第六章　二次型

§6.1　二次型及其矩阵表示

定义： 设含有n个变量 $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 的**二次齐次多项式函数**

$$f(x_1,x_2,\cdots,x_n)=a_{11}x_1^2+a_{22}x_2^2+a_{33}x_3^2+\cdots+a_{nn}x_n^2$$
$$+2a_{12}x_1x_2+2a_{13}x_1x_3+\cdots+2a_{1n}x_1x_n$$
$$+\cdots\cdots$$
$$+2a_{n-1,n}x_{n-1}x_n$$

$$=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}a_{ij}x_ix_j \qquad （其中\ a_{ij}=a_{ji}）$$

称为**二次型**.（一般都是实二次型）

令 $a_{ij}=a_{ji}$，则 $2a_{ij}x_ix_j=a_{ij}x_ix_j+a_{ji}x_ix_j$，于是

$$
\begin{aligned}
f(x_1,x_2,\cdots,x_n)=&\boxed{a_{11}x_1^2+a_{22}x_2^2+\cdots+a_{nn}x_n^2}\\
&\boxed{+2a_{12}x_1x_2}+2a_{13}x_1x_3+\cdots+2a_{n-1,n}x_{n-1}x_n\\
=&a_{11}x_1^2+a_{12}x_1x_2+\cdots+a_{1n}x_1x_n\\
&+a_{21}x_2x_1+a_{22}x_2^2+\cdots+a_{2n}x_2x_n\\
&+\cdots\\
&+a_{n1}x_nx_1+a_{n2}x_nx_2+\cdots+a_{nn}x_n^2\\
=&\sum_{i,j=1}^{n}a_{ij}x_ix_j
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
f(x_1,x_2,\cdots,x_n) &= x_1(a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_n) \\
&\quad + x_2(a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots+a_{2n}x_n) \\
&\quad + \cdots \\
&\quad + x_n(a_{n1}x_1+a_{n2}x_2+\cdots+a_{nn}x_n) \\
&= (x_1,x_2,\cdots,x_n)\begin{pmatrix} a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_n \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots+a_{2n}x_n \\ \vdots \\ a_{n1}x_1+a_{n2}x_2+\cdots+a_{nn}x_n \end{pmatrix} \\
&= (x_1,x_2,\cdots,x_n)\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \\
&= x^T A x
\end{aligned}
$$

对称阵

$$f(x_1,x_2,\cdots,x_n)=(x_1,x_2,\cdots,x_n)\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

对称阵的二次型

$\Updownarrow$

二次型的矩阵

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

对称阵 A 的秩也叫做二次型 f 的秩.

二次型与对称矩阵之间存在着一一对应关系.

例 (1) 把二次型

$$f(x,y,z)=x^2+2xy+4xz+3y^2+yz-5z^2$$

写成矩阵形式，并求秩.

(2) 求出与矩阵 $A=\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 3 \\ -1 & 0 & -2 & 4 \\ 0 & 3 & 4 & 5 \end{pmatrix}$ 对应的二次型.

§6.2　化二次型为标准形

对于二次型，寻找可逆的线性变换

$$\begin{cases} x_1 = c_{11}y_1 + c_{12}y_2 + \cdots + c_{1n}y_n, \\ x_2 = c_{21}y_1 + c_{22}y_2 + \cdots + c_{2n}y_n, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ x_n = c_{n1}y_1 + c_{n2}y_2 + \cdots + c_{nn}y_n. \end{cases}$$

简记为 $x = Cy$，

于是 $f = x^TAx$

$$= (Cy)^T A (Cy)$$

$$= y^T \boxed{(C^TAC)} y$$

使二次型只含平方项，即

$$f = k_1 y_1^2 + k_2 y_2^2 + \ldots + k_n y_n^2$$

定义：只含平方项的二次型称为二次型的标准形.

说明：这里只讨论实二次型，所求线性变换也限于实数范围.

