合 肥 工 业 大 学 试 卷 (A)

2019 ～ 2020 学年第___一___学期　课程代码______________________　课程名称《高等数学》　学分___6___　课程性质：必修■　考试形式：闭卷■

专业班级（教学班）__________　考试日期______________________　命题教师___高等数学课程组___　系/教研室主任审批签名______________________

一、填空题（每小题 3 分，共 15 分）

1. $\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{x-2}{x}\right)^{x}=$_____.

2. 设$y=arctan\sqrt{1+x}$，则$dy|_{x=0}=$_____.

3. 曲线$y=\frac{1}{4}x^2-\frac{1}{2}\ln x$（$1\le x\le e$）的弧长等于_____.

4. 设$y=\frac{1}{1+2x}$，则$f^{(6)}(x)=$_____.

5. 设$f''(x)$在$[0，1]$连续，$f(0)=0$，$f(1)=3$，$f'(1)=0$，则$f''(x)\,dx=$_____.

二、　选择题（每小题 3 分，共 15 分）

1. 下列函数中，在 x=0 处连续的是（　）

　（A）y=$\frac{\sin 2x}{x}$　（B）y=$\sqrt{x^2+1}$　（C）y=$\frac{1}{1-\cos x}$　（D）y=1

2. 若$f(x)$是偶函数，且$f'(0)$存在，则$f'(0)$的值是（　）

　（A）-1　（B）1　（C）　0　（D）以上都不是

3. 下列函数中，不是$\sin 2x$原函数的是（　）

　（A）$\sin^2 x$　（B）$-\cos^2 x$　（C）-cos2x　（D）$5\sin^2 x+4\cos^2 x$

4. 设$f(x)$在[a, b]上连续，则$\frac{d}{dx}\left[x\int_a^b f(x)dx\right]=$（　）

　（A）$\int_a^b f(x)dx$　（B）$bf(b)-af(a)$

　（C）$x[f(b)-f(a)]+\int_a^b f(x)dx$　（D）$xf(x)+\int_a^b f(x)dx$

5. 设$\varphi_1(x),\varphi_2(x)$是一阶线性非齐次微分方程$y'+p(x)y=q(x)$的两个线性无关的特解，则该方程的通解为（　）

　（A）C$[\varphi_1(x)+\varphi_2(x)]$　（B）C$[\varphi_1(x)-\varphi_2(x)]$

　（C）C$[\varphi_1(x)-\varphi_2(x)]+\varphi_2(x)$　（D）$[\varphi_1(x)-\varphi_2(x)]+C\varphi_2(x)$

三、计算下列各题（每小题 6 分，共 36 分）

1. 求$\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^{\sin x}-e^{x\cos x}}{x^3}$.

2. 求不定积分$\int\frac{dx}{x\sqrt{1-x^2}}$.

3. 求$\int_1^{+\infty}\frac{x}{(1+x)^3}dx$.

4. 求曲线$y=xe^{-x}$在拐点处的切线方程.

5. 设$y=\sqrt{e^{\frac{1}{x}}\sqrt{x\sqrt{sinx}}}$，求$y'$.

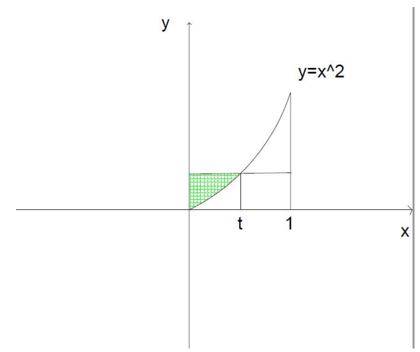
6. 求微分方程$y''-3y'+2y=2xe^{x}$.

四、（8 分）设$f(x)=\frac{(\sqrt{1+3x}-b)(x-b)}{(x-a)(x-1)}$有无穷间断点$x_1=0$，有可去间断点$x_2=1$，求常数 a，b 的值.

五、（10 分）设$f(x)=\int_0^x\frac{xt^2}{1+t^2}dt$.

(1)证明当 x>0 时，$f(x)$单调增加；

(2)证明方程$f(x)=\frac{1}{10}$在（0，1）内有且仅有一个实根.



六、（8 分）设$y=x^2$定义在闭区间[0, 1]上任意一点，当 t 为何值时，图中的阴影面积和为最小.

七、（8 分）设$ab>0$，$f(x)$在[a，b]上连续，在（a，b）内可导，则存在$\xi,\eta\in(a,b)$，使得$f'(\xi)=\frac{\eta^2 f'(\eta)}{ab}$.

合 肥 工 业 大 学 试 卷 (A)

2018 ～ 2019 学年第 一 学期 课程代码 1400211B / A1400011B 课程名称《高等数学》A1 学分 6 课程性质：必修■ 考试形式：闭卷■

专业班级（教学班）______ 考试日期______ 命题教师 高等数学课程组 系/教研室主任审批签名______

一、填空题（每小题 3 分，共 15 分）

1. 若$f(x)$为可导的奇函数且$f'(x_0)=5$，则$f'(-x_0)=$________.
2. 曲线$y=x\ln\left(e+\frac{1}{x}\right)(x>0)$的渐近线方程为________.
3. 设$y=\ln\sec x$，则$y'''=$________.
4. 若函数$f(x)$可导且满足$f(x)=\int_0^{2x}f\left(\frac{t}{2}\right)dt+\ln 2$，则$f(x)=$________.
5. 函数$f(x)=a^x(a>0,a\neq 1)$的带有拉格朗日型余项的 n 阶麦克劳林公式为________.

二、选择题（每小题 3 分，共 15 分）

1. 下列命题错误的是（ ）

（A） 若函数$f(x)$在x_0处不连续，则$f(x)$在点x_0处必不可导

（B） 若函数$f(x)$在x_0处连续，则$f(x)$在点x_0处必可导

（C） 若函数$f(x)$在x_0处可导，则$f(x)$在点x_0处必连续

（D） 若函数$f(x)$在x_0处不可导，则$f(x)$在点x_0处必可微

2. 下列等式中成立的是（ ）

（A）$d\int f(x)dx=f(x)$

（B）$\frac{d}{dx}\int f(x)dx=f(x)dx$

（C）$\frac{d}{dx}\int f(x)dx=f(x)+C$

（D）$d\int f(x)dx=f(x)dx$

3. 下列函数在[-1，1]上满足罗尔定理条件的是（ ）

（A）$f(x)=e^x$ （B）$f(x)=|x|$ （C）$f(x)=1-x^2$ （D）$f(x)=\begin{cases}x\sin\frac{1}{x} & x\neq 0\\ 0 & x=0\end{cases}$

4. 函数$y=x\arctan x$的图形是（ ）

（A）$(-\infty,+\infty)$处处是凸的 （B）$(-\infty,+\infty)$处处是凹的

（C）$(-\infty,0)$为凸的，$(0,+\infty)$为凹的 （C）$(-\infty,0)$为凹的，$(0,+\infty)$为凸的

5. 函数$y=C_1e^x+C_2e^{-2x}+xe^x$满足一个微分方程是（ ）

（A）$y''-y'-2y=3xe^x$ （B）$y''-y'-2y=3e^x$

（C）$y''+y'-2y=3xe^x$ （D）$y''+y'-2y=3e^x$

三、计算下列各题（每小题 6 分，共 36 分）

1. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\int_0^{x^2}\left(e^{t^2}-1\right)dt}{\ln(1+x^6)}$

2. 不定积分$\int\dfrac{x\,dx}{\sqrt{1-x^4}}$

3. $\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}}\left(\dfrac{x\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}}+\dfrac{\sin x}{\sqrt{1-x^2}}\right)dx$

4. 求曲线$y=\dfrac{x^2}{2a}$和$y=\dfrac{a^3}{a^2+x^2}$所围成平面图形的面积（$a>0$）

5. 设$y=y(x)$由方程$e^{xy}+y^3-5x=0$所确定，试求$\left.\frac{dy}{dx}\right|_{x=0}$，$\left.\frac{d^2y}{dx^2}\right|_{x=0}$

6. 求微分方程$x\ln x\,dy+(y-\ln x)dx=0$，满足条件$y|_{x=e}=1$的解

四、（本题满分 10 分）设函数$f(x)=\begin{cases}\dfrac{\ln(1+ax^3)}{y-\arcsin x} & x<0\\ 6 & x=0\\ \dfrac{e^{ax}+x^2-ax-1}{x\sin\frac{x}{4}} & x>0\end{cases}$，问$a$为何值时，$x=0$是$f(x)$的可间断点.

五、（本题满分 8 分）当$0<x_1<x_2<\frac{\pi}{2}$时，证明不等式$\dfrac{\tan x_2}{\tan x_1}>\dfrac{x_2}{x_1}$

六、（本题满分 8 分）把星形线$x^{\frac{2}{3}}+y^{\frac{2}{3}}=a^{\frac{2}{3}}$所围成的图形，绕$x$轴旋转，计算所得旋转体的体积

七、（本题满分 8 分）求数列$\{\sqrt[n]{n}\}$中最大的项

02

合肥工业大学试卷（合肥，宣城校区）

2017～2018 学年第 一 学期　　课程代码 1400211B　　课程名称 高等数学 A(上)　　学分 6　　课程性质：必修☑、选修☐、限修☐　　考试形式：开卷☐、闭卷☑

专业班级（教学班）＿＿＿＿＿　　考试日期 2018.1.17　　命题教师 高等数学课程组　　系（所或教研室）主任审批签名＿＿＿＿＿＿

一、填空题（每小题 3 分，共 15 分）：

1. $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{2x^3}{x-1}\ln\left(2+\frac{1}{x}\right)\tan\frac{1}{x^2+1}=$ ＿＿＿＿＿＿＿＿.

2. 函数 $y=x^2e^{-x}$ 的单调增加区间是 ＿＿＿＿＿＿＿＿.

3. 求不定积分 $\int\frac{1}{\sqrt{x}+1}dx=$ ＿＿＿＿＿＿＿＿.

4. 设 $y=xe^x$，则 $y^{(n)}=$ ＿＿＿＿＿＿＿＿.

5. 微分方程 $(x+2y)dx-xdy=0$ 的通解为＿＿＿＿＿＿＿＿.

二、选择题（每小题 3 分，共 15 分）：

1．设 $f(x)=\frac{x^3-x}{\sin\pi x}$.则 $f(x)$（　）.

（A）有无穷多个第一类间断点　　（B）只有一个可去间断点

（C）有三个可去间断点　　（D）有两个跳跃间断点

2．曲线 $y=\frac{x^3}{x^2-x-2}$ 共有（　）条渐近线.

（A）1　（B）2　（C）3　（D）4

3．$f(x)$ 在 $x=0$ 点可导，$f(|x|)$ 在 $x=0$ 处可导的充分必要条件为（　）.

