课外练习题 4

1. 设 3 阶矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的秩 $R(\boldsymbol{A})=1$，$\boldsymbol{\eta}_1=(-1,3,0)^T$，$\boldsymbol{\eta}_2=(2,-1,1)^T$，$\boldsymbol{\eta}_3=(5,0,k)^T$ 是方程组 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$ 的 3 个解向量，则常数 $k=$___3___.

2. 若齐次线性方程组 $\begin{cases}\lambda x_1+x_2+x_3=0,\\ x_1+\lambda x_2+x_3=0,\\ x_1+x_2+\lambda x_3=0\end{cases}$ $(\lambda\neq 1)$ 有非零解，则 $\lambda=$___-2___.

3. 设齐次线性方程组 $\begin{cases}x_1+kx_2+x_3=0,\\ 2x_1+x_2+x_3=0,\\ kx_2+3x_3=0\end{cases}$ 只有零解，则 k 应满足条件 $k\neq\dfrac{3}{5}$.

4. 已知四元非齐次线性方程组 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$ 中，$R(\boldsymbol{A})=3$．而 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 为它的三个解向量，且 $\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2=(1,1,0,2)^T,\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_3=(1,0,1,3)^T$，则 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{b}$ 的通解为 $\dfrac{1}{2}\begin{pmatrix}1\\1\\0\\2\end{pmatrix}+k\begin{pmatrix}0\\1\\-1\\-1\end{pmatrix}$ 或 $\dfrac{1}{2}\begin{pmatrix}1\\0\\1\\3\end{pmatrix}+k\begin{pmatrix}0\\1\\-1\\-1\end{pmatrix}$ 或 $\dfrac{1}{4}\begin{pmatrix}2\\1\\1\\5\end{pmatrix}+k\begin{pmatrix}0\\1\\-1\\-1\end{pmatrix}$，$k\in R.$.

5. 设 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_{n-1}$ 为 n 阶方阵 $\boldsymbol{A}$ 的列向量组的极大无关组，$\boldsymbol{A}^*$ 为 $\boldsymbol{A}$ 的伴随矩阵，则线性方程组 $\boldsymbol{A}^*\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ 的通解为 $\boldsymbol{x}=c_1\boldsymbol{\alpha}_1+c_2\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+c_{n-1}\boldsymbol{\alpha}_{n-1}$，$c_1,c_2,\cdots,c_{n-1}\in R$.

6. $\boldsymbol{A}$ 为 2×3 阶矩阵，$R(\boldsymbol{A})=2$，已知非齐次线性方程组 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$ 有解 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2$，且 $\boldsymbol{\alpha}_1=\begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix},\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2=\begin{pmatrix}1\\-1\\1\end{pmatrix}$，则对应齐次方程组 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$ 通解为 $k\begin{pmatrix}1\\5\\1\end{pmatrix}$，$k\in R.$

7. 设 $\boldsymbol{A}$ 是 4×5 矩阵，$\boldsymbol{B}$ 是 5×4 矩阵，且 $R(\boldsymbol{A})=2$，$\boldsymbol{B}$ 的列向量都是 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$ 的解，则 $\max\limits_{\boldsymbol{B}}\{R(\boldsymbol{B})\}=$___3___.

8. 设 $\boldsymbol{\eta}_1,\boldsymbol{\eta}_2$ 是四元线性非齐次方程组 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$ 的两个不同的解，$R(\boldsymbol{A})=3$，则 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$ 的通解为 $\boldsymbol{x}=c(\boldsymbol{\eta}_2-\boldsymbol{\eta}_1)+\boldsymbol{\eta}_1,c\in\boldsymbol{R}$.

9. 设 $\boldsymbol{A}=(a_{i\times j})_{3\times 3}$ 是实正交矩阵，且 $a_{11}=1$，$\boldsymbol{b}=(1,0,0)^{\boldsymbol{T}}$，则线性方程组 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$ 的解是 $\underline{(1,0,0)^T}$.

