§7-7 电容器的电容

一、孤立导体的电容

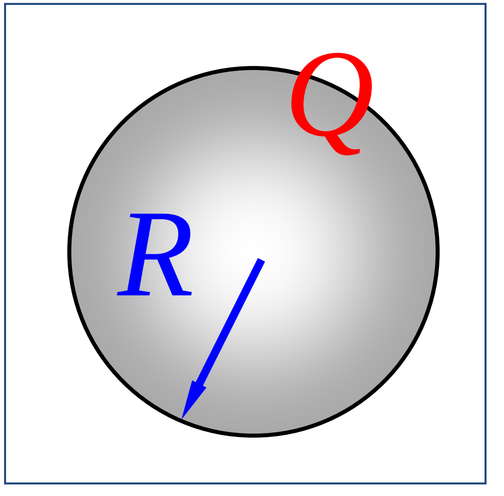
$$C=\frac{Q}{V}$$

单位 $1\mathrm{F}=1\mathrm{C/V}$

$1\mu\mathrm{F}=10^{-6}\mathrm{F}$

$1\mathrm{pF}=10^{-12}\mathrm{F}$

例：真空中孤立导体球的电容

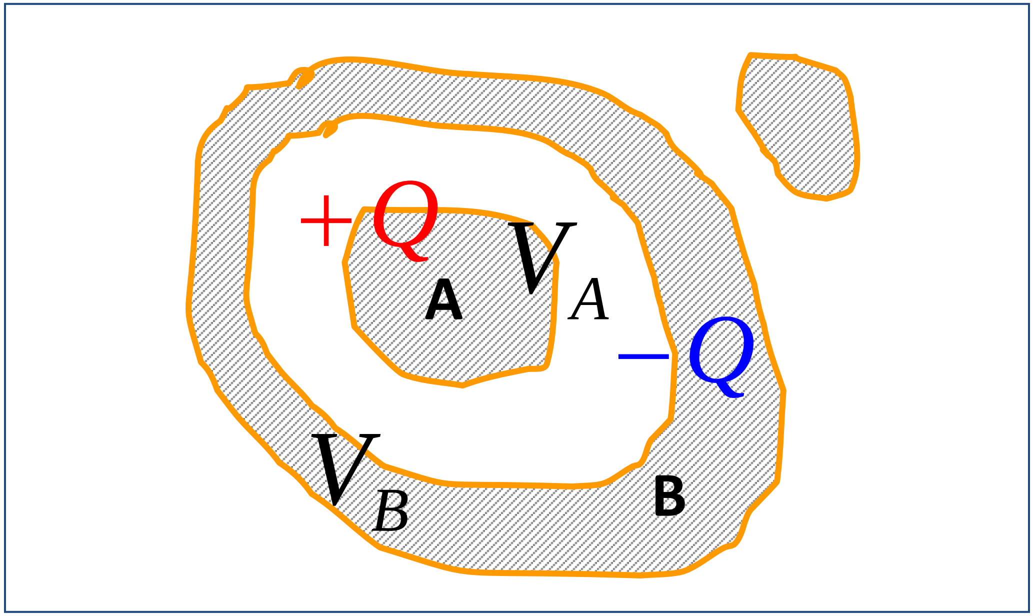


$$C=\frac{Q}{V}=\frac{Q}{\dfrac{Q}{4\pi\varepsilon_0 R}}=4\pi\varepsilon_0 R$$

- 地球 $R_{\mathrm{E}}=6.4\times10^{6}\mathrm{m},\quad C_{\mathrm{E}}\approx7.1\times10^{-4}\mathrm{F}$

二、电容器

$$U_{AB}=\int_{AB}\vec{E}\cdot\mathrm{d}\vec{l}$$



电容器电容

$$C=\frac{Q}{V_A-V_B}=\frac{Q}{U}$$

电容的大小仅与导体的形状、相对位置、其间的电介质有关．与所带电荷量无关．

三、电容器电容的计算

步骤

1） 设两极板分别带电 $\pm Q$；

2） 求 $\vec{E}$；

3） 求 U；

4） 求 C .

