§3.4　向量空间(了解)

一、向量空间的定义

定义：设 V 是 n 维向量的集合，如果

① 集合 V 非空，

② 集合 V 对于向量的加法和数乘两种运算封闭，

具体地说，就是：

✓ 若 $a \in V$，$b \in V$，则 $a+b \in V$．（对加法封闭）

✓ 若 $a \in V$，$k \in R$，则 $ka \in V$．（对数乘封闭）

那么就称集合 V 为向量空间.

注：向量空间中必含有零向量.

例: 下列哪些向量组构成向量空间?

1. n 维向量的全体R^n

2. 集合 $V_1 = \{ (0, x_2, \ldots, x_n)^T \mid x_2, \ldots, x_n \in R \}$

3. 齐次线性方程组的解集 $S_1 = \{ x \mid Ax = 0 \}$

4. 非齐次线性方程组的解集 $S_2 = \{ x \mid Ax = b \}$

解: 集合 R^n，V_1，S_1 是向量空间，

集合 S_2 不是向量空间.

二、向量空间的基与维数

定义： 设有向量空间 V，如果在 V 中能选出 r 个向量$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r$，满足

① $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r$ 线性无关；

② V 中任意一个向量都能由 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r$ 线性表示；

那么称向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r$ 是向量空间 V 的一组基.

r 称为向量空间 V 的维数，并称 V 为 r 维向量空间 .

向量空间	→	向量组
向量空间的基	→	向量组的极大线性无关组
向量空间的维数	→	向量组的秩

三、基变换与坐标变换

定义： 设$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r$是向量空间$V$的一组基，$V$中任一向量$\alpha$可唯一地表示为

$$\alpha = x_1\alpha_1 + x_2\alpha_2 + \cdots + x_r\alpha_r$$

$$= (\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r)\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_r \end{pmatrix}$$

称$(x_1,x_2,\cdots,x_r)^T$为向量α在基$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r$下的坐标向量，简称坐标.

$$b=\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}=b_1\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}+b_2\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}+b_3\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}\cdots+b_n\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}$$

n 阶单位矩阵 E_n 的列向量叫做 n 维单位坐标向量.

n 阶单位矩阵 E_n 的列向量组称为 R^n 的标准基.

定义: 设 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r$ 和 $\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_r$ 是r维向量空间V的两组基，且

$$\begin{cases}\beta_1 = c_{11}\alpha_1 + c_{21}\alpha_2 + \cdots + c_{r1}\alpha_r,\\ \beta_2 = c_{12}\alpha_1 + c_{22}\alpha_2 + \cdots + c_{r2}\alpha_r,\\ \qquad\cdots\cdots\cdots\\ \beta_r = c_{1r}\alpha_1 + c_{2r}\alpha_2 + \cdots + c_{rr}\alpha_r,\end{cases} \tag{1}$$

即

$$(\beta_1,\beta_2,\ldots,\beta_r)=(\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_r)\begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & \cdots & c_{1r}\\ c_{21} & c_{22} & \cdots & c_{2r}\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ c_{r1} & c_{r2} & \cdots & c_{rr}\end{pmatrix}$$

$$=(\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_r)C. \tag{2}$$

称(1)(2)为基变换公式，称矩阵 $C=(c_{ij})_{r\times r}$ 是从基 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r$ 到 $\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_r$ 过渡矩阵. 过渡矩阵可逆?

定理: 设向量空间V中向量α 在基 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r$ 和 $\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_r$ 下的坐标分别为 $(x_1,x_2,\cdots,x_r)^T$ 与 $(x_1',x_2',\cdots,x_r')^T$，且两组基满足(2)式，则有坐标变换公式

$$\begin{pmatrix} x_1' \\ x_2' \\ \vdots \\ x_r' \end{pmatrix} = C^{-1} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_r \end{pmatrix}$$