第一章　集合与计数基础

1.列出下列集合的所有元素：
（1）大于 0 且小于 20 的素数组成的集合；
（2）$\{(x,y)|x,y\in \mathrm{N}\wedge 0\le x\le 2\wedge 3\le y\le 5\wedge x+y=5\}$；
（3）大于 10 且小于 30 的偶数组成的集合。
【解】 (1)$\{1,3,5,7,11,13,17,19\}$;
(2)$\{(0,5),(1,4),(2,3)\}$;
(3)$\{12,14,16,18,20,22,24,26,28\}$

2.设E是某高中一年级学生集合，A,B是E的子集且$A=\{x|x$是男生$\}$，$B=\{x|x$是校足球队队员$\}$，用描述法表示$A\cup B,A\cap B,A-B,B-A,A\oplus B,\overline{A},\overline{B}$。
【解】$A\cup B=\{x|x$是高一全体男生和校足球队高一女队员$\}$
$A\cap B=\{x|x$是足球队高一男队员$\}$
$A-B=\{x|x$是高一男生不是足球队$\}$
$B-A=\{x|x$是足球队高一女生$\}$
$A\oplus B=\{x|x$是高一足球队的女生和不是足球队的男生$\}$
$\overline{A}=\{x|x$是高一女生$\}$
$\overline{B}=\{x|x$是高一不是足球队的人$\}$

3.判断下面每组的两个集合是否相等：
(1) $A=\{3,1,1,5,5\},B=\{1,3,5\}$；　　(2)$A=\emptyset,B=\{\emptyset\}$；
(3)$A=\emptyset,B=\{x|x$是有理数并且是无理数$\}$；(4)$A=\{1,2,\emptyset\},B=\{\{\emptyset\},2,1\}$。
【解】（1）相等　（2）不相等　（3）相等　（4）不相等

4.求下列集合的幂集。
(1)$\{1,2,3\}$；　(2)$\{\emptyset,\{\emptyset\}\}$；　(3)$\{\emptyset,a,\{a\}\}$；　(4)$\{1,2,3,4\}$。
【解】 (1)$\{\emptyset,\{1\},\{2\},\{3\},\{1,2\},\{2,3\},\{1,3\},\{1,2,3\}\}$
(2)$\{\emptyset,\{\emptyset\},\{\{\emptyset\}\},\{\emptyset,\{\emptyset\}\}\}$
(3)$\{\emptyset,\{\emptyset\},\{a\},\{\{a\}\},\{\emptyset,a\},\{\emptyset,\{a\}\},\{a,\{a\}\},\{\emptyset,a,\{a\}\}\}$
(4)
$\{\emptyset,\{1\},\{2\},\{3\},\{4\},\{1,2\},\{1,3\},\{1,4\},\{2,3\},\{2,4\},\{3,4\},\{1,2,3\},\{2,3,4\},\{1,3,4\},\{1,2,4\},\{1,2,3,4\}\}$

5.设集合$E=\{1,2,3,4,5\}$，$A=\{1,5\}$，$B=\{2,3,5\}$，$C=\{2,4\}$，求下列集合：
(1)$A\cap\overline{B}$；(2)$(A\cup B)-C$；(3)$P(A)-P(C)$；(4)$A\oplus\overline{C}$
【解】
(1)$A\cap\overline{B}=\{1\}$　　(2)$(A\cup B)-C=\{1,3,5\}$
(3)$P(A)-P(C)=\{\{1\},\{5\},\{1,5\}\}$　　(4)$A\oplus\overline{C}=\{3\}$

6.化简下列集合：
（1）$\{2,3\}\cup\{\{2\},\{3\}\}\cup\{2,\{3\}\}\cup\{\{2\},3\}$；
（2）$((A\cup B\cup C)\cap(A\cup B))-((A\cup(B-C))\cap A)$。
【解】(1)$\{2,3,\{2\},\{3\}\}$　　(2)$A\cup B-A=B-A$

7.求下列集合的基数和每个集合的幂集。

(1){1,2,3}；(2){1,{2,3}}；(3){{1,{2,3}}}；(4){{∅,2},{2}}。

【解】(1)基数为 3　$\{\emptyset,\{1\},\{2\},\{3\},\{1,2\},\{1,3\},\{2,3\},\{1,2,3\}\}$

(2)基数为 2　$\{\emptyset,\{1\},\{\{2,3\}\},\{1,\{2,3\}\}\}$

(3)基数为 1　$\{\emptyset,\{1,\{2,3\}\}\}$

(4)基数为 2　$\{\emptyset,\{\{\emptyset,2\}\},\{\{2\}\},\{\{\emptyset,2\},\{2\}\}\}$

8.试证明下面公式:

(1)$A\cap\emptyset=\emptyset$;(2)$A\cap A=\ A$;(3)$A\cap(A\cup B)=A$。

【解】(1)$\because\emptyset\subseteq A$　　$\therefore A\cap\emptyset=\emptyset$

(2)$\because A\subseteq A$　　$\therefore A\cap A\ =A$

(3)$\because A\subseteq A\cup B$　$\therefore A\cap(A\cup B)=A$

9.设A和B是任意集合，试问:

(1)若$A-B=B$，则A和B是什么关系？

(2)若$A-B=B-A$，则A和B又是什么关系？

【解】(1)$A=B=\emptyset$　　　　(2)$A=B$

10.设A和B为任意集合，证明：$A\oplus B=(A\cup B)\cap\left(\overline{A}\cup\overline{B}\right)=(A\cup B)-(A\cap B)$

【解】
$$\begin{aligned}A\ \oplus\ B&=(A-B)\cup(B-A)\\&=\left(A\cap\overline{B}\right)\cup\left(B\cap\overline{A}\right)\\&=(A\cup B)\cap\left(A\cup\overline{A}\right)\cap\left(\overline{B}\cup B\right)\cap\left(\overline{B}\cup\overline{A}\right)\\&=(A\cup B)\cap\left(\overline{B}\cup\overline{A}\right)\\&=(A\cup B)\cap\left(\overline{B\cap A}\right)\\&=(A\cup B)-(A\cap B)\end{aligned}$$

11.证明下列等式：

(1)$(A\cup B)\cap(\overline{A}\cup C)=(A\cap C)\cup(\overline{A}\cap B)$；

(2)$(A\cup B)\cap(A\cup C)=A\cup(B\cap C)$。

【解】

(1)对于任意的元素$x\in(A\cup B)\cap(\overline{A}\cup C)$，有$x\in A$或$B$且$x\notin A$或$x\in C$。

对于$x\in A$，有$x\in A$且$x\in C$。对于$x\in B$，有$x\in B$且$x\notin A$。即有：

$$x\in(A\cap C)\cup(\overline{A}\cap B)$$

故有：$(A\cup B)\cap(\overline{A}\cup C)\subseteq(A\cap C)\cup(\overline{A}\cap B)$

可类似证明：$(A\cap C)\cup(\overline{A}\cap B)\subseteq(A\cup B)\cap(\overline{A}\cup C)$

故有：$(A\cup B)\cap(\overline{A}\cup C)=(A\cap C)\cup(\overline{A}\cap B)$

(2) 对于任意的元素$x\in(A\cup B)\cap(A\cup C)$，则有：$x\in A\cup B$并且$x\in A\cup C$。

对于$x\in A\cup B$，则有：$x\in A$或者$x\in B$。对于$x\in A\cup C$，则有：$x\in A$或者$x\in C$。

故有：$x\in A$或者$x\in B$并且$x\in A$或者$x\in C$。即有：$x\in A\cup(B\cap C)$

故有：$(A\cup B)\cap(A\cup C)\subseteq A\cup(B\cap C)$。

可类似证明：$A\cup(B\cap C)\subseteq(A\cup B)\cap(A\cup C)$

故有：$A\cap(B\cup C)=(A\cap B)\cup(A\cap C)$。

12.简要说明{2}与{{2}}的区别，列出它们的元素与子集。

【解】{2}和{{2}}都是 1 元集合，但是其中的元素不同。{2}中元素为 2，而{{2}}中元素为{2}。{2}的子集为∅和{2}，{{2}}的子集为∅和{{2}}。

13.假设全集$U = \{1,2,3,4,5,6,7,8,9,10\}$,使用比特串表示下面的集合。

(1){2,3,4}; (2){1,4,8,9}; (3){2,4,6,8,9}

【解】(1){2,3,4}表示为 0111000000。

(2){1,4,8,9}表示为 1001000110。

(3) {2,4,6,8,9}表示为 0101010110。

14.证明$\{\{a\},\{a,b\}\} = \{\{c\},\{c,d\}\}$当且仅当$a = c, b = d$，其中$a,b,c,d$是任意给定。

【解】充分性：$a = c, b = d$，显然可以得出$\{\{a\},\{a,b\}\}$=$\{\{c\},\{c,d\}\}$

必要性：两集合相等可得出集合的子集都相同，$\{\{a\},\{a,b\}\}$的子集为∅，$\{\{a\}\}$,$\{\{a,b\}\}$,$\{\{a\},\{a,b\}\}$。$\{\{c\},\{c,d\}\}$的子集为∅,$\{\{c\}\}$,$\{\{c,d\}\}$,$\{\{c\},\{c,d\}\}$。$\{\{a\}\}$=$\{\{c\}\}$可以得出$a = c$，同理，得出$b = d$。

15.用归纳法证明，对一切正整数n，有：

$$(1+2+\cdots+n)^2 = 1^3+2^3+\cdots+n^3$$

【解】当$n = 1$时，$1^{\ 2} = 1^3$，显然成立。假设当$n = k$时，等式成立，

当$n = k+1$时，$(1+2+\cdots+(k+1))^2 = (1+2+\cdots+k)^2+(k+1)^2+2(k+1)(1+2+\cdots+k) = 1^3+2^3+\cdots+k^3+(k+1)[2(1+2+\cdots+k)+k+1]$

∵$2(1+2+\cdots+k) = 2[k(k+1)/2] = k(k+1)$

∴上式= $1^3+2^3+\cdots+k^3+(k+1)^3$

∴对一切正整数n，有：$(1+2+\cdots+n)^2 = 1^3+2^3+\cdots+n^3$。

16.对所有自然数n，证明下列每一关系式：

(1)$\sum_{i=0}^{n} i^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$; (2)$\sum_{i=0}^{n}(2i+1) = (n+1)^2$;

(3)$\sum_{i=0}^{n} i(i!) = (n+1)!-1$; (4)$1+2n \le 3^n$。

【解】

(1)当$i = 0$时，$0^2 = \frac{0(0+1)(0+1)}{6} = 0$，成立。

假设当$i = k$时，等式成立，

当$i = k+1$时，有：$1^2+2^2+\cdots+k^2+(k+1)^2 = \frac{k(k+1)(2k+1)}{6}+(k+1)^2 = \frac{(k+1)[k(2k+1)+6(k+1)]}{6} = \frac{(k+1)(k+2)(2k+3)}{6}$,

故对所有自然数n，有$\sum_{i=0}^{n} i^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$。

(2)当$i = 0$时，$0+1 = (0+1)^2 = 1$，

当$i = 1$时，$1+(2+1) = (1+1)^2 = 4$，成立。

假设当$i = k$时，等式成立，

当$i = k+1$时，$2\times 0+1+2\times 1+1+\cdots+2\times k+1+2\times(k+1)+1 = (k+1)^2+2\times(k+1)+1 = (k+2)^2$

故对所有自然数n，有$\sum_{i=0}^{n}(2i+1) = (n+1)^2$

(3)当$i = 0$时，$0(0!) = (0+1)!-1 = 0$

当$i = 1$时，$1(1!) = (1+1)!-1 = 1$，成立。假设当$i = k$时，等式成立，

当$i = k + 1$时，
$\sum_{i=0}^{k} i(i!) + (k+1)((k+1)!) = \ (k+1)! - 1 + (k+1)((k+1)!) = (k+1)!\,(k+2) - 1 = (k+2)! - 1,$
故对所有自然数n，有$\sum_{i=0}^{n} i(i!) = (n+1)! - 1$
(4)当$i = 1$时，$1 + 2 \le 3^1$，成立。假设当$i = k$时，等式成立，
当$i = k + 1$时，$1 + 2(k+1) = 1 + 2k + 2 \le 3^k + 2 \le 3^{k+1}$，
故对所有自然数n，有$1 + 2n \le 3^n$。

17.证明：对任何自然数，有$2.5^n \ge n^2$。
【解】当$n = 1$时，$2.5^1 \ge 1^2$，成立。假设当$n = k$时，等式成立，
当$n = k + 1$时，$2.5^{k+1} = 2.5 \times 2.5^k \ge 2.5k^2$。
要求$2.5k^2$和$(k+1)^2$的大小，只需求$1.5k^2$和$2k + 1$的大小。
求$y = 1.5k^2 - 2\mathrm{k} - 1$方程的根，当$k > \frac{2+\sqrt{10}}{3}$时，$y > 0$。所以当$k \ge 2$时，$2.5k^2 > (k+1)^2$,即$2.5^{k+1} > (k+1)^2$。故对任何自然数，有$2.5^n \ge n^2$。

18.一个体育团体共 25 人，其中 14 人会踢足球，12 人会打乒乓球，6 人既会踢足球又会打乒乓球，5 人既会打篮球又会踢足球，还有 2 人这三种球都会打，而 6 个会打篮球的人都会打另一种球(指这三种球). 求不会打这三种球的人数.
【解】设会踢足球的人为集合A，会打乒乓球的人为集合B，会打篮球的人为集合C，x为任意一人。$x \in B$且$x \notin A$。若$x \in C$则$x \in A$或B，故有$x \in A \cup B$，即有$C \subseteq A \cup B$。
因此，若$x \notin \ A \cup B \cup C$，则$x \notin \ A \cup B$即$x \in \overline{A \cup B}$，

$$\left|\overline{A \cup B}\right| = \ |U| - |A| - |B| - |A \cap B| = 25 - 14 - 12 + 6 = 5$$

所以不会打这三种球的人数为 5。

19.某班有学生 60 人，其中有 38 人学习Java语言，有 16 人学习C语言，有 21 人学习C++语言；有 3 人这三种语言都学习，有 2 人这三种语言都不学习，问仅学习两门语言的学生数是多少?
【解】设学Java的人为集合A，学C语言的人为集合B，学C++语言的人为集合C，仅学习两门语言的学生为集合D，

$$|A \cup B \cup C| = 38 + 16 + 21 - |D| - 3 = 60 - 2 = 58$$

所以$|D| = 14$。故仅学习两门语言的学生数是 14 人。

20.一个棋手有 11 周时间准备锦标赛，他决定每天至少下一盘棋，一周中下棋的次数不能多于 12 次. 证明：在此期间有一些连续天中他正好下棋 21 次。
【解】用a_i(1≤ i ≤77)表示到第i天时已下棋的总次数,则有$1 \le a_1 < a_2 < \cdots < a_{77} \le 132$，因此$22 \le a_1 + 21 < a_2 + 21 < \cdots < a_{77} + 21 \le 153$。考虑$a_1, a_2, \cdots, a_{77}, a_1 + 21, a_2 + 21, \cdots, a_{77} + 21$这 154 个数其取值范围为 1 到 153,根据鸽笼原理,它们中至少有两个数是相等的。又由于$i \ne j$时，$a_i \ne a_j, a_i + 21 \ne a_j + 21$。因此这两个数可设为$a_i = a_j + 21$，故从第$j + 1$天到第$i$天共下棋 21 次。

21.在边长为 1 的正方形内任取 5 点，则其中至少有两点，它们之间的距离不超过$\sqrt{2}/2$。
【解】使用鸽笼原理证明。

22.证明：任选 8 个整数用 7 去除，则它们当中至少有两个数有相同的余数。
【解】任意整数用 7 去除得到的余数一定在集合$A=\{0,1,2,3,4,5,6\}$中，由鸽笼原理可知，8 个余数在集合A中，一定至少有两个数相同。

23.一个学生用 37 天时间来准备考试。根据自己的经验她知道复习所需时间不会超过 60 小时，而她又希望每天至少复习一个小时。证明：不管如何安排每天得复习时数，总有连续的若干日，其间她恰好复习了 13 个小时。
【解】 用$a_i(1\leq i\leq 37)$表示到第i天时已复习的总时数,则有：$1\leq a_1<a_2<\cdots<a_{37}\leq 60$
故有：$14\leq a_1+13<a_2+13<\cdots<a_{37}+13\leq 73$。
考虑到$a_1,a_2,\cdots,a_{37},a_1+13,a_2+13,\cdots,a_{37}+13$这 74 个数其取值范围为 1 到 73,根据鸽笼原理,它们中至少有两个数是相等的。又由于$i\neq j$时，$a_i\neq a_j,a_i+13\neq a_j+13$。
因此，这两个数可设为$a_i=a_j+13$，所以从第$j+1$天到第i天共复习 13 小时。

24.设A、B、C是 3 个城市，从A到B有 3 条路，从B到C有 2 条路，从A直接到C有 4 条路，请问从A到C有多少种不同的方法?
【解】从A到B再到C有：$C_3^1C_2^1=6$，从A直接到C有：$C_4^1=4$。所以共有 10 种不同的方法。

25.设A、B为二元集和五元集，则从A到B有多少个函数？其中有多少个单射函数？
【解】根据性质可知从A到B有$5^2=25$个函数，有$\frac{5!}{3!}=20$个单射函数。

26.9 个人坐成一个圆圈，有多少种坐法？
【解】$P_c(\mathrm{n},\mathrm{r})=$ $P_c(9,9)=\frac{9!}{9}=8!=40320$

27.3 男 3 女围着圆桌而坐，男、女交替就坐，请问有多少种坐法？
【解】$P_c(3,3)=\frac{3!}{3}=2$，插空法：$A_3^3=6$，所以共有 12 种坐法。

28.从某班选 6 个男生、3 个女生排成一排。
（1）如果女生不相邻，有多少种排法？（2） 如果排成一圈，有多少种排法?
【解】(1)男生排法：$A_6^6=6!=720$，女生排法(插入法):720× A_7^3=151200
所以共有 151200 种排法。
(2) $P_c(9,9)=\frac{9!}{9}=8!=40320$，共有 40320 中排法。

29.从一副 52 张（不含大小王）的扑克牌中，
（1）至少摸多少张，就可保证有 3 张同花色？
（2）至少摸多少张，就可保证有 3 张不同花色？
（3）至少摸多少张就可保证有 2 张牌是黑桃？
（4）至少摸多少张就可保证有 1 张 A？
【解】(1)根据鸽笼原理：$(3-1)\times 4+1=9$；(2)$13\times(3-1)+1=27$；
(3) $3\times 13+2=41$；(4)$(13-1)\times 4+1=49$。

30.在某次考试中，要求学生从 10 个要回答的问题中选 8 个，问有多少种选法？如果前 3 个问题必须回答，那么又有多少种选法？

【解】C_{10}^{8}=C_{10}^{2}=$\frac{10\times9}{2}$=45，所以 10 个要回答的问题中选 8 个,有 45 种选法，$C_7^5=C_7^2=\frac{7\times6}{2}$=21，所以如果前 3 个问题必须回答，有 21 种选法。

31.一个俱乐部有 10 名男成员和 12 名女成员，现在从中选出 4 人组成一个委员会，若：

（1）至少有 2 名女的；

（2）除了上述要求外，又指定M,N两女士不能同时入选。各有多少种不同的选法？

【解】(1) $C_{12}^2C_{10}^2+C_{12}^3C_{10}^1+C_{12}^4$=5665 种

(2)M,N同时入选：C_{10}^2+$C_{10}^1C_{10}^1$+C_{10}^2=190 种，

所以不能同时入选的选法为 5665−190 =5475 种。

32.将 5 个物体放入 6 个盒子中有多少种方式，如果：

（1）物体与盒子都是有标号的？

（2）物体是有标号的，但是盒子没有标号？

（3）物体没有标号，但是盒子有标号？

（4）物体和盒子都没有标号？

【解】

(1)6^5种　　　　(2)1+C_5^1+C_5^2+$C_5^2+C_5^2\times C_3^1+C_5^2$+1=52

(3)C_{10}^5=$\frac{10!}{5!5!}$=252　　　　(4)7 种

33.将 10 个不可辨别的球放入 8 个可辨别的盒子里，共有多少种方法？

【解】C_{17}^{10}=$\frac{17!}{10!7!}$=19448 种

34.使用 EVERGREEN 中的字母可以构造多少个至少含有 5 个字符的串？

【解】略

35.书架上 12 本书排成一排，从中选 5 本且使得没有 2 本书相邻，有多少种方法？

【解】我们将选的书用竖线表示，没选的书用星表示。则本题即为计数含 5 条竖线和 7 颗星且没有 2 条竖线相邻的序列数。因为 5 条竖线的排列构成了 6 个空隙 1|2|3|4|5|6，第二到第五个空隙每一个中都至少插入一个星使得没有 2 本选中的数是相邻的最后还剩下 3 个星可以任意的插入这 6 个空隙，因此所有可能的方式数有C_{6+3-1}^{13}= C_8^3=56。

36.一楼梯有n级台阶，某人由下向上走。若每一步只能跨一级或两级楼梯，问他从地面走到第n级楼梯有多少种走法？

【解】设从地面走到第n级楼梯有$f(n)$种走法，

由题意得：$f(n)=f(n-1)+f(n-2),f(1)=1,f(2)=2$。

37.将 10 个不可辨别的球放入 8 个可辨别的盒子里，共有多少种方法？

【解】$C_{17}^{10}=\frac{17!}{10!7!}$=19448 种

38.从整数 1,2，…，100 中选取两个数，使得它们的差正好是 7，有多少种不同的选法？若选出的两个数之差小于等于 7，有多少种不同的选法？
【解】100-7=93 种，所以差正好是 7 有 93 种不同的选法，
93×7+6+5+4+3+2+1=672 种，所以差小于等于 7，有 672 种不同的选法。

39.用高级语言设计程序，从 1,2,3,4,5 开始生成{1,2,3,4,5}的所有全排列。
【解】
```
#include<iostream>
using namespace std;
int a[5] = {1,2,3,4,5};
int visited[1000];
void perm(int n, int len)
{
    int i, k;
    if (len == n)
    {
        for (i = 0; i<n - 1; i++)
            printf("%d", a[i]);
        printf("%d\n", a[n - 1]);
    }
    for (k = 1; k <= n; k++)
    {
        if (visited[k] == 0)
        {
            a[len++] = k;//把当前的数字放进数组，并且本层的len值加1
            visited[k] = 1;//把当前的数字加1
            perm(n, len);//递归调用，继续往下深入，如若满足了len==n 就做输出，然后执行下面的还原语句
            len--;//因为当前层次的len值做了加1 要还原本层的len值，就要len--;
            visited[k] = 0;//把当前数字的标记去掉，然后返回上一层，继续再往下执行
        }
    }
}
int main()
{
    perm(5, 0);
}
```

40.写一个程序：输入两个正整数n和r，如果$r \leq n$，那么返回从n个对象中每次取r个对象的与组合数。
【解】
```
#include<iostream>
using namespace std;

int factorial(int n) {
    if (n == 1) return 1;
    else return factorial(n - 1)*n;
}
int main()
{
    int n, r;
    cin >> n >> r;
```

```
    if (r <= n)
    {
        cout << "排列数为：" << factorial(n) / factorial(n - r) << endl;
        cout << "组合数为：" << factorial(n) / (factorial(n - r)*factorial(r)) << 
endl;
    }
    return 0;
}
```

第二章 整数与算法基础

1.判断下述命题是否为真：3|7,5|-35,-1|-21,12|4,2|0,2|0,0|0.
【解】假、真、真、假、真、真、假

2.求出下列整数的非平凡因子：60, 238, 512, 707, 1000, 15!
【解】60 的非平凡因子：$\pm2,\pm3,\pm4,\pm5,\pm6,\pm10,\pm12,\pm15,\pm20,\pm30$
238 的非平凡因子：$\pm2,\pm119$
512 的非平凡因子：$\pm2,\pm4,\pm8,\pm16,\pm32,\pm64,\pm128,\pm256$
707 的非平凡因子：$\pm7,\pm101$
1000 的非平凡因子：$\pm2,\pm4,\pm5,\pm8,\pm10,\pm20,\pm25,\pm40,\pm50,\pm100,\pm125,$
$\pm200,\pm250,\pm500$
15!的非平凡因子：$\pm2,\pm3,\pm4,\pm5,\pm6,\pm7,\pm8,\pm9,\pm10,\pm11,\pm12,\pm13,\pm14,$
$\pm15,\pm14!,\pm13!,\pm12!,\pm11!,\pm10!,\pm9!,\pm8!,\pm7!,\pm6!,\pm120,\pm24,$
±6……

3.证明：如果$a|b$及$b|a$，其中a和b为整数，则必有$a=b$或$a=-b$.
【证明】因为$a|b$且$b|a$，设$b=pa,a=qb$（p,q均为整数），则有$a=pqa$，于是推出$pq=1$.解得$p=q=1$或$p=q=-1$.于是必有$a=b$或$a=-b$.

4.若a,b,c为整数，且满足$ac|bc$，求证$a|b$.
【证明】因为$ac|bc$，设$bc=kac$（k为整数），则有$b=ka$，则$a|b$得证。

5.判断下列数是素数还是合数：113,221,527,$2^{11}-1$
【解】素数、合数 221=13×17、合数 527=17×31、合数 2047=23×89

6.证明：每个奇数的平方都形如$8k+1$（k是整数）。
【证明】设$n=2m+1$,则有：

$$n^2=(2m+1)^2=4m^2+4m+1=4m(m+1)+1=8\times\frac{m(m+1)}{2}+1$$

又$2|m(m+1)$,故有$n^2=8k+1$（k为整数）。

7.证明：任意三个连续的整数的积都能被 6 整除。
【证明】三个连续整数中至少有一个数是偶数，则它们乘积能被 2 整除。三个连续整数中至少有一个是 3 的倍数，则它们乘积能被三整除，故三个连续整数的乘积都能被 6 整除。

8.求下列各组数的最大公约数和最小公倍数。
（1）15,35（2）100,121（3）72,231（4）154,128
【解】$\gcd(15,35)=5$　　lcm(15,35)=105
$\gcd(100,121)=1$　$\text{lcm}(100,121)=12100$
$\gcd(72,231)=3$　$\text{lcm}(72,231)=5544$
$\gcd(154,128)=2$　$\text{lcm}(154,128)=9856$

9.设a,b不全为零，$c\neq0$ 且$c\in Z$，则$\gcd(ca,cb)=|c|\gcd(a,b)$.

【证明】设$k=\gcd(a,b)$则有$a=mk,b=nk$,于是有$ca=cmk,cb=cnk$,所以ck是ca与cb的约数。
假设$\gcd(ca,cb)\neq ck$,设$\gcd(ca,cb)=j>ck$,则j必为ck的倍数，即$j=i\cdot ck$,则有$ca=p\cdot ick,cb=q\cdot ick$,可得$a=pik$,$b=qik$.
于是a,b有公约数$ik>k$,与$k=gcd(a,b)$矛盾。所以有:

$$\gcd(ca,cb)=|c|k=|c|\gcd(a,b).$$

证毕!

10.求下列各种情况的商和余数:
(1)19 除以 7(2)-111 除以 11(3)1001 除以 13
(4)0 除以 19(5)-1 除以 3(6)3 除以 5
【解】(1)商:2 余数:5(2)商:-11 余数:10
(3)商:77 余数:0(4)商:0 余数:19
(5)商:-1 余数:2(6)商:0 余数:3

11.求满足$\gcd(a,b)=10$且$\mathrm{lcm}(a,b)=100$的所有正整数对a,b.
【解】所有整数对(10,100)(20,50)

12.证明:对任意正整数a,b有$ab=\gcd(a,b)\mathrm{lcm}(a,b)$.
【证明】设$\gcd(a,b)=m,\mathrm{lcm}(a,b)=n$,
则有$a=pm,b=qm,n=pqm$.所以有:

$$\gcd(a,b)\mathrm{lcm}(a,b)=mn=pqm^2=ab.$$

证毕!

13.用欧几里得算法求下列整数对的最大公因子并用线性组合表示:
(51,87),(105,300),(981,1234),(34709,100313)
【解】(1)87/51=1...36,51/36=1...15,36/15=2...6,15/6=2...3,6/3=2...0,因此

$$\begin{aligned}\gcd(51,87)=3&=15-6\times2=15-2(36-15\times2)=15\times5-2\times36\\&=15\times5-2(51-15)=15\times7-51\times2\\&=51\times12-87\times7\end{aligned}$$

(2)300/105=2...90,105/90=1...15,90/15=6...0

$$\gcd(105,300)=15=105-(300-105\times2)=105\times3-300$$

(3)1234=981×1+253,981=3×253+222,253=222×1+31,222=31×7+531=5×6+1 5=5×1+0

$$\begin{aligned}\gcd(981,1234)=11&=31-5\times6=31-6(222-31\times7)\\&=43\times31-6\times222\quad=43\times31-6\times(981-3\times253)\\&=43\times31-6\times(981-3\times(1234-981\times1))\\&=190\times1234-239\times981\end{aligned}$$

(4)100313=2×34709+30895,34709=30895×1+3814,
30895=3814×8+383,3814=383×9+367,383=367×1+16,
367=16×22+15,16=15×1+1 15=15×1+0
gcd(34709,100313)=1
线性组合略

14.设是a,b不全为零的整数且互素，计算$\gcd(a^2+b^2,a+b)$.
【解】由题可得$\gcd(a,b)=1$,所以有$\gcd(a,a+b)=\gcd(b,a+b)=1$,于是有

$\gcd(ab, a+b) = 1$.
设$\gcd(a^2+b^2, a+b) = d$,则有$d|a^2+b^2$,$d|a+b$,所以$d|(a+b)^2-(a^2+b^2)$,即$d|2ab$.于是有$d|ab(a^2+b^2)-2ab\cdot a$,即$d|2b^3$.同理可得$d|2a^3$.
因为$\gcd(a,b)=1$所以$d|\gcd(2a^3, 2b^3)$。又$\gcd(2a^3, 2b^3) = 2[\gcd(a,b)]^3 = 2$。
所以$\gcd(a^2+b^2, a+b) = 1$或 2

15.判断下述正整数是素数还是合数：101，111，213，221，$2^{11}-1$.
【解】素数、合数、合数、合数、合数

16.给出下述各数的素因子分解：204，512，3276，4025，20!
【解】$204 = 2^2\times3\times17$，$512 = 2^9$，$3276 = 2^2\times3^2\times7\times13$
$4025 = 5^2\times7\times23$，$20! = 2^{18}\times3^8\times5^4\times7^2\times11\times13\times17\times19$

17.利用素因子分解，求下述每一对正整数的最大公约数和最小公倍数。
（1）165,120（2）36,216（3）215,1100
【解】$165 = 3\times5\times11, 120 = 2^3\times3\times5$,所以 $\gcd(165,120) = 3\times5 = 15$, $\mathrm{lcm}(165,120) = 23\times3\times5\times11 = 1320$
$36 = 2^2\times3^2, 216 = 2^3\times3^3$,所以 $\gcd(36,216) = 2^2\times3^2 = 36, \mathrm{lcm}(36,216) = 2^3\times3^3 = 216$
$215 = 5\times43, 1100 = 2^2\times5^2\times11$,所以$\gcd(215,1100) = 5, \mathrm{lcm}(215,1100) = 2^2\times5^2\times11\times43 = 47300$

18.下述每一对整数是否互素？若互素，求出整数x, y,使得$xa+yb=1$.
（1）24,35（2）63,91（3）450,539（4）1024,729
【解】24 与 35 互素。$35\times11-16\times24=1$
$\gcd(63,91)=7$,因此 63 与 91 非互素
450 与 539 互素。$450\times109-539\times91=1$
1024 与 729 互素。$729\times417-1024\times296=1$
19.如果k是正整数，证明$3k+2$和$5k+3$互素。
【证明】假设$3k+2$与$5k+3$有一个不为 1 的公因子a.则$a|3k+2$且$a|5k+3$.
设$3k+2=i\cdot a$,于是有
$$\frac{5k+3}{a}=\frac{3k+2+2k+1}{a}=i+\frac{2k}{a}+\frac{1}{a}$$
显然$\frac{1}{a}$不是整数，与假设矛盾。因此$3k+2$和$5k+3$互素。

20.证明：若2^n-1是素数，则n是素数。
【证明】假设n是合数，则存在$a>1, b<n$,其中a, b均为正整数，使得$n=ab$，于是有$2^n-1=2^{ab}-1$.
设$t=2^a$,则有：
$$2^n-1=t^b-1=(t-1)(t^b-1+t^b-2+\cdots+t+1)$$
显然$(t-1)$和$(t^b-1+t^b-2+\cdots+t+1)$不等于 1。即二者都是2^n-1的非平凡因子，与题设2^n-1是素数矛盾，故n为素数。

21.验证下列同余式：
（1）$13\equiv1 \pmod 2$（2）$22\equiv7 \pmod 5$

（3）$69 \equiv 62 (\bmod\ 7)$（4）$111 \equiv -9 (\bmod\ 40)$
【解】（1）$13\ \bmod\ 2 = 1, 1\ \bmod\ 2 = 1$ 正确
（2）$22\ \bmod\ 5 = 2, 7\ \bmod\ 5 = 2$ 正确
（3）$69\ \bmod\ 7 = 6, 62\ \bmod\ 7 = 6$ 正确
（4）$111\ \bmod\ 40 = 31, -9\ \bmod\ 40 = 31$ 正确

22.设m为正整数，求证：如果$a\ \bmod\ m = b\ \bmod\ m$,则有$a \equiv b (\bmod\ m)$.
【证明】因为$a\ \bmod\ m = b\ \bmod\ m$,则可设$a = k_1 m + t, b = k_2 m + t$,于是有$a \equiv b (\bmod\ m)$.

23.证明：如果a是偶数，则$a^2 \equiv 0 (\bmod\ 4)$,如果a是奇数，则$a^2 \equiv 1 (\bmod\ 4)$.
【证明】当a为偶数时，设$a = 2n$（n为整数），于是有：

$$a^2\ \bmod\ 4 = 4n^2\ \bmod\ 4 = 0 = 0\ \bmod\ 4$$

当a为奇数时，则可设$a = 2n + 1$（n为整数），于是有：

$$a^2\ \bmod\ 4 = (4n^2 + 4n + 1)\ \bmod\ 4 = 4(n^2 + n) = 1 = 1\ \bmod\ 4$$

于是命题得证。

24.证明：如果a是奇数，则$a^2 \equiv 1 (\bmod\ 8)$.
【证明】设$a = 2n + 1$（n为整数），则有：

$$a^2\ \bmod\ 8 = (4n^2 + 4n + 1)\ \bmod\ 8 = (8 \times \frac{n(n+1)}{2} + 1)\ \bmod\ 8$$

因为$n(n+1)$必能被 2 整除，故$(8 \times \frac{n(n+1)}{2} + 1)\ \bmod\ 8 = 1$,即$a^2\ \bmod\ 8 = 1$,故

$$a^2 \equiv 1 (\bmod\ 8).$$

证毕！

25.求下列最小正剩余：
（1）6! mod 7（2）10! mod 11（3）16! mod 17
【解】（1）6! mod 7=6（2）10! mod 11=10（3）16! mod 17=16

26.分别计算整数 2^{32}、2^{47}、2^{200} 模 47 后的最小剩余系（即小于 47 的最小正整数）。
【解】由快速求余算法得$2^{32} (\bmod\ 47) = 2$，因为 47 为素数，2 与 47 互素。由费马小定理有

$$2^{46} \equiv 1 (\bmod\ 47), 2^{47} = 2 \times 2^{46} \equiv 2 (\bmod\ 47)$$
$$2^{200} = (2^{46})^4 \times 2^{16} \equiv 2^{16} (\bmod\ 47)$$

再由快速求余算法得$2^{16} (\bmod\ 47) = 18$.

27.写出全是奇数的模 13 的完全剩余系以及全是合数的模 10 的完全剩余系。
【解】$z_{13} = \{[0], [1], [2], [3], [4], [5], [6], [7], [8], [9], [10], [11], [12]\}$，于是集合{13,1,15,3,17,5,19,7,21,9,23,11,25}是一个全是奇数的模 13 的完全剩余系
$z_{10} = \{[0], [1], [2], [3], [4], [5], [6], [7], [8], [9]\}$,故集合{10,21,12,33,4,15,6,27,8,9}是一个全是合数的模 10 的完全剩余系。

28.写出全是偶数的模 9 简化完全剩余系。能否给出全是偶数的模 10 简化完全

剩余系。
【解】(1)$z_9=\{[0],[1],[2],[3],[4],[5],[6],[7],[8]\}$,于是集合$\{10,2,4,14,16,8\}$是一个全是偶数的模 9 简化完全剩余系。
(2)不能，因为$10k$能被 2 整除，$10k+2t$也能被 2 整除。

29.使用费马小定理计算下列各式。
（1）$2^{325} \bmod 5$（2）$3^{516} \bmod 7$（3）$8^{1003} \bmod 11$
【解】(1)$2^{235}\equiv(2^4)^{81}\times 2(\mathrm{mod}\ 5)\equiv 1^{81}\times 2(\mathrm{mod}\ 5)\equiv 2(\mathrm{mod}\ 5)$.
(2)3 和 7 互素，$3^{516}\equiv(3^6)^{86}(\mathrm{mod}\ 7)\equiv 1(\mathrm{mod}\ 7)$.
(3)11 和 8 互素
$8^{1003}\equiv(8^{10})^{100}\times 8^3(\mathrm{mod}\ 11)\equiv 1^{100}\times 8^3(\mathrm{mod}\ 11)\equiv 6(\mathrm{mod}\ 11)$.

30.求线性同余方程组$x\equiv 4(\mathrm{mod}\ 11)$，$x\equiv 3(\mathrm{mod}\ 17)$的所有解。
【解】因为 11 与 17 互素，故方程组只有一个解。11 模 17 的逆为-3，17 模 11 的逆为 2，于是$x=4\times 17\times 2+3\times 11\times(-3)=37$

31.求线性同余方程组$x\equiv 1(\mathrm{mod}\ 2),x\equiv 2(\mathrm{mod}\ 3),x\equiv 3(\mathrm{mod}\ 5)$的所有解。
【解】因为$2,3,5$两两互素，所有该方程组有唯一的一组解。取$m_1=2,m_2=3,m_3=5,M=30$,则有$M_1=15,M_2=10,M_3=6$.
由$15y_1\equiv 1(\mathrm{mod}\ 2)$有$y_1\equiv 1(\mathrm{mod}\ 2)$,由$10y_2\equiv 1(\mathrm{mod}\ 3)$有$y_2\equiv 1(\mathrm{mod}\ 3)$,由$6y_3\equiv(\mathrm{mod}\ 5)$有$y_3\equiv 1(\mathrm{mod}\ 5)$.
因此有$x\equiv 1\times 15\times 1+2\times 10\times 1+3\times 6\times 1\equiv 53\equiv 23(\mathrm{mod}\ 30)$，即
$x=23+30t,t\in Z$.

