合 肥 工 业 大 学 试 卷（A）

2014～2015 学年第 一 学期 课程代码 1400091B 课程名称 概率论与数理统计 学分 3.5 课程性质:必修 考试形式: 闭卷

专业班级（教学班）__________ 考试日期 2015.1.7 命题教师__________ 系（所或教研室）主任审批签名__________

一、填空题（每小题 3 分，共 15 分）

1．设 A,B 为两个事件，已知 $P(A)=0.5, P(B)=0.4$，$P(A\cup B)=0.7$，则 $P(A\bar{B})=$______.

2．设离散型随机变量的分布律为 $P\{X=k\}=\dfrac{a}{2^k}(k=1,2,3,\cdots)$，其中 a 为常数，则 $P\{X\geq 3\}=$______.

3．设连续型随机变量 X 的密度函数为 $f(x)=\begin{cases} e^{-x}, & x>0, \\ 0, & x\leq 0, \end{cases}$，则方程 $x^2+4x+X=0$ 无实根的概率为______.

4．设 X,Y 为两个相互独立随机变量，且 $X\sim P(2), Y\sim U(1,4)$，则 $D(X-2Y+4)=$______.

5．设总体 $X\sim N(\mu,\sigma^2)$,其中参数 μ,σ^2 均未知，现在对 X 进行 16 次独立观察，得样本均值和样本方差的观察值分别为 $\bar{x}=3.4, s^2=0.25$，则总体均值 μ 的置信度为 0.95 的置信区间为______.
（$t_{0.05}(15)=1.7531, t_{0.05}(16)=1.7459, t_{0.025}(15)=2.1315, t_{0.025}(16)=2.1199$）

二、选择题（每小题 3 分，共 15 分）

1．设 A 与 B 是两个事件，如果 $P(AB)=0$，则（ ）.

（A） A 与 B 是互斥的　　（B） A 与 B 相互独立

（C） AB 未必是不可能事件　　（D） $P(A)=0$ 或 $P(B)=0$

2．设随机变量 $X\sim N(\mu,\sigma^2)$，则 $P\{X-\mu>2\sigma^2\}$（ ）

(A)与 μ 无关，与 σ 有关　　(B)与 μ 有关，与 σ 无关

(C) 与 μ 及 σ 均无关　　(D)与 μ 及 σ 均有关

3．设 X 与 Y 是两个随机变量，$f_1(x)$、$f_2(y)$ 与 $F_1(x)$、$F_2(y)$ 分别是对应的概率密度函数与分布函数，且 $f_1(x)$、$f_2(y)$ 连续，则以下函数中仍是概率密度函数的是（ ）.

（A） $f_1(x)+f_2(x)$　　（B） $f_1(x)F_2(x)-f_2(x)F_1(x)$

（C） $f_1(x)f_2(x)$　　（D） $f_1(x)F_1(x)+f_2(x)F_2(x)$

4．设随机变量 X,Y 的方差存在,则随机变量 $U=X+Y$ 与 $V=X-Y$ 不相关的充分必要条件是（ ）.

（A） $\mathrm{E}(X)=\mathrm{E}(Y)$　　（B） $\mathrm{D}(X)=\mathrm{D}(Y)$

（C） $\mathrm{E}(X^2)=\mathrm{E}(Y^2)$　　（D） $\mathrm{E}(X^2)+[\mathrm{E}(X)]^2=\mathrm{E}(Y^2)+[\mathrm{E}(Y)]^2$

5．设 $X_1,X_2,\cdots,X_n$ 是来自总体 $X\sim N(\mu,\sigma^2)$ 的样本，为使 $Y=k\sum_{i=1}^{n-1}(X_{i+1}-X_i)^2$ 成为总体方差的无偏估计，则应选 k 为（ ）.

（A） $\dfrac{1}{n-1}$　　（B） $\dfrac{1}{n}$　　（C） $\dfrac{1}{2(n-1)}$　　（D） $\dfrac{1}{2n}$

三、每次试验事件 A 发生的概率是 0.5，现进行 4 次独立重复的试验，如果事件 A 一次也不发生，则事件 B 也不发生；如果 A 发生一次，则事件 B 发生的概率为 0.6，如果 A 发生两次或两次以上，则事件 B 一定发生.（1）试求事件 B 发生的概率；（2）若已知事件 B 发生了，求事件 A 发生一次的概率.（本题 10 分）

四、设连续型随机变量 X 的概率密度函数为 $f(x)=\begin{cases} k(1+x), & -1<x<1, \\ 0, & \text{其他}, \end{cases}$ 求：（1）常数 k 的值；（2）X 的分布函数；（3）概率 $P\{-2\leq X<\frac{1}{2}\}$；（4）$Y=2X^2+1$ 的概率密度函数 $f_Y(y)$.（本题 14 分）

五、设二维连续型随机变量 (X,Y) 的联合密度函数为 $f(x,y)=\begin{cases} xe^{-y}, & 0<x<y \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$

