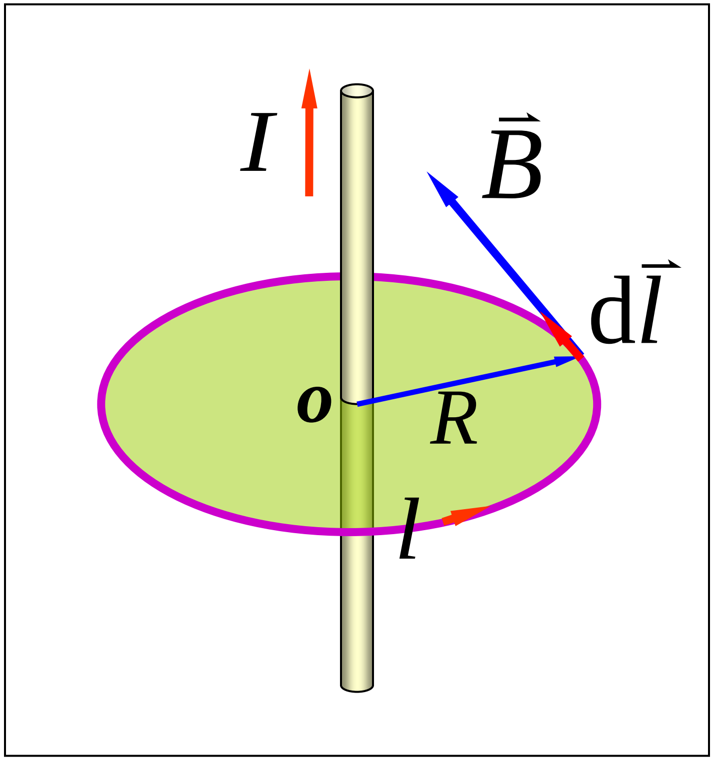
§8-4 恒定磁场的高斯定理和安培环路定理

安培环路定理

一、安培环路定理

载流长直导线的磁感强度为

$$B=\frac{\mu_0 I}{2\pi R}$$



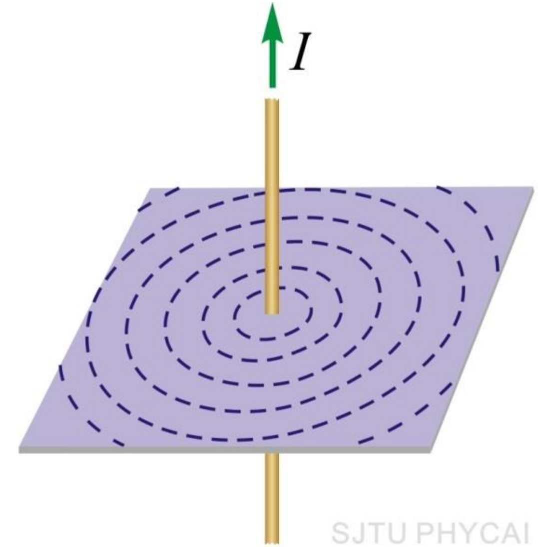
$$\oint_l \vec{B}\cdot d\vec{l}=\oint\frac{\mu_0 I}{2\pi R}dl$$

$$\oint_l \vec{B}\cdot d\vec{l}=\frac{\mu_0 I}{2\pi R}\oint_l dl$$

$$\oint_l \vec{B}\cdot d\vec{l}=\mu_0 I$$

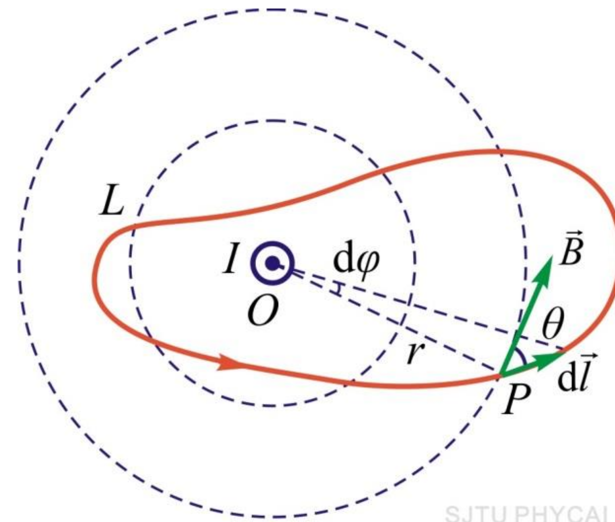
设闭合回路 l 为圆形回路（l 与 I成右螺旋）

在垂直于导线的平面内任作一环路：



$$B=\frac{\mu_0 I}{2\pi r} \qquad \mathrm{d}l\cos\theta = r\mathrm{d}\varphi$$

$$\vec{B}\cdot\mathrm{d}\vec{l}=\frac{\mu_0 I}{2\pi r}r\mathrm{d}\varphi=\frac{\mu_0 I}{2\pi}\mathrm{d}\varphi$$



$$\oint_L \vec{B}\cdot\mathrm{d}\vec{l}=\oint_L B\cos\theta\,\mathrm{d}l$$

$$\oint_L \vec{B}\cdot\mathrm{d}\vec{l}=\oint_L \frac{\mu_0 I}{2\pi r}\cdot r\mathrm{d}\varphi=\frac{\mu_0 I}{2\pi}\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\varphi=\mu_0 I$$

对任意形状的回路

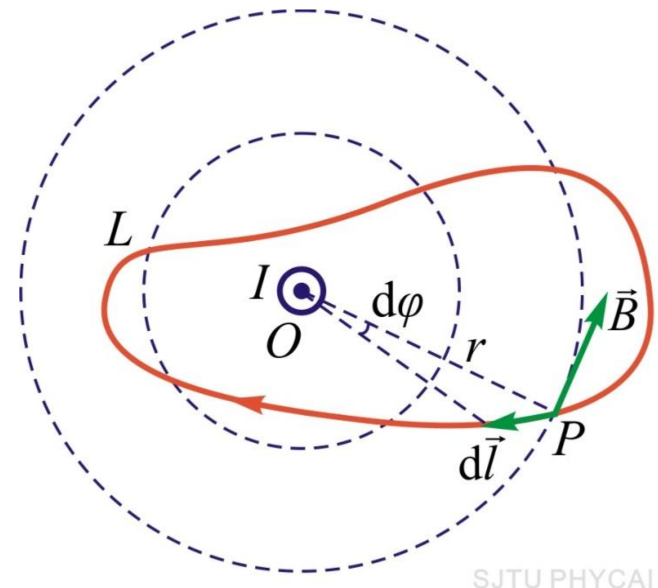
如果沿同一路径但改变绕行方向积分：

$$\oint_L \vec{B}\cdot \mathrm{d}\vec{l} = \oint_L B\cos(\pi-\theta)\,\mathrm{d}\,l$$

$$= \oint_L -B\cos\theta\,\mathrm{d}l$$

$$= -\int_0^{2\pi}\frac{\mu_0 I}{2\pi r}r\,\mathrm{d}\,\varphi$$

$$= -\mu_0 I$$



- **磁感应强度矢量的环流与闭合曲线的形状无关，它只和闭合曲线内所包围的电流有关。**

如果环路不在垂直于导线的平面内：

$$\oint_L \vec{B}\cdot \mathrm{d}\vec{l} = \oint_L \vec{B}\cdot(\overrightarrow{\mathrm{d}\,l}_{\perp} + \overrightarrow{\mathrm{d}\,l}_{//})$$

