§3 逆矩阵

- 矩阵与复数相仿，有加、减、乘三种运算.
- 矩阵的乘法是否也和复数一样有逆运算呢?
- 这就是本节所要讨论的问题.
- 这一节所讨论的矩阵，如不特别说明，所指的都是 n 阶方阵.

对于 n 阶单位矩阵 E 以及同阶的方阵 A，都有

$$A_n E_n = E_n A_n = A_n$$

从乘法的角度来看，n 阶单位矩阵 E 在同阶方阵中的地位类似于 1 在复数中的地位. 一个复数 $a \neq 0$的倒数 a^{-1}可以用等式 $a a^{-1} = 1$ 来刻画. 类似地，我们引入

定义： n 阶方阵 A 称为**可逆的**，如果有 n 阶方阵 B，使得

$$AB = BA = E$$

这里 E 是 n 阶单位矩阵.

- 根据矩阵的乘法法则，只有方阵才能满足上述等式.
- 对于任意的 n 阶方阵 A，适合上述等式的矩阵 B 是唯一的（如果有的话）.

定义： 如果矩阵 B 满足上述等式，那么 B 就称为 A 的**逆矩阵**，记作 A^{-1}.

下面要解决的问题是:

- 在什么条件下，方阵 A 是可逆的?
- 如果 A 可逆，怎样求 A^{-1}?

结论：$AA^* = A^*A = |A|E$，其中

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \qquad A^* = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \cdots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \cdots & A_{n2} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ A_{1n} & A_{2n} & \cdots & A_{nn} \end{pmatrix}$$

元素 a_{ij} 的代数余子式 A_{ij} 位于第 j 行第 i 列

定理： 若 $|A| \neq 0$，则方阵A可逆，而且

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|} A^*.$$

推论： 若 $|A| \neq 0$，则 $|A^{-1}| = \frac{1}{|A|}$.

例：求二阶矩阵 $A=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ 的逆矩阵.

$$A^{-1}=\frac{1}{|A|}A^{*}=\frac{1}{ad-bc}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$$

例： 求3阶方阵 $A=\begin{pmatrix}2&2&1\\3&1&5\\3&2&3\end{pmatrix}$ 的逆矩阵.

解： $|A| = 1$, $M_{11}=-7$, $M_{12}=-6$, $M_{13}=3$,

$M_{21}=4$, $M_{22}=3$, $M_{23}=-2$,

$M_{31}=9$, $M_{32}=7$, $M_{33}=-4$,

则

$$A^{-1}=\frac{1}{|A|}A^*=A^*=\begin{pmatrix}A_{11}&A_{21}&A_{31}\\A_{12}&A_{22}&A_{32}\\A_{13}&A_{23}&A_{33}\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}M_{11}&-M_{21}&M_{31}\\-M_{12}&M_{22}&-M_{32}\\M_{13}&-M_{23}&M_{33}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-7&-4&9\\6&3&-7\\3&2&-4\end{pmatrix}$$

$|A| \neq 0$ ⇄ 方阵A可逆

此时，称矩阵A为非奇异矩阵

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|} A^{*}$$

定理：若方阵A可逆，则 $|A| \neq 0$.

容易看出：对于n 阶方阵A、B，如果

$$AB = E,$$

那么A、B都是可逆矩阵，并且它们互为逆矩阵.

推论: 如果 n 阶方阵A、B可逆，那么 A^{-1}、A^T、$\lambda A(\lambda \neq 0)$ 与AB也可逆，且

$$(A^{-1})^{-1} = A,$$

$$(A^T)^{-1} = (A^{-1})^T,$$

$$(\lambda A)^{-1} = \frac{1}{\lambda} A^{-1},$$

$$(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}.$$

注： 如果 n 阶方阵A、B可逆，那么$(A+B)^{-1} \neq A^{-1}+B^{-1}$.