32.求下列整数的模 17 的一个逆：4,5,7,16
【解】由题可得$4k_1\equiv 1(\mathrm{mod}\ 17)$得$k_1=13$　　$5k_2\equiv 1(\mathrm{mod}\ 17)$得$k_2=7$
$7k_3\equiv 1(\mathrm{mod}\ 17)$得$k_3\ =5$　　$16k_4\equiv 1(\mathrm{mod}\ 17)$得$k_4=-1$

33.求一整数，它被10或11除余9，被13整除。
【解】设该整数为x，则有$\begin{cases}x\equiv 9(\mathrm{mod}\ 10)\\x\equiv 9(\mathrm{mod}\ 11)\\x\equiv 0(\mathrm{mod}\ 13)\end{cases}$,取$m_1=10,m_2=11,m_3=13$,
$M=1430$,则有$M_1=143,M_2=130,M_3=110$.
由$143y_1\equiv 1(\mathrm{mod}\ 10)$有 $3y_1\equiv 1(\mathrm{mod}\ 10)$,则$y_1\equiv 7(\mathrm{mod}\ 10)$,由$130y_2\equiv 1(\mathrm{mod}\ 11)$有 $9y_2\equiv 1(\mathrm{mod}\ 11)$,则$y_2\equiv 5(\mathrm{mod}\ 11)$,所以有$x\equiv 9\times 143\times 7+9\times 130\times 5\equiv 14859\equiv 559(\mathrm{mod}\ 1430)$,所以该整数为 559.

34.有一队士兵，若三人一组，则余一人，若五人一组，则缺两人，若十一人一组，则余 3 人。已知这队士兵不超过 170 人，问这队士兵共有多少人？
【解】设该队士兵共有x人，则有$\begin{cases}x\equiv 1(\mathrm{mod}\ 3)\\x\equiv 3(\mathrm{mod}\ 5)\\x\equiv 3(\mathrm{mod}\ 11)\end{cases}$，取$m_1=3$，$m_2=5,m_3=11,M=165$,则有$M_1=55,M_2=33,M_3=15$.
由 $55y_1\equiv 1(\mathrm{mod}\ 3)$有$y_1\equiv 1(\mathrm{mod}\ 3)$, 由 $33y_2\equiv 1(\mathrm{mod}\ 5)$有 $3y_2\equiv 1(\mathrm{mod}\ 5)$

则$y_2 \equiv 2(\text{mod } 5)$,由$15y_3 \equiv 1(\text{mod } 11)$有 $4y_3 \equiv 1(\text{mod } 11)$,则$y_3 \equiv 3(\text{mod } 11)$,所以有:

$$x \equiv 1 \times 55 \times 1 + 3 \times 33 \times 2 + 3 \times 15 \times 3 \equiv 388 \equiv 58(\text{mod } 165)$$

所以该队士兵共有 58 人。

35.为信息“DO NOT PASS GO”加密，先把字母翻译成整数，再用下面给的加密函数计算，然后把整数翻译成字母：

（1）$f(p) = (p+3) \text{ mod } 26$(凯撒密码)（2）$f(p) = (3p+7) \text{ mod } 26$

【解】首先将字母翻译成对应的数字

明文：DO NOT PASS GO明文数字：3 14 13 14 19 15 0 18 18 6 14

(1) 密文数字：6 17 16 17 22 18 3 21 21 9 17 密文：GR QRW SDVV JR

(2) 密文数字：16 23 20 23 12 0 7 9 9 25 23 密文：QX VXM AHJJ ZX

36.为下列用凯撒密码加密的信息解密：

（1）EOXH MHDQV（2）WHVW WRGDB（3）HDW GLP VXP

【解】（1）密文数字：4 14 23 7 12 7 3 16 21 明文数字：1 11 20 4 9 4 0 13 18

明文字母：BLUE JEANS

（2）密文数字：22 7 21 22 22 17 6 3 1 明文数字：19 4 18 19 19 14 3 0 24

明文字母：TEST TODAY

（3）密文数字：7 3 22 6 11 15 21 23 15 明文数字：4 0 19 3 8 12 18 20 12

明文字母：EAT DIM SVM

37.证明：对任意整数$a, \gcd(a, 561) = 1$有$a^{560} \equiv 1(\text{mod } 561)$，但561是合数。

【证明】因为$\gcd(a, 561) = 1$,所以a和561互素。对561做质因子分解有$561 = 3 \times 11 \times 17$，由费马小定理有:

$$a^2 = 1(\text{mod } 3)\text{有}a^{560} \equiv (a^2)^{280} \equiv 1(\text{mod } 3), a^{10} \equiv 1(\text{mod } 11)\text{于是}a^{560} \equiv (a^{10})^{56} \equiv 1(\text{mod } 11), a^{16} \equiv 1(\text{mod } 17)\text{于是}a^{560} \equiv (a^{16})^{35} \equiv 1(\text{mod } 17)$$

又因为3,11,17 均为素数，则有$a^{560} \equiv 1(\text{mod } 3 \times 11 \times 7)$，即$a^{560} \equiv 1(\text{mod } 560)$.

38.设p, q是两个不同的素数，证明：$p^{q-1} + q^{p-1} \equiv 1(\text{mod } pq)$.

【证明】由费马小定理可知$p^{q-1} \equiv 1(\text{mod } q), q^{p-1} \equiv 1(\text{mod } p)$，因为$q|q^{p-1}$则有$(p^{q-1} + q^{p-1}) \equiv 1(\text{mod } q)$，同理有$(p^{q-1} + q^{p-1}) \equiv 1(\text{mod } p)$，由同余性质可得$(p^{q-1} + q^{p-1}) \equiv 1(\text{mod } pq)$.

39.考虑RSA算法$p = 11, q = 9, n = 319, e = 3$,那么$d$应该是多少呢？待加密的明文为$M = 100$，密文是多少？

【解】由$ed \equiv 1(\text{mod } (p-1)(q-1))$,代入得$d = 21$.

设密文为C,由$C = M^e(\text{mod } n)$得$C = 254$.

40.在RSA算法中，设张三的公钥是$e = 3$。证明：如果敌人得到了张三的私钥d，那么敌人就有以k的多项式数量级的算法分解大整数n，这里k为n的二进制表示长度。

【解】略

41.有一批集装箱要装上一艘载重量为c的轮船。其中集装箱i的重量为W_i.最优装载问题要求确定在装载体积不受限制的情况下，将尽可能多的集装箱装上轮船。对于给定的n个集装箱和轮船的载重量C，设计算法并编程计算装入最多时的集装箱个数。

【解】这是经典的背包问题，可采用贪心算法，每次装入最小重量的集装箱，直至总重等于或超过 C。关键代码如下：

```
int most_goods(int[] w, n, c){
	int temp = 0;
	int sum, counter = 0, 0;
	for(int i = 0; i < w.length -1; i++){
		for (int j = i+1; j < w.length; j++){
			if (w[i] > w[j]){
				temp = w[i];
				w[i] = w[j];
				w[j] = temp;
			}
		}
}
	while (sum <= c){
		sum += w[counter];
		counter += 1;
}
	return counter – 1;
}
```

42.设有n件工作分配给n个人。为第i个人分配工作j所需的费用为$c[i][j]$.试设计一个算法，计算最佳工作分配方案，为每人都分配1件不同工作，并使总费用达到最小。

【解】可将问题抽象为具有$2n$个节点的图模型来求解。关键代码如下：

```
const int oo=1e9;
const int mm=11111;
const int mn=888;
int node,src,dest,edge;
int ver[mm],flow[mm],cost[mm],next[mm];
int head[mn],dis[mn],p[mn],q[mn],vis[mn];
void prepare(int _node,int _src,int _dest)
{
	node=_node,src=_src,dest=_dest;
	for(int i=0; i<node; ++i)
		head[i]=-1,vis[i]=0;
	edge=0;
}
void addedge(int u,int v,int f,int c)
{
 ver[edge]=v,flow[edge]=f,cost[edge]=c,next[edge]=head[u],head[u]=edge++;
	ver[edge]=u,flow[edge]=0,cost[edge]=-
c,next[edge]=head[v],head[v]=edge++;
}
bool spfa()
```

```
{
	int i,u,v,l,r=0,tmp;
	for(i=0; i<node; ++i)
		dis[i]=oo;
	dis[q[r++]=src]=0;
	p[src]=p[dest]=-1;
	for(l=0; l!=r; (++l>=mn)?l=0:l)
	{
		for(i=head[u=q[l]],vis[u]=0; i>=0; i=next[i])
			if(flow[i]&&dis[v=ver[i]]>(tmp=dis[u]+cost[i]))
			{
				dis[v]=tmp;
				p[v]=i^1;
				if(vis[v])
					continue;
				vis[q[r++]=v]=1;
				if(r>=mn)
					r=0;
			}
	}
	return p[dest]>-1;
}
int SpfaFlow()
{
	int i,ret=0,delta;
	while(spfa())
	{
		for(i=p[dest],delta=oo; i>=0; i=p[ver[i]])
			if(flow[i^1]<delta)
				delta=flow[i^1];
		for(i=p[dest]; i>=0; i=p[ver[i]])
			flow[i]+=delta,flow[i^1]-=delta;
		ret+=delta*dis[dest];
	}
	return ret;
}
int main()
{
	int n,m;
	while(~scanf("%d",&n))
	{
		prepare(n+n+2,0,n+n+1);
		for(int i=1; i<=n; i++)
		{
			addedge(src,i,1,0);
			addedge(i+n,dest,1,0);
			for(int j=1; j<=n; j++)
			{
				scanf("%d",&m);
```

```
                    addedge(i,n+j,oo,m);
                }
            }
            int ans=SpfaFlow();
            printf("%d\n",ans);
            for(int i=0; i<edge; i++)
            {
                if((i&1)==0)
                {
                    flow[i]+=flow[i^1];
                    flow[i^1]=0;
                    swap(cost[i],cost[i^1]);
                }
            }
            ans=SpfaFlow();
            printf("%d\n",-ans);
        }
        return 0;
}
```

43.一个长,宽,高分别是m,n,p的长方体被分割成$m\times n\times p$个小立方体。每个小立方体内含一个整数。试着设计一个算法，计算所给长方体的最大子长方体。子长方体的大小由它内部所含所有整数之和确定。

【解】最大子长方体问题，采用动态规划的思想解决。关键代码如下：

```
const int maxn=20;
int maxSum1D(int c[],int p)
{
int sum=0,d=0;
for(int i=0;i<p;i++)
{
if(d>0)
d=d+c[i];
else
d=c[i];
if(sum<d)
sum=d;
}
    return sum;
}
int maxSum2D(int b[][maxn],int n,int p)
{
int c[maxn];
int max,sum=0;
for(int i=0;i<n;i++)
{
for(int tempk=0;tempk<p;tempk++)
c[tempk]=0;
for(int j=i;j<n;j++)
{
```

```
for(int k=0;k<p;k++)
c[k]+=b[j][k];
max=maxSum1D(c,p);
if(max>sum) sum=max;
}
}
return sum;
}
int maxSum3D(int a[][maxn][maxn],int m,int n,int p)
{
int b[maxn][maxn];
int max,sum=0;
for(int i=0;i<m;i++)
	{
for(int tempn=0;tempn<n;tempn++)
for(int tempk=0;tempk<p;tempk++)
b[tempn][tempk]=0;
for(int j=i;j<m;j++)
{
for(int k=0;k<n;k++)
{
for(int l=0;l<p;l++)
{
b[k][l]+=a[j][k][l];
}
}
max=maxSum2D(b,n,p);
if(max>sum) sum=max;
}
}
 return sum;
}
int main(int argc, char* argv[])
{
int a[maxn][maxn][maxn];
int m,n,p;
cin>>m>>n>>p;
for(int i=0;i<m;i++)
for(int j=0;j<n;j++)
for(int k=0;k<p;k++)
cin>>a[i][j][k];
cout<<maxSum3D(a,m,n,p)<<endl;
return 0;
}
```

44.世界名画陈列馆由$m \times n$个排列成矩形阵列的陈列室组成。为了防止名画被盗，要 在室中设置警卫机器人哨位。每个警卫机器人除了监视它所在陈列室外，还可监视与它所 在的陈列室相邻的上、下、左、右 4 个陈列室。试设计一个安排警卫机器人哨位的算法， 使得馆中每一个陈列室都在警卫机器人的监视之下，

且所用的警卫机器人数最少。

【解】关键代码如下：

```
const int MAX = 50;
int board[MAX][MAX];
int root[MAX][MAX];
int m, n;
int k = 0;
int bestk;
void compute()
{
	memset(root, 0, sizeof(root));
	bool ok = false;
	int i, k;
	if(m == 1)
	{
		k = n / 3;
		if(n%3 == 1)
		{
			for(i=0; i<=k; i++)
				root[1][3*i+1] = 1;
		}
		else
		{
			if(n%3 == 0)
				k--;
			for(i=0; i<=k; i++)
				root[1][3*i+2] = 1;
		}
		bestk = k + 1;
		ok = true;
	}
	if(n == 1)
	{
		k = m / 3;
		if(m%3 == 1)
		{
			for(i=0; i<=k; i++)
				root[1][3*i+1] = 1;
		}
		else
		{
			if(m%3 == 0)
				k--;
			for(i=0; i<=k; i++)
				root[1][3*i+2] = 1;
		}
		bestk = k + 1;
		ok = true;
	}
```

```
    if(m==2 && n%2 == 1)
    {
        int k = n / 4;
        if(m%4 == 0)
            k--;
        for(i=0; i<=k; i++)
        {
            root[1][4*i+3] = 1;
            root[2][4*i+1] = 1;
        }
        bestk = 2 * k + 2;
        ok = true;
    }
    if(n==2 && m%2 == 1)
    {
        int k = m / 4;
        if(n%4 == 0)
            k--;
        for(i=0; i<=k; i++)
        {
            root[1][4*i+3] = 1;
            root[2][4*i+1] = 1;
        }
        bestk = 2 * k + 2;
        ok = true;
    }
    if(n==4 && m==4)
    {
        root[1][1] = 1;
        root[1][4] = 1;
        root[4][1] = 1;
        root[4][4] = 1;
        bestk = 4;
        ok = true;
    }
    if(ok)
    {
        cout << "最少的机器人个数为：" << bestk << endl;
        cout << "机器人位置为：\n";
        for(int i=1; i<=m; i++)
        {
            for(int j=1; j<=n; j++)
                cout << root[i][j] << "\t";
            cout << endl;
        }
    }
    else
        cout << "No Solution!\n";
}
```

45.给定n个矩阵$A_1, A_2, \cdots, A_n$，其中A_i与A_{i+1}是可乘的，其中$i = 1,2...,n-1$。确定计算矩阵连乘积的次序，使得依此次序计算矩阵连乘积所需的数乘次数最少。输入数据为矩阵个数和每个矩阵规模，输出为矩阵连乘积的计算次序和最少数乘次数。

【解】采用动态规划思想可解决问题。部分关键代码如下

```
void matrixChain(int n,int p[],int m[][100],int s[][100])
{
    for(int i=1;i<=n;i++){
      m[i][i]=0;
    }
    for(int r=2;r<=n;r++){
      for(int i=1;i<=n-r+1;i++){
            int j=i+r-1;
            m[i][j]=m[i+1][j]+p[i-1]*p[i]*p[j];
            s[i][j]=i;
            for(int k=i+1;k<j;k++){
                  int t=m[i][k]+m[k+1][j]+p[i-1]*p[k]*p[j];
                  if(t<m[i][j])
                  {
                        m[i][j]=t;
                        s[i][j]=k;
                  }
            }
      }
    }
}
void print_optimal_parents(int s[100][100],int i,int j)
  {
        if( i == j)
              cout<<"A"<<i;
        else
        {
              cout<<"(";
              print_optimal_parents(s,i,s[i][j]);
              print_optimal_parents(s,s[i][j]+1,j);
              cout<<")";
        }

  }
int main()
{
      int p[1000];
      int m[100][100];
      int s[100][100];
      memset(p,0,sizeof(p));
      memset(m,0,sizeof(m));
      memset(s,0,sizeof(s));
      cout << "请输入矩阵的个数"<< endl;
```

```
    int n;
    cin >> n;
    cout << "输入每个矩阵行数与列数"<< endl;
    for(int i=0;i<=n;i++){
        cin >> p[i];
    }
    matrixChain(n,p,m,s);
    cout <<"相乘最少次数为"<<m[1][n]<<endl;
    print_optimal_parents(s,1,n);
    return 0;
}
```

46. 设有6种不同面值的硬币，分别为5分，1角，2角，5角，1元，2元。现用这些面值的硬币购物和找零。购物时可用的各种面值的硬币个数存于数组$Coins[1:6]$中，商店里各面值的硬币有足够多。在1次购物中希望使用最少硬币个数。例如1 次购物需要付款0.55元，没有5角的硬币，只好用$2 \times 20 + 10 + 5$共4枚硬币来付款。如果付出1元，找回4角5分，同样需要4枚硬币。但是如果付出1.05元（1枚1元和1枚5分），找回5角，只需要3枚硬币，这个方案用的硬币个数最少。对于给定的各种面值的硬币个数和付款金额，设计使用硬币个数最少的交易方案。

【解】为方便编写代码，这里假设硬币的单位为分，即5分为5，一角为10，可设置一个数组 min[100010],min[i]用来存储用户手里的硬币付i分最少能用多少硬币。关键代码如下：

```
#define MAX 1000000
int mon[6]={5,10,20,50,100,200};
int marketret(int money)
{
    int r=0,i;
    for(i=5;i>-1&&money;i--)
    {
        r+=money/mon[i];
        money%=mon[i];
    }
    return r;
}
int main()
{
    while(1)
    {
        int number[6],money,max,min[100010],pay=0,i,j;
        for(i=0,max=0;i<6;i++)
        {
            cin>>number[i];
            max+=number[i]*mon[i];
        }
        cin>>pay;
        for(i=1;i<=max;i++)
            min[i]=MAX;
```

```
        min[0]=0;
        for(i=0;i<6;i++)
            while(number[i])
            {
                number[i]--;
                for(j=0;j<=max;j++)

    if(min[j]!=MAX&&j+mon[i]<=max&&min[j]+1<min[j+mon[i]])
                        min[j+mon[i]]=min[j]+1;
            }
        int out=MAX;
        for(i=pay;i<=max;i++)
            if(min[i]!=MAX&&(i-pay)%5==0&&min[i]+marketret(i-pay)<out)
                out=min[i]+marketret(i-pay);
        if(out<MAX)
            cout<<out<<endl;
        else
            cout<<"impossible"<<endl;
    }
}
```

第三章 命题演算与推理

1. 下列语句哪些是命题，那些不是命题？是真命题还是假命题，并说明理由。

（1）离散数学是计算机系的一门必修课；	真命题
（2）太阳系以外的星球上有生物；	命题，真假未知
（3）蓝色和黄色可以调成绿色；	真命题
（4）明年的春节是个大晴天。	命题，真假未知
（5）$x+5=8$；	命题，真假未知
（6）平行于同一直线的两条平面一定平行；	假命题
（7）$1+2=3$ 当且仅当$4+5\neq 9$；	假命题
（8）难道对顶角不相等吗?	不是命题
（9）合肥是中国的首都；	假命题
（10）2 是素数，当且仅当三角形有三条边。	假命题

2. 符号化下面的命题

（1）计算机系的同学球打得好，歌唱得好。

【解】计算机系的同学球打得好表示为p, 计算机系的同学歌唱得好表示为q。

$$p\wedge q$$

（2）他可能是100米或400赛跑冠军。

【解】他是100米赛跑冠军表示为p，他是400米赛跑冠军表示为q。

$$p\vee q$$

（3）只要努力学习，成绩会好的。

【解】努力学习表示为p，成绩会好的表示为q

$$p\rightarrow q$$

（4）只有休息好，才能工作好。

【解】休息好表示为p，工作好表示为q。

$$q\rightarrow p$$

（5）程序运行停机的原因在于语法错误或者输入参数不合理。

【解】语法错误表示为q, 输入参数不合理表示为r, 程序运行停机表示为p

$$q\vee r\rightarrow p$$

（6）如果$f(x)$在点x_0处可导，则$f(x)$在点x_0处可微，反之亦然。

【解】f(x)在点x_0处可导表示为p， f(x)在点x_0处可微表示为q

$$p\leftrightarrow q$$

（7）如果汪老师和王老师都不讲这门课，那么杨老师就讲这门课。

【解】p为汪老师讲这门课，q为王老师讲这门课，r为杨老师讲这门课

$$\neg(p\vee q)\rightarrow r$$

（8）非工作人员不得入内。

【解】p表示为某人是工作人员，q表示为某人不得入内

$$\neg p\rightarrow \neg q$$

（9）除非她以短信或者书面方式正式通知我，否则我将不会参加明天的婚礼。

【解】p为她以短信方式正式通知我，q为她以书面方式正式通知我，r为我将会参加明天的婚礼

$$r\rightarrow p\vee q$$

（10）或者你没有写作业，或者你的作业本被弄丢了。

【解】p为你没有写作业，q为你的作业本被弄丢了

$$p \vee q$$

3. 设q: $1+1=2$；r:大熊猫产在中国；s:中国科学技术大学在北京。求下列命题的真值：

(1)$(q \leftrightarrow r) \rightarrow s$；

(2)$((s \rightarrow (q \wedge r)) \leftrightarrow \neg q$

(3)$\neg s \rightarrow (\neg q \vee \neg r \vee s)$；

(4)$(q \wedge r \wedge \neg s) \leftrightarrow ((\neg q \vee \neg r) \rightarrow s)$

【解】q为真，r为真，s为假

（1） 0

（2） 0

（3） 0

（4） 1

4. 构造下列公式的真值表，并指出其成真赋值和成假赋值。

（1）$(\neg Q \rightarrow R) \wedge (R \rightarrow S)$;

（2）$\left((\neg Q \rightarrow Q \quad \wedge \neg R) \rightarrow S\right) \wedge R \vee \neg S$;

（3）$R \wedge (Q \rightarrow R) \rightarrow Q$;

（4）$\neg(Q \vee R \wedge S) \leftrightarrow (Q \vee R) \wedge (Q \vee S)$;

表3.1 第4题第(1)(2)小题真值表

Q	R	S	$(\neg Q \rightarrow R) \wedge (R \rightarrow S)$	$((\neg Q \rightarrow Q \wedge \neg R) \rightarrow S) \wedge R \vee \neg S$
0	0	0	0	1
0	0	1	0	0
0	1	0	0	1
0	1	1	1	0
1	0	0	1	0
1	0	1	1	1
1	1	0	0	0
1	1	1	1	1

(1)成真赋值:011,100,101,111　成假赋值:000,001,010,110

(2)成真赋值:000,010,101,111　成假赋值:001,011,100,110

表3.2 第4题第(3)小题真值表

Q	R	$Q \rightarrow R$	$R \wedge (Q \rightarrow R)$	$R \wedge (Q \rightarrow R) \rightarrow Q$
0	0	1	0	1
0	1	1	1	0
1	0	0	0	1
1	1	1	1	1

(3)成真赋值:00,10,11　成假赋值01

表3.3 第4题第(4)小题真值表

Q	R	S	$\neg(Q \vee R \wedge S) \leftrightarrow (Q \vee R) \wedge (Q \vee S)$
0	0	0	0
0	0	1	0
0	1	0	0
0	1	1	0
1	0	0	1
1	0	1	0
1	1	0	1
1	1	1	0

(4)成真赋值:100,110　成假赋值:000,011,100,101,110,111

5. 判断下面语句哪些是简单命题，哪些是复合命题？对于复合命题给出其关联词。
（1）杨光不是老师；
（2）小王会法语和英语；
（3）$1+3=4$ 当且仅当今天是国庆节；
（4）等价关系是离散数学中的一个概念。
【解】
(1)复合命题，关联词：不是
(2)复合命题，关联词：和
(3)复合命题，关联词：当且仅当
(4)简单命题

6. 判断下列字符串是否为命题公式，为什么？
(1)$((q \vee r) \wedge t) \rightarrow (q \leftrightarrow r)$；
【解】是
(2)$(\rightarrow q \ \ \wedge r) \vee t$；
【解】不是，→是二元联结词
(3)$(q \vee r) \wedge t$；
【解】是
(4)$\leftrightarrow (q \rightarrow r)$；
【解】不是，↔是二元联结词
(5)$(q \vee r))\neg \vee t$
【解】不是，多了一个括号，¬不对。

7. 构造下面命题公式真值表，并指出哪些是永真公式、永假公式、可满足公式：
（1）$(Q \rightarrow Q) \vee (Q \rightarrow \neg Q)$；
（2）$Q \rightarrow (Q \vee R \vee S)$；
（3）$(Q \vee \neg Q) \rightarrow \neg R$；
（4）$((Q \rightarrow R) \wedge (R \rightarrow S)) \rightarrow (Q \rightarrow S)$；
（5）$((Q \vee R) \rightarrow S) \leftrightarrow R$；
（6）$(Q \rightarrow R) \leftrightarrow (R \rightarrow Q)$
（7）$(Q \vee R) \wedge (\neg Q \vee R) \wedge (Q \vee \neg R) \wedge (\neg Q \vee \neg R)$；
（8）$(Q \wedge R) \vee (\neg Q \wedge R) \vee (Q \wedge \neg R) \vee (\neg Q \wedge \neg R)$

表3.4 第7题第(1)小题真值表

Q	$\neg Q$	$Q \to Q$	$Q \to \neg Q$	$(Q \to Q) \vee (Q \to \neg Q)$
0	1	1	1	1
1	0	1	0	1

表3.5 第7题第(2)(4)(5)小题真值表

Q	R	S	$Q \to (Q \vee R \vee S)$	$((Q \to R) \wedge (R \to S)) \to (Q \to S)$	$((Q \vee R) \to S) \leftrightarrow R$
0	0	0	1	1	0
0	0	1	1	1	0
0	1	0	1	1	0
0	1	1	1	1	1
1	0	0	1	1	1
1	0	1	1	1	0
1	1	0	1	1	0
1	1	1	1	1	1

表3.6 第7题第(3)(6)小题真值表

Q	R	$(Q \vee \neg Q) \to \neg R$	$(Q \to R) \leftrightarrow (R \to Q)$
0	0	1	1
0	1	0	0
1	0	1	0
1	1	0	1

表3.7 第7题第(7)(8)小题真值表

Q	R	$(Q \vee R) \wedge (\neg Q \vee R) \wedge (Q \vee \neg R) \wedge (\neg Q \vee \neg R)$	$(Q \wedge R) \vee (\neg Q \wedge R) \vee (Q \wedge \neg R) \vee (\neg Q \wedge \neg R)$
0	0	0	1
0	1	0	1
1	0	0	1
1	1	0	1

综上： (1)(2)(8)(4)为永真式
(7)为永假式
(3)(5)为可满足式

8. 设命题B_1，B_2的真值为1，B_3，B_4的真值为0，求下列命题的真值：
$(B_1 \vee (B_2 \longrightarrow (B_3 \wedge \neg B_1))) \leftrightarrow (B_2 \vee \neg B_4)$

【解】 $\because B_3 \wedge \neg B_1 = 0$
$B_2 \longrightarrow (B_3 \wedge \neg B_1) = 0$
$B_1 \vee (B_2 \longrightarrow (B_3 \wedge \neg B_1)) = 1$
$B_2 \vee \neg B_4 = 1$
$\therefore$ 原式$= 1$

9. 设公式$B = q \to r$，$C = \neg q \wedge r$，用真值表验证公式B和C适合德摩根律：

$$\neg(B \vee C) \Leftrightarrow \neg B \wedge \neg C$$

【解】

表3.8 第9题真值表

q	r	B	C	¬(B ∨ C)	¬B ∧ ¬C
0	0	1	0	0	0
0	1	1	1	0	0
1	0	0	0	1	1
1	1	1	0	0	0

$\therefore \neg(B \vee C) \Leftrightarrow \neg B \wedge \neg C$

10. 用等值演算证明下列公式，并写出其对偶的公式。
（1）$(\neg(\neg Q \vee \neg R) \vee \neg(\neg Q \vee R)) \Leftrightarrow Q$
（2）$(Q \vee \neg R) \wedge (Q \vee R) \wedge (\neg Q \vee \neg R) \Leftrightarrow \neg(\neg Q \vee R)$
（3）$R \vee \neg((\neg Q \vee R) \wedge Q) \Leftrightarrow U$
【解】
(1) $(\neg(\neg Q \vee \neg R) \vee \neg(\neg Q \vee R)) \Leftrightarrow (Q \wedge R) \vee (Q \wedge \neg R) \Leftrightarrow Q \wedge (R \vee \neg R) \Leftrightarrow Q$
对偶公式：Q
(2) $(Q \vee \neg R) \wedge (Q \vee R) \wedge (\neg Q \vee \neg R) \Leftrightarrow Q \wedge (R \vee \neg R) \wedge (\neg Q \vee \neg R)$
$\Leftrightarrow Q \wedge (\neg Q \vee \neg R) \Leftrightarrow (Q \wedge \neg Q) \vee (Q \wedge \neg R) \Leftrightarrow Q \wedge \neg R \Leftrightarrow \neg(\neg Q \vee R)$
对偶公式：$Q \vee \neg R$
(3) $R \vee \neg((\neg Q \vee R) \wedge Q) \Leftrightarrow R \vee (\neg (\neg Q \vee R) \vee \neg Q)$
$\Leftrightarrow R \vee ((Q \wedge \neg R) \vee \neg Q) \Leftrightarrow U$
对偶公式：$R \wedge ((Q \vee \neg R) \wedge \neg Q)$

11. 用等值演算法判断公式类型，并对不是重言式的可满足式用真值表法求出成真赋值：
（1）$\neg((q \wedge r) \rightarrow r)$；（2）$(q \rightarrow (q \vee r)) \vee (q \rightarrow s)$；（3）$(q \vee r) \rightarrow (q \wedge s)$ 。
【解】
（1）$\neg((q \wedge r) \rightarrow r) \Leftrightarrow \neg(\neg (q \wedge r) \vee r)$
$\Leftrightarrow \neg((\neg q \vee \neg r) \vee r) \Leftrightarrow F$ 永假公式
（2）$(q \rightarrow (q \vee r)) \vee (q \rightarrow s) \Leftrightarrow (\neg q \vee (q \vee r)) \vee (\neg q \vee s) \Leftrightarrow T$ 永真公式
（3）$(q \vee r) \rightarrow (q \wedge s) \Leftrightarrow \neg (q \vee r) \vee (q \wedge s)$ 不是重言式

表3.9 第11题真值表

q	r	s	$\neg(q \vee r)$	$(q \wedge s)$	$\neg (q \vee r) \vee (q \wedge s)$
0	0	0	1	0	1
0	0	1	1	0	1
0	1	0	0	0	0
0	1	1	0	0	0
1	0	0	0	0	0
1	0	1	0	1	1
1	1	0	0	0	0
1	1	1	0	1	1

12. 试写出下列公式的对偶式和内否式：

（1） $(\neg Q \wedge R) \rightarrow ((R \vee \neg S) \wedge Q)$；
（2） $(Q \rightarrow \neg R) \wedge ((R \vee S) \wedge \neg Q)$。
【解】
（1） 原式：$(Q \vee \neg R) \vee ((R \vee \neg S) \wedge Q)$
对偶式：$(Q \wedge \neg R) \wedge ((R \wedge \neg S) \vee Q)$
内否式：$(\neg Q \vee R) \vee ((\neg R \vee S) \wedge \neg Q)$
（2） 原式：$(\neg Q \vee \neg R) \wedge ((R \vee S) \wedge \neg Q)$
对偶式：$(\neg Q \wedge \neg R) \vee ((R \wedge S) \vee \neg Q)$
内否式：$(Q \vee R) \wedge ((\neg R \vee \neg S) \wedge Q)$

13. 分析下列命题公式是否为等值式。
（1）$Q \rightarrow R$和$\neg R \rightarrow \neg Q$；
【解】是 $Q \rightarrow R \Leftrightarrow \neg Q \vee R \Leftrightarrow R \vee \neg Q \Leftrightarrow \neg R \rightarrow \neg Q$
（2）$Q \rightarrow R$和$\neg Q \vee R$；
【解】是，只有Q为真，R为假，这两式子为假，其余均为真，所以为等值式。
（3）$(Q \vee R) \wedge S$和$(Q \wedge S) \vee (R \wedge S)$；是
（4）$\neg(Q \wedge R)$和$\neg Q \vee \neg R$；是
（5）$Q \leftrightarrow R$和$\neg Q \leftrightarrow \neg R$；是
（6）$(Q \rightarrow R) \wedge (Q \rightarrow \neg R)$和$\neg Q$。
【解】$(Q \rightarrow R) \wedge (Q \rightarrow \neg R) \Leftrightarrow (\neg Q \vee R) \wedge (\neg Q \vee \neg R)$
$\Leftrightarrow \neg Q \vee (\neg R \wedge R) \Leftrightarrow \neg Q$ 是等值式

14. 证明下面公式的等值关系
（1）$(Q \wedge R) \vee (\neg Q \vee (\neg Q \vee R)) \Leftrightarrow \neg Q \vee R$;
（2）$(Q \rightarrow R) \wedge (S \rightarrow R) \Leftrightarrow (Q \vee S) \rightarrow R$。
证明：（1） $(Q \wedge R) \vee (\neg Q \vee (\neg Q \vee R)) \Leftrightarrow (Q \wedge R) \vee (\neg Q \vee R) \Leftrightarrow \neg Q \vee R$
（2）$(Q \rightarrow R) \wedge (S \rightarrow R) \Leftrightarrow (\neg Q \vee R) \wedge (\neg S \vee R) \Leftrightarrow (\neg Q \wedge \neg S) \vee R$
$\Leftrightarrow \neg\ (Q \vee S) \vee R \Leftrightarrow (Q \vee S) \rightarrow R$

15. 回答下面的问题：
（1）$\{\neg, \leftrightarrow\}$是否为联结词完备集？（2）$\{\neg, \wedge, \vee, \rightarrow, \leftrightarrow\}$中有无单元素构成联结词完备集？
【解】（1）不是
（2）无

16. 证明下列联结词集合都是完备集
$T1 = \{\neg, \wedge, \vee, \rightarrow, \leftrightarrow\}$；$T2 = \{\neg, \wedge, \vee, \leftrightarrow\}$；$T3 = \{\neg, \wedge, \vee, \rightarrow\}$；$T4 = \{\neg, \wedge, \vee\}$
证明：$\because \{\neg, \wedge\}$，$\{\neg, \vee\}$，$\{\neg, \rightarrow\}$都是极小完备集。
$\therefore T1, T2, T3$都是完备集。

17. 将公式$B = (Q \rightarrow \neg R) \wedge S$改写成下述联结词中的公式。
$\{\neg, \wedge, \vee\}$；$\{\neg, \wedge\}$；$\{\neg, \vee\}$；$\{\neg, \rightarrow\}$；$\{(\ (Q \uparrow R) \uparrow S)\}$；$\{\downarrow\}$
（1） $B = (Q \rightarrow \neg R) \wedge S$
$= (\neg Q \vee \neg R) \wedge S$

（2） $B = (\neg Q \vee \neg R) \wedge S$
$= \neg\ (Q \wedge R) \wedge S$
（3） $B\ = (\neg Q \vee \neg R) \wedge S$
$= \neg\ (\neg\ (\neg Q \vee \neg R) \vee \neg S)$
（4） $B = \neg\ (\neg\ (Q \to \neg R) \vee \neg S)$
$= \neg\ ((Q \to \neg R) \to \neg S)$
（5） $B = \neg(\neg\ (\neg Q \vee \neg R) \vee \neg S)$
（6） $= \neg(\neg\ (Q \uparrow R) \vee \neg S)$
$= \neg\ (\ (Q \uparrow R) \uparrow S)$
$= ((Q \uparrow R) \uparrow S) \uparrow ((Q \uparrow R) \uparrow S)$
（7） $B\ = (Q \to \neg R) \wedge\ S$
$= \neg\ (Q \wedge R) \wedge S$
$= (\neg Q \downarrow \neg R) \wedge S$
$= (\neg Q \downarrow \neg R) \downarrow \neg S$
$= (Q \downarrow Q\ ) \downarrow (R \downarrow R) \downarrow (S \downarrow S)$

18. 试求下列公式的析取范式和合取范式：
（1）$(\neg Q \vee R) \to\ (Q \leftrightarrow \neg R)$；（2）$(Q \to (R \to \neg S)) \to (S \to (R \to Q)$
（3）$(Q \to R) \wedge (Q \wedge \neg R)$；（4）$Q \to (Q \wedge (R \to Q))$。
【解】
（1）$(\neg Q \vee R) \to (Q \leftrightarrow \neg R)$
$=\ \neg\ (\neg Q \vee R) \vee ((Q \to \neg R)\ \wedge (\neg R \to Q))$
$=\ (Q \wedge \neg R) \vee ((\neg Q \vee \neg R)\ \wedge (R \vee Q))$
$=\ (Q \wedge \neg R)\ \vee (\neg Q \wedge R)$ 析取范式
$=\ (\neg Q \vee \neg R) \wedge (Q \vee R)$ 合取范式
（2）$(Q \to (R \to \neg S)) \to (S \to (R \to Q))$
$= (Q \to (\neg R \vee \neg S)) \to (S \to (\neg R \vee Q))$
$= (\neg Q \vee \neg R \vee \neg S) \to (\neg S \vee \neg R \vee Q)$
$= \neg(\neg Q \vee \neg R \vee \neg S) \vee (\neg S \vee \neg R \vee Q)$
$= (Q \wedge R \wedge S) \vee (\neg S \vee \neg R \vee Q)$
$= (Q \vee \neg S \vee \neg R \vee Q) \wedge (R \vee \neg S \vee \neg R \vee Q) \wedge (S \vee \neg S \vee \neg R \vee Q)$
$= (\neg S \vee \neg R \vee Q) \wedge (1 \vee \neg S \vee Q) \wedge (1 \vee \neg R \vee Q)$
$= (\neg S \vee \neg R \vee Q) \wedge 1 \wedge 1$
$= \neg S \vee \neg R \vee Q$(即为合取范式，也为析取范式)
（3）$(Q \to R) \wedge (Q \wedge \neg R)$
$= (\neg Q \vee R) \wedge (Q \wedge \neg R)$ 析取范式
$= (\neg Q \vee \neg R) \wedge (\neg Q \vee R)\ \wedge (Q \vee \neg R)\ \wedge (\neg Q \vee \neg R)$合取范式
（4）$Q \to (Q \wedge (R \to Q))$
$= \neg\ Q \vee (Q \wedge (\neg\ R \vee Q))$
$= \neg\ Q \vee (Q \wedge \neg\ R) \vee Q$
$= Q \wedge \neg\ R$ 合取范式
$= \neg\ (Q \vee R\ )$ 析取范式

19. 已知命题公式 $A(P, Q, R)$的真值表如下，求其主析取范式和主合取范式。
表3.10第19题公式$A(P, Q, R)$的真值表

P	Q	R	$A(P,Q,R)$
F	F	F	T
F	F	T	F
F	T	F	F
F	T	T	T
T	F	F	T
T	F	T	F
T	T	F	T
T	T	T	T

主析取范式：

$A(P,Q,R) \Leftrightarrow (\neg P \wedge \neg Q \wedge \neg R) \vee (\neg P \wedge Q \wedge R) \vee (P \wedge \neg Q \wedge \neg R) \vee (P \wedge Q \wedge \neg R)$
$\vee (P \wedge Q \wedge R)$

主合取范式

$A(P,Q,R) \Leftrightarrow (P \vee Q \vee \neg R) \wedge (P \vee \neg Q \vee R) \wedge (\neg P \vee Q \vee \neg R)$

