第三章 向量组

本章引入n维向量，规定它的线性运算，研究向量组的线性相关性及秩等有关理论，为研究线性方程组解的结构奠定基础.

微视频 3.1 向量组的线性表示
PPT 课件 3.1 向量组的线

§3.1 向量组的线性表示

在高等数学中，我们已经学习了平面向量和空间向量的概念和相关运算，现在我们将其推广.

定义3.1 n个有次序的数$a_1, a_2, \cdots, a_n$所组成的数组称为n维向量，第i个数a_i称为该向量的第i个分量，$i=1, 2, \cdots, n$.

分量全为实数的向量称为实向量，分量为复数的向量称为复向量，本书只讨论实向量.

n维向量可以写成一行，也可以写成一列，分别称为行向量和列向量，也就是行矩阵和列矩阵，并规定行向量或列向量运算按矩阵的运算规则进行.

本书中列向量用黑体小写字母$\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}, \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}$等表示，行向量用$\boldsymbol{\alpha}^T, \boldsymbol{\beta}^T, \boldsymbol{x}^T, \boldsymbol{y}^T$等表示，所讨论的向量未指明是行向量还是列向量时，都当作列向量.

分量全为零的向量称为零向量，记为$\boldsymbol{0}$.

如果n维向量$\boldsymbol{\alpha}$和$\boldsymbol{\beta}$的对应分量相等，就称$\boldsymbol{\alpha}$与$\boldsymbol{\beta}$相等，记作$\boldsymbol{\alpha}=\boldsymbol{\beta}$.

1. 向量的线性运算

定义3.2 设$\boldsymbol{\alpha}=(a_1, a_2, \cdots, a_n)^T$，$\boldsymbol{\beta}=(b_1, b_2, \cdots, b_n)^T$，$\lambda$为实数，称向量

$$\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\beta}=(a_1+b_1, a_2+b_2, \cdots, a_n+b_n)^T$$

为$\boldsymbol{\alpha}$与$\boldsymbol{\beta}$的和；称向量

$$\lambda\boldsymbol{\alpha}=(\lambda a_1, \lambda a_2, \cdots, \lambda a_n)^T$$

为λ与$\boldsymbol{\alpha}$的数量乘积.

向量$\boldsymbol{\alpha}$与-1的乘积记作$-\boldsymbol{\alpha}$，规定$\boldsymbol{\alpha}-\boldsymbol{\beta}=\boldsymbol{\alpha}+(-\boldsymbol{\beta})$.

向量的加法和数乘运算统称为向量的线性运算.

例1 设$\boldsymbol{\alpha}=\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{\beta}=\begin{pmatrix}-1\\0\\2\end{pmatrix}$，计算$2\boldsymbol{\alpha}-3\boldsymbol{\beta}$．

解 $2\boldsymbol{\alpha}-3\boldsymbol{\beta}=\begin{pmatrix}2\\4\\6\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}3\\0\\-6\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}5\\4\\0\end{pmatrix}$．

2. 向量组的线性表示

通常把分量个数相同的一组列向量（或行向量）称为一个向量组．

平面上向量$\boldsymbol{\alpha}=\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{\beta}=\begin{pmatrix}2\\4\end{pmatrix}$满足$\boldsymbol{\beta}=2\boldsymbol{\alpha}$，表明$\boldsymbol{\alpha}$与$\boldsymbol{\beta}$是两共线的向量．

向量$\boldsymbol{\alpha}_1=\begin{pmatrix}1\\2\\0\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{\alpha}_2=\begin{pmatrix}2\\-3\\1\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{\alpha}_3=\begin{pmatrix}4\\1\\1\end{pmatrix}$满足$\boldsymbol{\alpha}_3=2\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2$，表明向量$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$是共面向量．

由此可见，向量的线性关系有着明显的几何意义，现推广到n维向量．

定义3.3 设有向量组$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m$及向量$\boldsymbol{\beta}$，如果存在一组数$x_1,x_2,\cdots,x_m$，使

$$\boldsymbol{\beta}=x_1\boldsymbol{\alpha}_1+x_2\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+x_m\boldsymbol{\alpha}_m,$$

称向量$\boldsymbol{\beta}$可由向量组$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m$线性表示．

称n维向量组$\boldsymbol{\varepsilon}_1=(1,0,\cdots,0)^T$，$\boldsymbol{\varepsilon}_2=(0,1,\cdots,0)^T$，…，$\boldsymbol{\varepsilon}_n=(0,0,\cdots,1)^T$为$n$维单位坐标向量组．显然，对任一$n$维向量$\boldsymbol{\alpha}=(a_1,a_2,\cdots,a_n)^T$都有

$$\boldsymbol{\alpha}=a_1\boldsymbol{\varepsilon}_1+a_2\boldsymbol{\varepsilon}_2+\cdots+a_n\boldsymbol{\varepsilon}_n.$$

例 2 设$\boldsymbol{A}$为$m\times l$矩阵，$\boldsymbol{B}$为$l\times n$矩阵，且$\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{C}$，则矩阵$\boldsymbol{C}$的列向量组可由矩阵$\boldsymbol{A}$的列向量组线性表示．

证 对矩阵$\boldsymbol{A}$，$\boldsymbol{C}$按其列向量分块为

$$\boldsymbol{A}=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_l),\quad \boldsymbol{C}=(\boldsymbol{\gamma}_1,\boldsymbol{\gamma}_2,\cdots,\boldsymbol{\gamma}_n),$$

设$\boldsymbol{B}=(b_{ij})_{l\times n}$，由$\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{C}$可得

$$(\gamma_1,\gamma_2,\cdots,\gamma_n)=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_l)\begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_{l1} & b_{l2} & \cdots & b_{ln} \end{pmatrix},$$

即

$$\gamma_i=b_{1i}\boldsymbol{\alpha}_1+b_{2i}\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+b_{li}\boldsymbol{\alpha}_l\text{，}\quad i=1,2,\cdots,n\text{，}$$

所以矩阵$\boldsymbol{C}$的列向量组可由矩阵$\boldsymbol{A}$的列向量组线性表示.

3. 等价向量组

定义3.4 设有两个向量组A：$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m$及$B$：$\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_l$，若向量组$B$中每个向量都可由向量组$A$线性表示，则称向量组$B$可由向量组$A$线性表示；若向量组$A$与向量组$B$可相互线性表示，则称向量组$A$与向量组$B$等价.

向量组的等价关系满足

（1）自反性：任一向量组与其自身等价；

（2）对称性：若向量组A与向量组B等价，则向量组B与向量组A等价；

（3）传递性：若向量组A与向量组B等价，向量组B与向量组C等价，则向量组A与向量组C等价.

例3 设$\boldsymbol{\beta}_1=\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_3$，$\boldsymbol{\beta}_2=\boldsymbol{\alpha}_3+\boldsymbol{\alpha}_1$，$\boldsymbol{\beta}_3=\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2$，证明向量组$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$与$\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3$等价.

方法总结：涉及向量组的线性表示与等价等相关问题及方法

证 显然，向量组$\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3$可由$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$线性表示.

由题设易得

$$\begin{cases} \boldsymbol{\alpha}_1=-\frac{1}{2}\boldsymbol{\beta}_1+\frac{1}{2}\boldsymbol{\beta}_2+\frac{1}{2}\boldsymbol{\beta}_3 \\ \boldsymbol{\alpha}_2=\frac{1}{2}\boldsymbol{\beta}_1-\frac{1}{2}\boldsymbol{\beta}_2+\frac{1}{2}\boldsymbol{\beta}_3 \\ \boldsymbol{\alpha}_3=\frac{1}{2}\boldsymbol{\beta}_1+\frac{1}{2}\boldsymbol{\beta}_2-\frac{1}{2}\boldsymbol{\beta}_3 \end{cases},$$

即向量组$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$也可由$\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3$线性表示，从而两向量组等价.

关于两向量组的线性表示及等价问题的判定将在§4.3中深入研究.

§ 3.2　向量组的线性相关性

微视频 3-2
向量组的线性相关性
PPT 课件 3-2 向量组的线性相关性

1. 线性相关与线性无关的概念

定义 3.5 设有向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m$，如果存在一组不全为零的数 $x_1, x_2, \cdots, x_m$，使

$$x_1\boldsymbol{\alpha}_1+x_2\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+x_m\boldsymbol{\alpha}_m=\mathbf{0}, \tag{3.1}$$

则称向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m$ 线性相关；否则，称向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m$ 线性无关.也即当且仅当 $x_1=x_2=\cdots=x_m=0$ 时（3.1）才成立， $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m$ 线性无关.

概念解析：向量组的线性相关性

由上述定义知，含有零向量的向量组必线性相关；单个向量 $\boldsymbol{\alpha}$ 线性相关的充分必要条件是 $\boldsymbol{\alpha}=\mathbf{0}$；两个向量 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2$ 线性相关的充分必要条件是 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2$ 的分量对应成比例.

例如，向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1=\begin{pmatrix}1\\0\\-2\end{pmatrix}$， $\boldsymbol{\alpha}_2=\begin{pmatrix}3\\0\\-6\end{pmatrix}$ 线性相关；向量组 $\boldsymbol{\beta}_1=\begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix}$， $\boldsymbol{\beta}_2=\begin{pmatrix}1\\2\\-1\end{pmatrix}$ 线性无关.

典型例题：向量组相关性的判别

例 1 证明 n 维单位坐标向量组 $\boldsymbol{\varepsilon}_1,\boldsymbol{\varepsilon}_2,\cdots,\boldsymbol{\varepsilon}_n$ 线性无关.

证 由 $x_1\boldsymbol{\varepsilon}_1+x_2\boldsymbol{\varepsilon}_2+\cdots+x_n\boldsymbol{\varepsilon}_n=\mathbf{0}$，得 $(x_1, x_2, \cdots, x_n)^T=(0, 0, \cdots, 0)^T$，即 $x_1=x_2=\cdots=x_n=0$，所以 $\boldsymbol{\varepsilon}_1,\boldsymbol{\varepsilon}_2,\cdots,\boldsymbol{\varepsilon}_n$ 线性无关.

