



合肥工业大学

HEFEI UNIVERSITY OF TECHNOLOGY

§ 5.2 相似矩阵



相似矩阵的定义:

定义: 设 A, B 都是 n 阶矩阵, 若存在可逆矩阵 P 使得

$$P^{-1}AP = B,$$

则称矩阵 A 相似于矩阵 B , 或称矩阵 A 与矩阵 B **相似**.

运算 $P^{-1}AP$ 称为对 A 作 **相似变换**.

可逆矩阵 P 称为 **相似变换矩阵**.



矩阵相似的性质

- 反身性: A 与 A 相似
- 对称性: 若 A 与 B 相似, 则 B 与 A 相似
- 传递性: 若 A 与 B 相似, B 与 C 相似, 则 A 与 C 相似

矩阵的相似关系是一种等价关系。



相似与等价的关系

(1) 若 A 与 B 相似 ($P^{-1}AP=B$)，则 A, B 等价 ($PAQ=B$)；

(2) 若 A 与 B 等价，则 A, B 未必相似。

反例：取 $A = E = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

则 A 与 B 等价，但 A, B 不相似。

(因为对任意的可逆矩阵 P , $P^{-1}AP=P^{-1}EP=E \neq B$.)



矩阵相似的性质

定理： 设 n 阶矩阵 A 与 B 相似，则有

(1) $R(A)=R(B)$;

(2) $|A|=|B|$;

(3) A 和 B 等价;

(4) 当它们可逆时，它们的逆矩阵也相似;

(5) A^T 与 B^T 相似;

(6) A^k 与 B^k 相似;

(7) A^* 与 B^* 相似;

(8) $tr(A)=tr(B)$



定理：相似矩阵具有相同的特征多项式、特征值。

$$\because P^{-1}AP = B$$

$$\therefore |B - \lambda E| = |P^{-1}AP - \lambda E| = |P^{-1}(A - \lambda E)P| = |A - \lambda E|$$

注：上述定理的逆命题不成立。

设 $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, 则它们特征多项式相同,

但它们不相似。



推论: 若矩阵 A 与对角矩阵 $\Lambda = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \lambda_2 & \\ & & \ddots \\ & & & \lambda_n \end{pmatrix}$ 相似,

则 $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ 是 A 的 n 个特征值.



例：若4阶方阵 A 与 B 相似， A 的特征值为1，2，3，4.

则 $|B+E|$ =_____.

解： $B+E$ 的特征值为2，3，4，5. 因此有 $|B+E|=120$.



相似对角化问题（方阵何时与对角矩阵相似？）

定义：对 n 阶矩阵 A ，若存在可逆矩阵 P ，使得

$$P^{-1}AP = \Lambda = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n \end{pmatrix} = \text{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n)$$

称方阵 A 能相似对角化.



矩阵可对角化的条件

定理: n 阶矩阵 A 与对角矩阵相似 (A 可对角化)

$\Leftrightarrow A$ 有 n 个线性无关的特征向量.



若 n 阶矩阵 A 与对角阵相似 (A 可对角化)

$$\Rightarrow P^{-1}AP = \Lambda \Rightarrow AP = P\Lambda \quad \text{set } P = (p_1, p_2, \dots, p_n)$$

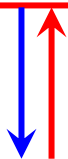
$$\Leftrightarrow A(p_1, p_2, \dots, p_n) = (p_1, p_2, \dots, p_n) \begin{pmatrix} \lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow (Ap_1, Ap_2, \dots, Ap_n) = (\lambda_1 p_1, \lambda_2 p_2, \dots, \lambda_n p_n)$$

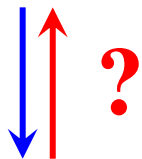
即若 $P^{-1}AP = \Lambda$, 则 λ_i 为 A 的特征值, P 的第 i 个列向量为 A 的属于 λ_i 的特征向量, 可逆矩阵 P 的 n 个列向量为 A 的 n 个线性无关的特征向量.



