第四章　线性方程组

线性方程组是最简单也是最重要的一类代数方程组, 它的解法早在中国古代的数学著作<<九章算术方程>>中已经作了比较完整的叙述. 科学研究和工程应用中的许多数学问题最终往往归结为解线性方程组. 本章研究线性方程组解的理论, 并利用矩阵的初等变换给出线性方程组的解法.

§ 4.1　齐次线性方程组

微视频 4-1
齐次线性方程组
PPT 课件 4-1 齐次线性方程组

1. 齐次线性方程组的表示形式

含有 n 个未知数 $x_1, x_2, \cdots, x_n$, m 个方程的齐次线性方程组为

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = 0 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = 0 \\ \cdots\cdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = 0 \end{cases}. \tag{4.1}$$

记 $\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$, 则 (4.1) 式可写成矩阵方程形式

$$\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{0}, \tag{4.2}$$

称 $\boldsymbol{A}$ 为齐次线性方程组 (4.1) 的系数矩阵, 称 $\boldsymbol{x}$ 为未知数向量.

将系数矩阵 $\boldsymbol{A}$ 按列分块为 $\boldsymbol{A} = (\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_n)$, 其中 $\boldsymbol{\alpha}_j = \begin{pmatrix} a_{1j} \\ a_{2j} \\ \vdots \\ a_{mj} \end{pmatrix}$, $j = 1, 2, \cdots, n$, 则 (4.1) 式可写成向量方程形式

$$x_1\boldsymbol{\alpha}_1 + x_2\boldsymbol{\alpha}_2 + \cdots + x_n\boldsymbol{\alpha}_n = \boldsymbol{0}. \tag{4.3}$$

若 $x_1 = c_1, x_2 = c_2, \cdots, x_n = c_n$ 为方程组 (4.1) 的解, 则称 $\boldsymbol{x} = (c_1, c_2, \cdots, c_n)^T$ 为 (4.2) 的解向量，有时也简称为解.

2. 齐次线性方程组解的判定

齐次线性方程组总是有解的,因为 $\boldsymbol{x}=\mathbf{0}$ 就是它的解.在理论研究及实际应用中,我们常常需要知道齐次线性方程组在什么情况下有非零解.

定理 4.1 n 元齐次线性方程组 $\boldsymbol{Ax}=\mathbf{0}$ 有非零解的充分必要条件是 $\mathrm{R}(\boldsymbol{A})<n$.

证 由 (4.3) 式知, $\boldsymbol{Ax}=\mathbf{0}$ 有非零解的充分必要条件为存在不全为零的数 $x_1, x_2, \cdots, x_n$,使

$$x_1\boldsymbol{\alpha}_1+x_2\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+x_n\boldsymbol{\alpha}_n=\mathbf{0},$$

即向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n$ 线性相关,从而 $\mathrm{R}(\boldsymbol{A})=\mathrm{R}(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n)<n$.

定理 4.2 n 元齐次线性方程组 $\boldsymbol{Ax}=\mathbf{0}$ 只有零解的充分必要条件为 $\mathrm{R}(\boldsymbol{A})=n$.

此为定理 4.1 的逆否定理.

推论 4.1 当 $m<n$ 时, $\boldsymbol{A}_{m\times n}\boldsymbol{x}=\mathbf{0}$ 有非零解.

推论 4.2 $\boldsymbol{A}_{n\times n}\boldsymbol{x}=\mathbf{0}$ 有非零解的充分必要条件为系数矩阵的行列式 $|\boldsymbol{A}|=0$; $\boldsymbol{A}_{n\times n}\boldsymbol{x}=\mathbf{0}$ 只有零解的充分必要条件为系数矩阵的行列式 $|\boldsymbol{A}|\neq 0$.

在三维几何空间中,齐次线性方程组 $\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2+a_{13}x_3=0 \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+a_{23}x_3=0 \\ a_{31}x_1+a_{32}x_2+a_{33}x_3=0 \end{cases}$ 的第 i 个方程表示一个以 $\boldsymbol{\alpha}_i=(a_{i1},a_{i2},a_{i3})^T$ $(i=1,2,3)$ 为法向量且过原点的平面,故该方程组的解向量是一个与向量 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 均垂直的向量.

(1)若 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 不共面,即 $\mathrm{R}(\boldsymbol{A})=\mathrm{R}(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3)=3$,则方程组的解向量只有零向量;

(2)若 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 共面但不共线,即 $\mathrm{R}(\boldsymbol{A})=\mathrm{R}(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3)=2$,则垂直于此平面的向量均是解,这些解向量彼此平行;

(3)若 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 共线,即 $\mathrm{R}(\boldsymbol{A})=\mathrm{R}(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3)=1$,则以 $\boldsymbol{\alpha}_1$ 为法向量的平面上的所有向量都是解,这些解向量组成一个平面.

方法总结:方程组 $\boldsymbol{Ax}=\mathbf{0}$ 解的判定方法

3. 齐次线性方程组解的性质

利用矩阵的运算,易验证

性质 4.1 若 ξ_1,ξ_2 为 $\boldsymbol{Ax}=\mathbf{0}$ 的解,则 $\xi_1+\xi_2$ 也为 $\boldsymbol{Ax}=\mathbf{0}$ 的解.

性质 4.2 若 ξ 为 $\boldsymbol{Ax}=\mathbf{0}$ 的解, k 为任意常数，则 $k\xi$ 也为 $\boldsymbol{Ax}=\mathbf{0}$ 的解.

由性质 4.2 知，齐次线性方程组若有非零解，那么它一定有无穷多解.

4. 齐次线性方程组的解空间

令 $S=\left\{\boldsymbol{x}\middle|\boldsymbol{Ax}=\mathbf{0}\right\}$，即 S 为齐次线性方程组 (4.2) 的全体解向量组成的集合，由性质 4.1 及 4.2 知， S 为向量空间，称 S 为齐次线性方程组 (4.2) 的解空间.

定义 4.1 当 $\mathrm{R}(\boldsymbol{A})=r<n$ 时，称解空间 S 的基为齐次线性方程组 (4.2) 的基础解系.

下面研究基础解系的求法.

概念解析：基础解系

当 $\mathrm{R}(\boldsymbol{A})=r<n$ 时，不妨设齐次线性方程组 (4.2) 的系数矩阵 A 经初等行变换化为行最简形矩阵为

$$\boldsymbol{A}\sim\begin{pmatrix}1&0&\cdots&0&c_{1,\ r+1}&\cdots&c_{1n}\\0&1&\cdots&0&c_{2,\ r+1}&\cdots&c_{2n}\\\vdots&\vdots&&\vdots&\vdots&&\vdots\\0&0&\cdots&1&c_{r,\ r+1}&\cdots&c_{rn}\\0&0&\cdots&0&0&\cdots&0\\\vdots&\vdots&&\vdots&\vdots&&\vdots\\0&0&\cdots&0&0&\cdots&0\end{pmatrix},$$

则与方程组 (4.2) 同解的方程组为

$$\begin{cases}x_1=-c_{1,r+1}x_{r+1}-\cdots-c_{1n}x_n\\x_2=-c_{2,r+1}x_{r+1}-\cdots-c_{2n}x_n\\\qquad\cdots\cdots\\x_r=-c_{r,r+1}x_{r+1}-\cdots-c_{rn}x_n\end{cases},\tag{4.4}$$

取 $x_{r+1},\ x_{r+2},\cdots,\ x_n$ 为自由未知量，并令它们分别取下面 $n-r$ 组数

$$\begin{pmatrix}x_{r+1}\\x_{r+2}\\\vdots\\x_n\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\0\\\vdots\\0\end{pmatrix},\ \begin{pmatrix}0\\1\\\vdots\\0\end{pmatrix},\ \cdots,\ \begin{pmatrix}0\\0\\\vdots\\1\end{pmatrix},$$

将它们分别代入方程组 (4.4) 求得 $x_1,\ x_2,\cdots,\ x_r$，从而得到方程组 (4.2) 的 $n-r$ 个解向量

$$\xi_1=\begin{pmatrix}-c_{1,r+1}\\ \vdots\\ -c_{r,r+1}\\ 1\\ 0\\ \vdots\\ 0\end{pmatrix},\quad \xi_2=\begin{pmatrix}-c_{1,r+2}\\ \vdots\\ -c_{r,r+2}\\ 0\\ 1\\ \vdots\\ 0\end{pmatrix},\quad \cdots,\quad \xi_{n-r}=\begin{pmatrix}-c_{1,n}\\ \vdots\\ -c_{r,n}\\ 0\\ 0\\ \vdots\\ 1\end{pmatrix},$$

方法总结：抽象齐次线性方程组基础解系判定与求解方法

由定理3.3知，$\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_{n-r}$ 是线性无关的.

