合 肥 工 业 大 学 试 卷（A）

2017～2018 学年第 一 学期 课程代码 1400071B 课程名称 线性代数 学分 2.5 课程性质:必修☑、选修☐、限修☐ 考试形式:开卷☐、闭卷☑

专业班级（教学班）__________ 考试日期 2017 年 12 月 3 日 命题教师 集体 系（所或教研室）主任审批签名__________

一、填空题（每小题 4 分，共 20 分）

1. 设 $D=\begin{vmatrix}2 & -1 & 1\\ 3 & 0 & 2\\ 1 & 4 & -1\end{vmatrix}$，$M_{ij}$ 为 D 的 (i,j) 元的余子式，则 $2M_{31}-M_{32}-3M_{33}=$_____.

2. 设矩阵 $A=\begin{pmatrix}2 & 0 & 0\\ -2 & 1 & 0\\ 0 & 1 & -1\end{pmatrix}$，$B=\begin{pmatrix}1 & 1 & 3\\ 0 & 1 & 2\\ 0 & 0 & -2\end{pmatrix}$，则 $2A^TB-A=$__________.

3. 设向量组 $\overrightarrow{\alpha_1},\overrightarrow{\alpha_2},\overrightarrow{\alpha_3}$ 线性无关，$\overrightarrow{\alpha_1}+2\overrightarrow{\alpha_2},\overrightarrow{\alpha_2}-\overrightarrow{\alpha_3},\overrightarrow{\alpha_1}+\overrightarrow{\alpha_2}+t\overrightarrow{\alpha_3}$ 线性相关，则 $t=$_______.

4. 设 $\overrightarrow{\eta_1}=\begin{bmatrix}1\\2\\3\end{bmatrix},\overrightarrow{\eta_2}=\begin{bmatrix}2\\3\\4\end{bmatrix}$ 为三元非齐次线性方程组 $A\vec{x}=\vec{b}$ 的两个解，A 的秩为 2，则 $A\vec{x}=\vec{b}$ 的通解为__________.

5. 如果二次型 $f(x_1,x_2,x_3)=x_1^2+kx_2^2+(k-2)x_3^2+4x_1x_2$ 为正定二次型，则 k 一定满足条件__________.

二、选择题（每小题 4 分，共 20 分）

1. 设 A,B 为 n 阶方阵，下列结论正确的是（ ）.
（A）$(A+B)^T=A^T+B^T$，并且 $(AB)^T=A^TB^T$
（B）当 A,B 均为可逆矩阵时，$(A+B)^{-1}=A^{-1}+B^{-1}$ 并且 $(AB)^{-1}=B^{-1}A^{-1}$
（C）若 $AB=O$，则 $A=O$ 或 $B=O$
（D）若 $AB=O$，且 A 为可逆矩阵时，则 $B=O$

2. 设 A 为 $m\times n$ 矩阵，B 为 $n\times k$ 矩阵，$AB=O,B\neq O$，则下列命题中正确的是（ ）.
（A）A 的列向量组线性相关 （B）A 的行向量组线性相关
（C）A 的列向量组线性无关 （D）A 的行向量组线性无关

3. 下列矩阵中，不能相似对角化的矩阵为（ ）.
（A）$\begin{pmatrix}1 & -1 & 2\\ 0 & 2 & 0\\ 0 & 0 & 3\end{pmatrix}$ （B）$\begin{pmatrix}1 & 2 & 1\\ 2 & 0 & 3\\ 1 & 3 & -1\end{pmatrix}$ （C）$\begin{pmatrix}1 & 1 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & -1\end{pmatrix}$ （D）$\begin{pmatrix}2 & 1 & 1\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$

4. 齐次线性方程组 $A\vec{x}=0$ 和 $B\vec{x}=0$ 同解的充分必要条件为（ ）.
（A）A 与 B 等价 （B）A 与 B 相似
（C）A 与 B 的列向量组等价 （D）A 与 B 的行向量组等价

5. 设向量组 $\overrightarrow{\alpha_1},\overrightarrow{\alpha_2},\overrightarrow{\alpha_3}$ 线性无关，向量组 $\overrightarrow{\alpha_1},\overrightarrow{\alpha_2},\vec{\beta}$ 线性相关，则（ ）.
（A）$\vec{\beta}$ 可由 $\overrightarrow{\alpha_1},\overrightarrow{\alpha_2},\overrightarrow{\alpha_3}$ 线性表示，$\overrightarrow{\alpha_3}$ 可由 $\overrightarrow{\alpha_1},\overrightarrow{\alpha_2},\vec{\beta}$ 线性表示
（B）$\vec{\beta}$ 可由 $\overrightarrow{\alpha_1},\overrightarrow{\alpha_2},\overrightarrow{\alpha_3}$ 线性表示，$\overrightarrow{\alpha_3}$ 不可由 $\overrightarrow{\alpha_1},\overrightarrow{\alpha_2},\vec{\beta}$ 线性表示
（C）$\vec{\beta}$ 不可由 $\overrightarrow{\alpha_1},\overrightarrow{\alpha_2},\overrightarrow{\alpha_3}$ 线性表示，$\overrightarrow{\alpha_3}$ 可由 $\overrightarrow{\alpha_1},\overrightarrow{\alpha_2},\vec{\beta}$ 线性表示
（D）$\vec{\beta}$ 不可由 $\overrightarrow{\alpha_1},\overrightarrow{\alpha_2},\overrightarrow{\alpha_3}$ 线性表示，$\overrightarrow{\alpha_3}$ 不可由 $\overrightarrow{\alpha_1},\overrightarrow{\alpha_2},\vec{\beta}$ 线性表示

三、（8 分）计算行列式 $D=\begin{vmatrix}2 & 1 & 1 & 1\\ 1 & 3 & 1 & 1\\ 1 & 1 & 4 & 1\\ 1 & 1 & 1 & 7\end{vmatrix}$.

四、（10 分）设 $A=\begin{pmatrix}3 & 4 & 0\\ 1 & 2 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$，矩阵 B 满足 $ABA^{-1}=2AB-E$，求 B.

五、（14 分）已知线性方程组 $\begin{cases}x_1-\lambda x_2-2x_3=-1,\\ x_1-x_2+\lambda x_3=2,\\ 5x_1-5x_2-4x_3=1,\end{cases}$

（1）常数 λ 取何值时，方程组无解、有唯一解、有无穷多解？
（2）当方程组有无穷多解时，求出其通解.

六、（8 分）已知向量组 $\overrightarrow{\alpha_1}=\begin{bmatrix}1\\2\\1\\3\end{bmatrix}$，$\overrightarrow{\alpha_2}=\begin{bmatrix}4\\-1\\-5\\-6\end{bmatrix}$，$\overrightarrow{\alpha_3}=\begin{bmatrix}1\\-3\\-4\\-7\end{bmatrix}$，求其秩并求一个极大线性无关组.

七、（15 分）已知二次型 $f(x_1,x_2,x_3)=ax_1^2-2x_1x_2+2x_1x_3+2x_2x_3$ 经过正交变换 $\vec{x}=P\vec{y}$ 后化为 $f=-2y_1^2+y_2^2+y_3^2$，其中 $\vec{x}=(x_1,x_2,x_3)^T$，$\vec{y}=(y_1,y_2,y_3)^T$.

（1）求 $\boldsymbol{a}$ 的值；
（2）求正交矩阵 P.

八、（5 分）A 为 n 阶对称矩阵，证明 A^2 为正定的充要条件是 A 为可逆阵.