定义： 设 A, B 都是 n 阶矩阵，若有可逆矩阵 C 满足

$$C^{T}AC = B,$$

则称矩阵A 和 B **合同**.

显然，

- $B^{T} = (C^{T}AC)^{T} = C^{T}A^{T}(C^{T})^{T} = C^{T}AC = B$

  即若 A 为对称阵，则 B 也为对称阵.

- $R(B) = R(A)$.

经过可逆变换后，二次型 f 的矩阵由 A 变为与 A 合同的矩阵 $C^{T}AC$，且二次型的秩不变(矩阵合同是否是等价关系？).

矩阵合同的性质

- 反身性：A与A合同
- 对称性：若A与B合同，则B与A合同
- 传递性：若A与B合同，B与C合同，则A与C合同

矩阵的合同关系是一种等价关系.

若二次型 f 经过可逆变换 $x = Cy$ 变为标准形，即

$$
\begin{aligned}
f &= x^T A x \\
&= (Cy)^T A (Cy) \\
&= y^T (C^T A C) y \\
&= k_1 y_1^2 + k_2 y_2^2 + \cdots + k_n y_n^2 \\
&= (y_1, y_2, \cdots, y_n) \begin{pmatrix} k_1 & & & \\ & k_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & k_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

问题：对于对称阵 A，寻找可逆矩阵 C，使 C^TAC 为对角阵，

（把对称阵合同对角化）.

化二次型为标准形的方法

（一）正交变换法

定理（主轴定理）：任给一个n元实二次型 $f=x^TAx$，总存在正交变换 $x=Py$，使得f化为标准形

$$f=\lambda_1 y_1^2+\lambda_2 y_2^2+\cdots+\lambda_n y_n^2$$

其中 $\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n$是实对称矩阵$A$的特征值，$P$ 的n个列向量 $p_1,p_2,\cdots,p_n$ 是A的对应于特征值 $\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n$的两两正交的单位特征向量.

注：若非正交变换,$\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n$ 不一定是A的特征值.

求正交变换 $x=Py$，化 f 为标准形的方法与步骤

（1）写出二次型的矩阵A（A为实对称矩阵）；

（2）求A的特征值与特征值对应的线性无关的特征向量，

经过正交单位化，求出正交矩阵P.（参见上一节）

（3）写出正交变换$x=Py$，以及 f 的标准形

$$f=\lambda_1 y_1^2+\lambda_2 y_2^2+\cdots+\lambda_n y_n^2$$

其中 $\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n$ 是矩阵A的特征值.

例：求正交变换 $x=Py$ 化二次型

$$f=4x_1^2+4x_2^2+4x_3^2+4x_1x_2+4x_1x_3+4x_2x_3$$

为标准形. (经典+传统题型)

解：f 的矩阵为 $A=\begin{pmatrix}4&2&2\\2&4&2\\2&2&4\end{pmatrix}$，且

$$|A-\lambda E|=\begin{vmatrix}4-\lambda&2&2\\2&4-\lambda&2\\2&2&4-\lambda\end{vmatrix}=-(\lambda-2)^2(\lambda-8)，\text{令}$$

$$-(\lambda-2)^2(\lambda-8)=0$$

得A的特征值为 $\lambda_1=8,\lambda_2=\lambda_3=2.$

当$\lambda_1 = 8$时，方程组$(A-8E)x=0$的基础解系为$\xi_1=(1,1,1)^T$

当$\lambda_2=\lambda_3=2$时，方程组$(A-2E)x=0$的基础解系为

$$\xi_2=(-1,1,0)^T,\xi_3=(-1,0,1)^T$$

将$\xi_1=(1,1,1)^T$单位化得 $p_1=(\frac{1}{\sqrt{3}},\frac{1}{\sqrt{3}},\frac{1}{\sqrt{3}})^T$

将$\xi_2=(-1,1,0)^T,\xi_3=(-1,0,1)^T$正交化，得

$$\eta_2=(-1,1,0)^T,\eta_3=(1,1,-2)^T$$

然后将$\eta_2=(-1,1,0)^T,\eta_3=(1,1,-2)^T$单位化，得

$$p_2=(-\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{1}{\sqrt{2}},0)^T,p_3=(\frac{1}{\sqrt{6}},\frac{1}{\sqrt{6}},\frac{-2}{\sqrt{6}})^T$$

故正交矩阵 $P=\begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{-1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & 0 & \frac{-2}{\sqrt{3}} \end{pmatrix}$，经过正交变换$x=Py$，

将 f 化为标准形 $f=8y_1^2+2y_2^2+2y_3^2$.

