课外练习题 2

1．设 $\boldsymbol{\alpha}=(1/2,0,0,1/2)^{\mathrm{T}}$，$\boldsymbol{A}=\boldsymbol{E}-\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\alpha}^{T}$，$\boldsymbol{B}=\boldsymbol{E}+2\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\alpha}^{T}$，则 $\boldsymbol{AB}=$ ____E____.

2．设 $\boldsymbol{A}$ 为三阶方阵，且 $|\boldsymbol{A}|=2$，则 $\left|\dfrac{3}{2}\boldsymbol{A}^{*}+7\boldsymbol{A}^{-1}\right|=$ ____500____.

3．设 $\boldsymbol{A}$ 是 4 阶方阵，$R(\boldsymbol{A})=2$，$\boldsymbol{A}^{*}$ 是 $\boldsymbol{A}$ 的伴随矩阵，则 $R(\boldsymbol{A}^{*})=$ ____0____.

4．设 $\boldsymbol{A}$ 是 n 阶可逆矩阵，如果 $\boldsymbol{A}$ 中每行元素之和都是 6，那么 $\boldsymbol{A}^{-1}$ 每行元素之和必是 1/6____.

提示：$\boldsymbol{A}\begin{pmatrix}1\\1\\\vdots\\1\end{pmatrix}=6\begin{pmatrix}1\\1\\\vdots\\1\end{pmatrix}\Rightarrow\begin{pmatrix}1\\1\\\vdots\\1\end{pmatrix}=6\boldsymbol{A}^{-1}\begin{pmatrix}1\\1\\\vdots\\1\end{pmatrix}\Rightarrow\boldsymbol{A}^{-1}\begin{pmatrix}1\\1\\\vdots\\1\end{pmatrix}=\dfrac{1}{6}\begin{pmatrix}1\\1\\\vdots\\1\end{pmatrix}$

5．$$\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&-2&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a_{11}&a_{12}&a_{13}\\a_{21}&a_{22}&a_{23}\\a_{31}&a_{32}&a_{33}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0&0\\0&0&1\\0&1&0\end{pmatrix}^{2021}=\begin{pmatrix}a_{11}&a_{13}&a_{12}\\a_{21}&a_{23}&a_{22}\\a_{31}-2a_{21}&a_{33}-2a_{23}&a_{32}-2a_{22}\end{pmatrix}.$$

6．设 3×4 矩阵 $\boldsymbol{B}$ 的秩 $R(\boldsymbol{B})=3$，且 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&1&1\\0&1&3\\0&1&9\end{pmatrix}$，则 $R(\boldsymbol{AB})=$ ____3____.

7．已知矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}2&1&1\\4&2&a+1\\2&1&1\end{pmatrix}$，且 $R(\boldsymbol{A})=2$，则 $a\neq$ ____1____.

8．设向量 $\boldsymbol{\beta}=\begin{pmatrix}0\\2\\a\end{pmatrix}$ 可由向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1=\begin{pmatrix}1\\1\\-1\end{pmatrix},\boldsymbol{\alpha}_2=\begin{pmatrix}-1\\2\\3\end{pmatrix}$ 线性表示，则 $a=$ __4/3____.

9．设 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 为 n 阶方阵，且 $\boldsymbol{ABBA}=\boldsymbol{E}$，则必有（ B ）.

（A）$\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{BA}$　（B）$\boldsymbol{B}^2\boldsymbol{A}^2=\boldsymbol{E}$　（C）$(\boldsymbol{AB})^2=\boldsymbol{E}$　（D）$(\boldsymbol{BA})^2=\boldsymbol{E}$

10．设 $\boldsymbol{A}$ 为三阶可逆方阵，交换 $\boldsymbol{A}$ 的第一行和第二行得 $\boldsymbol{B}$，则必有（ D ）.

（A）交换 $\boldsymbol{A}^{*}$ 的第一行和第二行得 $\boldsymbol{B}^{*}$　（B）交换 $\boldsymbol{A}^{*}$ 的第一列和第二列得 $\boldsymbol{B}^{*}$

（C）交换 $-\boldsymbol{A}^{*}$ 的第一行和第二行得 $\boldsymbol{B}^{*}$　（D）交换 $-\boldsymbol{A}^{*}$ 的第一列和第二列得 $\boldsymbol{B}^{*}$

11．设 $\boldsymbol{A}$ 是 3 阶方阵，将 $\boldsymbol{A}$ 的第一行与第二行交换得 $\boldsymbol{B}$，再把 $\boldsymbol{B}$ 的第二行加到第三行得 $\boldsymbol{C}$，

则满足 $\boldsymbol{PA}=\boldsymbol{C}$ 的可逆矩阵 $\boldsymbol{P}=$（ A ）.