20. 试求下列公式的主析取范式和主合取范式

（1）$(\neg Q \rightarrow S) \rightarrow (\neg Q \leftrightarrow (\neg R \wedge S))$；

（2）$(\neg Q \wedge R) \rightarrow ((R \rightarrow S)) \leftrightarrow \neg Q)$；

（3）$(Q \rightarrow \neg R) \vee S$；（4）$Q \rightarrow (Q \wedge (R \rightarrow Q))$。

表3.11 第20题真值表

Q	R	S	$(\neg \mathrm{Q} \rightarrow \mathrm{S}) \rightarrow (\neg \mathrm{Q} \leftrightarrow (\neg \mathrm{R} \wedge \mathrm{S}))$	$(\neg\neg \mathrm{Q} \wedge \mathrm{R}) \rightarrow ((\mathrm{R} \rightarrow \mathrm{S})) \leftrightarrow \neg \mathrm{Q})$
0	0	0	1	1
0	0	1	1	1
0	1	0	1	1
0	1	1	0	1
1	0	0	1	1
1	0	1	0	1
1	1	0	1	1
1	1	1	1	0

（1） 主析取范式为：$(\neg Q \wedge \neg R \wedge \neg S) \vee (\neg Q \wedge \neg R \wedge S) \vee (\neg Q \wedge R \wedge \neg S) \vee (Q \wedge \neg R \wedge \neg S) \vee (Q \wedge R \wedge \neg S) \vee (Q \wedge R \wedge S)$

主合取范式为: $(Q \vee \neg R \vee \neg S) \wedge (\neg Q \vee R \vee \neg S)$

（2） 主析取范式为： $(\neg Q \wedge \neg R \wedge \neg S) \vee (\neg Q \wedge \neg R \wedge S) \vee (\neg Q \wedge R \wedge \neg S) \vee (\neg Q \wedge R \wedge S) \vee (Q \wedge \neg R \wedge \neg S) \vee (Q \wedge \neg R \wedge S) \vee (Q \wedge R \wedge \neg S)$

主合取范式为: $(\neg Q \vee \neg R \vee \neg S)$

（3） $(Q \rightarrow \neg R) \vee S$

$\Leftrightarrow \neg Q \vee \neg R \vee S$ 主析取范式

$\Leftrightarrow (\neg Q \wedge \neg R \wedge \neg S) \vee (\neg Q \wedge R \wedge \neg S) \vee (\neg Q \wedge R \wedge S) \vee (Q \wedge \neg R \wedge \neg S) \vee (Q \wedge \neg R \wedge S) \vee (Q \wedge R \wedge \neg S) \vee (Q \wedge R \wedge S)$ 主合取范式

（4） $Q \rightarrow \left(Q \wedge (R \rightarrow Q)\right)$

$\Leftrightarrow \neg Q \vee \left(Q \wedge (\neg R \vee Q)\right)$

$\Leftrightarrow (\neg Q \vee Q) \wedge (\neg Q \vee \neg R \vee Q))$

$\Leftrightarrow \neg Q \vee \neg R \vee Q$ 主合取范式

$\Leftrightarrow (\neg Q \vee \neg R \vee \neg S) \wedge (\neg Q \vee R \vee \neg S) \wedge (\neg Q \vee R \vee S) \wedge (Q \vee \neg R \vee \neg S) \wedge (Q \vee \neg R \vee S) \wedge (Q \vee R \vee \neg S) \wedge (Q \vee R \vee S)$ 主析取范式

21. 某公司要从赵，钱，孙，李，周五名新毕业的大学生中选派一些人出国学习。选派必须满足以下条件，用主析取范式分析该公式如何选派他们出国。

（1）若赵去，钱也去；（2）李周两个人中至少有一个人去；

（3）钱孙两个人有一个人去，且仅有一个人去；

（4）孙李二人同去或者同不去；（5）若周去，则赵钱也去。

【解】设 A:赵去，B:钱去，C:孙去，D:李去，E:周去

5 个条件分别表示为：

（1） $A \to B$

（2） $D \vee E$

（3） $(B \wedge \neg C) \vee (\neg B \wedge C)$

（4） $(C \wedge D) \vee (\neg C \wedge \neg D)$

（5） $E \to (A \wedge B)$

设$P = (A \to B) \wedge (D \vee E) \wedge ((B \wedge \neg C) \vee (\neg B \wedge C)) \wedge ((C \wedge D) \vee (\neg C \wedge \neg D)) \wedge (E \to (A \wedge B))$

求得P的主析取范式：

$$P = (\neg A \wedge \neg B \wedge C \wedge D \wedge \neg E) \vee (A \wedge B \wedge \neg C \wedge \neg D \wedge E)$$

当A, B, C, D, E分别取值为：0,0,1,1,0或1,1,0,0,1时 P为真

所以应派孙李去或派赵钱周去。

22. 设计一个简单的表决器，表决者每人身旁有一个按钮，若同意则按下按钮；否则不按按钮；当表决结果超过半数时，会场电铃就会响，否则电铃就不会响。试以表决人数为三人的情况下设计表决电路的逻辑关系。

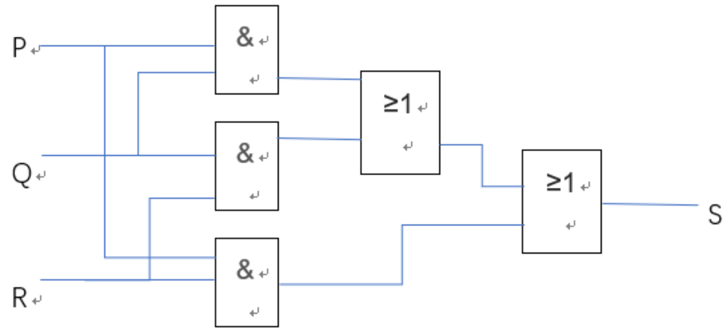
【解】设P, Q, R为三个按钮，S为表决结果

表3.12 第22题真值表

P	Q	R	S
0	0	0	0
0	0	1	0
0	1	0	0
0	1	1	1
1	0	0	0
1	0	1	1
1	1	0	1
1	1	1	1

$$\begin{aligned} S &= (\neg P \wedge Q \wedge R) \vee (P \wedge \neg Q \wedge R) \vee (P \wedge Q \wedge \neg R) \vee (P \wedge Q \wedge R) \\ &= (P \wedge Q) \vee (P \wedge R) \vee (R \wedge Q) \end{aligned}$$

图3.1 简单的表决器



23. 已知$A(P,Q,R)$的主析取范式包含下列小项：$\mathrm{m}_1,\mathrm{m}_3,\mathrm{m}_5\ ,\mathrm{m}_7$，求其主析取范式和主合取范式。

【解】主析取范式为：$(\neg \mathrm{P}\wedge\neg \mathrm{Q}\wedge \mathrm{R})\vee(\neg \mathrm{P}\wedge \mathrm{Q}\wedge \mathrm{R})\vee(\mathrm{P}\wedge\neg \mathrm{Q}\wedge \mathrm{R})\vee(\mathrm{P}\wedge \mathrm{Q}\wedge \mathrm{R})$

主合取范式为：$(P\vee Q\vee R)\wedge(P\vee\neg Q\vee R)\wedge(\neg P\vee Q\vee R)\wedge(\neg P\vee\neg Q\vee R)$

24. 已知命题A 含有命题变元 P,Q,R，且按PQR顺序的主合取范式为$\mathrm{M}_1\wedge\mathrm{M}_2\wedge\mathrm{M}_3$，试求A 的主析取范式，并按 PQR 的顺序写出完整的范式表达式。

【解】 主析取范式为：

$(\neg P\wedge\neg Q\wedge\neg R)\vee(P\wedge\neg Q\wedge\neg R)\vee(P\wedge\neg Q\wedge R)\vee(P\wedge Q\wedge\neg R)\vee(P\wedge Q\wedge R)$

25. 判断下列命题的真假：

(1)永真式的否定是一个永假式； (2)永假式的否定是一个永真式；

(3)两个永真式的合取是一个永真式；(4)两个永真式的析取是一个永真式。

(5)两个永假式的合取是一个永假式；(6)两个永假式的析取是一个永假式。

【解】(1)(2)假 (3)(4)(5)(6)真

26. 用主范式的方法判断下列各题中两式是否等价：

(1)$(Q\to R)\to(Q\wedge R)$和$(\neg Q\wedge R)\wedge(R\to Q)$；

(2)$(Q\to S)\wedge(R\to S)$与$(Q\vee R)\to S$。

【解】(1)$(Q\to R)\to(Q\wedge R)$

$\Leftrightarrow(Q\wedge\neg\ R)\vee(Q\wedge R)$

$\Leftrightarrow Q\wedge(\neg R\vee R)(\neg Q\wedge R)\wedge(R\to Q)\Leftrightarrow(\neg Q\wedge R)\wedge(\neg R\vee Q)\Leftrightarrow F$

不等价

(2)$(Q\to S)\wedge(R\to S)\Leftrightarrow(\neg Q\vee S)\wedge(\neg R\vee S)$

$(Q\vee R)\to S\Leftrightarrow(\neg Q\wedge\neg R)\vee S\Leftrightarrow(\neg Q\vee S)\wedge(\neg R\vee S)$

等价

27. 一个电路中有一个灯泡和3个开关A, B, C。已知在且仅在下述 4 种情况下灯亮：

(1)C 的板键向上，A 和 B 的板键向下；

(2)A 的板键向上，B 和 C 的板键向下；

(3)B和C的板键向上，A的板键向下；

(4)A和B的板键向上，C的板键向下。

28. 设 G 表示灯亮，P, Q, R 分别表示A, B, C的板键向上，则 G 是P, Q, R的命题公式。

（1）求公式 G 的主合取范式；（2）化简公式 G，使其中仅含联结词¬,∨。
【解】由已知条件知：（1）$(\neg P \wedge \neg Q \wedge R)$（2）$(P \wedge \neg Q \wedge \neg R)$
（3）$(\neg P \wedge Q \wedge R)$（4）$(P \wedge Q \wedge \neg R)$
G的主析取范式为$(\neg \mathrm{P} \wedge \neg \mathrm{Q} \wedge \mathrm{R}) \vee (\mathrm{P} \wedge \neg \mathrm{Q} \wedge \neg \mathrm{R}) \vee (\neg \mathrm{P} \wedge \mathrm{Q} \wedge \mathrm{R}) \vee (\mathrm{P} \wedge \mathrm{Q} \wedge \neg \mathrm{R})$
（1）所以G的主合取范式为：$(P \vee Q \vee R) \wedge (P \vee \neg Q \vee R) \wedge (\neg P \vee Q \vee \neg R) \wedge (\neg P \vee \neg Q \vee \neg R)$
（2）$G \Leftrightarrow (P \vee R) \wedge (\neg P \vee \neg R) \Leftrightarrow \neg(\neg(P \vee R) \vee \neg\ (\neg P \vee \neg R))$

29. 判断下面蕴含式是否为永真式：
（1）$\neg(B \to C) \to B$；　　（2）$\neg(B \to C) \to \neg C$；
（3）$\neg C \wedge (B \to C) \to \neg C$；　　（4）$(B \to C) \wedge (C \to D) \to (B \to D)$。
【解】（1）$\neg(B \to C) \to B \Leftrightarrow (B \wedge \neg C) \to B \Leftrightarrow \neg\ (B \wedge \neg C) \vee B$
$\Leftrightarrow (\neg B \vee C) \vee B = T$　永真
（2）$\neg(B \to C) \to \neg C \Leftrightarrow (\neg B \vee C) \vee \neg C = T$　永真
（3）$\neg C \wedge (B \to C) \to \neg C \Leftrightarrow \neg C \wedge (\neg B \vee C) \to \neg C$
$\Leftrightarrow (\neg C \wedge \neg B) \to \neg C \Leftrightarrow C \vee B \vee \neg C = T$　永真
（4）$(B \to C) \wedge (C \to D) \to (B \to D)$
$\Leftrightarrow \neg\ ((\neg B \vee C) \wedge (\neg C \vee D)) \vee (\neg B \vee D)$
$\Leftrightarrow (B \wedge \neg C) \vee (C \wedge \neg D) \vee (\neg B \vee D) = T$　永真
30. 证明下列永真蕴含关系式：
（1）$(Q \to R) \wedge (S \to T) \Rightarrow (Q \wedge S) \to (R \wedge T)$；
（2）$(Q \to R) \wedge (T \to \neg R) \wedge (T \vee S) \wedge \neg S) \Rightarrow \neg Q$；
（3）$S \to \neg R, S \vee T, T \to \neg R, Q \to R \Rightarrow \neg Q$；
（1）证明:假设$(Q \wedge S) \to (R\ \ \wedge T)$为假
则Q, S均为真，R, T至少有一个为假
显然，$(Q \to R) \wedge (S \to T)$必为假，
所以当后件为假时，前件也为假，故原蕴含关系式为永真蕴含关系式
（2）证明: $(Q \to R) \wedge (T \to \neg R) \wedge (T \vee S) \wedge \neg S) \to \neg Q$
$\Leftrightarrow\ \ (\neg Q \vee R) \wedge\ \ (\neg T \vee \neg R) \wedge\ \ (T \wedge \neg S) \to \neg Q$
$\Leftrightarrow\ \ (\neg Q \vee R) \wedge T \wedge \neg S\ \ \wedge \neg R \to \neg Q$
$\Leftrightarrow \neg Q \wedge T \wedge \neg S \wedge \neg R \to \neg Q$
$\Leftrightarrow (Q \vee \neg T \vee S \vee R) \vee \neg Q = T$永真
故原式得证
（3）$S \to \neg R, S \vee T, T \to \neg R, Q \to R \Rightarrow \neg Q$；

（1）	$S \vee T$	引入前提
（2）	$S \to \neg R$	引入前提
（3）	$T \to \neg R$	引入前提
（4）	$\neg R \vee \neg R$	构造性二难推论
（5）	$\neg R$	等价
（6）	$Q \to R$	引入前提
（7）	$\neg Q$	(5)(6)拒求式

31. 判断下列推理是否正确。
（1）每个学生都是勤奋的；每个勤奋而聪明的人在他的工作生活中都将获得成功；小华是学生，并且是聪明的。所以，小华在他的工作中将获得成功。

【解】　设P: 学生小华，Q: 勤奋的，R: 足够聪明的，G: 将在工作中获得成功

前提：$P \to Q$ ，　$Q \wedge R \to G$

条件：P, R　　求证$P \wedge R \to G$

$\because P = T \ \ R = T$

$\therefore Q = T$

$\therefore Q \wedge R = T$

$\therefore G = T$

$\therefore P \wedge R \to G$

（2）如果这里有球赛，则通行是困难的；如果他们按指定的时间达到，则通行是不困难的；他们按指定时间到达了，所以这里没有球赛。

【解】　设P: 这里有球赛 ,Q: 通行困难 ,R: 按时到达

则$(P \to Q) \wedge (R \to \neg Q) \wedge R \to \neg P$

$\Leftrightarrow \neg\ ((\neg P \vee Q) \wedge (\neg R \vee \neg Q) \wedge R) \vee \neg P$

$\Leftrightarrow ((P \wedge \neg Q \vee (R \wedge Q) \vee \neg R) \vee \neg P$

$\Leftrightarrow (\neg Q \vee \neg P) \vee (Q \vee \neg R)$

$\Leftrightarrow T$

$\therefore (P \to Q) \wedge (R \to \neg Q) \wedge R \Rightarrow \neg P$ 推理正确

（3）若明天是星期一或者星期三。我就有课。若有课，今天我预习。我今天下午没有预习。所以，明天不是星期一和星期三。

【解】　设P: 明天是周一或周三，Q: 有课，R: 预习

则$(P \to Q) \wedge (Q \to R) \wedge \neg R \to \neg P$

$\Leftrightarrow \neg\ ((\neg P \vee Q)\ \wedge (\neg Q \vee R) \wedge \neg R\ ) \vee \neg P$

$\Leftrightarrow ((P \wedge \neg Q) \vee (Q \wedge \neg R) \vee R\ ) \vee \neg P$

$\Leftrightarrow ((\neg P \vee P) \wedge (\neg P \vee \neg Q) \wedge (Q \vee R) \wedge (R \vee \neg R))$

$\Leftrightarrow T$

$\therefore (P \to Q) \wedge (Q \to R) \wedge \neg R \Rightarrow \neg P$ 推理正确

（4）若下午气温超过 30 度，则小汪必须去游泳。若他去游泳，他就不去看电影了。所以，若小汪没有去看电影，下午的气温必须超过了 30 度。

【解】　设P: $\mathrm{T} > 30℃$　Q: 去游泳　R: 看电影

由题：$(P \to Q) \wedge (Q \to \neg R) \wedge \neg R \to P$

$\Leftrightarrow \neg\ (\ (\neg P \vee Q) \wedge (\neg Q \vee \neg R) \wedge \neg R)\ \vee P$

$\Leftrightarrow\ (\ (P \wedge \neg Q) \vee (Q \wedge R)\ \vee R)\ \vee P$

$\Leftrightarrow\ (P \vee P) \wedge (P \vee \neg Q)\ \wedge (R \vee R)\ \wedge (Q \wedge R)$

$\Leftrightarrow\ P \wedge (P \vee \neg Q) \wedge R \wedge (Q \wedge R)$

可满足式，故推理不正确

（5）张三说李四在说谎，李四说王五在说谎，王五说张三，李四都在说谎。问张三，李四，王五三个人，到底谁在说真话，谁在说假话。

【解】　设P: 张三在说谎,Q: 李四在说谎 ,R: 王五在说谎

依题意有 $P \Leftrightarrow \neg Q$，　$Q \Leftrightarrow \neg R$，$R \Leftrightarrow \neg(P \wedge Q)$

于是$(P \leftrightarrow \neg Q) \wedge (Q \leftrightarrow \neg R) \wedge (R \leftrightarrow \neg(P \wedge Q)) \Leftrightarrow 1$

记 $(P \leftrightarrow \neg Q) \wedge (Q \leftrightarrow \neg R) \wedge (R \leftrightarrow \neg(P \wedge Q))$ 为S，列命题公式S的真值

表，如下表所示。

表3.13 第31题第(5)小题真值表

P	Q	R	$\neg Q$	$\neg R$	$\neg(P \wedge Q)$	$P \leftrightarrow \neg Q$	$Q \leftrightarrow \neg R$	$R \leftrightarrow \neg(P \wedge Q)$	S
0	0	0	1	1	1	0	0	0	0
0	0	1	1	0	1	0	1	1	0
0	1	0	0	1	1	1	1	0	0
0	1	1	0	0	1	1	0	1	0
1	0	0	1	1	1	1	0	0	0
1	0	1	1	0	1	1	1	1	1
1	1	0	0	1	0	0	1	1	0
1	1	1	0	0	0	0	0	0	0

由S的真值表求得其主析取范式为 $P \wedge \neg Q \wedge R$

即$(P \leftrightarrow \neg Q) \wedge (Q \leftrightarrow \neg R) \wedge (R \leftrightarrow \neg(P \wedge Q)) \Leftrightarrow P \wedge \neg Q \wedge R$

从而$P \wedge \neg Q \wedge R \Leftrightarrow 1$

这样$P, \neg Q, R$的真值均为1。

故张三在说谎，李四没说谎，王五在说谎。

第四章 谓词演算与推理

1.用谓词逻辑符号化下列命题：
（1）有些人喜欢所有的花；
【解】$P(x)$表示x是人，$Q(y)$表示y是花，$H(x,y)$表示x喜欢y
$$\exists x(P(x)\wedge\forall y(Q(y)\to H(x,y)))$$
（2）没有不犯错误的人；
【解】$P(x)$表示x是人，$Q(x)$表示x会犯错
$$\neg\exists x(P(x)\wedge\neg Q(x))$$
或者等价于所有的人都犯错$\forall x(P(x)\wedge Q(x))$
（3）在北京工作的人未必都是北京人；
【解】$P(x)$表示x是在北京工作的人，$Q(x)$表示x是北京人
$$\neg\forall x(P(x)\to Q(x))$$
或者$\exists x(P(x)\wedge\neg Q(x))$
（4）尽管有人聪明，但未必每个人都聪明；
【解】记$M(x)$: x是人，$C(x)$: x聪明。符号化为：
$$\exists x(M(x)\wedge C(x))\wedge\neg\forall x(M(x)\to C(x))$$
（5）若一个整数的平方是奇数，则该数是奇数；
【解】$F(x)$表示x的平方是奇数，$G(x)$表示 x 是奇数
$$F(x)\to G(x)$$
（6）有些国家在南半球，有些在北半球。
【解】$F(x)$表示x在南半球，$G(x)$表示x在北半球
$$\exists x(F(x)\wedge\exists xG(x))$$
（7）并非所有不在中国居住的人都不是中国人；
【解】$F(x)$: x在中国居住$G(x)$: x是中国人
$$\neg\forall x(\neg F(x)\to\neg G(x))$$
（8）有些艺术家既是导演又是演员；
【解】$M(x)$: x是艺术家，$F(x)$表示x是导演，$G(x)$: x是演员
$$\exists x(M(x)\wedge F(x)\wedge G(x))$$
（9）有的猫不捉耗子，会捉耗子的猫才是好猫；
【解】设$M(x)$：x是好猫；$F(x)$：x捉耗子
$$\exists x\neg M(x)\wedge\forall x(F(x)\to M(x))$$
（10）没有最大的整数。
【解】这句话相当于“任意一个整数，都存在一个比它大的整数”
$F(x)$: x是整数，$L(x,y)$: x比y大
$$\neg\exists x(F(x)\wedge\forall y(F(y)\to L(x,y)))$$

2.令谓词$P(x,y)$表示“x爱y”，其中x和y的个体域是全世界所有人的集合。用谓词逻辑词符号化下列语句：
（1）每个人都爱王平；
【解】$\forall xP(x,a)$其中a表示王平
（2）每个人都爱某个人；
【解】$\forall x\exists yP(x,y)$
（3）有个人人都爱的人；
【解】$\exists y\forall xP(x,y)$

（4）没有人爱所有的人；

【解】$\forall x \exists y \neg P(x,y)$

（5）有个张键不爱的人；

【解】$\exists x \neg P(b,x)$其中b表示张键

（6）有个人人都不爱的人；

【解】$\exists x \forall y \neg P(x,y)$

（7）恰有一个人人都爱的人；

【解】$\exists x(\forall y P(y,x) \wedge \forall z(\forall w P(w,z)) \rightarrow z = x)$

（8）成龙爱的人恰有两个；

【解】$\exists x \exists y(x \neq y \wedge P(c,x) \wedge P(c,y) \wedge \forall z P(c,z) \rightarrow (z = x \vee z = y))$

（9）每个人都爱自己；

【解】$\forall x P(x,x)$

（10）有人除自己以外谁都不爱。

【解】$\exists x \forall y(P(x,y) \leftrightarrow x = y)$

3.令谓词$P(x)$表示“x说德语”，$Q(x)$表示“x了解计算机语言 C++”，个体域为合肥工业大学全体学生的集合。用$P(x)$、$Q(x)$、量词和逻辑联接词符号化下列语句：

（1）合肥工业大学有个学生既会说德语又了解 C++。

（2）合肥工业大学有个学生会说德语，但不了解 C++。

（3）合肥工业大学所有学生或会说德语，或了解 C++。

（4）合肥工业大学没有学生会说德语或了解 C++。

【解】(1)$\exists x(P(x) \wedge Q(x))$；(2)$\exists x(P(x) \wedge \neg Q(x))$

(3)$\forall x(P(x) \vee Q(x))$；(4)$\forall x \neg(P(x) \vee Q(x))$

4.假设个体域为全总个体域，谓词$M(x)$表示“x是合肥工业大学学生”。用$P(x)$、$Q(x)$、$M(x)$、量词和逻辑联接词再次符号化第 3 题的 4 条语句。

【解】(1)$\exists x(M(x) \wedge P(x) \wedge Q(x))$；(2)$\exists x(M(x) \wedge P(x) \wedge \neg Q(x))$

(3)$\forall x(M(x) \wedge (P(x) \vee Q(x))$；(4)$(M(x) \wedge \neg(P(x) \vee Q(x))$

5.求用两种不同的等价谓词符号化下列命题：

（1）没有小于负数的正数。

（2）相等的两个角未必都是对顶角。

【解】令$F(x)$: x小于负数，$G(x)$: x是正数，符号化为：

$\exists \neg x((F(x) \wedge G(y)) \Leftrightarrow \forall x(G(x) \rightarrow \neg G(x))$

令$F(x)$: x是角，$H(x,y)$: x和y是相等的，$L(x,y)$: x与y是对顶角，符号化为:

$\neg \forall x \forall y(F(x) \wedge F(y) \wedge H(x,y) \rightarrow L(x,y))$

$\Leftrightarrow \exists x \exists y(F(x) \wedge F(y) \wedge H(x,y) \wedge \neg L(x,y))$

$\Leftrightarrow \exists x(F(x) \wedge (\exists y(F(y) \wedge H(x,y) \wedge \neg L(x,y)))$

6.将下列命题译成自然语言并确定其真值。假定个体域 D 是正整数集合。

（1）$(\forall x)(\exists y)G(x,y)$其中$G(x,y)$表示：$xy = y$；

对任意正整数x，总存在某个正整数y，使得$x * y = y$

【解】真命题

（2）$(\forall x)(\exists y)F(x,y)$其中$F(x,y)$表示：$x + y = y$；

对于任意正整数x，总存在正整数y，使得$x+y=y$
【解】假命题
(3)$(\forall x)(\exists y)M(x,y)$其中$M(x,y)$表示：$xy$=1；
对任意正整数x，总存在正整数y，使得$x*y=1$
【解】假命题
(4)$(\forall x)(\exists y)N(x,y)$其中$N(x,y)$表示：$y=2x.$
对任意正整数x，总存在正整数y，使得$y=2*x$
【解】真命题

7.已给谓词：$P(x)$: x是素数；$E(x)$: x是偶数；$O(x)$: x是奇数；$N(x,y)$: x可以整除y，将下列各式译成自然语言。
(1)$(\forall x)(N(2,x)\to E(x))$；
【解】可以被 2 整除的数必是偶数。
(2)$(\exists x)(E(x)\wedge N(x,6))$；
【解】有可以整除 6 的偶数。
(3)$(\forall x)(E(x)\to(\forall y)(N(x,y)\to E(y)))$；
【解】对任意偶数x，任意整数y，若x能整除 y，则y必为偶数。
(4)$(\forall x)(P(x)\to(\exists y)(O(y)\wedge N(y,x)))$；
【解】对任意素数x，必存在奇数y，使得y可以整除x。
(5)$(\forall x)(O(x)\to(\exists y)(E(y)\wedge\neg N(y,x)))$。
【解】对任意奇数x，必存在偶数y，使得y不能整除x。

8.下面哪些是命题？为什么？
(1)$(\forall x)(P(x)\wedge Q(x))\vee R$；
【解】不是命题。
(2)$(\forall x)(P(x)\wedge Q(x))\vee(\exists x)S(x,y)$；
【解】是命题，只不过右侧的 y 是没有受到量词约束的命题变量。
(3)$(\forall x)(P(x)\wedge Q(x))\vee(\exists x)S(x)$；
【解】是命题。

9.指出下列各式中的自由变元和约束变元，以及量词的辖域。
(1)$(\forall x)(P(x)\to Q(x))\vee R(x)$；
【解】$P(x)$和$Q(x)$中的x是约束变元
$\forall x$的辖域是：$P(x)\to Q(x)$，$R(x)$中的x是自由变元
(2)$((\forall x)P(x)\to(\forall x)(Q(x)\to R(x))\vee S(x))$；
【解】x是约束变元
第一个$\forall x$的辖域是：$P(x)$；第二个$\forall x$的辖域是：$Q(x)\to R(x)$，$S(x)$中的x是自由变元。
(3)$(\forall x)(\exists y)(P(x,y)\to R(z,x))$；
【解】x,y是约束变元，z是自由变元，$\exists y$的管辖域是:$P(x,y)\to R(z,x)$，$\forall x$的管辖域是:$(\exists y)(P(x,y)\to R(z,x)$。
(4)$(\exists y)((\forall x)(P(x,y)\to R(z,x)))\wedge Q(x)$。
【解】$P(x,y)$和$R(z,x)$中的x和y都是约束变元，z是自由变元
$\exists y$的管辖域是:$(\forall x)(P(x,y)\to R(z,x))$

$\forall x$的管辖域是:$P(x,y)\rightarrow R(z,x)$
$Q(x)$中的x是自由变元

10.对下列公式应用改名规则，使的自由变元和约束变元不用相同的符号。
（1）$\forall x\exists y(P(x,z)\rightarrow Q(y))\leftrightarrow S(x,y)$；
【解】$\forall s\exists t(P(s,z)\rightarrow Q(t))\leftrightarrow S(x,y)$
（2）$M(x,y)\rightarrow \forall x(P(x,y)\vee \forall zQ(x,z))$。
【解】$M(x,y)\rightarrow \forall s(P(s,y)\vee \forall zQ(s,z))$

11.对下列公式应用代替或改名规则，使得每个个体变元只以一种身份出现。
（1）$(\forall xP(x)\wedge \exists yQ(y))\rightarrow F(x,z)$；
【解】$(\forall xP(x)\wedge \exists yQ(y))\rightarrow F(s,z)$
（2）$\exists y(P(x,y)\rightarrow (\forall zQ(x,z)\wedge R(x,y,z)))\wedge \forall x\exists zS(x,y,z)$。
【解】$\exists y(P(x,y)\rightarrow (\forall zQ(x,z)\wedge R(x,y,v)))\wedge \forall x\exists rS(x,t,r)$

12.设个体域$D=\{a,b,c\}$，消去下列各式的量词。
（1）$\forall x\exists y(P(x)\wedge Q(y))$
【解】等价于$(P(a)\wedge P(b)\wedge P(c))\wedge (Q(a)\vee Q(b)\vee Q(c))$
（2）$\forall x\forall y(P(x)\vee Q(y))$
【解】等价于$(P(a)\wedge P(b)\wedge P(c))\vee (Q(a)\wedge Q(b)\wedge Q(c))$
（3）$\forall xP(x)\rightarrow \forall yP(y)$
【解】等价于$(P(a)\wedge P(b)\wedge P(c))\rightarrow (Q(a)\wedge Q(b)\wedge Q(c))$
（4）$\forall xP(x,y)\rightarrow \exists yQ(y))$
【解】等价于$(P(a,y)\vee P(b,y)\vee P(c,y))\rightarrow (Q(a)\vee Q(b)\vee Q(c))$

13.给定解释 I 如下，讨论$S(x)$，$\exists xS(x)$，$S(x)\wedge \exists xS(x)$的真值
（1）I_1：个体域$D1=\{3,4\}$，S(x)表示“x是素数”；
【解】$S(x)$，$\exists xS(x)$，$S(x)\wedge \exists xS(x)$的真值分别是:0，1，0
（2）I_2：个体域$D2=\{3,4\}$，$S(x)$表示“x是偶数”；
【解】$S(x)$，$\exists xS(x)$，$S(x)\wedge \exists xS(x)$的真值分别是:0，1，0
（3）I_3：个体域$D3=\{3,5\}$，$S(x)$表示“x是素数”；
【解】$S(x)$，$\exists xS(x)$，$S(x)\wedge \exists xS(x)$的真值分别是:1，1，1
（4）I_4：个体域$D4=\{3,5\}$，$S(x)$表示“x是偶数”。
【解】$S(x)$，$\exists xS(x)$，$S(x)\wedge \exists xS(x)$的真值分别是:0，0，0

14.找出下列各式的真值。
（1）$(\forall x)(P(x)\vee Q(x))$，其中，$P(x): x=1; Q(x): x=2$；而且个体域是｛1,2｝。
【解】$(\forall x)(P(x)\vee Q(x))\Leftrightarrow (P(1)\vee Q(1))\wedge (P(2)\vee Q(2))$
真
（2）$(\forall x)(P\rightarrow Q(x))\vee R(a)$，其中，$P: 2>1$；$Q(x): x\leq 3$；$R(x): x\geq 6$；$a=5$；个体域是$\{-2,3,6\}$。
【解】$(\forall x)(P\rightarrow Q(x))\vee R(a)\Leftrightarrow (P\rightarrow (Q(-2)\wedge Q(3)\wedge Q(6)))\vee R(5)$
假

（3）$(\exists x)(P(x) \to Q(x)) \wedge 1$，其中$P(x)\colon x > 2$；$Q(x)$：$x = 0$；个体域是｛1,2｝。
【解】$(\exists x)(P(x) \to Q(x)) \wedge 1 \Leftrightarrow ((P(1) \to Q(1)) \vee (P(2) \to Q(2))) \wedge 1$
假
（4）设$G = (\exists x)P(x) \to (\forall x)P(x)$。
【解】可能为真,可能为假

15.设I是如下的一个解释：$D = \{1,2\}, a = 1, b = 2, f(1) = 2, f(2) = 1, P(1,1) = 1, P(1,2) = 1, P(2,1) = 0, P(2,2) = 0$。试求出下列公式在解释 I 下的真值。
(1)$P(a, f(a)) \wedge P(b, f(b))$；
【解】等价于$P(1, f(1)) \wedge P(2, f(2)) \Leftrightarrow 1 \wedge 0 \Leftrightarrow 0$
(2)$(\forall x)(\forall y)(P(x,y) \to P(f(x), f(y)))$；
【解】等价于$(P(1,1) \to P(f(1), f(1))) \wedge (P(1,2) \to P(f(1), f(2))) \wedge (P(2,1) \to P(f(2), f(1))) \wedge (P(2,2) \to P(f(2), f(2)))$
假
(3)$(\forall x)(\exists y)P(y,x)$
【解】真

16.设谓词$P(x,y)$表示"x等于y"，变元x和y的个体域为$D = \{1,2,3\}$。求下列各式真值。
（1）$\forall x P(x,3)$
【解】假　只有x=3 才成立
（2）$\forall y P(1,y)$
【解】假　只有y=1 才成立
（3）$\forall x \forall y P(x,y)$
【解】任意的x，y，使得$x = y$。　假
（4）$\exists x \exists y P(x,y)$
【解】存在x，y使得$x = y$　　真
（5）$\exists x \forall y P(x,y)$
【解】存在x，任意的y使得$x = y$　假
（6）$\forall y \exists x P(x,y)$
【解】任意的y，存在x使得$x = y$　　真

17.判断下列谓词公式哪些是永真式，哪些是永假式，哪些是可满足式，并说明理由。
(1)$\forall x(P(x) \wedge Q(x)) \to (\forall x P(x) \wedge \forall y P(y))$
(2)$\forall x(P(x) \vee Q(x)) \to (\forall x P(x) \vee \forall y P(y))$
(3)$\neg(\forall x P(x) \to \exists y Q(y)) \wedge \exists y Q(y)$
(4)$\forall x(P(y) \to Q(x)) \to (P(y) \to \forall x Q(x))$
(5)$\forall x(P(x) \to Q(x)) \to (P(x) \to \forall x Q(x))$
(6)$\neg(P(x) \to (\forall y Q(x,y) \to P(x)))$
(7)$P(x,y) \to \big(Q(x,y) \to P(x,y)\big)$

(1)易知公式是$(p \wedge q) \to (p \wedge q)$的代换实例，而
$$(p \wedge q) \to (p \wedge q) = \neg(p \wedge q) \to (p \wedge q) \vee (p \wedge q) = 1$$

是永真式，所以公式是永真式。

(2)易知公式是$(p\wedge q)\to(p\wedge q)$的代换实例，而

$$(p\wedge q)\to(p\wedge q)=\neg(p\wedge q)\to(p\wedge q)\vee(p\wedge q)=1$$

是永真式，所以公式是永真式。

(3)易知公式是$\neg(p\to q)\wedge q$的代换实例，而

$$\neg(p\to q)\wedge q=\neg(\neg p\vee q)\wedge q=p\wedge\neg q\wedge q=0$$

是永假式，所以公式是永假式。

(4)易知公式是$(p\to q)\to(p\to q)$的代换实例，而

$$(p\to q)\to(p\to q)=\neg(p\to q)\vee(p\to q)=1$$

是永真式，所以公式是永真式。

(5)易知公式是$(p\to q)\to(p\to q)$的代换实例，而

$$(p\to q)\to(p\to q)=\neg(p\to q)\vee(p\to q)=1$$

是永真式，所以公式是永真式。

(6)易知公式是$\neg(p\to(q\to p))$的代换实例，而

$$\neg\big(p\to(q\to p)\big)=\neg\big(\neg p\vee(\neg q\vee p)\big)=p\wedge q\wedge\neg p=0$$

是永假式，所以公式是永假式。

(7)易知公式是$p\to q\to p$的代换实例，而

$$p\to q\to p=\neg(\neg p\vee q)\vee p=(p\wedge\neg q)\vee p$$

是可满足式，所以公式是可满足式。

18 设$P(x)$、$Q(x)$和$\mathrm{R}(\mathrm{x},y)$都是谓词，证明下列各等价式

（1）$\neg\exists x(P(x)\wedge Q(x))=\forall x(P(x)\to\neg Q(x))$

（2）$\neg\forall x(P(x)\to Q(x))=\exists x(P(x)\wedge\neg Q(x))$

（3）$\neg\forall x\forall y(P(x)\wedge Q(y)\to R(x,y))=\exists x\exists y(P(x)\wedge Q(y)\wedge\neg R(x,y))$

（4）$\neg\exists x\exists y(P(x)\wedge Q(y)\wedge R(x,y))=\forall x\forall y(P(x)\wedge Q(y)\to\neg R(x,y))$

【证明】：(1)左边$=\forall x\neg(P(x)\wedge Q(x))$

$=\forall x(\neg P(x)\vee\neg Q(x))$

$=\forall x(P(x)\to\neg Q(x))$=右边

(2)左边$=\exists x\neg(P(x)\to Q(x))$

$=\exists x\neg(\neg P(x)\vee Q(x))$

$=\exists x(P(x)\wedge\neg Q(x))$=右边

(3)左边$=\exists x\exists y\neg(P(x)\wedge Q(y)\to R(x,y))$

$=\exists x\exists y\neg(\neg(P(x)\wedge Q(y))\vee R(x,y))$

$=\exists x\exists y(P(x)\wedge Q(y)\vee\neg R(x,y))$=右边

(4)左边$=\exists x\exists y\neg(P(x)\wedge Q(y)\to R(x,y))$

$=\exists x\exists y\neg(\neg(P(x)\wedge Q(y))\vee R(x,y))$

$=\exists x\exists y(P(x)\wedge Q(y)\vee\neg R(x,y))$=右边

19.用演绎法证明下列推理式：$\exists xP(x)\to\forall y((P(y)\vee Q(y))\to R(y))$，$\exists xP(x)\Rightarrow\exists xR(x)$

$\exists xP(x) \to \forall y((P(y) \vee Q(y)) \to R(y)), \exists xP(x) \Longrightarrow \exists xR(x)$

【证明】：

①	$\exists xP(x)$	前提引入
②	$P(a)$	ES(1)
③	$\exists xP(x) \to \forall y((P(y) \vee Q(y)) \to R(y))$	前提引入
④	$\forall y((P(y) \vee Q(y)) \to R(y))$	T(1)(3)
⑤	$(P(a) \vee Q(a)) \to R(a)$	US(4)
⑥	$P(a) \vee Q(a)$	T(2)
⑦	$R(a)$	T(5)(6)

20.在谓词逻辑中还经常用到符号$\exists!$，它表示的含义是存在且唯一。试用$\forall$，$\exists$，命题逻辑联结词，等号“=”和$P(x)$来表示$\exists!\,xP(x)$，即写出一个通常的谓词公式使之与$\exists!\,xP(x)$具有相同的意义。

【解】$(\exists xP(x) \wedge \forall yP(y)) \to y = x$

21.求下列谓词公式的前束范式和斯科伦范式。

（1）$\forall xP(x) \to \exists yQ(x,y)$；

（2）$\forall xP(x,y) \to \exists yQ(x,y,z)$；

（3）$\exists x\neg\exists yP(x,y) \to (\exists zQ(z) \to R(x))$；

（4）$\forall x(P(x) \to Q(x,y)) \to (\exists y(R(y) \to \exists zS(y,z))$

(1) 【解】原式$\Leftrightarrow (\forall x)(\neg P(x) \vee (\exists y)Q(x,y))$

$\Leftrightarrow (\forall x)(\exists y)(\neg P(x) \vee Q(x,y))$

$\Leftrightarrow (\forall x)(\exists y)(P(x) \to Q(x,y))$　　前束范式

$\Leftrightarrow P(x) \to Q(x,f(x))$　　斯科伦范式

(2) 【解】原式$\Leftrightarrow \neg(\forall x)P(x,y) \vee (\exists y)Q(x,y,z)$

$\Leftrightarrow (\exists x)\neg P(x,y) \vee (\exists y)Q(x,y,z)$

$\Leftrightarrow (\exists u)\neg P(u,y) \vee (\exists v)Q(x,v,z)$

$\Leftrightarrow (\exists u)(\exists v)(P(u,y) \to Q(x,v,z))$　　前束范式

$\Leftrightarrow (P(a,y) \to Q(x,b,z))$　　斯科伦范式

(3) 【解】原式$\Leftrightarrow \exists x(\neg(\neg\exists yP(x,y)) \vee (\neg\exists zQ(z) \vee R(x)))$

$\Leftrightarrow \exists x(\neg\neg\exists yP(x,y) \wedge \neg(\forall z\neg Q(z) \vee R(x)))$

$\Leftrightarrow \exists x(\exists yP(x,y) \wedge (\neg\forall z\neg Q(z) \wedge \neg R(x)))$

$\Leftrightarrow \exists x(\exists yP(x,y) \wedge (\exists z\neg\neg Q(z) \wedge \neg R(x)))$

$\Leftrightarrow \exists x(\exists yP(x,y) \wedge (\exists zQ(z) \wedge \neg R(x)))$

$\Leftrightarrow \exists x\exists y\exists z(P(x,y) \wedge Q(z) \wedge \neg R(x))$前束范式

$\Leftrightarrow$P(x,y)$\wedge$Q(z)$\wedge\neg$R(x)斯科伦范式

(4) 【解】原式$\Leftrightarrow \forall(P(x) \to Q(x,y)) \to (\exists t(R(t) \to \exists zS(t,z))$

$\Leftrightarrow \exists x\forall t\exists z((P(x) \to Q(x,y)) \to (R(t) \to S(t,z)))$

$\Leftrightarrow \exists x\forall t\exists z(\neg(\neg P(x) \vee Q(x,y)) \vee (\neg R(t) \vee S(t,z)))$

$\Leftrightarrow \exists x\forall t\exists z((P(x) \wedge Q(x,y)) \vee \neg R(t)) \vee (P(x) \wedge Q(x,y) \vee S(t,z)))$

$\Leftrightarrow \exists x\forall t\exists z((P(x) \vee (\neg R(t) \vee S(t,z)) \wedge (Q(x,y) \vee \neg R(t) \vee S(t,z)))$前束范式

$\Leftrightarrow (P(a) \vee (\neg R(t) \vee S(t,f(t))) \wedge (Q(a,y) \vee \neg R(t) \vee S(t,f(t)))$斯科伦范式

22.指出下面演绎推理中的错误，并给出正确的推导过程。

（1） ①$\forall xP(x)\to Q(x)$ P 规则
②$P(y)\to Q(y)$ US 规则：①

（2） ①$\forall x(P(x)\to Q(x))$ P 规则
②$P(a)\to Q(b)$ US 规则：①

（3） ①$P(x)\to \exists xQ(x)$ P 规则
②$P(a)\to Q(a)$ ES 规则：①

（4） ①$P(a)\to G(a)$ P 规则
②$\forall x(P(x)\to G(x))$ UG 规则：①

（5） ①$P(a)\wedge G(b)$ P 规则
②$\exists x(P(x)\wedge G(x))$ EG 规则：①

（6） ①$P(y)\to Q(y)$ P 规则
②$\exists x(P(c)\to Q(x))$ EG 规则：①

【解】(1)②错，使用 US、UG、ES、EG 规则对应前束范式，而①中公式不是前束范式，所以不能用 US 规则.