10.设 $\boldsymbol{\eta}_1,\boldsymbol{\eta}_2$ 为非齐次线性方程组 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$ 的两个特解，a,b 为实数，若 $a\boldsymbol{\eta}_1-b\boldsymbol{\eta}_2$ 为对应齐次线性方程组 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$ 的解，而 $a\boldsymbol{\eta}_1+b\boldsymbol{\eta}_2$ 仍为非齐次方程组 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$ 的解，则 $2a+4b=$ $\underline{3\quad}$.

11. 设向量组[I]是向量组[II]的线性无关的部分向量组，则（ D ）.

（A）向量组[I]是[II]的极大线性无关组

（B）向量组[I]与[II]的秩相等

（C）当[I]中向量均可由[II]线性表示时，向量组[I]，[II]等价

（D）当[II]中向量均可由[I]线性表示时，向量组[I]，[II]等价

12. 设 n 阶矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的伴随矩阵 $\boldsymbol{A}^*\neq\boldsymbol{O}$，若 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4$ 是非齐次线性方程组 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$ 的互不相等的解，则对应的齐次线性方程组 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$ 的基础解系(B).

（A）不存在.　　　　（B）仅含有一个非零解向量.

（C）含有两个线性无关的解向量.　　　　（D）含有三个线性无关的解向量.

13.设 $\boldsymbol{A}$ 为正交矩阵，且 $|\boldsymbol{A}|=-1$，则必有 $\boldsymbol{A}^*=$（ B ）.

（A）$\boldsymbol{A}^T$　　（B）$-\boldsymbol{A}^{\boldsymbol{T}}$　　（C）$\boldsymbol{A}$　　（D）$-\boldsymbol{A}$

14. 设 $\boldsymbol{A}$ 为 $m\times n$ 矩阵，则下述命题正确的是（ D ）.

（A）若 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$ 只有零解，则 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$ 有唯一解

（B）$\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$ 有非零解的充要条件是 $|\boldsymbol{A}|=0$

（C）$\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$ 有唯一解的充要条件是 $R(\boldsymbol{A})=n$

（D）若 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$ 有两个不同的解，则 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$ 有非零解

15. 设 $\boldsymbol{A}$ 为 n 阶矩阵，且 $|\boldsymbol{A}|=0$，则（ D ）.

（A）$\boldsymbol{A}$ 的秩为零

（B）$\boldsymbol{A}$ 的行秩为零

（C）非齐次线性方程组 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$ 有无穷多解

（D）齐次线性方程组 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$ 有非零解

16．设 $\boldsymbol{A}$ 为 5×4 矩阵，$\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2$ 为非齐次方程组 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$ 的两个不同的特解，$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2$ 是对应齐次方程组 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$ 的基础解系，对任意常数 k_1,k_2，则下列正确的是（　B　）.

（A）$\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$ 的通解是 $k_1\boldsymbol{\alpha}_1+k_2\boldsymbol{\alpha}_2+\frac{1}{2}(\boldsymbol{\beta}_2-\boldsymbol{\beta}_1)$

（B）$\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$ 的通解是 $k_1(\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2)+k_2(\boldsymbol{\alpha}_1-\boldsymbol{\alpha}_2)+2\boldsymbol{\beta}_2-\boldsymbol{\beta}_1$

（C）$\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$ 的通解是 $k_1(\boldsymbol{\alpha}_2-\boldsymbol{\alpha}_1)+k_2(\boldsymbol{\beta}_2-\boldsymbol{\alpha}_1)$

（D）$\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{O}$ 的通解是 $k_1\boldsymbol{\alpha}_1+k_2(\boldsymbol{\beta}_2-\boldsymbol{\beta}_1)$

17. 已知 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 是 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$ 的一组基础解系，下列结论正确的是（　D　）.