对照上节

“设 $A=\begin{pmatrix} 4 & 2 & 2 \\ 2 & 4 & 2 \\ 2 & 2 & 4 \end{pmatrix}$，求正交阵$P$，使得$P^{-1}AP$为对角阵.”

的解题过程，发现首尾有点变化，中间过程完全一样.

例： 设二次型 $f=ax_1^2+x_2^2+x_3^2+4x_1x_2+4x_1x_3+4x_2x_3$

经过正交变换 $x=Py$ 化为 $f=5y_1^2-y_2^2-y_3^2$.

求：（1）常数a；（2）正交矩阵P.

解： f 的矩阵为 $A=\begin{pmatrix} a & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$, $tr(A)=\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3$

所以 a=1. 其他同上例.

练习： 设二次型 $f=2x_1^2-x_2^2+ax_3^2+2x_1x_2-8x_1x_3+2x_2x_3$

在正交变换 $x=Qy$ 下的标准形为 $f=\lambda_1y_1^2+\lambda_2y_2^2$

求：（1）常数a；（2）正交矩阵Q.

提示： $f=\lambda_1y_1^2+\lambda_2y_2^2$ 为正交变换下的标准形，故有一个

特征值为0. 从而$|A|=0$，求出a.

（二）拉格朗日配方法 (了解)

（1）含平方项

例: 将 $f=4x_1^2+4x_2^2+4x_3^2+4x_1x_2+4x_1x_3+4x_2x_3$用配方法化为标准形.

解:

$$f=4(x_1^2+x_1x_2+x_1x_3)+4x_2^2+4x_3^2+4x_2x_3$$

$$=4[(x_1+\frac{1}{2}x_2+\frac{1}{2}x_3)^2-\frac{1}{4}x_2^2-\frac{1}{2}x_2x_3-\frac{1}{4}x_3^2]$$

$$+4x_2^2+4x_3^2+4x_2x_3$$

$$=4(x_1+\frac{1}{2}x_2+\frac{1}{2}x_3)^2+3x_2^2+3x_3^2+2x_2x_3$$

$$=4(x_1+\frac{1}{2}x_2+\frac{1}{2}x_3)^2+3(x_2+\frac{1}{3}x_3)^2+\frac{8}{3}x_3^2$$

令 $\begin{cases} y_1 = x_1+\frac{1}{2}x_2+\frac{1}{2}x_3 \\ y_2 = x_2+\frac{1}{3}x_3 \\ y_3 = x_3 \end{cases}$，即 $\begin{cases} x_1 = y_1-\frac{1}{2}y_2-\frac{1}{3}y_3 \\ x_2 = y_2-\frac{1}{3}y_3 \\ x_3 = y_3 \end{cases}$，则

$$f=4y_1^2+3y_2^2+\frac{8}{3}y_3^2$$

注意：正交变换的标准形 $f=8y_1^2+2y_2^2+2y_3^2$ 与本例的标准形

$f=4y_1^2+3y_2^2+\frac{8}{3}y_3^2$ 不一样，为什么？

（2）不含平方项

例： 用配方法化二次型 $f=2x_1x_2+4x_1x_3$ 为标准形，并求所用的变换矩阵.