(2)②错，①中公式为$\forall xA(x)$，这时，$A(x)=P(x)\vee Q(x)$，因而使用 US 规则时，应得$A(a)$(或$A(y)$)，故应有$P(a)\vee Q(a)$，而不能为$P(a)\vee Q(b)$。

(3)①错，$\exists x(P(x)\to Q(x))$

(4)②错，规则使用错误，应为 US

(5)②错，$\exists x(P(x)\wedge G(b))$

(6)②错，$\exists x(P(x)\to Q(x))$

23.限定个体域如下：U={1,2,3}，证明下列公式是逻辑有效式。

（1）$\forall x(P(x)\to Q(x))\to(\exists xP(x)\to\exists xQ(x))$；

（2）$(\exists xP(x)\to\forall xQ(x))\to\forall x(P(x)\to Q(x))$；

（3）$\forall x(A(x)\wedge B(x))\leftrightarrow\forall xA(x)\wedge\forall xB(x)$。

【证明】：（1）$\forall x\big(P(x)\to Q(x)\big)\to\big(\exists xP(x)\to\exists xQ(x)\big)$

$\Leftrightarrow \neg\forall x(\neg \mathrm{P}(\mathrm{x})\vee \mathrm{Q}(\mathrm{x}))\vee(\neg\exists xP(x)\vee\exists xQ(x))$

$\Leftrightarrow \exists x(P(x)\wedge\neg Q(x))\vee\forall x\neg P(x)\vee\exists xQ(x)$

$\Leftrightarrow ((P(1)\wedge\neg Q(1))\vee((P(2)\wedge\neg Q(2))\vee\big((P(3)\wedge\neg Q(3)\big))\vee(\neg P(1)\wedge\neg P(2)\wedge\neg P(3))\vee Q(1)\vee Q(2)\vee Q(3)$

$\Leftrightarrow ((P(1)\vee Q(1))\vee((P(2)\vee Q(2))\vee\big((P(3)\vee Q(3)\big))\vee(\neg P(1)\wedge\neg P(2)\wedge\neg P(3))$

$\Leftrightarrow (\mathrm{P}(1)\vee\mathrm{P}(2)\vee\mathrm{P}(3))\vee(\mathrm{Q}(1)\vee\mathrm{Q}(2)\vee\mathrm{Q}(3))\vee\neg(\mathrm{P}(1)\vee\mathrm{P}(2)\vee\mathrm{P}(3))$

$\Leftrightarrow 1$

故$\forall x\big(P(x)\to Q(x)\big)\to\big(\exists xP(x)\to\exists xQ(x)\big)$为逻辑有效式

（2）$\big(\exists xP(x)\to\forall xQ(x)\big)\to\forall x(P(x)\to Q(x))$

$\Leftrightarrow \big(\neg\exists xP(x)\vee\forall xQ(x)\big)\vee\forall x(\neg P(x)\vee Q(x))$

$\Leftrightarrow \big(\exists xP(x)\wedge\exists x\neg Q(x)\big)\vee\forall x(\neg P(x)\vee Q(x))$

$\Leftrightarrow \big((P(1)\vee P(2)\vee P(3)\big)\wedge\big(\neg Q(1)\vee\neg Q(2)\vee\neg Q(3)\big)\vee\Big(\big(\neg P(1)\vee Q(1)\big)\wedge\neg P(2)\vee Q(2)\Big)\wedge\neg P(2)\vee Q(2)))$

$\Leftrightarrow [\big(P(1)\wedge\neg Q(1)\big)\vee\big(P(2)\wedge\neg Q(2)\big)\vee\big(P(3)\wedge\neg Q(3)\big)\vee\big(P(1)\wedge\neg Q(2)\big)\ldots]\vee(\neg\big(P(1)\wedge Q(1)\big)\wedge\neg\big(P(2)\wedge\neg Q(2)\big)\wedge\neg\big(P(1)\wedge\neg Q(1)\big))$

$\Leftrightarrow (\neg(P(1)\wedge Q(1)) \vee (P(1)\wedge \neg Q(1)) \vee (P(2)\wedge \neg Q(2)) \vee (P(3)\wedge \neg Q(3)) \vee (P(1)\wedge \neg Q(2)) \ldots)$

$\wedge (\neg(\mathrm{P}(2)\wedge \neg \mathrm{Q}(2)) \vee (\mathrm{P}(1)\wedge \neg \mathrm{Q}(1)) \vee (\mathrm{P}(2)\wedge \neg \mathrm{Q}(2)) \vee (\mathrm{P}(3)\wedge \neg \mathrm{Q}(3)) \vee (\mathrm{P}(1)\wedge \neg \mathrm{Q}(2)) \ldots)$

$\wedge (\neg(\mathrm{P}(1)\wedge \neg \mathrm{Q}(1)) \vee (\mathrm{P}(1)\wedge \neg \mathrm{Q}(1)) \vee (\mathrm{P}(2)\wedge \neg \mathrm{Q}(2)) \vee (\mathrm{P}(3)\wedge \neg \mathrm{Q}(3)) \vee (\mathrm{P}(1)\wedge \neg \mathrm{Q}(2)) \ldots)$

$\Leftrightarrow 1 \wedge 1 \wedge 1$

（3）$\forall x(A(x)\wedge B(x)) \leftrightarrow (\forall x A(x) \wedge \forall x B(x))$

$\Leftrightarrow ((A(1)\wedge B(1)) \wedge (A(2)\wedge B(2)) \wedge (A(3)\wedge B(3)))$

$\leftrightarrow ((\mathrm{A}(1)\wedge \mathrm{A}(2)\wedge \mathrm{A}(3)) \wedge (\mathrm{B}(1)\wedge \mathrm{B}(2)\wedge \mathrm{B}(3)))$

$\Leftrightarrow 1$

24.构造下列推理的证明：

（1）$\forall x(\neg P(x) \to Q(x)), \forall x \neg Q(x) \Rightarrow \exists x P(x)$；

（2）$\forall x(P(x) \to Q(x)) \Rightarrow \forall x P(x) \to \forall x Q(x)$；

（3）$\neg \forall x(P(x) \wedge Q(x)), \forall x P(x) \Rightarrow \neg \forall x Q(x)$；

(1)【证明】

①　$\forall x \neg Q(x)$　　P

②　$\neg Q(y)$　　T①US

③　$\forall x(\neg P(x) \longrightarrow Q(x))$　　P

④　$\neg P(y) \to Q(y)$　　T③US

⑤　$P(y)$　　T②④拒绝式

⑥　$\exists x P(x)$　　T⑤EG

(2)【证明】

①　$\forall x P(x)$　　P附加前提引入

②　$P(c)$　　T①US

③　$\forall x(P(x) \to Q(x))$　　P

④　$P(c) \to Q(c)$　　T③US

⑤　$Q(c)$　　T②④假言推理

⑥　$\forall x Q(x)$　　T⑤UG

⑦　$\forall x P(x) \to \forall x Q(x)$　　T①⑥CP

(3)【证明】

①　$\neg \forall x(P(x) \vee Q(x))$　　P

②　$\exists x(\neg P(x) \wedge \neg Q(x))$　　T①量词否定，德・摩根律

③　$\neg P(x) \wedge \neg Q(c)$　　T②ES

④　$\forall x Q(x)$　　P否定结论引入

⑤　$Q(c)$　　T④US

⑥　$\neg Q(c)$　　T③化简

⑦　$Q(c) \wedge \neg Q(c)$　　T⑤⑥合取

由⑦得到矛盾，由间接证明原理，原命题得证.

25.证明下列推理：

(1)$\forall x F(x) \to \forall y((F(y) \vee G(y)) \to R(y)))$，$\exists x F(x) \Rightarrow \exists x(F(x) \wedge R(x))$

(2)$\forall x(A(x)\rightarrow B(x))$，$\forall x(C(x)\rightarrow\neg B(x))\Rightarrow\forall x(C(x)\rightarrow\neg A(x))$

(3)$\forall x(H(x)\rightarrow A(x))\Rightarrow\forall x\forall y(H(y)\wedge N(x,y))\rightarrow\exists y(A(y)\wedge N(x,y))$

(1)【证明】

①	$\exists xF(x)$	P
②	$F(c)$	T①ES
③	$\forall xF(x)\rightarrow\forall y((F(y)\vee G(y))\rightarrow R(y))$	P
④	$F(c)\rightarrow\forall y((F(y)\vee G(y))\rightarrow R(y)$	T③US
⑤	$\forall y((F(y)\vee G(y))\rightarrow R(y))$	T②④假言推理
⑥	$(F(c)\vee G(c))\rightarrow R(c)$	T⑤US
⑦	$F(c)\vee G(c)$	T⑥附加
⑧	$R(c)$	T⑤⑦假言推理
⑨	$F(c)\wedge R(c)$	T⑥⑧合取
⑩	$\exists x(F(x)\wedge R(x))$	T⑨EG

(2)【证明】

①	$\forall x(C(x)\rightarrow\neg B(x))$	P
②	$C(y)\rightarrow\neg B(y)$	T②US
③	$\forall x(A(x)\rightarrow B(x))$	P
④	$A(y)\rightarrow B(y)$	T③US
⑤	$\neg B(y)\rightarrow\neg A(y)$	T④假言易位
⑥	$C(y)\rightarrow\neg A(x))$	T②⑤假言三段论
⑦	$\forall x(C(x)\rightarrow\neg A(x))$	T⑧UG

$$\forall x\big(H(x)\rightarrow A(x)\big)\Longrightarrow\forall x\forall y(\big(H(y)\wedge N(x,y)\big)\rightarrow\exists y(A(y)\wedge N(x,y))$$

(3)【证明】

①	$\forall x\forall y((H(y)\wedge N(x,y))$	P 附加前提引入
②	$\forall y((H(y)\wedge N(x,y))$	T①US
③	$H(v)\wedge N(x,v)$	T②US
④	$\forall x(H(x)\rightarrow A(x))$	P

26.证明下列等值式：

（1）$\exists x(A(x)\rightarrow B(x))\Leftrightarrow\forall xA(x)\rightarrow\exists xB(x)$；

（2）$\forall x\forall y(P(x)\rightarrow Q(y))\Leftrightarrow\exists xP(x)\rightarrow\forall yQ(y)$。

(1)【证明】

$\exists z(A(x)\rightarrow B(x))$

$\Leftrightarrow\exists x\big(\neg A(x)\vee B(x)\big)$

$\Leftrightarrow\exists x\neg A(x)\vee\exists xB(x)$

$\Leftrightarrow\neg\forall xA(x)\vee\exists xB(x)$

$\Leftrightarrow\forall xA(x)\rightarrow\exists xB(x)$

(2)【证明】

$\exists xP(x)\rightarrow\forall yQ(y)$

$\Leftrightarrow\neg\exists xP(x)\vee\forall yQ(y)$

$\Leftrightarrow\forall x\neg P(x)\vee\forall yQ(y)$

$\Leftrightarrow\forall x\forall y(\neg P(x)\vee Q(y))$

$\Leftrightarrow\forall x\forall y(P(x)\rightarrow Q(y))$

27.令谓词$P(x)$、$Q(x)$、$R(x)$和$S(x)$分别表示“x是婴儿”，表示“x的行为符合逻辑”、“x能管理鳄鱼”和“x被人轻视”，个体域为所有人的集合。用$P(x)$、$Q(x)$、$R(x)$、$S(x)$、量词和逻辑联接词符号化下列语句：
（1）婴儿行为不合逻辑；
（2）能管理鳄鱼的人不被人轻视。
（3）行为不合逻辑的人被人轻视；
（4）婴儿不能管理鳄鱼。
能从（1）、（2）和（3）推出（4）吗？若不能，请写出（1）、（2）和（3）的一个有效结论，并用演绎推理法证明。
【解】:四个语句符号化为:
(1)$\forall x(P(x)\to\neg Q(x))$ (2)$\forall x(R(x)\to\neg S(x))$
(3)$\forall x(\neg Q(x)\to S(x))$ (4)$\forall x(P(x)\to\neg R(x))$
能从(1)(2)(3)推出(4)，证明如下:

① $\forall x(P(x)\to\neg Q(x))$ P规则
② $P(y)\to\neg Q(y)$ ①，US规则
③ $\forall x(\neg Q(x)\to S(x))$ P 规则
④ $\neg Q(y)\to S(y)$ ③，US规则
⑤ $P(y)\to S(y)$ ②，④，T规则
⑥ $\forall x(R(x)\to\neg S(x))$ P规则
⑦ $R(y)\to\neg S(y)$ ⑥，US规则
⑧ $S(y)\to\neg R(y)$ ⑦，T规则
⑨ $P(y)\to\neg R(y)$ ⑤，⑧，T规则
⑩ $\forall x(P(x)\to\neg R(x))$ ⑨，UG规则

28.符号化下列命题，并推证其结论
（1）航海家都教育自己的孩子成为航海家，有一个人教育他的孩子去做飞行家，那么这个人一定不是航海家。
（2）每个科学家都是很勤奋的，如果一个人勤奋并且聪明，那么他就会取得成就。小张是一个科学家并且很聪明。所以，小张一定会取得成就。
（3）中华人民共和国首都是中国的政治和文化中心，北京是中环人民共和国首都，北京是北方城市。所以，有的北方城市是中国的政治和文化中心。
（4）所有哺乳动物都是脊椎动物。人是哺乳动物。他是人。故他有脊椎。
（5）有些病人相信所有医生。所有病人都不相信骗子。故所有医生都不是骗子。
（6）三角函数都是周期函数；一些三角函数是连续函数。故有一些周期函数是连续函数。

(1)【解】设$M(x)$: x是航海家，$F(x)$: x教育自己的孩子成为航海家，$G(x)$: x教育他的孩子去做飞行家
前提:$\forall x\big(M(x)\to F(x)\big),\forall x\big(G(x)\to\neg F(x)\big),\exists xG(x)$
结论:$\exists x\neg M(x)$
【证明】

① $\exists xG(x)$ P
② $G(c)$ T①ES
③ $\forall x(G(x)\to\neg F(x))$ P

④ $G(c) \to \neg F(c)$ T③US
⑤ $\neg F(c)$ T②④假言推理
⑥ $\forall x(M(x) \to F(x))$ P
⑦ $M(c) \to F(c)$ T⑥US
⑧ $\neg M(c)$ T⑤⑦拒取式
⑨ $\exists x \neg M(x)$ T⑨UG

(2)【解】设$F(x)$: x是科学家,$G(x)$: x是勤奋的，$H(x)$: x是聪明的，
$I(x)$: x取得成就，c:小张
前提:$\forall x\big(F(x) \to G(x)\big), \forall x\big(G(x) \wedge H(x) \to I(x)\big), F(c) \wedge H(c)$
结论:$I(c)$
【证明】:

① $F(c) \wedge H(c)$ 前提引入
② $F(c)$ ①化简
③ $H(c)$ ①化简
④ $\forall x(F(x) \to G(x))$ 前提引入
⑤ $F(c) \to G(c)$ ④UI规则
⑥ $G(c)$ ②⑤假言推理
⑦ $G(c) \wedge H(c)$ ③⑥合取引入
⑧ $\forall x(G(x) \wedge H(x) \to I(x))$ 前提引入
⑨ $G(c) \wedge H(c) \to I(c)$ ⑧UI规则
⑩ $I(c)$ ⑦⑨假言推理

（3）【解】$P(x)$: x是中国首都，$Q(x)$: x是北方城市
$R(x)$: x是中国的政治文化中心，a:北京
前提:$\forall x(P(x) \to R(x))$， $P(a) \wedge Q(a)$
结论:$\exists x(Q(x) \wedge R(x))$

① $P(a)Q(a)$ P
② $P(a)$ T，①，I
③ $\forall x(P(x) \to R(x))$ P
④ $R(a)$ T，②，③，I
⑤ $R(a) \wedge Q(a)$ T，①④，E
⑥ $\exists x(Q(x) \wedge R(x))$ EG，⑤

（4）设$P(x)$: x是哺乳动物，$Q(x)$: x是脊椎动物，$R(x)$: x是人
前提:$\forall x(P(x) \to Q(x)), \forall x(R(x) \to P(x)), R(c)$
结论:$Q(x)$

① $R(c)$ P
② $\forall x(R(x) \to P(x))$ P
③ $R(c) \to P(c)$ US②
④ $P(c)$ T①③E
⑤ $\forall x(P(x) \to Q(x))$ P
⑥ $P(c) \to Q(c)$ US⑤
⑦ $Q(c)$ T⑥E

(5)$F(x)$: x是病人，$G(x)$: x是医生，$H(x)$: x是骗子，$L(x,y)$: x相信y
符号化:
前提:$\exists x(F(x)\wedge\forall y(G(y)\rightarrow L(x,y)))\forall x(F(x)\rightarrow\forall y(H(y)\rightarrow\neg L(x,y)))$
结论:$\forall x(G(x)\rightarrow\neg H(x))$
【证明】

①	$\exists x(F(x)\wedge\forall y(G(y)\rightarrow L(x,y)))$	P
②	$F(a)\wedge\forall y(G(y)\rightarrow L(a,y))$	ES①
③	$F(a)$	T②I
④	$\forall y(G(y)\rightarrow L(a,y))$	T②I
⑤	$\forall x(F(x)\rightarrow\forall y(H(y)\rightarrow\neg L(x,y)))$	P
⑥	$F(a)\rightarrow\forall y(H(y)\rightarrow\neg L(a,y))$	US⑤
⑦	$\forall y(H(y)\rightarrow\neg L(a,y))$	T③⑥I
⑧	$\forall y(L(a,y)\rightarrow\neg H(y))$	T⑦E
⑨	$G(z)\rightarrow L(a,z)$	US④
⑩	$L(a,z)\rightarrow\neg H(z)$	US⑧
⑪	$G(z)\rightarrow H(z)$	T⑨⑩I
⑫	$\forall x(G(x)\rightarrow\neg H(x))$	UG⑪

（6）设$P(x)$: x是三角函数；$Q(x)$: x是周期函数；$S(x)$: x是连续函数.
前提:$\forall x\big(P(x)\rightarrow Q(x)\big),\exists x(P(x)\wedge S(x))$
结论:$\exists x(Q(x)\wedge S(x))$
【证明】

①	$\exists x(P(x)\wedge S(x))$	P
②	$P(a)\wedge S(a)$	ES①
③	$\forall x(P(x)\rightarrow Q(x))$	P
④	$P(a)\rightarrow Q(a)$	US②
⑤	$P(a)$	T①化简
⑥	$S(a)$	T①化简
⑦	$Q(a)$	T④⑤假言推理
⑧	$S(a)\wedge Q(a)$	T⑥⑦合取
⑨	$\exists x(Q(x)\wedge S(x))$	EG⑧

第五章 关系模型与理论

1. 已知集合$A=\{a,b\}$，$B=\{1,2,3\}$, 求：
$A\times B$，$B\times A$，$A\times A$，$B\times B$，$(A\times B)\cap(B\times A)$
【解】$A\times B$=$\{\langle a,1\rangle,\langle a,2\rangle,\langle a,3\rangle,\langle b,1\rangle,\langle b,2\rangle,\langle b,3\rangle\}$
$B\times A$=$\{\langle 1,a\rangle,\langle 2,a\rangle,\langle 3,a\rangle,\langle 1,b\rangle,\langle 2,b\rangle,\langle 3,b\rangle\}$
$A\times A$=$\{\langle a,a\rangle,\langle a,b\rangle,\langle b,a\rangle,\langle b,b\rangle\}$
$B\times B$=$\{\langle 1,1\rangle,\langle 1,2\rangle,\langle 1,3\rangle,\langle 2,1\rangle,\langle 2,2\rangle,\langle 2,3\rangle,\langle 3,1\rangle,\langle 3,2\rangle,\langle 3,3\rangle\}$
$(A\times B)\cap(B\times A)$=$\{\langle a,1\rangle,\langle a,2\rangle,\langle a,3\rangle,\langle b,1\rangle,\langle b,2\rangle,\langle b,3\rangle\}\cap$
$\{\langle 1,a\rangle,\langle 2,a\rangle,\langle 3,a\rangle,\langle 1,b\rangle,\langle 2,b\rangle,\langle 3,b\rangle\}=\emptyset$
2. 设A是n元集合，证明：
（1）A上有$2n$个一元关系；（2）A上有2^{n^2}个二元关系。
证明:(1)A的任何一个子集都是A上的一元关系，根据组合的意义知：A上的不同子集共有$C_n^0+C_n^1+\cdots+C_n^n=2^n$个。所以共有$2n$个一元关系。
(2)A*A 的任何一个子集都是A上的二元关系，根据组合的意义知：$A*A$上的不同子集共有$C_{n*n}^0+C_{n*n}^1+\cdots+C_{n*n}^{n*n}=2^{n*n}$个。

3. 设$A=\{1,2,4,6\}$，试列出下列关系R,
(1)$R=\{\langle x,y\rangle|x,y\in A\wedge x+y\neq 2\}$；(2)$R=\{\langle x,y\rangle|x,y\in A\wedge|x-y|=1\}$；
(3)$R=\{\langle x,y\rangle|x,y\in A\wedge x/y\in A\}$；　　(4)$R=\{\langle x,y\rangle|x,y\in A\wedge y$为素数$\}$。
【解】$A=\{1,2,4,6\}$
(1)$R=$
$\{\langle 1,2\rangle,\langle 1,4\rangle,\langle 1,6\rangle,\langle 2,1\rangle,\langle 2,2\rangle,\langle 2,4\rangle,\langle 2,6\rangle,\langle 4,1\rangle,\langle 4,2\rangle,\langle 4,4\rangle,\langle 4,6\rangle,\langle 6,1\rangle,\langle 6,2\rangle,\langle 6,4\rangle,\langle 6,6\rangle\}$
(2)$R=\{\langle 1,2\rangle,\langle 2,1\rangle\}$
(3)$R=\{\langle 2,1\rangle,\langle 4,2\rangle,\langle 4,1\rangle,\langle 6,1\rangle,\langle 4,4\rangle,\langle 1,1\rangle,\langle 2,2\rangle,\langle 4,4\rangle,\langle 6,6\rangle\}$
(4)$R=\{\langle 1,2\rangle,\langle 2,2\rangle,\langle 4,2\rangle,\langle 6,2\rangle\}$

4. R_i是集合X上二元关系，对$\forall x\in X$定义集合$R_i(x)=\{y|xR_iy\}$，显然$R_i(x)\subseteq X$. 如果$X=\{-4,-3,-2,-1,0,1,2,3,4\}$，且令：
$R_1=\{\langle x,y\rangle|x,y\in X\wedge x\langle y\rangle\}$；　　$R_2=\{\langle x,y\rangle|x,y\in X\wedge y-1<x<y+2\}$.
求$R_1(0)$，$R_1(1)$，$R_2(0)$，$R_2(-1)$。
【解】
R_1=$\{\langle -4,-3\rangle,\langle -4,-2\rangle,\langle -4,-1\rangle,\langle -4,0\rangle,\langle -4,1\rangle,\langle -4,2\rangle,\langle -4,3\rangle,\langle -4,4\rangle,\langle -3,-2\rangle,$
$\langle -3,-1\rangle,\langle -3,0\rangle,\langle -3,1\rangle,\langle -3,2\rangle,\langle -3,3\rangle,\langle -3,4\rangle,\langle -2,-1\rangle,\langle -2,0\rangle,\langle -2,1\rangle,\langle -2,2\rangle,\langle -2,3\rangle,\langle -2,4\rangle,$
$\langle -1,0\rangle,\langle -1,1\rangle,\langle -1,2\rangle,\langle -1,3\rangle,\langle -1,4\rangle,\langle 0,1\rangle,\langle 0,2\rangle,\langle 0,3\rangle,\langle 0,4\rangle,\langle 1,2\rangle,\langle 1,3\rangle,\langle 1,4\rangle,\langle 2,3\rangle,\langle 2,4\rangle,\langle 3,4\rangle\}$
R_2=$\{\langle -3,-4\rangle,\langle -3,-2\rangle,\langle -3,-3\rangle,\langle -2,-3\rangle,\langle -2,-2\rangle,\langle -1,-2\rangle,\langle -1,-1\rangle,\langle 0,-1\rangle,$
$\langle 0,0\rangle,\langle 1,0\rangle,\langle 1,1\rangle,\langle 2,1\rangle,\langle 2,2\rangle,\langle 3,2\rangle,\langle 3,3\rangle,\langle 4,3\rangle,\langle 4,4\rangle\}$
$R_1(0)=\{\langle 0,1\rangle,\langle 0,2\rangle,\langle 0,3\rangle,\langle 0,4\rangle\}$
$R_1(1)=\{\langle 1,2\rangle,\langle 1,3\rangle,\langle 1,4\rangle\}$
$R_2(0)=\{\langle 0,-1\rangle,\langle 0,0\rangle\}$
$R_2(-1)=\{\langle -1,-2\rangle,\langle -1,-1\rangle\}$

5. 设$A=\{0,1,2,3,4,5\}$，$B=\{1,2,3\}$, 用列举法描述下列关系，求出关系图及关系矩阵。

（1）$R_1=\{\langle x,y\rangle|x\in A\cap B\wedge y\in A\cap B\}$；

（2）$R_2=\{\langle x,y\rangle|x\in A\wedge y\in B\wedge x=y^2\}$；

（3）$R_3=\{\langle x,y\rangle|x\in A\wedge y\in A\wedge x+y=5\}$；

（4）$R_4=\{\langle x,y\rangle|x\in A\wedge y\in A\wedge\exists k(x=k\cdot y\wedge k\in N\wedge k<2)\}$.

【解】1. $R_1=\{\langle 1,1\rangle,\langle 1,2\rangle,\langle 1,3\rangle,\langle 2,1\rangle,\langle 2,2\rangle,\langle 2,3\rangle,\langle 3,1\rangle,\langle 3,2\rangle,\langle 3,3\rangle\}$

2. $R_2=\{\langle 1,1\rangle,\langle 4,2\rangle\}$

3. $R_3=\{\langle 0,5\rangle,\langle 1,4\rangle,\langle 2,3\rangle,\langle 3,2\rangle,\langle 4,1\rangle,\langle 5,0\rangle\}$

4. $R_4=\{\langle 0,0\rangle,\langle 0,1\rangle,\langle 0,2\rangle,\langle 0,3\rangle,\langle 0,4\rangle,\langle 0,5\rangle,\langle 1,1\rangle,\langle 2,2\rangle,\langle 3,3\rangle,\langle 4,4\rangle,\langle 5,5\rangle\}$

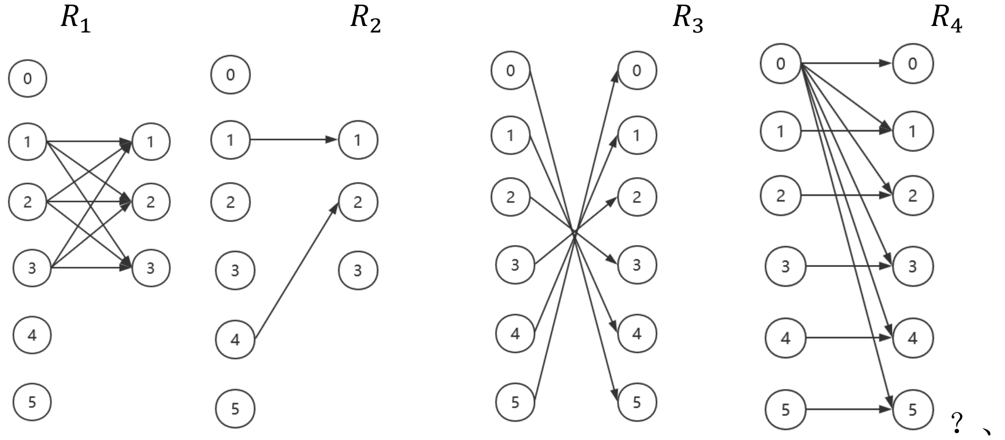


图 5.1 题目 5 关系图。

关系矩阵如下：

R_1

$$\begin{pmatrix}0&0&0\\1&1&1\\1&1&1\\1&1&1\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}$$

R_2

$$\begin{pmatrix}0&0&0\\1&0&0\\0&0&0\\0&0&0\\0&1&0\\0&0&0\end{pmatrix}$$

R_3

$$\begin{pmatrix}0&0&0&0&0&1\\0&0&0&0&1&0\\0&0&0&1&0&0\\0&0&1&0&0&0\\0&1&0&0&0&0\\1&0&0&0&0&0\end{pmatrix}$$

R_4

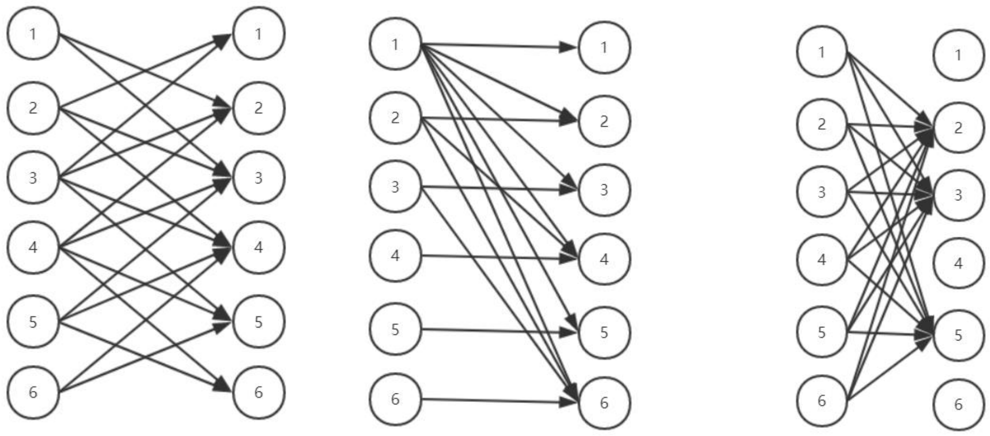
$$\begin{pmatrix}1&1&1&1&1&1\\0&1&0&0&0&0\\0&0&1&0&0&0\\0&0&0&1&0&0\\0&0&0&0&1&0\\0&0&0&0&0&1\end{pmatrix}$$

6. 设$A=\{1,2,3,4,5,6\}$，定义A上二元关系：$R=\{\langle x,y\rangle|(x-y)^2\in A\}$；
$S=\{\langle x,y\rangle|y是x倍数\}$；$T=\{\langle x,y\rangle|x|y是素数\}$。写出$R,S,T$的元素，并画出$R,S,T$的关系图。

$R=\{\langle 1,2\rangle,\langle 2,1\rangle,\langle 3,4\rangle,\langle 4,3\rangle,\langle 5,6\rangle,\langle 6,5\rangle,\langle 4,5\rangle,\langle 5,4\rangle,\langle 2,3\rangle,\langle 3,2\rangle,\langle 3,1\rangle,\langle 1,3\rangle,\langle 2,4\rangle,\langle 4,2\rangle,\langle 4,6\rangle,\langle 6,4\rangle,\langle 3,5\rangle,\langle 5,3\rangle\}$

$S=\{\langle 1,1\rangle,\langle 1,2\rangle,\langle 1,3\rangle,\langle 1,4\rangle,\langle 1,5\rangle,\langle 1,6\rangle,\langle 2,2\rangle,\langle 2,4\rangle,\langle 2,6\rangle,\langle 3,3\rangle,\langle 3,6\rangle,\langle 4,4\rangle,\langle 5,5\rangle,\langle 6,6\rangle\}$

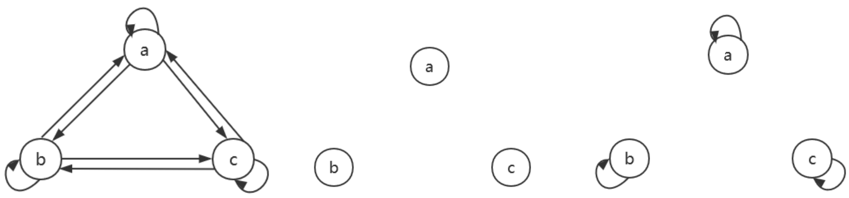
$T=\{\langle 1,2\rangle,\langle 1,3\rangle,\langle 1,5\rangle,\langle 2,2\rangle,\langle 2,3\rangle,\langle 2,5\rangle,\langle 3,2\rangle,\langle 3,3\rangle,\langle 3,5\rangle,\langle 4,2\rangle,\langle 4,3\rangle,\langle 4,5\rangle,\langle 5,2\rangle,$
$\langle 5,3\rangle,\langle 5,5\rangle,\langle 6,2\rangle,\langle 6,3\rangle,\langle 6,5\rangle\}$



R S T

图 5.2 题目 6 关系图。

7. 设$H=\{a,b,c\}$是 3 个不同姓的同班同学的集合，
（1）给出H上全域关系、空关系、恒等关系的含义解释；
（2）确定H上的一个关系，指出该关系的定义域、值域和域。
【解】（1）如图 5.3 所示



全域关系：$H*H$ 空关系：$\emptyset$ 恒等关系

图 5.3。

（2）全域关系：
定义域：$\{a,b,c\}$；值域：$\{a,b,c\}$；域：$\{a,b,c\}$

8. 图 5.4 是$A=\{1,2,3,4,5,6\}$上关系R的关系图，依据该图写出R的元素及关系矩阵。

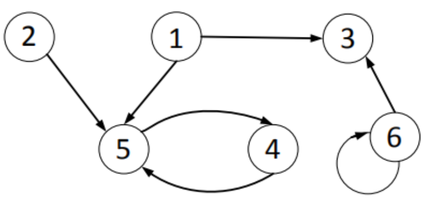


图 5.4 题目 8 图。

【解】$R=\{\langle 2,5\rangle,\langle 1,5\rangle,\langle 1,3\rangle,\langle 5,4\rangle,\langle 4,5\rangle,\langle 6,3\rangle,\langle 6,6\rangle\}$

关系矩阵：$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

9. 设$A = \{\langle 1,2\rangle, \langle 2,4\rangle, \langle 3,3\rangle\}$，$B = \{\langle 1,3\rangle, \langle 2,4\rangle, \langle 4,2\rangle\}$，求$A \cap B$，$A \cup B$，$\mathrm{dom}A$，$\mathrm{dom}B$，$\mathrm{ran}A$，$\mathrm{ran}B$，$\mathrm{dom}(A \cup B)$，$\mathrm{ran}(A \cap B)$，$A \circ B$。

【解】因为$A = \{\langle 1,2\rangle, \langle 2,4\rangle, \langle 3,3\rangle\}$，$B = \{\langle 1,3\rangle, \langle 2,4\rangle, \langle 4,2\rangle\}$

所以可得：$A \cap B = \{\langle 2,4\rangle\}$，　$A \cup B = \{\langle 1,2\rangle, \langle 2,4\rangle, \langle 1,3\rangle, \langle 3,3\rangle, \langle 4,2\rangle\}$

$\mathrm{dom}(A) = \{1,2,3\}$，$\mathrm{ran}(A) = \{2,4,3\}$，$\mathrm{dom}(B) = \{1,2,4\}$，$\mathrm{ran}(B) = \{3,4,2\}$，

$\mathrm{dom}(A \cup B) = \{1,2,3,4\}$，$\mathrm{ram}(A \cap B) = \{4\}$，$A \circ B = \{\langle 1,4\rangle, \langle 2,2\rangle\}$。

10. 设$R_1 = \{\langle 0,1\rangle, \langle 1,2\rangle, \langle 3,4\rangle\}$，求$R_2$使得$R_1 \circ R_2 = \{\langle 1,3\rangle, \langle 1,4\rangle, \langle 3,3\rangle\}$且$\{R_2\}$最小。一般地，若给定$R_1$和$R_1 \circ R_2$，则$R_2$能被确定吗？使得$|R_2|$最小的$R_2$能确定吗？

【解】$R_2 = \{\langle 2,3\rangle, \langle 4,3\rangle, \langle 2,4\rangle\}$；

给定R_1和$R_1 \circ R_2$，　R_2不能被确定　；

给定R_1和$R_1 \circ R_2$，使得$|R_2|$最小的R_2不能确定。

11. 设$N = \{0,1,2,\ldots\}$, 关系$S = \{\langle x, x2\rangle | x \in N\}$和$R = \{\langle x, 2x\rangle | x \in N\}$, 求$R \cap S$与$R \cup S$。

【解】$R \cap S = \{\langle 0,0\rangle, \langle 1,1\rangle, \langle 2,4\rangle\}$,

$$R \cup S = \{\langle x, x2\rangle, \langle x, 2x\rangle | x \in N\} - \{\langle 0,0\rangle, \langle 1,1\rangle, \langle 2,4\rangle\}$$

12. 设$A = \{1,2,3,4\}$，R和S都是A上二元关系：

$R = \{\langle 1,2\rangle, \langle 3,4\rangle, \langle 2,2\rangle\}$, $A = \{\langle 4,2\rangle, \langle 2,3\rangle, \langle 3,1\rangle\}$.