例如

$$A=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix}, B=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$$

A、B可逆，但 $A+B=\begin{pmatrix}2 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}$ 不可逆，故

$$(A+B)^{-1} \neq A^{-1}+B^{-1}.$$

例 设方阵A,B,C满足关系式$ABC=E$，其中E是n阶单位矩阵，则必有（ ）

(A) $ACB=E$ (B) $CBA=E$

(C) $BAC=E$ (D) $BCA=E$

例 设方阵A,B,C均为n阶方阵，且A可逆，E是n阶单位矩阵，如果$B=E+AB,C=A+CA$，则$B-C$为(　)

(A) E　　(B) $-E$

(C) A　　(D) $-A$

例 设A为三阶方阵，且$|A|=\dfrac{1}{2}$，求$|(3A)^{-1}-2A^{*}|$.

解: 因为 $(3A)^{-1}=\dfrac{1}{3}A^{-1}, A^{*}=|A|\cdot A^{-1}=\dfrac{1}{2}A^{-1}$,

所以 $$|(3A)^{-1}-2A^{*}|=\left|\frac{1}{3}A^{-1}-2\cdot\frac{1}{2}A^{-1}\right|=\left|-\frac{2}{3}A^{-1}\right|$$

$$=\left(-\frac{2}{3}\right)^{3}\left|A^{-1}\right|=\left(-\frac{2}{3}\right)^{3}\left|A\right|^{-1}$$

$$=\left(-\frac{2}{3}\right)^{3}\cdot 2=-\frac{16}{27}.$$

例 设

$$A=\begin{pmatrix}1&0&1\\0&2&0\\-1&0&1\end{pmatrix}$$

且 $AB+E=A^2+B$，求 B.

解: 因为 $AB+E=A^2+B$，所以 $AB-B=A^2-E$

从而 $(A-E)B=(A-E)(A+E)$，又

$$|A-E|=\begin{vmatrix}0&0&1\\0&1&0\\-1&0&0\end{vmatrix}=1\neq 0,$$ 故A-E可逆. 因此

$$B=A+E=\begin{pmatrix}2&0&1\\0&3&0\\-1&0&2\end{pmatrix}.$$

例 设

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

且 $A^*X = A^{-1} + 2X$ ，求 X.

解： 因为 $A^*X = A^{-1} + 2X$，所以 $AA^*X = AA^{-1} + 2AX$

又 $AA^* = |A|E, |A| = 4$，从而 $4X = E + 2AX$，即

$$2(2E - A)X = E$$

又

$$|2E - A| = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 4 \neq 0$$

故$2E$-A可逆．因此，

$$X = \frac{1}{2}(2E - A)^{-1} = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

例 设方阵A满足 $A^2-A-2E=O$. 证明A和$A+2E$都可逆，并求 A^{-1} 和$(A+2E)^{-1}$.

证:（1）由 $A^2-A-2E=O$ 得 $A(A-E)=2E$，即

$$A\frac{A-E}{2}=E$$

所以A可逆，且 $A^{-1}=\frac{1}{2}(A-E).$

（2）由 $A^2-A-2E=O$ 得

$$(A+2E)(A-3E)+4E=O$$

$$(A+2E)[-\frac{1}{4}(A-3E)]=E$$

所以$A+2E$可逆，且$(A+2E)^{-1}=-\frac{1}{4}(A-3E).$

伴随矩阵的性质

设 A^* 是 n 阶方阵A的伴随矩阵，则有如下性质：

(1) $|A^*| = |A|^{n-1}$

(2) $(kA)^* = k^{n-1}A^*$

(3) $(A^*)^T = (A^T)^*$

(4) $(A^*)^{-1} = (A^{-1})^* = |A|^{-1}A$（假设$A$可逆）

(5) 设A为n阶可逆矩阵，则 $(A^*)^* = |A|^{n-2}A$, 当 $n = 2$ 时，$(A^*)^* = A$.

(6) 设A、B均为可逆矩阵，则 $(AB)^* = B^*A^*$.