设 $\boldsymbol{x}=(x_1,\cdots,x_r,x_{r+1},\cdots,x_n)^T$ 为方程组 (4.2) 的任一解，显然

$$\boldsymbol{x}=x_{r+1}\xi_1+x_{r+2}\xi_2+\cdots+x_n\xi_{n-r},$$

综上得 $\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_{n-r}$ 为齐次线性方程组 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$ 的一个基础解系，所含向量个数为自由未知量的个数 $n-r$.

由于自由未知量的选取与取值都不是唯一的，也就是说基础解系不唯一，方程组 (4.2) 的任意 $n-r$ 个线性无关的解都可构成它的基础解系. 由定理3.4可得

定理4.3 当 $\mathrm{R}(\boldsymbol{A})=r<n$ 时，若 $\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_{n-r}$ 为 n 元齐次线性方程组 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$ 的基础解系，则 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$ 的通解为

$$\boldsymbol{x}=k_1\xi_1+k_2\xi_2+\cdots+k_{n-r}\xi_{n-r},$$

其中 $k_1,\ k_2,\ \cdots,\ k_{n-r}$ 为任意常数.

典型例题：关于抽象线性方程组概念的相关问题

例1 求齐次线性方程组 $\begin{cases}x_1+x_2-x_3-x_4=0\\ 2x_1-5x_2+3x_3+2x_4=0\\ 7x_1-7x_2+3x_3+x_4=0\end{cases}$ 的基础解系和通解.

解 对方程组的系数矩阵 $\boldsymbol{A}$ 作初等行变换化为行最简形矩阵

典型例题：方程组基础解系概念的相关问题

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&1&-1&-1\\ 2&-5&3&2\\ 7&-7&3&1\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1&0&-\frac{2}{7}&-\frac{3}{7}\\ 0&1&-\frac{5}{7}&\frac{4}{7}\\ 0&0&0&0\end{pmatrix},$$

$\mathrm{R}(\boldsymbol{A})=2<4$，方程组有无穷多解，$n-\mathrm{R}(\boldsymbol{A})=2$，基础解系含2个解向量，原方程组同

解于方程组 $\begin{cases} x_1 - \dfrac{2}{7}x_3 - \dfrac{3}{7}x_4 = 0 \\ x_2 - \dfrac{5}{7}x_3 - \dfrac{4}{7}x_4 = 0 \end{cases}$，选 x_3, x_4 为自由未知量，且分别取 $\begin{pmatrix} x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$，

得基础解系为

$$\xi_1 = \begin{pmatrix} \frac{2}{7} \\ \frac{5}{7} \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \xi_2 = \begin{pmatrix} \frac{3}{7} \\ \frac{4}{7} \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix},$$

典型例题：已知齐次线性方程组基础解系，构造齐次线性方程组

通解为

$$\boldsymbol{x} = k_1\xi_1 + k_2\xi_2，\quad k_1, k_2 \text{为任意常数}.$$

例 2 设有矩阵 $\boldsymbol{A}_{m\times n}$，$\boldsymbol{B}_{n\times s}$ 满足 $\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{O}$，证明 $\mathrm{R}(\boldsymbol{A})+\mathrm{R}(\boldsymbol{B})\le n$.

证 将矩阵 $\boldsymbol{B}$ 按列分块为 $\boldsymbol{B}=(\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_s)$，由 $\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{O}$ 得

$$\boldsymbol{A}\beta_j=\boldsymbol{0}，\quad j=1,2,\cdots,s，$$

即矩阵 $\boldsymbol{B}$ 的每个列向量均是齐次线性方程组 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$ 的解向量.

若 $\boldsymbol{B}=\boldsymbol{O}$，则显然有 $\mathrm{R}(\boldsymbol{A})+\mathrm{R}(\boldsymbol{B})\le n$；

若 $\boldsymbol{B}\ne\boldsymbol{O}$，则 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$ 有非零解，解空间的维数为 $n-\mathrm{R}(\boldsymbol{A})$，从而

$$\mathrm{R}(\boldsymbol{B})=\mathrm{R}(\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_s)\le n-\mathrm{R}(\boldsymbol{A}),$$

故 $\mathrm{R}(\boldsymbol{A})+\mathrm{R}(\boldsymbol{B})\le n$.

典型例题：含有参数的齐次线性方程组解的讨论

例 3 设 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 4 & \lambda & 3 \\ 3 & -1 & 1 \end{pmatrix}$，$\boldsymbol{B}$ 为3阶非零矩阵，且 $\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{O}$，求 λ.

解 由 $\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{O}$，$\boldsymbol{B}\ne\boldsymbol{O}$，知齐次线性方程组 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$ 有非零解. 因 $\boldsymbol{A}$ 为方阵，由推论 4.2 得，$\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$ 有非零解的充要条件为 $|\boldsymbol{A}|=7\lambda+21=0$，即 $\lambda=-3$.

例 4 设 $\boldsymbol{A}$ 为 $m\times n$ 矩阵，证明 $\mathrm{R}(\boldsymbol{A}^T\boldsymbol{A})=\mathrm{R}(\boldsymbol{A})$.

证 设 $\boldsymbol{x}$ 为 n 维列向量，可证齐次线性方程组 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$ 与 $\boldsymbol{A}^T\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$ 同解，从而系数矩阵

的秩相等.

事实上，若 $\boldsymbol{x}$ 满足 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$，则有 $\boldsymbol{A}^T\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$．若 $\boldsymbol{x}$ 满足 $\boldsymbol{A}^T\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$，两边左乘 $\boldsymbol{x}^T$ 得 $\boldsymbol{x}^T\boldsymbol{A}^T\boldsymbol{Ax}=0$，即 $(\boldsymbol{Ax})^T(\boldsymbol{Ax})=0$，可推知 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$．因此 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$ 与 $\boldsymbol{A}^T\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$ 同解.

微视频 4-2 非齐次线性方程组
PPT 课件 4-2 非齐次线性方程组

§ 4.2　非齐次线性方程组

1. 非齐次线性方程组的表示形式

含有 n 个未知数 $x_1, x_2, \cdots, x_n$，m 个方程的非齐次线性方程组为

$$\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_n=b_1 \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots+a_{2n}x_n=b_2 \\ \qquad\cdots\cdots \\ a_{m1}x_1+a_{m2}x_2+\cdots+a_{mn}x_n=b_m \end{cases}, \tag{4.5}$$

其中常数项 $b_1, b_2, \cdots, b_m$ 不全为零.

记 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$，$\boldsymbol{x}=\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$，$\boldsymbol{b}=\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$，则 (4.5) 式可写成矩阵方程形式

$$\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}, \tag{4.6}$$

称 $\boldsymbol{A}$ 为方程组 (4.5) 的系数矩阵, 称 $\boldsymbol{x}$ 为未知数向量，称 $\boldsymbol{b}$ 为常数项向量，并称矩阵

$$(\boldsymbol{A},\boldsymbol{b})=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} & b_m \end{pmatrix}$$

为线性方程组 (4.5) 的增广矩阵.

将系数矩阵 $\boldsymbol{A}_{m\times n}$ 按列分块为 $\boldsymbol{A}=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n)$，其中 $\boldsymbol{\alpha}_j=\begin{pmatrix} a_{1j} \\ a_{2j} \\ \vdots \\ a_{mj} \end{pmatrix}$，

$j=1,2,\cdots,n$，则(4.5)式可写成向量方程形式

$$x_1\boldsymbol{\alpha}_1+x_2\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+x_n\boldsymbol{\alpha}_n=\boldsymbol{b}. \tag{4.7}$$

若$x_1=d_1,x_2=d_2,\cdots,x_n=d_n$为方程组$(4.5)$的解，则称$\boldsymbol{x}=(d_1,d_2,\cdots,d_n)^T$为$(4.6)$的解向量，有时也简称为解.

2.非齐次线性方程组解的判定

对于二元一次线性方程组$\begin{cases}a_{11}x_1+a_{12}x_2=b_1\\a_{21}x_1+a_{22}x_2=b_2\end{cases}$，其解的情形很容易从几何的角度来判定.事实上，由于其各方程均表示平面上一条直线，因此

（1）若两直线相交于一点,则交点的坐标就是方程组的唯一解；

（2）若两直线平行,则方程组无解；

（3）若两直线重合,则直线上任何一点的坐标都是方程组的解.

下面我们来研究线性方程组解的判定方法.