试求$R \circ S$，$S \circ R$，$R \circ (S \circ R)$，$(R \circ S) \circ R$，R^2，S^2，R^3的关系矩阵，并分别画出关系图。

【解】$R \circ S = \{\langle 1,3\rangle, \langle 3,2\rangle, \langle 2,3\rangle\}$；　$S \circ R = \{\langle 4,2\rangle, \langle 2,4\rangle, \langle 3,2\rangle\}$；

$R \circ (S \circ R) = \{\langle 1,4\rangle, \langle 3,2\rangle, \langle 2,4\rangle\}$；　$(R \circ S) \circ R = \{\langle 1,4\rangle, \langle 3,2\rangle, \langle 2,4\rangle\}$；

$R^2 = \{\langle 1,2\rangle, \langle 2,2\rangle\}$；　$S^2 = \{\langle 2,1\rangle, \langle 4,3\rangle\}$；　$R^3 = \{\langle 1,2\rangle, \langle 2,2\rangle\}$

关系矩阵如下所示：

$R \circ S$: $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$　　$S \circ R$: $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$　　$R \circ (S \circ R)$: $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

$(R \circ S) \circ R$: $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$　　R^2: $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$　　S^2: $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

$$R^3:\begin{pmatrix}0&1&0&0\\0&1&0&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{pmatrix}$$

关系图如图 5.5 所示。

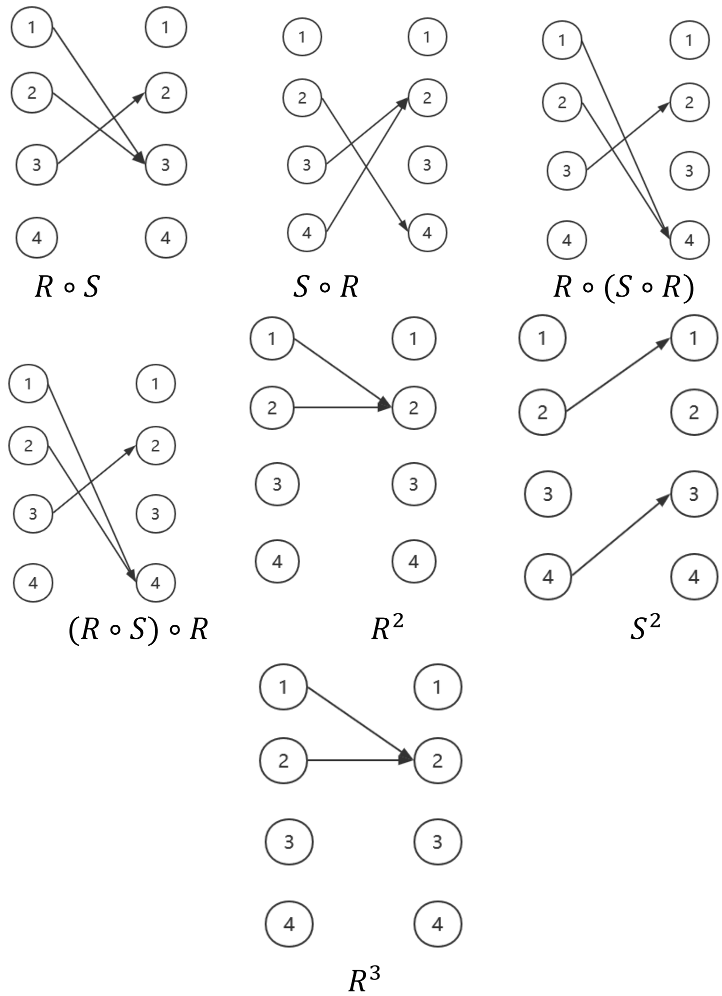


图 5.5 题目 12 关系图。

13. 设A是整数集合，确定下列合成关系$R\circ S$：

(1) $R=\{\langle x,y\rangle|x,y\in A\wedge y=2x-1\}$； $S=\{\langle x,y\rangle|x,y\in A\wedge y=x+3\}$

(2) $R=\{\langle x,y\rangle|x,y\in A\wedge y=x-4\}$;$S=\{\langle x,y\rangle|x,y\in A\wedge y=x^2+3x+1\}$

(3) $R=\{\langle x,y\rangle|x,y\in A\wedge y=2^x\}$;$S=\{\langle x,y\rangle|x,y\in A\wedge x=2^y\}$

(4) $R=\{\langle x,y\rangle|x,y\in A\wedge y=2^x\}$;$S=\{\langle x,y\rangle|x,y\in A\wedge y=x^2\}$

(5) $R=\{\langle x,y\rangle|x,y\in A\wedge y=x-7\}$;$S=\{\langle x,y\rangle|x,y\in A\wedge y=x^2+x+1\}$

(6) $R=\{\langle x,y\rangle|x,y\in A\wedge xy\le 100\}$;$S=\{\langle x,y\rangle|x,y\in A\wedge xy\le 5\}$

【解】1. $R=\{\langle x,y\rangle|x,y\in A\wedge y=2x-1\}$； $S=\{\langle x,y\rangle|x,y\in A\wedge y=x+3\}$

$$R\circ S=\{\langle x,y\rangle|x,y\in A\wedge y=2x+2\}$$

2. $R=\{\langle x,y\rangle|x,y\in A\wedge y=x-4\}$;$S=\{\langle x,y\rangle|x,y\in A\wedge y=x^2+3x+1\}$

$$R\circ S=\{\langle x,y\rangle|x,y\in A\wedge y=x^2-5x+5\}$$

3. $R=\{\langle x,y\rangle|x,y\in A\wedge y=2^x\};S=\{\langle x,y\rangle|x,y\in A\wedge x=2^y\}$

$$R\circ S=\{\langle x,y\rangle|x,y\in A\wedge y=x\}$$

4. $R=\{\langle x,y\rangle|x,y\in A\wedge y=2^x\};S=\{\langle x,y\rangle|x,y\in A\wedge y=x^2\}$

$$R\circ S=\{\langle x,y\rangle|x,y\in A\wedge y=2^{2x}\}$$

5. $R=\{\langle x,y\rangle|x,y\in A\wedge y=x-7\};S=\{\langle x,y\rangle|x,y\in A\wedge y=x^2+x+1\}$

$$R\circ S=\{\langle x,y\rangle|x,y\in A\wedge y=x^2-13x+43\}$$

6. $R=\{\langle x,y\rangle|x,y\in A\wedge xy\le 100\};S=\{\langle x,y\rangle|x,y\in A\wedge xy\le 5\}$

$$R\circ S=\{\langle x,y\rangle|x,y\in A\wedge X/Y\le 20\}$$

14. 设$A=\{0,1,2,3\}$，R和S是A上的二元关系，$R=\{\langle i,j\rangle|(j=i+1)$或$(j=i/2)\}$；$S=\{\langle i,j\rangle|(i=j+2)\}$.

（1）用关系矩阵求$R\circ S$；（2）用关系图求$S\circ R$；

（3）用任意方法求$R\circ S\circ R$, R^3,S^3。

【解】$R=\{\langle 0,1\rangle,\langle 0,0\rangle,\langle 1,2\rangle,\langle 2,3\rangle,\langle 2,1\rangle\}$，$S=\{\langle 2,0\rangle,\langle 3,1\rangle\}$

（1）$R=\begin{pmatrix}1&1&0&0\\0&0&1&0\\0&1&0&1\\0&0&0&0\end{pmatrix}$，$S=\begin{pmatrix}0&0&0&0\\0&0&0&0\\1&0&0&0\\0&1&0&0\end{pmatrix}$，$R\circ S=\begin{pmatrix}0&0&0&0\\1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&0&0\end{pmatrix}$

（2）使用关系图求$S\circ R$如下：

S的关系图　　R的关系图　　$S\circ R$

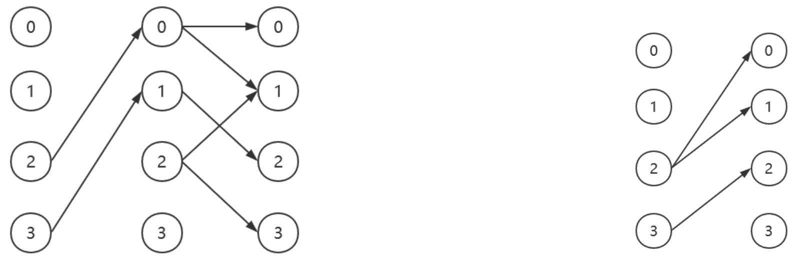


图 5.6 题目 14 关系图。

（3）此处使用关系矩阵求解如下：

$$R^2=\begin{pmatrix}1&1&0&0\\0&0&1&0\\0&1&0&1\\0&0&0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&1&0&0\\0&0&1&0\\0&1&0&1\\0&0&0&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&1&1&0\\0&1&0&1\\0&0&1&1\\0&0&0&0\end{pmatrix}$$

$$R^3=\begin{pmatrix}1&1&1&0\\0&1&0&1\\0&0&1&1\\0&0&0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&1&0&0\\0&0&1&0\\0&1&0&1\\0&0&0&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&1&1&1\\0&0&1&0\\0&1&0&1\\0&0&0&0\end{pmatrix}$$

$$S^2=\begin{pmatrix}0&0&0&0\\0&0&0&0\\1&0&0&0\\0&1&0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&0&0&0\\0&0&0&0\\1&0&0&0\\0&1&0&0\end{pmatrix}=\emptyset$$

$$S^3=\Phi$$

$$R\circ S\circ R=\begin{pmatrix}0&0&0&0\\1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&1&0&0\\0&0&1&0\\0&1&0&1\\0&0&0&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&0&0&0\\1&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&0\end{pmatrix}$$

15. 集合 $A=\{a,b,c,d,e,f,g,\hbar\}$上关系$R$的关系图如图 5.7 所示，求最小正整数$m$和$n$. 满足$m<n$且$R^m=R^n$.

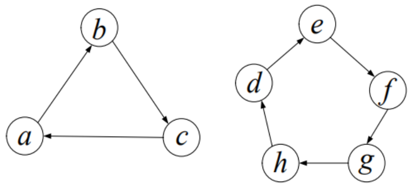


图 5.7 题目 15 图。

【解】由R的集合表达式可知，$R=R_1\cup R_2$，其中，

$$R_1=\{\langle a,b\rangle,\langle b,c\rangle,\langle c,a\rangle\};\ R_2=\{\langle d,e\rangle,\langle e,f\rangle,\langle f,g\rangle,\langle g,\hbar\rangle,\langle \hbar,d\rangle\};$$

$\mathrm{fld}R_1=\{a,b,c\}$，$\mathrm{fld}R_2=\{d,e,f,g,\hbar\}$可知：$\mathrm{fld}R_1\cap\mathrm{fld}R_2=\emptyset$.

$\forall m\in N$,有$R^m=(R_1\cup R_2)^m=R_1{}^m\cup R_2{}^m$。易知：

$$R_1{}^{3k}=\mathrm{I}_{\mathrm{fid}R_1},R_2{}^{5k}=\mathrm{I}_{\mathrm{fid}R_2},k\in N,$$

由上式可知：$R^{15k}=R_1{}^{15k}\cup R_2{}^{15k}=\mathrm{I}_{\mathrm{fid}R_1}\cup=\mathrm{I}_{\mathrm{fid}R_2}=\mathrm{I}_A,k\in N$，取数$m=0,n=15$,有$R^0=R^{15}=\mathrm{I}_A$,即 0 与 15 满足要求。

16. 设$A=\{1,2,3,4\},M_R=\begin{pmatrix}0&0&0&1\\0&0&0&0\\1&1&0&0\\0&0&1&0\end{pmatrix}$，求$M_R{}^n$，$n\in N$.

【解】$A=\{1,2,3,4\}$ $\quad M_R=\begin{pmatrix}0&0&0&1\\0&0&0&0\\1&1&0&0\\0&0&1&0\end{pmatrix}$

$$M_R{}^2=\begin{pmatrix}0&0&0&1\\0&0&0&0\\1&1&0&0\\0&0&1&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&0&0&1\\0&0&0&0\\1&1&0&0\\0&0&1&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&0&1&0\\0&0&0&0\\0&0&0&1\\1&1&0&0\end{pmatrix}$$

$$M_R{}^3=\begin{pmatrix}0&0&1&0\\0&0&0&0\\0&0&0&1\\1&1&0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&0&0&1\\0&0&0&0\\1&1&0&0\\0&0&1&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&1&0&0\\0&0&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\end{pmatrix}$$

$$M_R{}^4=\begin{pmatrix}1&1&0&0\\0&0&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&0&0&1\\0&0&0&0\\1&1&0&0\\0&0&1&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&0&0&1\\0&0&0&0\\1&1&0&0\\0&0&1&0\end{pmatrix}=M_R$$

$$\therefore M_R{}^n=M_R{}^r(n=3k+r,r=1,2,3)$$

17. 确定以下二元关系是否满足自反性、反自反性、对称性、反对称性、非对称性、传递性：

（1）$\{(2,2),(2,3),(2,4),(3,2),(3,3),(3,4)\}$；

（2）$\{(1,1),(1,2),(2,1),(2,2),(3,3),(4,4)\}$

（3）$\{(2,4),(4,2)\}$；（4）$\{(1,2),(2,3),(3,4)\}$

（5）$\{(1,1),(2,2),(3,3),(4,4)\}$；（6）$\{(1,3),(1,4),(2,3),(2,4),(3,1),(3,4)\}$

【解】1. 传递性

2. 自反性，对称性，传递性

3. 对称，反自反

4. 反自反，非对称性

5. 自反，反对称

6. 反自反，非对称

18. 确定下列整数集合上关系R是否为自反、反自反、对称、反对称、非对称：

（1）$x\neq y$；（2）$xy\geq 1$；（3）$x=y+1$或$x=y-1$；（4）$x\equiv y(\mathrm{mod}7)$；（5）x是y的倍数；（6）x与y或者都是负的，或者都是非负的；（7）$x=y^2$；（8）$x\geq y^2$

答：1. 自反性，非对称

2. 对称

3. 反自反，对称

4. 反自反，非对称

5. 自反，对称

6. 自反，对称

7. 反对称

8. 反对称

19. 设集合$A=\{1,2,3,4,6,12\}$上的整除关系记为R，求逆关系R^{-1}及R的关系矩阵，说明逆关系R^{-1}的属性。

【解】$R=\{\langle 1,1\rangle,\langle 2,2\rangle,\langle 3,3\rangle,\langle 4,4\rangle,\langle 6,6\rangle,\langle 12,12\rangle,\langle 1,2\rangle,\langle 1,3\rangle,\langle 1,4\rangle,\langle 1,6\rangle,$
$\langle 1,12\rangle,\langle 2,4\rangle,\langle 2,6\rangle,\langle 2,12\rangle,\langle 3,6\rangle,\langle 3,12\rangle,\langle 4,12\rangle,\langle 6,12\rangle\}$

$R^{-1}=\{\langle 1,1\rangle,\langle 2,2\rangle,\langle 3,3\rangle,\langle 4,4\rangle,\langle 6,6\rangle,\langle 12,12\rangle,\langle 2,1\rangle,\langle 3,1\rangle,\langle 4,1\rangle,\langle 6,1\rangle,$
$\langle 12,1\rangle,\langle 4,2\rangle,\langle 6,2\rangle,\langle 12,2\rangle,\langle 6,3\rangle,\langle 12,3\rangle,\langle 12,4\rangle,\langle 12,6\rangle\}$

R的关系矩阵为：$\begin{pmatrix}1&1&1&1&1&1\\0&1&0&1&1&1\\0&0&1&0&1&1\\0&0&0&1&0&1\\0&0&0&0&1&1\\0&0&0&0&0&1\end{pmatrix}$

R^{-1}的关系矩阵为：$\begin{pmatrix}1&0&0&0&0&0\\1&1&0&0&0&0\\1&0&1&0&0&0\\1&1&0&1&0&0\\1&1&1&0&1&0\\1&1&1&1&1&1\end{pmatrix}$，$R^{-1}$满足传递性。

20. 设$A=\{a,b,c\}$，以下分别给出一个$P(A)$上的二元关系，确定它们哪些是自反的、反自反的、对称的、反对称的、非对称的、传递的。

（1）x和y是一个真子集，$R_1=\{(x,y)|x\subset y,x,y\in P(A)\}$。

（2）x与y不相交，$R_2=\{(x,y)|x\cup y=\emptyset,x,y\in P(A)\}$。

（3）$x\cup y=A$，$R_3=\{(x,y)|x\cup y=A,x,y\in P(A)\}$。

【解】1. $R_1=\{\langle\emptyset,a\rangle,\langle\emptyset,b\rangle,\langle\emptyset,c\rangle\}$

反自反 非对称 传递

21. 设$A=\{a,b,c\}$, 请分别给出集合 A 中的关系 R 使它具有下列性质之一：

（1）既是对称又是反对称；（2）既不是对称又不是反对称；

（3）既是自反又是传递；（4）既不是自反又不是传递。

【解】1. $\{\langle \mathrm{a,a}\rangle,\langle \mathrm{b,b}\rangle,\langle \mathrm{c,c}\rangle,\langle \mathrm{a,b}\rangle,\langle \mathrm{b,a}\rangle\}$；2. $\{\langle a,b\rangle,\langle b,c\rangle\}$

3. $\{\langle a,a\rangle,\langle b,b\rangle,\langle c,c\rangle,\langle c,a\rangle\}$；4. $\{\langle a,b\rangle,\langle a,c\rangle\}$

22. 设R,S是A中的两个二元关系.

（1）若R、S是自反的，试证：$R\cup S,R\cap S$也是自反的；

（2）若R、S是对称的、传递的，试证:$R\cap S$也是对称的、传递的. $R\cup S$亦是吗？为什么？

【解】

(1) $\because R,S$是自反的，$\therefore \mathrm{I}_A\subseteq R\cap S,\mathrm{I}_A\subseteq R\cup S$，$\therefore R\cap S$，$R\cup S$也是自反的

(2) $\because R,S$是对称的，$\therefore R=R^{-1},S=S^{-1}$，$\therefore (R\cap S)^{-1}=R^{-1}\cap S^{-1}=R\cap S$

$(R\cup S)^{-1}=R^{-1}\cup S^{-1}=R\cup S$，$\therefore R\cap S$，$R\cup S$也是对称的，$\because R,S$是传递的

$\therefore R\circ R\subseteq R\quad S\circ S\subseteq S$，$\therefore (R\cap S)\circ(R\cap S)\subseteq R\circ R\cap R\circ S\cap S\circ R\cap S\circ S\subseteq (R\cap S)\cap(R\circ S\cap S\circ R)\subseteq(R\cap S)$。

$\therefore R\cap S$也是传递的，但是$R\cup S$不是传递的

例如：$A=\{1,2,3\}\quad R=\{\langle1,2\rangle,\langle2,3\rangle,\langle1,3\rangle\}\quad S=\{\langle1,3\rangle,\langle3,1\rangle,\langle1,1\rangle\}$

$R\cup S=\{\langle1,2\rangle,\langle2,3\rangle,\langle1,3\rangle,\langle3,1\rangle,\langle1,1\rangle\}$

$\because\langle2,3\rangle\in R\cup S$,$\langle3,1\rangle\in R\cup S$，$\therefore\langle2,1\rangle\notin R\cup S$，$\therefore R\cup S$不是传递的

23. 设集合$|A|=3$, 试计算A上具有对称性和反对称性的关系的个数。

【解】具有对称关系个数：$2^{\frac{3^2+3}{2}}=2^6$个

具有反对称关系个数：$2^{\frac{3^2-3}{2}}*2^3=216$个

24. 设R、S是集合A上的关系，试证明或否定以下论断：

（1）若R,S是自反的，则$R\circ S$是自反的；

（2）若R,S是反自反的，则$R\circ S$是反自反的；

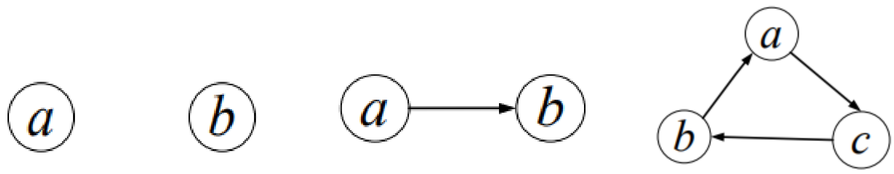
（3）若R,S是对称的，则$R\circ S$是对称的；

（4）若R,S是反对称的，则$R\circ S$是反对称的；
（5）若R,S是传递的，则$R\circ S$是传递的。
【解】
（1）是正确的。因为对任意的$x\in A$，因为R,S是自反的，所以$\langle x,x\rangle\in R,\langle x,x\rangle\in S$。由“$\circ$”知：$\langle x,x\rangle\in R\circ S$。所以，$R\circ S$是自反的。
（2）不一定正确。因为如$R=\{\langle a,b\rangle\},S=\{\langle b,a\rangle\}$, 则$R,S$都是反自反的，但$R\circ S=\{\langle a,a\rangle\}$不是反自反的。
（3）不一定正确。因为如$R=\{\langle a,b\rangle,\langle b,a\rangle\},S=\{\langle b,c\rangle,\langle c,b\rangle\}$, 则$R,S$都是对称的，但$R\circ S=\{\langle a,c\rangle\}$不是对称的。
（4）不一定正确。因为如$R=\{\langle a,b\rangle,\langle b,c\rangle\},S=\{\langle b,b\rangle,\langle c,a\rangle\}$, 则$R,S$都是反对称的，但$R\circ S=\{\langle b,a\rangle,\langle a,b\rangle\}$不是反对称的。
（5）不一定正确。因为如$R=\{\langle a,b\rangle,\langle b,c\rangle,\langle a,c\rangle\},S=\{\langle b,b\rangle,\langle c,a\rangle\}$, 则$R,S$都是传递的，但$R\circ S=\{\langle a,b\rangle,\langle b,a\rangle,\langle a,a\rangle\}$不是传递的。

25. 设$A=\{1,2,3,4\}$上的二元关系$R=\{(1,2),(2,1),(3,1),(4,3)\}$;
（1）说明R不传递；（2）求R的自反闭包、对称闭包和传递闭包。
【解】（1）对于$\langle 1,2\rangle,\langle 2,1\rangle$在$R$中，但不存在$\langle 1,1\rangle$故不传递
（2）自反闭包$r(R)=\{\langle 1,1\rangle,\langle 2,2\rangle,\langle 3,3\rangle,\langle 4,4\rangle,\langle 1,2\rangle,\langle 2,1\rangle,\langle 3,1\rangle,\langle 4,3\rangle\}$
对称闭包：$s(R)=\{\langle 1,2\rangle,\langle 2,1\rangle,\langle 3,1\rangle,\langle 1,3\rangle,\langle 4,3\rangle,\langle 3,4\rangle\}$
传递闭包：
$t(R)=R\cup R^2\cup R^3\cup R^4=\{\langle 1,1\rangle,\langle 1,2\rangle,\langle 2,1\rangle,\langle 2,2\rangle,\langle 3,1\rangle,\langle 3,2\rangle,\langle 4,1\rangle,\langle 4,2\rangle,\langle 4,3\rangle\}$

26. 设$A=\{a,b,c,d,e\}$，A中关系R定义为$R=\{\langle a,b\rangle,\langle b,c\rangle,\langle c,d\rangle,\langle d,e\rangle\}$，试求$t(R)$.
【解】$t(R)=R\cup R^2\cup R^3\cup R^4$
$=\{\langle a,b\rangle,\langle b,c\rangle,\langle c,d\rangle,\langle d,e\rangle\}\cup\{\langle a,c\rangle,\langle b,d\rangle,\langle c,e\rangle\}\cup\{\langle a,d\rangle,\langle b,e\rangle\}\cup\{\langle a,e\rangle\}$
$=\{\langle a,b\rangle,\langle b,c\rangle,\langle c,d\rangle,\langle d,e\rangle,\langle a,c\rangle,\langle b,d\rangle,\langle c,e\rangle,\langle a,d\rangle,\langle b,e\rangle,\langle a,e\rangle\}$

27. 找出图 5.8 中每个关系的自反、对称和传递闭包。



(a)关系R_1　　(b)关系R_2　　(c)关系R_3

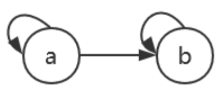
图 5.8 题 27 图。

【解】R_1:自反：

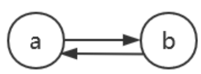
对称：

传递：

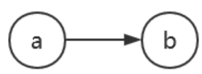
R_2:自反：



对称：



传递：



R_3：自反：　　　　对称：　　　　传递：

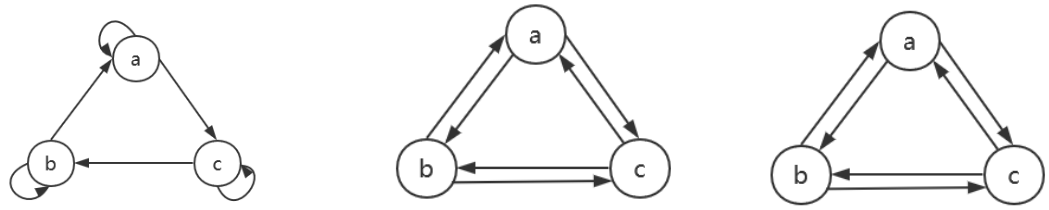


图 5.9 题 27 题解。

28. 设R是$A=\{1,2,3,4\}$上的二元关系，其关系矩阵是$M_R=\begin{pmatrix}0&1&0&0&0\\1&0&1&0&0\\0&0&0&0&0\\0&1&0&0&1\end{pmatrix}$

试求：（1）$M_{r}(R)$；（2）$M_{s}(R)$；（3）M_{R^2}、M_{R^3}、M_{R^4}和$M_t(R)$。

【解】（1）$M_r(R)$=$\begin{pmatrix}1&1&0&0\\1&1&1&0\\0&0&1&1\\0&1&0&1\end{pmatrix}$ （2）$M_s(R)$=$\begin{pmatrix}0&1&0&0\\1&0&1&1\\0&1&0&1\\0&1&1&0\end{pmatrix}$

（3）M_{R^2}=$\begin{pmatrix}0&1&0&0\\1&0&1&0\\0&0&0&1\\0&1&0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&1&0&0\\1&0&1&0\\0&0&0&1\\0&1&0&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0&1&0\\0&1&0&1\\0&1&0&0\\1&0&1&0\end{pmatrix}$

$$M_{R^3}=\begin{pmatrix}0&1&0&1\\1&1&1&0\\1&0&1&0\\0&1&0&1\end{pmatrix},\quad M_{R^4}=\begin{pmatrix}1&1&1&0\\1&1&1&1\\0&1&0&1\\1&1&1&0\end{pmatrix}$$

$$M_t(R)=M_R\cup M_{R^2}\cup M_{R^3}\cup M_{R^4}=\begin{pmatrix}1&1&1&1\\1&1&1&1\\1&1&1&1\\1&1&1&1\end{pmatrix}$$

29. 设R_1和R_2是集合A中的两个二元关系，且$R_1\supseteq R_2$. 试证：
（1）$r(R_1)\supseteq r(R_2)$（2）$S(R_1)\supseteq S(R_2)$（3）$t(R_1)\supseteq t(R_2)$
【解】
1. 由$r(R_1)=R_1\cup \mathrm{I}_A, r(R_2)=R_2\cup \mathrm{I}_A$，可知$r(R_2)\subseteq r(R_1)$。
2. 由$S(R_1)=R_1\cup {R_1}^{-1}, S(R_2)=R_2\cup {R_2}^{-1}$
∵$R_2\subseteq R_1, {R_2}^{-1}\subseteq {R_1}^{-1}$，∴$S(R_2)\subseteq S(R_1)$
3. $t(R_1)=R_1\cup {R_1}^2\cup {R_1}^3\ldots$，$t(R_2)=R_2\cup {R_2}^2\cup {R_2}^3\ldots$，
${R_1}^k\supseteq {R_2}^k$ 则$t(R_2)\subseteq t(R_1)$

30. 令R_1和R_2是集合A中的两个二元关系，证明以下命题：
（1）$r(R_1\cup R_2)=r(R_1)\cup r(R_2)$；
（2）$s(R_1\cup R_2)=s(R_1)\cup s(R_2)$；
（3）$t(R_1\cup R_2)\supseteq t(R_1)\cup t(R_2)$。

【解】

1. $r(R_1 \cup R_2) = R_1 \cup R_2 \cup \mathrm{I}_A = (R_1 \cup \mathrm{I}_A) \cup (R_2 \cup \mathrm{I}_A) = r(R_1) \cup r(R_2)$

2. $S(R_1 \cup R_2) = (R_1 \cup R_2) \cup (R_1 \cup R_2)^{-1} = R_1 \cup R_2 \cup {R_1}^{-1} \cup {R_2}^{-1} =$

$$(R_1 \cup {R_1}^{-1}) \cup (R_2 \cup {R_2}^{-1}) = S(R_1) \cup S(R_2)$$

3. $R_1 \subseteq R_1 \cup R_2, R_2 \subseteq R_1 \cup R_2$

∴$t(R_1) \subseteq t(R_1 \cup R_2), t(R_2) \subseteq t(R_1 \cup R_2)$，∴$t(R_1) \cup t(R2) \subseteq t(R_1 \cup R_2)$

31. 设R是集合A上的关系，证明或否定下述论断。

（1）若R是自反的，则$s(R), t(R)$是自反的；

（2）若R是对称的，则$r(R), t(R)$是对称的；

（3）若R是传递的，则$r(R), s(R)$是传递的；

（4）若R是反对称的，则$t(R)$是反对称的。

【解】(1) $\mathrm{I}_A \subseteq R \rightarrow \mathrm{I}_A \subseteq R \cup R^{-1} = S(R)$

$\mathrm{I}_A \subseteq R \rightarrow \mathrm{I}_A \subseteq R \cup R^2 \cup \ldots \cup R^n = t(R)$

(2) ∵R是A上的对称关系 $R = R^{-1}$ ， $\mathrm{I}_A = {\mathrm{I}_A}^{-1}$，∴$r(R)^{-1} = (R \cup R^0)^{-1} = (R \cup \mathrm{I}_A)^{-1} = R^{-1} \cup {\mathrm{I}_A}^{-1} = R \cup \mathrm{I}_A = r(R)$，当$n = 1$时，$R^1 = R$, 故$R^1$是对称的，假设$n = k$时，$P^k$是对称关系，对于任意$\langle x, y\rangle \in R^{k+1}$, 有$\langle x, y\rangle \in R^k \circ R$，故必存在元素$W \in A$, 使得$(x, w) \in R^k$且$\langle w, y\rangle \in R$，根据$R$和$R^k$的对称性知，必有$\langle w, x\rangle \in R^k$且$\langle y, w\rangle \in R$，因此$\langle y, x\rangle \in R \circ R^k = R^{k+1}$ 故R^{k+1}是对称关系，根据归纳原理，任意自然数n, R^n为对称关系，对于任意$\langle x, y\rangle \in t(R)$, 则必存在某个自然数$m$，使得$\langle x, y\rangle \in R^m$，由$R^m$得对称性知$\langle y, x\rangle \in R^m$，故有$\langle y, x\rangle \in t(R)$，因此$t(R)$是对称关系。

(3) ∵$r(R) = R \cup \mathrm{I}_A$，∴$r(R)$是传递的，$S(R)$不一定是传递的，反例：

R为$\{\langle 1,2\rangle, \langle 2,3\rangle, \langle 1,3\rangle\}$，$S(R)$为$\{\langle 1,2\rangle, \langle 2,1\rangle, \langle 2,3\rangle, \langle 3,2\rangle, \langle 1,3\rangle, \langle 3,1\rangle\}$是非传递的

(4) 反例：$R = \{\langle a, b\rangle, \langle b, c\rangle, \langle c, a\rangle\}$，$t(R) = \{\langle a, b\rangle, \langle b, c\rangle, \langle c, a\rangle, \langle a, c\rangle, \langle b, a\rangle, \langle c, b\rangle\}$

∴$t(R)$是对称的

第六章 特殊关系模型

1. 设集合$H=\{1,2,3\}$，下列关系R中哪些不是H上的等价关系？为什么？
$A=\{\langle 1,1\rangle,\langle 2,2\rangle,\langle 3,3\rangle\}$；$B=\{\langle 1,1\rangle,\langle 2,2\rangle,\langle 3,3\rangle,\langle 2,3\rangle,\langle 3,2\rangle\}$；
$C=\{\langle 1,1\rangle,\langle 2,2\rangle,\langle 3,3\rangle,\langle 2,3\rangle,\langle 3,1\rangle\}$；
$D=\{\langle 1,1\rangle,\langle 2,2\rangle,\langle 3,3\rangle,\langle 1,2\rangle,\langle 2,1\rangle,\langle 1,3\rangle,\langle 3,1\rangle,\langle 2,3\rangle,\langle 3,2\rangle\}$。
【解】C不是，因为C不满足对称性，传递性。

2. $A=\{1,2,3,4,5\}$, $R=\{(x,y)|x-y$可被 2 整除$\}$，简答以下问题。
（1）画出R的关系图；（2）R是否为A上等价关系？若是，求出R的各个等价类。
【解】
$R=\{\langle 1,3\rangle,\langle 1,5\rangle,\langle 3,1\rangle,\langle 5,1\rangle,\langle 2,4\rangle,\langle 4,2\rangle,\langle 3,5\rangle,\langle 5.3\rangle,\langle 1,1\rangle,\langle 2,2\rangle,\langle 3,3\rangle,\langle 4,4\rangle,\langle 5,5\rangle\}$
R的关系图为：

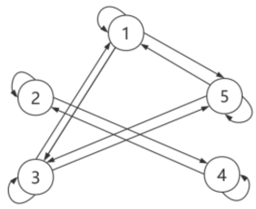


图 6.1 题目 2 关系图。
因为R满足自反性，对称性，传递性，所以R是A上的等价关系。
$[1]R=[5]R=[3]R=\{1,3,5\}$；$[2]R=[4]R=\{2,4\}$。

3. 给定集合$A=\{1,2,3,4,5\}$，找出A上能够产生划分$\{1,2\},\{3\},\{4,5\}$的等价关系R，并画出R的关系图。
【解】
$R=\{1,2\}\times\{1,2\}\cup\{3\}\times\{3\}\cup\{4,5\}\times\{4,5\}$
$=\{\langle 1,1\rangle,\langle 1,2\rangle,\langle 2,1\rangle,\langle 2,2\rangle,\langle 3,3\rangle,\langle 4,4\rangle,\langle 4,5\rangle,\langle 5,4\rangle,\langle 5,5\rangle\}$。
R的关系图为：

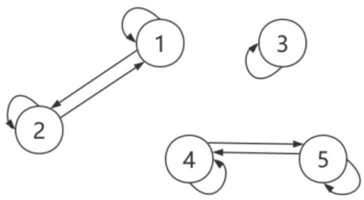


图 6.2 题目 3 关系图。

4. 设$A=\{a,b,c,d\}$，对于A上如下等价关系：
$$R=\{\langle a,a\rangle,\langle b,b\rangle,\langle c,c\rangle,\langle d,d\rangle,\langle a,b\rangle,\langle b,a\rangle,\langle c,d\rangle,\langle d,c\rangle\}$$
画出R的关系图，并找出A中各元素等价类和A的商集A/R。
【解】R的关系图为：

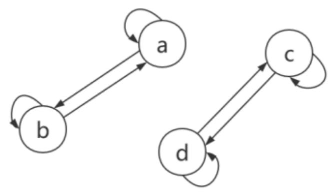


图 6.3 题目 4 关系图。

A中各元素等价类: $[a]R=[b]R=\{a,b\},[c]R=[d]R=\{c,d\}$
$A/R=\{\{a,b\},\{c,d\}\}$

5. 设$Z_+=\{x|x\epsilon Z\wedge x>0\},\pi_1,\pi_2,\pi_3$是$Z_+$的 3 个划分：
$\pi_1=\{\{x\}|x\in Z_+\}$；$\pi_2=\{S_1,S_2\}$，，S_1为素数集，$S_2=Z_+-S_1$；$\pi_3=\{Z_+\}$。
问：（1）三个划分块中划分最多的是哪一个，最少的是哪一个？
（2）各个划分分别对应Z_+中的那种关系？（包括整除关系、包含关系、全域关系、恒等关系, 含有两个等价类的等价关系。
【解】
(1) 划分最多的是π_1，最少的是π_3。
(2) π_1对应恒等关系，π_2对应含有两个等价类的等价关系，π_3对应全域关系。

6. 设$A=\{a,b,c,d\},R=I_A\cup\{\langle a,c\rangle,\langle c,a\rangle,\langle b,d\rangle,\langle d,b\rangle\}$为$A$上等价关系，求其所有等价类。
【解】$[a]R=[c]R=\{a,c\},[b]R=[d]R=\{b,d\}$