1. 平板电容器

（1）设两导体板分别带电 $\pm Q$

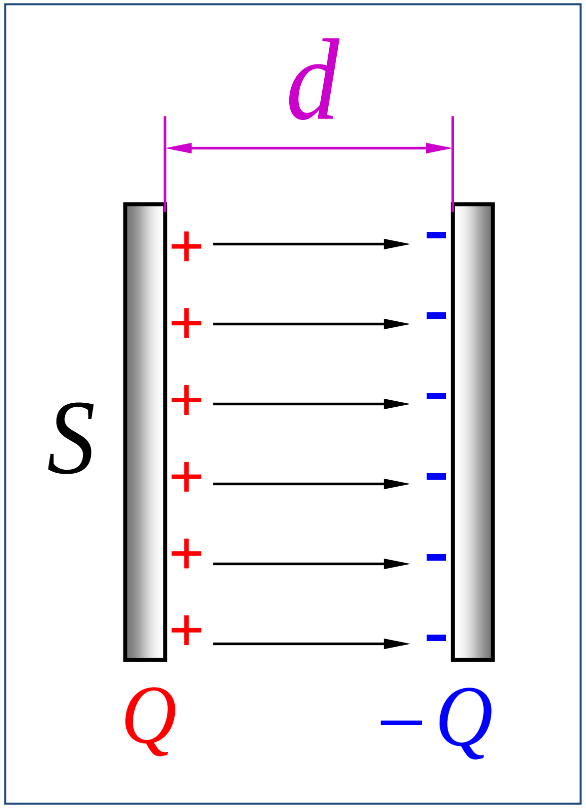
（2）两带电平板间的电场强度

$$E=\frac{\sigma}{\varepsilon_0}=\frac{Q}{\varepsilon_0 S}$$

（3）两带电平板间的电势差

$$U=Ed=\frac{Qd}{\varepsilon_0 S}$$

（4）平板电容器电容



$$\boxed{C=\frac{Q}{U}=\varepsilon_0\frac{S}{d}}$$

例： 平行平板电容器的极板是边长为 l 的正方形，两板之间的距离 $d=1\text{mm}$. 如两极板的电势差为100V，要使极板上储存$\pm10^{-4}\text{C}$ 的电荷, 边长 l 应取多大才行.

解

$$C=\frac{Q}{U}=\frac{10^{-4}}{100}\text{F}=10^{-6}\text{F}$$

$$\boxed{C=\frac{Q}{U}=\varepsilon_0\frac{S}{d}}$$

$$S=l^2$$

$$l=\sqrt{\frac{Cd}{\varepsilon_0}}=10.6\text{m}$$

又例：平行板电容器两极板间的距离 $d = 1\text{mm}$，要使电容器的电容量达到 1F，极板面积需多大？

解

$$\text{由}\ C = \varepsilon_0 \frac{S}{d}\ \text{得}\ S = \frac{Cd}{\varepsilon_0}$$

$$S = 1.13 \times 10^8 m^2 = 1.70 \times 10^5\ \text{亩}$$

1平方米=0.0015亩

1公顷=15亩

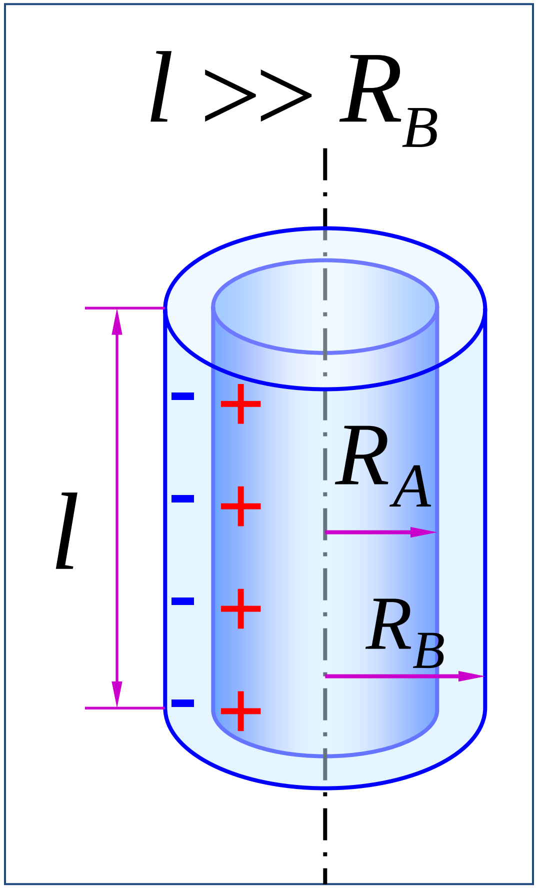
2. 圆柱形电容器

（1）设两导体圆柱面单位长度上分别带电 $\pm\lambda$

（2）$E=\dfrac{\lambda}{2\pi\,\varepsilon_0 r}$，$(R_A<r<R_B)$

（3）$U=\displaystyle\int_{R_A}^{R_B}\frac{\lambda \mathrm{d}r}{2\pi\,\varepsilon_0 r}=\frac{Q}{2\pi\,\varepsilon_0 l}\ln\frac{R_B}{R_A}$

