# 2013—2014 学年第一学期《线性代数》(宣城)卷(B)

**一．填空题（每小题 4分，共 20分）**

1.设 $A$ 、$B$ 均为 $3$ 阶方阵，$|A|=2$，$|B|=-4$，则 $|2A^*B^{-1}|=$ <u> －8 </u>．

2.已知矩阵 $A=\begin{pmatrix} k & -1 & -1 & -1 \\ -1 & k & -1 & -1 \\ -1 & -1 & k & -1 \\ -1 & -1 & -1 & k \end{pmatrix}$，$R(A)=3$，则 $k=$ <u> 3 </u>．

3.已知 3阶矩阵 $A$ 的特征值是 $-1,1,2$ 则 $|A+E|=$ <u> 0 </u>．

4.设 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$ 为 $n$ 阶方阵 $A$ 的列向量组，$|A|=0$，其代数余子式 $A_{nn}\neq 0$，$A^*$ 为伴随阵，则 $A^*x=0$ 的通解为 <u> $x=k\,\alpha_1+k_2\alpha_2+\cdots k_{n-1}\alpha_{n-1}, k_j\in R, j=1,2,\cdots,n-1$ </u>．

5.已知 $A$、$B$ 均为 $n$ 阶方阵，$\lambda=\pm1$ 不是 $B$ 的特征值，且 $AB-A-B=E$，则 $A^{-1}=$ <u>$(B-E)(B+E)^{-1}$</u>．

**二．选择题（每小题 4分，共 20分）**

1.设 $n$ 阶方阵 $A$ 与 $B$ 等价 则（ D ）.

(A) $A$ 与 $B$ 行向量组等价　　(B) $A$ 与 $B$ 列向量组等价

(C) $A$ 与 $B$ 的特征值相同　　(D) $A$ 与 $B$ 的秩相同

2.设 $A$，$B$ 分别为 $m$，$n$ $(m,n\geq1)$ 阶可逆方阵 则 $\begin{pmatrix} O & A \\ B & O \end{pmatrix}^{-1}=$（ B ）.

(A) $\begin{pmatrix} O & A^{-1} \\ B^{-1} & O \end{pmatrix}$　(B) $\begin{pmatrix} O & B^{-1} \\ A^{-1} & O \end{pmatrix}$　(C) $(-1)^{mn}\begin{pmatrix} O & |A|B^* \\ |B|A^* & O \end{pmatrix}$　(D) $\begin{pmatrix} O & |A|B^* \\ |B|A^* & O \end{pmatrix}$

3.矩阵方程 $A_{m\times n}X=B_{m\times s}$ 有无穷多解的充要条件是（ D ）.

(A) 齐次方程组 $A_{m\times n}x=0$ 有非零解　　(B) $A$ 的列向量组线性相关

(C) $R(A)=R(A\,|\,B)=n$　　(D) $R(A)=R(A\,|\,B)<n$

4.设 $\alpha$ 是 $n$ 维非零实（列）向量，$A=E+\alpha\alpha^T$，$n>3$，则（ C ）．

(A) $A$ 至少有 $n-1$ 个特征值为 1　　(B) $A$ 只有 1 个特征值为 1

(C) $A$ 恰有 $n-1$ 个特征值为 1　　(D) $A$ 没有 1 个特征值为 1

5.设 $A$ 为 $m\times n$ 阶实矩阵，$R(A)=n$，则（ A ）．

(A) $A^TA$ 必合同于 $n$ 阶单位阵　　(B) $AA^T$ 必等价于 $m$ 阶单位阵

(C) $A^TA$ 必相似于 $n$ 阶单位阵　　(D) $AA^T$ 是 $m$ 阶单位阵

**三、**（10 分）计算 $D_4=\begin{vmatrix} 2 & -5 & 1 & 2 \\ -3 & 7 & -1 & 4 \\ 5 & -9 & 2 & 7 \\ 4 & -6 & 1 & 2 \end{vmatrix}$.

**四、**（10 分）设 $A=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$，$B=\begin{pmatrix} 1 & 3 & -4 \\ 2 & -1 & 0 \\ 3 & 2 & -1 \end{pmatrix}$，求矩阵 $X$，使 $AX=B$．

**五、（10 分）求向量组**$\alpha_1=(1,2,1,0)^T,\alpha_2=(4,5,0,5)^T,\alpha_3=(1,-1,-3,5)^T,\alpha_4=(0,3,1,1)^T$ **的秩及其一个极大无关组，并将其余向量用该极大无关组线性表示．**

**六、（12 分）设** $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$ **,其中** $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1 & -1 & a\\ 1 & -a & -2\\ 5 & -5 & -4\end{pmatrix},\boldsymbol{b}=\begin{pmatrix}2\\ -1\\ 1\end{pmatrix}$**， 当** $a$ **为何值时，方程组** $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$ **（1）无解，（2）有唯一解，（3）有无穷多解，此时请写出通解．**