由(4.7)式，$\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$有解的充分必要条件是向量$\boldsymbol{b}$可由向量组$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n$线性表示，从而向量组$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n$与向量组$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n,\boldsymbol{b}$等价，可以得到如下定理.

定理4.4 n元非齐次线性方程组$\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$有解的充分必要条件是$\mathrm{R}(\boldsymbol{A})=\mathrm{R}(\boldsymbol{A},\boldsymbol{b})$.

证 必要性 当$\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$有解时，向量组$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n$与向量组$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n,\boldsymbol{b}$等价，故

$$\mathrm{R}(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n)=\mathrm{R}(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n,\boldsymbol{b}),$$

即$\mathrm{R}(\boldsymbol{A})=\mathrm{R}(\boldsymbol{A},\boldsymbol{b})$.

充分性 由$\mathrm{R}(\boldsymbol{A})=\mathrm{R}(\boldsymbol{A},\boldsymbol{b})$，即$\mathrm{R}(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n)=\mathrm{R}(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n,\boldsymbol{b})$，又由

$$\{\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n\}\subset\{\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n,\boldsymbol{b}\},$$

得$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n$的极大无关组也是$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n,\boldsymbol{b}$的极大无关组，向量$\boldsymbol{b}$可由向量组$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n$线性表示，即$\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$有解.

推论 4.3 n元非齐次线性方程组$\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$有唯一解的充分必要条件为$\mathrm{R}(\boldsymbol{A})=\mathrm{R}(\boldsymbol{A},\boldsymbol{b})=n$.

证 必要性 若$\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$有唯一解，则有唯一解向量$\boldsymbol{x}=(d_1,d_2,\cdots,d_n)^T$，使

$$\boldsymbol{b}=d_1\boldsymbol{\alpha}_1+d_2\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+d_n\boldsymbol{\alpha}_n .$$

假设$\mathrm{R}(\boldsymbol{A})=\mathrm{R}(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n)<n$，则向量组$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n$线性相关，于是，存在不全为零的数$k_1,k_2$ ，$\cdots$，k_n使

$$k_1\boldsymbol{\alpha}_1+k_2\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+k_n\boldsymbol{\alpha}_n=\boldsymbol{0},$$

从而

$$\begin{aligned}\boldsymbol{b}&=d_1\boldsymbol{\alpha}_1+d_2\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+d_n\boldsymbol{\alpha}_n+k_1\boldsymbol{\alpha}_1+k_2\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+k_n\boldsymbol{\alpha}_n\\&=(d_1+k_1)\boldsymbol{\alpha}_1+(d_2+k_2)\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+(d_n+k_n)\boldsymbol{\alpha}_n,\end{aligned}$$

故向量$(d_1+k_1,d_2+k_2,\cdots,d_n+k_n)^T\left(\neq(d_1,d_2,\cdots,d_n)^T\right)$也为$\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$的解向量，此与方程组有唯一解矛盾，所以$\mathrm{R}(\boldsymbol{A})=n$．再由定理4.4，得$\mathrm{R}(\boldsymbol{A})=\mathrm{R}(\boldsymbol{A},\boldsymbol{b})=n$.

充分性　当$\mathrm{R}(\boldsymbol{A})=\mathrm{R}(\boldsymbol{A},\boldsymbol{b})=n$时，向量组$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n$线性无关，向量组$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n,\boldsymbol{b}$线性相关，故$\boldsymbol{b}$可由$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n$唯一的线性表示，即方程组$\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$有唯一解.

推论 4.4　n元非齐次线性方程组$\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$有无穷多解的充分必要条件为$\mathrm{R}(\boldsymbol{A})=\mathrm{R}(\boldsymbol{A},\boldsymbol{b})<n$.

证　必要性　可由定理4.4及**推论**4.3立得.

充分性　当$\mathrm{R}(\boldsymbol{A})=\mathrm{R}(\boldsymbol{A},\boldsymbol{b})<n$时，$\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$的解$\boldsymbol{\eta}$与对应齐次线性方程组$\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$的任一解$\boldsymbol{\xi}$满足

$$\boldsymbol{A}(\boldsymbol{\eta}+\boldsymbol{\xi})=\boldsymbol{A\eta}+\boldsymbol{A\xi}=\boldsymbol{b}+\boldsymbol{0}=\boldsymbol{b},$$

即$\boldsymbol{\eta}+\boldsymbol{\xi}$为$\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$的解．当$\mathrm{R}(\boldsymbol{A})<n$时，$\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$有无穷多解，故$\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$有无穷多解.

推论 4.5　当$\mathrm{R}(\boldsymbol{A})=m$时，$\boldsymbol{A}_{m\times n}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{b}$必有解.

推论 4.6　$\boldsymbol{A}_{n\times n}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{b}$有唯一解的充分必要条件为系数矩阵的行列式

$$|\boldsymbol{A}| = D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \neq 0,$$

且 $x_j = \dfrac{D_j}{D}$， $D_j = \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1,j-1} & b_1 & a_{1,j+1} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & \cdots & a_{2,j-1} & b_2 & a_{2,j+1} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{n,j-1} & b_n & a_{n,j+1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$， $j = 1, 2, \cdots, n$.

此推论即为第一章中介绍过的克莱姆法则，在这里利用矩阵运算给出另外一种证明方法.

证　因 $|\boldsymbol{A}| \neq 0$，故 $\boldsymbol{A}^{-1}$ 存在. 由 $\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{b}$，两边左乘 $\boldsymbol{A}^{-1}$，得 $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{b} = \dfrac{\boldsymbol{A}^*}{|\boldsymbol{A}|}\boldsymbol{b} = \dfrac{\boldsymbol{A}^*}{D}\boldsymbol{b}$，

即

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \frac{1}{D}\begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \cdots & A_{n1} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ A_{1n} & A_{2n} & \cdots & A_{nn} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} = \frac{1}{D}\begin{pmatrix} b_1 A_{11} + b_2 A_{21} + \cdots + b_n A_{n1} \\ \vdots \\ b_1 A_{1n} + b_2 A_{2n} + \cdots + b_n A_{nn} \end{pmatrix},$$

于是

$$x_j = \frac{1}{D}\left(b_1 A_{1j} + b_2 A_{2j} + \cdots + b_n A_{nj}\right) = \frac{D_j}{D}, \quad j = 1, 2, \cdots, n.$$

定理 4.5 n 元非齐次线性方程组 $\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{b}$ 无解的充分必要条件为 $\mathrm{R}(\boldsymbol{A}) \neq \mathrm{R}(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{b})$.

此为定理 4. 4 的逆否定理.

3. 非齐次线性方程组解的性质

性质 4.3 若 $\boldsymbol{\eta}_1, \boldsymbol{\eta}_2$ 是 $\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{b}$ 的解, 则 $\boldsymbol{\eta}_1 - \boldsymbol{\eta}_2$ 是 $\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{0}$ 的解.

值得注意的是，$\boldsymbol{A}(\boldsymbol{\eta}_1 + \boldsymbol{\eta}_2) = \boldsymbol{A\eta}_1 + \boldsymbol{A\eta}_2 = 2\boldsymbol{b}$，即 $\boldsymbol{\eta}_1 + \boldsymbol{\eta}_2$ 不再是 $\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{b}$ 的解, 因此，非齐次线性方程组全体解向量不构成向量空间.

性质 4.4 若 $\boldsymbol{\eta}$ 是 $\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{b}$ 的解， $\boldsymbol{\xi}$ 是 $\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{0}$ 的解, 则 $\boldsymbol{\eta} + \boldsymbol{\xi}$ 是 $\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{b}$ 的解.

4. 非齐次线性方程组的通解公式

定理 4. 6 当 $\mathrm{R}(\boldsymbol{A}) = \mathrm{R}(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{b}) = r < n$ 时， n 元非齐次线性方程组 $\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{b}$ 的通解为

$$\boldsymbol{x} = \boldsymbol{\eta}^* + k_1\boldsymbol{\xi}_1 + k_2\boldsymbol{\xi}_2 + \cdots + k_{n-r}\boldsymbol{\xi}_{n-r},$$

其中 $\boldsymbol{\eta}^*$ 是 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$ 的一个特解，$\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_{n-r}$ 是对应齐次线性方程组 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$ 的基础解系，$k_1, k_2, \cdots, k_{n-r}$ 为任意常数.