（A）$\boldsymbol{\alpha}_1-\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_2-\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_3-\boldsymbol{\alpha}_1$ 也是 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$ 的一组基础解系

（B）$\boldsymbol{\xi}_1,\boldsymbol{\xi}_2,\boldsymbol{\xi}_3$ 与 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 等秩，则 $\boldsymbol{\xi}_1,\boldsymbol{\xi}_2,\boldsymbol{\xi}_3$ 也是 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$ 的一组基础解系

（C）$\boldsymbol{\eta}_1,\boldsymbol{\eta}_2,\boldsymbol{\eta}_3,\boldsymbol{\eta}_4$ 与 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 等价，则 $\boldsymbol{\eta}_1,\boldsymbol{\eta}_2,\boldsymbol{\eta}_3,\boldsymbol{\eta}_4$ 也是 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$ 的一组基础解系

（D）$\boldsymbol{\xi}_1,\boldsymbol{\xi}_2,\boldsymbol{\xi}_3$ 与 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 等价，则 $\boldsymbol{\xi}_1,\boldsymbol{\xi}_2,\boldsymbol{\xi}_3$ 也是 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$ 的一组基础解系

18．齐次线性方程组 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$ 和 $\boldsymbol{Bx}=\boldsymbol{0}$ 同解的充分必要条件为（　D　）.

（A）$\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 等价　　（B）$\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 的秩相同

（C）$\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 的列向量组等价　　（D）$\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 的行向量组等价

19. 设 $\boldsymbol{A}$ 为 $m\times n$ 阶矩阵，$R(\boldsymbol{A})=m<n$，则下列结论正确的是（　C　）.

（A）$\boldsymbol{A}$ 的任意 m 个列向量线性无关　　（B）$\boldsymbol{A}$ 的任意一个 m 阶子式不等于 0

（C）$\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$ 一定有无穷多个解　　（D）$\boldsymbol{A}$ 经过初等行变换可化为 $(\boldsymbol{E}_m,\boldsymbol{O})$ 形式

20．设 $\boldsymbol{A}$ 是 4×3 矩阵，$\boldsymbol{B}$ 是 3×4 矩阵，则下列结论正确的是(　A　).

（A）$\boldsymbol{ABx}=\boldsymbol{0}$ 必有非零解　　（B）$\boldsymbol{ABx}=\boldsymbol{0}$ 只有零解

（C）$\boldsymbol{BAx}=\boldsymbol{0}$ 必有非零解　　（D）$\boldsymbol{BAx}=\boldsymbol{0}$ 只有零解

21． n 元线性方程组 $\boldsymbol{A}_{m\times n}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{b}$ 有唯一解的充要条件是（　C　）.

（A）$R(\boldsymbol{A})=n$　　（B）$\boldsymbol{A}$ 为方阵，且 $|\boldsymbol{A}|\neq 0$

（C）$R(\boldsymbol{A})=R(\boldsymbol{A},\boldsymbol{b})=n$　　（D）$R(\boldsymbol{A})=m$

22．设 $\boldsymbol{A}$ 是 $m\times n$ 矩阵，则（　B　）.

（A）当 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{\beta}$ 有惟一解时，$m=n$

（B）当 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{\beta}$ 有惟一解时， $R(\boldsymbol{A})=n$

（C）当 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{\beta}$ 有无穷多解时， $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$ 只有零解

（D）当 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{\beta}$ 有无穷多解时， $R(\boldsymbol{A})<m$

23.（10 分）求向量组：$\boldsymbol{\alpha}_1=(1,1,1)^{\mathrm{T}},\boldsymbol{\alpha}_2=(0,2,5)^{\mathrm{T}},\boldsymbol{\alpha}_3=(2,4,7)^{\mathrm{T}},\boldsymbol{\alpha}_4=(-1,1,3)^{\mathrm{T}}$ 的一个极大线性无关组，并指出 $\boldsymbol{\alpha}_4$ 能否被 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性表示.