解： 先令 $\begin{cases} x_1=y_1+y_2 \\ x_2=y_1-y_2, \\ x_3=y_3 \end{cases}$ 即 $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}$，则

$$f=2y_1^2-2y_2^2+4y_1y_3+4y_2y_3$$

$$=2(y_1+y_3)^2-2(y_2-y_3)^2$$

再令 $\begin{cases} z_1=y_1+y_3 \\ z_2=y_2-y_3, \\ z_3=y_3 \end{cases}$ 即 $\begin{cases} y_1=z_1-z_3 \\ y_2=z_2+z_3, \\ y_3=\qquad z_3 \end{cases}$ $\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \end{pmatrix}$,

则有

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \end{pmatrix}$$

$$f = 2z_1^2 - 2z_2^2.$$

上述例题的解题过程表明:

（1）正交变换法和配方法所得的标准形未必相同;

（2）配方法中，配方的方式不唯一，所得的标准形也不唯一

那么，同一个二次型的不同标准形之间有什么关系?

惯性定理

定理： 设有实二次型 $f=x^TAx$，它的秩为r，有两个可逆变换 $x=Cy$ 及 $x=Pz$，分别使得

$$f=k_1y_1^2+k_2y_2^2+\cdots+k_ry_r^2 \qquad (k_i\neq 0),$$

及

$$f=\lambda_1z_1^2+\lambda_2z_2^2+\cdots+\lambda_rz_r^2 \qquad (\lambda_i\neq 0),$$

则 $k_1,k_2,\cdots,k_r$ 中正（负）数的个数与 $\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_r$ 中正（负）数的个数相等，其中 $k_1,k_2,\cdots,k_r$ 中正（负）数的个数称为 f 的正（负）惯性指数.

推论： 设有实二次型 $f=x^TAx$，则 f 的正（负）惯性指数等于实对称矩阵A的正（负）特征值的个数.

定义： 若二次型的标准型中平方项的系数只是1，-1，0，则称该标准型为二次型的规范型.

定理： 任意二次型都可用可逆线性变换化为规范型，且规范型唯一.

定理： 任意n阶实对称阵A合同于对角阵，

$$\begin{pmatrix} E_p & & \\ & -E_{r-p} & \\ & & O \end{pmatrix}$$

其中$r=R(A)$, p为正特征值个数.

矩阵等价、相似、合同

定义： 若矩阵A经过有限次的初等变换变成矩阵B，则称矩阵A，B**等价**，即存在可逆矩阵P，Q使得$PAQ=B$.

定义： 设A，B均为n阶方阵，若存在可逆矩阵P使得$P^{-1}AP=B$，则称矩阵A，B**相似**.

定义： 设A，B均为n阶方阵，若存在可逆矩阵P使得$P^{T}AP=B$，则称矩阵A，B**合同**.

矩阵等价、相似、合同联系

1. 相似矩阵必为等价矩阵，等价矩阵未必为相似矩阵.

2. 对于n阶方阵A，B，若存在可逆矩阵P，Q使得$PAQ=B$，且$PQ=E$，则矩阵A，B相似.

3. 合同矩阵必为等价矩阵，等价矩阵未必为合同矩阵.

4. 正交相似矩阵必为合同矩阵，正交合同矩阵必为相似矩阵.

5. 如果A，B都是n阶实对称矩阵，且具有相同的特征值，则矩阵A，B既相似又合同.

6. 若n阶矩阵A，B中有一个为正交矩阵，则AB与BA相似且合同.

7. 若A，B相似且合同，C，D相似且合同，则$\begin{pmatrix} A & O \\ O & C \end{pmatrix}$与$\begin{pmatrix} B & O \\ O & D \end{pmatrix}$相似且合同.

§6.3　正定二次型

定义： 设有实二次型 $f = x^{\mathrm{T}}Ax$（其中A为对称矩阵），

（1）若对于任何$x \neq 0$，即x为非零向量，有 $f > 0$，则称

f 为正定二次型，也称实对称矩阵A是正定矩阵.

（2）若对于任何$x \neq 0$，即x为非零向量，有 $f < 0$，则称

f 为负定二次型，也称实对称矩阵A是负定矩阵.