（A）$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ （B）$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ （C）$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$ （D）$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

12. 设 $\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}$ 为 3 阶非零矩阵，满足 $\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{O}$，且 $R(\boldsymbol{B})=2$，则 $R(\boldsymbol{A})=$（ C ）.

（A）3 （B）2 （C）1 （D）0

13. 设 $\boldsymbol{A}$ 为3阶方阵，则 $R(\boldsymbol{A}^*)$ 不可能取到的值为（ C ）

（A）0 （B）1 （C）2 （D）3

14. 设 $\boldsymbol{P}, \boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}$ 均为3阶实方阵，若 $\boldsymbol{PA}=\boldsymbol{B}$，则下述说法正确的是（ D ）

（A）必有 $R(\boldsymbol{A})=R(\boldsymbol{B})$ （B）$\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 的行向量组必等价

（C）$\boldsymbol{A}$ 必可通过初等行变换变为 $\boldsymbol{B}$ （D）$\boldsymbol{B}$ 的行向量组可由 $\boldsymbol{A}$ 的行向量组线性表示

15. n 维向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_m$ $(3 \le m \le n)$ 线性无关的充要条件是（ C ）.

（A）存在一组全为零的数 $k_1, k_2, \cdots, k_m$，使得 $k_1\boldsymbol{\alpha}_1 + k_2\boldsymbol{\alpha}_2 + \cdots + k_m\boldsymbol{\alpha}_m = \boldsymbol{0}$

（B）$\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_m$ 中任意两个向量都线性无关

（C）$\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_m$ 中任意向量都不能由其余向量线性表示

（D）存在不全为零的一组数 $k_1, k_2, \cdots, k_m$，使得 $k_1\boldsymbol{\alpha}_1 + k_2\boldsymbol{\alpha}_2 + \cdots + k_m\boldsymbol{\alpha}_m \ne \boldsymbol{0}$

16.（**12 分**） n 阶实方阵 $\boldsymbol{A}$ 满足 $\boldsymbol{A}^2 + 2\boldsymbol{A} - 3\boldsymbol{E} = \boldsymbol{O}$.

（1）证明 $\boldsymbol{A} + 2\boldsymbol{E}$ 可逆，并求其逆；

（2）当 $\boldsymbol{A} \ne \boldsymbol{E}$ 时，判断 $\boldsymbol{A} + 3\boldsymbol{E}$ 是否可逆，并给出理由.

证明：（1）由 $\boldsymbol{A}^2 + 2\boldsymbol{A} - 3\boldsymbol{E} = \boldsymbol{O}$ 得，$\boldsymbol{A}(\boldsymbol{A}+2\boldsymbol{E}) = 3\boldsymbol{E}$，则 $\boldsymbol{A}+2\boldsymbol{E}$ 可逆，且 $(\boldsymbol{A}+2\boldsymbol{E})^{-1} = \frac{1}{3}\boldsymbol{A}$；

（2）$(\boldsymbol{A}+3\boldsymbol{E})(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{E}) = \boldsymbol{O}$，则 $R(\boldsymbol{A}+3\boldsymbol{E}) + R(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{E}) \le n$，而 $\boldsymbol{A} \ne \boldsymbol{E}$，

即 $R(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{E}) \ge 1$，从而 $R(\boldsymbol{A}+3\boldsymbol{E}) \le n-1$，故 $\boldsymbol{A}+3\boldsymbol{E}$ 不可逆.

17.（**10 分**）设 $\boldsymbol{A}$ 为 n 阶矩阵，$\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_n$ 为 n 个线性无关的 n 维列向量，证明：$R(\boldsymbol{A}) = n$ 充要条件为 $\boldsymbol{A\alpha}_1, \boldsymbol{A\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{A\alpha}_n$ 线性无关.

证明：$(\Rightarrow)$ 设 $k_1\boldsymbol{A\alpha}_1 + k_2\boldsymbol{A\alpha}_2 + \cdots + k_n\boldsymbol{A\alpha}_n = \boldsymbol{0}$，

左乘A^{-1} 得 $k_1\boldsymbol{\alpha}_1+k_2\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+k_n\boldsymbol{\alpha}_n=\mathbf{0}$

$\because \alpha_1,\alpha_2,\cdots\alpha_n$线性无关，$\therefore k_1=k_2=\cdots=k_n=0$，则$\boldsymbol{A\alpha}_1,\boldsymbol{A\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{A\alpha}_n$线性无关.