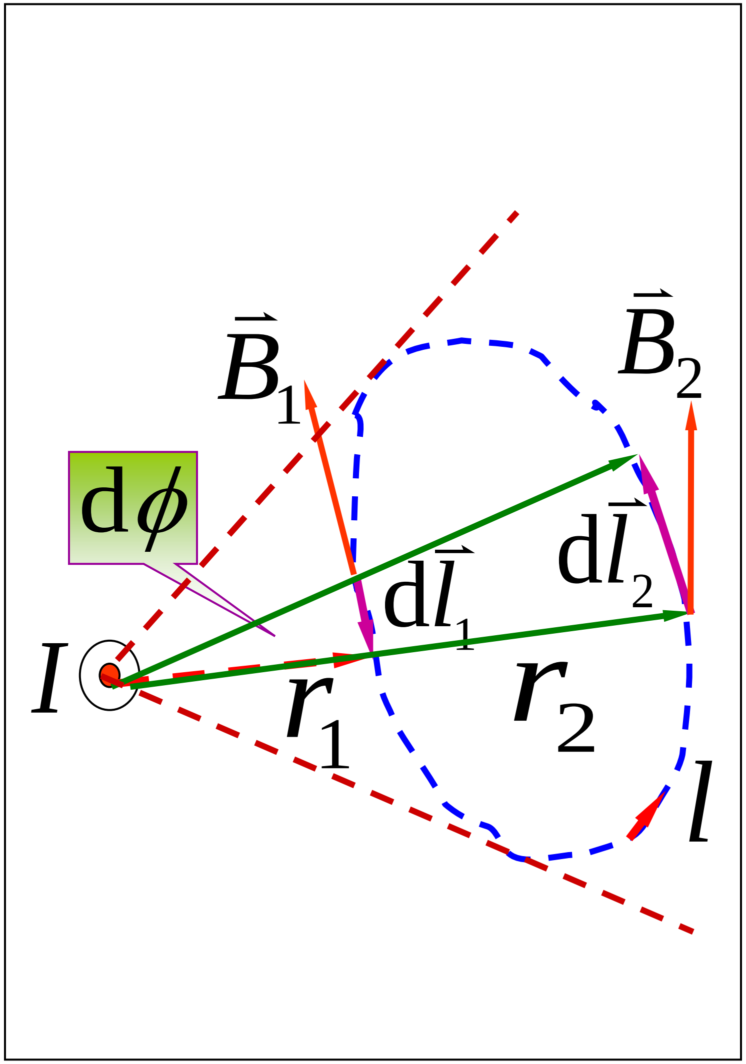
$$= \oint_L B\cos 90^{\circ}\mathrm{d}l_{\perp} + \oint_L B\cos\theta\,\mathrm{d}l_{\parallel}$$

$$= 0 + \oint_L Br\mathrm{d}\varphi$$

$$= \int_0^{2\pi} \frac{\mu_0}{2\pi}\frac{I}{r} r\,\mathrm{d}\,\varphi$$

$$= \mu_0 I$$

电流在回路之外



$$B_1=\frac{\mu_0 I}{2\pi\, r_1},\qquad B_2=\frac{\mu_0 I}{2\pi\, r_2}$$

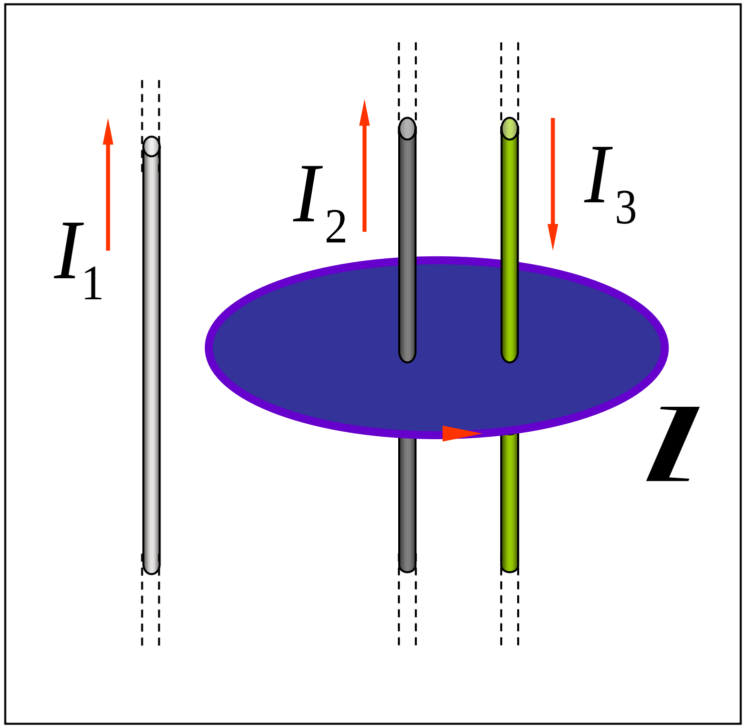
$$\vec{B}_1\cdot\mathrm{d}\vec{l}_1=-\frac{\mu_0 I}{2\pi r_1}r_1\mathrm{d}\phi=-\frac{\mu_0 I}{2\pi}\mathrm{d}\phi$$

$$\vec{B}_2\cdot\mathrm{d}\vec{l}_2=\frac{\mu_0 I}{2\pi r_2}r_2\mathrm{d}\phi=\frac{\mu_0 I}{2\pi}\mathrm{d}\phi$$

$$\vec{B}_1\cdot\mathrm{d}\vec{l}_1+\vec{B}_2\cdot\mathrm{d}\vec{l}_2=0$$

$$\oint_l \vec{B}\cdot d\vec{l}=0$$

多电流情况



$$\vec{B} = \vec{B}_1 + \vec{B}_2 + \vec{B}_3$$

$$\oint_l \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 (I_2 - I_3)$$

以上结果对**任意**形状的闭合电流（伸向无限远的电流）均成立.

➢ **安培环路定理**

$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 \sum_{i=1}^{n} I_i$$

安培环路定理

$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 \sum_{i=1}^{n} I_i$$

即在真空的稳恒磁场中，磁感应强度 $\vec{B}$ 沿任一闭合路径的积分的值，等于 μ_0 乘以该闭合路径所包围的各电流的代数和.