（4）电容 $\boxed{C=\dfrac{Q}{U}=2\pi\,\varepsilon_0 l\Big/\ln\dfrac{R_B}{R_A}}$



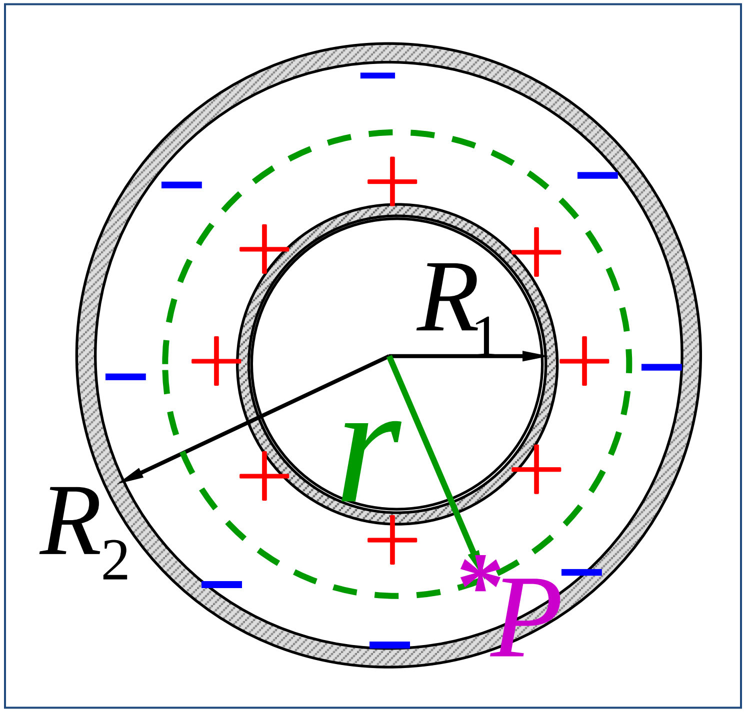
单位长度的电容 $C_l=\dfrac{\lambda}{U}=2\pi\varepsilon_0/\ln\dfrac{R_B}{R_A}$

3. 球形电容器的电容

球形电容器是由半径分别为 R_1 和 R_2 的两同心金属球壳所组成.

解 设内球带正电（$+Q$），外球带负电（$-Q$）.

$$\vec{E}=\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\vec{e}_r \quad (R_1<r<R_2)$$



$$U=\int_l \vec{E}\cdot d\vec{l}=\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\int_{R_1}^{R_2}\frac{dr}{r^2}$$

$$=\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{R_1}-\frac{1}{R_2}\right)$$

$$\boldsymbol{C=\frac{Q}{U}=4\pi\varepsilon_0\frac{R_1R_2}{R_2-R_1}}$$

$R_2\to\infty,\quad C=4\pi\varepsilon_0 R_1$

孤立导体球电容

两导体组（A、B）电容器

定义：$$C=\frac{q}{V_A-V_B}=\frac{q}{\Delta V_{AB}}$$

电容器**电容**只与导体组的几何构形（及周围空间介质）有关，与带电多少无关。

实验证明，充满电介质时电容器的电容C为两极板间为真空时电容C_0的ε_r倍：

$$C=\varepsilon_r C_0$$ （适用于任何形状的电容器）

ε_r称为介质的**相对电容率**或**相对介电常量**。

如果两极板间充满相对电容率为ε_r的电介质，各种电容器的电容 为

平板电容器：
$$C=\frac{\varepsilon_0\varepsilon_\mathrm{r}S}{d}$$

圆柱形电容器：
$$C=\frac{2\pi\varepsilon_0\varepsilon_\mathrm{r}l}{\ln\frac{R_\mathrm{B}}{R_\mathrm{A}}}$$