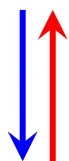
可逆矩阵 P ，满足 $P^{-1}AP = \Lambda$ （对角阵）



矩阵 P 的
列向量组
线性无关



$$AP = P\Lambda$$



$$Ap_i = \lambda_i p_i \quad (i = 1, 2, \dots, n) \quad \Longleftrightarrow \quad (A - \lambda_i E) p_i = 0$$

A 的
特征值

对应的
特征向量

其中

$$A(p_1, p_2, \dots, p_n) = (p_1, p_2, \dots, p_n) \begin{pmatrix} \lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n \end{pmatrix}$$



推论: 若 n 阶方阵 A 有 n 个互不相同的特征值, 则 A 可对角化

(与对角矩阵相似)。

(逆命题不成立)



定理: 设 n 阶方阵 A 的互不相同的特征值为 $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_s$, 它们的重数分别为 r_1, r_2, \dots, r_s ($r_1 + r_2 + \dots + r_s = n$), 则 A 可对角化的**充要条件**为 A 的每个 r_i 重特征值 λ_i 都恰好对应 r_i 个线性无关的特征向量, **亦即 A 可对角化的充要条件是**

$$R(A - \lambda_i E) = n - r_i, i = 1, 2, \dots, s.$$



例 设 n 阶方阵 A, B 相似, 则()

- (A) 对任意常数 t , $A - tE$ 与 $B - tE$ 相似
- (B) A, B 具有相同的特征值和特征向量
- (C) A, B 都相似于一个对角矩阵
- (D) $A - tE = B - tE$



例: 判断下列矩阵 A 能否分别相似对角化:

(1) A 是二阶矩阵, 且 $|A| < 0$. 答案: (1) 有两个异号 (不同) 的特征值, 能相似对角化.

(2) $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ 答案: (2) 有三个不同的特征值 1, 3, 0, 能相似对角化.

(3) $A = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ -4 & 1 & 3 \end{pmatrix}$ 答案: (3) 虽然特征值为 -1, 2, 2, 但有三个线性无关的特征向量, 能相似对角化.

(4) $A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ -4 & 3 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ 答案: (4) (参见上节例) 虽然特征值为 2, 1, 1, 但没有三个线性无关的特征向量, 不能相似对角化.



例： 下列矩阵不能相似于对角阵的是（ ）

$$(A) \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

$$(B) \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

$$(C) \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

$$(D) \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$



例：问 $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ 能否对角化？若能，求出一个可逆阵 P ,

使得 $P^{-1}AP = \Lambda$.

解：由于 A 为上三角矩阵，故 A 的特征值为 $\lambda_1 = 1, \lambda_2 = \lambda_3 = 0$.

$$\text{当 } \lambda_1 = 1 \text{ 时, } (A - E)x = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \text{ 取 } p_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\text{当 } \lambda_2 = \lambda_3 = 0 \text{ 时, } Ax = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$



$$\text{取 } p_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, p_3 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

所以 A 有三个线性无关的特征向量，故 A 可相似对角化，且

$$P = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$



例：设 $A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 0 \\ 8 & 2 & a \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix}$ 相似于对角矩阵 Λ ，求常数 a 的值。

解：

$$|A - \lambda E| = \begin{vmatrix} 2-\lambda & 2 & 0 \\ 8 & 2-\lambda & a \\ 0 & 0 & 6-\lambda \end{vmatrix} = -(2+\lambda)(6-\lambda)^2 = 0,$$

$$\lambda_1 = \lambda_2 = 6, \lambda_3 = -2$$

因为 A 可相似对角化，故对应单根 $\lambda_3 = -2$ ，可求出线性无关的特征向量恰有一个，而对应二重根 $\lambda_1 = \lambda_2 = 6$ 应有两个线性无关的特征向量，即方程组 $(A - 6E)x = 0$ 有两个线性无关的解，



所以 $R(A - 6E) = 1$.

当 $\lambda = 6$ 时,

$$A - 6E = \begin{pmatrix} -4 & 2 & 0 \\ 8 & -4 & a \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & a \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

故 $a=0$.