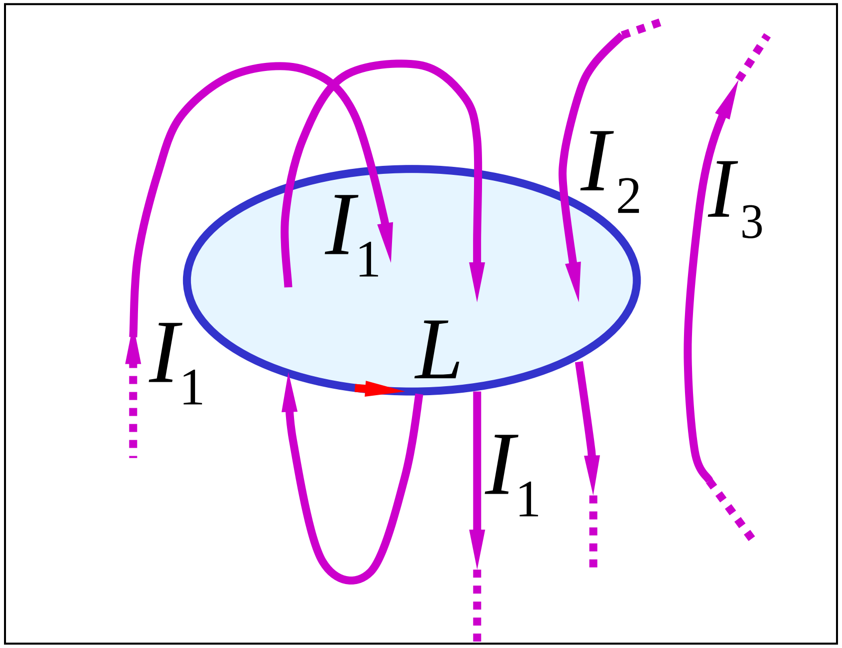
注意

电流 I 正负的规定：I 与 L 成右螺旋时，I 为正；反之为负.

返回 退出

$$\oint_L \vec{B}\cdot d\vec{l} = \mu_0(-I_1 + I_1 - I_1 - I_2)$$

$$= -\mu_0(I_1 + I_2)$$



问 1）$\vec{B}$是否与回路 L 外电流有关？

2）若 $\oint_L \vec{B}\cdot d\vec{l} = 0$，是否回路 L上各处 $\vec{B} = 0$？

是否回路 L 内无电流穿过？

几点注意：

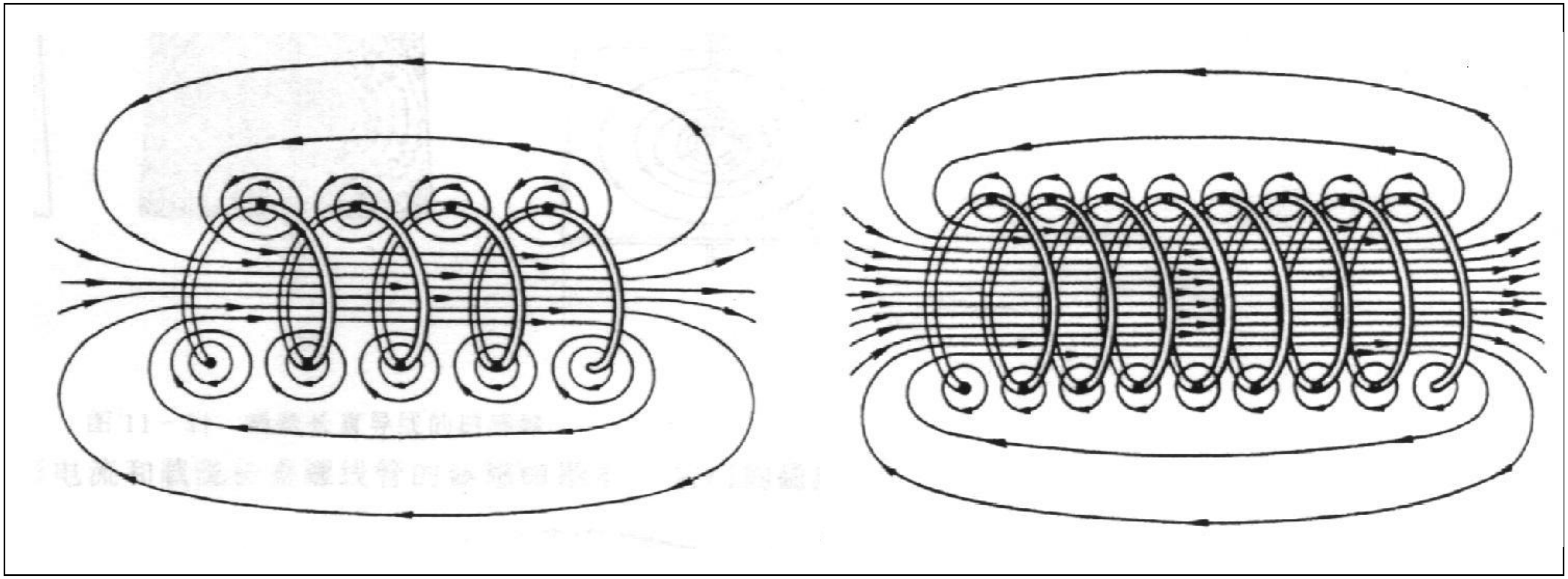
- 任意形状稳恒电流，安培环路定理都成立。

- 环流虽然仅与所围电流有关，但磁场却是所有电流在空间产生磁场的叠加。

- 静电场的高斯定理说明静电场为有源场，环路定理又说明静电场无旋；稳恒磁场的环路定理反映稳恒磁场有旋，高斯定理又反映稳恒磁场无源。

二、安培环路定理的应用举例

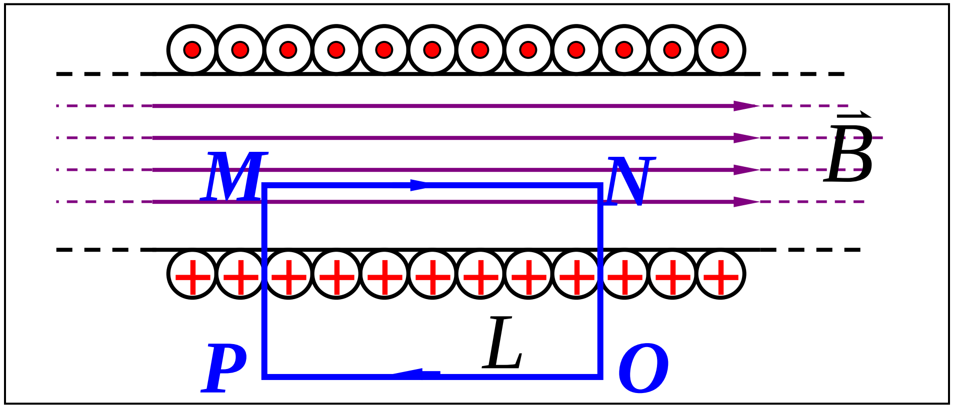
例：求长直密绕螺线管内磁场



解 1）对称性分析螺旋管内为均匀场，方向沿轴向，外部磁感强度趋于零，即 $B \simeq 0$.