证　一方面，设 x 为 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$ 的任一解，由性质 4.3 知，$\boldsymbol{x}-\boldsymbol{\eta}^*$ 为 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$ 的解，故存在 $k_1, k_2, \cdots, k_{n-r}$，使

$$\boldsymbol{x}=\boldsymbol{\eta}^*+k_1\xi_1+k_2\xi_2+\cdots+k_{n-r}\xi_{n-r}.$$

另一方面，由性质 4.4 知，对任意常数 $k_1, k_2, \cdots, k_{n-r}$，

$$\boldsymbol{x}=\boldsymbol{\eta}^*+k_1\xi_1+k_2\xi_2+\cdots+k_{n-r}\xi_{n-r}$$

为 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$ 的解，故定理得证.

典型例题：求抽象的非齐次方程组通解

例 1　已知非齐次线性方程组 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$ 有特解 $\eta_1=(1,0,2)^T$，$\eta_2=(-1,2,-1)^T$，$\eta_3=(1,0,0)^T$，且 $\mathrm{R}(\boldsymbol{A})=1$，求 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$ 的通解.

解　由 $\mathrm{R}(\boldsymbol{A})=1$，知 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$ 的基础解系含有 2 个线性无关的解，取 $\xi_1=\eta_1-\eta_3=(0,0,2)^T$，$\xi_2=\eta_2-\eta_3=(-2,2,-1)^T$ 为 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$ 的基础解系. 故 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$ 的通解为 $\boldsymbol{x}=\eta_1+k_1\xi_1+k_2\xi_2$，$k_1, k_2$ 为任意常数.

方法总结：抽象线性非齐次方程组解的判定方法

例 2　求非齐次线性方程组 $\begin{cases} x_1-x_2-x_3+x_4=0 \\ x_1-x_2+x_3-3x_4=1 \\ x_1-x_2-2x_3+3x_4=-\dfrac{1}{2} \end{cases}$ 的通解.

解　对方程组的增广矩阵作初等行变换化为行最简形

方法总结：判别两个方程组同解问题的判

$$(\boldsymbol{A},\boldsymbol{b})=\begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & -3 & 1 \\ 1 & -1 & -2 & 3 & -\dfrac{1}{2} \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & -1 & \dfrac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 & -2 & \dfrac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$\mathrm{R}(\boldsymbol{A})=\mathrm{R}(\boldsymbol{A},\boldsymbol{b})=2<4$，方程组有无穷多解，方程组同解于 $\begin{cases} x_1-x_2-x_4=\dfrac{1}{2} \\ x_3-2x_4=\dfrac{1}{2} \end{cases}$，取自由

未知量 $x_2=x_4=0$ 代入上述方程组，解得 $x_1=x_3=\frac{1}{2}$，从而 $\boldsymbol{\eta}^*=\left(\frac{1}{2},0,\frac{1}{2},0\right)^T$ 为原方程组一个特解．可求得对应齐次线性方程组的基础解系为 $\xi_1=(1,1,0,0)^T$，$\xi_2=(1,0,2,1)^T$，故原方程组的通解为

$$\boldsymbol{x}=\boldsymbol{\eta}^*+k_1\xi_1+k_2\xi_2\text{，}\quad k_1,k_2\text{ 为任意常数．}$$

例3 问 a 取何值时，非齐次线性方程组 $\begin{cases}ax_1+x_2+x_3=a-3\\ x_1+ax_2+x_3=-2\\ x_1+x_2+ax_3=-2\end{cases}$ 有唯一解?无解？有无穷多解？在有无穷多解时，求其通解．

方法总结：含参数非齐次线性方程组解的讨论

解法1 对方程组的增广矩阵作初等行变换化为行阶梯形

$$(\boldsymbol{A},\boldsymbol{b})=\begin{pmatrix}a&1&1&a-3\\1&a&1&-2\\1&1&a&-2\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1&a&1&-2\\0&a-1&1-a&0\\0&0&(a-1)(a+2)&-3(a-1)\end{pmatrix},$$

（1）当 $a\neq1$ 且 $a\neq-2$ 时，$\mathrm{R}(\boldsymbol{A})=\mathrm{R}(\boldsymbol{A},\boldsymbol{b})=3$，方程组有唯一解；

（2）当 $a=-2$ 时，$(\boldsymbol{A},\boldsymbol{b})\sim\begin{pmatrix}1&-2&1&-2\\0&1&-1&0\\0&0&0&1\end{pmatrix}$，$\mathrm{R}(\boldsymbol{A})=2\neq\mathrm{R}(\boldsymbol{A},\boldsymbol{b})=3$，方程组无解；

（3）当 $a=1$ 时，$(\boldsymbol{A},\boldsymbol{b})\sim\begin{pmatrix}1&1&1&-2\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{pmatrix}$，$\mathrm{R}(\boldsymbol{A})=\mathrm{R}(\boldsymbol{A},\boldsymbol{b})=1<3$，方程组有无穷多解，原方程组的同解方程组为 $x_1+x_2+x_3=-2$，特解可取为 $\boldsymbol{\eta}^*=(-2,0,0)^T$．对应齐次线性方程组的基础解系为 $\xi_1=(-1,1,0)^T$，$\xi_2=(-1,0,1)^T$，故原方程组的通解为

$$\boldsymbol{x}=\boldsymbol{\eta}^*+k_1\xi_1+k_2\xi_2\text{，}\quad k_1,k_2\text{ 为任意常数．}$$

解法2 因方程个数等于未知数个数，系数行列式

$$|\boldsymbol{A}|=\begin{vmatrix}a&1&1\\1&a&1\\1&1&a\end{vmatrix}=(a-1)^2(a+2).$$

（1）当 $a\neq1$ 且 $a\neq-2$ 时，由推论4.6知，方程组有唯一解；

（2）当 $a=1$ 与 $a=-2$ 时，对相应的增广矩阵分别作初等行变换，同解法1.

例4 设 $\boldsymbol{\alpha}_1=(1,0,-1,2)^T$，$\boldsymbol{\alpha}_2=(2,-1,-2,6)^T$，$\boldsymbol{\alpha}_3=(3,1,t,4)^T$，$\boldsymbol{\beta}=(4,-1,-5,10)^T$，已知 $\boldsymbol{\beta}$ 不能由 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性表示，求 t 的值.

典型例题：已知含参数的向量组，讨论参数取不同值时的向量线性表示问题

解 由题意，知向量方程 $x_1\boldsymbol{\alpha}_1+x_2\boldsymbol{\alpha}_2+x_3\boldsymbol{\alpha}_3=\boldsymbol{\beta}$ 无解，又

$$(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\beta})=\begin{pmatrix}1&2&3&4\\0&-1&1&-1\\-1&-2&t&-5\\2&6&4&10\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1&2&3&4\\0&1&-1&1\\0&0&t+3&-1\\0&0&0&0\end{pmatrix},$$

当 $t=-3$ 时，$\mathrm{R}(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3)\neq\mathrm{R}(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\beta})$，向量方程无解，即 $\boldsymbol{\beta}$ 不能由 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性表示.

方法总结：非齐次线性方程组通解的求解方法

例5 设矩阵 $\boldsymbol{A}=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4)$，其中 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4$ 均为四维列向量，且 $\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4$ 线性无关，$\boldsymbol{\alpha}_1=2\boldsymbol{\alpha}_2-\boldsymbol{\alpha}_3$，而 $\boldsymbol{\beta}=\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_3+\boldsymbol{\alpha}_4$，求 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$ 的通解.

解 由 $\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4$ 线性无关，$\boldsymbol{\alpha}_1=2\boldsymbol{\alpha}_2-\boldsymbol{\alpha}_3$，知 $\mathrm{R}(\boldsymbol{A})=3$，从而 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$ 的基础解系含一个向量，因 $\boldsymbol{A}\begin{pmatrix}1\\-2\\1\\0\end{pmatrix}=\boldsymbol{\alpha}_1-2\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_3=\boldsymbol{0}$，故 $\boldsymbol{\xi}=\begin{pmatrix}1\\-2\\1\\0\end{pmatrix}$ 为 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$ 的基础解系. 又 $\boldsymbol{A}\begin{pmatrix}1\\1\\1\\1\end{pmatrix}=\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_3+\boldsymbol{\alpha}_4=\boldsymbol{\beta}$，得 $\boldsymbol{\eta}^*=\begin{pmatrix}1\\1\\1\\1\end{pmatrix}$ 为 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$ 的一个特解，故 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$ 的通解为 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{\eta}^*+k\boldsymbol{\xi}$，$k$ 为任意常数.

§ 4.3　简单矩阵方程 $\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{B}$ 及其应用

本节研究简单矩阵方程 $\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{B}$ 有解的条件.

定理 4.7 设 $\boldsymbol{A}$ 为 $n\times m$ 矩阵，$\boldsymbol{B}$ 为 $n\times l$ 矩阵，则矩阵方程 $\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{B}$ 有解的充分必要条

件是$\mathrm{R}(\boldsymbol{A})=\mathrm{R}(\boldsymbol{A},\boldsymbol{B})$.