球形电容器：
$$C=4\pi\varepsilon_0\varepsilon_\mathrm{r}\frac{R_\mathrm{A}R_\mathrm{B}}{R_\mathrm{B}-R_\mathrm{A}}$$

§7-10 静电场的能量

带电体系：

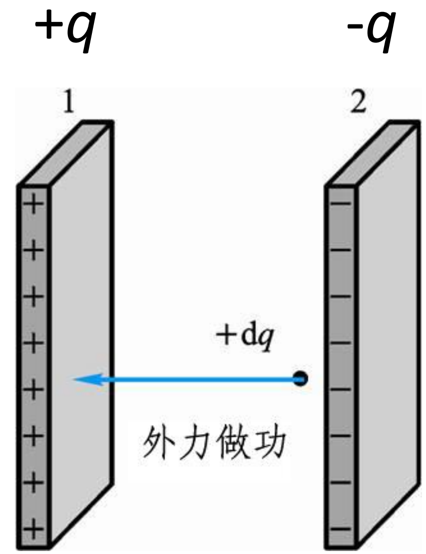
把带电系统的电荷分裂到彼此相距无限远的状态中静电场力做正功，或把电荷从无限远离的状态聚合成带电系统的过程中，外力克服静电力做功

电容器的放电过程：把静电能即电场的能量转化为其他形式的能量。

电容器的充电过程：把其他形式的能量转化为静电能即电场的能量。

以平行板电容器充电为例：

设某时刻两极板已带有电荷±q，电势差为 $V_1'-V_2'$



再把电荷+dq从极板2移到极板1，外力克服电场力做功为

$$\mathrm{d}A=(V_1'-V_2')\mathrm{d}q$$

$$Q=CU$$

$$\because V_1'-V_2'=\frac{q}{C} \qquad \therefore \mathrm{d}A=\frac{q}{C}\mathrm{d}q$$

电容器从q=0充电至 q =Q 时，外力做的总功为

$$A=\int \mathrm{d}A=\int_0^Q \frac{q}{C}\mathrm{d}q=\frac{1}{2}\frac{Q^2}{C}$$

$$\because Q = C(V_1 - V_2)$$

电容器储存的静电能：

$$W = \frac{1}{2}\frac{Q^2}{C} = \frac{1}{2}Q(V_1 - V_2) = \frac{1}{2}C(V_1 - V_2)^2$$

适用于任何形状的电容器。

平行板电容器：

$$C=\frac{\varepsilon S}{d} \qquad V_1-V_2=Ed$$

$$W=\frac{1}{2}C(V_1-V_2)^2=\frac{1}{2}\varepsilon E^2 Sd=\frac{1}{2}\varepsilon E^2 V$$

（电容器体积：$V=Sd$）

带电体系的电能是储存在电场中的，静电能即电场的能量。

电场的能量密度：

$$w_{\mathrm{e}}=\frac{W}{V}=\frac{1}{2}\varepsilon E^2=\frac{1}{2}DE$$

电场的能量密度：（适用于任何电场）

$$w_{\mathrm{e}} = \frac{1}{2}\vec{D} \cdot \vec{E}$$

任一带电体系的总能量：

$$W = \iiint_V w_e dV = \iiint_V \frac{1}{2}\vec{D} \cdot \vec{E} dV$$

例7-30 平行板空气（ε_0）电容器，面积为S，间距为d， 用电源充电使两极板带有电荷$\pm Q$。断开电源后再把两极板的距离拉开到$2d$，求：（1）外力所做的功，（2）两极板间的相互吸引力。

解：（1）两极板拉开前后的电容为

$$C_1 = \frac{\varepsilon_0 S}{d} \qquad C_2 = \frac{\varepsilon_0 S}{2d}$$

电容器储存的电能为

$$W_1 = \frac{1}{2}\frac{Q^2}{C_1} = \frac{Q^2 d}{2\varepsilon_0 S} \qquad W_2 = \frac{1}{2}\frac{Q^2}{C_2} = \frac{Q^2 2d}{2\varepsilon_0 S}$$