解： 因为 $(\boldsymbol{\alpha}_1\quad \boldsymbol{\alpha}_2\quad \boldsymbol{\alpha}_3\quad \boldsymbol{\alpha}_4)=\begin{pmatrix}1&0&2&-1\\1&2&4&1\\1&5&7&3\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1&0&2&-1\\0&2&2&2\\0&5&5&4\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1&0&-2\\0&2&2\\0&0&-0\end{pmatrix}$，所以

$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_4$ 或 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4$ 是向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4$ 的极大线性无关组． $\boldsymbol{\alpha}_4$ 不能被 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性表示.

24.（10 分） 设 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4$ 是某齐次线性方程组的基础解系，又 $\boldsymbol{\beta}_1=\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2$，$\boldsymbol{\beta}_2=\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_3$，$\boldsymbol{\beta}_3=\boldsymbol{\alpha}_3+\boldsymbol{\alpha}_4$，$\boldsymbol{\beta}_4=\boldsymbol{\alpha}_4-\boldsymbol{\alpha}_1$，问 $\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3,\boldsymbol{\beta}_4$ 是否也可作为该方程组的基础解系？为什么？

解： $(\boldsymbol{\beta}_1\quad \boldsymbol{\beta}_2\quad \boldsymbol{\beta}_3\quad \boldsymbol{\beta}_4)=(\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2\quad \boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_3\quad \boldsymbol{\alpha}_3+\boldsymbol{\alpha}_4\quad \boldsymbol{\alpha}_4-\boldsymbol{\alpha}_1)$

$$=(\boldsymbol{\alpha}_1\quad \boldsymbol{\alpha}_2\quad \boldsymbol{\alpha}_3\quad \boldsymbol{\alpha}_4)\begin{pmatrix}1&0&0&-1\\1&1&0&0\\0&1&1&0\\0&0&1&1\end{pmatrix}$$

因为 $\begin{vmatrix}1&1&0&0\\0&1&1&0\\0&0&1&1\\-1&0&0&1\end{vmatrix}=2\neq 0$，所以 $\begin{pmatrix}1&1&0&0\\0&1&1&0\\0&0&1&1\\-1&0&0&1\end{pmatrix}$ 的秩为 4，又因为 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4$ 是齐次线性方程组的基础解系，故 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4$ 线性无关，则 $\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3,\boldsymbol{\beta}_4$ 线性无关．由齐次线性方程组的解的性质知 $\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3,\boldsymbol{\beta}_4$ 也是齐次线性方程组的解向量. 综上，$\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3,\boldsymbol{\beta}_4$ 也可作为该方程组的基础解系.

25. （10 分）设向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m$ 线性无关，非零向量 $\boldsymbol{\beta}$ 与每个向量 $\boldsymbol{\alpha}_i\,(1\le i\le m)$ 均正交，证明 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m,\boldsymbol{\beta}$ 线性无关.

证明： 设有 $\lambda_1,\lambda_2,\cdots\lambda_m,\lambda$，使

$$\lambda_1\boldsymbol{\alpha}_1+\lambda_2\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots\lambda_m\boldsymbol{\alpha}_m+\lambda\boldsymbol{\beta}=\mathbf{0} \qquad (1)$$

以 $\boldsymbol{\beta}^T$ 左乘上式两端，由于 $\boldsymbol{\beta}$ 与每个向量 $\boldsymbol{\alpha}_i(1\le i\le m)$ 均正交，所以 $\lambda\boldsymbol{\beta}^T\boldsymbol{\beta}=0$. 因为 $\boldsymbol{\beta}\ne\mathbf{0}$，故 $\boldsymbol{\beta}^T\boldsymbol{\beta}=\|\boldsymbol{\beta}\|^2\ne 0$，从而必有 $\lambda=0$.（1）式变为 $\lambda_1\boldsymbol{\alpha}_1+\lambda_2\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots\lambda_m\boldsymbol{\alpha}_m=\mathbf{0}$，因为向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m$ 线性无关，所以 $\lambda_1=\lambda_2=\cdots=\lambda_m=0$. 从而 $\lambda_1=\lambda_2=\cdots=\lambda_m=\lambda=0$，$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m,\boldsymbol{\beta}$ 线性无关.