（A）$f(0)=0$　　（B）$f'(0)=0$

（C）$f(0)=0$ 且 $f'(0)=0$　　（D）$f(0)=0$ 或 $f'(0)=0$

4．下列广义积分中收敛的是（　）.

（A）$\int_0^1\frac{1}{x(1+x)}dx$　（B）$\int_0^{+\infty}\frac{1}{x-1}dx$　（C）$\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{x}{1+x^2}dx$　（D）$\int_1^{+\infty}\frac{\ln x}{x^2}dx$.

5．已知 $f'(x)=2^x\ (x\in R)$，则 $f(x)$ 在 R 上的一个原函数为（　）

（A）$\frac{2^x}{\ln 2}$　（B）$\frac{2^x}{\ln^2 2}$　（C）$2^x\ln 2$　（D）2^x

三、计算下列各题（每小题 6 分，共 36 分）

1. $\lim\limits_{x\to0}\frac{\ln\left(1+\frac{x}{2}\right)\ln\left(1+\frac{x^2}{2}\right)\ln\left(1+\frac{x^3}{2}\right)}{(1-\cos^2 x)(1-\cos x)^2}$.

2. $\lim\limits_{x\to0}\frac{\int_0^{x^2}\sin t\,dt}{1-\cos x^2}$.

3. 求曲线 $y-xe^y=1$ 在 $x=0$ 对应点处法线方程.

4. $\int\frac{\ln\sin x}{\sin^2 x}dx$.

5. 设 $f(x)=\begin{cases}\cos x\ln\left(x+\sqrt{x^2+1}\right) & x\le 1\\ \frac{(1+x)^2}{1+x^2} & x>1\end{cases}$，求 $\int_1^5 f(x-2)dx$.

6. 求微分方程 $y''-3y'+2y=6e^{4x}$ 的通解.

四、（本题满分 8 分）证明不等式：当 $x\ge 0$ 时，有 $1+x\ln(x+\sqrt{1+x^2})>\sqrt{1+x^2}$.

五、（本题满分 10 分）在曲线 $y=x^2\ (x\ge 0)$ 上某点 A 处作一切线，使之与曲线以及 x 轴所围图形的面积为 $\frac{1}{12}$，（1）求切点 A 的坐标和切线方程，（2）求由上述所围平面图形绕 x 轴旋转一周所成旋转体的体积.

六、（本题满分 10 分）设 $f(x)=ax^3+bx^2+cx$，已知曲线 $y=f(x)$ 有拐点 $(1,2)$ 且在拐点处切线的斜率为 -1，求 $f(x)$.

七、（本题满分 6 分）设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，在 (a,b) 内可导，且 $f(a)<0$，$f(b)<0$，$f(c)>0\ (a<c<b)$. 证明：至少存在一点 $\xi\in(a,b)$ 使 $f(\xi)+f'(\xi)=0$.

合 肥 工 业 大 学 试 卷 (A)

2016 ～ 2017 学年第 一 学期 课程代码 1400211B / A1400011B 课程名称《高等数学》A1 学分 6 课程性质：必修■ 考试形式：闭卷■

专业班级（教学班） 2016 级本科生 考试日期 2017-01-13（8:00-10:00） 命题教师 集体 系/教研室主任审批签名____________

一、填空题（每小题 3 分，共 15 分）

1、$\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{n-1}{n+1}\right)^n=$__________.

2、曲线 $y=\dfrac{2x^3}{x^2+1}$ 的渐近线方程为______________.

3、$y=x\cdot\left|x(x-1)(x-2)\right|$ 有__________个不可导点.

4、曲线 $y=\ln\cos x\ (0\le x\le\dfrac{\pi}{4})$ 的弧长为______________.

5、$x>0$ 时，微分方程 $\left(y+x^2e^x\right)\mathrm{d}x-x\mathrm{d}y=0$ 的通解为 $y=$______________.

二、选择题（每小题 3 分，共 15 分）

1、设 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内可导，且 $f(x)$ 严格单调增加，则（ ）

(A) $f'(x)>0$ (B) $f'(-x)\le 0$ (C) $f(-x)$ 单增 (D) $-f(-x)$ 单增

2、设 $f''(x)+f'^2(x)=x$, $f'(0)=0$ 则（ ）.

(A) $f(0)$ 是 $f(x)$ 的一个极大值

(B) $f(0)$ 是 $f(x)$ 的一个极小值

(C) $(0,f(0))$ 是曲线 $y=f(x)$ 的拐点

(D) $f(0)$ 不是 $f(x)$ 的极值点，$(0,f(0))$ 也不是曲线 $y=f(x)$ 的拐点

3、若 $f(x)$ 的导函数是 $\cos x$，则 $f(x)$ 有一个原函数为（ ）.

(A) $x+\sin x$ (B) $x+\cos x$ (C) $x-\sin x$ (D) $x-\cos x$

4、设有反常积分 $I_1=\int_1^{+\infty}\dfrac{\mathrm{d}x}{x(x+1)}$，$I_2=\int_0^1\dfrac{\mathrm{d}x}{x(x+1)}$，则（ ）.

(A) I_1 与 I_2 都收敛 (B) I_1 收敛，I_2 发散

(C) I_1 与 I_2 都发散 (D) I_1 发散，I_2 收敛

5、微分方程 $y''+2y'-3y=(x+1)e^x$ 的特解形式可设为（ ）.

(A) $y^*=(ax+b)e^x$ (B) $y^*=x(ax+b)e^x$

(C) $y^*=x^2(ax+b)e^x$ (D) $y^*=x^3(ax+b)e^x$

三、计算题（每小题 6 分，共 36 分）

1、讨论函数 $f(x)=\begin{cases}x^2\sin\dfrac{1}{x}, & x\ne 0,\\ 0, & x=0\end{cases}$ 在 $x=0$ 处的连续性、可导性.

2、设 $y=y(x)$ 是由方程 $x^2-y+1=e^y$ 所确定的隐函数，求 $y''(0)$.

3、设 $f(x)=\begin{cases}x, & x\in[-1,0],\\ \cos x, & x\in(0,1],\end{cases}$ 求 $F(x)=\int_{-1}^x f(t)\mathrm{d}t$，$x\in[-1,1]$ 的表达式.

4、求 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\int_0^{1-\cos x}\sin t^2dt}{\dfrac{x^5}{5}+\dfrac{x^6}{6}}$.

5、求 $\int_0^1\dfrac{\arctan x}{(1+x^2)^{3/2}}\mathrm{d}x$.

6、求微分方程 $y''=4x\sqrt{y'}$ 满足初始条件 $y(1)=0$, $y'(1)=1$ 的特解.

四、（本题满分 12 分）求 $y=e^{-x^2}$ 的单调区间、凹凸区间、极值点以及曲线 $y=e^{-x^2}$ 的拐点.

五、（本题满分 12 分）设函数 $f(x)=x(x-1)$，$x\in[0,1]$ 与 x 轴所围成的平面区域为 D，求

(1) D 的面积 A； (2) D 绕 x 轴旋转一周所得旋转体的体积 V.

六、（本题满分 5 分）设 $f(x)$ 为连续函数，证明：

$$\int_0^{\pi}xf(\sin x)\mathrm{d}x=\frac{\pi}{2}\int_0^{\pi}f(\sin x)\mathrm{d}x,$$

并由此计算 $\int_0^{\pi}\dfrac{x\sin x}{2-\sin^2 x}\mathrm{d}x$.

七、（本题满分 5 分）设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上有三阶导数，且 $\left|f'''(x)\right|\le M$，若 $M_0(x_0,f(x_0))$ 是曲线 $y=f(x)$ 在 (a,b) 内的拐点，证明：$\left|f''(a)\right|+\left|f''(b)\right|\le M(b-a)$.

04

合 肥 工 业 大 学 试 卷 （ A ）

2015～2016 学年第 一 学期　课程代码 1400211B　课程名称 高等数学 A(1)　学分 6　课程性质:必修☑、选修☐、限修☐　考试形式:开卷☐、闭卷☑

专业班级（教学班）＿＿＿＿＿＿＿＿　考试日期 2016.1.15　命题教师 集体　系（所或教研室）主任审批签名＿＿＿＿＿＿

一、填空题（每小题 3 分，共 15 分）

1、若 $x\to 0$ 时，$(1+ax^2)^{\frac{1}{2}}-1$ 与 $x\sin x$ 是等价无穷小，则 $a=$＿＿＿＿＿＿.

2、设 $f(x)$ 是周期为 2 的周期函数且可导，$\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{f(x)}{x+2}=3$，则曲线 $y=f(x)$ 在 $x=0$ 对应点处的切线方程为＿＿＿＿＿＿.

3、设 $f(x)$ 在 $\left[-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2}\right]$ 上连续，则 $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\left[f(x)(x+\cos x)+f(-x)(x-\cos x)\right]dx=$＿＿＿＿＿.

4、求星形线 $\begin{cases}x=a\cos^3\theta,\\ y=a\sin^3\theta,\end{cases}$ $(a>0)$ 从 $\theta=0$ 至 $\theta=\dfrac{\pi}{2}$ 的一段弧长 $l=$＿＿＿＿＿＿.

5、设 $f(x)$ 满足方程 $f(x)=x^2-\int_0^x f(t)\mathrm{d}t$，则 $f(x)$ 表达式为＿＿＿＿＿＿.

二、选择题（每小题 3 分，共 15 分）

1、$x=0$ 是 $f(x)=\dfrac{2}{1+e^{\frac{1}{x}}}+\dfrac{\sin x}{|x|}$ 的（　　）.

(A) 跳跃间断点　　(B) 可去间断点

(C) 无穷间断点　　(D) 连续点

2、微分方程 $y''+y=x+1+\sin x$ 的特解形式为（　　）.

(A) $ax+b+x(A\cos x+B\sin x)$　　(B) $ax+b+A\cos x+B\sin x$

(C) $ax+b+Ax\sin x$　　(D) $ax+b+A\sin x$

3、下列结论正确的是(　　)

(A) $\int_1^{+\infty}\dfrac{1}{x^2}dx$ 收敛;　　(B) $\int_{-1}^{1}\dfrac{1}{x^2}dx=-\dfrac{1}{x}\Big|_{-1}^{1}=-2$

(C) $\int_{-1}^{1}\dfrac{1}{x}dx=0$;　　(D) $\int_{-\infty}^{+\infty}\sin x dx=\lim\limits_{a\to+\infty}\int_{-a}^{a}\sin x dx=\lim\limits_{a\to+\infty}0=0$.