7. 设$A=\{1,2,3,4\}$, 在$P(A)$上定义如下二元关系：$R=\{\langle s,t\rangle|s,t\in P(A)\wedge(|S|=|T|)\}$。证明：$R$是$P(A)$上的等价关系并写出其商集$P(A)/R$。
证明：(1) 对任意$s\in P(A)$, 由于$|s|=|s|$，所以$\langle s,s\rangle\in R$，即R是自反的。
(2) 对任意$s,t\in P(A)$, 由$\langle s,t\rangle\in R$，得$|s|=|t|$，即有$|t|=|s|$，从而$\langle t,s\rangle\in R$，所以R是对称的。
(3) 对任意$s,t,u\in P(A)$, 由$\langle s,t\rangle\in R$且$\langle t,u\rangle\in R$，得$|s|=|t|$且$|t|=|u|$，从而有$|s|=|u|$，即$\langle s,u\rangle\in R$。所以R是传递的。
由(1), (2), (3)知R是等价关系。
$P(A)/R=\{\{\emptyset\},\{\{1\}\},\{\{1,2\}\},\{\{1,2,3\}\},\{\{1,2,3,4\}\}\}$。

8. R为自然数集N上的等价关系，$\forall x,y\in N,xRy\Leftrightarrow 2|(x+y)$，试确定$R$在$N$上的划分。
【解】由xRy易得：x和y具有相同的奇偶性。
可令：$A=\{2x|x\in N\}$
R在N上的划分为$\{\{N-A\},\{A\}\}$
9. 设$S=\{1,2,3,4\}$，$A=S*S$，A上的关系R为：$\langle a,b\rangle R\langle c,d\rangle\Leftrightarrow a+b=c+d$。
（1）证明R是等价关系；（2）计算出A/R。
【解】$\because\langle a,b\rangle R\langle c,d\rangle\Leftrightarrow a+b=c+d$
$\therefore R$首先满足自反性和对称性
$\because\langle a,b\rangle R\langle c,d\rangle\Leftrightarrow a+b=c+d$
$\langle c,d\rangle R\langle e,f\rangle\Leftrightarrow c+d=e+f=a+b\Leftrightarrow\langle a,b\rangle R\langle e,f\rangle$

所以R满足传递性。

A/R
$=\{\{1,1\},\{\langle 2,1\rangle,\langle 1,2\rangle\},\{\langle 3,1\rangle,\langle 2,2\rangle,\langle 1,3\rangle\},\{\langle 4,1\rangle,\langle 3,2\rangle,\langle 2,3\rangle,\langle 1,4\rangle\},\{\langle 4,2\rangle,\langle 3,3\rangle,\langle 2,4\rangle\},\{\langle 4,3\rangle,\langle 3,4\rangle,\langle 4,4\rangle\}\}$

10. 设R是A上的一个二元关系，$S=\{\langle a,b\rangle|(a,b\in A)\wedge(\exists c\epsilon A,有\langle a,c\rangle\epsilon R且\langle c,b\rangle\in R)\}$，证明:若$R$是$A$上的等价关系，则$S$也是$A$上的等价关系。

【证明】自反性:设$a\in A$，则由R是等价关系知$\langle a,a\rangle\in R$，从而$\langle a,a\rangle\in S$（取$c=a$即可），自反性成立。

对称性：设$\langle a,b\rangle\in S$，则由S得定义，存在$c\in A$，使得$\langle a,c\rangle$及$\langle c,b\rangle\in R$。又由R是等价关系，故关于R的对称性成立，即$\langle c,a\rangle$及$\langle b,c\rangle\in R$，从而验证得$\langle b,a\rangle\in S$。对称性成立。

传递性：设$\langle a,b\rangle\in S$，$\langle b,c\rangle\in S$，由定义得，存在$x,y\in A$，使得$\langle a,x\rangle$属于R，$\langle x,b\rangle$属于R，$\langle b,y\rangle$属于R，$\langle y,c\rangle$属于R，又由R是等价关系，所以由传递性，$\langle x,b\rangle,\langle b,y\rangle,\langle y,c\rangle$属于$R$推出$\langle x,c\rangle$属于$R$。从而由定义验证得$\langle a,c\rangle$属于$S$。传递性成立。

综上所述，S是A上等价关系。

11. 设$A=\{a,b,c,d,e,f\}$，R是A上的二元关系，且$R=\{\langle a,b\rangle,\langle a,c\rangle,\langle e,f\rangle\}$。设$R^*=tsr(R)$，则$R^*$是$A$上的等价关系。

【解】$r(R)=\{\langle a,b\rangle,\langle a,c\rangle,\langle e,f\rangle\}\cup I_A$

$Sr(R)=\{\langle a,b\rangle,\langle b,a\rangle,\langle a,c\rangle,\langle c,a\rangle,\langle e,f\rangle,\langle f,e\rangle\}\cup I_A$

$R^*=tsr(R)=\{\langle a,b\rangle,\langle b,a\rangle,\langle a,c\rangle,\langle c,a\rangle,\langle b,c\rangle,\langle c,b\rangle,\langle e,f\rangle,\langle f,e\rangle\}\cup I_A$

显然R^*满足自反性，对称性，传递性，所以其为等价关系。

12. 设R,S是非空集合A上的等价关系，试确定下列各式中哪些是A的等价关系，对不是等价关系的式子要给出反例。

（1）$(A*A)-R$；（2）$S-R$；（3）$R\cup S$；（4）$R\cap S$；（5）R^2；（6）R^{-1}

【解】

（1）因为$A*A$有自反性，R同样也有自反性，所以$(A*A)-R$无自反性

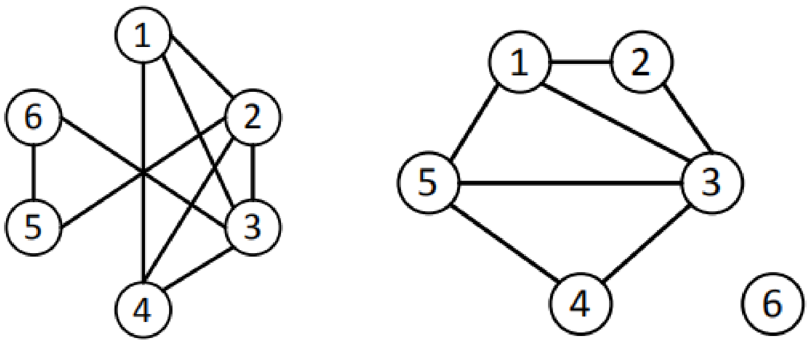
（2）同（1）也无自反性

（3）（4）（5）（6）是A的等价关系

13. 设R是集合A上的一个关系，对$\forall a,b,c\in A$，若$\langle a,b\rangle\in R$且$\langle a,c\rangle\in R$R，则有$\langle b,c\rangle\in R$，此时称R为A上的循环关系。证明：集合A上等价关系当且仅当它是满足自反性的循环关系。

【解】若R为满足自反性的循环关系，则$\langle a,a\rangle\in R$且$\langle b,b\rangle\in R$, 则$\langle a,b\rangle\in R,\langle b,a\rangle\in R$, 所以为等价关系。

14. 对图 6.4 所示的两个相容关系图G_1和G_2，分别求其最大相容类。



(a) 相容关系简化图G_1　　　(b) 相容关系简化图G_2

图 6.4 题目 14 图

【解】(a)最大相容类：{1, 2, 3, 4}

(b)最大相容类：{1, 2, 3}，{1, 3, 5}，{3, 4, 5}，{6}

15. 集合$A = \{air, book, class, go, int, not, yes, make, program\}$上关系$R$定义为：两个单词中至少一个字母相同。证明$R$是相容关系，并写出$R$产生的所有最大相容类。

答：显然R有对称性，以及自反性所以R为相容关系。

R最大相容类：

$\{air, class, make, program\}$,

$\{\{air, int\}, \{book, go, not, program\}, \{book, make, program\}, \{int, not\}, \{make, yes, class\}\}$

16. 设集合$X = \{x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6\}$，下图 6.5 表示是$X$上关系$R$的关系图.

（1）检验R是X上的相容关系；（2）确定由R决定的X的覆盖.

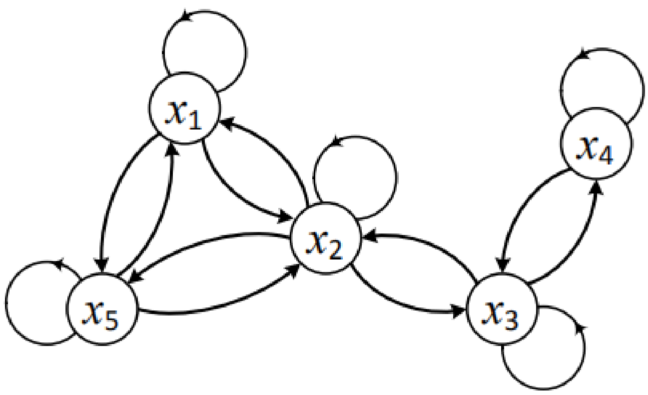


图 6.5 题目 16 图

【解】由关系图可知所有元素之间具有自反性和对称性，所以R是X上的相容关系。简化后得到下图：

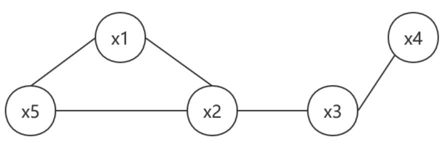


图 6.6 题目 16 哈斯图。

由R决定的X的覆盖$\{\{x_1, x_2, x_5\}, \{x_3, x_4\}, \{x_2, x_3\}\}$

17. 集合$A=\{a,b,c,d,e\}$上的二元关系R为：

R

$=\{\langle a,a\rangle,\langle a,b\rangle,\langle a,c\rangle,\langle a,d\rangle,\langle a,e\rangle,\langle b,b\rangle,\langle b,c\rangle,\langle b,e\rangle,\langle c,c\rangle,\langle c,d\rangle,\langle c,e\rangle,\langle d,d\rangle,\langle d,e\rangle,\langle e,e\rangle\}$

（1）写出R的关系矩阵；（2）判断R是否为偏序关系，为什么？

【解】R的关系矩阵

$$\begin{pmatrix}1&1&1&1&1\\0&1&1&0&1\\0&0&1&1&1\\0&0&0&1&1\\0&0&0&0&1\end{pmatrix}$$

不是偏序关系，因为R不满足传递性。

18. 设$A=\{a,b,c,d\}$，$\pi_i(i=1,2,3,4)$是A的划分，其中：$\pi_1=\{\{a\},\{b\},\{c\},\{d\}\}$；$\pi_2=\{\{a,c\},\{b,d\}\}$；$\pi_3=\{\{a,b\},\{c\},\{d\}\}$；$\pi_4=\{\{a,b,c,d\}\}$。令$\Pi=\{\pi_1,\pi_2,\pi_3,\pi_4\}$，$\pi_i\leqslant\pi_j$当且仅当$\pi_i$的每个划分块都包含在$\pi_j$的某个划分块中，求偏序集$\langle\Pi,\leq\rangle$的哈斯图。

【解】哈斯图如下图所示：

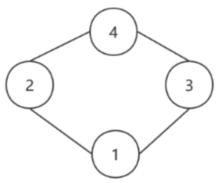


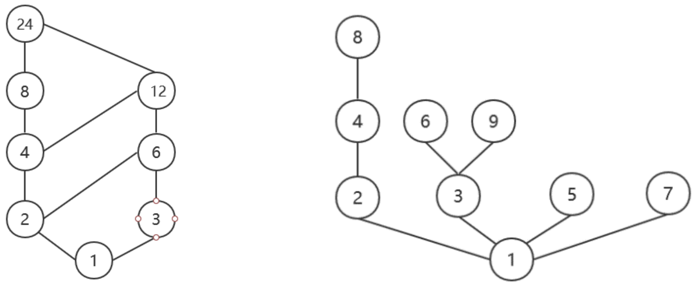
图 6.7 题目 18 哈斯图。

19. 求下列集合上整除关系并画出哈斯图，指出其极大元、最大元、极小元和最小元。

(1)$A=\{1,2,3,4,6,8,12,24\}$; (2)$B=\{1,2,3,4,5,6,7,8,9\}$。

【解】

(1)$\{\langle 1,2\rangle,\langle 1,3\rangle,\langle 1,4\rangle,\langle 1,6\rangle,\langle 1,8\rangle,\langle 1,12\rangle,\langle 1,24\rangle,\langle 2,4\rangle,\langle 2,6\rangle,\langle 2,8\rangle\langle 2,12\rangle,\langle 2,24\rangle,$
$\langle 3,6\rangle,\langle 3,12\rangle,\langle 3,24\rangle,\langle 4,8\rangle,\langle 4,12\rangle,\langle 4,24\rangle,\langle 6,12\rangle,\langle 6,24\rangle,\langle 8,24\rangle,\langle 12,24\rangle\}\cup I_A$



(1)哈斯图 (2)哈斯图。

图 6.8 题目 19 哈斯图。

最大元，极大元：24

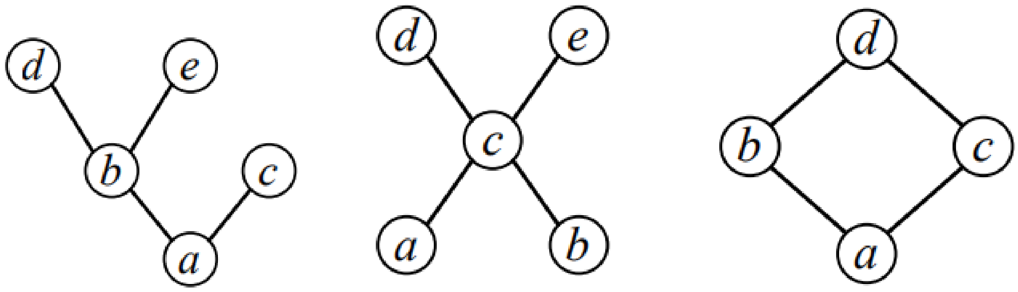
最小元，极小元：1

（2）$\{\langle 1,2\rangle,\langle 1,3\rangle,\langle 1,4\rangle,\langle 1,5\rangle,\langle 1,6\rangle,\langle 1,7\rangle,\langle 1,8\rangle,\langle 1,9\rangle,\langle 2,4\rangle,\langle 2,6\rangle,\langle 2,8\rangle,\langle 3,6\rangle,\langle 3,9\rangle,$
$\langle 4,8\rangle\}\cup I_A$

极大元：8, 6, 9, 5, 7，最大元：不存在

极小元，最小元：1

20. 对于图 6.9 所示 3 个偏序集$\langle A, R_{\leq}\rangle$的哈斯图，分别写出集合$A$和偏序关系$R_{\leq}$的表达式。



(a)哈斯图G_1　　(b)哈斯图G_2　　(c)哈斯图G_3

图 6.9 题目 20 图。

【解】(1)集合$A = \{a, b, c, d, e\}$

$R_{\leq} = \{\langle a, b\rangle, \langle a, c\rangle, \langle b, d\rangle, \langle b, e\rangle, \langle a, a\rangle, \langle b, b\rangle, \langle c, c\rangle, \langle d, d\rangle, \langle e, e\rangle, \langle a, d\rangle, \langle a, e\rangle\}$。

(2)集合$A = \{a, b, c, d, e\}$，

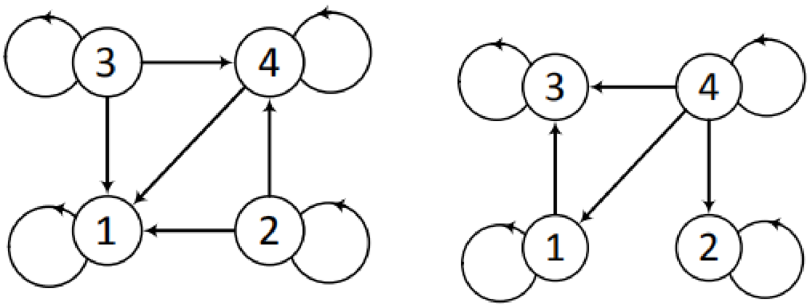
$R_{\leq}$

$= \{\langle a, c\rangle, \langle a, e\rangle, \langle a, d\rangle, \langle b, c\rangle, \langle b, d\rangle, \langle b, e\rangle, \langle c, d\rangle, \langle c, e\rangle, \langle a, a\rangle, \langle b, b\rangle, \langle c, c\rangle, \langle d, d\rangle, \langle e, e\rangle\}$

(3)集合$A = \{a, b, c, d\}$，

$R_{\leq} = \{\langle a, b\rangle, \langle a, c\rangle, \langle a, d\rangle, \langle b, d\rangle, \langle c, d\rangle, \langle a, a\rangle, \langle b, b\rangle, \langle c, c\rangle, \langle d, d\rangle\}$。

21. 设$A = \{1,2,3,4\}$，图 6.10 给出了A上的两个偏序关系图，试画出其哈斯图，并指出每个偏序集的极大元、最大元、极小元、最小元。



(a)关系图G_1　　(b)关系图G_2

图 6.10 题目 21 图。

【解】（1）哈斯图：

（1）哈斯图　　（2）哈斯图。

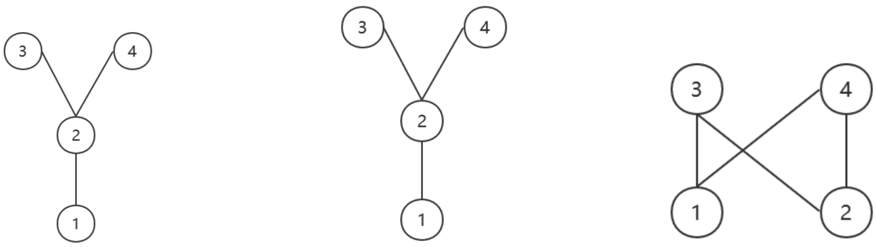
图 6.11 题目 21 哈斯图。

极大元：1；最大元：1；极小元：2, 3；最小元：无

（2）哈斯图如上所示，极大元：3, 2；最大元：无；极小元：4；最小元：4

22. 令$A=\{\{1\},\{2\},\{4\},\{1,2\},\{1,4\},\{2,4\},\{3,4\},\{1,3,4\},\{2,3,4\}\}$，对偏序集$\langle A,\subseteq\rangle$回答下面问题：
1）求极大元素和极小元素。
【解】极大元素：$\{1,2\},\{1,3,4\},\{2,3,4\}$
2）存在最大元素和最小元素么？
【解】不存在
3）求$\{\{2\},\{4\}\}$的所有上界；
【解】$\{2,4\},\{2,3,4\}$
4）求$\{\{1,3,4\},\{2,3,4\}\}$的所有下界。
【解】$\{4\},\{3,4\}$

23. 请分别例举出满足下列条件的偏序集$\langle A,\leq\rangle$的实例：
（1）$\langle A,\leq\rangle$为全序集，但A的某些非空子集无最小元；
【解】A是实数集，R是大小关系，取A的非空子集B为开区间(a,b)，此时B没有最小元。
（2）$\langle A,\leq\rangle$不是全序集，A的某些非空子集无最大元；
【解】$A=\{1,2,3,4\}$，A的非空子集$B=\{2,3,4\}$无最大元。



（2）哈斯图　　（3）哈斯图　　（4）哈斯图

图 6. 12 题目 23 哈斯图。

（3）A的某些非空子集有下确界，但该子集无最小元；
【解】$A=\{1,2,3,4\}$，A的非空子集$B=\{3,4\}$有下确界，无最小元。
（4）A的某些非空子集有上界，但该子集无上确界。
【解】$A=\{1,2,3,4\}$，A的非空子集$B=\{1,2\}$有上界 3, 4，无上确界。

24. 设$S=\{0,1\}$，F是S中的字符构成长度不超过 4 的串集，即$F=\{\lambda,0,1,00,01,\ldots,1111\}$。其中$\lambda$表示空串。在$F$上定义偏序关系$R$：$\forall x,y\in F$，$\langle x,y\rangle\in R\Leftrightarrow x$是$y$的前缀。画出$\langle F,R\rangle$的哈斯图并出特殊元素。对于$G\subseteq F,G=\{101,1001\}$，求$G$中的最小上界和最大下界。
【解】

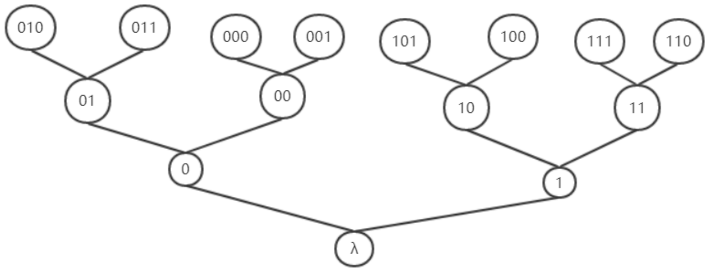
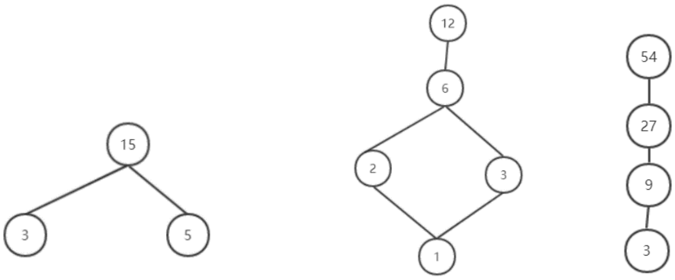


图 6. 13 题目 24 哈斯图。

最大元不存在，最小元为λ，极大元为全部长度为 4 的串，极小元为λ。
G的最小上界不存在，最大下界为 10。

25. 设集合$A=\{3,5,15\}$，$B=\{1,2,3,6,12\}$，$C=\{3,9,27,54\}$，分别在A,B,C上定义整除关系，则这些整除关系显然均为偏序关系，试写出这些偏序关系的表达式，分别画出其哈斯图，并指出那些是全序关系。

【解】设A的的偏序关系为$R_1=\{\langle 3,3\rangle,\langle 5,5\rangle,\langle 3,15\rangle,\langle 5,15\rangle,\langle 15,15\rangle\}$



（R_1）哈斯图　　（R_2）哈斯图　　（R_3）哈斯图

图 6. 14 题目 25 哈斯图。

设B的的偏序关系为$R_2=\{\langle 1,1\rangle,\langle 1,2\rangle,\langle 1,3\rangle,\langle 1,6\rangle,\langle 1,12\rangle,\langle 2,2\rangle,\langle 2,6\rangle,$
$\langle 2,12\rangle,\langle 3,3\rangle,\langle 3,6\rangle,\langle 3,12\rangle,\langle 6,6\rangle,\langle 6,12\rangle,\langle 12,12\rangle\}$。
设C的的偏序关系为$R_3=\{\langle 3,3\rangle,\langle 3,9\rangle,\langle 3,27\rangle,\langle 3,54\rangle,\langle 9,9\rangle,\langle 9,27\rangle,\langle 9,54\rangle$
$,\langle 27,27\rangle,\langle 27,54\rangle,\langle 54,54\rangle\}$。
只有C是全序关系。

26. 设R是实数集，令$X=R^{[0,1]}$，若$f,g\in S\Leftrightarrow\forall x\in[0,1]$，$f(x)-g(x)\geq 0$试证：$S$是一个偏序集，并判断$S$是否为全序关系。

【解】自反性：$f\in S$，$\forall x\in[0,1]$，$f(x)-g(x)\geq 0$成立
反对称性：$f(x)\neq g(x)$时，$f(x)-g(x)>0,x$不相同
$f(x)-g(x)\leq 0$不成立, 所以满足反对称性。
传递性：若$f,g\in S\Leftrightarrow\forall x\in[0,1]$，$f(x)-g(x)\geq 0$
若$g,h\in S\Leftrightarrow\forall x\in[0,1],g(x)-h(x)\geq 0,$
所以有$f(x)-h(x)\geq 0$成立
所以S是偏序集，由于是大于等于关系，所有元素都是可比的所以是全序关系。

27. 判断下列关系是否为偏序关系、全序关系或良序关系。
（1）自然数集N上的小于关系；
【解】小于关系，则N的任意非空子集都有最小元素，为良序关系。

（2）自然数集N上的大于等于关系；
【解】大于等于关系，则N的所有元素都是可比的所以是全序关系。
（3）整数集Z上的小于等于关系；
【解】与（2）同理为全序关系。
（4）幂集$P(N)$上的真包含关系；
【解】偏序关系。
（5）幂集$P(\{a\})$上的包含关系；
【解】$P(\{a\}) = \{\emptyset, \{a\}\}$, 全序关系
（6）幂集$P(\emptyset)$上的包含关系。
【解】$P(\emptyset) = \{\emptyset\}$，无元素，无关系。

第七章 函数与特殊函数

1.对于集合$A=\{x,y,z\}$，$B=\{1,2,3\}$，判断下面A到B的哪些关系构成函数.

（1）$\{\langle x,1\rangle,\langle x,2\rangle,\langle y,1\rangle,\langle y,3\rangle\}$；不是，$x$映射到 2 个

（2）$\{\langle x,1\rangle,\langle y,3\rangle,\langle z,3\rangle\}$；　　是

（3）$\{\langle x,1\rangle,\langle y,1\rangle,\langle z,1\rangle\}$；　　是

（4）$\{\langle x,2\rangle,\langle y,3\rangle\}$；　　不是，$z$没有映射

（5）$\{\langle x,1\rangle,\langle y,2\rangle,\langle z,3\rangle\}$；　　是

（6）$\{\langle x,1\rangle,\langle x,2\rangle,\langle y,1\rangle,\langle y,3\rangle,\langle z,2\rangle,\langle z,3\rangle\}$。　　不是

2.在下面哪些关系中哪些能构成函数？

$\{\langle x_1,x_2\rangle|x_1,x_2\in N,x_1,x_2<10\}$

$\{\langle x_1,x_2\rangle|x_1,x_2\in R,x_1={x_2}^2\}$

$\{\langle x_1,x_2\rangle|x_1,x_2\in R,{x_1}^2=x_2\}$

【解】只有第二个可以构成函数，第 1、3 个都不满足函数的条件。

3.设f,g都是$A\to A$的函数，证明$f\cap g$是函数。

证明：因为f,g都是$A\to A$的函数

所以$\mathrm{dom}f=A,\mathrm{dom}g=A$

$\mathrm{ran}f=A,\mathrm{ran}g=A$

所以$\mathrm{dom}f\cap\mathrm{dom}g=\mathrm{dom}(f\cap g)=A$

$\mathrm{ran}f\cap\mathrm{ran}g=\mathrm{ran}(f\cap g)=A$

所以$f\cap g$是$A\to A$函数

4.假设f和g是函数，证明：$f\subseteq g\Leftrightarrow\mathrm{dom}f\subseteq\mathrm{dom}g$，且对$\forall x\in\mathrm{dom}f$，有$f(x)=g(x)$。

证明：因为$f\subseteq g$

所以函数f的定义域和值域都是g的子集,即$\mathrm{dom}f\subseteq\mathrm{dom}g,\mathrm{ran}f\subseteq\mathrm{ran}g$

且当$\mathrm{dom}f\subseteq\mathrm{dom}g$时，可知$\mathrm{ran}f\subseteq\mathrm{ran}g$

所以$f\subseteq g\Leftrightarrow\mathrm{dom}f\subseteq\mathrm{dom}g$

因为当$x\in\mathrm{dom}f$时，$x\in\mathrm{dom}g$

所以$f(x)=g(x)$

5.设R,Z,N分别表示实数、整数和自然数集，定义如下函数f_1,f_2,f_3,f_4，试讨论其是单射、满射还是双射：

（1）$f_1:R\to R+,f_1(x)=2^x$；　　双射

（2）$f_2:Z\to N,f_2(x)=|x|$；　　满射

（3）$f_3:N\to N,f_3(x)=2x$；　　单射

（4）$f_4:\mathrm{N}\to\mathrm{N}\times\mathrm{N},f_4(\mathrm{x})=\langle\mathrm{x},\mathrm{x}+1\rangle$.　　单射

6.设$|A|=n$，$|B|=m$：

(1)从A到B有多少个不同的函数；

(2)当n，m满足什么条件时，存在双射，且有多少不同的双射？

(3)当n，m满足什么条件时，存在满射，且有多少不同的满射?

(4)当n，m满足什么条件时，存在单射，且有多少不同的单射?

【解】

(1)m^n个不同的函数

(2)当$m = n$时,存在双射，$m!$种或者$n!$种

(3)当$n \geq m$时，存在满射

这问题等价于:把n个有区别的球放入m个相同的盒子中，要求无一盒子空，这记为$S(n,m)$，再把这m个盒子全排列，其总数$= m! * S(n,m)$

其中$S(n,m)$满足：$S(n,0) = 0$；$S(n,1) = 1$

$$S(n,m) = m * S(n-1,m) + S(n-1,m-1)$$

(4)当$n \leq m$时，存在单射，有$A_m^n = \frac{m!}{(m-n)!}$种不同的单射。

7.设函数$f: N \to N$，且有：$f(1) = 1$，当$f(n)$是偶数时$f(n+1) = f(n) / 2$,当$f(n)$是奇数时$f(n+1) = 5f(n) + 1$，说明$f(x)$既不是满射，也不是单射。

【解】$f(2) = 5 * f(1) + 1 = 6$

$f(3) = f(2)/2 = 3$

$f(4) = 5 * f(3) + 1 = 16$

$f(5) = 4f(6) = 4f(7) = 2f(8) = 1$

因为$f(8) = f(1)$，所以$f(x)$不是单射， 而且找不到 17 的原像，所以不是满射。

8.试给出满足下列每个条件的函数例子：

（1）是单射而不是满射；

（2）是满射而不是单射；

（3）不是单射也不是满射；

（4）既是单射也是满射。

【解】（1）$f: N \to N \quad f(x) = 2x$；（2）$f: z \to N \quad f(x) = |x|$

（3）上面第 7 题中的例子；（4）$f: N \to N \quad f(x) = x$

9. 设$f: R \to R$，R为实数集，对下面各个f判断它是否为单射、满射或双射。如果不是单射，则给出x_1和x_2，使得$x_1 \neq x_2$且$f(x_1) = f(x_2)$；如果不是满射，则计算$f(R)$。

(1)$f(x) = x^2$；(2)$f(x) = E[x]$，其中$E[x]$表示小于等于x的最大整数。

【解】(1)不是单射，是满射　$f(2) = f(-2) = 4$

(2)不是单射，也不是满射

$f(1) = f(1.5) = 1$所以不是单射，2.5 找不到原像，所以不是满射

10.设$A = \{a,b,c\}$，$R = \{\langle a,b\rangle, \langle b,a\rangle\} \cup I_A$是$A$上的等价关系，设自然映射$g: A \to A/R$，求$g(a)$

【解】因为 R 为 A 上的等价关系，所以$A/R = \{\{a,b\},\{c\}\}$，$g(a) = \{a,b\}$或$\{c\}$。

11.设$f: A \to A, B$是A的子集，试确定$f(f^{-1}(B))$、B和$f^{-1}(f(B))$三者之间包含关系。

【解】相等

12.设f, g, h都是实数集R上的函数，对$\forall x \in R, f(x) = 2x + 1, g(x) = 5 + x, h(x) = x/2$。求：

$$f\circ g, g\circ f, h\circ f, f\circ(h\circ g), g\circ(h\circ f)$$

【解】$f\circ g = g(f(x)) = 2x+6$

$g\circ f = f(g(x)) = 2x+11$

$h\circ f = f(h(x)) = x+1$

$f\circ(h\circ g) = f\circ g(h(x)) = x+\dfrac{11}{2}$

$g\circ(h\circ f) = g\circ f(h(x)) = x+6$

13.两个从自然数集N到N的位移函数为$f(n)=n+1$，$g(n)=\max\{0,n\}$。证明：（1）f是单射而不是满射；（2）g是满射而不是单射；（3）$f\circ g = I_N$，但$g\circ f \neq I_N$

证明:(1)$\forall x\in N$都有$x+1\in N$且$x+1$与x唯一对应，所以f是单射

又因为 0 找不到原像，所以f不是满射

(2)因为$g(0)=0=g(1)$，所以不是单射

g的值域属于N，任意一个自然数都能找到原像，所以是满射

(3)$f\circ g = \max\{0,n\} = I_N$

$g\circ f = \max\{0,n-1\}+1 = \max\{1,n\} \neq I_N$

14.设$f,g\in N^N$, N为自然数集，且有：

$$f(x)=\begin{cases}x+1 & x=0,1,2,3\\ 0 & x=4\\ x & x\geq 5\end{cases}\qquad g(x)=\begin{cases}\dfrac{x}{2} & x\text{偶数}\\ 3 & x\text{奇数}\end{cases}$$

（1）求$f\circ g$，并讨论它的性质（是否为单射或满射）.

（2）设$A=\{0,1,2\}$，$B=\{0,1,5,6\}$，求A在$f\circ g$下的像$f\circ g(A)$和B的完全原像$f\circ g^{-1}(B)$

【解】(1)$f\circ g = g(f(x)) = \begin{cases}3 & x=0,2\\ \frac{\mathrm{x+1}}{2} & x=1,3\\ 0 & x=4\\ 3 & x\geq 5\text{ 且 x 为奇数}\\ \frac{x}{2} & x\geq 5\text{ 且 x 为偶数}\end{cases}$

不是单射，也不是满射

(2)$f\circ g(A) = g(f(A)) = \{3,1\}$，$f\circ g^{-1}(B) = \{4,1,10,12\}$。

15.令f是从A到B的函数，令S和T为A的子集，求证：

（1）$f(S\cup T) = f(S)\cup f(T)$；　（2）$f(S\cap T)\subseteq f(S)\cap f(T)$

（3）$f^{-1}(S\cup T) = f^{-1}(S)\cup f^{-1}(T)$；（4）$f^{-1}(S\cap T) = f^{-1}(S)\cap f^{-1}(T)$

证明:(1)(2)见课本 P4 定理 7.2；(3)略；(4)略

16.令S为全集U的子集，S的特征函数f_S是从U到集合$\{0,1\}$的函数：若$x\in S$，则$f_S(x)=1$；若x不属于S，则$f_S(x)=0$。令A,B为集合，求证：

（1）$f_{A\cap B}(x) = f_A(x)\cdot f_B(x)$

（2）$f_{A\cup B}(x) = f_A(x)+f_B(x)-f_A(x)\cdot f_B(x)$

（3）$f_{\bar{A}}(x) = 1-f_A(x)$

（4）$f_{A\oplus B}(x) = f_A(x)+f_B(x)-2f_A(x)f_B(x)$

证明:(1)若$x \in A \land x \notin B$，则$f_A(x) \cdot f_B(x) = 0 = f_{A\cap B}(x)$

若$x \notin A \land x \in B$，则$f_A(x) \cdot f_B(x) = 0 = f_{A\cap B}(x)$

若$x \in A \land x \in B$，则$f_A(x) \cdot f_B(x) = 1 = f_{A\cap B}(x)$

(2)若$x \in A \land x \in B$，则$f_{A\cup B}(x) = 1$

$f_A(x) + f_B(x) - f_A(x) \cdot f_B(x) = 1 + 1 - 1 = 1$成立

若$x \in A \land x \notin B$，则$f_{A\cup B}(x) = 1$

$f_A(x) + f_B(x) - f_A(x) \cdot f_B(x) = 1 + 0 - 0 = 1$成立

若$x \notin A \land x \in B$，则$f_{A\cup B}(x) = 1$

$f_A(x) + f_B(x) - f_A(x) \cdot f_B(x) = 0 + 1 - 0 = 1$成立

若$x \notin A \land x \notin B$，则$f_{A\cup B}(x) = 0$

$f_A(x) + f_B(x) - f_A(x) \cdot f_B(x) = 0 + 0 - 0 = 0$成立

(3)令$\bar{A} = \mathrm{B}$ 若$x \in A$，则$f_A(x) = 1, f_B(x) = 0$成立

若$x \notin A$，则$f_A(x) = 0, f_B(x) = 1$成立

(4)若$x \in A \land x \in B$，则$f_{A\oplus B}(x) = 0$

$f_A(x) + f_B(x) - 2f_A(x)f_B(x) = 1 + 1 - 2 \times 1 = 0$成立

若$x \in A \land x \notin B$，则$f_{A\oplus B}(x) = 1$

$f_A(x) + f_B(x) - 2f_A(x)f_B(x) = 1 + 0 - 0 = 1$成立

若$x \notin A \land x \in B$，则$f_{A\oplus B}(x) = 1$

$f_A(x) + f_B(x) - 2f_A(x)f_B(x) = 0 - 1 + 0 = 1$成立

若$x \notin A \land x \notin B$，则$f_{A\oplus B}(x) = 0$

$f_A(x) + f_B(x) - 2f_A(x)f_B(x) = 0$成立

17.设$f: S \to T$，证明：

（1）$f(A \cap B) \subseteq f(A) \cap f(B)$，其中$A$、$B$是$S$的子集。

（2）举出反例说明等式$f(A \cap B) = f(A) \cap f(B)$不是永远为真的。

（3）说明对于什么函数，上述等式为真。

证明:(1)书上 P4 定理 7.2

(2)当$A \cap B = \emptyset$时，左边$= \emptyset$，右边不一定是$\emptyset$

(3)双射函数

18.设$A = \{1,2,3,4\}$，$A_1 = \{1,2\}$，$A_1 = \{1\}$，$A_3 = \emptyset$，求A_1、A_2、A_3和A的特征函数。

【解】 A_1的特征函数$= \{\langle 1,1\rangle, \langle 2,1\rangle, \langle 3,0\rangle, \langle 4,0\rangle\}$

A_2的特征函数$= \{\langle 1,1\rangle, \langle 2,0\rangle, \langle 3,0\rangle, \langle 4,0\rangle\}$

A_3的特征函数$= \{\langle 1,0\rangle, \langle 2,0\rangle, \langle 3,0\rangle, \langle 4,0\rangle\}$

A的特征函数$= \{\langle 1,1\rangle, \langle 2,1\rangle, \langle 3,1\rangle, \langle 4,1\rangle\}$

19.对于集合$A = \{a, b, c, d\}, B = \{1,2,3\}, C = \{a, b, d\}$，计算如下函数的复合函数：

（1）$f = \{\langle a, 1\rangle, \langle b, 2\rangle, \langle c, 1\rangle, \langle d, 3\rangle\}$，$g = \{\langle 1, a\rangle, \langle 2, b\rangle, \langle 3, d\rangle\}$；

（2）$f = \{\langle a, 2\rangle, \langle b, 3\rangle, \langle c, 1\rangle, \langle d, 3\rangle\}$，$g = \{\langle 1, a\rangle, \langle 2, a\rangle, \langle 3, a\rangle\}$；

（3）$f = \{\langle a, 3\rangle, \langle b, 1\rangle, \langle c, 2\rangle, \langle d, 3\rangle\}$，$g = \{\langle 1, b\rangle, \langle 2, b\rangle, \langle 3, b\rangle\}$；

（4）$f = \{\langle a, 2\rangle, \langle b, 2\rangle, \langle c, 3\rangle, \langle d, 3\rangle\}$，$g = \{\langle 1, d\rangle, \langle 2, b\rangle, \langle 3, a\rangle\}$

【解】（1）$f \circ g = g(f(x)) = \{\langle a, a\rangle, \langle b, b\rangle, \langle c, a\rangle, \langle d, d\rangle\}$

$g\circ f=f(g(x))=\{\langle 1,1\rangle,\langle 2,2\rangle,\langle 3,3\rangle\}$

（2）$f\circ g=g(f(x))=\{\langle a,a\rangle,\langle b,a\rangle,\langle c,a\rangle,\langle d,a\rangle\}$