例 2 已知向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性无关，$\boldsymbol{\beta}_1=\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2$， $\boldsymbol{\beta}_2=\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_3$， $\boldsymbol{\beta}_3=\boldsymbol{\alpha}_2-\boldsymbol{\alpha}_3$，讨论向量组 $\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3$ 的线性相关性.

方法总结：具体向量组线性相关性的判定方法

解 由 $x_1\boldsymbol{\beta}_1+x_2\boldsymbol{\beta}_2+x_3\boldsymbol{\beta}_3=\mathbf{0}$，得

$$(x_1+x_2)\boldsymbol{\alpha}_1+(x_1+x_3)\boldsymbol{\alpha}_2+(x_2-x_3)\boldsymbol{\alpha}_3=\mathbf{0},$$

因为 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性无关，所以

$$\begin{cases}x_1+x_2=0\\x_1+x_3=0\\x_2-x_3=0\end{cases}, \tag{3.2}$$

即 $-x_1=x_2=x_3$，可取方程组 (3.2) 的一组非零解为 $x_1=-1$， $x_2=1$， $x_3=1$，故向量组

$\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3$线性相关.

2. 向量组的线性相关性

性质3.1（1）向量组$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m$线性相关$(m\ge 2)$的充分必要条件是其中至少有一个向量可由其余向量线性表示.

（2）向量组$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m$线性无关$(m\ge 2)$的充分必要条件是其中任一向量均不可由其余向量线性表示.

证（1）必要性 设$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m$线性相关，则存在一组不全为零的数$k_1,k_2,\cdots,k_m$使

$$k_1\boldsymbol{\alpha}_1+k_2\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+k_m\boldsymbol{\alpha}_m=\mathbf{0},$$

不妨设$k_1\ne 0$，则

$$\boldsymbol{\alpha}_1=-\frac{k_2}{k_1}\boldsymbol{\alpha}_2-\cdots-\frac{k_m}{k_1}\boldsymbol{\alpha}_m,$$

即$\boldsymbol{\alpha}_1$可由其余向量$\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m$线性表示.

充分性 因$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m$中至少有一向量可由其余向量线性表示，不妨设

$$\boldsymbol{\alpha}_m=l_1\boldsymbol{\alpha}_1+\cdots+l_{m-1}\boldsymbol{\alpha}_{m-1},$$

于是有

$$l_1\boldsymbol{\alpha}_1+\cdots+l_{m-1}\boldsymbol{\alpha}_{m-1}+(-1)\boldsymbol{\alpha}_m=\mathbf{0},$$

因为$l_1,\cdots,l_{m-1},-1$不全为零，所以向量组$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m$线性相关.

（2）为（1）的逆否命题，亦真.

设向量组$\boldsymbol{\alpha}_1=(a_{11},a_{12},a_{13})^T$，$\boldsymbol{\alpha}_2=(a_{21},a_{22},a_{23})^T$，$\boldsymbol{\alpha}_3=(a_{31},a_{32},a_{33})^T$线性相关，且$\boldsymbol{\alpha}_1$可由$\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$线性表示. 分别以$\boldsymbol{\alpha}_1^T,\boldsymbol{\alpha}_2^T,\boldsymbol{\alpha}_3^T$的分量为系数的线性方程组

$$\begin{cases}a_{11}x_1+a_{12}x_2+a_{13}x_3=0,\\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+a_{23}x_3=0,\\ a_{31}x_1+a_{32}x_2+a_{33}x_3=0.\end{cases}\tag{3.3}$$

说明方程组(3.3)中的第一个方程是多余方程. 因此，了解线性方程组中各方程之间的关系可以通过研究向量组中各向量的线性关系来实现.

性质 3.2（1）若向量组$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m$线性相关，则向量组$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m,\boldsymbol{\alpha}_{m+1}$线性相关.

（2）若向量组$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m,\boldsymbol{\alpha}_{m+1}$线性无关，则向量组$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m$线性无关.

此性质可由定义3.5得到.

性质 3.3 若向量组$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m$线性无关，而向量组$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m,\boldsymbol{\beta}$线性相关，则$\boldsymbol{\beta}$可由$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m$线性表示，且表示式是唯一的.

证 由$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m,\boldsymbol{\beta}$线性相关，知有不全为零的数$x_1$，$x_2$，$\cdots$，$x_m$，$x$，使

$$x_1\boldsymbol{\alpha}_1+x_2\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+x_m\boldsymbol{\alpha}_m+x\boldsymbol{\beta}=\mathbf{0}.$$

由$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m$线性无关，可得$x\neq 0$，因此

$$\boldsymbol{\beta}=-\frac{x_1}{x}\boldsymbol{\alpha}_1-\frac{x_2}{x}\boldsymbol{\alpha}_2-\cdots-\frac{x_m}{x}\boldsymbol{\alpha}_m,$$

即$\boldsymbol{\beta}$可由$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m$线性表示.

再证表示式的唯一性. 设

$$\boldsymbol{\beta}=l_1\boldsymbol{\alpha}_1+l_2\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+l_m\boldsymbol{\alpha}_m$$

及

$$\boldsymbol{\beta}=k_1\boldsymbol{\alpha}_1+k_2\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+k_m\boldsymbol{\alpha}_m,$$

于是

$$(l_1-k_1)\boldsymbol{\alpha}_1+(l_2-k_2)\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+(l_m-k_m)\boldsymbol{\alpha}_m=\mathbf{0},$$

因$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m$线性无关，故$l_i=k_i$，$i=1,2,\cdots,m$，所以表示式是唯一的.

例3 设$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$线性相关，$\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4$线性无关，证明：

（1）$\boldsymbol{\alpha}_1$能由$\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$线性表示；

（2）$\boldsymbol{\alpha}_4$不能由$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$线性表示.

方法总结：抽象向量组相关性的判定方法

证（1） 由$\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4$线性无关，得$\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$线性无关. 又$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$线性相关，由性质3.3知，$\boldsymbol{\alpha}_1$能由$\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$线性表示.

（2）反证法 若$\boldsymbol{\alpha}_4$能由$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$线性表示，由（1）得$\boldsymbol{\alpha}_4$能由$\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$线性表示，所以

$\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4$线性相关，与题设矛盾，故$\boldsymbol{\alpha}_4$不能由$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$线性表示.

性质3.4 设向量组A：$\boldsymbol{\alpha}_1=\begin{pmatrix}a_{11}\\a_{21}\\\vdots\\a_{r1}\end{pmatrix},\boldsymbol{\alpha}_2=\begin{pmatrix}a_{12}\\a_{22}\\\vdots\\a_{r2}\end{pmatrix},\cdots,\ \boldsymbol{\alpha}_m=\begin{pmatrix}a_{1m}\\a_{2m}\\\vdots\\a_{rm}\end{pmatrix}$，对$A$中每个向量添加$n-r$个分量后得向量组

$$B:\ \boldsymbol{\beta}_1=\begin{pmatrix}a_{11}\\\vdots\\a_{r1}\\a_{r+1,1}\\\vdots\\a_{n1}\end{pmatrix},\ \boldsymbol{\beta}_2=\begin{pmatrix}a_{12}\\\vdots\\a_{r2}\\a_{r+1,2}\\\vdots\\a_{n2}\end{pmatrix},\ \cdots,\ \boldsymbol{\beta}_m=\begin{pmatrix}a_{1m}\\\vdots\\a_{rm}\\a_{r+1,m}\\\vdots\\a_{nm}\end{pmatrix},$$

（1）若向量组A线性无关，则向量组B线性无关；

（2）若向量组B线性相关，则向量组A线性相关.

证（1）向量组A线性无关的充分必要条件是向量方程

$$x_1\boldsymbol{\alpha}_1+x_2\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+x_m\boldsymbol{\alpha}_m=\mathbf{0}$$

只有零解，即方程组

$$\begin{cases}a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1m}x_m=0\\a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots+a_{2m}x_m=0\\\qquad\cdots\cdots\\a_{r1}x_1+a_{r2}x_2+\cdots+a_{rm}x_m=0\end{cases}\tag{3.4}$$

只有零解.

同理，向量组B线性无关的充分必要条件是方程组

$$\begin{cases}a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1m}x_m=0\\\qquad\cdots\cdots\\a_{r1}x_1+a_{r2}x_2+\cdots+a_{rm}x_m=0\\a_{r+1,1}x_1+a_{r+1,2}x_2+\cdots+a_{r+1,m}x_m=0\\\qquad\cdots\cdots\\a_{n1}x_1+a_{n2}x_2+\cdots+a_{nm}x_m=0\end{cases}\tag{3.5}$$

只有零解.

显然，当方程组(3.4)只有零解时，方程组(3.5)也只有零解，因此，当向量组A线性无

关时，向量组 B 也线性无关.

（2）为（1）的逆否命题，亦真.

性质 3.5（1）若向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m$ 可由向量组 $\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_l$ 线性表示，且 $m>l$，则 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m$ 线性相关.

（2）若向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m$ 可由向量组 $\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_l$ 线性表示，且 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m$ 线性无关，则 $m\le l$.

证（1） 因向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m$ 可由 $\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_l$ 线性表示，故存在矩阵 $\boldsymbol{K}_{l\times m}$ 使

$$\left(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m\right)=\left(\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_l\right)\boldsymbol{K}.$$

由 $x_1\boldsymbol{\alpha}_1+x_2\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+x_m\boldsymbol{\alpha}_m=\boldsymbol{0}$，则有

$$\left(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m\right)\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\\vdots\\x_m\end{pmatrix}=\left(\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_l\right)\boldsymbol{K}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\\vdots\\x_m\end{pmatrix}=\boldsymbol{0}. \tag{3.6}$$

设 $\mathrm{R}\left(\boldsymbol{K}\right)=r$，且 $\boldsymbol{K}$ 的行最简形矩阵为 $\boldsymbol{F}_{l\times m}$，由定理 2.2 知，存在可逆矩阵 $\boldsymbol{P}_{l\times l}$ 使 $\boldsymbol{PK}=\boldsymbol{F}$.