2) 选回路 L .

磁场 $\vec{B}$ 的方向与电流 I 成右螺旋.



$$\oint_l \vec{B}\cdot d\vec{l} = \int_{MN}\vec{B}\cdot d\vec{l} + \int_{NO}\cancel{\vec{B}\cdot d\vec{l}} + \int_{OP}\cancel{\vec{B}\cdot d\vec{l}} + \int_{PM}\cancel{\vec{B}\cdot d\vec{l}}$$

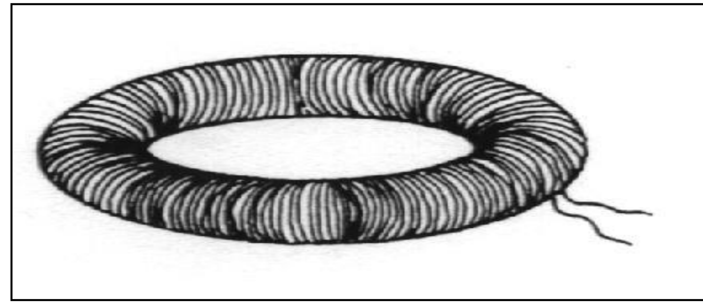
$$B\cdot\overline{MN} = \mu_0 n \overline{MN} I$$

$$\boxed{B = \mu_0 n I}$$

无限长载流螺线管内部磁场处处相等，外部磁场为零.

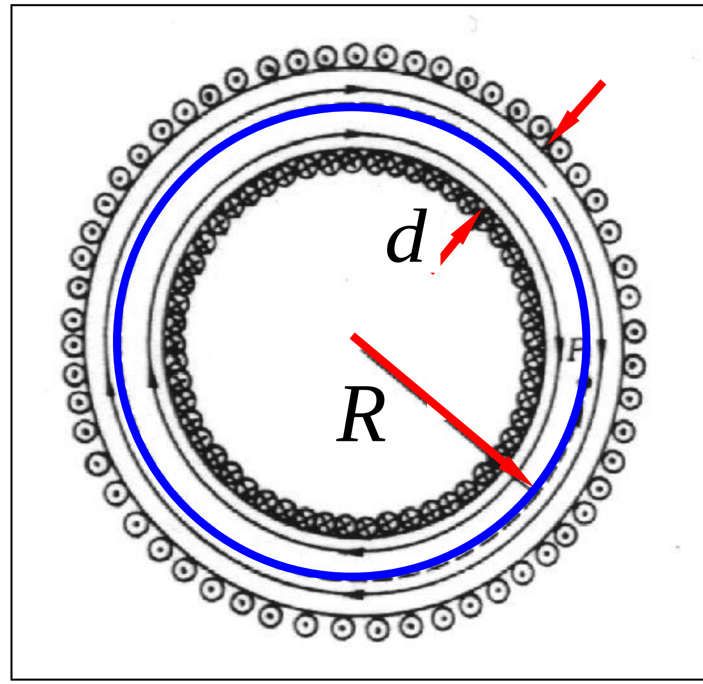
◀ ▶ 返回 退出

例：求载流螺绕环内的磁场



解　1）对称性分析；环内 $\vec{B}$ 线为同心圆，环外 $\vec{B}$ 为零.

2）选回路.