4、下列结论正确的是（　　）

(A) 一切初等函数在其定义域内连续

(B) 若 $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(x_0+h)-f(x_0-h)}{2h}=A$ 存在，则 $f'(x_0)=A$

(C) 设函数 $f(x)$ 连续，且 $f'(0)>0$，则存在 $\delta>0$，使得 $f(x)$ 在 $(0,\delta)$ 内单调增加

(D) $\int_x^{x+\pi}e^{|\sin t|}dt$ 是常数，其中 x 是变量.

5、曲线 $y=\dfrac{x^2+x}{x^2-1}$（　）

(A) 没有渐近线　　(B) 仅有水平渐近线

(C) 仅有铅直渐近线　　(D) 既有水平渐近线又有铅直渐近线

三、计算下列各题（每小题 6 分，共 36 分）

1、$\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\left(\sqrt{x^2+1}-3x\right)\ln\left(\dfrac{2x}{x^2+1}+1\right)}{\ln\left(2+\dfrac{1}{x^2}\right)}$.

2、若函数 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{\int_0^{x^2}(e^{t^2}-1)dt}{x^2}, & x\neq 0\\ 0, & x=0\end{cases}$，求 $f'(0)$.

3、设函数 $y=y(x)$ 由方程 $\begin{cases}x=\arctan t,\\ y=\ln(t+\sqrt{1+t^2})\end{cases}$ 确定，求 $\dfrac{d^2y}{dx^2}$.

4、$\int\dfrac{\ln x}{x\sqrt{1+\ln x}}dx$.

5、已知函数 $f(x)$ 连续，且满足 $\int_0^x tf(x-t)dt=1-\cos x$，求 $\int_0^{\pi}[f(x)]^3dx$.

6、设曲线 $y=f(x)$ 在点 $x=1$ 处的切线方程为 $y=2x-1$，且满足 $xy''=y'$，求 $f(x)$.

四、（本题满分 8 分）证明不等式：当 $-1<x<1$ 时，$x\ln\dfrac{1+x}{1-x}+\cos x\geq 1+\dfrac{x^2}{2}$.

五、（本题满分 10 分）设 $g(x)$ 为正值连续函数，令 $f(x)=\int_{-a}^{a}|x-t|g(t)\mathrm{d}t,(a\geq 0)$，判别曲线 $y=f(x)$ 的图形在 $[-a,a]$ 上的凹凸性.

六、（本题满分 10 分）设曲线 $y=x^{\frac{1}{3}}$，直线 $x=a(a>0)$ 及 x 轴围成的平面图形为 D，求 D 绕 x,y 轴旋转一周所得旋转体体积 V_x,V_y. 若 $V_y=10V_x$，求 a 的值.

七、（本题满分 6 分）设 $f(x)$ 在区间 $[0,1]$ 上连续，在 $(0,1)$ 内可导，且满足 $f(1)=3\int_0^{\frac{1}{3}}e^{1-x^2}f(x)dx$.

证明：至少存在一点 $\xi\in(0,1)$，使得 $f'(\xi)=2\xi f(\xi)$.

合 肥 工 业 大 学 试 卷 （ A ）

共 1 页第 1 页

2014～2015 学年第 一 学期　课程代码 1400011B　课程名称 高等数学 A(1)　学分 5　课程性质:必修☑、选修☐、限修☐　考试形式:开卷☐、闭卷☑

专业班级（教学班）__________ 考试日期 2015.1.14　命题教师 集体　系（所或教研室）主任审批签名__________

一、填空题（每小题 3 分，共 15 分）

1、极限 $\lim\limits_{x\to 0}(1+3x)^{\frac{2}{\sin x}}=$ ________.

2、设 $y=x\arctan(x^2)$，则 y' ________.

3、设 $f(x)$ 的一个原函数为 e^{-x^2}，则 $\int xf'(x)dx=$ ________ .

4、曲线 $y=e^x$ 过原点的切线方程为 ________ .

5、曲线 $r=e^{2\theta}$ 从 $\theta=0$ 至 $\theta=\dfrac{\pi}{2}$ 的一段弧长 $l=$ ________ .

二、选择题（每小题 3 分，共 15 分）

1、当 $x\to -1$ 时，x^3+1 与 $3(x+1)$ 为（）

(A) 高阶无穷小　(B) 低阶无穷小

(C) 等价无穷小　(D) 同阶但不等价无穷小

2、若 $f(x)$ 的导函数为 $\sin x$，则 $f(x)$ 的一个原函数是（　）

(A) $1+\sin x$　(B) $1-\sin x$　(C) $1+\cos x$　(D) $1-\cos x$

3、设 $f(x)$ 在 $x=0$ 处连续，且 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{1-\cos x}=1$，则在点 $x=0$ 处（　）.

(A) $f'(0)$ 不存在　(B) $f'(0)=0$，且 $f(0)$ 为 $f(x)$ 的极小值

(C) $f'(0)$ 存在，且 $f'(0)\neq 0$　(D) $f'(0)=0$，且 $f(0)$ 为 $f(x)$ 的极大值

4、下列广义积分发散的是（　）

(A) $\int_1^{+\infty}\dfrac{dx}{\sqrt{x}(1+x)}$　(B) $\int_{-1}^{1}\dfrac{1}{\sin x}dx$　(C) $\int_2^{+\infty}\dfrac{1}{x\ln^2 x}dx$　(D) $\int_{-\infty}^{+\infty}xe^{-x^2}dx$

5、曲线 $y=\dfrac{1+e^{-x^2}}{1-e^{-x^2}}$（）

(A) 没有渐近线　(B) 仅有水平渐近线

(C) 仅有铅直渐近线　(D) 既有水平渐近线又有铅直渐近线

三、计算下列各题（每小题 6 分，共 36 分）

1、$\lim\limits_{n\to\infty}n\left(\dfrac{1}{n^2+\pi}+\dfrac{1}{n^2+2\pi}+\cdots+\dfrac{1}{n^2+n\pi}\right)$.

2、$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{3\sin x-x^2\cos\frac{1}{x}}{(e^{-x}-1)(1+\cos x)}$.

3、求 $y=x^{\sin x}(x>0)$ 的导数 $y'(x)$.

4、已知 $\begin{cases}x=\ln\left(1+t^2\right),\\ y=\arctan t,\end{cases}$ 求 $\dfrac{dy}{dx},\dfrac{d^2y}{dx^2}$.

5、$\int\dfrac{\arctan x}{x^2}dx$.

6、设 $f(x)=\begin{cases}\ln(1+x) & x\geq 0\\ \dfrac{1}{1+x^2} & x<0\end{cases}$，求 $\int_0^2 f(x-1)dx$.

四、（本题满分 10 分） 设 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{2}{x^2}(1-\cos x), & x<0,\\ 1, & x=0,\\ \dfrac{1}{x}\int_0^x\cos t^2 dt, & x>0,\end{cases}$ 讨论 $f(x)$ 在 $x=0$ 处的连续性和可导性.

五、（本题满分 10 分） 设曲线 $y=e^{\frac{x}{2}}$，切线 $y=\dfrac{e}{2}x$ 及 y 轴围成的平面图形为 D，求 D 绕 y 轴旋转一周所得旋转体体积 V.

六、（本题满分 8 分） 证明不等式：$x>0$ 时，有 $\ln x+\dfrac{1}{x}\geq 1$.

七、（本题满分 6 分） 设函数 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续，在 $(0,1)$ 内可导，$f(x)\neq 0$（$0<x<1$），

且 $f(0)=f(1)=0$，

证明：在 $(0,1)$ 内至少存在一点 ξ，使 $f'(\xi)=2015f(\xi)$.

2019-2020 学年第一学期期末考试 A 卷参考答案

一、填空题（每小题 3 分，共 15 分）

1.解：e^{-2}　原式 $=\lim\limits_{x\to 0}\left(1-\dfrac{2}{x}\right)^{x}=e^{-2}$

2.解：$\dfrac{1}{4}dx$　原式 $=y'=\dfrac{1}{1+(1+x)}\dfrac{1}{2\sqrt{1+x}}=\dfrac{1}{2(2+x)\sqrt{1+x}}$

$$dy\Big|_{x=0}=\frac{1}{2(2+x)\sqrt{1+x}}\Big|_{x=0}dx=\frac{1}{4}dx$$

3. 解：$\dfrac{e^2+1}{4}$　$s=\int_1^e\sqrt{1+(y')^2}dx=\dfrac{1}{2}\int_1^e\left(x+\dfrac{1}{x}\right)dx=\dfrac{e^2+1}{4}$

4.解：$\dfrac{2^6 6!}{(1+2x)^7}$　$y^{(6)}=2^6(-1)^6 6!\dfrac{1}{(1+2x)^7}=\dfrac{2^6 6!}{(1+2x)^7}$

5.解：-2

$$\int_0^1 xf''(x)dx=\int_0^1 xdf'(x)=xf'(x)\Big|_0^1-\int_0^1 f'(x)dx=f'(1)-f(1)+f(0)=-2$$

二、选择题

1.解：D　常函数处处连续，其它选项在 $x=0$ 处无定义.

2.解：C　$f'(0)$存在，可以知道

$$f'(0)=\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0}\frac{f(-x)-f(0)}{x-0}=-f'(0)$$

故 $f'(0)=0$

3.解：C　$\int\sin 2x=-\dfrac{1}{2}\cos 2x+C$，故 $-\cos 2x$ 不是 $\sin 2x$ 的原函数

4.解：A　$\dfrac{d}{dx}\left[x\int_a^b f(x)dx\right]=\int_a^b f(x)dx$，因为积分为常数.