记 $\boldsymbol{x}=\left(x_1,x_2,\cdots,x_m\right)^T$，在 $\boldsymbol{Kx}=\boldsymbol{0}$ 两边左乘 $\boldsymbol{P}$，则 $\boldsymbol{Kx}=\boldsymbol{0}\Leftrightarrow\boldsymbol{Fx}=\boldsymbol{0}$. 由于 $\mathrm{R}\left(\boldsymbol{F}\right)=\mathrm{R}\left(\boldsymbol{K}\right)=r$，于是 $\boldsymbol{F}$ 可写为 $\boldsymbol{F}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{U}\\\boldsymbol{O}\end{pmatrix}_{l\times m}$，其中矩阵 $\boldsymbol{U}$ 是 $r\times m$ 的行最简形，它的 m 个列向量中含有 r 维单位坐标向量组 $\boldsymbol{\varepsilon}_1,\boldsymbol{\varepsilon}_2,\cdots,\boldsymbol{\varepsilon}_r$，不妨设

$$\boldsymbol{U}=\left(\boldsymbol{\varepsilon}_1,\boldsymbol{\varepsilon}_2,\cdots,\boldsymbol{\varepsilon}_r,\boldsymbol{\gamma}_{r+1},\cdots,\boldsymbol{\gamma}_m\right).$$

（i） 若 $\boldsymbol{\gamma}_{r+1}=\cdots=\boldsymbol{\gamma}_m=\boldsymbol{0}$，取 $\boldsymbol{x}=\left(x_1,x_2,\cdots,x_m\right)^T$ 的 m 个分量为 $x_1=\cdots=x_r=0$， $x_{r+1}=\cdots=x_m=1$，则有 $\boldsymbol{x}\ne\boldsymbol{0}$ 且 $\boldsymbol{Ux}=\boldsymbol{0}$.

（ii） 若存在 $\boldsymbol{\gamma}_j=\left(d_1,d_2,\cdots,d_r\right)^T\ne\boldsymbol{0}$，$r+1\le j\le m$，取 $\boldsymbol{x}=\left(x_1,x_2,\cdots,x_m\right)^T$ 的 m 个分量为 $x_i=d_i$， $i=1,2,\cdots,r$， $x_j=-1$，其余为 0，则有 $\boldsymbol{x}\ne\boldsymbol{0}$ 且

$$\boldsymbol{Ux}=d_1\boldsymbol{\varepsilon}_1+d_2\boldsymbol{\varepsilon}_2+\cdots+d_r\boldsymbol{\varepsilon}_r-\boldsymbol{\gamma}_j$$

$$=(d_1,d_2,\cdots,d_r)^T-(d_1,d_2,\cdots,d_r)^T=\mathbf{0}.$$

综合（i）和（ii）均有 $\boldsymbol{x}\neq\mathbf{0}$ 使 $\boldsymbol{F}\boldsymbol{x}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{U}\\ \boldsymbol{O}\end{pmatrix}\boldsymbol{x}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{U}\boldsymbol{x}\\ \boldsymbol{O}\boldsymbol{x}\end{pmatrix}=\mathbf{0}$，从而 $\boldsymbol{K}\boldsymbol{x}=\mathbf{0}$. 将此非零向量 $\boldsymbol{x}$ 代人(3.6)式，便有 $(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m)\boldsymbol{x}=(\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_l)\boldsymbol{K}\boldsymbol{x}=\mathbf{0}$，所以 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m$ 线性相关.

（2）为（1）的逆否命题，亦真.

微视频 3-3
向量组的极大无关组与向量组的秩
PPT 课件 3-3 向量组的极大无关组与向量组的秩

§ 3.3 向量组的秩

本节在向量组中引入秩的概念，并讨论向量组的秩与矩阵秩的关系，为进一步判定向量组的线性相关性提供有效的方法。

1. 向量组的极大线性无关组和秩的概念

定义3.6 如果向量组 A 中有 r 个向量 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_r$ 满足

概念解析：向量组的极大线性无关组

（1）向量组 A_0： $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_r$ 线性无关，

（2）向量组 A 中任意 $r+1$ 个向量（如果有的话）线性相关，

则称向量组 A_0 是向量组 A 的一个极大线性无关组，简称极大无关组；极大无关组所含向量的个数 r 称为向量组 A 的秩，记作 R_A.

概念解析：向量组的秩

只含零向量的向量组没有极大无关组，规定它的秩为零.

任一线性无关的向量组，它的极大无关组为其本身.

秩为 r 的向量组中任意 r 个线性无关的向量组都是它的一个极大无关组.

由性质3.3及3.5，易得到与定义3.6等价的定义.

定义3.6′ 如果向量组 A 中有 r 个向量 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_r$ 满足

（1）向量组 A_0： $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_r$ 线性无关，

（2）向量组 A 中任意一个向量均可由向量组 A_0 线性表示，

则称向量组 A_0 是向量组 A 的一个极大无关组.

显然，每个向量组都与它的极大无关组等价.

例1 求向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1=(1,-2,4)^T$， $\boldsymbol{\alpha}_2=(-1,5,1)^T$， $\boldsymbol{\alpha}_3=(0,3,5)^T$ 的极大无关组.

解 因为 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2$ 线性无关，又 $\boldsymbol{\alpha}_3=\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2$，从而 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2$ 是向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 的一个极大无关组，向量组的秩为 2 . 同理可验证 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_3$ 与 $\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 也分别是向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 的一个极大无关组.

由此可见，一个向量组的极大线性无关组未必是唯一的，但同一个向量组的不同极大无关组所含向量的个数是相同的，即为向量组的秩. 因为向量组中任意一个向量均可由极大无关组线性表示，上例说明了分别以 $\boldsymbol{\alpha}_1^T,\boldsymbol{\alpha}_2^T,\boldsymbol{\alpha}_3^T$ 的分量为系数的齐次线性方程组

$$\begin{cases} x_1-2x_2+4x_3=0 \\ -x_1+5x_2+x_3=0 \\ 3x_2+5x_3=0 \end{cases}$$

去掉多余方程后的保留方程组可取其中任意两个方程.

定理3.1 若向量组 A： $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m$ 可由向量组 B ： $\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_l$ 线性表示，则向量组 A 的秩不超过向量组 B 的秩.

证 因向量组 A 可由向量组 B 线性表示，故 A 的极大无关组可由 B 的极大无关组线性表示，由性质3.5可知结论成立.

由定理3.1知，等价的向量组具有相同的秩.

2. 向量组的秩与矩阵秩的关系

不难证明下述定理：

定理3.2 如果矩阵 $\boldsymbol{A}$ 经初等行变换化为矩阵 $\boldsymbol{B}$ ，则

（1） $\boldsymbol{A}$ 的行向量组与 $\boldsymbol{B}$ 的行向量组等价.

（2） $\boldsymbol{A}$ 的列向量组与 $\boldsymbol{B}$ 的列向量组有相同的线性相关性.

定理3.3 矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的秩等于 $\boldsymbol{A}$ 的列向量组的秩，也等于 $\boldsymbol{A}$ 的行向量组的秩.

证 设 $\boldsymbol{A}$ 为 $n\times m$ 矩阵，用初等行变换将 $\boldsymbol{A}$ 化为行最简形 $\boldsymbol{B}$ ，即

$$\boldsymbol{A}=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m)\sim\boldsymbol{B}=(\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_m).$$

不妨设 $\mathrm{R}(\boldsymbol{A})=\mathrm{R}(\boldsymbol{B})=r$ ，且

$$\boldsymbol{A}\sim\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}1 & & & & b_{1,r+1} & \cdots & b_{1m}\\ & 1 & & & b_{2,r+1} & \cdots & b_{2m}\\ & & \ddots & & \vdots & & \vdots\\ & & & 1 & b_{r,r+1} & & b_{rm}\\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0\\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots\\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0\end{pmatrix}_{n\times m},$$

由性质3.4知，$\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_r$ 线性无关.

$\boldsymbol{\beta}_{r+1},\cdots,\boldsymbol{\beta}_m$ 为矩阵 B 中后 $m-r$ 个列向量，显然可由 $\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_r$ 线性表示. 由定义3.6′知，$\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_r$ 是矩阵 B 的列向量组的一个极大无关组，从而矩阵 $\boldsymbol{B}$ 的秩 r 等于它列向量组的秩. 由定理3.2得，$\boldsymbol{A}$ 的列向量组的秩与 $\boldsymbol{B}$ 的列向量组的秩相同，即等于矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的秩.

再由 $\mathrm{R}(\boldsymbol{A})=\mathrm{R}(\boldsymbol{A}^T)$，将上述证明用在 $\boldsymbol{A}^T$ 上，可证明 $\boldsymbol{A}$ 的秩也等于 $\boldsymbol{A}$ 的行向量组的秩.

今后向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m$ 的秩也记作 $\mathrm{R}(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m)$.

设矩阵 $\boldsymbol{A}_{n\times m}$ 的列向量组为 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m$，由**定理**3.3可得如下推论.

推论3.1 (1)向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m$ 线性相关的充分必要条件为

$$\mathrm{R}(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m)=\mathrm{R}(\boldsymbol{A})<m.$$

(2) 向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m$ 线性无关的充分必要条件为

$$\mathrm{R}(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m)=\mathrm{R}(\boldsymbol{A})=m.$$

显然，当 $m>n$ 时，m 个 n 维向量线性相关. 例如，向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1=\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{\alpha}_2=\begin{pmatrix}3\\4\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{\alpha}_3=\begin{pmatrix}5\\6\end{pmatrix}$ 线性相关.