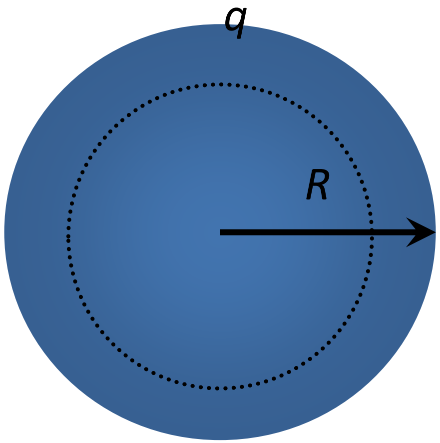
外力所做的功为

$$A = W_2 - W_1 = \frac{Q^2 d}{2\varepsilon_0 S}$$

（2）两极板间的相互吸引力：

$$F = \frac{A}{d} = \frac{Q^2}{2\varepsilon_0 S}$$

例7-31 计算均匀带电球体的电场能量。设球的半径为R，所带电荷量为q，球外为真空。



解：

$$\rho = \frac{q}{4\pi R^3/3}$$

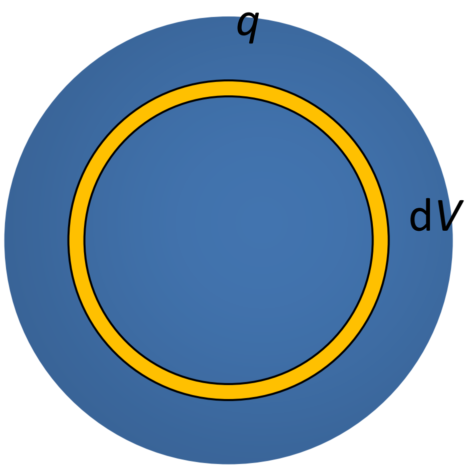
$$E_1 \cdot 4\pi r^2 = \frac{q}{4\pi R^3/3}\frac{4\pi r^3/3}{\varepsilon_0}$$

球内场强： $$E_1 = \frac{qr}{4\pi\varepsilon_0 R^3}$$ 电场能量密度$w_{e1} = \frac{1}{2}\varepsilon_0 E_1^2$

球外场强： $$E_2 = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}$$ 电场能量密度$w_{e2} = \frac{1}{2}\varepsilon_0 E_2^2$

$$W = \iiint w_{\mathrm{e}} \mathrm{d}V$$

$$= \iiint_0^R \frac{1}{2} \varepsilon_0 E_1^2 \mathrm{d}V + \iiint_R^\infty \frac{1}{2} \varepsilon_0 E_2^2 \mathrm{d}V$$



$$= \int_0^R \frac{1}{2} \varepsilon_0 \left(\frac{qr}{4\pi\varepsilon_0 R^3} \right)^2 4\pi r^2 \mathrm{d}r$$

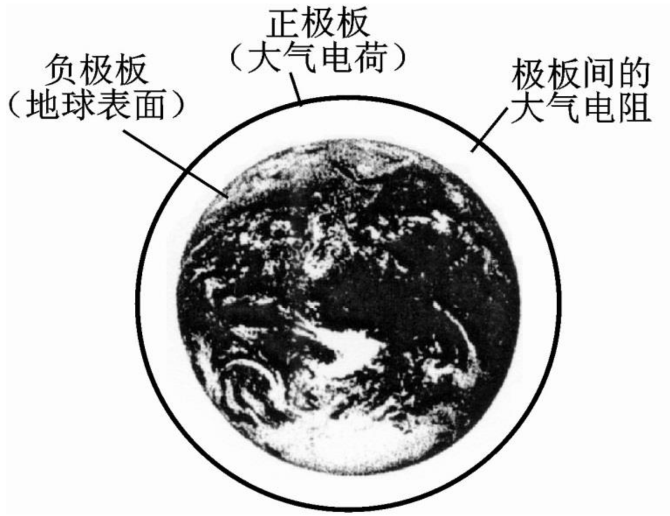
$$+ \int_R^\infty \frac{1}{2} \varepsilon_0 \left(\frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^2} \right)^2 4\pi r^2 \mathrm{d}r$$

$$= \frac{q^2}{40\pi\varepsilon_0 R} + \frac{q^2}{8\pi\varepsilon_0 R} = \frac{3q^2}{20\pi\varepsilon_0 R}$$

*例7-32 物理学家开尔文把大气层构建成一个电容器的模型，地球表面是这个电容器的一块极板，带有5×10^5 C的负电荷，大气等效为在5 km高的另一块极板，带正电荷，求：（1）这个球形电容器的电容；（2）地球表面的能量密度及球形电容器的电能。