5.解：C　由线性常微分方程的理论直接可知：非齐次特解之差=齐次特解，因为是一阶 ODE，所以解空间维数是 1，所以齐次通解为 $C\left[\varphi_1(x)-\varphi_2(x)\right]$.又因为非齐次通解=齐次通解 +非齐次特解，所以非齐次通解为 $C\left[\varphi_1(x)-\varphi_2(x)\right]+\varphi_2(x)$

三、1.原式 $=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{\xi}(\sin x-x\cos x)}{x^3}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\left(-\dfrac{1}{6}+\dfrac{1}{2}\right)x^3+o(x^3)}{x^3}=\dfrac{1}{3}$

2. 令 $x=\sin t$，

$$原式=\int\frac{\cos t dt}{\sin t\cos t}=\int\frac{1}{\sin t}dt=\int\frac{-1}{\sin^2 t}d\cos t$$

$$=\frac{1}{2}\ln\left(\left|\frac{1-\cos t}{1+\cos t}\right|\right)+C=\frac{1}{2}\ln\left|\frac{1-\sqrt{1-x^2}}{1+\sqrt{1-x^2}}\right|+C$$

3. $\displaystyle\int_1^{+\infty}\frac{x}{(x+1)^3}dx=\int_2^{+\infty}\frac{u-1}{u^3}du=-\frac{1}{u}+\frac{1}{2}\frac{1}{u^2}\Big|_2^{+\infty}=\frac{3}{8}$

4. $y'=e^{-x}(1-x)$，$y''=e^{-x}(x-2)$.可知：$x=2$ 为函数的拐点，此时切线斜率为 $-e^{-2}$ 故切 线为 $y=-e^{-2}(x-2)+2e^{-2}=-e^{-2}x+4e^{-2}$

5. $\ln y=\dfrac{1}{2x}+\dfrac{1}{4}\ln x+\dfrac{1}{8}\ln\sin x$

$$\therefore y'=\sqrt{e^{\frac{1}{x}}\sqrt{x\sqrt{\sin x}}}\left(\frac{-1}{2x^2}+\frac{1}{4x}+\frac{\cot x}{8}\right)$$

6. 齐次方程的特征方程为$\lambda^2-3\lambda+2=0\Rightarrow\lambda_1=1$，$\lambda_2=2$.故齐次方程的通解为$C_1e^x+C_2e^{2x}$.考虑特解$x(ax+b)e^x$，代入可得：$a=-1$，$b=-2$.故微分方程的通解为$C_1e^x+C_2e^{2x}-x(x+2)e^x$

四、因为函数有无穷间断点$x_1=0$，所以$a=0$.又因为$x_2=1$为可去间断点，所以 $\lim\limits_{x\to1}f(x)$存在，

$\lim\limits_{x\to1}\frac{(\sqrt{1+3x}-b)(x-b)}{x(x-1)}=\lim\limits_{x\to1}\frac{(\sqrt{1+3x}-b)(x-b)}{x-1}$存在，则$b=1$或 2.

五、（1）若$y>x>0$，则

$$f(y)=\int_0^y\frac{yt^2}{1+t^2}dt\geq\int_0^y\frac{xt^2}{1+t^2}dt\geq\int_0^x\frac{xt^2}{1+t^2}dt=f(x)\geq0$$

故当$x>0$时，$f(x)$单调增加.

（2）因为$f(0)=0$，$f(1)=\int_0^1\frac{t^2}{1+t^2}dt=1-\arctan t\Big|_0^1=1-\frac{\pi}{4}>0$.由$f$的单调性可知$f(x)=\frac{1}{10}$的根在（O，1）内有且仅有一个.

六、

$$S(t)=\int_0^t(t^2-x^2)dx+\int_t^1(x^2-t^2)dx=\frac{2t^3}{3}+\left(\frac{2}{3}t^3-t^2+\frac{1}{3}\right)=-t^2+\frac{4}{3}t^3+\frac{1}{3}$$

易知：$S(t)$表示图中阴影面积$S'(t)=-2t+4t^2=2t(-1+2t)$，可得：

当$t\in\left[0,\frac{1}{2}\right]$时，$S(t)$单调递减当$t\in\left[\frac{1}{2},1\right]$时，$S(t)$单调递增，故

$S(t)$在$t=\frac{1}{2}$取得最小值，$S\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{4}$

七、由$ab>0$，可知：$\frac{1}{x}$在(a,b)内连续可微.故由柯西中值定理可得：存在η使得$\frac{f'(\eta)}{-\frac{1}{\eta^2}}=\frac{f(b)-f(a)}{\frac{1}{b}-\frac{1}{a}}$.又因为存在$\xi\in(a,b)$，使得

$f(b)-f(a)=f'(\xi)(b-a)$.代入可得：$f'(\xi)=\frac{\eta^2f'(\eta)}{ab}$

2018-2019 学年第一学期期末考试 A 卷参考答案

一、填空题（每小题 3 分，共 15 分）

1、解：5 由于$f(x)$为可导的奇函数，于是

$$f'(-x_0)=\lim_{h\to0}\frac{f(-x_0+h)-f(-x_0)}{h}=\lim_{h\to0}\frac{f(x_0)-f(x_0-h)}{h}=f'(x_0)=5$$

2、解：$y=x+\frac{1}{e}$ $\quad k=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{y}{x}=\lim\limits_{x\to\infty}\ln\left(e+\frac{1}{x}\right)=1$

$$b=\lim_{x\to\infty}(y-x)=\lim_{x\to\infty}\left[x\ln\left(e+\frac{1}{x}\right)-x\right]=\lim_{x\to\infty}x\ln\left(1+\frac{1}{ex}\right)=\lim_{x\to\infty}\left(x\cdot\frac{1}{ex}\right)=\frac{1}{e}$$

3、解：$2\sec^2x\tan x$ 由于$y=\ln\sec x$，故$y'=\tan x$，$y''=\sec^2x$，

$y'''=2\sec^2x\tan x$

4、解：$e^{2x}\ln 2$　由于 $f(x)=\int_0^{2x} f\left(\frac{t}{2}\right)dt+\ln 2$，故令 $x=0$，得

$f(0)=\ln 2$

并且 $f(x)=2\int_0^x f(u)du+\ln 2$，于是 $f'(x)=2f(x)\Rightarrow f(x)=Ce^{2x}$

代入 $f(0)=\ln 2\Rightarrow C=\ln 2$，$f(x)=\ln 2\cdot e^{2x}$

5、解：

$$a^x=1+x\ln a+\frac{(\ln a)^2}{2!}x^2+\cdots+\frac{(\ln a)}{n!}x^n+\frac{a^{\theta x}}{(n+1)!}(\ln a)^{n+1}x^{n+1}\ (0<\theta<1)$$

（或 $a^x=1+x\ln a+\frac{(\ln a)^2}{2!}x^2+\cdots+\frac{(\ln a)^n}{n!}x^n+\frac{a^{\xi}}{(n+1)!}(\ln a)^{n+1}x^{n+1}$（$\xi$ 位于 0，x 之间）

由题可得 $f(0)=1$，$f^{(n)}(x)=a^x\ln^n a$，$f^{(n)}(0)=\ln^n a$

于是带有拉格朗日型余项的 n 阶麦克劳林公式为：

$$a^x=1+x\ln a+\frac{(\ln a)^2}{2!}x^2+\cdots+\frac{(\ln a)^n}{n!}x^n+\frac{a^{\theta x}}{(n+1)!}(\ln a)^{n+1}x^{n+1}\ (0<\theta<1)$$

（或 $a^x=1+x\ln a+\frac{(\ln a)^2}{2!}x^2+\cdots+\frac{(\ln a)^n}{n!}x^n+\frac{a^{\xi}}{(n+1)!}(\ln a)^{n+1}x^{n+1}$（$\xi$ 位于 0，x 之间）

二、选择题（每小题 3 分，共 15 分）

1、解：B

2、解：D　需要记住的就是：一个 d 可以“抵消”一个积分号，于是有 $\frac{d}{dx}\int f(x)dx=f(x)$　$d\int f(x)dx=f(x)dx$

3、解：C　如果函数 $f(x)$ 在[1，1]上满足罗尔定理条件，则需要满足：函数 $f(x)$ 在[-1，1]上连续在（-1，1）内可导，并且 $f(1)=f(-1)$，于是一一代入验证可得 C 选项正确.

4、解：B　故 $y=x\arctan x$ 的图形在（-∞，+∞）处处是凹的

5、解：D　由题意知 $y=C_1e^x+C_2e^{-2x}+xe^x$

于是 $y'=C_1e^x-2C_2e^{-2x}+(x+1)e^x$，$y''=C_1e^x+4C_2e^{-2x}+(x+2)e^x$

$$y''+y'-2y=\left[C_1e^x+4C_2e^{-2x}+(x+2)e^x\right]+\left[C_1e^x-2C_2e^{-2x}+(x+1)e^x\right]-2\left[C_1e^x+C_2e^{-2x}+xe^x\right]=3e^x$$

$\Rightarrow y''+y'-2y=3e^x$

三、计算下列各题（每小题 6 分，共 36 分）

1、原式 $=\lim\limits_{x\to 0}\frac{\int_0^{x^2}\left(e^{t^2}-1\right)dt}{x^6}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{2x\left(e^{x^4}-1\right)}{6x^5}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{2x\cdot x^4}{6x^5}=\frac{1}{3}$

2、原式 $=\frac{1}{2}\int\frac{d\left(x^2\right)}{\sqrt{\left(1-\left(x^2\right)^2\right)}}=\frac{1}{2}\arcsin x^2+C$

3、原式

$$=2\int_0^{\frac{1}{2}}\frac{x\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}}=-\int_0^{\frac{1}{2}}\frac{\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}}d\left(1-x^2\right)=-2\int_0^{\frac{1}{2}}\arcsin x\,d\sqrt{1-x^2}$$

$$=-2\left(\sqrt{1-x^2}\arcsin x\Big|_0^{\frac{1}{2}}\right)+2\int_0^{\frac{1}{2}}\sqrt{1-x^2}\cdot\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx=1-\frac{\sqrt{3}}{6}\pi$$

09

4、 求交点为$\left(-a,\frac{a}{2}\right),\left(a,\frac{a}{2}\right)$,则$dS=\left(\frac{a^3}{a^2+x^2}-\frac{x^2}{2a}\right)dx$

由对称性可得$S=2\int_0^a\left(\frac{a^3}{a^2+x^2}-\frac{x^2}{2a}\right)dx=a^2\left(\frac{\pi}{2}-\frac{1}{3}\right)$

5、 方程两边同时对x求导得

$$e^{xy}\left(y+xy'\right)+3y^2y'-5=0\Rightarrow y'=\frac{5-ye^{xy}}{xe^{xy}+3y^2}$$

$y''=\frac{e^{xy}\left(y+xy'\right)^2+2e^{xy}y'+6y\left(y'\right)^2}{-xe^{xy}-3y^2}$当$x=0$时，$y=-1$，$y'=2$，

$$y''=\frac{19}{3}$$

6、 将方程标准化为$y'+\frac{1}{x\ln x}y=\frac{1}{x}$，于是

$$y=e^{-\int\frac{dx}{x\ln x}}\left(\int\frac{1}{x}e^{\int\frac{dx}{x\ln x}}dx+C\right)=e^{-\ln\ln x}\left(\int\frac{1}{x}e^{\ln\ln x}dx+C\right)=\frac{1}{\ln x}\left(\frac{1}{2}\right)\ln^2x+C$$

代入初始条件可得$C=\frac{1}{2}$，故所求特解为$y=\frac{1}{2}\left(\ln x+\frac{1}{\ln x}\right)$

四、 $\lim\limits_{x\to0^-}f\left(x\right)=\lim\limits_{x\to0^-}\frac{\ln\left(1+ax^3\right)}{x-\arcsin x}=\lim\limits_{x\to0^-}\frac{ax^3}{x-\arcsin x}\lim\limits_{x\to0^-}\frac{3ax^2}{1-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}}$

$$=\lim_{x\to0^-}\frac{3ax^2\sqrt{1-x^2}}{-\frac{1}{2}x^2}=-6a$$

$$\lim_{x\to0^+}f\left(x\right)=\lim_{x\to0^+}\frac{e^{ax}+x^2-ax-1}{x\sin\frac{x}{4}}=\lim_{x\to0^+}\frac{e^{ax}+x^2-ax-1}{\frac{1}{4}x^2}$$

$$=\lim_{x\to0^+}\frac{ae^{ax}+2x-a}{\frac{1}{2}x}==\lim_{x\to0^+}\frac{a^2e^{ax}+2}{\frac{1}{2}}=4+2a^2$$