推论3.2（1）n 个 n 维向量 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n$ 线性相关的充分必要条件为行列式

$$|\boldsymbol{\alpha}_1\ \boldsymbol{\alpha}_2\cdots\boldsymbol{\alpha}_n|=|\boldsymbol{A}|=0.$$

(2) n 个 n 维向量 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n$ 线性无关的充分必要条件为行列式

$$\left|\boldsymbol{\alpha}_1\ \boldsymbol{\alpha}_2\cdots\boldsymbol{\alpha}_n\right|=|\boldsymbol{A}|\neq 0.$$

例 2 已知向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1=(1,-1,-1)^T$，$\boldsymbol{\alpha}_2=(-2,t+1,2t)^T$，$\boldsymbol{\alpha}_3=(3,2,t)^T$ 线性相关，求 t.

典型例题：含有参数的向量组相关性的讨论

解 因 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性相关，由推论3.2 得

$$\left|\boldsymbol{\alpha}_1\ \boldsymbol{\alpha}_2\ \boldsymbol{\alpha}_3\right|=\begin{vmatrix}1 & -2 & 3\\ -1 & t+1 & 2\\ -1 & 2t & t\end{vmatrix}=(t-1)(t-7)=0,$$

故 $t=1$ 或 $t=7$.

综合以上，求向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m$ 极大无关组的步骤如下：

(1) 以 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m$ 为列向量构成矩阵 $\boldsymbol{A}$，对 $\boldsymbol{A}$ 施行初等行变换化为行阶梯形矩阵 $\boldsymbol{B}$，则 $\mathrm{R}(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m)=\mathrm{R}(\boldsymbol{B})$；

(2) $\boldsymbol{B}$ 中最高阶非零子式所在的列向量组对应 $\boldsymbol{A}$ 中的列向量组即为 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m$ 的一个极大无关组.（特别，$\boldsymbol{B}$ 中每个非零行的首非零元素所在的列向量组对应 $\boldsymbol{A}$ 中的列向量组即为 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m$ 的一个极大无关组.）

例 3 求向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1=(1,-2,2,3)^T$，$\boldsymbol{\alpha}_2=(-2,4,-1,3)^T$，$\boldsymbol{\alpha}_3=(-1,2,0,3)^T$，$\boldsymbol{\alpha}_4=(0,6,2,3)^T$，$\boldsymbol{\alpha}_5=(2,-6,3,4)^T$ 的一个极大无关组，并用它们表示其余向量.

方法总结：求具体向量组的秩与极大线性无关组的方法

解 令

$$\boldsymbol{A}=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4,\boldsymbol{\alpha}_5)=\begin{pmatrix}1 & -2 & -1 & 0 & 2\\ -2 & 4 & 2 & 6 & -6\\ 2 & -1 & 0 & 2 & 3\\ 3 & 3 & 3 & 3 & 4\end{pmatrix},$$

对 $\boldsymbol{A}$ 施行初等行变换，化为行最简形矩阵

$$A \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & \frac{1}{3} & 0 & \frac{16}{9} \\ 0 & 1 & \frac{2}{3} & 0 & -\frac{1}{9} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{3} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$\mathrm{R}(\boldsymbol{A})=3$，向量组的秩为3，且$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_4$为向量组$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4,\boldsymbol{\alpha}_5$的一个极大无关组.

由

$$x_1\boldsymbol{\alpha}_1+x_2\boldsymbol{\alpha}_2+x_3\boldsymbol{\alpha}_4=\boldsymbol{\alpha}_j,\ j=3,5,$$

可得

$$\boldsymbol{\alpha}_3=\frac{1}{3}\boldsymbol{\alpha}_1+\frac{2}{3}\boldsymbol{\alpha}_2，\quad \boldsymbol{\alpha}_5=\frac{16}{9}\boldsymbol{\alpha}_1-\frac{1}{9}\boldsymbol{\alpha}_2-\frac{1}{3}\boldsymbol{\alpha}_4.$$

典型例题：抽象矩阵秩的不等式证明

例4 设$\boldsymbol{A}$，$\boldsymbol{B}$均为$m\times n$矩阵，证明$\mathrm{R}(\boldsymbol{A},\boldsymbol{B})\le \mathrm{R}(\boldsymbol{A})+\mathrm{R}(\boldsymbol{B})$.

证 若$\boldsymbol{A}$，$\boldsymbol{B}$至少有一个为零矩阵，则结论显然成立.

若$\boldsymbol{A}$，$\boldsymbol{B}$均为非零矩阵，设$\boldsymbol{A}=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n)$，$\boldsymbol{B}=(\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_n)$，且$\boldsymbol{\alpha}_1',\cdots,\boldsymbol{\alpha}_{r_1}'$为$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n$的极大无关组，$\boldsymbol{\beta}_1',\cdots,\boldsymbol{\beta}_{r_2}'$为$\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_n$的极大无关组.

显然，向量组$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n,\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_n$可由向量组$\boldsymbol{\alpha}_1',\cdots,\boldsymbol{\alpha}_{r_1}',\boldsymbol{\beta}_1',\cdots,\boldsymbol{\beta}_{r_2}'$线性表示，由**定理**3.1知

$$\begin{aligned}\mathrm{R}(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n,\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_n)&\le \mathrm{R}(\boldsymbol{\alpha}_1',\cdots,\boldsymbol{\alpha}_{r_1}',\boldsymbol{\beta}_1',\cdots,\boldsymbol{\beta}_{r_2}')\\ &\le r_1+r_2=\mathrm{R}(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n)+\mathrm{R}(\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_n).\end{aligned}$$

又据定理3.3得

$$\mathrm{R}(\boldsymbol{A},\boldsymbol{B})\le \mathrm{R}(\boldsymbol{A})+\mathrm{R}(\boldsymbol{B}).$$

微视频 3-4 向量空间
PPT 课件 3-4 向量空间

§ 3.4 向量空间

向量空间的理论起源于对线性方程组解的研究，并在解决许多数学问题中得到了有效的

应用.

1. 向量空间的概念

定义3.7 设V是n维向量组成的非空集合，且V对于向量的加法及数乘运算封闭，即对任意的$\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}\in\mathrm{V}$，$\lambda\in R$，有

$$\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\beta}\in\mathrm{V},\quad \lambda\boldsymbol{\alpha}\in\mathrm{V},$$

称集合V是向量空间.

由向量空间的定义易验证：全体n维实向量R^n构成一向量空间；只含零向量的集合也是一向量空间，称为零空间.

例1 集合$\mathrm{V}_1=\left\{(0,x)^T\,\middle|\,x\in\mathrm{R}\right\}$ 是一个向量空间, 集合$\mathrm{V}_2=\left\{(1,x)^T\,\middle|\,x\in\mathrm{R}\right\}$不是向量空间.

例2 设$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m$为$n$维向量，集合

$$\mathrm{V}=\left\{\lambda_1\boldsymbol{\alpha}_1+\lambda_2\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+\lambda_m\boldsymbol{\alpha}_m\,\middle|\,\lambda_i\in\mathrm{R},i=1,2,\cdots,m\right\}$$

是一个向量空间，这个向量空间称为由向量组$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m$所生成的向量空间.

例3 设向量组$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m$与$\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_l$等价，它们生成的向量空间分别为

$$\mathrm{V}_1=\left\{\lambda_1\boldsymbol{\alpha}_1+\lambda_2\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+\lambda_m\boldsymbol{\alpha}_m\,\middle|\,\lambda_i\in\mathrm{R},i=1,2,\cdots,m\right\},$$

及

$$\mathrm{V}_2=\left\{\mu_1\boldsymbol{\beta}_1+\mu_2\boldsymbol{\beta}_2+\cdots+\mu_l\boldsymbol{\beta}_l\,\middle|\,\mu_i\in\mathrm{R},i=1,2,\cdots,l\right\},$$

证明：$\mathrm{V}_1=\mathrm{V}_2$.

证 设$\boldsymbol{\alpha}\in\mathrm{V}_1$，则$\boldsymbol{\alpha}$可由$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m$线性表示. 因$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m$可由$\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_l$线性表示，从而$\alpha$可由$\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_l$线性表示，因此$\mathrm{V}_1\subseteq\mathrm{V}_2$.

同理可证$\mathrm{V}_2\subseteq\mathrm{V}_1$, 所以$\mathrm{V}_1=\mathrm{V}_2$.

2. 向量空间的基与维数

定义3.8 设V是向量空间，如果V中向量组$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_r$满足

（1）$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_r$线性无关，

（2）V 中任一向量都可由$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_r$线性表示，

称向量组$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_r$为$\mathrm{V}$的一组基，$r$称为$\mathrm{V}$的维数，并称$\mathrm{V}$为$r$维向量空间.

只含零向量的向量空间没有基，它的维数为零.

若将向量空间V看作向量组，V的基就是它的极大线性无关组，V的维数就是它的秩.

R^n的一组基可取为n维单位坐标向量组，它的维数为n.

向量空间$\mathrm{V}=\left\{(0,x)^T \,\middle|\, x\in\mathrm{R}\right\}$的一个基为$(0,1)^T$，它的维数为 1.

定理3.4　设向量组$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_r$是向量空间$\mathrm{V}$的一组基，若记

$$\mathrm{L}=\left\{\lambda_1\boldsymbol{\alpha}_1+\lambda_2\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+\lambda_r\boldsymbol{\alpha}_r \,\middle|\, \lambda_i\in\mathrm{R}, i=1,2,\cdots,r\right\},$$

则$\mathrm{V}=\mathrm{L}$.

证　对任意$\boldsymbol{\alpha}=\lambda_1\boldsymbol{\alpha}_1+\lambda_2\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+\lambda_r\boldsymbol{\alpha}_r\in\mathrm{L}$，由向量空间$\mathrm{V}$对向量的加法及数乘运算的封闭性，得$\boldsymbol{\alpha}\in\mathrm{V}$，所以$\mathrm{L}\subseteq\mathrm{V}$.