26.（17 分）已知齐次线性方程组

$$\begin{cases}(a_1+b)x_1+a_2x_2+a_3x_3=0,\\ a_1x_1+(a_2+b)x_2+a_3x_3=0,\\ a_1x_1+a_2x_2+(a_3+b)x_3=0,\end{cases}$$

其中 $a_1+a_2+a_3\ne 0$，试讨论 a_1,a_2,a_3 和 b 满足何种关系时①方程组仅有零解；②方程组有非零解，并求其全部解.

解： 方程组的系数行列式

$$|\boldsymbol{A}|=\begin{vmatrix}a_1+b & a_2 & a_3\\ a_1 & a_2+b & a_3\\ a_1 & a_2 & a_3+b\end{vmatrix}=b^2(a_1+a_2+a_3+b)$$

（1） $b\ne 0$ 且 $a_1+a_2+a_3+b\ne 0$ 时，方程组仅有零解；

（2） $b=0$ 或 $a_1+a_2+a_3+b=0$ 时，方程组有非零解；

① $b=0$ 时，$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}a_1 & a_2 & a_3\\ a_1 & a_2 & a_3\\ a_1 & a_2 & a_3\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}a_1 & a_2 & a\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$，即原方程组的同解方程组为 $a_1x_1+a_2x_2+a_3x_3=0$，$a_1+a_2+a_3\ne 0\Rightarrow a_1,a_2,a_3$不同时为零. 不妨设 $a_1\ne 0$，则 $x_1=-\frac{a_2}{a_1}x_2-\frac{a_3}{a_1}x$，通解为 $\boldsymbol{x}=C_1\begin{pmatrix}-a_2/a_1\\ 1\\ 0\end{pmatrix}+C_2\begin{pmatrix}-a_3/a_1\\ 0\\ 1\end{pmatrix}$ 或 $\boldsymbol{x}=C_1\begin{pmatrix}-a_2\\ a_1\\ 0\end{pmatrix}+C_2\begin{pmatrix}-a_3\\ 0\\ a_1\end{pmatrix}$

② $a_1+a_2+a_3+b=0$ 时，$b=-(a_1+a_2+a_3)\ne 0$，且

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} a_1+b & a_2 & a_3 \\ a_1 & a_2+b & a_3 \\ a_1 & a_2 & a_3+b \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} a_1+b & a_2 & a_3 \\ -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

即原方程组的同解方程组为$\begin{cases} x_2 = x_1 \\ x_3 = x_1 \end{cases}$，通解为：$\boldsymbol{x}=C\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$.

27.（14 分）对于线性方程组$\begin{cases} x_1+x_2+x_3=1, \\ x_1+kx_2+x_3=k, \\ x_1+x_2+k^2x_3=k, \end{cases}$，问$k$取何值时，方程组无解、有惟一解和无穷多组解? 并在方程组有无穷多组解时，求其通解.

解：（法 1）对方程组的增广矩阵作初等行变换

$$\boldsymbol{B}=(\boldsymbol{A}\,|\,\boldsymbol{b})=\left(\begin{array}{ccc:c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & k & 1 & k \\ 1 & 1 & k^2 & k \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc:c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & k-1 & 0 & k-1 \\ 0 & 0 & k^2-1 & k-1 \end{array}\right)$$

讨论：（1）当$k\neq 1$且$k\neq -1$时，$R(\boldsymbol{A})=R(\boldsymbol{B})=3$，方程组有惟一解；

（2）当$k=-1$时，$R(\boldsymbol{A})=2\neq R(\boldsymbol{B})=3$，方程组无解；

（3）当$k=1$时，有$\boldsymbol{B}\to\left(\begin{array}{ccc:c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$，即$R(\boldsymbol{A})=R(\boldsymbol{B})=1<3$，故方程组有无穷多组解. 又因原方程组的同解方程组为$x_1=1-x_2-x_3$，其导出组$x_1=-x_2-x_3$的一个基础解系为$\vec{\xi}_1=\begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix},\vec{\xi}_2=\begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix}$，于是原方程组的通解为

$$\boldsymbol{x}=\boldsymbol{\eta}^*+c_1\boldsymbol{\xi}_1+c_2\boldsymbol{\xi}_2=\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}+c_1\begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix}+c_2\begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix}，其中 c_1,c_2 为任意常数.$$

