begin{cases}\text{变换}\\ \text{延拓}\end{cases}$

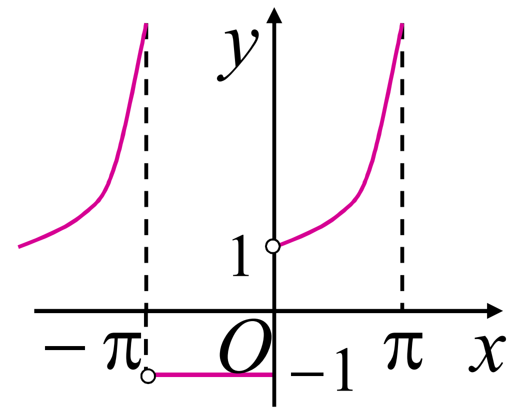
思考与练习

1. 在 $[\,0\,,\,\pi\,]$ 上的函数的傅里叶展开法唯一吗 ?

答: 不唯一 , 延拓方式不同级数就不同 .

2.设周期函数在一个周期内的表达式为

$$f(x)=\begin{cases} -1, & -\pi < x \le 0 \\ 1+x^2, & 0 < x \le \pi \end{cases}$$



则它的傅里叶级数在 $x=\pi$ 处收敛于 $\underline{\ \pi^2/2\ }$，在 $x=4\pi$ 处收敛于 $\underline{\quad 0 \quad}$.

提示:

$$\frac{f(\pi^-)+f(\pi^+)}{2}=\frac{f(\pi^-)+f(-\pi^+)}{2}=\frac{\pi^2}{2}$$

$$\frac{f(4\pi^-)+f(4\pi^+)}{2}=\frac{f(0^-)+f(0^+)}{2}=\frac{-1+1}{2}$$

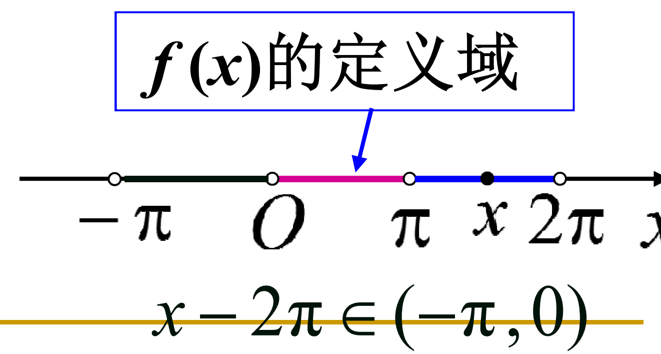
3. 设 $f(x)=\pi x-x^2,\ 0<x<\pi$, 又设 $S(x)$ 是 $f(x)$ 在 $(0,\pi)$ 内以 2π 为周期的正弦级数展开式的和函数, 求当 $x\in(\pi,2\pi)$ 时 $S(x)$ 的表达式 .

解: 由题设可知应对 $f(x)$ 作奇延拓:

$$F(x)=\begin{cases}\pi x-x^2, & 0<x<\pi\\ 0, & x=0\\ \pi x+x^2, & -\pi<x<0\end{cases}$$

在 $[-\pi,\pi)$ 上, $S(x)=F(x)$; 在 $(\pi,2\pi)$ 上, 由周期性:

$$\begin{aligned}S(x)&=S(x-2\pi)\\&=\pi(x-2\pi)+(x-2\pi)^2\\&=x^2-3\pi x+2\pi^2\end{aligned}$$



4. 设 $f(x)=\begin{cases} x, & 0\le x<1, \\ 4-x, & 1\le x\le 2. \end{cases}$

(1) 若 $s_1(x)=\dfrac{a_0}{2}+\sum\limits_{n=1}^{\infty}(a_n\cos n\pi x+b_n\sin n\pi x)$,

$-\infty<x<+\infty$，其中 $a_0=\int_0^2 f(x)\,\mathrm{d}x$，

$a_n=\int_0^2 f(x)\cos n\pi x\,\mathrm{d}x$, $b_n=\int_0^2 f(x)\sin n\pi x\,\mathrm{d}x$,