又对任意$\boldsymbol{\beta}\in\mathrm{V}$，因$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_r$是$\mathrm{V}$的基，故存在数$k_i\in\mathrm{R}, i=1,2,\cdots,r$，使

$\boldsymbol{\beta}=k_1\boldsymbol{\alpha}_1+k_2\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+k_r\boldsymbol{\alpha}_r$，从而$\boldsymbol{\beta}\in\mathrm{L}$，$\mathrm{V}\subseteq\mathrm{L}$，因此$\mathrm{V}=\mathrm{L}$.

定理3.4说明了任一向量空间都可看作是由它的基所生成的向量空间，这就较清楚地显示出向量空间的结构.

3.　基变换与坐标变换

定义3.9　设$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_r$是向量空间$\mathrm{V}$的一组基，$\mathrm{V}$中任一向量$\boldsymbol{\alpha}$可唯一地表示为

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\alpha}&=x_1\boldsymbol{\alpha}_1+x_2\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+x_r\boldsymbol{\alpha}_r\\&=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_r)\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\\vdots\\x_r\end{pmatrix},\end{aligned}$$

称$(x_1，x_2,\cdots，x_r)^T$为向量$\boldsymbol{\alpha}$在基$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_r$下的坐标向量，简称坐标.

例4　设$\boldsymbol{\alpha}_1=\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{\alpha}_2=\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{\alpha}_3=\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}$，

（1）证明$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$是向量空间$\mathrm{R}^3$的基；

（2）求向量$\boldsymbol{\alpha}=(1,-1,0)^T$在基$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$下的坐标.

证 （1）因

$$|\boldsymbol{A}|=|\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3|=\begin{vmatrix}0&1&1\\1&0&1\\1&1&0\end{vmatrix}=2\neq 0,$$

所以$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$线性无关．又$\mathrm{R}^3$的维数为3，故$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$是$\mathrm{R}^3$的基.

（2）由$\boldsymbol{\alpha}=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3)\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}$，即$\begin{pmatrix}0&1&1\\1&0&1\\1&1&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix}$, 故

$$\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&1&1\\1&0&1\\1&1&0\end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix},$$

所以$\boldsymbol{\alpha}$在基$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$下的坐标是$(-1,1,0)^T$． 三维单位坐标向量组$\boldsymbol{\varepsilon}_1,\boldsymbol{\varepsilon}_2,\boldsymbol{\varepsilon}_3$为$\mathrm{R}^3$的基，$\boldsymbol{\alpha}$在基$\boldsymbol{\varepsilon}_1,\boldsymbol{\varepsilon}_2,\boldsymbol{\varepsilon}_3$下的坐标为$(1,-1,0)^T$, 可见向量在不同基下有不同的坐标, 以下讨论向量空间中两组基之间的关系以及向量在两组基下的坐标之间的关系.

定义3.10 设$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_r$和$\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_r$是$r$维向量空间V的两组基, 且

$$\begin{cases}\boldsymbol{\beta}_1=c_{11}\boldsymbol{\alpha}_1+c_{21}\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+c_{r1}\boldsymbol{\alpha}_r\\\boldsymbol{\beta}_2=c_{12}\boldsymbol{\alpha}_1+c_{22}\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+c_{r2}\boldsymbol{\alpha}_r\\\qquad\cdots\cdots\\\boldsymbol{\beta}_r=c_{1r}\boldsymbol{\alpha}_1+c_{2r}\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+c_{rr}\boldsymbol{\alpha}_r\end{cases},$$

即

$$(\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_r)=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_r)\begin{pmatrix}c_{11}&c_{12}&\cdots&c_{1r}\\c_{21}&c_{22}&\cdots&c_{2r}\\\vdots&\vdots&&\vdots\\c_{r1}&c_{r2}&\cdots&c_{rr}\end{pmatrix},\tag{3.7}$$

称(3.7)式为基变换公式, 称矩阵$\boldsymbol{C}=(c_{ij})_{r\times r}$是从基$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_r$到基$\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_r$的过渡矩阵.

易证过渡矩阵$\boldsymbol{C}$是可逆矩阵.

定理3.5 设向量空间V中向量$\boldsymbol{\alpha}$在基$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_r$及$\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_r$下的坐标分别为$(x_1,\ x_2,\cdots,\ x_r)^T$与$(y_1,\ y_2,\cdots,\ y_r)^T$，且两组基满足$(3.7)$式，则有坐标变换公式

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_r \end{pmatrix} = \boldsymbol{C}^{-1} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_r \end{pmatrix}. \tag{3.8}$$

证 由

$$\boldsymbol{\alpha} = (\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_r)\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_r \end{pmatrix} = (\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_r)\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_r \end{pmatrix}$$

$$= (\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_r)\boldsymbol{C}\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_r \end{pmatrix},$$

因$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_r$线性无关且表示法唯一，于是$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_r \end{pmatrix} = \boldsymbol{C}\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_r \end{pmatrix}$，再由矩阵$\boldsymbol{C}$可逆，即证$(3.8)$式.

例5 已知R^3的两组基为

$$\boldsymbol{\alpha}_1 = (1,1,1)^T, \boldsymbol{\alpha}_2 = (0,1,1)^T, \boldsymbol{\alpha}_3 = (0,0,1)^T,$$

和

$$\boldsymbol{\beta}_1 = (1,0,1)^T, \boldsymbol{\beta}_2 = (0,1,-1)^T, \boldsymbol{\beta}_3 = (1,2,0)^T.$$

（1）求从基$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$到基$\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3$的过渡矩阵$\boldsymbol{C}$；

（2）求向量$\boldsymbol{\alpha} = \boldsymbol{\alpha}_1 - 2\boldsymbol{\alpha}_2 - \boldsymbol{\alpha}_3$在基$\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3$下的坐标.

解（1）由$(\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3) = (\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3)\boldsymbol{C}$，即

$$\begin{pmatrix}1&0&1\\0&1&2\\1&-1&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0&0\\1&1&0\\1&1&1\end{pmatrix}\boldsymbol{C},$$

所以

$$\boldsymbol{C}=\begin{pmatrix}1&0&0\\1&1&0\\1&1&1\end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix}1&0&1\\0&1&2\\1&-1&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0&1\\-1&1&1\\1&-2&-2\end{pmatrix}.$$

（2）向量$\boldsymbol{\alpha}$在基$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$下的坐标为$(1,-2,-1)^T$，由$(3.8)$式得，$\boldsymbol{\alpha}$在基$\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3$下的坐标为

$$\begin{pmatrix}y_1\\y_2\\y_3\end{pmatrix}=\boldsymbol{C}^{-1}\begin{pmatrix}1\\-2\\-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0&1\\-1&1&1\\1&-2&-2\end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix}1\\-2\\-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}5\\7\\-4\end{pmatrix}.$$

微视频 3-5 标准正交向量组
PPT 课件 3-5 标准正交向量组

§ 3.5 标准正交向量组

在三维向量几何中，内积描述了向量的度量性质，如长度，夹角等，这一节将三维向量的内积概念推广到n维向量上.

1. 内积

定义3.11 设有n维向量$\boldsymbol{\alpha}=(a_1,a_2,\cdots,a_n)^T$，$\boldsymbol{\beta}=(b_1,b_2,\cdots,b_n)^T$，称

$$[\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}]=a_1b_1+a_2b_2+\cdots+a_nb_n$$

为向量$\boldsymbol{\alpha}$与$\boldsymbol{\beta}$的内积.

内积是向量之间的一种运算，其结果是一个实数，用矩阵运算可表示为$[\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}]=\boldsymbol{\alpha}^T\boldsymbol{\beta}=\boldsymbol{\beta}^T\boldsymbol{\alpha}$.

内积具有下列性质（其中$\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\gamma}$为$n$维向量，$\lambda$为实数）：

（1）$[\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}]=[\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\alpha}]$；

（2）$[\lambda\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}]=\lambda[\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}]$；

（3）$\left[\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\gamma}\right]=\left[\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\gamma}\right]+\left[\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\gamma}\right]$；

（4）$\left[\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\alpha}\right]\geq 0$，其中等号成立的充分必要条件为$\boldsymbol{\alpha}=\mathbf{0}$.

利用以上性质，还可证明$Cauchy-Schwarz$ 不等式：

（5）$\left[\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}\right]^2\leq\left[\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\alpha}\right]\left[\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\beta}\right]$.

同三维向量一样，可用内积定义n维向量的长度.

定义3.12 设$\boldsymbol{\alpha}=\left(a_1,a_2,\cdots,a_n\right)^T$，称

$$\|\boldsymbol{\alpha}\|=\sqrt{\left[\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\alpha}\right]}=\sqrt{a_1^2+a_2^2+\cdots+a_n^2}$$

为向量$\boldsymbol{\alpha}$的长度；当$\|\boldsymbol{\alpha}\|=1$时，称$\boldsymbol{\alpha}$为单位向量.

由$Cauchy-Schwarz$ 不等式可得

$$\left|\frac{\left[\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}\right]}{\|\boldsymbol{\alpha}\|\|\boldsymbol{\beta}\|}\right|\leq 1\left(\|\boldsymbol{\alpha}\|\|\boldsymbol{\beta}\|\neq 0\right),$$

利用上述关系定义向量的夹角.

定义3.13 当$\boldsymbol{\alpha}\neq\mathbf{0}$，$\boldsymbol{\beta}\neq\mathbf{0}$时，称

$$\theta=\arccos\frac{\left[\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}\right]}{\|\boldsymbol{\alpha}\|\|\boldsymbol{\beta}\|}$$

为向量$\boldsymbol{\alpha}$与$\boldsymbol{\beta}$的夹角.

例1 设$\boldsymbol{\alpha}=\left(1,-2,1\right)^T$，$\boldsymbol{\beta}=\left(0,1,1\right)^T$，求：

（1）$\left[\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\alpha}-\boldsymbol{\beta}\right]$；（2）$\|3\boldsymbol{\alpha}+2\boldsymbol{\beta}\|$；（3）$3\boldsymbol{\alpha}$与$2\boldsymbol{\beta}$的夹角$\theta$.