证 设$\boldsymbol{A}=(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m)$，$\boldsymbol{B}=(\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_l)$，$\boldsymbol{X}=(x_{ij})_{m\times l}$，则矩阵方程$\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{B}$等价于向量方程组

$$\begin{cases} x_{11}\alpha_1+x_{21}\alpha_2+\cdots+x_{m1}\alpha_m=\beta_1 \\ \qquad\qquad\cdots\cdots \\ x_{1l}\alpha_1+x_{2l}\alpha_2+\cdots+x_{ml}\alpha_m=\beta_l \end{cases}. \tag{4.8}$$

必要性 $\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{B}$有解，由(4.8)式，向量组$\beta_1,\cdots,\beta_l$可由向量组$\alpha_1,\cdots,\alpha_m$线性表示，即向量组$\alpha_1,\cdots,\alpha_m$与$\alpha_1,\cdots,\alpha_m,\beta_1,\cdots,\beta_l$等价，从而

$$\mathrm{R}(\alpha_1,\cdots,\alpha_m)=\mathrm{R}(\alpha_1,\cdots,\alpha_m,\beta_1,\cdots,\beta_l),$$

即$\mathrm{R}(\boldsymbol{A})=\mathrm{R}(\boldsymbol{A},\boldsymbol{B})$.

充分性 由$\mathrm{R}(\boldsymbol{A})=\mathrm{R}(\boldsymbol{A},\boldsymbol{B})$，即$\mathrm{R}(\alpha_1,\cdots,\alpha_m)=\mathrm{R}(\alpha_1,\cdots,\alpha_m,\beta_1,\cdots,\beta_l)$，可得

$$\mathrm{R}(\alpha_1,\cdots,\alpha_m)=\mathrm{R}(\alpha_1,\cdots,\alpha_m,\beta_j),\quad j=1,2,\cdots,l,$$

据定理4.4，得向量组$\beta_1,\cdots,\beta_l$可由向量组$\alpha_1,\cdots,\alpha_m$线性表示，从而矩阵方程$\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{B}$有解.

定理 4.7 推广了非齐次线性方程组解的理论．由上述证明过程可知，$\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{B}$有解，表明矩阵$\boldsymbol{B}$的列向量组可由矩阵$\boldsymbol{A}$的列向量组线性表示，将此结论应用到向量组可得下述推论.

推论 4.7 向量组B：$\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_l$可由向量组$A$：$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m$线性表示的充分必要条件是矩阵方程$(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m)\boldsymbol{X}=(\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_l)$有解，即

$$\mathrm{R}(\alpha_1,\cdots,\alpha_m)=\mathrm{R}(\alpha_1,\cdots,\alpha_m,\beta_1,\cdots,\beta_l).$$

推论 4.8 向量组A：$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m$与$B$：$\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_l$等价的充分必要条件是矩阵方程$(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m)\boldsymbol{X}=(\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_l)$与$(\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_l)\boldsymbol{Y}=(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m)$均有解，即

$$\mathrm{R}(\alpha_1,\cdots,\alpha_m)=\mathrm{R}(\beta_1,\cdots,\beta_l)=\mathrm{R}(\alpha_1,\cdots,\alpha_m,\beta_1,\cdots,\beta_l).$$

例 1 证明向量组$\alpha_1=(1,0,0,1)^T$，$\alpha_2=(0,1,0,2)^T$，$\alpha_3=(0,0,1,3)^T$与向量组

$\beta_1=(1,-1,2,5)^T$，$\beta_2=(2,2,-3,-3)^T$，$\beta_3=(-1,1,0,1)^T$，$\beta_4=(0,-1,1,1)^T$等价.

证　记 $\boldsymbol{A}=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)$，$\boldsymbol{B}=(\beta_1,\beta_2,\beta_3,\beta_4)$，根据推论 4.8，只要证 $\mathrm{R}(\boldsymbol{A})=\mathrm{R}(\boldsymbol{B})=\mathrm{R}(\boldsymbol{A},\boldsymbol{B})$，为此将矩阵$(\boldsymbol{A},\boldsymbol{B})$化为行阶梯形

$$(\boldsymbol{A},\boldsymbol{B})=\begin{pmatrix}1&0&0&1&2&-1&0\\0&1&0&-1&2&1&-1\\0&0&1&2&-3&0&1\\1&2&3&5&-3&1&1\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1&0&0&1&2&-1&0\\0&1&0&-1&2&1&-1\\0&0&1&2&-3&0&1\\0&0&0&0&0&0&0\end{pmatrix},$$

由此得，$\mathrm{R}(\boldsymbol{A})=\mathrm{R}(\boldsymbol{A},\boldsymbol{B})=3$． 同样可求出$\mathrm{R}(\boldsymbol{B})=3$，

故$\mathrm{R}(\boldsymbol{A})=\mathrm{R}(\boldsymbol{B})=\mathrm{R}(\boldsymbol{A},\boldsymbol{B})=3$．

例2　已知向量组B可由向量组A线性表示，且它们的秩相等，证明向量组A与B等价.

证　记$\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$分别表示由两向量组构成的矩阵. 由向量组$B$可由向量组$A$线性表示，得$\mathrm{R}(\boldsymbol{A})=\mathrm{R}(\boldsymbol{A},\boldsymbol{B})$，又$\mathrm{R}(\boldsymbol{A})=\mathrm{R}(\boldsymbol{B})$，故$\mathrm{R}(\boldsymbol{A})=\mathrm{R}(\boldsymbol{B})=\mathrm{R}(\boldsymbol{A},\boldsymbol{B})$，故向量组$A$与$B$等价.

§ 4.4　应用实例

本节给出了线性方程组在数学及其它领域的应用，大部分实例都有着实际背景，旨在加强理论与实际应用的联系，加强应用意识和能力的培养.

1.　几何应用

例1　给出平面上n点(x_i, y_i)（$i=1,2,\cdots,n$，$n>3$）位于一条直线上的一个充分必要条件.

解　设n点(x_i, y_i)都位于直线$y=kx+b$上，则关于k，b的线性方程组

$$
\begin{cases} x_1 k + b = y_1 \\ x_2 k + b = y_2 \\ \qquad \cdots\cdots \\ x_n k + b = y_n \end{cases}, \tag{4.9}
$$

有解，从而

$$
1 \le \mathrm{R}\begin{pmatrix} x_1 & 1 \\ x_2 & 1 \\ \vdots & \vdots \\ x_n & 1 \end{pmatrix} = \mathrm{R}\begin{pmatrix} x_1 & 1 & y_1 \\ x_2 & 1 & y_2 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ x_n & 1 & y_n \end{pmatrix} = \mathrm{R}\begin{pmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ x_n & y_n & 1 \end{pmatrix} \le 2 .
$$

反之，若$1 \le \mathrm{R}\begin{pmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ x_n & y_n & 1 \end{pmatrix} \le 2$，则有：

（1）如果$\mathrm{R}\begin{pmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ x_n & y_n & 1 \end{pmatrix} = 1$，则矩阵$\begin{pmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ x_n & y_n & 1 \end{pmatrix}$列向量组的极大无关组为$(1,1,\cdots,1)^T$，于是$x_1 = x_2 = \cdots = x_n$， n点重合，因此共线；

（2）如果$\mathrm{R}\begin{pmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ x_n & y_n & 1 \end{pmatrix} = 2$，则当$\mathrm{R}\begin{pmatrix} x_1 & 1 \\ x_2 & 1 \\ \vdots & \vdots \\ x_n & 1 \end{pmatrix} = 1$时，由（1）可知，$n$点共线；当$\mathrm{R}\begin{pmatrix} x_1 & 1 \\ x_2 & 1 \\ \vdots & \vdots \\ x_n & 1 \end{pmatrix} = 2$时，由定理 4.4 知方程组$(4.9)$有解，于是$n$点不全重合但共线.

综合以上，平面上n点(x_i, y_i)（$i = 1, 2, \cdots, n$，$n > 3$）共线的充分必要条件是

$$
1 \le \mathrm{R}\begin{pmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ x_n & y_n & 1 \end{pmatrix} \le 2 .
$$

特别，平面上n个不同的点(x_i, y_i)（$i = 1, 2, \cdots, n$，$n > 3$）共线的充分必要条件是

$$\mathrm{R}\begin{pmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ x_n & y_n & 1 \end{pmatrix} = 2 .$$

例 2 给出空间 n 点 $\left(x_i, y_i, z_i\right)$（$i=1,2,\cdots,n$，$n>3$）共面的一个充分必要条件.