$g\circ f=f(g(x))=\{\langle 1,2\rangle,\langle 2,2\rangle,\langle 3,2\rangle\}$

（3）$f\circ g=g(f(x))=\{\langle a,b\rangle,\langle b,b\rangle,\langle c,b\rangle,\langle d,b\rangle\}$

$g\circ f=f(g(x))=\{\langle 1,1\rangle,\langle 2,1\rangle,\langle 3,1\rangle\}$

（4）$f\circ g=g(f(x))=\{\langle a,b\rangle,\langle b,b\rangle,\langle c,a\rangle,\langle d,a\rangle\}$

$g\circ f=f(g(x))=\{\langle 1,3\rangle,\langle 2,2\rangle,\langle 3,2\rangle\}$

20.令$f(x)=ax+b$和$g(x)=cx+d$，其中a,b,c,d为常数。确定常数使得：$f\circ g=g\circ f$

【解】$f\circ g=g(f(x))=c(ax+b)+d=acx+bc+d$

$g\circ f=f(g(x))=a(cx+d)+b=acx+ad+b$

所以$bc=add=b$

所以$a=cd=b$

21.使用集合特征函数证明下面集合恒等式：

(1)$A\cap(B\cup\sim A)=B\cap A$；(2)$A\cap(B\cup C)=(A\cap B)\cup(A\cap C)$。

【解】(1)$\chi_{A\cap(B\cup\sim A)}=\chi_A\cdot\chi_{B\cup\sim A}$

$=\chi_A\cdot(\chi_B+\chi_A-\chi_{B\cap\sim A})$

$=\chi_A\cdot\chi_B+\chi_{A\cap\sim A}-\chi_{A\cap B\cap\sim A})$

$=\chi_A\cdot\chi_B$

$=\chi_{A\cap B}$

(2)$\chi_{A\cap(B\cup C)}=\chi_A\cdot\chi_{B\cup C}$

$=\chi_A\cdot(\chi_B+\chi_C+\chi_{B\cap C})$

$=\chi_A\cdot\chi_B+\chi_A\cdot\chi_C-\chi_{A\cap B\cap C}$

$=\chi_{(A\cap B)\cup(A\cap C)}$

22.设S为集合，A,B是S的子集，χ_T表示T的特征函数，且$\chi_A=\{\langle a,1\rangle,\langle b,1\rangle,\langle c,0\rangle,\langle d,0\rangle\}$,

$\chi_B=\{\langle a,0\rangle,\langle b,1\rangle,\langle c,0\rangle,\langle d,1\rangle\}$，求$\chi_{A\cap B}$

【解】由χ_A可知$A:\{a,b\}$

由χ_B可知$B:\{b,d\}$

$A\cap B=\{b\}$

所以$\chi_{A\cap B}=\{\langle a,0\rangle,\langle b,1\rangle,\langle c,0\rangle,\langle d,0\rangle\}$

23.设置换$s=\begin{pmatrix}1&2&3&4&5\\2&4&3&5&1\end{pmatrix}$,$t=\begin{pmatrix}1&2&3&4&5\\2&5&1&4&3\end{pmatrix}$,求$s^2,t^2,st,ts,s^{-1},t^{-1}$

【解】$s^2=\begin{pmatrix}1&2&3&4&5\\4&5&3&1&2\end{pmatrix}$；$t^2=\begin{pmatrix}1&2&3&4&5\\5&3&2&4&1\end{pmatrix}$；

$st=\begin{pmatrix}1&2&3&4&5\\5&4&1&3&2\end{pmatrix}$；　　$ts=\begin{pmatrix}1&2&3&4&5\\4&1&2&5&3\end{pmatrix}$

$s^{-1}=\begin{pmatrix}1&2&3&4&5\\5&1&3&2&4\end{pmatrix}$；　　$t^{-1}=\begin{pmatrix}1&2&3&4&5\\3&1&5&4&2\end{pmatrix}$

24.设置换$s=\begin{pmatrix}a&b&c&d&e&f&g\\g&f&e&d&c&b&s\end{pmatrix}$，$t=\begin{pmatrix}a&b&c&d&e&f&g\\e&g&f&b&a&c&d\end{pmatrix}$,

(1)求出上述置换的逆置换；

(2)计算$s\circ t(a)$，$t\circ s(a)$，$s^{-1}(b)\circ t^{-1}(c)$；

(3)计算$s\circ t,t\circ s$

【解】

(1)$s^{-1}=\begin{pmatrix} g & f & e & d & c & b & s \\ a & b & c & d & e & f & g \end{pmatrix}$；$t^{-1}=\begin{pmatrix} e & g & f & b & a & c & d \\ a & b & c & d & e & f & g \end{pmatrix}$

(2)$s\circ t(a)=d$；$t\circ s(a)=c$；$s^{-1}(b)\circ t^{-1}(c)=f$。

(3)$s\circ t=\begin{pmatrix} a & b & c & d & e & f & g \\ d & c & a & b & f & g & s \end{pmatrix}$；$t\circ s=\begin{pmatrix} a & b & c & d & e & f & g \\ c & s & b & f & g & e & d \end{pmatrix}$

第八章 图的基本理论与算法

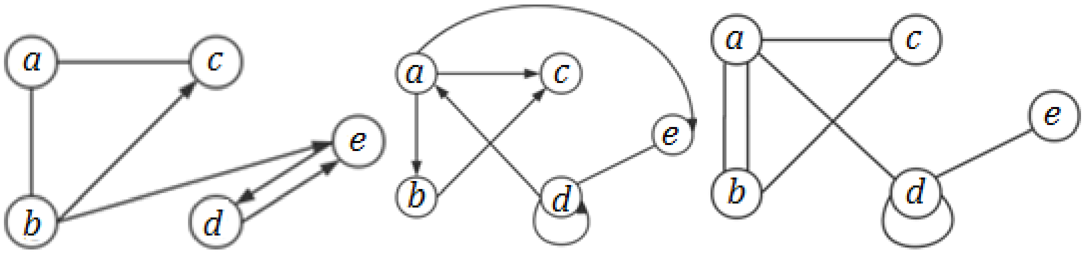
1. 画出下列各图的图形，并指出哪些是有向图、无向图、混合图、多重图、线图和简单图。

（1）$G_1 = \langle \{a,b,v,d,e\}, \{(a,b),(a,c),(d,e),(d,d),(b,c),(a,d),(b,a)\} \rangle$；

（2）$G_2 = \langle \{a,b,c,d,e\}, \{\langle a,b\rangle,\langle b,c\rangle,\langle a,c\rangle,\langle d,a\rangle,\langle d,e\rangle,\langle d,d\rangle,\langle a,e\rangle\} \rangle$；

（3）$G_3 = \langle \{a,b,c,d,e\}, \{(a,b),(a,c),\langle d,e\rangle,\langle b,e\rangle,\langle e,d\rangle,(b,c)\} \rangle$.

【解】



G_1　　　　G_2　　　　G_3

图 8.1 题目 1 图。

如图 8.1 所示G_1为无向多重图，G_2为有向线图，G_3为混合简单图。

2.如图 8.2 所示，$G=\langle V,E\rangle$，找出其中的V和E，所有的平行边，所有的回路，所有的孤立顶点，判断　是否为简单图。说明边e_3与哪个顶点相关联，顶点v_2与哪个顶点相关联。

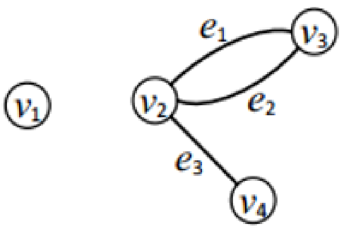
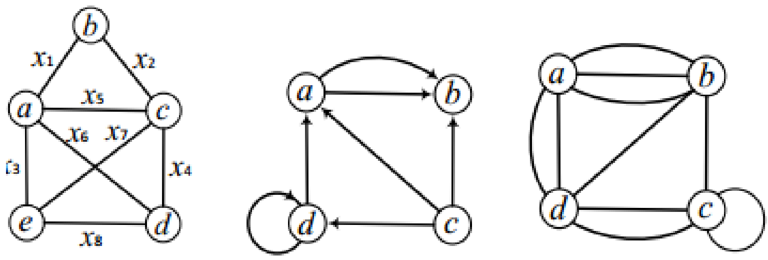


图 8.2 题目 2 图。

【解】平行边：e_1,e_2，回路：无回路，孤立顶点：v_1，G是简单图，边e_3与v_2,v_4相关联，v_2与v_3,v_4相关联。

3.如图 8.3 所示，分别写出图G_1,G_2,G_3的邻接矩阵。



(a)图G_1　　　　(b)图G_2　　　　(c)图G_3

图 8.3 题目 3 图

【解】$A_{G_1}=\begin{pmatrix}0&1&1&1&1\\1&0&1&0&0\\1&1&0&1&1\\1&0&1&0&1\\1&0&1&1&0\end{pmatrix}A_{G_2}=\begin{pmatrix}0&2&0&0\\0&0&0&0\\1&1&0&1\\1&0&0&1\end{pmatrix}A_{G_3}=\begin{pmatrix}0&3&0&2\\3&0&1&1\\0&1&1&2\\2&1&2&0\end{pmatrix}$

4.设有向图$G=\langle V,E\rangle$，其中$V=\{v_1,v_2,v_3,v_4\}$，其邻接矩阵为：

$$A=\begin{pmatrix}0&2&1&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\\0&0&1&1\end{pmatrix}$$

试求G中各顶点的入度和出度。

【解】入度：$v_1=0,v_2=2,v_3=3,v_4=2$

出度：$v_1=3,v_2=1,v_3=1,v_4=2$

5.设无向图G有 12 条边，已知G中度数为 3 的结点有 6 个，其余结点的度数均小于 3。G中至少有多少个结点？为什么？

【解】设G中有x个顶点，则度小于 3 的结点有$(x-6)$个，由握手定理:

$$12\times2<3\times6+3(x-6)$$

解得$x>8$则G中至少有 9 个结点。

6.下列各图中有多少个结点？

（1）16 条边、每个结点的度数均为 2;

（2）21 条边、3 个度数为 4 的结点，其余结点的度数均为 3;

（3）24 条边，每个结点的度数均相同。

【解】（1）设有x个结点，则有$16\times2=2x$，解得$x=16$，共有 16 个结点。

（2）设共有x个结点，则度为 3 的结点个数为$x-3$，则有：

$$21\times2=3\times4+3(x-3)$$

解得$x=13$，因此共有 13 个结点。

（3）设顶点度数为k，共有n个顶点，则有$24\times2=n\cdot k$，解之得

1.$n=2,k=24$　　2.$n=24,k=2$　　3.$n=3,k=16$　　4.$n=16,k=3$

5.$n=4,k=12$　　6.$n=12,k=4$　　7.$n=6,k=8$　　8.$n=8,k=6$

7.证明在一场足球比赛中，传递过奇数个球的队员人数必定为偶数个。

【证明】已知由推理 8.1，在任何图中，度数为奇数的结点必然是偶数个，将参赛球员抽象为图的结点，两个互相传球的队员用边相连，则该图为足球比赛中传球的数学模型，由推理 8.1 知结论正确。

8.设G为 9 个结点的无向图，每个结点的度数不是 5 就是 6。试证明G中至少有5个度数为6的结点或者至少有 6 个度数为 5 的结点。

【证明】由握手定理，顶点度数之和为偶数，则 5 度的顶点度数之和必有偶数，所以 5 度顶点的个数只能为 0,2,4,6,8，对应的 6 度顶点个数为 9,7,5,3,1。

由此可得G中至少有 5 个 6 度顶点或者 6 个 5 度顶点。

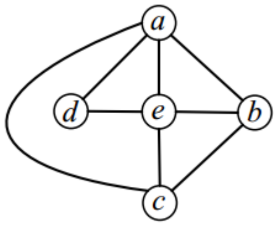
9.图G的度序列为 2,2,3,3,4，则边数m是多少？

【解】图的度总和为 14，设边数为m，则有$2m=14,m=7$。所以图的边数为 7。

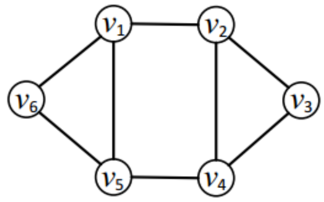
10.图G有 12 条边，度为 3 的结点有 6 个，其余结点度均小于 3，问图G中至少有几个结点？

【解】同第 5 题，略。

11.如图 8.4 所示，证明图G_1和G_2是不同构的。



图G_1



图G_2

图 8.4 题目 11 图。

【证明】图G_1中a顶点的度数为 4，G_2中并无顶点与之对应，所以两图不同构。

12.如图 8.5 所示，确定G_1和G_2是否同构，并证明之。

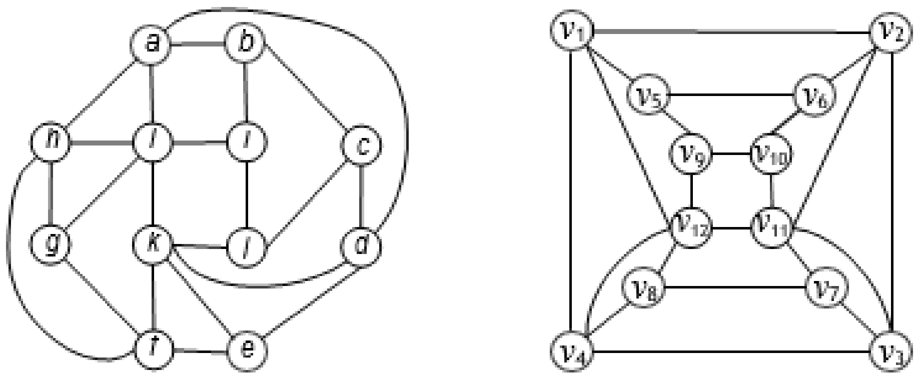


图 8.5 题目 12 图。

【证明】图G_1中e顶点度数为 3，分别与f度数为 4，k度数为 5，d度数为 4 邻接，图G_2中无顶点与e对应，故两图不同构。

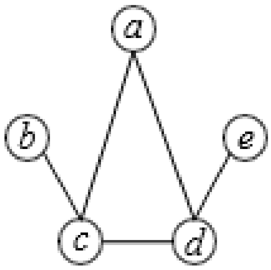


图 8.6 第 13 题图

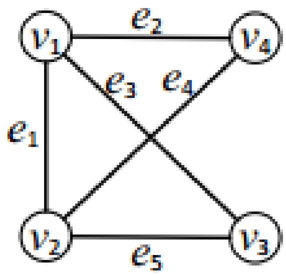


图 8.7 第 14 题图

13.画出图 8.6 所示的图的补图。

【解】补图如下所示:

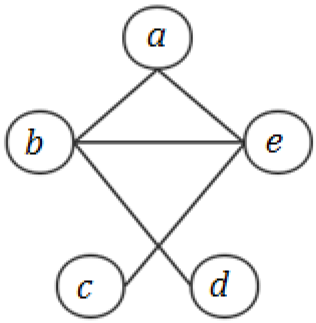


图 8.8 补图。

14.无向图G如图 8.7 所示：

（1）写出图的邻接矩阵（2）根据邻接矩阵求各顶点的度数

（3）求G中长度为 3 的路径的总数，其中有多少条回路

（4）求G的关联矩阵（5）由关联矩阵求各顶点的度数

(1)$A_9=\begin{pmatrix}0&1&1&1\\1&0&1&1\\1&1&0&0\\1&1&0&0\end{pmatrix}$

(2)$\deg(v_1)=3\quad deg(v_2)=3\quad \deg(v_3)=2\quad \deg(v_4)=2$

(3)$A_G^{(3)}=\begin{pmatrix}4&5&5&5\\5&4&5&5\\5&5&2&2\\5&5&2&2\end{pmatrix}$$G$中长度为 3 的通路总数为 66，其中回路数目为 12

(4)$M_G=\begin{pmatrix}1&1&1&0&0\\1&0&0&1&1\\0&0&1&0&1\\0&0&1&0&1\end{pmatrix}$

(5)$\deg(v_1)=3\quad \deg(v_2)=3\quad \deg(v_3)=2\quad \deg(v_4)=2$

15.已知图D邻接矩阵：

$$A(D)=\begin{pmatrix}1&0&1&1\\1&0&0&0\\1&0&0&1\\1&1&0&0\end{pmatrix}A^2(D)=\begin{pmatrix}3&1&1&2\\1&0&1&1\\2&1&1&1\\2&0&1&1\end{pmatrix}A^3(D)=\begin{pmatrix}7&2&3&4\\3&1&1&2\\5&1&2&3\\4&1&2&3\end{pmatrix}$$

试求：

（1）$\deg^+(v_3),\deg^-(v_1),\deg(v_2)$（2）从$v_1$到$v_4$长度为 2 的边的数目

（3）从v_3到v_1长度为 3 的边的数目（4）过v_4长度为 3 的回路数目

【解】(1)由题可得$\deg^+(v_3)=2,\deg^-(v_1)=4,\deg(v_2)=2$

(2)v_1到v_4长度为 2 的边数为$A^2(D)$中$a_{14}=2$

(3)v_3到v_1长度为 3 的边数为$A^3(D)$中$a_{31}=5$

(4)过v_4长度为 3 的回路数为 10

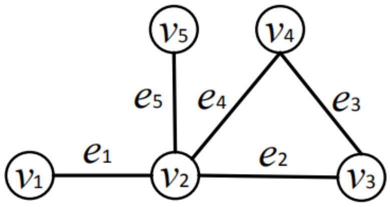


图 8.9 第 16 题图

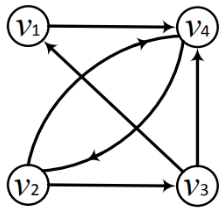


图 8.10 第 17 题图

16.给定无向图$G=\langle V,E\rangle$如图 8.9 所示，试求：

（1）图G的邻接矩阵（2）图G的关联矩阵

【解】(1)$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ (2)$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

17.给定有向图$G=\langle V,E\rangle$如图 8.10 所示，试求：

（1）G的关联矩阵（2）G的邻接矩阵（3）G的可达矩阵

（4）从v_2到v_2的所有简单回路（5）从v_2到v_4的所有基本通路

【解】(1)$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 0 & -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ (2)$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

(3)$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ (4)$v_2e_2v_4e_6v_2; v_2e_3v_3e_4v_4e_6v_2; v_2e_3v_3e_5v_1e_1v_4e_6v_2$

(5)$v_2e_2v_4; v_2e_3v_3e_4v_4; v_2e_3v_3e_5v_1e_1v_4$

18.有向图G如图 8.11 所示。

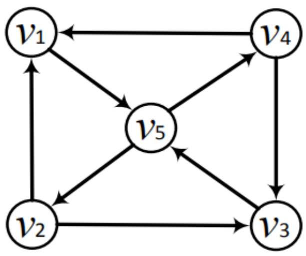


图 8.11

（1）求v_2到v_5长度为 1,2,3,4 的通路数；

（2）求v_5到v_5长度为 1,2,3,4 的回路数；

（3）求G中长度为 4 的通路数；

（4）求G中长度小于或等于 4 的回路数；

（5）写出G的可达性矩阵。

【解】(1)v_2到v_5长度为 1,2,3,4 的通路数分别为 0,2,0,0

(2) v_5到v_5长度为 1,2,3,4 的通路数分别为 0,0,4,0

(3)G中长度为 4 的通路数为 32
(4)G中长度小于或等于 4 的回路数为 12
(5) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

19.图G_1和G_2的邻接矩阵分别为:

$$A_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad A_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

试求:
（1）$A_1^2, A_1^3, A_2^2, A_2^3$（2）在$G_2$内列出每两个节点间的距离
（3）列出G_1和G_2中的所有基本回路。

【解】(1)$A_1^2 = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 2 & 2 & 2 \end{pmatrix}, A_1^3 = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 3 & 3 & 0 \\ 2 & 1 & 2 & 2 & 2 \\ 3 & 0 & 2 & 3 & 0 \\ 3 & 0 & 3 & 2 & 0 \\ 6 & 2 & 4 & 6 & 3 \end{pmatrix}$

$A_2^2 = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}, A_2^3 = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 & 4 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 2 \\ 1 & 0 & 0 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 4 & 0 & 2 & 3 & 4 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 1 & 4 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

(2)$d(\mathrm{v}_1, v_4) = 1, d(v_1, v_5) = 1, d(v_1, v_3) = 2, d(v_2, v_6) = 1,$
$d(v_2, v_7) = 1, d(v_3, v_4) = 1, d(v_3, v_5) = 2, d(v_4, v_5) = 1$
其余各顶点间无通路，距离为∞.
(3)G_2中基本回路:$a - d - e - a$　G_1中基本回路:$a - c - d - a, b - e, e$

20.设M是图G的关联矩阵，而A是图G的邻接矩阵，
（1）试证明M的列和为 2（2）A的列和是多少?
(1)证明：M的列和为e_i的端点数，由每条边的端点数为 2，所以M的列和为 2。
(2)A的列和是 G 中v_i的入度数

21.指出图 8.12 中的割点和桥。

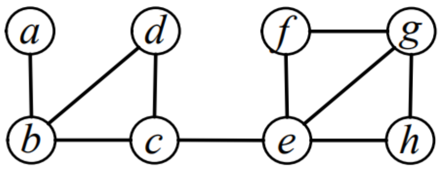


图 8.12 第 21 题图

【解】由图易知割点为b, c, e，桥为e_5.

22.无向图G如图 8.13 所示。

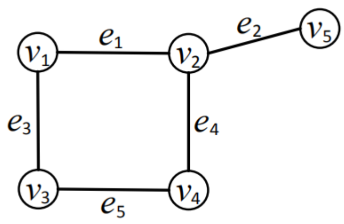


图 8.13

（1）求G的全部点割集和边割集，并指出其中的割点和桥（割边）

（2）求G的点连通度$k(G)$和边连通度$\lambda(G)$

【解】(1)点割集$\{v_2\},\{v_1,v_4\}$

边割集$\{e_2\},\{e_1,e_3\},\{e_3,e_5\},\{e_4,e_5\},\{e_3,e_4\},\{e_1,e_5\},\{e_1,e_4\}$，割点为$v_2$，桥为$e_2$

(2)点连通度为 1，边连通度为 1

23.已知一个无向图G的邻接矩阵为如下:

$$A=\begin{pmatrix}0&0&1&1&0&0\\0&0&0&0&1&1\\1&0&0&0&0&0\\1&0&0&0&0&0\\0&1&0&0&0&1\\0&1&0&0&1&0\end{pmatrix}$$

试问G是否连通的。

【解】由邻接矩阵画出图如 8.14 所示:

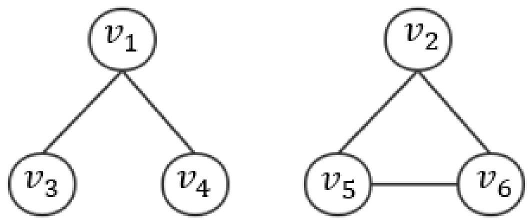


图 8.14

显然图不连通。

24.试证明$2n$所电话分局，如果每个分局至少可以和另外n个分局直接通话，那这$2n$所电话分局中任何两个之间可互相通话。（有些可能要通过另外的电话所中介）

【证明】可将图中问题用图G表示。G中由$2n$个顶点，且每个顶点的度大于等于n，需证明G为连通图。

假设图G不连通，则G中至少有 2 个连通分支。则存在一个最多有n个顶点的连通分支，令其为G_1。

由于G为无向简单图，G_1中每个顶点度数小于等于$n-1$，与G中每个顶点度数大于等于n矛盾，所以G必为连通图。

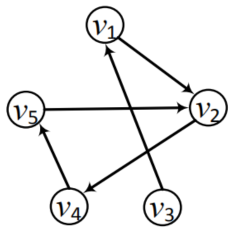


图 8.15 第 25 题图

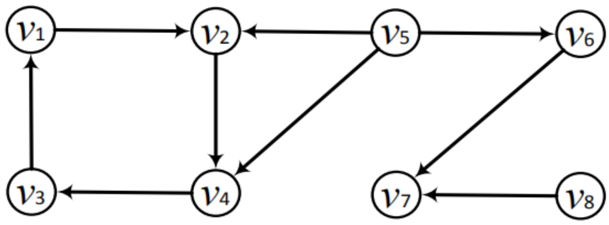


图 8.16 第 26 题图

25.利用图 8.15 所示有向图G的邻接矩阵求出可达性矩阵，并利用可达矩阵求其强分图。

【解】可达性矩阵：$\mathrm{P} = A_G^{(1)} \vee A_G^{(2)} \vee A_G^{(3)} \vee A_G^{(4)} \vee A_G^{(5)} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

强分图如图 8.17 所示：

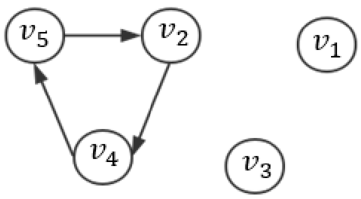


图 8.17

26.求图 8.16 所示的有向图G的所有强连通分支、单向连通分支和弱连通分支。

【解】强连通分支由$\{v_1, v_2, v_3, v_4\}, \{v_5\}, \{v_6\}, \{v_7\}, \{v_8\}$子集导出

单向连通分支:$\{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5\}, \{v_5, v_6, v_7\}, \{v_7, v_8\}$

弱连通分支:$\{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5, v_6, v_7, v_8\}$

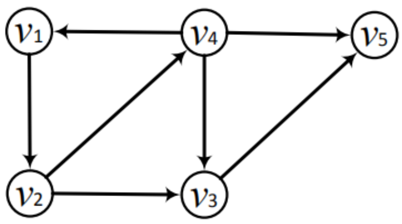


图 8.18 第 27 题图

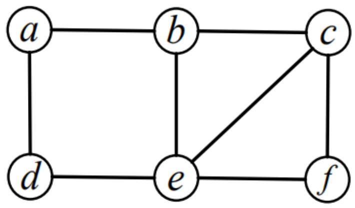


图 8.19 第 28 题图

27.求如图 8.18 所示的有向图G中各顶点的引入度数和引出度数，找到这个图的所有基本回路。能否去掉一条边从而得到一个无向图?

【解】

	v_1	v_2	v_3	v_4	v_5
引入度数	1	1	2	1	0
引出度数	1	2	1	3	2

基本回路：$v_1 \to v_2 \to v_4 \to v_1$，$v_2 \to v_4 \to v_1 \to v_2$，$v_4 \to v_1 \to v_2 \to v_4$

无法去掉一条边得到一个无向图。

28.对如图 8.19 所示的无向图G，扎到顶点a和f之间的所有基本回路和所有简单回路，a和f之间的距离是多少?

【解】

基本回路:

$a-d-e-f-c-b-a$, a和f的距离为 3

$a-b-c-f-e-d-a$,a和f的距离为 3

简单回路:

$a-d-e-c-f-e-b-a$,a和f的距离为 4

$a-d-e-f-c-e-b-a$,a和f的距离为 3

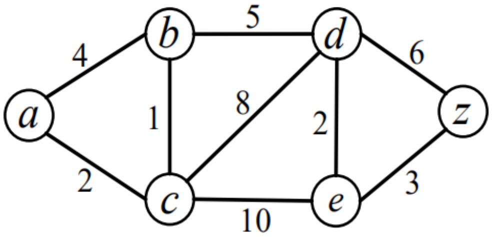


图 8.20 第 29 题图

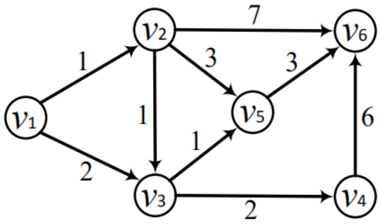


图 8.21 第 30 题图

29.用迪杰斯特拉算法求图 8.20 所示的加权图G中结点a到结点z之间的最短路的长度。

【解】如下:

a	b	c	d	e	z	
0	4	2	∞	∞	∞	$\{a,c\}$
0	3	2	8	12	∞	$\{a,b,c\}$
0	3	2	8	10	14	$\{a,c,b,d,e\}$
0	3	2	8	10	13	$\{a,b,c,d,e,z\}$

a到z的最短路径为 13。

30.求图 8.21 所示图G中任意两点间最短有向路的长度。

【解】$D^0=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & \infty & \infty & \infty \\ \infty & 0 & 1 & \infty & 3 & 7 \\ \infty & \infty & 0 & 2 & 1 & \infty \\ \infty & \infty & \infty & 0 & \infty & 6 \\ \infty & \infty & \infty & \infty & 0 & 3 \\ \infty & \infty & \infty & \infty & \infty & 0 \end{pmatrix}$ $D^1=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & \infty & \infty & \infty \\ \infty & 0 & 1 & \infty & 3 & 7 \\ \infty & \infty & 0 & 2 & 1 & \infty \\ \infty & \infty & \infty & 0 & \infty & 6 \\ \infty & \infty & \infty & \infty & 0 & 3 \\ \infty & \infty & \infty & \infty & \infty & 0 \end{pmatrix}$

$D_2=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & \infty & 4 & 8 \\ \infty & 0 & 1 & 3 & 2 & 7 \\ \infty & \infty & 0 & 2 & 1 & \infty \\ \infty & \infty & \infty & 0 & \infty & 6 \\ \infty & \infty & \infty & \infty & 0 & 3 \\ \infty & \infty & \infty & \infty & \infty & 0 \end{pmatrix}$ $D_4=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 4 & 3 & 8 \\ \infty & 0 & 1 & 3 & 2 & 7 \\ \infty & \infty & 0 & 2 & 1 & \infty \\ \infty & \infty & \infty & 0 & \infty & 6 \\ \infty & \infty & \infty & \infty & 0 & 8 \\ \infty & \infty & \infty & \infty & \infty & 0 \end{pmatrix}$

$D_5=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 4 & 3 & 6 \\ \infty & 0 & 1 & 3 & 2 & 5 \\ \infty & \infty & 0 & 2 & 1 & 4 \\ \infty & \infty & \infty & 0 & \infty & 6 \\ \infty & \infty & \infty & \infty & 0 & 3 \\ \infty & \infty & \infty & \infty & \infty & 0 \end{pmatrix}$ $D_6=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 4 & 3 & 6 \\ \infty & 0 & 1 & 3 & 2 & 5 \\ \infty & \infty & 0 & 2 & 1 & 4 \\ \infty & \infty & \infty & 0 & \infty & 6 \\ \infty & \infty & \infty & \infty & 0 & 3 \\ \infty & \infty & \infty & \infty & \infty & \infty \end{pmatrix}$

于是有：

$v_1 \to v_2 = 1$

$v_1 \to v_3 = 2$　　$v_2 \to v_3 = 1$

$v_1 \to v_4 = 4$　　$v_2 \to v_4 = 3$　　$v_3 \to v_4 = 2$

$v_1 \to v_5 = 3$　　$v_2 \to v_5 = 2$　　$v_3 \to v_5 = 1$

$v_1 \to v_6 = 6$　　$v_2 \to v_6 = 5$　　$v_3 \to v_6 = 4$　　$v_4 \to v_6 = 6$　　$v_5 \to v_6 = 3$

第九章 树的基本理论与算法

1. 已知一颗无向树T中 4 度，3 度，2 度的分支点各 1 个，其余的顶点均为树叶，问T中有几片树叶？
【解】设树T的结点数为n，边数为m，树叶数为x，则T的总度数为：

$$1\times 4+1\times 3+1\times 2+1\cdot x=x+9$$

由握手定理及$m=n-1$有：

$$2\cdot(n-1)=2m=x+9$$

解得$x=5$，T有 5 片树叶。

2.已知n阶无向简单图G的边数$m=n-1$，G一定是树吗？为什么？
【解】连通且无回路的无向图才能被称为树。假设无向图G的边数m，顶点数n，满足$m=n–1$，但是G为非连通图，G就不能被称为树。

3.试举例说明：在一有向图中，若仅有一个顶点的引入次数为 0，而其他顶点的引入次数都为 1，这样的有向图不一定是有向树。
【解】

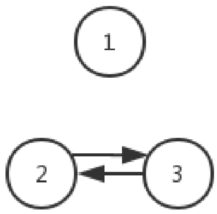


图 9.1 第 3 题

如图所示，图中顶点 1 的入度为 0，顶点 2 和顶点 3 的入度均为 1，符合题设。但是该有向图不是连通图，因此不是一棵有向树。

4.在具有n个结点的完全图K_n中，需要删去多少条边才能得到树？
【解】完全图的任意两个顶点间都存在边，则具有n个结点的完全图的边数为$m_1=\frac{n(n-1)}{2}$。具有n个顶点的树边数为$m_2=n-1$。
所以需要删去$m_1-m_2=\frac{n(n-1)}{2}-(n-1)=\frac{1}{2}n2-\frac{3}{2}n+1$条边。

5.无向树T中有n_i个顶点的度数为i，$i=2,3,\dots,k$，其余顶点全为树叶，问T中有几片树叶？
【解】设树叶个数为x，则总顶点数$n=x+\sum_{i=2}^{k}(n_i)$，边数$m=n-1$。树的总度数为$x+\sum_{i=2}^{k}(n_i\cdot i)$。
由握手定理得：$2m=2(x+\sum_{i=2}^{k}(n_i)-1)=x+\sum_{i=2}^{k}(n_i\cdot i)$
解得$x=\ \sum_{i=2}^{k}(n_i\cdot(i-2))+2$。

6.证明：具有n个结点的树，必有：$deg(v_1)+deg(v_2)+\cdots+deg(v_n)=2n-2$。
【解】树的顶点数为n，则树的边数为$n-1$，树的每条边连接两个顶点，则树中顶点的度数之和为边数的两倍，即$2(n-1)$。

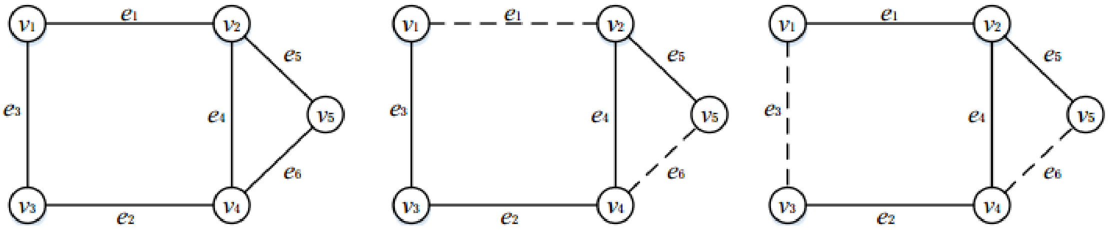
9.下面两组数中，哪个可以为无向树的度数列？若是树的度数列的，请画出两棵非同构的无向树。

（1）1，1，2，3，3，4；（2）1，1，1，1，1，1，3，3，4。

【解】序列 1 对应的无向树G中，顶点数$n=6$，边数$m=n-1=5$，由此推算出总度数为$2\cdot m=10$，而序列中所有顶点的度数之和为 14，与前值不符，所以序列 1 不是无向树的度数列。

序列 2 对应的无向树G中，顶点数$n=9$，边数$m=n-1=8$，由此推算出总度数为$2\cdot m=16$，序列中所有顶点的度数之和为 16，与前值相符，所以序列 2 是无向树的度数列。

10.给出图 9.2 中所示图的两棵非同构的生成树T_1和T_2，并指出它们的树枝和弦。



(a)图G　(b)生成树T_1　(c)生成树T_2

图 9.2 习题 10 图

【解】

生成树T_1的树枝为：e_2,e_3,e_4,e_5，弦为：e_1,e_6

生成树T_2的树枝为：e_1,e_2,e_4,e_5，弦为：e_3,e_6

11.图 9.3 所示无向图共有几棵非同构的生成树？

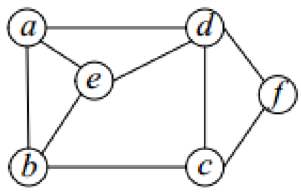


图 9.3 习题 11 图

12.设$G=(V,E)$是有P个结点、S条边的连通图，则从G中删去多少条边，才能确定图G的一棵生成树？

【解】图G中顶点数为p，则该图的生成树边数为$p-1$。

所以需要删去的边数为$\mathrm{S}-(\mathrm{p}-1)=s-p+1$。

13.求如图 9.4 所示两个带权图的最小生成树，并分别计算它们的权。

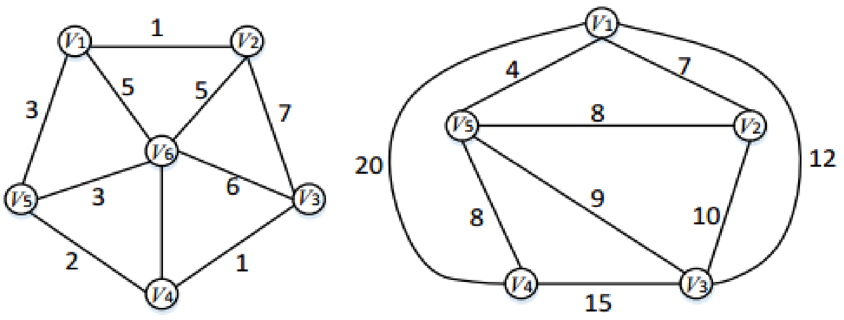


图 9.4 第 13 题图

【解】图 1 的最小生成树的权值为 10。
图 2 的最小生成树的权值为 28。

14.已知某二叉树有 1000 个结点，试构造符合如下要求的完全二叉树，并阐述构造原理。
(1)使其叶子数最少；(2)使其叶子数最多；(3)使其层数最少；(4)使其层数最多。
【解】(1)(2)略
(3)若要层数最少，则将此完全二叉树构造成满二叉树。
(4)若要层数最多，在构造此完全二叉树时所有右子树都没有子节点。

15.一棵高度为h的满k叉树。若按层次自顶向下，同一层自左向右，顺序从 1 开始对全部结点进行编号。试问：
(1)各层的结点个数是多少？
(2)编号为i的结点的父结点（若存在）的编号是多少？
(3)编号为i的结点的第m个孩子结点（若存在）的编号是多少？
【解】
(1) 第i层的结点个数为$ki-1$
(2)$\lfloor\frac{i-2}{k}\rfloor+1$
(3) $(\mathrm{i}-1)*k+m+1$

16.对于如图 9.5 所示 2 元有序树表示的算式$((a-b*c)*d+e)\div(f*g+h)$，用 3 种行遍法访问 2 元有序树，分别写出访问次序和结果。

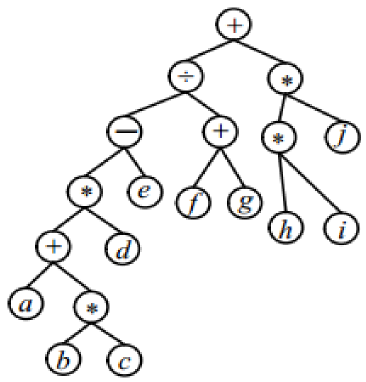


图 9.5 习题 16 图

【解】

$$前序：+\div-**+a*bcde+fg**hij$$
$$中序：a+b*c*d-e\div f+g+h*i*j$$
$$后序：abc*+d*e-fg+\div hi*j*+$$

17.下面给出的符号串集合中，哪些是前缀码？

$B1=\{0,10,110,1111\}$ $B2=\{1,01,001,000\}$

$B3=\{1,11,101,001,0011\}$ $B4=\{b,c,aa,ac,aba,abb,abc\}$

【解】B_1、B_2和B_4是前缀码，B_3不是。

18.试画出表示命题公式：$(P\vee(P\wedge Q))\wedge((P\vee Q)\wedge R)$的位置二元树，并求相应的前缀编码。

【解】略

19.求带权为1,3,4,5,6的最优 2 元树，并计算它的权$W(T)$。

【解】$W(T)=42$，最优 2 元树如图 9.6 所示：

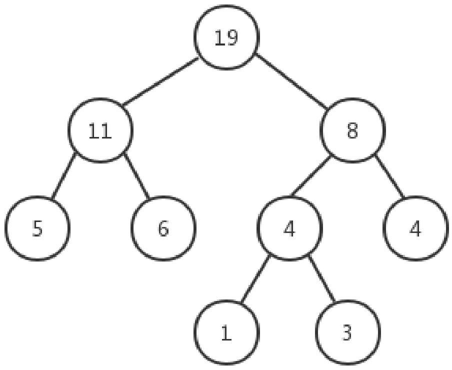


图 9.6 习题 19 图

20.设 7 个字母在通信中出现的频率如下：

$$a{:}\,35\%,b{:}\,20\%,c{:}\,15\%,d{:}\,10\%,e{:}\,10\%,j{:}\,5\%,g{:}\,5\%.$$

（1）以频率（或乘 100）为权，求最优 2 元树。

（2）利用所求 2 元树找出每个字母的前缀码。

（3）传输 10000 个按上述比例出现的字母需要传输多少个二进制数位？比用长度为 3 的等长码子传输省了多少个二进制数位？

【解】（1）

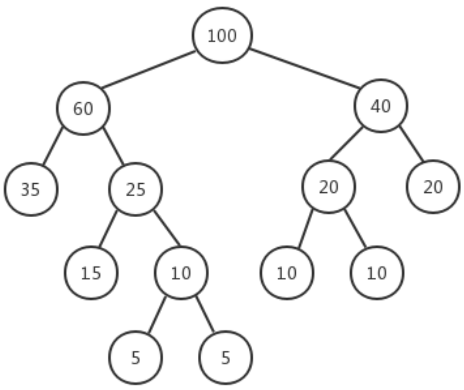


图 9.7 习题 20 图

(2) a:01,b:11,c:010,d:100,e:101,j:0110 ,g:0111.