解（1）$\left[\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\alpha}-\boldsymbol{\beta}\right]=\left[\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\alpha}\right]-\left[\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}\right]+\left[\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\alpha}\right]-\left[\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\beta}\right]=\left[\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\alpha}\right]-\left[\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\beta}\right]$

$$=\left[1^2+\left(-2\right)^2+1^2\right]-\left(0^2+1^2+1^2\right)=4.$$

（2）因$3\boldsymbol{\alpha}+2\boldsymbol{\beta}=\left(3,-4,5\right)^T$，故$\|3\boldsymbol{\alpha}+2\boldsymbol{\beta}\|=\sqrt{3^2+\left(-4\right)^2+5^2}=5\sqrt{2}$.

（3）因$3\boldsymbol{\alpha}=\left(3,-6,3\right)^T$，$2\boldsymbol{\beta}=\left(0,2,2\right)^T$，所以

$$\theta=\arccos\frac{\left[3\boldsymbol{\alpha},2\boldsymbol{\beta}\right]}{\|3\boldsymbol{\alpha}\|\|2\boldsymbol{\beta}\|}$$

$$=\arccos\frac{3\times0+(-6)\times2+3\times2}{\sqrt{3^2+(-6)^2+3^2}\sqrt{0^2+2^2+2^2}}=\arccos\left(-\frac{1}{\sqrt{12}}\right).$$

2. 正交向量组

定义3.14 若$[\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}]=0$，称向量$\boldsymbol{\alpha}$与$\boldsymbol{\beta}$正交；两两正交的非零向量构成的向量组称为正交向量组.

下面讨论正交向量组的性质.

定理3.6 若n维向量$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m$是正交向量组，则$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m$线性无关.

证 设有$x_1,x_2,\cdots,x_m$使

$$x_1\boldsymbol{\alpha}_1+x_2\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+x_m\boldsymbol{\alpha}_m=\mathbf{0},$$

分别用$\boldsymbol{\alpha}_i\left(i=1,2,\cdots,m\right)$与上式两端作内积，得$x_i\left[\boldsymbol{\alpha}_i,\boldsymbol{\alpha}_i\right]=0$. 因$\boldsymbol{\alpha}_i\neq\mathbf{0}$，从而$x_i=0$ $\left(i=1,2,\cdots,m\right)$，所以$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m$线性无关.

3. 格拉姆-施密特（Gram-Schmidt）正交单位化

定义3.15 设n维向量$\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2,\cdots,\boldsymbol{e}_n$是向量空间$\mathrm{R}^n$的一组基，若它们两两正交且都是单位向量，则称$\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2,\cdots,\boldsymbol{e}_n$为$\mathrm{R}^n$的一组标准正交基.

例如，$\boldsymbol{e}_1=\begin{pmatrix}\cos\theta\\-\sin\theta\end{pmatrix},\boldsymbol{e}_2=\begin{pmatrix}\sin\theta\\\cos\theta\end{pmatrix}$是$\mathrm{R}^2$中的标准正交基.

若$\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2,\cdots,\boldsymbol{e}_n$是向量空间$\mathrm{R}^n$的标准正交基，则$\mathrm{R}^n$中任一向量$\boldsymbol{\alpha}$在上述基下有

$$\boldsymbol{\alpha}=[\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{e}_1]\boldsymbol{e}_1+[\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{e}_2]\boldsymbol{e}_2+\cdots+[\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{e}_n]\boldsymbol{e}_n.$$

所以在向量空间中，常常采用标准正交基，它可以使问题得到简化. 为求得标准正交基，首先介绍将R^n中一个线性无关的向量组$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_r$化为标准正交向量组的Gram－Schmidt正交单位化方法（简称正交单位化方法），其具体步骤如下：

取 $\boldsymbol{\beta}_1=\boldsymbol{\alpha}_1$；

$$\boldsymbol{\beta}_2=\boldsymbol{\alpha}_2-\frac{[\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\alpha}_2]}{[\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_1]}\boldsymbol{\beta}_1;$$

……

$$\boldsymbol{\beta}_r=\boldsymbol{\alpha}_r-\frac{[\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\alpha}_r]}{[\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_1]}\boldsymbol{\beta}_1-\frac{[\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\alpha}_r]}{[\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_2]}\boldsymbol{\beta}_2-\cdots-\frac{[\boldsymbol{\beta}_{r-1},\boldsymbol{\alpha}_r]}{[\boldsymbol{\beta}_{r-1},\boldsymbol{\beta}_{r-1}]}\boldsymbol{\beta}_{r-1}.$$

容易验证$\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_r$两两正交，且与$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_r$等价.

再将$\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_r$单位化, 令

$$\boldsymbol{e}_1=\frac{\boldsymbol{\beta}_1}{\|\boldsymbol{\beta}_1\|},\boldsymbol{e}_2=\frac{\boldsymbol{\beta}_2}{\|\boldsymbol{\beta}_2\|},\cdots,\boldsymbol{e}_r=\frac{\boldsymbol{\beta}_r}{\|\boldsymbol{\beta}_r\|},$$

则$\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2,\cdots,\boldsymbol{e}_r$为标准正交向量组.

当$r=n$时，$\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2,\cdots,\boldsymbol{e}_n$为$\mathrm{R}^n$中标准正交基.

例2 用格拉姆−施密特正交单位化方法，将$\boldsymbol{\alpha}_1=\begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{\alpha}_2=\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{\alpha}_3=\begin{pmatrix}1\\-1\\1\end{pmatrix}$正交单位化.

解 取 $\boldsymbol{\beta}_1=\boldsymbol{\alpha}_1=\begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix}$；

$$\boldsymbol{\beta}_2=\boldsymbol{\alpha}_2-\frac{[\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\alpha}_2]}{[\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_1]}\boldsymbol{\beta}_1=\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}-\frac{1}{2}\begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{1}{2}\\\frac{1}{2}\\1\end{pmatrix};$$

$$\boldsymbol{\beta}_3=\boldsymbol{\alpha}_3-\frac{[\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\alpha}_3]}{[\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_1]}\boldsymbol{\beta}_1-\frac{[\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\alpha}_3]}{[\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_2]}\boldsymbol{\beta}_2=\begin{pmatrix}1\\-1\\1\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix}-\frac{2}{3}\begin{pmatrix}\frac{1}{2}\\\frac{1}{2}\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-\frac{1}{3}\\-\frac{1}{3}\\\frac{1}{3}\end{pmatrix}.$$

再将$\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3$单位化, 得

$$e_1=\frac{\beta_1}{\|\beta_1\|}=\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}}\\-\frac{1}{\sqrt{2}}\\0\end{pmatrix},e_2=\frac{\beta_2}{\|\beta_2\|}=\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{6}}\\\frac{1}{\sqrt{6}}\\\frac{2}{\sqrt{6}}\end{pmatrix},e_3=\frac{\beta_3}{\|\beta_3\|}=\begin{pmatrix}-\frac{1}{\sqrt{3}}\\-\frac{1}{\sqrt{3}}\\\frac{1}{\sqrt{3}}\end{pmatrix}.$$

$\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2,\boldsymbol{e}_3$ 即为所求.

4. 正交矩阵

定义3.16 如果n阶方阵$\boldsymbol{A}$满足$\boldsymbol{A}^T\boldsymbol{A}=\boldsymbol{E}$，则称$\boldsymbol{A}$为正交矩阵.

将矩阵$\boldsymbol{A}$按列分块$\boldsymbol{A}=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n)$，则$\boldsymbol{A}^T\boldsymbol{A}=\boldsymbol{E}$可表示为

$$\begin{pmatrix}\boldsymbol{\alpha}_1^T\\\boldsymbol{\alpha}_2^T\\\vdots\\\boldsymbol{\alpha}_n^T\end{pmatrix}(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n)=\boldsymbol{E},$$

亦即

$$\boldsymbol{\alpha}_i^T\boldsymbol{\alpha}_j=[\boldsymbol{\alpha}_i,\boldsymbol{\alpha}_j]=\begin{cases}1,i=j,\\0,i\neq j,\end{cases}i,j=1,2,\cdots,n.$$

这说明：方阵$\boldsymbol{A}$是正交矩阵的充分必要条件为$\boldsymbol{A}$的列向量都是单位向量，且两两正交．又由$\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^T=\boldsymbol{E}$，知上述结论对$\boldsymbol{A}$的行向量组也成立.

例如，矩阵$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{3}}&-\frac{1}{\sqrt{2}}&\frac{1}{\sqrt{6}}\\-\frac{1}{\sqrt{3}}&0&\frac{2}{\sqrt{6}}\\\frac{1}{\sqrt{3}}&\frac{1}{\sqrt{2}}&\frac{1}{\sqrt{6}}\end{pmatrix}$的每个列向量都是单位向量且两两正交，所以$\boldsymbol{A}$是正交矩阵.

由正交矩阵的定义，易得下列结论：

（1）若$\boldsymbol{A}$是正交矩阵，则$\boldsymbol{A}^{-1}=\boldsymbol{A}^T$；

（2）若$\boldsymbol{A}$是正交矩阵，则$|\boldsymbol{A}|^2=1$；

（3）若$\boldsymbol{A}$，$\boldsymbol{B}$是n阶正交矩阵，则$\boldsymbol{AB}$也是正交矩阵.

定义 3.17 若 $\boldsymbol{P}$ 是正交矩阵，则称线性变换 $\boldsymbol{y}=\boldsymbol{P}\boldsymbol{x}$ 为正交变换.

设 $\boldsymbol{y}=\boldsymbol{P}\boldsymbol{x}$ 为正交变换，则有

$$\|\boldsymbol{y}\|=\sqrt{\boldsymbol{y}^T\boldsymbol{y}}=\sqrt{\boldsymbol{x}^T\boldsymbol{P}^T\boldsymbol{P}\boldsymbol{x}}=\sqrt{\boldsymbol{x}^T\boldsymbol{x}}=\|\boldsymbol{x}\|,$$

这表明经正交变换向量的长度保持不变，这是正交变换的优良特性之一.