（法 2）（克拉默法则）系数行列式$D=\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & k & 1 \\ 1 & 1 & k^2 \end{vmatrix}=(k+1)(k-1)^2$

（1）当$k\neq 1$且$k\neq -1$，由克拉默法则方程组有惟一解；

（2）当$k=-1$时，

$$\boldsymbol{B}=(\boldsymbol{A}\,|\,\boldsymbol{b})=\left(\begin{array}{ccc:c}1&1&1&1\\1&-1&1&-1\\1&1&1&-1\end{array}\right)\to\left(\begin{array}{ccc:c}1&1&1&1\\0&-2&0&-2\\0&0&0&-2\end{array}\right)$$

则 $R(\boldsymbol{A})=2\neq R(\boldsymbol{B})=3$，方程组无解；

（3）当 $k=1$ 时，

$$\boldsymbol{B}=(\boldsymbol{A}\,|\,\boldsymbol{b})=\left(\begin{array}{ccc:c}1&1&1&1\\1&1&1&1\\1&1&1&1\end{array}\right)\to\left(\begin{array}{ccc:c}1&1&1&1\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{array}\right)$$

即 $R(\boldsymbol{A})=R(\boldsymbol{B})=1<3$，故方程组有无穷多组解.

通解为

$$\boldsymbol{x}=\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}+c_1\begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix}+c_2\begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix}，\text{其中 } c_1,c_2 \text{ 为任意常数.}$$

28.（10 分）设 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 都是 n 阶方阵，且 $\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{O}$. 证明：$R(\boldsymbol{A})+R(\boldsymbol{B})\le n$.

证明：设 $\boldsymbol{B}=(\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_n)$，由 $\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{O}$ 知，$\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_n$ 均为齐次线性方程组 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$ 的解.

（1）若 $\boldsymbol{B}=\boldsymbol{O}$，则 $R(\boldsymbol{B})=0$，又 $R(\boldsymbol{A})\le n$，显然得证.

（2）若 $\boldsymbol{B}\neq\boldsymbol{O}$，则 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$ 有非零解，从而有基础解系，即有

$R(\boldsymbol{B})=R(\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_n)\le n-R(\boldsymbol{A})$，故 $R(\boldsymbol{A})+R(\boldsymbol{B})\le n$.

29.（14 分）设方程组 $\begin{cases}\lambda x_1+x_2+x_3=1,\\x_1+\lambda x_2+x_3=\lambda,\\x_1+x_2+\lambda x_3=\lambda^2,\end{cases}$ 试问 λ 分别为何值时，

(1)方程组有唯一解；(2)方程组无解；(3)方程组有无穷多解,并求出通解表示式.

解法同 27 题.

30.（6 分）设 n 方阵 $\boldsymbol{A}$ 满足 $\boldsymbol{A}^T\boldsymbol{A}=\boldsymbol{E}$，且 $|\boldsymbol{A}|<0$,证明 $|\boldsymbol{A}+\boldsymbol{E}|=0$.

证明： $|\boldsymbol{A}+\boldsymbol{E}|=|\boldsymbol{A}+\boldsymbol{A}^T\boldsymbol{A}|=|\boldsymbol{E}+\boldsymbol{A}^T||\boldsymbol{A}|=|(\boldsymbol{E}+\boldsymbol{A})^T||\boldsymbol{A}|=|\boldsymbol{E}+\boldsymbol{A}||\boldsymbol{A}|$,

又 $|\boldsymbol{A}|<0$, 故 $|\boldsymbol{A}+\boldsymbol{E}|=0$.