若$x=0$是$f\left(x\right)$的可去间断点，则

$$\lim_{x\to0^-}f\left(x\right)=\lim_{x\to0^+}f\left(x\right)\neq f\left(0\right)\Rightarrow-6a=4+2a^2\neq6\Rightarrow a=-2$$

五、（1）令$f\left(x\right)=\frac{\tan x}{x}$，$x\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$

因为$f'\left(x\right)=\frac{x\sec^2x-\tan x}{x^2}=\frac{x-\sin x\cos x}{x^2\cos^2x}>0$

所以在$\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$内，$f\left(x\right)$单调递增.因此当$0<x_1<x_2<\frac{\pi}{2}$时有

$$\frac{\tan x_1}{x_1}<\frac{\tan x_2}{x_2}\Rightarrow\frac{\tan x_2}{\tan x_1}>\frac{x_2}{x_1}$$

六、 由对称性，所求旋转体的体积为

$$V=2\int_0^a\pi y_2dx=2\pi\int_0^a\left(a^{\frac{2}{3}}-x^{\frac{2}{3}}\right)^3dx=2\pi\int_0^a\left(a^2-3a^{\frac{4}{3}}x^{\frac{2}{3}}+3a^{\frac{2}{3}}x^{\frac{4}{3}}-x^2\right)dx=\frac{32}{105}\pi a^3$$

七、 令$y=x^{\frac{1}{x}}\left(x>0\right)$，则$\ln y=\frac{1}{x}\ln x$，两边对 x 求导得

$$\frac{1}{y}y'=-\frac{1}{x^2}\ln x+\frac{1}{x^2}\Rightarrow y'=x^{\frac{1}{x}-2}\left(1-\ln x\right)$$

令$y'=0\Rightarrow x=e$为唯一驻点，且当$0<x<e$时，$y>0$，当$e<x<+\infty$

时，$y'<0$

$\therefore x=e$为函数的最大值点

又$\because \sqrt{2}<\sqrt[3]{3}$，$\therefore \sqrt[3]{3}$是该数列中的最大项

2017-2018学年第一学期期末考试试卷参考答案

一、填空题（每小题3分，共15分）

1.解：21n2

$$\lim_{x\to\infty}\frac{2x^3}{x-1}\ln\left(2+\frac{1}{x}\right)\tan\frac{1}{x^2+1}=21\text{n}2\lim_{x\to\infty}\frac{x^3}{x-1}\cdot\frac{1}{x^2+1}=21\text{n}2\lim_{x\to\infty}\frac{1}{\left(1-\frac{1}{x}\right)\left(1+\frac{1}{x^2}\right)}$$

$=2\ln 2$

2.解：[0，2]　$y'=2xe^{-x}-x^2e^x=(2-x)xe^{-x}$，令$y'\ge 0$，得到函数的单调增区间$x\in[0,2]$

3.解：$2\sqrt{x}-21\text{n}\left(\sqrt{x}+1\right)+C$

令$t=\sqrt{x}$，则$x=t^2$，$dx=2tdt$，原积分可化为

$$\int\frac{2tdt}{t+1}=\int\frac{2(t+1)-2}{t+1}dt=\int 2dt-2\int\frac{1}{t+1}dt=2t-21\text{n}(t+1)+C$$
$$=2\sqrt{x}-21\text{n}\left(\sqrt{x}+1\right)+C$$

4.解：$(x+n)e^x$　$y'=(x+1)e^x$，$y''=(x+2)e^x$，……，$y^{(n)}=(x+n)e^x$

5.解：$y=cx^2-x$　$\frac{dy}{dx}=1+\frac{2y}{x}$，令$P(x)=-\frac{2}{x}$，$Q(x)=1$，由一阶线性微分方程的通解公式得$y=cx^2-x$

二、选择题（每小题3分，共15分）

1.解：C

$f(x)=\frac{x^3-x}{\sin\pi x}=\frac{x(x-1)(x+1)}{\sin\pi\text{x}}$，$\lim\limits_{x\to 0}f(x)=-\lim\limits_{x\to 0}\frac{x}{\pi x}=-\frac{1}{\pi}$，

$\lim\limits_{x\to 1}f(x)=2\lim\limits_{x\to 1}\frac{x-1}{\sin\pi x}=-\frac{2}{\pi}$

$\lim\limits_{x\to -1}f(x)=\lim\limits_{x\to -1}\frac{x+1}{\sin\pi x}=-\frac{2}{\pi}$，所以$f(x)$有三个可去间断点：当$x=\pm k$，$k=2,3,\ldots\ldots$时为无穷间断点，所以有无穷多个第二类间断点所以C正确

2.解：C

$$y=\frac{x^3}{x^2-x-2}=\frac{x^3}{(x+1)(x-2)}$$，令分母为0，可得$x=-1$，$x=2$

两条渐近线；$\lim\limits_{x\to\infty}\frac{y}{x}=\frac{x^2}{x^2-x-2}=1$，$\lim\limits_{x\to\infty}(y-x)=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x^2+2x}{x^2-x-2}=1$，

故有斜渐近线$y=x+1$.所以共有3条渐近线

3、解：B

令$g(x)=f(|x|)$

必要性：$f'(0)$存在，则$\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x}$存在，所以$g'+(0)=f'(0)$，

$$g'-(0)=\lim_{x\to 0^-}\frac{f(-x)-f(0)}{x}\overset{t=-x}{=}-\lim_{x\to 0^+}\frac{f(t)-f(0)}{t}=-g'+(0)$$；由于

$g'+(0)=g_-(0)$，可以解得$g'+(0)=g'_-(0)=0$，故$f'(0)=0$；

充分性：当$f'(0)=0$时，

$$g'-(0)=\lim_{x\to 0^-}\frac{f(-x)-f(0)}{x}\overset{t=-x}{=}-\lim_{x\to 0^+}\frac{f(t)-f(0)}{t}=-g'+(0)=f'(0)=0$$

所以$g'+(0)=g'_-(0)$，即$f(|x|)$在$x=0$可导

11

4.解：D

$A: I=\ln\frac{x}{x+1}\Big|_0^1$ 发散

$B:\mathrm{I}=\int_0^1\frac{1}{x-1}dx+\int_1^{+\infty}\frac{1}{x-1}dx$，因为 $\int_0^1\frac{1}{x-1}dx=\ln|x-1|\Big|_0^1=-\infty$，所以原积分发散

$C: I=\frac{1}{2}\ln\left(x^2+1\right)\Big|_0^{+\infty}+\frac{1}{2}\ln\left(x^2+1\right)\Big|_{-\infty}^0$ 发散

$D: I=-\left(\frac{\ln x}{x}+\frac{1}{x}\right)\Big|_1^{+\infty}=1$ 收敛

5.解：B

$f(x)=\int 2^x dx=\frac{2^x}{\ln 2}+C$，则 $f(x)$ 的一个原函数为

$F(x)=\int\frac{2^x}{\ln 2}dx=\frac{2^x}{\ln^2 2}+Cx+D$

取 $C=D=0$，可知 B 正确

三、计算下列各题（每小题 6 分，共 36 分）

1. 原极限为：$\frac{1}{2}\lim\limits_{x\to 0}\frac{\frac{x}{2}\cdot\frac{x^2}{2}\cdot\frac{x^3}{2}}{(1-\cos x)\frac{x^4}{4}}=\frac{1}{2}\lim\limits_{x\to 0}\frac{\frac{x^6}{8}}{\frac{x^6}{8}}=\frac{1}{2}$

2、 原极限为（洛必达法则）$\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x^2\cdot 2x}{2x\sin x^2}=1$

3. 方程两边同时对 x 求导有 $y'=\frac{e^y}{1-xe^y}$

当 $x=0$ 时，$y=1$，$y'=e$，所以法线的斜率为 $k=-\frac{1}{e}$

4.解：

$$\int\frac{\ln\sin x}{\sin^2 x}dx=-\int\ln\sin x d\cot x \quad ---2'$$

$$=-\cot x\ln\sin x+\int\cot x d\ln\sin x$$

$$=-\cot x\ln\sin x+\int\cot^2 x dx \quad ---4'$$

$$=-\cot x\ln\sin x+\int\left(\csc^2 x-1\right)dx$$

$$=-\cot x\ln\sin x-\cot x-x+c \quad ---6'$$

5.解：

$$\int_1^5 f(x-2)dx\overset{x-2=t}{=}\int_{-1}^3 f(t)dt$$

$$=\int_{-1}^1\cos t\ln\left(t+\sqrt{t^2+1}\right)dt+\int_1^3\frac{(1+t)^2}{1+t^2}dt$$

$$=0+\int_1^3\left(1+\frac{2t}{1+t^2}\right)dt$$

$$=2+\ln\left(1+t^2\right)\Big|_1^3=2+\ln 10-\ln 2$$

6.解：齐次方程通解为 $c_1e^x+c_2e^{2x}$

可设特解 $y^*=ae^{4x}$ 代入原方程得 $a=1$.

$\therefore y=c_1e^x+c_2e^{2x}+e^{4x}$

故原方程通解为 $y=c_1e^x+c_2e^{2x}+e^{4x}$.

四、证明：设 $f(x)=1+x\ln(x+\sqrt{1+x^2})-\sqrt{1+x^2}$，则

$$f'(x)=\ln(x+\sqrt{1+x^2})+\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}-\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}=\ln(x+\sqrt{1+x^2})>0$$，

12

于是，当 $x>0$ 时，$f(x)>f(0)=0$，即

$$1+x\ln(x+\sqrt{1+x^2})>\sqrt{1+x^2}.$$

五、解：设切点 A 的坐标 (x_0,y_0)

切线方程为 $y-{x_0}^2=2x_0(x-x_0)$

即 $x=\dfrac{y+{x_0}^2}{2x_0}$

$$\int_0^{{x_0}^2}\left(\frac{y+{x_0}^2}{2x_0}-\sqrt{y}\right)dy=\frac{1}{12}$$

$\dfrac{{x_0}^3}{12}=\dfrac{1}{12}$，切点 A 的坐标为 $(1,1)$

切线方程为 $y=2x-1$

旋转体的体积= $\pi\int_0^1 x^4dx-\pi\int_{\frac{1}{2}}^1(2x-1)^2dx$ （或 $\int_0^1 2\pi(\dfrac{1+y}{2}-\sqrt{y})ydy$ ）

$=\dfrac{\pi}{30}$

六、解：由题设得：

$$\begin{cases} f(1)=2 \\ f'(1)=-1 \\ f''(1)=0 \end{cases}$$

即 $\begin{cases} a+b+c=2 \\ 6a+2b=0 \\ 3a+2b+c=-1 \end{cases}$，解得 $a=3$，$b=-9$，$c=8$

$\therefore$所求函数为 $f(x)=3x^3-9x^2+8x$.