§3.6 应用实例

1. 建筑住房设置

例1 一幢大的公寓建筑使用模块建筑技术，每层楼的建筑设计由3种设计中选择. A 设计每层有18个公寓，包括3个三室单元，7个两室单元和8个一室单元；B 设计每层有4个三室单元，4个两室单元和8个一室单元；C 设计每层有5个三室单元，3个两室单元和9个一室单元. 设该建筑有 x_1 层采取 A 设计，x_2 层采取 B 设计，x_3 层采取 C 设计.

（1）向量 $x_1\begin{pmatrix}3\\7\\8\end{pmatrix}$ 的实际意义是什么？

（2）用向量的线性组合表示该建筑所包括的三室、两室和一室单元的总数.

（3）是否可能设计该建筑物，使恰有66个三室单元、74个两室单元和136个一室单元；若可能的话，是否有多种方法？

解 （1）向量 $x_1\begin{pmatrix}3\\7\\8\end{pmatrix}$ 表示该建筑有 x_1 层 A 设计，具体意义为 A 设计中的三室单元有 $3x_1$ 间，两室单元有 $7x_1$ 间，一室单元有 $8x_1$ 间.

（2）设该建筑包含的三室、两室和一室单元的总数分别为 y_1, y_2, y_3，则有

$$\begin{pmatrix}y_1\\y_2\\y_3\end{pmatrix}=x_1\begin{pmatrix}3\\7\\8\end{pmatrix}+x_2\begin{pmatrix}4\\4\\8\end{pmatrix}+x_3\begin{pmatrix}5\\3\\9\end{pmatrix}.$$

（3）由（2）得

$$\begin{pmatrix}66\\74\\136\end{pmatrix}=x_1\begin{pmatrix}3\\7\\8\end{pmatrix}+x_2\begin{pmatrix}4\\4\\8\end{pmatrix}+x_3\begin{pmatrix}5\\3\\9\end{pmatrix}$$

即

$$\begin{cases}3x_1+4x_2+5x_3=66\\7x_1+4x_2+3x_3=74\\8x_1+8x_2+9x_3=136\end{cases},$$

由 $4x_2+3x_3=74-7x_1>0$，分别令 $x_1=0,1,2,\cdots,10$，求得方程组有唯一解

$$x_1=6,\ x_2=2,\ x_3=8,$$

即可采用6层 A 设计，2层 B 设计，8层 C 设计.

2. 配料问题

例2 某调料有限公司用7种成分来制造多种调味品，下表列出了6种调味品 A、B、C、D、F、E 每包所需各种成分的质量（以克为单位）.

成分	A	B	C	D	E	F
辣椒	60	15	45	75	90	90
姜黄	40	40	0	80	10	120
胡椒	20	20	0	40	20	60
大蒜	20	20	0	40	10	60
盐	10	10	0	20	20	30
味精	5	5	0	20	10	15
香油	10	10	0	20	20	30

一位顾客不需要购买全部6种调味品，他可以只购买其中的一部分并用它们配制出其余几种调味品. 为了能配制出其余几种调味品，这位顾客最少需要购买几个种类的调味品？并写出所需最少的调味品的集合.

解 若分别记6种调味品各自的成分的列向量为 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_6$，则本题就是要求出 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_6$ 的极大无关组. 记矩阵 $\boldsymbol{M}=\left(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_6\right)$，用初等行变换将 $\boldsymbol{M}$ 化为行最简形，得

$$
\boldsymbol{M}=\begin{pmatrix}60&15&45&75&90&90\\40&40&0&80&10&120\\20&20&0&40&20&60\\20&20&0&40&10&60\\10&10&0&20&20&30\\5&5&0&20&10&15\\10&10&0&20&20&30\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1&0&1&0&0&1\\0&1&-1&0&0&2\\0&0&0&1&0&0\\0&0&0&0&1&0\\0&0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0&0\end{pmatrix},
$$

极大无关组有 6 个：$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_4,\boldsymbol{\alpha}_5$； $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4,\boldsymbol{\alpha}_5$；$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_4,\boldsymbol{\alpha}_5,\boldsymbol{\alpha}_6$；$\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4,\boldsymbol{\alpha}_5$；$\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_4,\boldsymbol{\alpha}_5,\boldsymbol{\alpha}_6$；$\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4,\boldsymbol{\alpha}_5,\boldsymbol{\alpha}_6$. 由问题的实际意义，只有当其余两个向量由该极大无关组线性表示的系数均非负时，才切实可行.

取$\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4,\boldsymbol{\alpha}_5$为极大无关组时，有

$$
\boldsymbol{\alpha}_1=\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_3,\quad \boldsymbol{\alpha}_6=3\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_3,
$$

故可以选B、C、D、E四种调味品作为最少调味品的集合.

3. 读书问题

例3 设有$n+1$个人及供他们读的n种书，假定每人都读了一些书，证明：这$n+1$个人中必可找到甲、乙两组人，甲组人读过的书与乙组人读过的书种类相同（即甲组人中每人读过的书合在一起，其种类与乙组人每人读过的书合在一起的种类相同）.

证 把n种书编号，$n+1$个人也编号，并设第i人读过的书记为

$$
\boldsymbol{\alpha}_i=\left(a_{i1},a_{i2},\cdots,a_{in}\right)^T,\quad i=1,2,\cdots,n+1,
$$

其中$a_{ij}=0$或1（即读过的书记为1，没读过的书记为0）. 那么$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_{n+1}$必线性相关，即存在一组不全为零的数$k_1,k_2,\cdots,k_{n+1}$，使得

$$
k_1\boldsymbol{\alpha}_1+k_2\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+k_{n+1}\boldsymbol{\alpha}_{n+1}=\mathbf{0}. \tag{3.9}
$$

由于$\boldsymbol{\alpha}_i$的分量非负，所以k_i不能全为正，也不可能全为负，从而必有正、有负. 去掉那些等于0的k_i，并把所有负的k_i移到等式(3.9)的右边，则有

$$
k_{i_1}\boldsymbol{\alpha}_{i_1}+\cdots+k_{i_s}\boldsymbol{\alpha}_{i_s}=l_{j_1}\boldsymbol{\alpha}_{j_1}+\cdots+l_{i_t}\boldsymbol{\alpha}_{jt}\overset{\Delta}{=}\boldsymbol{\beta}, \tag{3.10}
$$

其中k_{i_r}，$l_{j_u}>0$.

这时将第i_1人，第i_2人，…，第i_s人称为甲组，第j_1人，…，第j_t人称为乙组，设$\boldsymbol{\beta}=(b_1,b_2,\cdots,b_n)^T$，由$(3.10)$式知，当$b_i>0$时，那么甲、乙两组人都读过第$i$种书，当$b_i=0$时，都没读过第$i$种书，故这两组人读过的书种类一定相同.

§3.7　用 Matlab 求向量组的极大无关组

例 求向量组$\boldsymbol{\alpha}_1=\begin{pmatrix}1\\1\\1\\3\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{\alpha}_2=\begin{pmatrix}-1\\-3\\5\\1\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{\alpha}_3=\begin{pmatrix}3\\2\\-1\\4\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{\alpha}_4=\begin{pmatrix}-2\\-6\\10\\2\end{pmatrix}$的一个极大无关组，并把其余向量用极大无关组表示出来.

解：这里需要掌握简化矩阵为行阶梯形矩阵的 rref 命令. 实验过程如下：

```
>> A =[1 -1 3 -2;1 -3 2 -6;1 5 -1 10;3 1 4 2];
>> B =rref(A)

B  =

     1     0     0     0
     0     1     0     2
     0     0     1     0
     0     0     0     0
```

由上可知，$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$是它的一个极大无关组，且$\boldsymbol{\alpha}_4=2\boldsymbol{\alpha}_2$.

背景资料　--------　向量

向量空间的几何背景是通常解析几何里的平面R^2和空间R^3. 在这里，一个向量是一个有方向的线段，由长度和方向同时表征. 这样向量可以用来表示某些物理量，比如力，它可以做加法也可以和标量做乘法. 这就是实数向量空间的第一个例子. 向量空间是线性代数的重要内容，直到 18 世纪末，它研究领域还只限于平面与空间. 19 世纪上半叶才完成了到n维向量空间的过渡. 现代向量空间的定义是由意大利数学家皮亚诺(Peano, Giuseppe, 1858 — 1932) 于 1888 年提出的. 德国数学家托普利茨(Toplitz, Otto, 1881—1940)将线性代数的主要定理推广到任意体上的最一般的向量空间

中．作为证明定理而使用的纯抽象概念，向量空间（线性空间）属于抽象代数的一部分，而且已经非常好地融入了这个领域（一些显著的例子有：不可逆线性映射或矩阵的群，向量空间的线性映射的环．线性代数也在数学分析中扮演着重要角色，特别在向量分析中描述高阶导数，研究张量积和可交换映射等领域）．

数学家试图研究向量代数，但在任意维数中并没有两个向量乘积的自然定义．第一个涉及一个不可交换向量积（既 V×W 不等于 W×V）的向量代数是由德国数学家格拉斯曼(Grassmann,Hermann,1809—1877)在他的《线性扩张论》一书中提出的（1844），从而产生了现在称为多项式环的结构．这些成就对后来的数学发展有重大影响，然而却超出了当时数学家们的接受能力，直到他逝世前后才受到重视，并得到应用．1854 年，法国数学家埃尔米特（C.Hermite,1822—1901）使用了“正交矩阵”这一术语，但它的正式定义直到 1878 年才由德国数学家费罗贝尼乌斯(F.G.Frobenius,1849—1917)发表．1879 年，费罗贝尼乌斯引入了矩阵的秩的概念．

在 19 世纪末美国数学物理学家吉伯斯(Willard Gibbs,1839—1903)发表了关于《向量分析基础》的著名论述．其后英国数学物理学家狄拉克(P.A.M.Dirac,1902—1984)提出了行向量和列向量的乘积为标量．我们习惯的列矩阵和向量都是在 20 世纪由物理学家给出的．

自测题三

习题三

习题三解

一、选择题

综合与提高题

1．向量组$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m$线性无关的充分必要条件是（ ）．

(A) $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m$都不是零向量

(B) $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m$中任意两个向量都线性无关

(C) $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m$中任意$m-1$个向量都线性无关

(D) $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m$中任一向量都不能由其余向量线性表示.

