

2016~2017 学年第 二 学期 课程代码 1400071B 课程名称 线性代数 学分 2.5 课程性质:必修☑、选修□、限修□ 考试形式:开卷□、闭卷☑
专业班级 (教学班) 考试日期 2017 年 5 月 2 日 8:00-10:00 命题教师 集体 系 (所或教研室) 主任审批签名

一、填空题 (每小题 4 分, 共 20 分)

1. 已知 $|A| = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & 0 \\ 2 & 2 & 3 & 4 \end{vmatrix}$, 设 $A_{4j} (j=1,2,3,4)$ 是 $|A|$ 中元素 a_{4j} 的代数余子式, 则

$$A_{41} + A_{42} + A_{43} + A_{44} = \underline{\hspace{2cm}}.$$

2. 已知三阶方阵 A 满足 $|A| = 0$, $|A - E| = 0$ 及 $|2A + E| = 0$, 且 A 与 B 相似, 则 $|B + E| = \underline{\hspace{2cm}}.$

3. 设 $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 4 & t & 3 \\ 3 & -1 & 1 \end{pmatrix}$, $B \neq O$, 且 $AB = O$, 则 $t = \underline{\hspace{2cm}}.$

4. 设 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 为 $Ax = 0$ 的基础解系, 则 $\lambda\alpha_1 - \alpha_2, \alpha_2 - \alpha_3, \alpha_3 - \alpha_1$ 也是 $Ax = 0$ 的基础解系的充要条件是 $\underline{\hspace{2cm}}.$

5. 当 t 值取 $\underline{\hspace{2cm}}$ 时, 二次型 $f(x_1, x_2, x_3) = 5x_1^2 + x_2^2 + tx_3^2 + 4x_1x_2 - 2x_1x_3 - 2x_2x_3$ 是正定的.

二、选择题 (每小题 4 分, 共 20 分)

- 下列说法 ~~错误~~ 的是 ().
(A) 若向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 线性无关, 则其中任意两个向量线性无关
(B) 若向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 中任意两个向量线性无关, 则向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 线性无关
(C) 向量组 $\alpha_1 - \alpha_2, \alpha_2 - \alpha_3, \alpha_3 - \alpha_1$ 线性相关
(D) 若向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 线性无关, 则向量组 $\alpha_1, \alpha_1 + \alpha_2, \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3$ 也线性无关

2. 设 A, B 均为 n 阶方阵, 则下列关系正确的有 () 个.

- (I) $AA^* = A^*A$ (II) $(AB)^T = B^T A^T$
(III) $(A+B)^2 = A^2 + 2AB + B^2$ (IV) $(A+E)(A-E) = A^2 - E$
(A) 1 (B) 2 (C) 3 (D) 4

3. 已知 β_1, β_2 为非齐次线性方程组 $Ax = b$ 的两个不同的解, α_1, α_2 是对应的齐次线性方程组 $Ax = 0$ 的基础解系, k_1, k_2 为任意常数, 则方程组 $Ax = b$ 的通解是 ().

- (A) $k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2 + \frac{1}{2}(\beta_2 - \beta_1)$ (B) $k_1(\alpha_1 + \alpha_2) + k_2(\alpha_1 - \alpha_2) + \frac{1}{4}\beta_1 + \frac{3}{4}\beta_2$
(C) $k_1(\alpha_1 - \alpha_2) + k_2(\alpha_2 - \alpha_1) + \frac{1}{2}(\beta_1 + \beta_2)$ (D) $k_1\alpha_1 + k_2(\beta_2 - \beta_1)$

4. 已知 ξ_1, ξ_2 是齐次线性方程组 $(A - \lambda E)x = 0$ 的两个不同解向量, 则下列向量中, 必是 A 的对应于特征值 λ 的特征向量为 ().

- (A) ξ_1 (B) ξ_2 (C) $\xi_1 + \xi_2$ (D) $\xi_1 - \xi_2$

5. 已知矩阵 $A = \begin{pmatrix} 0 & a & -2 \\ a & 4 & 4 \\ -2 & 4 & -3 \end{pmatrix}$ (a 为整数) 与 $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & b \end{pmatrix}$ 相似, 则 a 及 b 的值分别为 ().

- (A) $a = 2, b = -6$ (B) $a = 0, b = -6$ (C) $a = -2, b = 6$ (D) $a = 0, b = -3$

三、(10 分) 设向量组 $\alpha_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}, \alpha_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}, \alpha_3 = \begin{pmatrix} 3 \\ 7 \\ -1 \\ 8 \end{pmatrix}, \alpha_4 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 5 \\ -5 \end{pmatrix}$, 求此向量组的秩及一个极大线性无关组, 并将其余向量用这个极大线性无关组线性表示.

四、(10 分) 设三阶方阵 A, B 满足关系式 $A^{-1}BA = 6A + BA$, 求矩阵 B , 其中 $A = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{4} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{7} \end{pmatrix}.$

五、(14 分) 已知线性方程组 $\begin{cases} x_1 + x_2 = 1, \\ x_1 - x_3 = 1, \\ x_1 + ax_2 + x_3 = b. \end{cases}$

- 常数 a, b 取何值时, 方程组无解、有唯一解、有无穷多解?
- 当方程组有无穷多解时, 求出其通解.

六、(8 分) 设 A 为三阶实对称矩阵, 特征值是 $0, 1, -1$, 而 $\lambda_2 = 1$ 和 $\lambda_3 = -1$ 的特征向量分别是

$$p_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 2a-1 \\ 1 \end{pmatrix}, p_3 = \begin{pmatrix} a \\ 1 \\ 1-3a \end{pmatrix}. \quad (1) \text{ 求 } a \text{ 的值; } \quad (2) \text{ 求矩阵 } A \text{ 及 } A^{100}.$$

七、(14 分) 已知二次型 $f(x_1, x_2, x_3) = (1-a)x_1^2 + (1-a)x_2^2 + 2x_3^2 + 2(1+a)x_1x_2$ 的秩为 2.

- 求 a 的值;
- 求化二次型 $f(x_1, x_2, x_3)$ 为标准形的正交变换, 并指出方程 $f(x_1, x_2, x_3) = 1$ 表示何种二次曲面.

八、(4 分) 已知 A 与 $A - E$ 均为正定矩阵, 判定 $E - A^{-1}$ 是否为正定矩阵? 说明理由.