七、证：由题设，有零点定理：存在 $x_1\in(a,c)$，$x_2\in(c,b)$ 使

$f(x_1)=0,f(x_2)=0$.$---2'$

令 $F(x)=e^xf(x)\quad x\in[a,b]$，$F(x)$ 在 $[x_1,x_2]$ 上连续.，(x_1,x_2) 内可导，

且 $F(x_1)=e^{x_1}f(x_1)=0,F(x_2)=e^{x_2}f(x_2)=0$，即 $F(x_1)=F(x_2)$.

$F(x)$ 在 $[x_1,x_2]$ 上由罗尔中值定理：至少存在一点

$\xi\in(x_1,x_2)\subset(a,b)$

使 $F'(\xi)=0$ 即 $e^{\xi}[f(\xi)+f'(\xi)]=0$.$\because e^{\xi}\neq0\quad\therefore f(\xi)+f'(\xi)=0$

2016-2017 学年第一学期期末考试 A 卷参考答案

一、填空题（15 分，每题 3 分，共 5 题）

1、解：e^{-2}

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n-1}{n+1}\right)^n=e^{\lim\limits_{n\to\infty}n\ln\frac{n-1}{n+1}}=e^{\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\ln\frac{n-1}{n+1}}{\frac{1}{n}}}=e^{2\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{n^{2-1}}}{-\frac{1}{n^2}}}=e^{-2}$$

2、解：$y=2x$

13

曲线无垂直与水平渐近线，$\lim\limits_{x\to\infty}\frac{y}{x}=2$，$\lim\limits_{x\to\infty}y-2x=0$，所以斜渐近线为 $y=2x$

3、解：2

$$y=\begin{cases}-x^2(x-1)(x-2),x\in(-\infty,0)\\x^2(x-1)(x-2),x\in(0,1)\\-x^2(x-1)(x-2),x\in(1,2)\\x^2(x-1)(x-2),x\in(2,+\infty)\end{cases}$$

，可知函数在 R 上连续，

函数在开区间内导数为 $y'=\begin{cases}-\left(4x^3-9x^2+4x\right),x\in(-\infty,0)\\4x^3-9x^2+4x,x\in(0,1)\\-\left(4x^3-9x^2+4x\right),x\in(1,2)\\4x^3-9x^2+4x,x\in(2,+\infty)\end{cases}$ 可求得端点上

$y'(0^-)=y'(0^+)=0$，$y'(1^-)=-1,y'(1^+)=1,y'(2^-)=-4,y'(2^+)=4$

所以函数在 $x=1,x=2$ 处导数不存在

4、解：$\ln\left(\sqrt{2}+1\right)$

$$\begin{aligned}s&=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\sqrt{1+\left[\left(\ln\cos x\right)'\right]^2}dx\\&=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\sqrt{1+\tan^2 x}dx\\&=\ln\left|\sec x+\tan x\right|\Big|_0^{\frac{\pi}{4}}\\&=\ln\left(\sqrt{2}+1\right)\end{aligned}$$

5、解：$y=x\left(e^x+C\right)$

整理得 $y'-\frac{1}{x}y=xe^x$，利用通解公式可得

$$y=e^{\int\frac{1}{x}dx}\left(\int e^{-\int\frac{1}{x}dx}xe^xdx+C\right)=x\left(e^x+C\right)$$

二、选择题（15 分，每题 3 分，共 5 题）

1、解：D　$f'(x)\ge0$，选项 A 错误：$f'(-x)\ge0$，选项 B 错误：

$\left(f(-x)\right)'=-f'(-x)\le0,f(-x)$

单调递减，C 错误；$-f(-x)$ 单调递增，D 正确

2、解：C

两边取极限得 $f''(x)=0$，两边求导得

$$f'''(x)+2f'(x)f''(x)=1,\lim_{x\to0}f'''(x)=f'''(0)=1>0$$

所以 $(0,f(0))$ 是曲线的拐点

3、解：D

$\int\int\cos xdxdx=\int(\sin x+C)dx=Cx-\cos x+C_1$，D 选项正确

4、解：B　$\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x^2}{x(x+1)}=1,a=2>1,I_1$ 收敛；$\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x}{x(x+1)}=1,a=1,I_2$ 发散

5、解：B　特征方程为 r^2+2r-3，两根为 $r_1=1,r_2=-3,r=1=r_1$，所以特解形式为

$$y^*=x(ax+b)e^x$$

三 计算题

1 解 因为 $\lim\limits_{x\to 0} f(x)=\lim\limits_{x\to 0} x^2\sin\frac{1}{x}=0=f(0)$

所以 $f(x)$ 在 $x=0$ 连续

因为 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{x^2\sin\frac{1}{x}}{x}=\lim\limits_{x\to 0} x\sin\frac{1}{x}=0=f'(0)$

所以 $f(x)$ 在 $x=0$ 可导

2 解 方程两边同时对 x 求导，得到 $2x-\frac{dy}{dx}=e^y\frac{dy}{dx}$

所以 $\frac{dy}{dx}=\frac{2x}{1+e^y}$

$$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{2(1+e^y)-2xe^y\frac{dy}{dx}}{(1+e^y)^2}$$

当 $x=0$ 时，解得 $y=0$， $\frac{dy}{dx}\Big|_{x=0}=0$

所以 $y''(0)=\frac{d^2y}{dx^2}\Big|_{x=0}=\frac{4}{2^2}=1$

3 解 当 $-1\le x\le 0$ 时， $F(x)=\int_{-1}^{x}f(t)\mathrm{d}t=\int_{-1}^{x}t\mathrm{d}t=\frac{1}{2}x^2-\frac{1}{2}$，

当 $0<x\le 1$ 时， $F(x)=\int_{-1}^{x}f(t)\mathrm{d}t=\int_{-1}^{0}t\mathrm{d}t+\int_{0}^{x}\cos t\mathrm{d}t=\sin x-\frac{1}{2}$，

所以 $F(x)=\int_{-1}^{x}f(t)\mathrm{d}t=\begin{cases}\frac{1}{2}x^2-\frac{1}{2}, & -1\le x\le 0\\ \sin x-\frac{1}{2}, & 0<x\le 1\end{cases}$

4 解 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{\int_0^{1-\cos x}\sin t^2dt}{\frac{x^5}{5}+\frac{x^6}{6}}$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\sin(1-\cos x)^2\cdot\sin x}{x^4+x^5}=\lim_{x\to 0}\frac{(1-\cos x)^2\cdot x}{x^4+x^5}=\lim_{x\to 0}\frac{(\frac{1}{2}x^2)^2\cdot x}{x^4+x^5}=0$$

所以当 $x\to 0$ 时，按从低阶到高阶的顺序排列为： $g(x),f(x)$

解 令 $x=\tan t$ 则

$$\int_0^1\frac{\arctan x}{(1+x^2)^{3/2}}\mathrm{d}x=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{t}{\sec^3 t}\sec^2 tdt=\int_0^{\frac{\pi}{4}}t\cos tdt$$

$$=t\sin t\Big|_0^{\frac{\pi}{4}}-\int_0^{\frac{\pi}{4}}\sin tdt=\frac{\pi\sqrt{2}}{8}+\frac{\sqrt{2}}{2}-1$$

6，令 $y'=p$ 则 $y''=\frac{dp}{dx}$

原方程化为： $\frac{dp}{dx}=4x\sqrt{p}$

解得 $\sqrt{p}=x^2+C_1$ 即 $p=(x^2+C_1)^2$

把 $y'(1)=1$ 代入上式得到： $C_1=0$

所以 $\frac{dy}{dx}=x^4$

15

所以 原方程的通解是： $y=\frac{1}{5}x^5+C_2$

把 $y(1)=0$ 代人上式得到： $C_2=-\frac{1}{5}$

所以特解为： $y=\frac{1}{5}(x^5-1)$

四：解 $y'=-2xe^{-x^2}$ ， $y''=-2e^{-x^2}+4x^2e^{-x^2}=2(2x^2-1)e^{-x^2}$

令 $y'=0$ 解得 $x_1=0$，

令 $y''=0$ 解得 $x_2=-\frac{1}{\sqrt{2}},x_3=\frac{1}{\sqrt{2}}$，

所以当 $x<0$ 时， $y'>0$，所以单调增区间是 $(-\infty,0)$，

当 $x>0$ 时， $y'<0$，所以单调减区间是 $(0,+\infty)$，

当 $x<-\frac{1}{\sqrt{2}}$ 或者 $x>\frac{1}{\sqrt{2}}$ 时， $y''>0$，所以凹区间是

$(-\infty,-\frac{1}{\sqrt{2}})\cup(\frac{1}{\sqrt{2}},+\infty)$，

当 $-\frac{1}{\sqrt{2}}<x<\frac{1}{\sqrt{2}}$， $y''<0$，所以凸区间是 $(-\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{1}{\sqrt{2}})$，

并且 $x=0$ 是极大值点， $(-\frac{1}{\sqrt{2}},e^{-\frac{1}{2}})$ 和 $(\frac{1}{\sqrt{2}},e^{-\frac{1}{2}})$ 该曲线的拐点。

五 解 $A=\int_0^1|f(x)|dx=\int_0^1x(1-x)dx=\frac{1}{6}$

$V=\int_0^1\pi f^2(x)dx=\int_0^1\pi x^2(x-1)^2dx=\frac{\pi}{30}$

六 解 令 $x=\pi-t$，则

$$\begin{aligned}\int_0^{\pi}xf(\sin x)\mathrm{d}x&=\int_{\pi}^{0}(\pi-t)f(\sin t)(-\mathrm{d}t)\\&=\int_0^{\pi}(\pi-t)f(\sin t)\mathrm{d}t\\&=\int_0^{\pi}(\pi-x)f(\sin x)\mathrm{d}x\\&=\int_0^{\pi}\pi f(\sin x)\mathrm{d}x-\int_0^{\pi}xf(\sin x)\mathrm{d}x\end{aligned}$$

所以 $\int_0^{\pi}xf(\sin x)\mathrm{d}x=\frac{\pi}{2}\int_0^{\pi}f(\sin x)\mathrm{d}x$

