第3节 Cramer 法则

Cramer法则：如果线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n = b_n \end{cases} \qquad (1)$$

的系数行列式不等于零，则线性方程组(1)有唯一解.

$$\boxed{x_1 = \frac{D_1}{D},\ x_2 = \frac{D_2}{D},\ \cdots,\ x_n = \frac{D_n}{D}.}$$

注意:两个条件,两个结论.

其中 $D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \neq 0$

$$D_j=\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1,j-1} & b_1 & a_{1,j+1} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{n,j-1} & b_n & a_{n,j+1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

$$D_j=b_1A_{1j}+b_2A_{2j}+\cdots+b_nA_{nj} \quad (j=1,2,\cdots,n)$$

证明: 用D的第j列的代数余子式分别乘（1）式得

$$\begin{cases}(a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_n)A_{1j}=b_1A_{1j}\\(a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots+a_{2n}x_n)A_{2j}=b_2A_{2j}\\\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\(a_{n1}x_1+a_{n2}x_2+\cdots+a_{nn}x_n)A_{nj}=b_nA_{nj}\end{cases}$$

再把 n 个方程依次相加，得

$$\left(\sum_{k=1}^{n}a_{k1}A_{kj}\right)x_1+\cdots+\left(\sum_{k=1}^{n}a_{kj}A_{kj}\right)x_j+\cdots+\left(\sum_{k=1}^{n}a_{kn}A_{kj}\right)x_n$$

$$=\sum_{k=1}^{n}b_kA_{kj}$$

于是 $\boxed{Dx_j = D_j \quad (j = 1, 2, \cdots, n)}$ (1)

当 $D \neq 0$ 时，方程组(1)有唯一解

$$x_1 = \frac{D_1}{D},\ x_2 = \frac{D_2}{D}, \cdots, x_n = \frac{D_n}{D}$$

Cramer法则的评价：

1. Cramer法则是一个理论工具，它习惯于用来研究当 b 或 A 中某数值改变时， $Ax = b$ 的解如何敏感地变换.
2. 当 n（未知量和方程的个数）很大时，Cramer法则因行列式的计算量大而效率偏低.

例1 设曲线 $y=a+bx+cx^2$ 经过三点(1,3),(2,4),(3,3),

求系数 $\boldsymbol{a, b, c}$.

解 把三个点的坐标代入曲线方程, 得线性方程组

$$\begin{cases} a+b+c=3 \\ a+2b+4c=4 \\ a+3b+9c=3 \end{cases}$$

其系数行列式 $D=\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 4 \\ 1 & 3 & 9 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 4 & 9 \end{vmatrix}$

$$=(2-1)(3-1)(3-2)=2\neq 0$$

所以该线性方程组有唯一解

$$D_1 = \begin{vmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 4 & 2 & 4 \\ 3 & 3 & 9 \end{vmatrix} = 0,\ D_2 = 8,\ D_3 = -2$$

$$a = \frac{D_1}{D} = 0, \quad b = \frac{D_2}{D} = 4, \quad c = \frac{D_3}{D} = -1$$

Cramer 法则也可以叙述为

定理1 如果线性方程组(1)的系数行列式 $D \neq 0$, 则(1)一定有解，且解是唯一的。

定理 1的逆否命题是

推论1 如果线性方程组(1)无解或有两个不同的解，则它的系数行列式必为零。

注意：事实上，由后面章节线性方程组解的存在定理知，行列式为零是线性方程组(1)无解或解不唯一的充要条件。

非齐次与齐次线性方程组的概念：

线性方程组 $$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n = b_n \end{cases}$$

若常数项 $b_1, b_2, \cdots, b_m$ b_n 不全为零，则称此方程组为非齐次线性方程组；若 $b_1, b_2, \cdots, b_m$ b_n 全为零，则称此方程组为齐次线性方程组.

齐次线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = 0 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = 0 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n = 0 \end{cases} \qquad (2)$$

易知，$x_1 = x_2 = \cdots = x_n = 0$ 是(2)的解，称为零解.

若有一组不全为零的数是(2)的解称为非零解.

对于齐次线性方程组有

定理2 如果齐次线性方程组的系数行列式 $D \neq 0$ 则齐次线性方程组只有零解.

推论2 如果齐次线性方程组有非零解，则它的系数行列式必为0.

注意 事实上, 由线性方程组解的存在定理可知, 齐次线性方程组(2)有非零解的充要条件为系数行列式为0.

例2 问 λ 取何值时，齐次线性方程组

$$\begin{cases} \lambda x_1 + x_2 + x_3 = 0 \\ x_1 + \lambda x_2 + x_3 = 0 \\ x_1 + x_2 + \lambda x_3 = 0 \end{cases}$$

有非零解？

解

$$D=\begin{vmatrix}\lambda & 1 & 1\\ 1 & \lambda & 1\\ 1 & 1 & \lambda\end{vmatrix}=(\lambda+2)\begin{vmatrix}1 & 1 & 1\\ 1 & \lambda & 1\\ 1 & 1 & \lambda\end{vmatrix}$$

$$=(\lambda+2)\begin{vmatrix}1 & 1 & 1\\ 0 & \lambda-1 & 0\\ 0 & 0 & \lambda-1\end{vmatrix}=(\lambda+2)(\lambda-1)^2$$

因齐次方程组有非零解，则 $\boldsymbol{D=0.}$

故$\lambda=1$或-2时齐次方程组可能有非零解.