$(\Leftarrow)\because \boldsymbol{A\alpha}_1,\boldsymbol{A\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{A\alpha}_n$线性无关，

$\therefore |\boldsymbol{A\alpha}_1,\boldsymbol{A\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{A\alpha}_n|=|\boldsymbol{A}||\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n|\neq 0$，从而$|\boldsymbol{A}|\neq 0$，即知$R(\boldsymbol{A})=n$.

18. （**8** 分）设 n 维向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性无关，若 $\boldsymbol{\alpha}_4=k_1\boldsymbol{\alpha}_1+k_2\boldsymbol{\alpha}_2+k_3\boldsymbol{\alpha}_3$ 且 $k_i\neq 0\ (i=1,2,3)$，试证：$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4$ 中任意 3 个向量都线性无关.

证明：（法 1）在$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4$中不妨取 3 个向量$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_4$，令$l_1\boldsymbol{\alpha}_1+l_2\boldsymbol{\alpha}_2+l_4\boldsymbol{\alpha}_4=\mathbf{0}$，将条件中的$\boldsymbol{\alpha}_4=k_1\boldsymbol{\alpha}_1+k_2\boldsymbol{\alpha}_2+k_3\boldsymbol{\alpha}_3$代入上式并整理得

$$(l_1+k_1l_4)\boldsymbol{\alpha}_1+(l_2+k_2l_4)\boldsymbol{\alpha}_2+k_3l_4\boldsymbol{\alpha}_3=\mathbf{0}.$$

因为，向量组$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$线性无关，所以$\begin{cases} l_1+k_1l_4=0 \\ l_2+k_2l_4=0 \\ k_3l_4=0 \end{cases}$，又因为$k_i\neq 0\ (i=1,2,3)$，所以$l_1=l_2=l_4=0$. 从而向量组$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_4$线性无关. 即$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4$中任意 3 个向量都线性无关.

（法 2）在$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4$中不妨取 3 个向量$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_4$，于是

$$(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_4)=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3)\begin{pmatrix} 1 & 0 & k_1 \\ 0 & 1 & k_2 \\ 0 & 0 & k_3 \end{pmatrix}=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3)\boldsymbol{C}$$

因为$|\boldsymbol{C}|\neq 0$，所以$\boldsymbol{C}$ 可逆，故$R(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_4)=R(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3)=3$，从而向量组$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_4$线性无关. 即$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4$中任意 3 个向量都线性无关.

19.（**10** 分）已知向量组$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m(m\geq 2)$线性无关，又向量组$\boldsymbol{\beta}_1=\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2$，$\boldsymbol{\beta}_2=\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_3$，…，$\boldsymbol{\beta}_{m-1}=\boldsymbol{\alpha}_{m-1}+\boldsymbol{\alpha}_m$，$\boldsymbol{\beta}_m=\boldsymbol{\alpha}_m+\boldsymbol{\alpha}_1$. 试讨论向量组$\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_m$的线性相关性.

解：（法 1）设$x_1\boldsymbol{\beta}_1+x_2\boldsymbol{\beta}_2+\cdots+x_m\boldsymbol{\beta}_m=\mathbf{0}\Rightarrow x_1(\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2)+\cdots+x_m(\boldsymbol{\alpha}_m+\boldsymbol{\alpha}_1)=\mathbf{0},$

整理得，$(x_1+x_m)\boldsymbol{\alpha}_1+(x_1+x_2)\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+(x_{m-1}+x_m)\boldsymbol{\alpha}_m=\mathbf{0},$

由于向量组$\boldsymbol{\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m}$线性无关，所以$\begin{cases} x_1+x_m=0 \\ x_1+x_2=0 \\ \cdots\cdots\cdots \\ x_{m-1}+x_m=0 \end{cases}$ **(1)**

这是 m 个未知元 m 个方程组成的齐次线性方程组，系数行列式为

$$D=\begin{vmatrix} 1 & 0 & \cdots & 1 \\ 1 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{vmatrix}=1+(-1)^{m+1},$$

当 m 为偶数时，$D=0$，方程组（1）有非零解，从而向量组$\boldsymbol{\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_m}$线性相关；

当 m 为奇数时，$D\neq 0$，方程组（1）只有零解，从而向量组$\boldsymbol{\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_m}$线性无关.

（法 2）

因为 $(\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_m)=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m)\begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 1 \\ 1 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m)\cdot K_m$,

由于 $|K|=1+(-1)^{1+m}$，故当m为奇数时，$|K|=2\neq 0$，此时$R(\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_m)=m$，故向量组$\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_m$线性无关；

当m为偶数时，$|K|=0$，此时$R(\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_m)<m$，故向量组$\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_m$是线性相关的.