所以 $\int_0^{\pi}\frac{x\sin x}{2-\sin^2x}\mathrm{d}x=\frac{\pi}{2}\int_0^{\pi}\frac{\sin x}{2-\sin^2x}dx=\frac{\pi}{2}\int_0^{\pi}\frac{\sin x}{1+\cos^2x}dx$

$$=\frac{\pi}{2}(-\arctan\cos x)\Big|_0^{\pi}=\frac{\pi^2}{4}$$

七 解 因为 $f(x)$ 在[a,b]上有三阶导数且 $M_0(x_0,f(x_0))$ 是曲线

$y=f(x)$ 在(a,b)内的曲线拐点，

所以 $f''(x_0)=0$

又因为 $f''(x_0)-f''(a)=\int_a^{x_0}f'''(x)dx$ 且 $|f'''(x)|\le M$

所以

$|f''(a)|=|f''(x_0)-f''(a)|=\left|\int_a^{x_0}f'''(x)dx\right|\le\int_a^{x_0}|f'''(x)|dx\le M(x_0-a)$

同理 $|f''(b)|=|f''(b)-f''(x_0)|=\left|\int_{x_0}^{b}f'''(x)dx\right|\le\int_{x_0}^{b}|f'''(x)|dx\le M(b-x_0)$

16

所以$\left|f''(a)\right|+\left|f''(b)\right|\le M(b-a)$

2015-2016 学年第一学期期末考试 A 卷参考答案

一、填空题（15 分，每题 3 分，共 5 题）

1、解：$a=2$　$\left(1+ax^2\right)^{\frac{1}{2}}-1\sim\dfrac{1}{2}ax^2, x\sin x\sim x^2, a=2$

2、解：$y=3x$　　令$t=x+2$，则$\lim\limits_{t\to0}\dfrac{f(t-2)}{t}=\lim\limits_{t\to0}\dfrac{f(t)}{t}=3$，由式子可得$\lim\limits_{t\to0}f(t)=f(0)=0$，$f'(0)=\lim\limits_{t\to0}\dfrac{f(t)-f(0)}{t-0}=3$，所以$f(x)$在$x=0$处切线$y=3x$

3、解：0

令$g(x)=f(x)(x+\cos x)+f(-x)(x-\cos x)$，则

$$g(-x)=f(-x)(-x+\cos(-x))+f(x)(-x-\cos(-x))$$
$$=-\left(f(x)(x+\cos x)+f(-x)(x-\cos x)\right)=-g(x)$$

$g(x)$为定义域上的奇函数，根据定积分的几何性质$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}g(x)dx=0$

4、解：$\dfrac{3}{2}a$

$$l=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{\left(-3a\cos^2\theta\sin\theta\right)^2+\left(3a\sin^2\theta\cos\theta\right)^2}d\theta=3a\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin\theta\cos\theta d\theta=\frac{3}{2}a$$

5、解：$f(x)=2x-2+2e^{-x}$

对方程两边求导得$f'(x)=2x-f(x)$，整理得一阶非齐次线性微分方程　$f'(x)+f(x)=2x$，利用公式求得

$$f(x)=\left[\int 2xe^{\int 1dx}+C_1\right]e^{-\int 1dx}=2x-2+Ce^{-x}$$，C 为 任意常数

由题意得$f(0)=0$，带入得$f(x)=2x-2+2e^{-x}$

二、选择题（15 分，每题 3 分，共 5 题）

1、解：B

$$\lim_{x\to0^+}f(x)=\lim_{x\to0^+}\frac{2}{1+e^{\frac{1}{x}}}+\frac{\sin x}{x}=0+1=1$$

$$\lim_{x\to0^-}f(x)=\lim_{x\to0^-}\frac{2}{1+e^{\frac{1}{x}}}+\frac{\sin x}{-x}=2-1=1$$

所以$\lim\limits_{x\to0^+}f(x)=\lim\limits_{x\to0^-}f(x)=\lim\limits_{x\to0}f(x)=1, x=0$是可去间断点

2、解：A

特征方程为$r^2+1=0$，有一对共轭复根r_1，$_2=\pm i$.对于等式右边为$x+1$的情况$k=0$

不是特征根，所以特解形式为$ax+b$；对于等式右边为$\sin x$的情况，$\alpha=0,\beta=1$，特

征根可写为$\alpha\pm\beta i$，Q_m为x的 0 阶多项式，所以特解形式为

$x(A\cos x+B\sin x)$.最终方　程特解可写为

$ax+b+x(A\cos x+B\sin x)$

3、解：A

A 项，$\int_1^{+\infty}\frac{1}{x^2}dx=\lim\limits_{a\to\infty}\left(-\frac{1}{x}\right)\Big|_1^a=1$

B 项，反常积分 $\int_{-1}^{0}\frac{1}{x^2}dx$ 发散，反常积分 $\int_0^1\frac{1}{x^2}dx$ 发散，所以积分整体发散

C 项，积分 $\int_0^1\frac{1}{x}dx$ 发散，所以积分整体发散

D 项，$\int_{-\infty}^{+\infty}\sin xdx=\lim\limits_{a\to\infty}(-\cos x)\Big|_{-a}^{a}=-\cos x\Big|_{-\infty}^{+\infty}$，极限不存在所以积分不存在

4、解：D

A 项，一切初等函数在其定义区间内都是连续的，而定义域可以包含定义区间和不连续的 点，错误

B 项成立的前提条件是 $f'(x_0)$ 存在，错误

C 项，某一点导数存在并不能说明在该点邻域处导数也存在，所以仅由一点处的导数情况无法得出单调性的情况

D 项，有界函数在闭区间内积分存在

5、解：D

三、

1.解：原式

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{\left(\sqrt{x^2+1}-3x\right)\frac{2x}{x^2+1}}{\ln\left(2+\frac{1}{x^2}\right)}=\frac{1}{\ln 2}\lim_{x\to+\infty}\frac{2x\left(\sqrt{x^2+1}-3x\right)}{x^2+1}=-\frac{4}{\ln 2}$$

2．解：$f'(0)=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{f(\Delta x)-f(0)}{\Delta x}=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{\int_0^{(\Delta x)^2}(e^{t^2}-1)dt}{(\Delta x)^3}$

3 分

$$=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{(e^{(\Delta x)^4}-1)\cdot 2\Delta x}{3(\Delta x)^2}=\frac{2}{3}\lim_{\Delta x\to 0}\frac{(\Delta x)^4}{\Delta x}=0.$$

3．解 $\frac{dy}{dx}=\frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}=\frac{\frac{1}{\sqrt{1+t^2}}}{\frac{1}{1+t^2}}=\sqrt{1+t^2}$，

$$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{dy'}{dx}=\frac{d(\sqrt{1+t^2})}{d(\arctan t)}=\frac{t}{\sqrt{1+t^2}}(1+t^2)=t\sqrt{1+t^2}.$$

4．

$$\int\frac{\ln x}{x\sqrt{1+\ln x}}dx=\int\frac{(\ln x+1)-1}{\sqrt{1+\ln x}}d(\ln x+1)=\frac{2}{3}(\ln x+1)^{\frac{3}{2}}-2(\ln x+1)^{\frac{1}{2}}$$

5．已知函数 $f(x)$ 连续，且满足 $\int_0^x tf(x-t)dt=1-\cos x$，求 $\int_0^{\pi}[f(x)]^3dx$.

解：令 $x-t=u$，则

$$\int_0^x tf(x-t)dt=\int_0^x(x-u)f(u)du=x\int_0^x f(u)du-\int_0^x uf(u)du,$$

由已知得到 $x\int_0^x f(u)du-\int_0^x uf(u)du=1-\cos x$，

求导得 $\int_0^x f(u)du=\sin x$，

再求导得 $f(x)=\cos x$，所以 $\int_0^{\pi}[f(x)]^3dx=\int_0^{\pi}\cos^3 xdx=0$

6．解：由题意知 $y(1)=1$，$y'(1)=2$。

18

令 $p=y'$，则 $xp'=p$，$\dfrac{dp}{p}=\dfrac{dx}{x}$，$\ln p=\ln x+\ln C_1$，$\therefore\ p=C_1x$，即 $y'=C_1x$．所以 $y=x^2$

四、证 令 $f(x)=x\ln\dfrac{1+x}{1-x}+\cos x-1-\dfrac{x^2}{2}$，由于 $f(x)$ 是偶函数，只要在 $[0,1)$ 上 $f(x)\ge 0$，

$$f'(x)=\ln\frac{1+x}{1-x}+\frac{2x}{1-x^2}-\sin x-x$$，且 $f'(0)=0$

$$f''(x)=\frac{4}{\left(1-x^2\right)^2}-\cos x-1>0 \quad x\in(0,1)$$

所以，$f'(x)$ 是单调递增的，从而有 $f'(x)>f'(0)=0$

故 $f(x)$ 是单调递增的，从而有 $f(x)>f(0)=0$，即

$$x\ln\frac{1+x}{1-x}+\cos x\ge 1+\frac{x^2}{2}$$

五、解 $f(x)=\int_{-a}^{x}(x-t)g(t)\mathrm{d}t+\int_{x}^{a}(t-x)g(t)\mathrm{d}t$

$=x\int_{-a}^{x}g(t)\mathrm{d}t-\int_{-a}^{x}tg(t)\mathrm{d}t+\int_{x}^{a}tg(t)\mathrm{d}t-x\int_{x}^{a}g(t)\mathrm{d}t$，则

$$f'(x)=\int_{-a}^{x}g(t)\mathrm{d}t+xg(x)-xg(x)-xg(x)-\int_{x}^{a}g(t)\mathrm{d}t+xg(x)=\int_{-a}^{x}g(t)\mathrm{d}t+\int_{a}^{x}g(t)\mathrm{d}t$$

$f''(x)=2g(x)>0$．

所以，曲线 $y=f(x)$ 在 $[-a,a]$ 上是凹的.

六 解：$V_x=\int_0^a \pi x^{\frac{2}{3}}dx=\dfrac{3\pi a^{\frac{5}{3}}}{5}$

$$V_y=\pi a^{\frac{7}{3}}-\int_0^{a^{\frac{1}{3}}}\pi y^6dy=\frac{6\pi a^{\frac{7}{3}}}{7}.$$

由 $V_y=10V_x$，解得 $a=7\sqrt{7}$.

七、证明：由积分中值定理可知，$\exists c\in[0,\frac{1}{3}]$，使得

$$3\int_0^{\frac{1}{3}}e^{1-x^2}f(x)dx=3\times\frac{1}{3}e^{1-c^2}f(c)=e^{1-c^2}f(c)$$，

即有 $f(1)=e^{1-c^2}f(c)$ ……………………………(1)

令 $F(x)=e^{-x^2}f(x)$，则 $F(x)$ 在闭区间 $[c,1]$ 上连续，在开区间 $(c,1)$ 内可导，又

$F(1)=e^{-1}f(1)$，$F(c)=e^{-c^2}f(c)$，由（1）可知 $F(1)=F(c)$.