解 设 n 点所共平面为 $ax+by+cz+d=0$，则有

$$\begin{cases} ax_1+by_1+cz_1+d=0 \\ ax_2+by_2+cz_2+d=0 \\ \quad\cdots\cdots \\ ax_n+by_n+cz_n+d=0 \end{cases} \tag{4.10}$$

于是，n 点共面的充分必要条件是以 a，b，c，d 为未知数的齐次线性方程组（4.10）有非零解，即 $1 \le \mathrm{R}\begin{pmatrix} x_1 & y_1 & z_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & z_2 & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ x_n & y_n & z_n & 1 \end{pmatrix} \le 3$.

例 3 利用线性方程组讨论平面与平面、平面与直线、直线与直线之间的位置关系.

解 在空间中，平面和直线的方程可分别用 $ax+by+cz=d$ 和 $\begin{cases} a_1x+b_1y+c_1z=d_1 \\ a_2x+b_2y+c_2z=d_2 \end{cases}$ 表示，因此，平面与平面、平面与直线、直线与直线之间的位置关系可用线性方程组的解来讨论.

(1) 平面与平面的位置关系

设平面 π_1 与 π_2 的方程分别为

$$\pi_1：\ a_1x+b_1y+c_1z=d_1，\ \pi_2：\ a_2x+b_2y+c_2z=d_2，$$

考虑线性方程组

$$\begin{cases} a_1x+b_1y+c_1z=d_1 \\ a_2x+b_2y+c_2z=d_2 \end{cases}, \tag{4.11}$$

记 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \end{pmatrix}, \boldsymbol{B}=\begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 & d_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 & d_2 \end{pmatrix}$.

（i）当 $\mathrm{R}(\boldsymbol{A})=1$，$\mathrm{R}(\boldsymbol{B})=2$ 时，方程组（4.11）无解，故平面 π_1 与 π_2 平行但不重合；

（ii）当$\mathrm{R}(\boldsymbol{A})=\mathrm{R}(\boldsymbol{B})=1$时，矩阵$\boldsymbol{B}$的两个行向量成比例，故平面$\pi_1$与$\pi_2$重合；

（iii）当$\mathrm{R}(\boldsymbol{A})=\mathrm{R}(\boldsymbol{B})=2$时，方程组（4.11）有无穷多解，故平面$\pi_1$与$\pi_2$相交于一条直线.

（2）平面与直线的位置关系

设平面π与直线L的方程分别为

$$\pi：a_1x+b_1y+c_1z=d_1，\ L：\begin{cases}a_2x+b_2y+c_2z=d_2\\ a_3x+b_3y+c_3z=d_3\end{cases},$$

此时，矩阵

$$\begin{pmatrix}a_2 & b_2 & c_2\\ a_3 & b_3 & c_3\end{pmatrix},\begin{pmatrix}a_2 & b_2 & c_2 & d_2\\ a_3 & b_3 & c_3 & d_3\end{pmatrix},$$

的秩均为2.

考虑线性方程组

$$\begin{cases}a_1x+b_1y+c_1z=d_1\\ a_2x+b_2y+c_2z=d_2\\ a_3x+b_3y+c_3z=d_3\end{cases}, \tag{4.12}$$

记$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}a_1 & b_1 & c_1\\ a_2 & b_2 & c_2\\ a_3 & b_3 & c_3\end{pmatrix},\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}a_1 & b_1 & c_1 & d_1\\ a_2 & b_2 & c_2 & d_2\\ a_3 & b_3 & c_3 & d_3\end{pmatrix}$, 则$\mathrm{R}(\boldsymbol{A})\ge 2$, $\mathrm{R}(\boldsymbol{B})\ge 2$.

（i）当$\mathrm{R}(\boldsymbol{A})=\mathrm{R}(\boldsymbol{B})=3$时，方程组（4.12）有唯一解，故直线$L$与平面$\pi$相交于一点；

（ii）当$\mathrm{R}(\boldsymbol{A})=2,\mathrm{R}(\boldsymbol{B})=3$时，方程组（4.12）无解，故直线$L$平行于平面$\pi$；

（iii）当$\mathrm{R}(\boldsymbol{A})=\mathrm{R}(\boldsymbol{B})=2$时，方程组（4.12）有无穷多解，故直线$L$在平面$\pi$上.

（3）直线与直线的位置关系

设直线L_1与直线L_2的方程分别为

$$L_1：\begin{cases}a_1x+b_1y+c_1z=d_1\\ a_2x+b_2y+c_2z=d_2\end{cases},\ L_2：\begin{cases}a_3x+b_3y+c_3z=d_3\\ a_4x+b_4y+c_4z=d_4\end{cases},$$

考虑线性方程组

$$\begin{cases} a_1x+b_1y+c_1z=d_1 \\ a_2x+b_2y+c_2z=d_2 \\ a_3x+b_3y+c_3z=d_3 \\ a_4x+b_4y+c_4z=d_4 \end{cases}, \tag{4.13}$$

记 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \\ a_4 & b_4 & c_4 \end{pmatrix}, \boldsymbol{B}=\begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 & d_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 & d_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 & d_3 \\ a_4 & b_4 & c_4 & d_4 \end{pmatrix}$, 则 $\mathrm{R}(\boldsymbol{A})\geq 2$, $\mathrm{R}(\boldsymbol{B})\geq 2$.

（i）当 $\mathrm{R}(\boldsymbol{A})=\mathrm{R}(\boldsymbol{B})=3$ 时，方程组（4.13）有唯一解，故直线 L_1 与直线 L_2 相交于一点；

（ii）当 $\mathrm{R}(\boldsymbol{A})=\mathrm{R}(\boldsymbol{B})=2$ 时，方程组（4.13）有无穷多解，故直线 L_1 与直线 L_2 重合；

（iii）当 $\mathrm{R}(\boldsymbol{A})=2$，$\mathrm{R}(\boldsymbol{B})=3$ 时，方程组（4.13）无解，由于矩阵 $\boldsymbol{A}$ 中任一 3 阶子式均为 0，故 L_1 与平面 $a_3x+b_3y+c_3z=d_3$ 平行，L_1 也与平面 $a_4x+b_4y+c_4z=d_4$ 平行，从而直线 L_1 与直线 L_2 平行.

（iv）当 $\mathrm{R}(\boldsymbol{A})=3$，$\mathrm{R}(\boldsymbol{B})=4$ 时，方程组（4.13）无解，直线 L_1 与直线 L_2 既不平行，也不相交，故直线 L_1 与直线 L_2 为异面直线.

2. 插值多项式

设有函数 $f(x)$，只知道它在 $n+1$ 个不同的点 $x_1,x_2,\cdots,x_{n+1}$ 处的值 $f_i=f(x_i), i=1,2,\cdots,n+1$. y 是另外一个点，$f(y)$ 未知，如何求 $f(y)$ 的近似值，插值就是一种办法. 它的做法如下：找一个简单的已知解析表达式的函数 $P(x)$，使得

$$P(x_i)=f(x_i)=f_i, i=1,2,\cdots,n+1,$$

并且 $P(y)$ 容易计算，我们就用 $P(y)$ 来代替 $f(y)$，$P(x)$ 称为插值函数，$f(x)$ 称为被插函数，对这部分内容感兴趣的读者可进一步参看[20]：《数值逼近》.

例 4 设 $a_1, a_2, \cdots, a_n$ 是 n 个互不相同的数，$b_1, b_2, \cdots, b_n$ 是任意一组给定的数，证明存在唯一的多项式

$$f(x)=c_{n-1}x^{n-1}+\cdots+c_1x+c_0$$

满足

$$f\left(a_i\right)=b_i,\quad i=1,2,\cdots,n.$$

证 由 $f\left(a_i\right)=b_i$，$i=1,2,\cdots,n$，可得

$$\begin{cases} c_{n-1}a_1^{\ n-1}+\cdots+c_1a_1+c_0=b_1 \\ c_{n-1}a_2^{\ n-1}+\cdots+c_1a_2+c_0=b_2 \\ \qquad\cdots\cdots \\ c_{n-1}a_n^{\ n-1}+\cdots+c_1a_n+c_0=b_n \end{cases}, \tag{4.14}$$

这是以 $c_0,c_1,\cdots,c_{n-1}$ 为未知数的线性方程组，其系数行列式

$$D=\begin{vmatrix} a_1^{\ n-1} & \cdots & a_1 & 1 \\ a_2^{n-1} & \cdots & a_2 & 1 \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_n^{\ n-1} & \cdots & a_n & 1 \end{vmatrix},$$

由于 $a_1, a_2, \cdots, a_n$ 互不相同，由范德蒙行列式知 $D\neq 0$，故方程组（4.14）有唯一解，即存在唯一的多项式 $f\left(x\right)$ 满足 $f\left(a_i\right)=b_i$，$i=1,2,\cdots,n$.