**七、（12 分）求一正交变换** $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{Q}\boldsymbol{y}$ **将二次型** $f(x_1,x_1,x_3)=\boldsymbol{x}^T\boldsymbol{Ax}=x_1^2+2x_2^2+3x_3^2-4x_1x_2-4x_2x_3$ **化为标准形，并指出此二次型的秩及是否正定．**

**八、（6 分）设** $\boldsymbol{A}$**、**$\boldsymbol{B}$ **为** $n$ **阶实矩阵，**$\boldsymbol{A}$ **的特征值互异，证明：**$\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{BA}\Leftrightarrow\boldsymbol{A}$ **的特征向量都是** $\boldsymbol{B}$ **的特征向量．**

# 2011—2012 学年第一学期《线性代数》试卷(B)参考答案

一、1．<u>-8</u>；2．<u>3</u>；3．<u>0</u>；4．$\underline{x=k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+\cdots k_{n-1}\alpha_{n-1},k_j\in R,j=1,2,\cdots,n-1}$；

5．$\underline{(\boldsymbol{B}-\boldsymbol{E})(\boldsymbol{B}+\boldsymbol{E})^{-1}}$．

二、1．D；2．B；3．D；4．C；5．A．

三、（10 分）解：$D_4=\begin{vmatrix}2&-5&1&2\\-3&7&-1&4\\5&-9&2&7\\4&-6&1&2\end{vmatrix}\overset{\substack{r_3+2r_2\\r_4+r_2\\r_2+r_1}}{=}\begin{vmatrix}2&-5&1&2\\-1&2&0&6\\-1&5&0&15\\1&1&0&6\end{vmatrix}=(-1)^{1+3}\begin{vmatrix}-1&2&6\\-1&5&15\\1&1&6\end{vmatrix}$

$=\begin{vmatrix}0&3&12\\0&6&21\\1&1&6\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}3&12\\6&21\end{vmatrix}=9\begin{vmatrix}1&4\\2&7\end{vmatrix}=-9$；

四、（10 分）解：$\because \boldsymbol{A}^{-1}=\begin{pmatrix}0&1&0\\1&0&0\\0&-1&1\end{pmatrix}$，

$\therefore \boldsymbol{X}=\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}0&1&0\\1&0&0\\0&-1&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&3&-4\\2&-1&0\\3&2&-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2&-1&0\\1&3&-4\\1&3&-1\end{pmatrix}$

五、（10 分）**解：** $(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4)=\begin{pmatrix}1&4&1&0\\2&5&-1&3\\1&0&-3&1\\0&5&5&1\end{pmatrix}\overset{\text{行}}{\sim}\begin{pmatrix}1&0&-3&0\\0&1&1&0\\0&0&0&1\\0&0&0&0\end{pmatrix}$，

所以$r(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4)=3$；$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_4$或$\alpha_1,\alpha_3,\alpha_4$均为其一个极大无关组，
于是$\alpha_3=-3\alpha_1+\alpha_2$．

六、（12 分）**解法一：** $\overline{\boldsymbol{A}}=(\boldsymbol{A}\,|\,\boldsymbol{b})=\left(\begin{array}{ccc:c}1&-1&a&2\\1&-a&-2&-1\\5&-5&-4&1\end{array}\right)\overset{\text{行}}{\sim}\left(\begin{array}{ccc:c}1&-1&a&2\\0&a-1&a+2&3\\0&0&5a+4&9\end{array}\right)$，

（1）当$a=-\dfrac{4}{5}$时，$r(\boldsymbol{A})=2<r(\boldsymbol{A}\,|\,\boldsymbol{b})=3$，方程组$\boldsymbol{A}x=\boldsymbol{b}$无解；

（2）当$a\neq-\dfrac{4}{5}$和$a\neq1$时，$r(\boldsymbol{A})=r(\boldsymbol{A}\,|\,\boldsymbol{b})=3$，方程组$\boldsymbol{A}x=\boldsymbol{b}$有唯一解；

（3）当$a=1$时，$r(\boldsymbol{A})=r(\boldsymbol{A}\,|\,\boldsymbol{b})=2<3$，方程组$\boldsymbol{A}x=\boldsymbol{b}$无穷多解；

此时，$\overline{\boldsymbol{A}}=(\boldsymbol{A}\,|\,\boldsymbol{b})=\left(\begin{array}{ccc:c}1&-1&1&2\\1&-1&-2&-1\\5&-5&-4&1\end{array}\right)\overset{\text{行}}{\sim}\left(\begin{array}{ccc:c}1&-1&0&1\\0&0&1&1\\0&0&0&0\end{array}\right)$，

得$\xi=\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}$，$\eta^*=\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}$，所以通解为$x=k\xi+\eta^*,\forall k\in\mathrm{R}$ .