（1）求 X,Y 的边缘密度函数 $f_X(x), f_Y(y)$；（2）判别 X 与 Y 的相互独立性，并说明理由；（3）求概率 $P\{X+Y\leq 2\}$。（本题 14 分）

六、设离散型随机变量 $X\sim\begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ \frac{1}{6} & \frac{1}{3} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$，记 $U=\begin{cases} 0, X<0, \\ 1, X\geq 0, \end{cases}$ $V=\begin{cases} -1, X\leq 0, \\ 1, X>0, \end{cases}$（1）求随机变量 U 与 V 的分布律；（2）求 (U,V) 的联合分布律；（3）求 U,V 的相关系数，并判别 U,V 是否不相关.（本题 12 分）

七、设随机变量 X 的概率密度函数为 $f(x,\theta)=\begin{cases} \dfrac{1}{\theta^2}e^{-\frac{x}{\theta^2}}, & x>0 \\ 0, & x\leq 0 \end{cases}$，$X_1,\ldots,X_n$ 为 X 的简单随机样本，试求：（1）参数 θ 的矩估计 $\hat{\theta}_M$；（2）θ 的极大似然估计 $\hat{\theta}_L$；（3）判别 $\hat{\theta}_L^2$ 是否为 θ^2 的无偏估计.（本题 12 分）

八、设 $(X_1,X_2,\cdots,X_{11})$ 是来自正态总体 $N(0,\sigma^2)$ 的样本，$\overline{X}=\dfrac{1}{9}\sum_{i=1}^{9}X_i$，$S^2=\dfrac{1}{8}\sum_{i=1}^{9}(X_i-\overline{X})^2$，若 $T=C\dfrac{\overline{X}+X_{10}}{\sqrt{8S^2+X_{11}^2}}\sim t(9)$ 的分布，试求常数 C 的值.（本题 8 分）

合 肥 工 业 大 学 试 卷（A） 一

2014～2015 学年第 一 学期 课程代码 1400091B 课程名称 概率论与数理统计 学分 3.5 课程性质:必修 考试形式: 闭卷

专业班级（教学班）________ 考试日期 2015.1.7 命题教师______ 系（所或教研室）主任审批签名______

解答：

一

1. $P(A\bar{B})=P(A\cup B)-P(B)=0.3$；

2. $a=1, P\{X\ge 3\}=1-P\{X=1\}-P\{X=2\}=\dfrac{1}{4}$;

3. $p=P\{X>4\}=e^{-4}$；

4. $D(X-2Y+4)=D(X)+4D(Y)=5$;

5. $(\bar{x}\pm\dfrac{s}{\sqrt{16}}t_{0.025}(15))=(3.4\pm 0.2664)=(3.1336, 3.6664)$。

二

1.C；2.A；3.D；4.B；5.C。

三

解：（1）设 A_0：A一次也没有发生，A_1：A发生一次，A_2：A至少发生两次，则 A_0，A_1，A_2 是一个完备事件组，由全概率公式有

$$P(B)=\sum_{i=0}^{2}P(A_i)P(B\mid A_i)=\frac{1}{16}\times 0+4\times\frac{1}{16}\times 0.6+(1-\frac{1}{16}-4\times\frac{1}{16})\times 1=\frac{67}{80};$$

（2）$P(A_1\mid B)=\dfrac{P(A_1)P(B\mid A_1)}{P(B)}=\dfrac{\frac{3}{20}}{\frac{67}{80}}=\dfrac{12}{67}$.

四

解：（1）由 $\int_{-\infty}^{+\infty}f(x)dx=1\Rightarrow\int_{-1}^{1}k(1+x)dx=\dfrac{k}{2}(1+x)^2\Big|_{-1}^{1}=2k=1, k=\dfrac{1}{2}$;

（2）$F(x)=\int_{-\infty}^{x}f(t)dt=\begin{cases}0, & x<-1,\\ \dfrac{1}{4}(1+x)^2, & -1\le x\le 1,\\ 1, & x>1\end{cases}$

（3）$P\{-2\le X<\frac{1}{2}\}=F(\frac{1}{2})-F(-2)=\dfrac{3}{16}$;

或 $P\{-2\le X<\frac{1}{2}\}=\int_{-2}^{\frac{1}{2}}f(x)dx=\dfrac{1}{2}\int_{-1}^{\frac{1}{2}}(1+x)dx=\dfrac{9}{16}$；

（4）$F_Y(y)=P\{Y\le y\}=P\{Y\le y\}=P\{2X^2+1\le y\}$,

当 $y\le 1$时，$F_Y(y)=0$，

当$1<y<3$时，$F_Y(y)=P\{-\sqrt{\dfrac{y-1}{2}}<X<\sqrt{\dfrac{y-1}{2}}\}=\dfrac{1}{2}\int_{-\sqrt{\frac{y-1}{2}}}^{\sqrt{\frac{y-1}{2}}}(1+x)dx,$