解：（1）地球的半径 r =6400 km，电离层的高度 h =5 km，球形电容器的电容为

$$C = 4\pi\varepsilon_0 \frac{r(r+h)}{h} \approx 0.9\,\text{F}$$



地球表面的场强：

$$E = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}$$

地球表面的能量密度：

$$w_{\mathrm{e}} = \frac{1}{2}\varepsilon_0 E^2 = \frac{Q^2}{32\pi^2\varepsilon_0 r^4} = 5.4\times10^{-8}\ \mathrm{J/m^3}$$

球形电容器的电能：

$$W = \frac{1}{2}\frac{Q^2}{C} = 1.4\times10^{9}\ \mathrm{J}$$

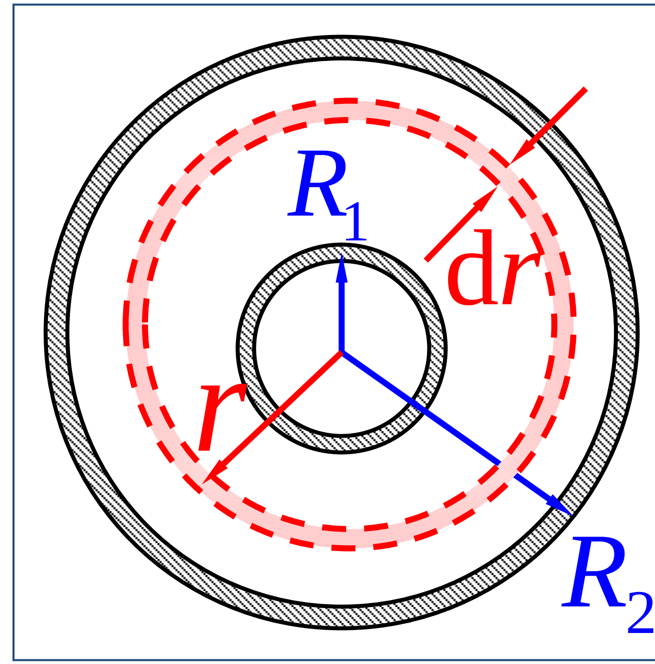
例： 如图所示, 球形电容器的内、外半径分别为 R_1 和 R_2，所带电荷为 $\pm Q$ ．问此电容器贮存的电场能量为多少？

解

$$\vec{E} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q}{r^2}\vec{e}_r$$

$$w_e = \frac{1}{2}\varepsilon_0 E^2 = \frac{Q^2}{32\pi^2\varepsilon_0 r^4}$$

$$dW_e = w_e dV = \frac{Q^2}{8\pi\varepsilon_0 r^2}dr$$



$$W_e = \int dW_e = \frac{Q^2}{8\pi\varepsilon_0}\int_{R_1}^{R_2}\frac{dr}{r^2} = \frac{Q^2}{8\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2}\right)$$

$$W_e = \frac{Q^2}{8\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2}\right) = \frac{1}{2}\frac{Q^2}{4\pi\varepsilon_0 \frac{R_2 R_1}{R_2 - R_1}}$$

讨 论

（1） $W_e = \frac{Q^2}{2\ C}$ $C = 4\pi\varepsilon_0 \frac{R_2 R_1}{R_2 - R_1}$

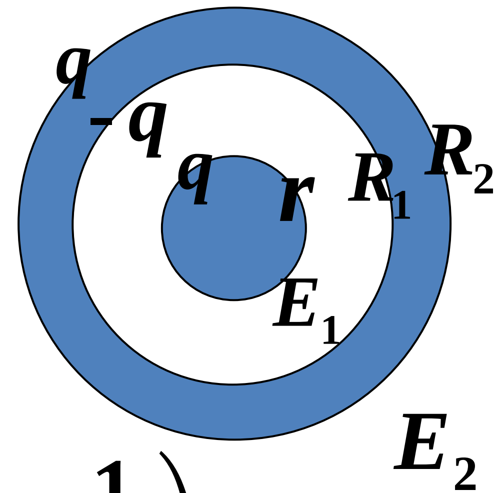
（球形电容器电容）

（2） $R_2 \to \infty$ $W_e = \frac{Q^2}{8\pi\varepsilon_0 R_1}$

（孤立导体球贮存的能量）

思考： 真空中半径为r 的导体球，外套同心导体球壳，半径R_1、R_2，内球带电荷q，讨论下列两种情况下静电能的损失：（1）球与壳用导线相连；（2）壳接地。

$$W=\frac{1}{2}\varepsilon_0\iiint_r^{R_1}E_1^2dV+\frac{1}{2}\varepsilon_0\iiint_{R_2}^{\infty}E_2^2dV$$