$n=1,2,\cdots$，试求 $s_1(-\dfrac{3}{2}), s_1(3)$ 及 $s_1(\dfrac{7}{2})$ 的值;

(2) $s_2(x)=\dfrac{a_0'}{2}+\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n'\cos\dfrac{n\pi x}{2}, -\infty<x<+\infty$，其中

$$a_0' = \int_0^2 f(x)\,\mathrm{d}x\,,\quad a_n' = \int_0^2 f(x)\cos\frac{n\pi x}{2}\,\mathrm{d}x, n = 1, 2, \cdots,$$

试求 $s_2(-\frac{3}{2}), s_2(3)$ 及 $s_2(\frac{7}{2})$ 的值；

解(1) $s_1(x)$ 是 $f(x)$ 以 2 为周期的 **Fourier** 级数的和函数，

因此有 $s_1(-\frac{3}{2}) = s_1(\frac{1}{2}) = f(\frac{1}{2}) = \frac{1}{2}$, $\quad s_1(3) = s_1(1)$

$$= \frac{1}{2}[f(1^-) + f(1^+)] = 2, \quad s_1(\frac{7}{2}) = s_1(\frac{3}{2}) = \frac{5}{2};$$

(2) $s_2(x)$ 是 $f(x)$ 以 4 为周期的余弦级数的和函数, 因此有

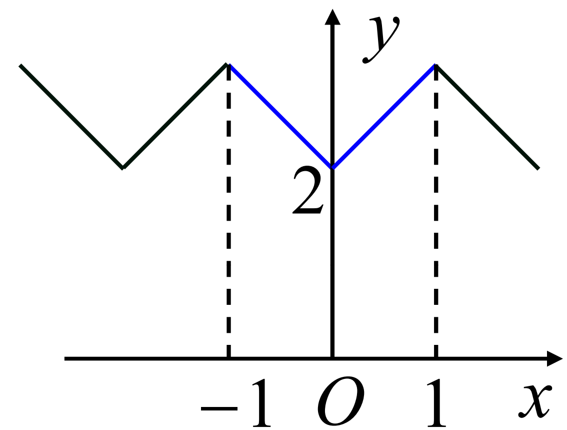
$$s_2(-\frac{3}{2}) = s_2(\frac{3}{2}) = f(\frac{3}{2}) = \frac{5}{2}, \quad s_2(\frac{7}{2}) = s_2(-\frac{1}{2}) = \frac{1}{2}$$

$$s_2(3) = s_2(-1) = s_2(1) = \frac{1}{2}[f(1^-) + f(1^+)] = 2,$$

合肥工业大学 HEFEI UNIVERSITY OF TECHNOLOGY

5. 将 $f(x)=2+|x|\ (-1\le x\le 1)$ 展开成以2为周期的傅立叶级数, 并由此求级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$ 的和.

解: $f(x)$为偶函数, $\therefore b_n=0$



$$a_0=2\int_0^1(2+x)\,\mathrm{d}x=5$$

$$a_n=2\int_0^1(2+x)\cos(n\pi x)\,\mathrm{d}x$$

$$=\frac{2}{n^2\pi^2}\left[(-1)^n-1\right]$$

因 $f(x)$ 偶延拓后在$(-\infty,+\infty)$上连续, 故得

$$2+|x|=\frac{5}{2}+\frac{4}{\pi^2}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{(2k-1)^2}\cos(2k-1)\pi x,\qquad x\in[-1,1]$$

令 $x=0$, 得

$$2=\frac{5}{2}+\frac{4}{\pi^2}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{(2k-1)^2}$$

故 $$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{(2k-1)^2}=\frac{\pi^2}{8}$$

$$\boxed{\frac{1}{4}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)^2}+\boxed{\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n)^2}}$$

$$\therefore\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}=\frac{4}{3}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)^2}=\frac{\pi^2}{6}$$