$$\oint_l \vec{B}\cdot d\vec{l} = 2\pi RB = \mu_0 NI$$

$$B = \frac{\mu_0 NI}{2\pi R}$$

令 $L = 2\pi R$　$\boxed{B = \mu_0 NI/L}$

当 $2R >> d$ 时，螺绕环内可视为均匀场 $\boxed{B = \mu_0 nI}$

例： 无限长载流圆柱体的磁场

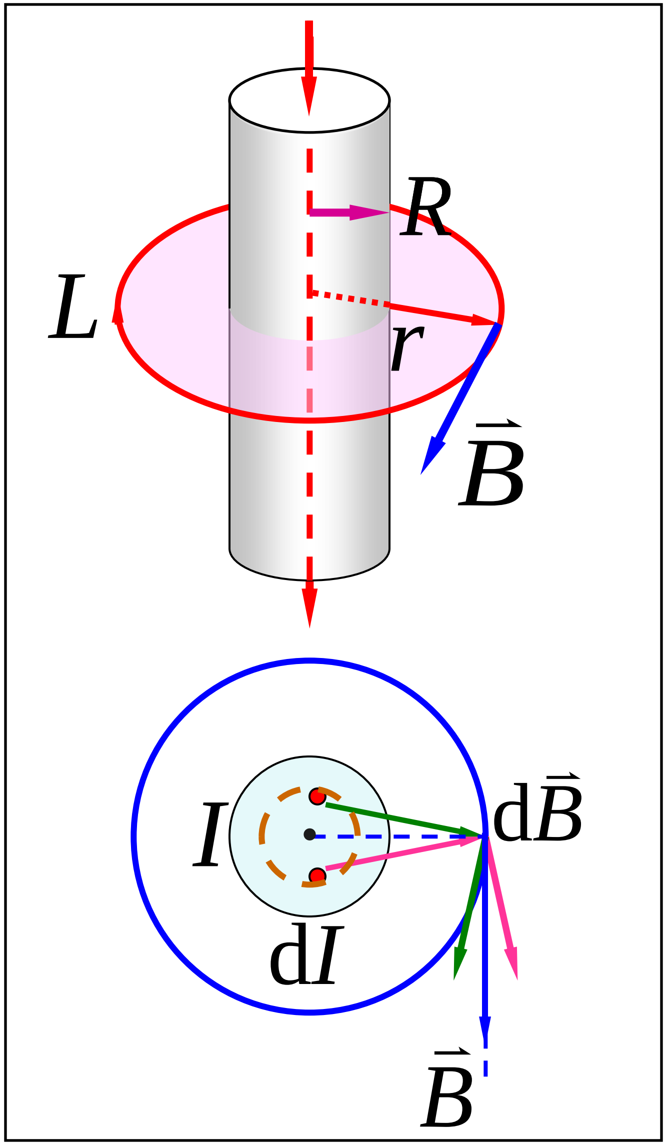
解 1）对称性分析 2）选取回路

$r > R \qquad \oint_l \vec{B}\cdot d\vec{l} = \mu_0 I$

$2\pi rB = \mu_0 I \qquad B = \dfrac{\mu_0 I}{2\pi r}$

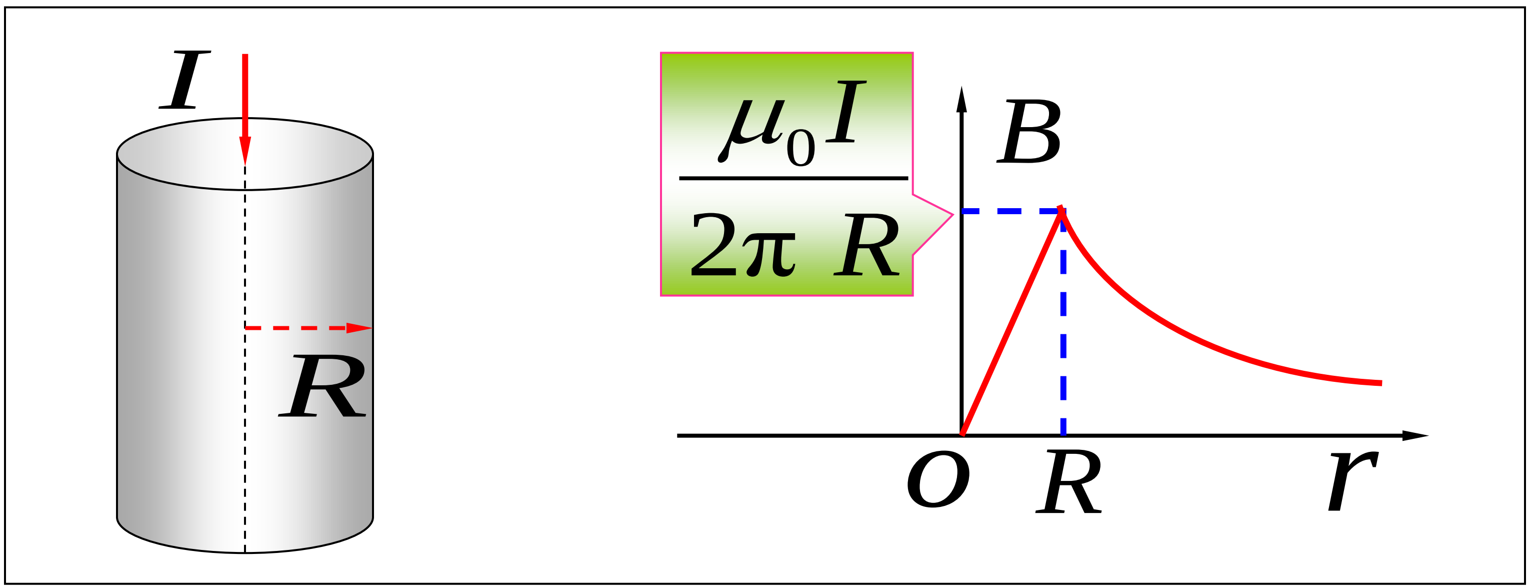
$0 < r < R \qquad \oint_l \vec{B}\cdot d\vec{l} = \mu_0 \dfrac{\pi r^2}{\pi R^2} I$

$2\pi rB = \dfrac{\mu_0 r^2}{R^2} I \qquad B = \dfrac{\mu_0 I r}{2\pi R^2}$

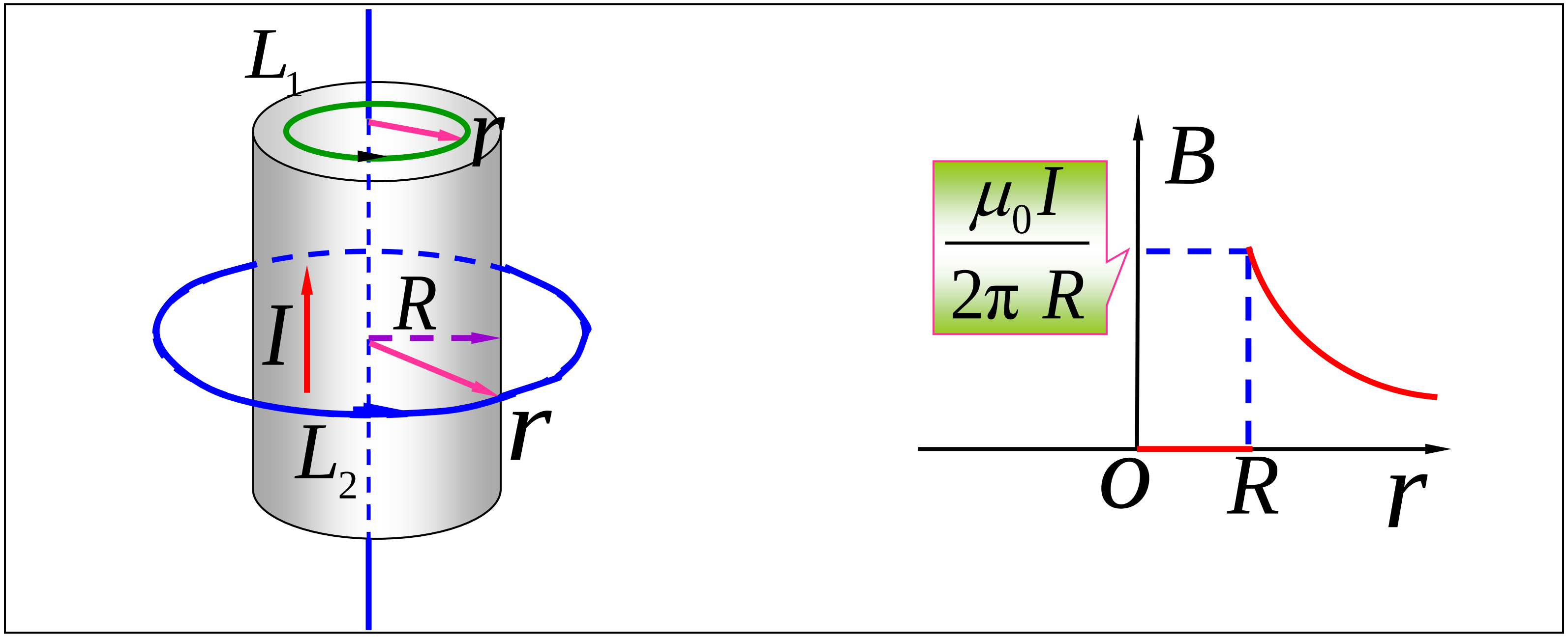


$\vec{B}$ 的方向与 I 成右螺旋

$$\begin{cases} 0 < r < R, & B = \dfrac{\mu_0 I r}{2\pi R^2} \\ r > R, & B = \dfrac{\mu_0 I}{2\pi r} \end{cases}$$



例：无限长载流圆柱面的磁场



解

$$0<r<R,\quad \oint_l \vec{B}\cdot d\vec{l}=0 \qquad B=0$$

$$r>R,\quad \oint_l \vec{B}\cdot d\vec{l}=\mu_0 I \qquad B=\frac{\mu_0 I}{2\pi r}$$