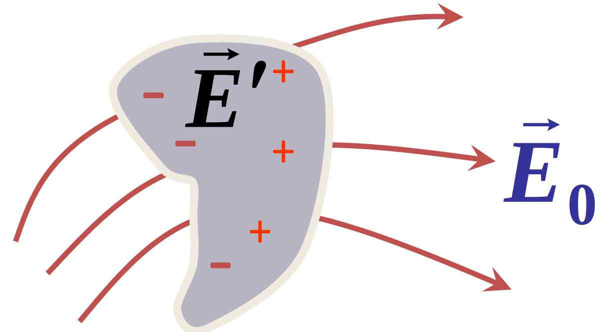
$$\Delta W_1=-\frac{1}{2}\varepsilon_0\iiint_r^{R_1}E_1^2dV=-\frac{q^2}{8\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{r}-\frac{1}{R_1}\right)$$

$$\Delta W_2=-\frac{1}{2}\varepsilon_0\iiint_{R_2}^{\infty}E_2^2dV=-\frac{q^2}{8\pi\varepsilon_0R_2}$$

五、介质中的静电场

$$\vec{E} = \vec{E}_0 + \vec{E}'$$

q_0 源电荷（自由电荷） q' 极化电荷



实验表明： 对于各向同性的电介质，在E_0不太大的情况下，有

$\vec{P} = \chi_e \varepsilon_0 \vec{E} = (\varepsilon_r - 1)\varepsilon_0 \vec{E}$（$\chi_e$、$\varepsilon_r$ 称为介质的极化率、相对介电常量）

电位移矢量

$$\boxed{\vec{D} = \vec{P} + \varepsilon_0 \vec{E}}$$ （任何介质）

$$\boxed{\vec{D} = \varepsilon \vec{E}}$$ （均匀介质）

有介质时的高斯定理 $\oiint_S \vec{D} \cdot d\vec{S} = \sum_{S内} q_0$

单选题 1分

设置

下列几个说法中哪一个是正确的？

A 电场中某点场强的方向，就是将点电荷放在该点所受电场力的方向

B 在以点电荷为中心的球面上，由该点电荷所产生的场强处处相同

C 场强可由 $\vec{E}=\frac{\vec{F}}{q}$ 其中 q 为试验电荷， q 可正、可负， $\vec{F}$为试验电荷所受的电场力

D 以上说法都不正确

提交

单选题 1分

设置

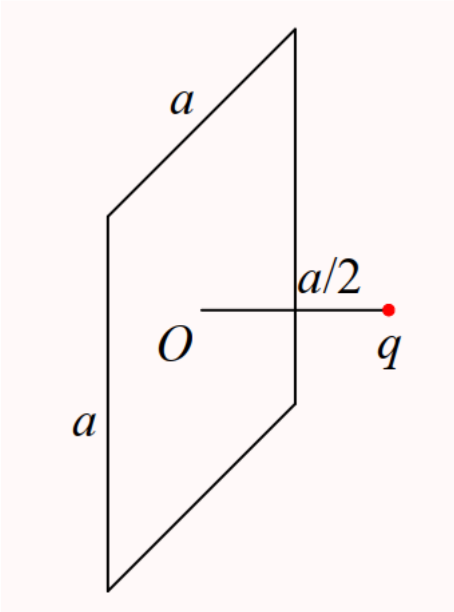
有一边长为 a 的正方形平面，在其中垂线上距中心 O 点 $a/2$ 处，有一电荷为 q 的正点电荷，如图所示，则通过该平面的电场强度通量为