3. 商品利润率问题

例 5 某商场甲、乙、丙、丁四种商品四个月的总利润（万元）如表4.1所示，试求出每种商品的利润率.

表4.1

商品 / 月次	销售额 /（万元）				总利润 /（万元）
	甲	乙	丙	丁	
1	4	6	8	10	2.74
2	4	6	9	9	2.76
3	5	6	8	10	2.89
4	5	5	9	9	2.79

解 设甲、乙、丙、丁四种商品的利润率分别为 x_1、x_2、x_3、x_4，由题意得

$$\begin{cases} 4x_1+6x_2+8x_3+10x_4=2.74 \\ 4x_1+6x_2+9x_3+9x_4=2.76 \\ 5x_1+6x_2+8x_3+10x_4=2.89 \\ 5x_1+5x_2+9x_3+9x_4=2.79 \end{cases},$$

由克莱姆法则求得该方程组的解为$x_1=15\%$，$x_2=12\%$，$x_3=9\%$，$x_4=7\%$，即甲、乙、丙、丁四种商品的利润率分别为15%、12%、9%、7%.

4. 化学方程式问题

例 6 液态笨在空气中可以燃烧，如果将一个冷的物体直接放在燃烧的笨上部，则水蒸气就会在物体上凝结，同时烟灰也会在该物体上沉积，这个化学反应的方程式为

$$x_1C_6H_6+x_2O_2\to x_3C+x_4H_2O,$$

试配平该化学反应式.

解 为了平衡该方程式，只需配平方程中的C,H,O原子数，于是得方程组

$$\begin{cases}6x_1-x_3=0\\6x_1-2x_4=0\\2x_2-x_4=0\end{cases}.$$

该方程组有无穷多解，通解为$\begin{cases}x_1=\dfrac{1}{3}x_4\\x_2=\dfrac{1}{2}x_4\\x_3=2x_4\\x_4=x_4\end{cases}$，$x_4$为自由未知量．据问题的实际意义，只需找到一组解$x_1$，$x_2$，$x_3$，$x_4$，其中每一变量均为非负整数，令$x_4=6$，得 $x_1=2$，$x_2=3$，$x_3=12$，故化学方程式为

$$2C_6H_6+3O_2\to 12C+6H_2O.$$

§ 4.5 用 Matlab 解线性方程组

例 1 求齐次线性方程组$\begin{cases}x_1-3x_2+x_3-2x_4=0\\5x_1-x_2+2x_3-3x_4=0\\x_1+11x_2-2x_3+5x_4=0\end{cases}$的基础解系及通解.

解 这里需掌握分数数据格式 format rat、求基础解系 null 等命令.实验过程如下：

```
>> format rat
>> A=[1 -3 1 -2;5 -1 2 -3; 1 11 -2 5];
>> B=null(A,'r')
```

B =

-5/14	1/2
3/14	-1/2
1	0
0	1

即原方程组的通解为 $\boldsymbol{x}=k_1\begin{pmatrix}-\dfrac{5}{14}\\ \dfrac{3}{14}\\ 1\\ 0\end{pmatrix}+k_2\begin{pmatrix}\dfrac{1}{2}\\ -\dfrac{1}{2}\\ 0\\ 1\end{pmatrix}$，其中 k_1,k_2 为任意实数.

背景资料 ------- 线性方程组

线性方程组(system of linear equations)是未知量为一次的方程组，这是最简单也是最重要的一类代数方程组. 线性方程组的解法，早在中国古代的数学著作《九章算术•方程》中已经作了比较完整的论述.其中所述方法实质上相当于现代的对方程组的增广矩阵施行初等变换，从而消去未知量的方法. 在西方，线性方程组的研究是在 17 世纪后期由莱布尼兹开创的. 他曾研究含两个未知量的 3 个线性方程组成的方程组，证明了当方程组的结式等于零时方程有解. 大约在 1729 年，英国数学家马克劳林(Colin Maclaurin,1698—1746)开始用行列式的方法解含 2—4 个未知量的线性方程组，得到了现在称为克莱姆法则的结果，马克劳林虽然比克莱姆早两年发现这个法则，但不及克莱姆发现的规律明晰. 18 世纪 60 年代以后，法国数学家贝祖对线性方程组理论进行了一系列研究，证明了含 n 元 n 个方程的齐次线性方程组有非零解的条件是系数行列式等于零,还利用消元法将高次方程问题与线性方程组联系起来，提供了某些 n 次方程的解法. 大约在 1800 年，德国数学家、天文学家和物理学家高斯(Carl Friedrich Gauss,1777—1855)提出了高斯消元法并用它解决了天体计算和后来的地球表面测量计算中的最小二乘法问题(这种涉及测量、求取地球形状或当地精确位置的应用数学分支称为测地学).虽然高斯因这个技术可成功地消去线性方程的变量而出名，实际上早在几世纪中国人的手稿中就出现了解释如何运用高斯消元的方法求解带有 3 个未知量的 3 个方程系统. 在当时的很多年里，高斯消元法一直被认为是测地学发展的一部分，而不是数学. 高斯—约当消元法最初（1866）则是出现在由大地测量学家 Wilhelm Jordan 撰写的测地学手册中，许多人把著名的法国数学家约当(Camille Jordan,1838—1922)误认

为是“高斯—约当”消元法中的约当.

到了 19 世纪，英国数学家史密斯(Henry Smith,1826—1883)和道奇森(Charles Lutwidge Dodgson,1832—1898，英国牛津大学数学讲师，虽在数学上并无令人瞩目的成就，但他在儿童文学创作和趣题及智力游戏方面显露杰出的才华，他著的童话小说《爱丽斯漫游奇境记》使他名垂青史）继续研究线性方程组理论，前者引进了方程组的增广矩阵和非增广矩阵的概念，后者证明了 n 个未知量 m 个方程的方程组相容的充要条件是系数矩阵和增广矩阵的秩相同. 这正是现代方程组理论中的重要结果之一.

大量的科学技术问题，最终往往归结为解线性方程组. 因此在线性方程组的数值解法得到发展的同时，线性方程组解的结构等理论性工作也取得了令人满意的进程. 现在，线性方程组的数值解法在计算数学中占有重要地位.

自测题四

习题四解答

综合与提高题

习题四

一、选择题

1. 设 $\boldsymbol{A}$ 为 n 阶方阵，$\mathrm{R}(\boldsymbol{A})=n-1$，又 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2$ 是齐次线性方程组 $\boldsymbol{Ax}=\mathbf{0}$ 的两个不同的解，则 $\boldsymbol{Ax}=\mathbf{0}$ 的通解是（ ）.

(A) $k\boldsymbol{\alpha}_1$　　(B) $k\boldsymbol{\alpha}_2$　　(C) $k(\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2)$　　(D) $k(\boldsymbol{\alpha}_1-\boldsymbol{\alpha}_2)$.

2. 设 ξ_1,ξ_2,ξ_3 是齐次线性方程组 $\boldsymbol{Ax}=\mathbf{0}$ 的基础解系，则该方程组的基础解系还可为（ ）.

(A) $\xi_1+\xi_2,\xi_2-\xi_3,\xi_3-\xi_1$　　(B) $\xi_1,\xi_1+\xi_2,\xi_1+\xi_2+\xi_3$

(C) 与 ξ_1,ξ_2,ξ_3 等秩的一个向量组　　(D) 与 ξ_1,ξ_2,ξ_3 等价的一个向量组.

3. 设 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s$ 是齐次线性方程组 $\boldsymbol{Ax}=\mathbf{0}$ 的基础解系，则（ ）.

(A) $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s$ 线性相关　　(B) $s-\mathrm{R}(\boldsymbol{A})=n$

(C) $\boldsymbol{Ax}=\mathbf{0}$ 的任意 $s+1$ 个解线性相关　　(D) $\boldsymbol{Ax}=\mathbf{0}$ 的任意 $s-1$ 个解线性相关.