**解法二：**$|A|=\begin{vmatrix}1&-1&a\\1&-a&-2\\5&-5&-4\end{vmatrix}=(5a+4)(a-1)$，以下步骤同**解法一**.

七、(12 分) 解：二次型$f$的矩阵$A=\begin{pmatrix}1&-2&0\\-2&2&-2\\0&-2&3\end{pmatrix}$，由$|A-\lambda E|=\begin{vmatrix}1-\lambda&-2&0\\-2&2-\lambda&-2\\0&-2&3-\lambda\end{vmatrix}$

$=-(\lambda+1)(\lambda-2)(5-\lambda)=0\Rightarrow\lambda_1=-1,\lambda_2=2,\lambda_3=5$，

当$\lambda_1=-1$时，由$A+E=\begin{pmatrix}2&-2&0\\-2&3&-2\\0&-2&4\end{pmatrix}\overset{行}{\sim}\begin{pmatrix}1&0&-2\\0&1&-2\\0&0&0\end{pmatrix}$得特征向量$\xi_1=\begin{pmatrix}2\\2\\1\end{pmatrix}$，

当$\lambda_2=2$时，由$A-2E=\begin{pmatrix}-1&-2&0\\-2&0&-2\\0&-2&1\end{pmatrix}\overset{行}{\sim}\begin{pmatrix}1&2&0\\0&-2&1\\0&0&0\end{pmatrix}$得特征向量$\xi_2=\begin{pmatrix}-2\\1\\2\end{pmatrix}$，

当$\lambda_3=5$时，由$A-5E=\begin{pmatrix}-4&-2&0\\-2&-3&-2\\0&-2&-2\end{pmatrix}\overset{行}{\sim}\begin{pmatrix}2&1&0\\-2&0&1\\0&0&0\end{pmatrix}$得特征向量$\xi_3=\begin{pmatrix}1\\-2\\2\end{pmatrix}$，因为$\xi_1,\xi_2,\xi_3$已正定，

再单位化得，$p_1=\dfrac{\xi_1}{\|\xi_1\|}=\dfrac{1}{3}\xi_1,p_2=\dfrac{\xi_2}{\|\xi_2\|}=\dfrac{1}{3}\xi_2,p_3=\dfrac{\xi_3}{\|\xi_3\|}=\dfrac{1}{3}\xi_3$，

令$Q=(p_1,p_2,p_3)=\begin{pmatrix}2/3&-2/3&1/3\\2/3&1/3&-2/3\\1/3&2/3&2/3\end{pmatrix}$，得$x=Qy$，$Q^TAQ=\Lambda=\begin{pmatrix}-1&&\\&2&\\&&5\end{pmatrix}$，

所以$f$的标准形为$-y_1^2+2y_2^2+5y_3^2$，$r(f)=3$，不正定.

八、(6 分) 证：(1)必要性，设$A\alpha=\lambda\alpha,\alpha\neq 0$，当$B\alpha\neq 0$时，由$A(B\alpha)=B(A\alpha)=\lambda(B\alpha)$知，$\alpha,B\alpha$都是$A$对应特征值$\lambda$的特征向量，$\because\lambda$是$A$的一重特征值，$\therefore\alpha,B\alpha$线性相关，因此存在常数$\mu$，使$B\alpha=\mu\alpha$，即$\alpha$也是$B$对应特征值$\mu$的特征向量.当$B\alpha=0$时，$\alpha$是$B$对应特征值$\mu=0$的特征向量，故$A$的特征向量都是$B$的特征向量.

(2)充分性，因为$A$的特征值互异，$A$相似于对角阵，所以存在可逆阵$P=(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n)$，使

$A=P\begin{pmatrix}\lambda_1&&\\&\ddots&\\&&\lambda_n\end{pmatrix}P^{-1}$，又$A$的特征向量都是$B$的特征向量，所以，$B=P\begin{pmatrix}\mu_1&&\\&\ddots&\\&&\mu_n\end{pmatrix}P^{-1}$.

$\because AB=P\begin{pmatrix}\lambda_1&&\\&\ddots&\\&&\lambda_n\end{pmatrix}P^{-1}P\begin{pmatrix}\mu_1&&\\&\ddots&\\&&\mu_n\end{pmatrix}P^{-1}=P\begin{pmatrix}\lambda_1&&\\&\ddots&\\&&\lambda_n\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\mu_1&&\\&\ddots&\\&&\mu_n\end{pmatrix}P^{-1}$

$=P\begin{pmatrix}\mu_1&&\\&\ddots&\\&&\mu_n\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\lambda_1&&\\&\ddots&\\&&\lambda_n\end{pmatrix}P^{-1}=P\begin{pmatrix}\mu_1&&\\&\ddots&\\&&\mu_n\end{pmatrix}P^{-1}P\begin{pmatrix}\lambda_1&&\\&\ddots&\\&&\lambda_n\end{pmatrix}P^{-1}=BA$，

$\therefore AB=BA$.