A $\dfrac{q}{3\varepsilon_0}$

B $\dfrac{q}{4\pi\varepsilon_0}$

C $\dfrac{q}{3\pi\varepsilon_0}$

D $\dfrac{q}{6\varepsilon_0}$



提交

单选题 1分

设置

半径为 R 的均匀带电球面，若其电荷面密度为 σ，则在距离球面外 R 处的电场强度大小为：

A $\dfrac{\sigma}{\varepsilon_0}$

B $\dfrac{\sigma}{2\varepsilon_0}$

C $\dfrac{\sigma}{4\varepsilon_0}$

D $\dfrac{\sigma}{8\varepsilon_0}$

提交

单选题 1分

设置

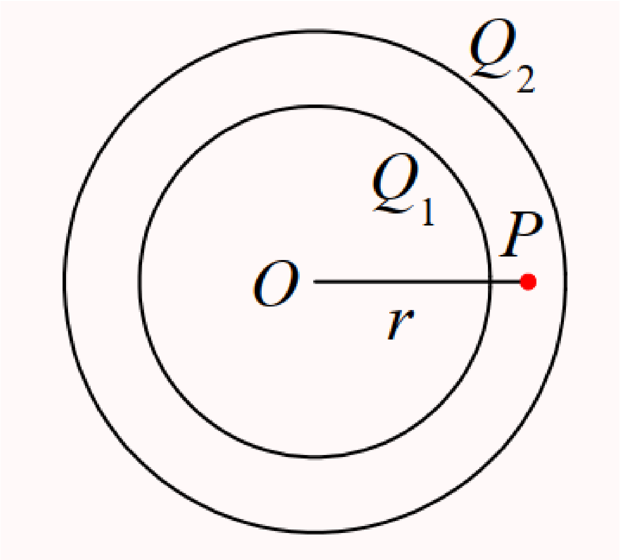
如图所示，两个同心的均匀带电球面，内球面带电荷 Q_1，外球面带电荷 Q_2，则在两球面之间、距离球心为 r 处的 P 点的场强大小 E 为：

A $\dfrac{Q_1}{4\pi\varepsilon_0 r^2}$

B $\dfrac{Q_1+Q_2}{4\pi\varepsilon_0 r^2}$

C $\dfrac{Q_2}{4\pi\varepsilon_0 r^2}$

D $\dfrac{Q_1-Q_2}{4\pi\varepsilon_0 r^2}$

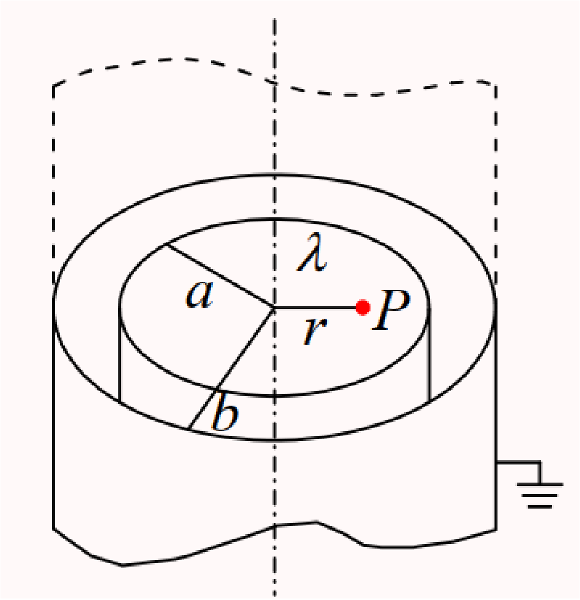


提交

单选题 1分

设置

如图所示，一半径为 a 的“无限长”圆柱面上均匀带电，其电荷线密度为 λ。在它外面同轴地套一半径为 b 的薄金属圆筒，圆筒原先不带电，但与地连接。设地的电势为零，则在内圆柱面里面、距离轴线为 r 的 P 点的场强大小和电势分别为：



A $E=0; V=\frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0}\ln\frac{a}{r}$

B $E=0; V=\frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0}\ln\frac{b}{a}$

C $E=\frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0 r}; V=\frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0}\ln\frac{b}{r}$

D $E=\frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0 r}; V=\frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0}\ln\frac{b}{a}$

提交

真空中一半径为 R 的均匀带电球面带有电荷 $Q(Q>0)$．今在球面上挖去非常小块的面积$\triangle S$(连同电荷)，如图所示，假设不影响其他处原来的电荷分布，则挖去$\triangle S$后球心处电场强度的大小 $E=$ ______$\frac{Q\Delta S}{16\pi^2\varepsilon_0 R^4}$______，其方向为______由圆心 O 点指向$\triangle S$______．