应用安培环路定理的解题步骤：

(1)分析磁场的对称性；

(2)过场点选择适当的路径，使得 $\vec{B}$ 沿此环路的积分易于计算：$\vec{B}$ 的量值恒定，$\vec{B}$ 与 $d\vec{l}$ 的夹角处处相等；

(3)求出环路积分；

(4)用右手螺旋定则确定所选定的回路包围电流的正负，最后由磁场的安培环路定理求出磁感应强度 $\vec{B}$ 的大小。

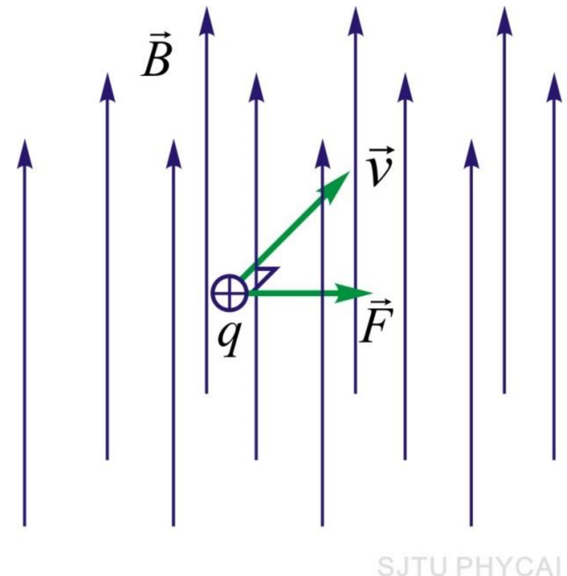
§ 8-5 带电粒子在电场和磁场中的运动

一、洛伦兹力

带电粒子沿磁场方向运动时： $F=0$

带电粒子的运动方向与磁场方向垂直时： $F_{\mathrm{m}}=qvB$

带电粒子运动的方向与磁场方向成夹角θ时，所受磁力：



$$\vec{F}=q\vec{v}\times\vec{B}$$ 洛伦兹力

大小： $F=qvB\sin\theta$

方向： $//(\vec{v}\times\vec{B})$

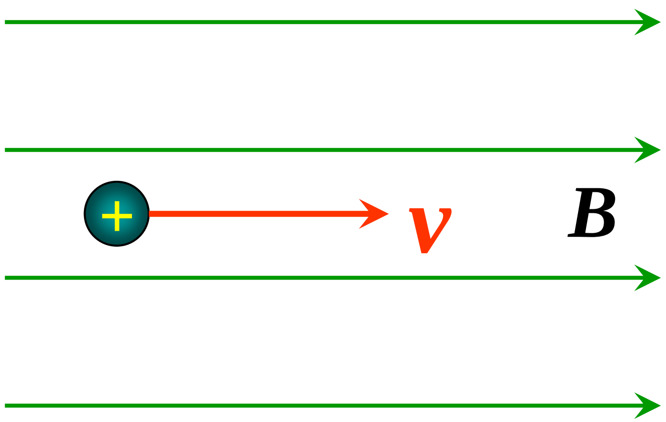
1. 带电粒子在均匀磁场中的运动

设均匀磁场 $\vec{B}$ ，带电粒子 $q, m, \vec{v}$

1） 运动方向与磁场方向平行 $(\vec{v} \,//\, \vec{B})$

洛伦兹力 $\vec{F} = q\vec{v} \times \vec{B}$

$$F = 0$$

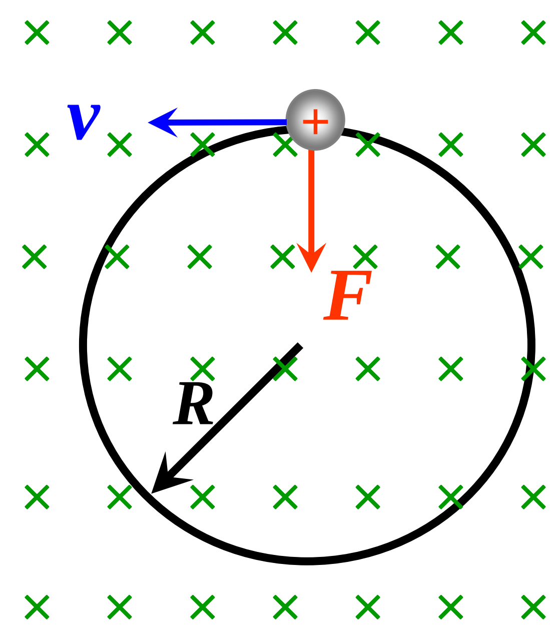


- 带电粒子做匀速直线运动。

2） 运动方向与磁场方向垂直 $(\vec{v} \perp \vec{B})$

$$F = qvB$$

$\because \ \vec{F} \perp \vec{v}$ 故带电粒子做匀速圆周运动。



运动方程：$qvB = m\dfrac{v^2}{R}$

运动半径： $R = \dfrac{mv}{qB}$

周期： $T = \dfrac{2\pi R}{v} = \dfrac{2\pi m}{qB}$

角频率：$\omega = \dfrac{2\pi}{T} = \dfrac{qB}{m}$

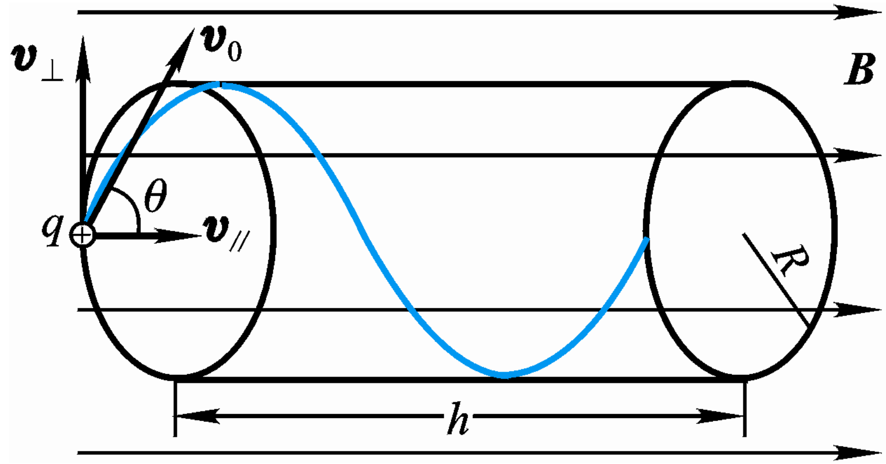
➢ 带电粒子做匀速圆周运动，周期和角频率与速度无关。

3） 运动方向沿任意方向($\vec{v}$ 与 $\vec{B}$ 成 θ 角)