4．若$\boldsymbol{\alpha}_1=(1,-1,a,4)^T$，$\boldsymbol{\alpha}_2=(-2,1,5,a-7)^T$，$\boldsymbol{\alpha}_3=(a,2,-10,-2)^T$是齐次线性方程组的基础解系，则（ ）．

(A) $a\neq 0$　　(B) $a\neq 1$　　(C) $a\neq -9$　　(D) $a\neq 1$且$a\neq -9$．

5．设$\boldsymbol{A}$为$m\times n$矩阵，则有（ ）．

(A) 若$m<n$，则$\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$ 有无穷多解

(B) 若$m<n$，则$\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$ 有非零解

(C)若$\boldsymbol{A}$有r阶子式不为零，则$\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$ 有唯一解

(D)若$\boldsymbol{A}$有r阶子式不为零，则$\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$有非零解.

6．设n维列向量组$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m$ $(m<n)$线性无关，则n维列向量组$\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_m$线性无关的充分必要条件为（ ）．

(A)向量组$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m$可由向量组$\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_m$线性表示

(B)向量组$\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_m$可由向量组$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m$线性表示

(C)向量组$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m$与向量组$\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_m$等价

(D)矩阵$\boldsymbol{A}=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m)$与矩阵$\boldsymbol{B}=(\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_m)$等价.

二、填空题

1．设$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&2&1&2\\0&1&a&a\\1&a&0&1\end{pmatrix}$，且$\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$的基础解系含有2个解向量，则$a=$______.

2．设$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&2&-2\\4&t&3\\3&-1&1\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{B}$为3阶非零矩阵，且$\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{O}$，则$t=$______.

3．设$\boldsymbol{A}=(a_{ij})_{n\times n}$是$n$阶不可逆矩阵，已知元素$a_{ij}$的代数余子式$A_{ij}\neq 0$，则$\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$的通解为______.

4．方程组$\begin{cases}x_1-2x_3=t\\x_2+x_3=0\\x_1+2x_2=1\end{cases}$有解的充分必要条件是______.

5．设$\boldsymbol{\beta}=(1,2,t)^T$，$\boldsymbol{\alpha}_1=(2,1,1)^T$，$\boldsymbol{\alpha}_2=(-1,2,7)^T$，若$\boldsymbol{\beta}$不可由$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2$线性表示，则$t\neq$______.

6．设$\boldsymbol{\alpha}_1=(1,2,3,4)^T$，$\boldsymbol{\alpha}_2=(2,3,4,5)^T$，$\boldsymbol{\alpha}_3=(3,1,t,4)^T$，$\boldsymbol{\alpha}_4=(4,5,\lambda,7)^T$，已知向量组$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$与$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4$等价，则$\lambda=$______.

三、计算证明题

1．求下列齐次线性方程组的一个基础解系，并求方程组的通解:

（1）$\begin{cases} x_1-2x_2+4x_3-7x_4=0 \\ 2x_1+x_2-2x_3+x_4=0 \\ 3x_1-x_2+2x_3-4x_4=0 \end{cases}$；（2）$\begin{cases} x_1-8x_2+10x_3+2x_4=0 \\ 2x_1+4x_2+5x_3-x_4=0 \\ 3x_1+8x_2+6x_3-2x_4=0 \end{cases}$.

2．已知齐次线性方程组

$$(\mathrm{I})\begin{cases} x_1+2x_2+3x_3=0 \\ 2x_1+3x_2+5x_3=0 \\ x_1+x_2+ax_3=0 \end{cases}$$

与

$$(\mathrm{II})\begin{cases} x_1+bx_2+cx_3=0 \\ 2x_1+b^2x_2+(c+1)x_3=0 \end{cases}$$

同解，求a，b，c的值.

3．已知4元2个方程的齐次线性方程组$\boldsymbol{Ax}=\mathbf{0}$的通解为

$$\boldsymbol{x}=k_1(1,0,2,3)^T+k_2(0,1,-1,1)^T,\ k_1,k_2\text{为任意常数},$$

求原方程组.

4．已知齐次线性方程组（Ⅰ）的通解为

$$\boldsymbol{x}=k_1(0,1,1,0)^T+k_2(-1,2,2,1)^T,\ k_1,k_2\text{为任意常数},$$

设方程组(Ⅱ)为$\begin{cases} x_1+x_2=0 \\ x_2-x_4=0 \end{cases}$，问方程组（Ⅰ）与(Ⅱ)是否有非零公共解，若有，求其所有公共解.

5．解下列非齐次线性方程组:

（1）$\begin{cases} 2x_1+x_2-x_3-x_4=1 \\ 2x_1+x_2+x_3-x_4=1 \\ 4x_1+2x_2+x_3-2x_4=2 \end{cases}$；（2）$\begin{cases} 3x_1-x_2+2x_3=10 \\ 4x_1+2x_2-x_3=2 \\ 11x_1+3x_2=8 \end{cases}$.

6．设 $\boldsymbol{A}$ 为4阶方阵，$\boldsymbol{A}^*$ 是 $\boldsymbol{A}$ 的伴随矩阵，且 $|\boldsymbol{A}|=0$，而 $\boldsymbol{A}^*\neq\boldsymbol{O}$. η_1,η_2,η_3 是线性方程组 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$ 的三个解向量，其中

$$\eta_1+\eta_2=\begin{pmatrix}2\\0\\0\\8\end{pmatrix},\ \eta_2+\eta_3=\begin{pmatrix}1\\0\\0\\7\end{pmatrix},$$

求 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$ 的通解.

7．已知 $\eta_1=(1,-1,0,2)^T$，$\eta_2=(2,1,-1,4)^T$，$\eta_3=(4,5,-3,1)^T$ 是线性方程组

$$\begin{cases} a_1x_1+2x_2+a_3x_3+a_4x_4=d_1 \\ 4x_1+b_2x_2+3x_3+b_4x_4=d_2 \\ 3x_1+c_2x_2+5x_3+c_4x_4=d_3 \end{cases}$$

的三个解向量，求该方程组的通解.

8．已知线性方程组 $\begin{cases} x_1+x_2+ax_3=-1 \\ x_1-x_2+2x_3=-1 \\ -x_1+ax_2+x_3=a^2 \end{cases}$ 有无穷多解，求 a 及方程组的通解.

9．讨论线性方程组 $\begin{cases} (\lambda+3)x_1+x_2+2x_3=-\lambda \\ \lambda x_1+(\lambda-1)x_2+x_3=2\lambda \\ 3(\lambda+1)x_1+\lambda x_2+(\lambda+3)x_3=3 \end{cases}$ 的解，并在有解时求出其解.

10．设有线性方程组 $\begin{cases} x_1+x_2-2x_3+3x_4=0 \\ 2x_1+x_2-6x_3+4x_4=-1 \\ 3x_1+2x_2+px_3+7x_4=-1 \\ x_1-x_2-6x_3-x_4=t+2 \end{cases}$，问 p，t 取何值时，方程组无解或有解，并在有解时，求其全部解.

11．设向量组 $\alpha_1=\begin{pmatrix}1\\0\\2\\3\end{pmatrix}$, $\alpha_2=\begin{pmatrix}1\\1\\3\\5\end{pmatrix}$, $\alpha_3=\begin{pmatrix}1\\-1\\a+2\\1\end{pmatrix}$, $\alpha_4=\begin{pmatrix}1\\2\\4\\a+8\end{pmatrix}$, $\beta=\begin{pmatrix}1\\1\\b+3\\5\end{pmatrix}$, 问: a，b 取何值时，有

（1）β 能由 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$ 线性表示，且表示法唯一；

（2）$\boldsymbol{\beta}$ 不能由$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4$线性表示；

（3）$\boldsymbol{\beta}$ 能由$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4$线性表示，表示法不唯一，并写出一般表达式.

12．设$\boldsymbol{A}=\left(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4\right)$，其中$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4$均为四维列向量，且$\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4$线性无关，$\boldsymbol{\alpha}_1=2\boldsymbol{\alpha}_2-\boldsymbol{\alpha}_3$，而$\boldsymbol{\beta}=\boldsymbol{\alpha}_1-\boldsymbol{\alpha}_2+3\boldsymbol{\alpha}_4$，求$\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{\beta}$的通解.

13．已知非齐次线性方程组$\begin{cases} x_1+x_2+x_3+x_4=-1 \\ 4x_1+3x_2+5x_3-x_4=-1 \\ ax_1+x_2+3x_3+bx_4=1 \end{cases}$有3个线性无关的解.

（1）证明方程组系数矩阵$\boldsymbol{A}$的秩$\mathrm{R}\left(\boldsymbol{A}\right)=2$；

（2）求a，b的值及方程组的通解.

14．设$\boldsymbol{x}=\left(x_1,\cdots,x_n\right)^T$，$\boldsymbol{b}=\left(b_1,\cdots,b_n\right)^T$，证明：对任意$n$阶方阵$\boldsymbol{A}$，$\boldsymbol{A}^T\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{A}^T\boldsymbol{b}$一定有解.