2．设$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m$均为$n$维向量，则下面结论正确的是（ ）．

(A) 若$k_1\boldsymbol{\alpha}_1+k_2\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+k_m\boldsymbol{\alpha}_m=\mathbf{0}$，则$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m$线性相关

(B) 若对任意一组不全为零的数k_1，k_2，$\cdots$，k_m都有$k_1\boldsymbol{\alpha}_1+k_2\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+k_m\boldsymbol{\alpha}_m\neq\mathbf{0}$，则

$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m$ 线性无关

(C) 若 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m$ 线性相关，则对任意一组不全为零的数 $k_1, k_2, \cdots, k_m$ 都有 $k_1\boldsymbol{\alpha}_1+k_2\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+k_m\boldsymbol{\alpha}_m=\mathbf{0}$

(D) 因 $0\boldsymbol{\alpha}_1+0\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+0\boldsymbol{\alpha}_m=\mathbf{0}$，故 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m$ 线性无关.

3．设 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4$ 是三维列向量，则（ ）.

(A) $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4$ 必线性无关　　(B) $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4$ 必线性相关

(C) $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 必线性无关　　(D) $\boldsymbol{\alpha}_1$ 必可由 $\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4$ 线性表示.

4 . 设向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性无关，则下列向量组中线性无关的是（ ）.

(A) $\boldsymbol{\alpha}_1-\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_2-\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_3-\boldsymbol{\alpha}_1$　　(B) $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_3$

(C) $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,2\boldsymbol{\alpha}_1-\boldsymbol{\alpha}_2$　　(D) $\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,2\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_3$.

5．设向量组 $\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\gamma}$ 线性无关，$\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\delta}$ 线性相关，则（ ）.

(A) $\boldsymbol{\alpha}$ 必可由 $\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\gamma},\boldsymbol{\delta}$ 线性表示　　(B) $\boldsymbol{\beta}$ 必不可由 $\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\gamma},\boldsymbol{\delta}$ 线性表示

(C) $\boldsymbol{\delta}$ 必可由 $\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\gamma}$ 线性表示　　(D) $\boldsymbol{\delta}$ 必不可由 $\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\gamma}$ 线性表示.

6．设 $\boldsymbol{A}$ 为 n 阶方阵，且 $|\boldsymbol{A}|=0$，则（ ）.

(A) $\boldsymbol{A}$ 中必有两行（列）元素对应成比例

(B) $\boldsymbol{A}$ 中任一行（列）向量是其余行（列）向量的线性组合

(C) $\boldsymbol{A}$ 中有一行（列）向量是其余行（列）向量的线性组合

(D) $\boldsymbol{A}$ 中至少有一行（列）的元素全为零.

7．如果矩阵 $\boldsymbol{A}$ 与 B 等价，则以下错误的是（ ）.

(A) $\boldsymbol{A}$ 与 B 的行向量组等价

(B) $\boldsymbol{A}$ 与 B 的行向量组的秩相等价

(C) $\boldsymbol{A}$ 与 B 有相同的标准形

(D)　$\boldsymbol{A}$ 与 B 有相同的秩.

8．已知 3×4 矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的行向量组线性无关，则 $\boldsymbol{A}^T$ 的秩等于（ ）.

(A) 1　　(B) 2　　(C) 3　　(D) 4.

9． 向量组 $\alpha_1=(1,1,0,0)^T$，$\alpha_2=(0,0,1,1)^T$，$\alpha_3=(1,0,1,0)^T$，$\alpha_4=(1,1,1,1)^T$ 的极大线性无关组为（ ）

(A) $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2$　　(B) $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$　　(C) $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_4$　　(D) $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4$.

二、填空题

1． 设向量 $\boldsymbol{\alpha}=(3,-1,0,2)^T$，$\boldsymbol{\beta}=(3,1,-1,4)^T$，若向量 $\boldsymbol{\gamma}$ 满足 $2\boldsymbol{\alpha}+2\boldsymbol{\gamma}=\boldsymbol{\beta}$，则 $\gamma=$______.

2． 设 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4$ 均为3维列向量，方阵 $\boldsymbol{A}=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3)$，$\boldsymbol{B}=(\boldsymbol{\alpha}_4,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3)$，且 $|\boldsymbol{A}|=-2,|\boldsymbol{B}|=3$，则 $|\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}|=$______.

3．设 $\boldsymbol{\alpha}_1=(1,1,1)^T$，$\boldsymbol{\alpha}_2=(a,0,b)^T$，$\boldsymbol{\alpha}_3=(1,2,3)^T$ 线性相关，则 a 与 b 应满足的关系式为______.

4．设向量 $\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}$ 的长度分别为2和3，则向量 $\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\beta}$ 与 $\boldsymbol{\alpha}-\boldsymbol{\beta}$ 的内积为______.

5.设 $\boldsymbol{\alpha}+2\boldsymbol{\beta}=(2,1,t,-1)^T$，$2\boldsymbol{\alpha}-\boldsymbol{\beta}=(-1,2,0,1)^T$，且 $\boldsymbol{\alpha}$ 与 $\boldsymbol{\beta}$ 正交，则 $t=$______.

6．已知 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} a & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & b & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ 是正交矩阵，则 $a+b=$______.

7．R^4 中向量 $\boldsymbol{\alpha}=(0,0,0,1)^T$ 在基 $\boldsymbol{\alpha}_1=(1,1,0,1)^T$，$\boldsymbol{\alpha}_2=(2,1,3,1)^T$，$\boldsymbol{\alpha}_3=(1,1,0,0)^T$，$\boldsymbol{\alpha}_4=(0,1,-1,-1)^T$ 下的坐标为______.

三、计算证明题

1．设 $\boldsymbol{\beta}_1=\boldsymbol{\alpha}_1$，$\boldsymbol{\beta}_2=\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2$，⋯，$\boldsymbol{\beta}_r=\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+\boldsymbol{\alpha}_r$，且向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_r$ 线性无关，证明向量组 $\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_r$ 线性无关.

2．设 $\boldsymbol{A}$ 是 n 阶方阵，$\boldsymbol{\alpha}$ 是 n 维列向量，k 为正整数，且 $\boldsymbol{A}^{k-1}\boldsymbol{\alpha}\neq\boldsymbol{0}$，$\boldsymbol{A}^{k}\boldsymbol{\alpha}=\boldsymbol{0}$，证明 $\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{A}\boldsymbol{\alpha},\cdots,\boldsymbol{A}^{k-1}\boldsymbol{\alpha}$ 线性无关.

3．设 $\boldsymbol{A}$ 为 n 阶方阵，$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n$ 为线性无关的 n 维向量，证明：$\mathrm{R}(\boldsymbol{A})=n$ 的充分必要条件是 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{A}\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{A}\boldsymbol{\alpha}_n$ 线性无关.

4．求满足下列条件的实数 λ：

（1）向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1=(1,2,3)^T$，$\boldsymbol{\alpha}_2=(0,-1,1)^T$，$\boldsymbol{\alpha}_3=(\lambda,0,2)^T$ 线性无关；

（2）向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1=(\lambda,1,1)^T$，$\boldsymbol{\alpha}_2=(1,\lambda,1)^T$，$\boldsymbol{\alpha}_3=(-1,1,-\lambda)^T$ 线性相关.

5．求下列向量组的秩，并求一个极大线性无关组

（1）$\boldsymbol{\alpha}_1=(1,-2,5)^T$，$\boldsymbol{\alpha}_2=(3,2,-1)^T$，$\boldsymbol{\alpha}_3=(3,10,-17)^T$；

（2）$\boldsymbol{\alpha}_1=(1,-1,0,4)^T$，$\boldsymbol{\alpha}_2=(2,1,5,6)^T$，$\boldsymbol{\alpha}_3=(5,4,15,4)^T$，$\boldsymbol{\alpha}_4=(1,-1,-2,0)^T$，$\boldsymbol{\alpha}_5=(3,0,7,14)^T$.

6．设有向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1=(a+1,1,1,1)^T$，$\boldsymbol{\alpha}_2=(2,a+2,2,2)^T$，$\boldsymbol{\alpha}_3=(3,3,a+3,3)^T$，$\boldsymbol{\alpha}_4=(4,4,4,a+4)^T$，问 a 为何值时，向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4$ 线性相关，并求此时的一个极大线性无关组.

7．用格拉姆–施密特正交单位化方法将 $\boldsymbol{\alpha}_1=\begin{pmatrix}1\\0\\-1\\1\end{pmatrix},\boldsymbol{\alpha}_2=\begin{pmatrix}1\\-1\\0\\1\end{pmatrix},\boldsymbol{\alpha}_3=\begin{pmatrix}-1\\1\\1\\0\end{pmatrix}$ 正交单位化.

8．设 $\boldsymbol{A}$，$\boldsymbol{B}$ 均为正交阵，证明 $\boldsymbol{A}^{-1}$，$\boldsymbol{A}^{*}$ 及 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{B}$ 也是正交阵.

9．在 R^3 中取两组基

$$\boldsymbol{\alpha}_1=(1,1,0)^T，\boldsymbol{\alpha}_2=(0,1,1)^T，\boldsymbol{\alpha}_3=(1,0,1)^T；$$

$$\boldsymbol{\beta}_1=(1,0,0)^T，\boldsymbol{\beta}_2=(1,1,0)^T，\boldsymbol{\beta}_3=(1,1,1)^T.$$

（1）求从基 $\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3$ 到基 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 的过渡矩阵；

（2）已知 $\boldsymbol{\gamma}$ 在基 $\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3$ 下的坐标为 $(1,0,2)^T$，求 $\boldsymbol{\gamma}$ 在基 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 下的坐标.