分解 $\vec{V}$：

$v_{\perp}=v\sin\theta$ 匀速圆周运动

$v_{//}=v\cos\theta$ 匀速直线运动



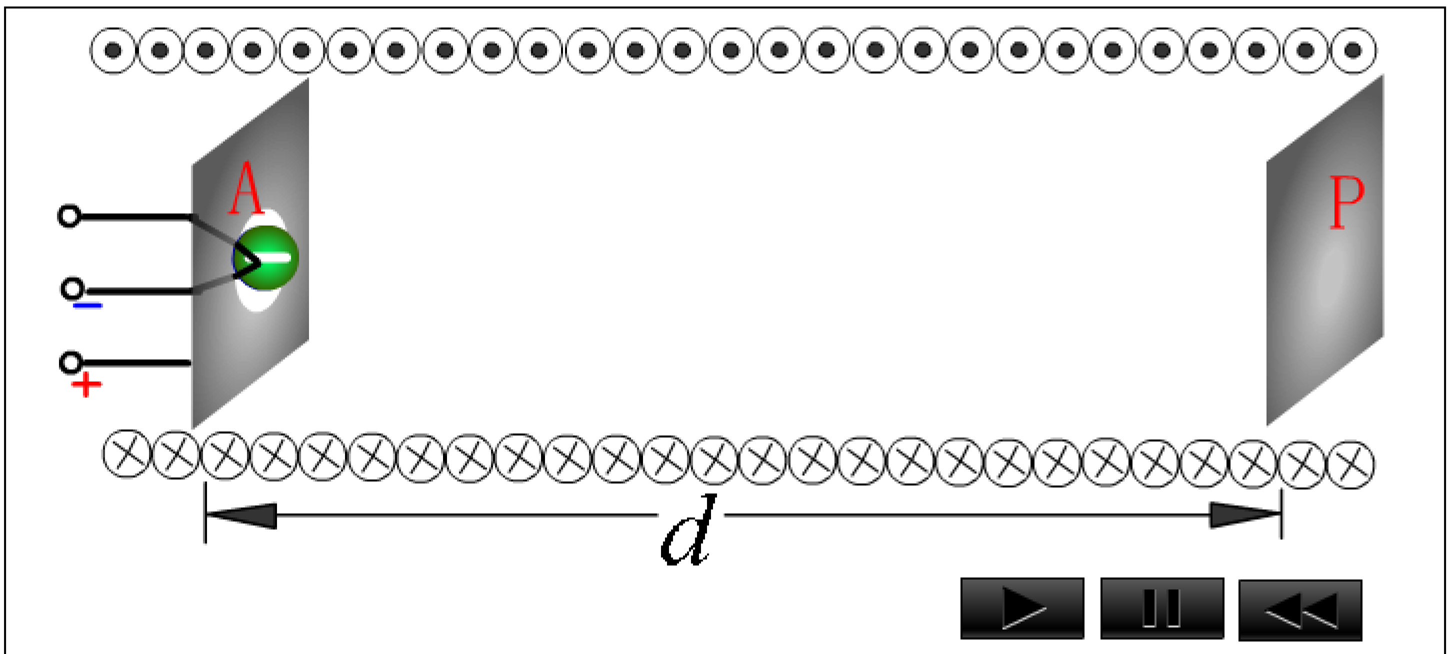
➢ 带电粒子做螺旋线运动。

半径：$R=\dfrac{mv\sin\theta}{qB}$　　周期：$T=\dfrac{2\pi m}{qB}$

螺距：$h=v_{//}T=\dfrac{2\pi m}{qB}v\cos\theta$

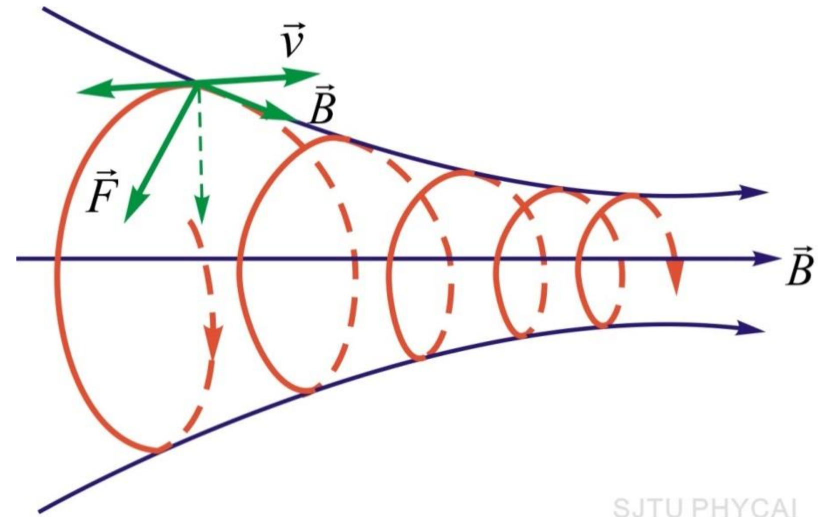
◈ **磁聚焦** 在均匀磁场中某点 A 发射一束初速相差不大的带电粒子，它们的 $\vec{v}_0$ 与 $\vec{B}$ 之间的夹角 θ 不尽相同，但都较小，这些粒子沿半径不同的螺旋线运动，因螺距近似相等，都相交于屏上同一点，此现象称之为磁聚焦 .

半径： $R=\dfrac{mv\sin\theta}{qB}$ $\qquad h=v_{//}T=\dfrac{2\pi m}{qB}v\cos\theta$