当 $y\ge 3$ 时 $F_Y(y)=1,$

所以 $f_Y(y)=F_Y'(y)=\begin{cases}\dfrac{1}{4\sqrt{y-1}}(\sqrt{2}+\sqrt{y-1}), & 1<y<3,\\ 0, & 其他.\end{cases}$

五

解：（1）$f_X(x)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)dy=\begin{cases}0, & x\le 0,\\ \int_x^{+\infty}xe^{-y}dy, & x>0,\end{cases}=\begin{cases}0, & x\le 0,\\ xe^{-x}, & x>0,\end{cases}$

$f_Y(x)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)dx=\begin{cases}0, & y\le 0,\\ \int_0^{y}xe^{-y}dx, & y>0,\end{cases}=\begin{cases}0, & y\le 0,\\ \dfrac{1}{2}y^2e^{-y}, & y>0\end{cases}$；

（2）由于当 $x>0, y>0$ 时 $f_X(x)f_Y(y)=\dfrac{1}{2}xy^2e^{-(x+y)}\ne f(x,y)$，所以 X 与 Y 不独立；

（3）$P\{X+Y\le 2\}=\iint\limits_{x+y\le 2}f(x,y)dxdy=\int_0^1dx\int_x^{2-x}xe^{-y}dy=\int_0^1x(e^{-x}-e^{x-2})dx$

$=-x(e^{-x}+e^{x-2})\Big|_0^1+\int_0^1(e^{-x}+e^{x-2})dx=1-\dfrac{2}{e}-\dfrac{1}{e^2}$.

六

解：（1）$U\sim\begin{pmatrix}0 & 1\\ \frac{1}{6} & \frac{5}{6}\end{pmatrix}, V\sim\begin{pmatrix}-1 & 1\\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2}\end{pmatrix}$；

（2）$P\{U=0,V=-1\}=P\{X=-1\}=\dfrac{1}{6}, P\{U=0,V=1\}=0$，

$P\{U=1,V=-1\}=P\{X=0\}=\dfrac{1}{3}, P\{U=1,V=1\}=P\{X=1\}=\dfrac{1}{2}$；

或

V \ U	-1 1

0	$\frac{1}{6}$	0
1	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{2}$

（3）$\mathrm{Cov}(U,V)=E(UV)-(EU)(EV)=\frac{1}{6},DU=\frac{5}{36},DV=1,\rho_{UV}=\frac{1}{\sqrt{5}}$，

$\rho_{UV}\neq 0$，因此U与V不是不相关的.

七

解：（1）求θ的矩估计，

$$\mu=E(X)=\int_0^{+\infty}x\frac{1}{\theta^2}e^{-\frac{x}{\theta^2}}dx=\theta^2,\ 令\ \mu=\bar{X},\quad \theta=\sqrt{\bar{X}}\quad 所以\theta的矩估计\hat{\theta}=\sqrt{\bar{X}};$$

（2）θ的极大似然估计，

$$L=\prod_{i=1}^{n}\frac{1}{\theta^2}e^{-\frac{x_i}{\theta^2}}=\frac{1}{\theta^{2n}}e^{-\frac{1}{\theta^2}\sum_{i=1}^{n}x_i},\quad \ln L=-2n\ln\theta-\frac{1}{\theta^2}\sum_{i=1}^{n}x_i,$$

$$\frac{d\ln L}{d\theta}=-\frac{2n}{\theta}+\frac{2}{\theta^3}\sum_{i=1}^{n}x_i=0，所以\theta的极大似然估计量为:\quad \hat{\theta}_L=\sqrt{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i}=\sqrt{\bar{X}};$$

（3）$E(\hat{\theta}_L^2)=E(\bar{X})=E(X)$，而由（1）知$E(X)=\theta^2$，因此$E(\hat{\theta}_L^2)=\theta^2$，即$\hat{\theta}_L^2$是$\theta^2$的无偏估计.

八

解：由题设$\bar{X}+X_{10}\sim N(0,\frac{10}{9}\sigma^2)$，且$\bar{X}+X_{10}$与$S^2,X_{11}$相互独立，$\frac{3}{\sigma\sqrt{10}}(\bar{X}+X_{10})\sim N(0,1)$，

$\frac{8S^2}{\sigma^2}\sim\chi^2(8),\frac{1}{\sigma^2}X_{11}^2\sim\chi^2(1)$，$\frac{8S^2}{\sigma^2}$与$\frac{1}{\sigma^2}X_{11}^2$相互独立，因此$\frac{8S^2}{\sigma^2}+\frac{1}{\sigma^2}X_{11}^2\sim\chi^2(9)$，由$t-$分布的构

造可知$$\frac{\frac{3}{\sigma\sqrt{10}}(\bar{X}-X_{10})}{\sqrt{(\frac{8S^2}{\sigma^2}+\frac{1}{\sigma^2}X_{11}^2)\Big/9}}=\frac{9}{\sqrt{10}}\times\frac{\bar{X}-X_{10}}{\sqrt{8S^2+X_{11}^2}}\sim t(9),C=\frac{9}{\sqrt{10}}.$$