由罗尔定理知至少存在一点 $\xi\in(c,1)\subset(0,1)$，使得

$F'(\xi)=f'(\xi)e^{-\xi^2}-2\xi e^{-\xi^2}f(\xi)=0$，

又 $e^{-\xi^2}\ne 0$，所以有 $f'(\xi)=2\xi f(\xi)$ 成立。

2014-2015 学年第一学期期末考试 A 卷参考答案

一、填空题

1、解：e^6　原式$=\lim\limits_{x\to0}^{\frac{2}{\sin x}\ln(1+3x)}=e^{\lim\limits_{x\to0}\frac{2\ln(1+3x)}{\sin x}}=e^6$

2、解：$\arctan x^2+x\cdot\dfrac{2x}{1+x^4}=\arctan x^2+\dfrac{2x^2}{1+x^4}$

$$y'=\arctan x^2+x\cdot\frac{2x}{1+x^4}=\arctan x^2+\frac{2x^2}{1+x^4}$$

3、解：$-\left(2x^2+1\right)e^{-x^2}$

$$\int xf'(x)dx=\int xdf(x)=xf(x)-\int f(x)dx$$
$$=x\left(e^{-x^2}\right)'-e^{-x^2}+C=-\left(2x^2+1\right)e^{-x^2}+C$$

4、解：$y=x+1$　$y'\big|_{x=0}=e^x\big|_{x=0}=1$　切线：$y-1=x$ 即 $y=x+1$

5.解：$\dfrac{\sqrt5}{2}\left(e^{\pi}-1\right)$

$$l=\int_0^{\frac{x}{2}}\sqrt{r^2+(r')^2}\,d\theta=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{e^{4\theta}+4e^{4\theta}}\,d\theta$$
$$=\sqrt5\int_0^{\frac{\pi}{2}}e^{2\theta}d\theta=\frac{\sqrt5}{2}e^{2\theta}\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}=\frac{\sqrt5}{2}\left(e^{\pi}-1\right)$$

二、选择题

1、解：C　$\lim\limits_{x\to-1}\dfrac{x^3+1}{3(x+1)}=\lim\limits_{x\to-1}\dfrac{3x^2}{3}=1$　故为等价无穷小

2、解：B

$$f'(x)=\sin x\qquad f(x)=-\cos x+C_1$$

$\int f(x)dx=-\sin x+C_1x+C_2$　令 $C_1=0$　$C_2=1$　B 正确

3、解：B

$$\because\lim_{x\to0}\frac{f(x)}{1-\cos x}=1\qquad\lim_{x\to0}(1-\cos x)=0\qquad\therefore\lim_{x\to0}f(x)=0$$

法一：又$\because\lim\limits_{x\to0}\dfrac{f(x)}{1-\cos x}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\frac{f(x)-0}{x}}{\frac{1}{2}x}$　　$\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac12x>0$

$$\lim_{x\to0^-}\frac12x<0\quad\lim_{x\to0}\frac12x=0$$

$\therefore$由极限的保号性 $\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{f(x)-0}{x}>0$　$\lim\limits_{x\to0^-}\dfrac{f(x)-0}{x}<0$

$$\lim_{x\to0}\frac{f(x)-0}{x}=0$$

法二：由于$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{f(x)}{1-\cos x}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{f(x)}{\frac12x^2}=1$　　令 $f(x)=\dfrac12x^2$　得 B

正确

4、解：B

A：$\displaystyle\int_1^{+\infty}\frac{1}{\sqrt{x}(1+x)}dx=2\int_1^{+\infty}\frac{1}{1+x}d\sqrt{x}=2\arctan\sqrt{x}\Big|_1^{+\infty}=\frac{\pi}{2}$

C：$\displaystyle\int_2^{+\infty}\frac{1}{x\ln^2x}dx=\int_2^{+\infty}\frac{1}{\ln^2x}d\ln x=-\frac{1}{\ln x}\Big|_2^{+\infty}=\frac{1}{\ln2}$

D：$\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty}xe^{-x^2}dx=\frac12\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-x^2}dx^2=0$

20

B：$\int_{-1}^{1}\frac{1}{\sin x}dx=\int_{-1}^{0}\frac{1}{\sin x}dx+\int_{0}^{1}\frac{1}{\sin x}dx$

前后两部分均不存在，故$\int_{-1}^{1}\frac{1}{\sin x}dx$不存在

5、解：D

水平渐近线：$\lim\limits_{x\to\infty}\frac{1+e^{-x^2}}{1-e^{-x^2}}=1$ $\therefore y=1$为水平渐近线

铅直渐近线：x无定义的点 $e^{-x^2}=1$ $x=0$

$$\lim_{x\to 0}\frac{1+e^{-x^2}}{1-e^{-x^2}}=\infty \quad \therefore x=0\text{为铅直渐近线}$$

三、计算题

1、原式$\le\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n\times n}{n^2+\pi}=1$

$\ge\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n\times n}{n^2+n\pi}=1$ 故原式=1

2、$\lim\limits_{x\to 0}\frac{3\sin x-x^2\cos\frac{1}{x}}{\left(e^{-x}-1\right)\left(1+\cos x\right)}=\frac{1}{2}\lim\limits_{x\to 0}\frac{3\sin x-x^2\cos\frac{1}{x}}{-x}=-\frac{3}{2}$

3．两边取对数，化为隐式$\ln y=\sin x\cdot\ln x$，

两边对 x 求导，$\frac{1}{y}y'=\cos x\cdot\ln x+\frac{\sin x}{x}$

$\therefore$ $y'=x^{\sin x}(\cos x\cdot\ln x+\frac{\sin x}{x})$；

4．$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{1}{2t}$ ....3分，

$\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}=-\frac{1+t^2}{4t^3}$......................................6分；

5．

$\int\frac{\arctan x}{x^2}dx=\int\arctan x\,d(-\frac{1}{x})=-\frac{1}{x}\arctan x+\int\frac{1}{x}\cdot\frac{1}{1+x^2}dx$

$=-\frac{1}{x}\arctan x+\int(\frac{1}{x}-\frac{x}{1+x^2})dx=-\frac{1}{x}\arctan x+\ln|x|-\frac{1}{2}\ln(1+x^2)+C$

6．$\int_0^2 f(x-1)dx=\int_{-1}^{1}f(x)dx=\int_{-1}^{0}\frac{1}{1+x^2}dx+\int_0^1 ln(1+x)dx$

$=\frac{\pi}{4}+2\ln 2-1$.

四、

解：$\lim\limits_{x\to 0^-}f\left(x\right)=\lim\limits_{x\to 0^-}\frac{2\left(1-\cos x\right)}{x^2}=1$

$\lim\limits_{x\to 0^+}f\left(x\right)=\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{\int_0^x\cos t^2\mathrm{d}t}{x}=\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{\cos x^2}{1}=1$

故$\lim\limits_{x\to 0^-}f\left(x\right)=\lim\limits_{x\to 0^+}f\left(x\right)=f\left(0\right)$.因此$f\left(x\right)$在 $x=0$处连续. ……5 分

又$f'_-\left(0\right)=\lim\limits_{x\to 0^-}\frac{f\left(x\right)-f\left(0\right)}{x-0}=\lim\limits_{x\to 0^-}\frac{2\left(1-\cos x\right)-x^2}{x^3}=0$

$f'_+\left(0\right)=\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{f\left(x\right)-f\left(0\right)}{x-0}=\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{\int_0^x\cos t^2\mathrm{d}t-x}{x^2}=0$

故$f\left(x\right)$在 $x=0$处可导，且$f'\left(0\right)=0$.

五、解　定积分应用：旋转体体积。

法 1 所求体积V=“曲边梯形$D+D_2$绕y轴的旋转体体积V_1”减去“D_2绕y轴的旋转体体积V_2”，

$V_1=\int_0^2 2\pi x e^{\frac{x}{2}}dx=8\pi$（$V_y=2\pi\int_a^b xf(x)dx$），

$V_2=\frac{2}{3}\cdot\pi\cdot 2^2\cdot e=\frac{8}{3}e\pi$（圆柱体积减去同底等高圆锥体积），……9分

故

$V=V_1-V_2=8\pi-\frac{8}{3}\pi e$。

法 2　所求体积可以看成是由切线、y轴与$y=e$所围直角三角形绕y轴旋转的圆锥体体积V_1与由曲线、y轴与$y=e$所围曲边三角形绕y轴旋转的旋转体体积V_2之差：

$$V=V_1-V_2=\frac{1}{3}\pi\cdot 2^2\cdot e-\int_1^e\pi(2\ln y)^2dy$$

$$=\frac{4}{3}\pi e-4\pi\int_1^e\ln^2 ydy=\frac{4}{3}\pi e-4\pi[(y\ln^2 y)|_1^e-\int_1^e y\cdot 2\ln y\cdot\frac{1}{y}dy]$$

$$=\frac{4}{3}\pi e-4\pi(e-2\int_1^e\ln ydy)=\frac{4}{3}\pi e-4\pi\{e-2[(y\ln y)|_1^e-\int_1^e dy]$$

$$=\frac{4}{3}\pi e-4\pi\{e-2[e-(e-1)]=\frac{4}{3}\pi e-4\pi(e-2)=8\pi\ (1-\frac{e}{3})$$。

六、

解　证：令$f(x)=\ln x+\frac{1}{x}\quad(x>0)$ $f'(x)=\frac{1}{x}-\frac{1}{x^2}=\frac{x-1}{x^2}\overset{令}{==}0$得唯一驻点$x=1$

$$f''(1)=-\frac{1}{x^2}+\frac{2}{x^3}\Big|_{x=1}=-1+2=1>0$$

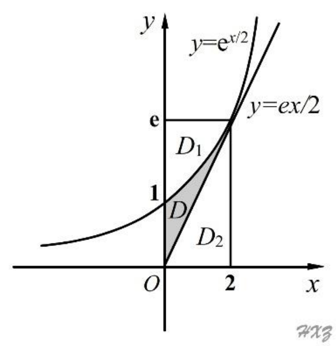
$\therefore$唯一驻点$x=1$是极小值点也是最小值点

$\therefore f(x)\geq f(1)=1$，即$\ln x+\frac{1}{x}\geq 1,\quad(x>0)$

七、作辅助函数$F(x)=e^{-2015x}f(x)$，则$F(x)$在$[0,1]$上满足罗尔定理的条件，故在$(0,1)$内至少存在一点ξ，使

$F'(\xi)=e^{-2015\xi}[f'(\xi)-2015f(\xi)]=0$，注意到$e^{-2015\xi}\neq 0$，即得

$f'(\xi)=2015f(x)$.



22