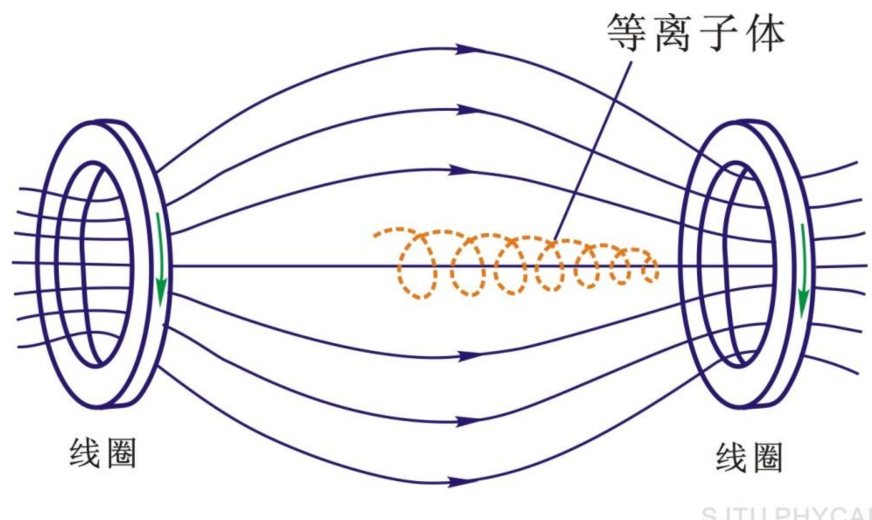


2. 带电粒子在非均匀磁场中运动

1）磁场越强螺旋半径越小，并且会聚磁场中做螺旋运动的带正电粒子会掉向返转。

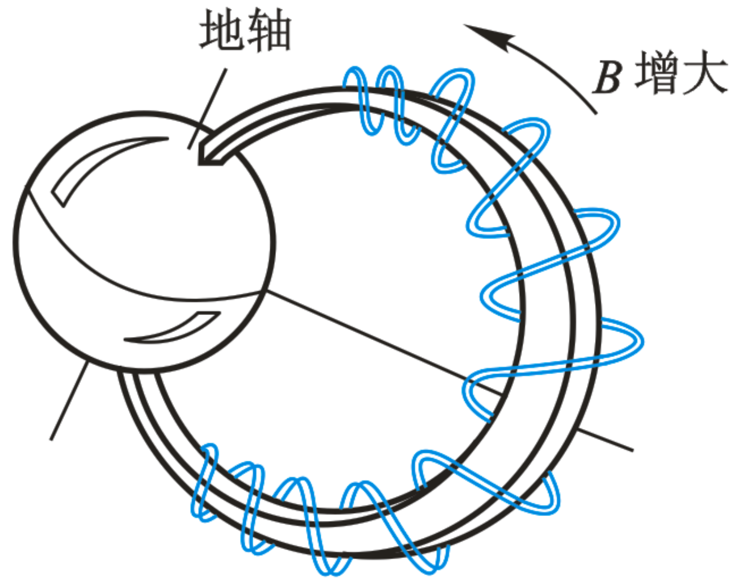


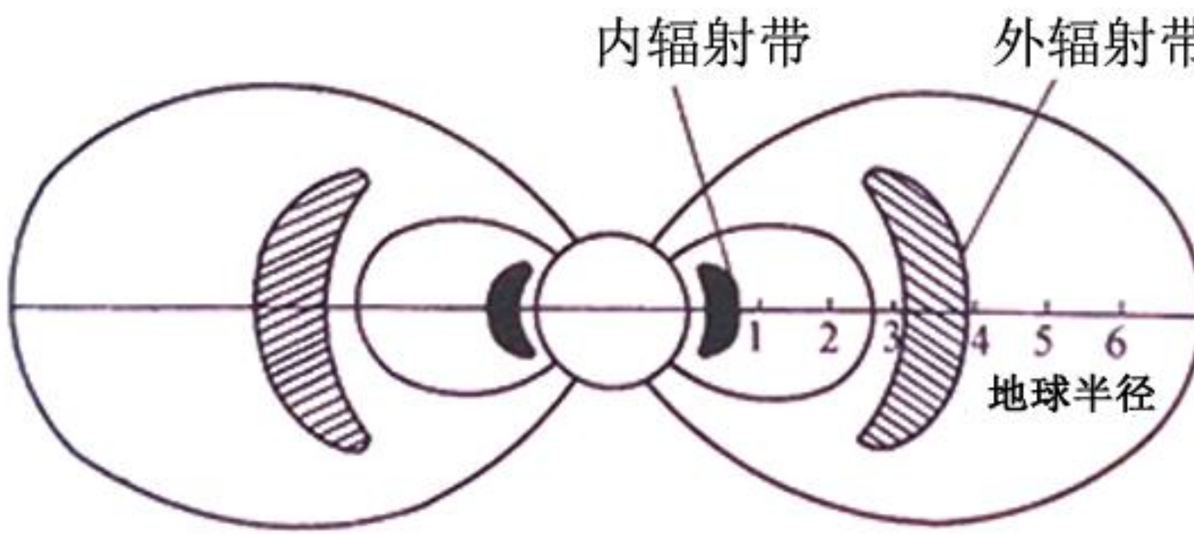
2）磁约束装置



返回 退出

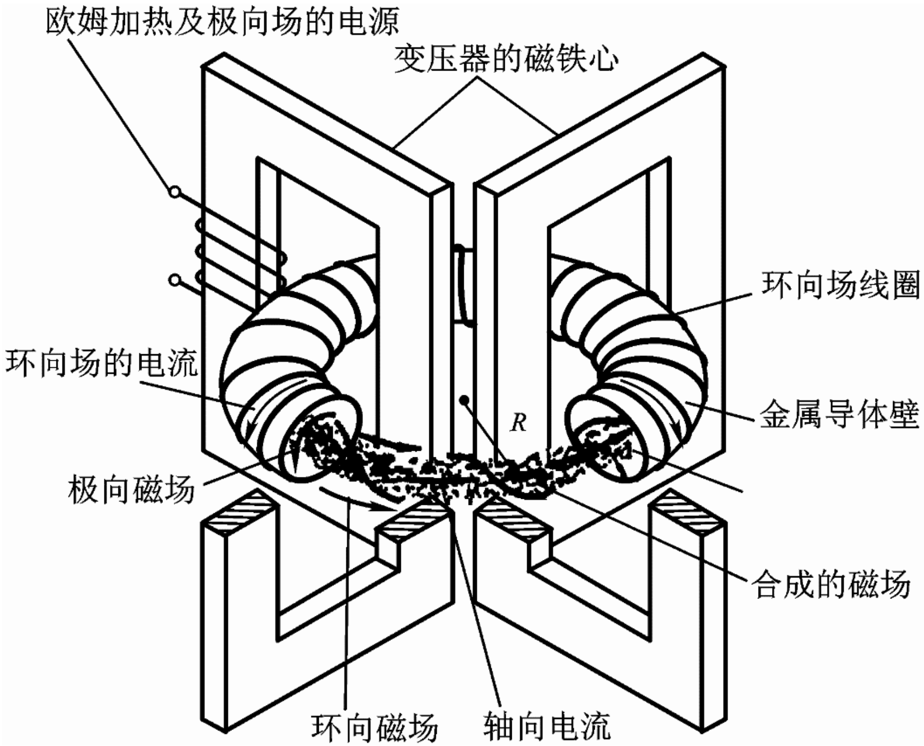
地球磁场构成一个天然的磁约束。来自外层空间的带电粒子被地磁场俘获形成范艾仑(Van Allen)辐射带。





托卡马克(TOKAMAK)

利用一组线圈环形排列，通电后就可形成等离子体磁约束装置，是实现高温等离子体磁约束，进而实现可控核聚变的重要设备。



如图，两根直导线 ab 和 cd 沿半径方向被接到一个截面处处相等的铁环上，稳恒电流 I 从 a 端流入而从 d 端流出，则磁感强度 $\vec{B}$ 沿图中闭合路径 L 的积分 $\oint_L \vec{B}\cdot d\vec{l}$ 等于 $\frac{2}{3}\mu_0 I$