赫尔维茨定理

定理： 实对称矩阵A为正定矩阵的充要条件是A的各阶顺序主子式都大于零，即

$$a_{11} > 0, \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} > 0, \cdots, \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} > 0;$$

实对称矩阵A为负定的充要条件是奇数阶主子式为负，偶数阶主子式为正.

二次型及矩阵正定的充要条件

二次型 $f = x^{\mathrm{T}}Ax$（A为实对称阵）为正定二次型

$\Leftrightarrow$ 标准形中的n个平方项的系数均为正数

$\Leftrightarrow$ 规范形为 $y_1^2 + y_2^2 + \cdots + y_n^2$

$\Leftrightarrow$ 对任何的 $x \neq 0$，有 $f = x^{\mathrm{T}}Ax > 0$

$\Leftrightarrow$ 二次型经过可逆变换后，仍为二次型，即对任意可逆矩阵C，$C^{\mathrm{T}}AC$正定

$\Leftrightarrow$ A为正定矩阵

$\Leftrightarrow$ A的特征值全大于零

$\Leftrightarrow$ A与单位矩阵合同，即存在可逆矩阵C，使得$A=C^{\mathrm{T}}C$

$\Leftrightarrow$ A的所有顺序主子式大于零

二次型及矩阵正定的必要条件

二次型 $f = x^{\mathrm{T}}Ax$（A为实对称阵）为正定二次型

$$\Rightarrow a_{ii} > 0$$

$$\Rightarrow |A| > 0$$

例：判别二次型 $f=-5x^2-6y^2-4z^2+4xy+4xz$ 是否正定.

非正定　方法一：　$f(0,0,1)=-4<0$;

方法二：$A=\begin{pmatrix}-5 & 2 & 2\\ 2 & -6 & 0\\ 2 & 0 & -4\end{pmatrix}$ 的一阶顺序主子式为-5<0

例：$f(x_1,x_2,x_3)=2x_1^2+x_2^2+x_3^2+2x_1x_2+tx_2x_3$ 为正定二次型，求 t 的取值范围.

$$A=\begin{pmatrix}2 & 1 & 0\\ 1 & 1 & \frac{t}{2}\\ 0 & \frac{t}{2} & 1\end{pmatrix},-\sqrt{2}<t<\sqrt{2}$$

例： 设A是3阶实对称矩阵且满足$A^2+2A=0$，已知$R(A)=2$

(1) 求A的全部特征值;

(2) 当k为何值时，矩阵$A+kE$为正定矩阵？其中E为3阶单位矩阵.

解: (1) 由$A^2+2A=0$知A的特征值只可能是0或-2，又$R(A)=2$，

所以A的特征值为0，-2，-2.

(2) $A+kE$为实对称矩阵，且$A+kE$的特征值为k，k-2，k-2，当$k>2$时，$A+kE$的特征值全为正，此时$A+kE$为正定矩阵.

例：已知A是$m\times n$矩阵，$r(A)=n$，证明$A^{\mathrm{T}}A$正定.

证明思路：搜索各种方法，最后选择利用正定的定义证明

证明: 对于任意的向量 $x\neq 0$，由于$r(A)=n$，所以 $Ax\neq 0$.

(如果有$Ax=0$，则表明齐次线性方程组$Ax=0$有非零解，矛盾)

故

$$x^T(A^TA)x=(Ax)^T(Ax)=\|Ax\|^2>0$$

所以$A^{\mathrm{T}}A$正定.

例: 证明A正定，则 A^{-1}正定.

证明：（1）$(A^{-1})^T=(A^T)^{-1}=A^{-1}$, A 对称

（2）A正定，故A的特征值 $\lambda_i>0$，从而

A^{-1}的特征值为 $\dfrac{1}{\lambda_i}>0$. 故得证.

二次型

对称矩阵二次型，相关理论总对应。

是否合同有标准，惯性指数定分明。

线面多姿无穷尽，分门别类看方程。

坐标变换寻常事，斗转星移扭乾坤。