(3) 按照题设比例计算单个字符的平均长度为:

$0.35 \times 2 + 0.2 \times 2 + 0.15 \times 3 + 0.1 \times 3 + 0.1 \times 3 + 0.05 \times 4 + 0.05 \times 4$
$= 0.7 + 0.4 + 0.45 + 0.3 + 0.3 + 0.2 + 0.2$
$= 2.55$

所以传输 10000 个字符需要 25500 个二进制数位。

已知用长度为 3 的等长码传输 10000 个字符，需要 30000 个二进制数位。

节省了 4500 个二进制数位。

21.Z和L两人进行乒乓球决赛,规定谁连胜两场或总数先胜三场,谁就获得冠军。请将本次决赛可能的比赛场次用根树来表示。

【解】树叶结点表示最终结果，"Z"代表Z赢，"L"代表L赢。其余结点表示一场比赛，树枝表示比赛走向。

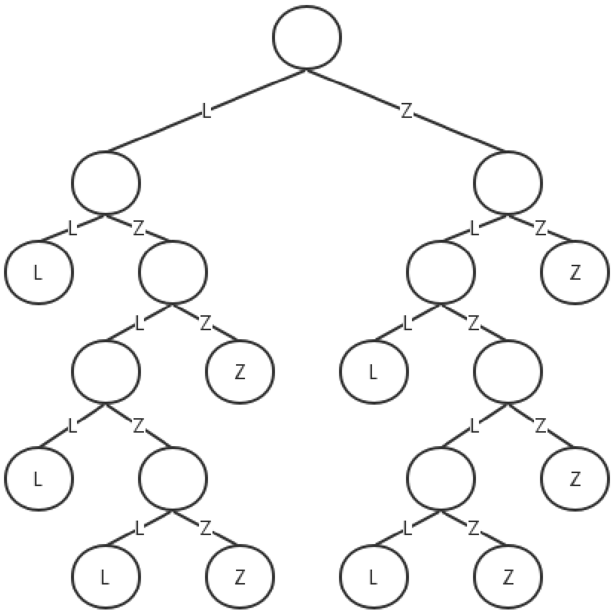


图 9.8 习题 21 图

22.证明：有n个结点的完全二叉树，叶结点个数为$(n+1)/2$。

【解】假设叶结点总数为m，非叶子结点个数即为$n-m$，又知叶结点出度为 0，非叶子结点出度为 2，则总出度为$m*0+(n-m)2=2(n-m)$。

完全二叉树中，总出度为总结点数减 1，即$2(n-m)=n-1$，化简得$\mathrm{m}=(n+1)/2$。

23.证明：一棵完全二叉树必有奇数个结点。

【解】完全二叉树中只存在出度为 0 和出度 2 的结点，假设这两种结点的数量分别为n_0、n_2，则总结点数$n=n_0+n_2$，总出度为n_0*0+n_2*2，总结点数减 1 即为总出度，即$n_0+n_2-1=n_0*0+n_2*2$，化简得$n_0=n_2+1$。

总结点数$n=n_0+n_2=2n_2+1$，所以结点总数必为奇数。

24.某完全二叉树有 971 片叶子，试问：该树总共有几层？共有多少个结点？

【解】略

26.根据简单有向图$D=\langle V,E\rangle,V=\{v_1,v_2,\cdots,v_n\}$的邻接矩阵，如何确定它是否为根树？若它是根树，有如何确定它的根和叶？
【解】可以根据邻接矩阵的每一列的值判断。若恰有一个结点的入度为 0，其余所有结点的入度均为 1，则图D为根树。入度为 0 的结点即为根，其他结点即为叶。

27.已知一棵 3 阶的B树如图 9.9 所示，若删除 44 和 79 后，画出这棵B树的状态。
【解】

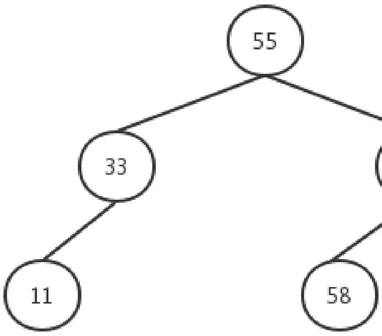


图 9.9 习题 21 图

28.证明：若$n\geq 1$，则对任一包含n个关键字、高度为h、最小度数$t\geq 2$的B树T，有：$h\leq log_t\frac{n+1}{2}$
【解】若一棵B树的高度为h，其根结点包含至少一个关键字而其他结点包含至少$t-1$个关键字。这样，在深度 1 至少有两个结点，在深度 2 至少有$2t$个结点，在深度 3 至少有$2t^2$个结点，等等。因此，关键字的个数n满足不等式：

$$n\geq 1+(t-1)\sum_{i=1}^{h}2t^{i-1}$$

右侧化简得：

$$1+(t-1)\sum_{i=1}^{h}2t^{i-1}=1+2(t-1)\frac{t^h-1}{t-1}=2t^h-1$$

即$n+1\geq 2t^h$，化简得$log_t\frac{n+1}{2}\geq h$。

29.在一棵黑高度为k的红黑树中，内节点最多有多少个?最少有多少个?
【解】黑高度为k的二叉树，全高度最小为$k+1$，最大为$2k+2$。内节点最多有$2^{\mathrm{k+1}}-1$个，这种情况下红黑树中没有红节点，黑节点全满（满足所有叶子节点黑高度一致的条件）。内节点最多有$2^{\mathrm{2k+2}}-1=4^{\mathrm{k+1}}-1$个。这种情况下红黑树全满。

30.在n个关键字上构造的二叉树，红节点与黑节点个数的比值最大和最小分别是多少?
【解】最大比值为 2，最小比值为 0。

31.假设用 RB-INSERT 方法将一个节点x插入到红黑树中，再用 RB-DELETE 方法删除之，请问结果的红黑树与初始的红黑树是否一致?

【解】不一定一致。如图 9.10 所示，结点颜色发生了改变。

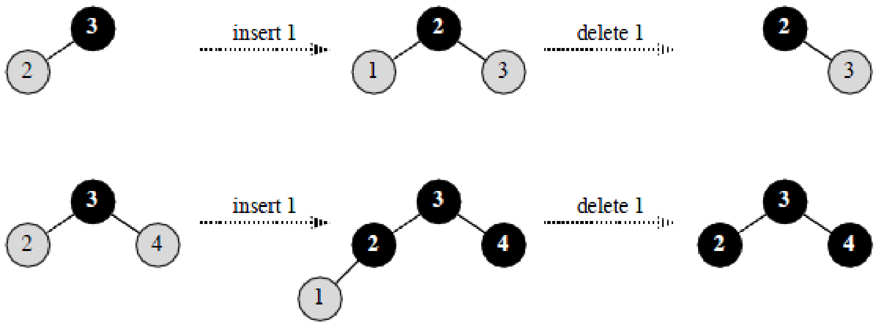


图 9.10 习题 31 图

第十章 特殊图模型与算法

1. 判断图10.1所示各图是否为欧拉图, 若是, 则找出其欧拉回路。

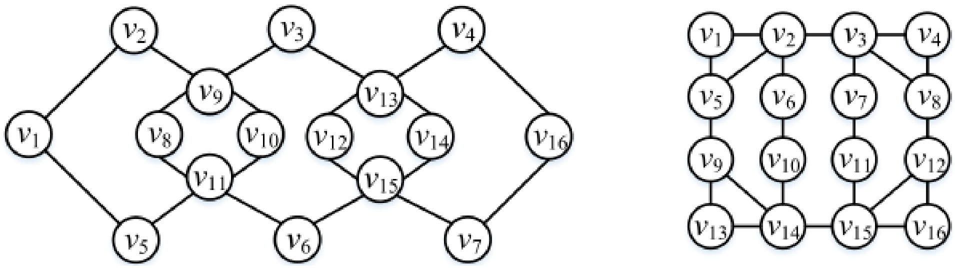


图10.1 第1题图

【解】左图中16个结点的度分别为:

$V1: 2, V2: 2, V3: 2, V4: 2, V5: 2, V6: 2, V7: 2, V8: 2$

$V9: 4, V10: 2, V11: 4, V12: 2, V13: 4, V14: 2, V15: 4, V16: 2,$

因为结点的度均为偶数, 由定理10.1可知, 该图为欧拉图。

其中一条欧拉回路为:

$$L = V1 - V2 - V9 - V3 - V13 - V4 - V16 - V7 - V15 - V14 - V13 - V12 - V15 - V6 - V11 - V10 – V9 - V8 - V11 - V5 - V1$$

右图中16个结点的度分别为:

$V1: 2, V2: 4, V3: 4, V4: 2, V5: 3, V6: 2, V7: 2, V8: 3$

$V9: 3, V10: 2, V11: 2, V12: 3, V13: 2, V14: 4, V15: 4, V16: 2,$

因为该图有四个奇度结点, 所以该图不是欧拉图。

2. 判断图10.2所示各图能否一笔画出。

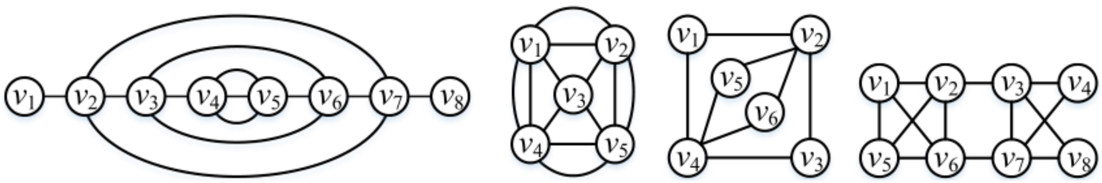


图10.2 第2题图

【解】如上图所示, 图1和图4中均有2个奇度结点, 故它们均存在欧拉通路, 能实现一笔画, 但笔不能回到出发点。图2中有4个度数为5的结点, 故不存在欧拉通路, 不能一笔画成。图3中的结点均为偶数, 是欧拉图, 可以一笔画出。

3. 设连通图G有K个奇度数的结点, 证明在图G中至少要添加K/2 条边才能使其成为欧拉图。

证明: ∵任何图中的奇点的个数为偶数

∴在每对奇点处多加一条边形成了多重边, G图就成了欧拉图

∵连通无向图G有k个奇顶点

∴有k/2对奇顶点

∴有多少对奇点就加多少条边

4. 判断下列命题是否为真?

(1) 完全图K_n(n ≥ 3)都是欧拉图。

(2) 完全图K_n(n ≥ 3)都是哈密顿图。

（3） 完全二分图$K_{m,n}$(m, n均为非0正偶数)都是欧拉图。

【解】

(1) 假 当$n = 4$时, 每个结点都是奇度结点, 即完全图K_4不是欧拉图

(2) 真 依狄拉克定理 $\deg(v) \geq \frac{n}{2}$ 即$n \geq 3/2$, 显然成立, 故完全图K_n $(n \geq 3)$都是哈密顿图。

(3) 真 设图$G = \langle V, E\rangle, X, Y$是结点集$V$的两个子集 满足$X \cap Y = \emptyset$,$X \cup Y = V$

假设X中有m个结点, 则Y中每个结点度数为m(偶数)

Y中有 n个结点, 则X中每个结点度数为n(偶数)

故完全二分图$K_{m,n}$(m, n均为非0正偶数)都是欧拉图。

5. 证明彼得森图不是哈密顿图。

【解】设彼得森图为G, 如下图中图(a)所示, 并设G的3个特殊子图G_1, G_2, G_3分别为图(b), 图(c), 图(d)所示, 不难验证, $\forall V_1 \neq \emptyset, V_1 \subset V(G)$ 均有$p(G - V_1) \leq |\ V_1|$ 即G满足定理10.3中条件, 因而不能用定理10.3来证明G不是哈密顿图。

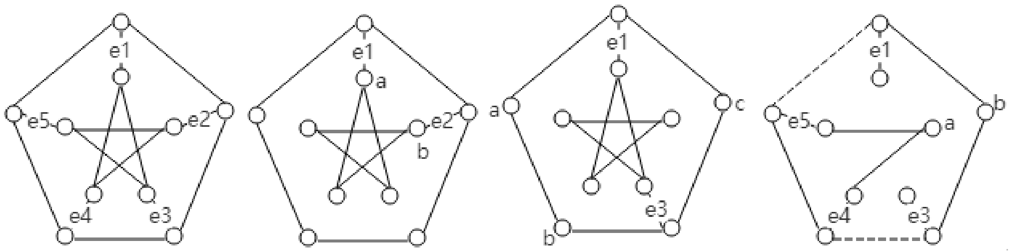
证明方法如下, 分情况讨论:

由G的特殊构造, 设$E_1 = \{e_1, e_2, e_3, e_4, e_5\}$, 如图(a)所示, 若G为哈密顿图, 则$E_1$中的边不可能不出现(若都不出现, 图就不连通了), 又不可能出现奇数次, 因而只能出现2次或4次也不可能存在哈密顿回路。

（1） 出现2次, 由图的对称性可知, 只有图(b), 图(c)两种情况, 但这两种情况下都不可能存在哈密顿回路, 在图(b)中, 取$V_1 = \{a, b\}$, 则$p(G_1 - V_1) = 3 > |\ V_1| = 2$, 这与定理10.3矛盾。

（2） 出现4次, 如图(d)所示, 此时G_3中有两个2度顶点, 它们关联的4条边及e_1, e_3, e_4, e_5均要在任何哈密顿回路上, 见图中实线边所示, 无法得到哈密顿回路。

由以上讨论可知G不会存在哈密顿回路, 因而G不是哈密顿图。



图(a) 图(b) 图(c) 图(d)

图10.3第5题图

6. 判断图10.4所示各图, 哪些是是哈密顿图, 哪些是半哈密顿图。

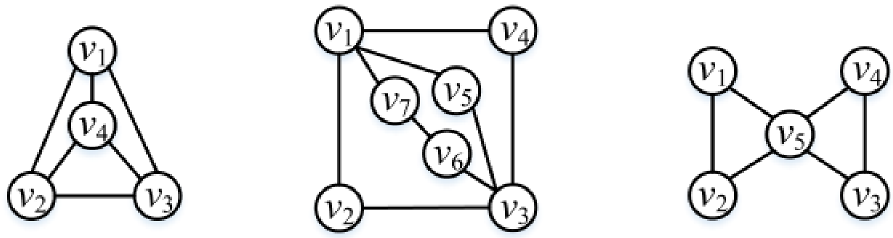


图10.4 第6题图

【解】（1）哈密顿图, 因为存在哈密顿回路$V4 - V1 - V2 - V3 - V4$

（2）取$V1 = \{V1, V3\}$ $P(G - V1) = |\{v_2, v_4, v_5, v_6, v_7\}| = 4 > |\ v_1| + 1 = 3$

∴图2既不是哈密顿图, 也不是半哈密顿图。

(3) 半哈密顿图, 哈密顿通路为$V1-V2-V5-V4-V3$

7. 在图10.5所示各图中, 那些存在哈密顿回路或哈密顿通路?

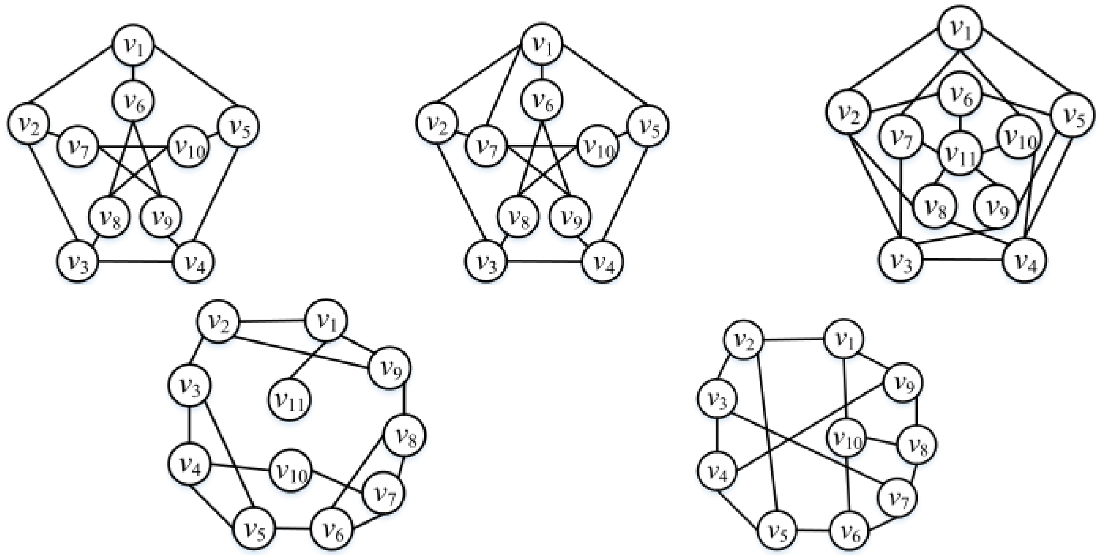


图10.5 第7题图

【解】$(b),(c),(e)$有哈密顿回路, $(a),(d)$只有哈密顿通路而无哈密顿回路。

(a) 中的哈密顿通路为: $v1,v2,v3,v4,v5,v10,v8,v6,v9,v7$。

(b) 中的哈密顿回路为: $v1,v6,v9,v4,v5,v10,v8,v3,v2,v7,v1$

(c) 中的哈密顿回路为: $v1,v7,v11,v6,v5,v9,v3,v2,v8,v4,v10,v1$

(d) 中的哈密顿通路为: $v11,v1,v2,v9,v8,v6,v7,v10,v4,v5,v3$

(e) 中的哈密顿回路为: $v1,v2,v5,v6,v7,v3,v4,v9,v8,v10,v1$

8. 六名间谍a,b,c,d,e,f被擒, 已知a懂汉语, 法语和日语; b懂德语、俄语和日语; c懂英语和法语; d懂西班牙语; e懂英语和德语; f懂俄语和西班牙语, 问至少用几个房间监禁他们, 才能使在一个房间中的人不能直接对话。

【解】如下图所示, 顶点表示间谍, 边表示间谍间能够直接对话

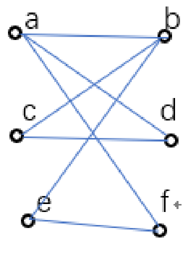


图10.6 第8题图

由于此图是二分图, 因此只需要两个房间, 分别监禁$\{a,e,f\}$和$\{b,c,d\}$就可保证同一房间的人不能互相直接对话

9. 今将6人分成3组(每组2人)去完成 3 项任务, 已知每个人至少与其余5个人中的3个人能合作, 问:

(1) 能否使得每组的2个人都能相互合作?

(2) 能给出几种不同的分配方案?

【解】(1) 用$V_1,V_2,\dots,V_6$代表6个人, 若V_i,V_j能相互合作就在V_i与V_j之间连无向边, 得无向图$G=\langle V,E\rangle$由已知条件得, 对于任意的$V_i\in \mathrm{V}, \deg(\mathrm{V_i})\geq \mathrm{n}/2$, 因此G为哈

密顿图,因而存在哈密顿回路,设$C=V_{i1},V_{i2},\dots,V_{i6},V_{i1}$为G中一条哈密顿回路,于是在$C$中,相邻的两个结点,代表的2人是能相互合作的。
(2)我们将V_{i1},V_{i2}分在一组,V_{i3},V_{i4}分在一组,V_{i5},V_{i6}分在一组。也可以将V_{i6},V_{i1};V_{i2},V_{i3};V_{i4},V_{i5}各分在一组,这是两种不同的分配方案。

10. 在图10.7所示各图中,哪几个是偶图?哪几个不是偶图?是偶图的请给出互补结点子集,不是偶图的,请给出理由。

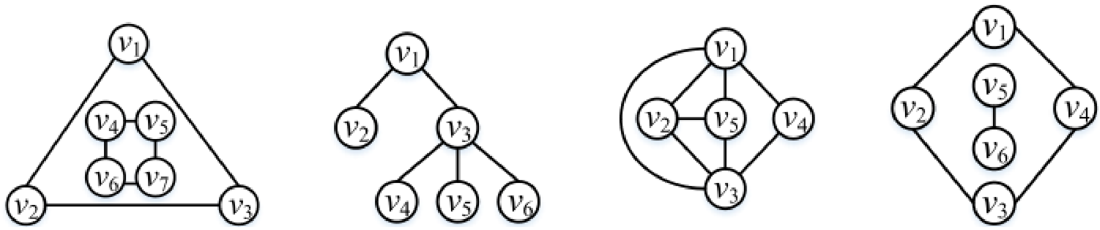


图10.7 第10题图

【解】(1)不是偶图,在回路$V1-V2-V3-V1$中 回路长度$=3\neq$偶数
(2)是偶图

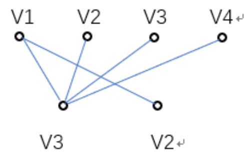


图10.8 第10题第2小题图

互补结点子集$X=\{V2,V3\},Y=\{V1,V4,V5,V6\}$
(3)不是偶图,回路$V1-V3-V5-V1$中回路长度≠偶数
(4)是偶图

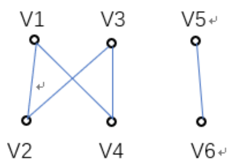


图10.9 第10题第4小题图

互补结点子集$X=\{V1,V3,V5\},Y=\{V2,V4,V6\}$

11. 某高校人才交流会上有3家公司C_1,C_2,C_3招聘计算机专业高级人才,有5位毕业生同学S_1,S_2,S_3,S_4和S_5投递了求职简历,他们的求职简历投递情况如下:
(1)S_1和S_2向C_1投简历;S_2,S_3,S_4和S_5向C_2投简历;S_3,S_4和S_5向C_3投简历。
(2)S_2向C_1投简历;S_1,S_2和S_3向C_2投简历;S_3,S_4和S_5向C_3投简历。
(3)S_3既向C_1投递简历,又向C_2投递简历;S_1,S_2,S_4和S_5向C_3投简历。
假设投递简历就能被录用,且每家公司只能招聘1人,那么在上述3种情况下,这3家公司能否都能成功招聘。
【解】令 $X=\{C_1,C_2,C_3\}$ $Y=\{S_1,S_2,S_3,S_4,S_5\}$
则可以 X, Y 为互补结点子集
以$E=\{(C_i,S_j)|C_i\in X,S_j\in Y\}$为边集,边$(C_i,S_j)$表示同学$S_j$向公司$C_i$投简历
下面分别针对题设的三种情况构造二分图:

$$G_1=\langle X,E_1,Y\rangle\ \ G_2=\langle X,E_2,Y\rangle\ \ G_3=\langle X,E_3,Y\rangle$$

如图所示:

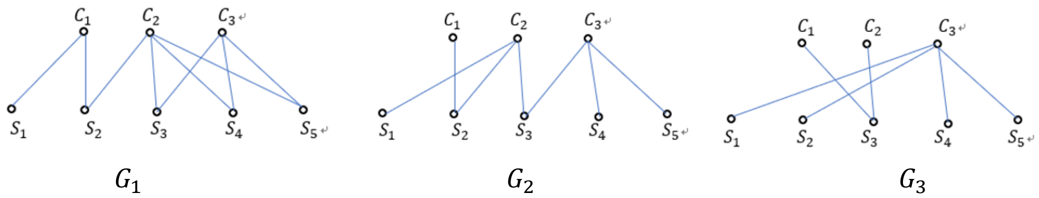


图10.10 第11题图

1)G_1中,X中每个结点至少关联两条边,Y中每个结点至多关联两条边
满足t −条件,故存在X −完备匹配,所以这3家公司都能成功招聘。

2)不满足t −条件,所以这3家公司不能全部成功招聘。

3)不满足t −条件,所以这3家公司不能全部成功招聘。

12. 今有赵、钱、孙、李、周五位教师,要承担语文、数学、物理、化学、英语五门课程。已知赵熟悉数学、物理、化学三门课程,钱熟悉语文、数学、物理、英语四门课程,孙、李、周三人都只熟悉数学和物理两门课程。能否安排他们五人每人只上一门自己熟悉的课程,而且使得每门课程都有人教?说明理由。

【解】建立图论模型,设A,B,C,D,E分别代表赵,钱,孙,李,周五位教师。
a,b,c,d,e分别代表语文,数学,物理,化学,英语五门课程。得模型图如下:

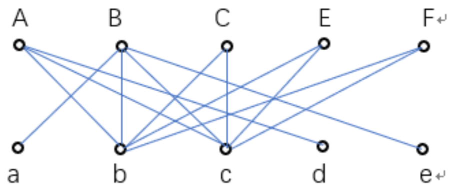


图10.11 第12题图

问题转化为是否存在饱和A,B,D,E,F的匹配存在

取顶点子集$S=\{A,C,D,E\}$ 因$N(S)=\{b,c,d\}$

$\therefore |N(S)|<|S|$

由霍尔定理知:不存在饱和A,B,C,D,E的匹配

故不能安排他们五人每人只上一门自己熟悉的课程。

13. 有五个学生V,W,X,Y和Z是四个委员会C_1,C_2,C_3和C_4的成员。C_1的成员是V,X和Y;C_2的成员是X和Z;C_3的成员是V,Y和Z;C_3的成员是V,W,X和Z。每个委员会向政府部门派出一个代表。一个学生不能代表两个委员会。
(1)用图模型表示这种情形;(2)怎样解释最大匹配;(3)怎样解释完全匹配;
(4)求出一个最大匹配;(5)存在完全匹配吗?

【解】略

14. 证明:如果简单图H是偶图,它有n个结点、m条边,则$m\le\frac{n^2}{4}$。

证明:由于(n,m)图G是简单二分图,因此可将G中顶点分为X,Y两个集合,G中任一边均关联X,Y的各一顶点,且$|X|\ge 1,|Y|\ge 1,|X|+|Y|=n$

设$|X|=n_1$ 则$|Y|=n-n_1$

那么边数m满足$m\le|X||Y|=n_1(n-n_1)=\frac{n^2}{4}-(\ n_1-\frac{n}{2})\ \le\frac{n^2}{4}$

故$m\le\frac{n^2}{4}$

15. $K_{m,n}$中m, n取什么值时，（1）存在欧拉通路和欧拉回路，（2）存在哈密顿通路和哈密顿回路。

【解】

（1） 当n,m为偶数时, 存在欧拉回路。

（2） 当$\mathrm{m}=2,\mathrm{n}$为奇数时, 存在欧拉回路。

（3） 当$\mathrm{m}=\mathrm{n}$,哈密顿回路。当$\mathrm{m}=\mathrm{n}-1$或$\mathrm{n}=\mathrm{m}-1$,哈密顿通路。

16. 找出图10.12所示地图的对偶图：

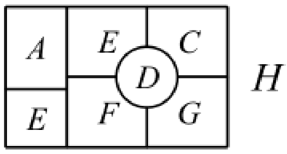


图10.12 第16题图

【解】

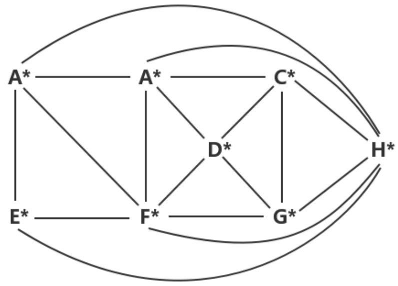


图10.13 第16题答案

17. 设一个连通平面图有6个顶点, 每个顶点的度都是4, 问这个平面图有多少个面？设一个连通平面图有30条边和20个面, 问这个图有多少个顶点？

【解】（1）设该连通平面图有m条边, r个面则

根据欧拉公式有 $6-m+r=2$

根据握手定理有 $2\mathrm{m}=4\times 6$

$\therefore m=12 \quad r=8$

(2)$m=30 \;\; r=20$

$N-m+r=2$

$\therefore \mathrm{n}=12$

该图有 12 个顶点。

18. 对于图10.14所示的各图, 判定它们是否为平面图。

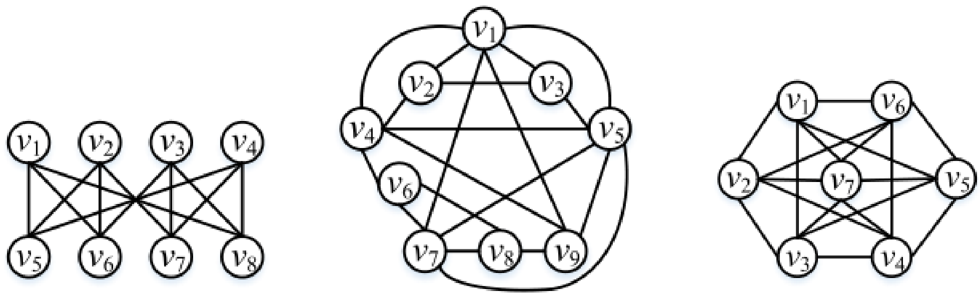


图10.14 第18题图

（1） 不是平面图
（2） 不是平面图
（3） 不是平面图

19. 指出图10.15所示的各图的两个图各有几个面,并写出每个面的边界和次数。

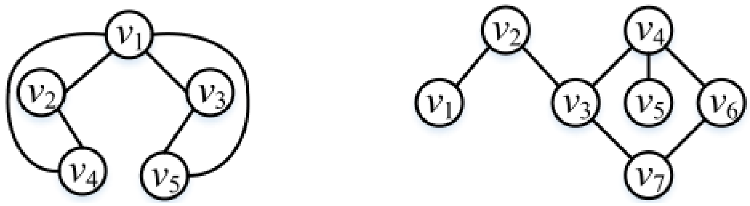


图10.15 第19题图

（1） 左图有三个面
r_0边界为$V_1V_4V_2V_1V_3V_5V_1$, $D(r_0)=6$
r_1边界为$V_1V_4V_2V_1$, $D(r_1)=3$
r_2边界为$V_1V_5V_3V_1$, $D(r_2)=3$
（2） 右图有两个面
r_0边界为$V_1V_2V_3V_7V_6V_4V_3V_2V_1$, $D(r_0)=8$
r_1边界为$V_4V_6V_7V_3V_4V_5V_4$, $D(r_1)=6$

20. 求图10.16所示各图的色数,并给出结点着色方案。

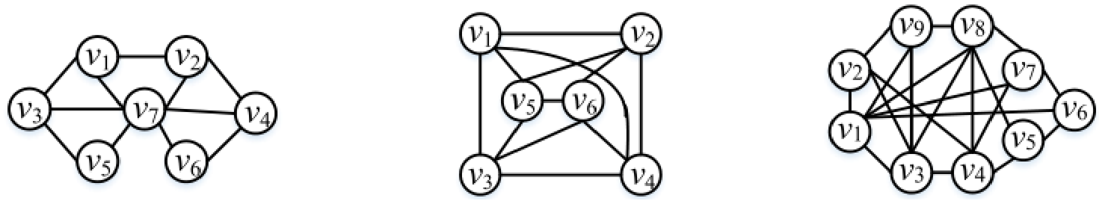


图10.16 第20题图

【解】(1)色数为3 V_1:红 V_2:黄 V_3:黄 V_4:红 V_5:红 V_6:黄 V_7:蓝
(2)色数为3 V_1:红 V_2:黄 V_3:黄 V_4:蓝 V_5:蓝 V_6:红
(3)色数为4 V_1:红 V_2:蓝 V_3:黄 V_4:绿 V_5:黄 V_6:蓝 V_7:黄 V_8:蓝 V_9:绿

21. 在图10.17所示图中,填上缺失的边流量以构成网络可行流,并求出流量。

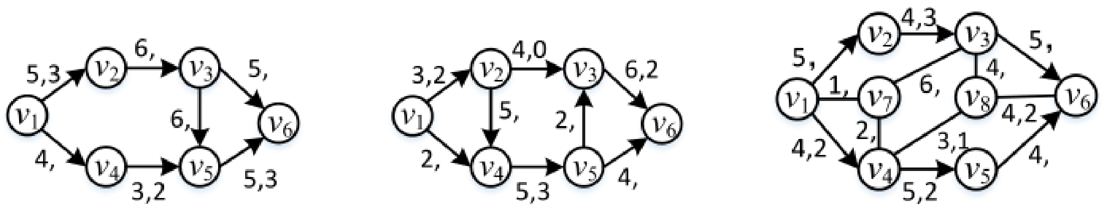


图10.17 第21题图

【解】
(1) $\langle V_2,V_3\rangle=(6,3)$ $\langle V_1,V_4\rangle=(4,2)$ $\langle V_3,V_5\rangle=(6,1)$ $\langle V_3,V_6\rangle=(5,2)$ 流量为5
(2) $\langle V_1,V_4\rangle=(2,1)$ $\langle V_2,V_4\rangle=(5,2)$ $\langle V_5,V_3\rangle=(2,2)$ $\langle V_5,V_6\rangle=(4,2)$ 流量为3
(3) $\langle V_1,V_2\rangle=(5,3)$ $\langle V_1,V_7\rangle=(1,1)$ $\langle V_7,V_4\rangle=(2,1)$ $\langle V_7,V_3\rangle=(6,0)$
$\langle V_3,V_6\rangle=(5,2)$ $\langle V_3,V_8\rangle=(4,1)$ $\langle V_5,V_6\rangle=(4,2)$ 流量为6

22.求图 10-104 所示网络的最大流和最小割。

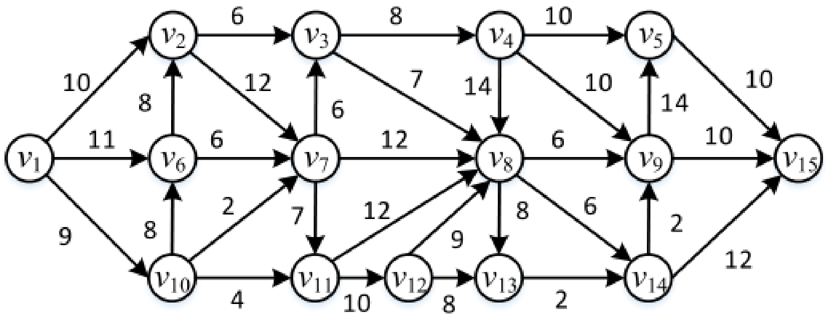


图10.18 第22题图

【解】略

第十一章 抽象代数结构通论

1.数的加减乘除是否是下述集合上的封闭二元运算？
(1)实数集R；(2)$R^* = R - \{0\}$；(3)$B = \{2n|n \ \in \ Z\}$；(4)$D = \{x|x\text{为质数}\}$；
【解】
(1)任何实数做四则运算，结果仍然是实数，所以是R上的封闭的二元运算。
(2)对于$\forall a \in R^*$，有$a + (-a) = 0 \notin R^*$，$a - a = 0 \notin R^*$，所以加减不是R^*上的封闭二元运算，乘除是R^*上的封闭二元运算。
(3)两个偶数的加减乘都是偶数，偶数相除可能不是整数，所以加减乘是B上的封闭二元运算，除不是B上封闭二元运算。
(4)质数的加减乘除都不一定是质数，所以加减乘除不是D上的封闭二元运算。

2. 设$A = \{x|x < 100\text{且为质数}\}$，在$A$上定义$*$和$\circ$如下：$x * y = \max(x, y)$ ，$x \circ y = \mathrm{LCM}(x, y)$，$x, y \in A$这里的$\mathrm{LCM}(x, y)$表示$x$和$y$的最小公倍数。问$\langle A, *\rangle$和$\langle A, \circ\rangle$是否为代数系统。
【解】∵$\max(x, y) \in A$
∴$\langle A, *\rangle$是代数系统
∵$\mathrm{LCM}(x, y) = x \times y \notin A$
∴$\langle A, \circ\rangle$不是代数系统

3. 设$A = \{0,1\}$是真值集合，已知代数系统为$\langle A, \wedge, \vee, \neg\rangle$，其中$\wedge, \vee, \neg$分别是逻辑运算，试列出该代数系统的三个运算表。
【解】

$\wedge$	0	1
0	0	0
1	0	1

$\wedge$的运算表

$\vee$	0	1
0	0	1
1	1	1

$\vee$的运算表

$\neg$	0	1
	1	0

$\neg$的运算表

表 11.1 题 3 运算表。

4. 设集合$A = \{0,1,2,3,4\}$，X_5是模 5 乘法，讨论代数系统$\langle A, \mathrm{X}_5\rangle$上的代数常数及每个元素的逆元情况；讨论$A$的子集$\{2,3,4\}$,$\{1,3,4\}$是否是$A$的子代数系统？
【解】

X_5	0	1	2	3	4
0	0	0	0	0	0
1	0	1	2	3	4
2	0	2	4	1	3
3	0	3	1	4	2
4	0	4	3	2	1

表 11.2 题 4 运算表。

幺元为 1，所以 0 无逆元，1 的逆元为 1，2 的逆元为 3，3 的逆元为 2，4 的逆元为 4，∵X_5不是$\{2,3,4\}$和$\{1,3,4\}$的二元运算，故不是A的子代数系统。

5. 设g是从代数$\langle A,*\rangle$到$\langle B,\circ\rangle$的同态映射，$\langle S,\circ\rangle$是$\langle B,\circ\rangle$的子代数，且$g^{-1}(S)\neq\emptyset$。证明：$\langle g^{-1}(S),*\rangle$是$\langle A,*\rangle$的子代数。这里$g^{-1}(S)$表示集合$S$的原像。

【解】假设$*$和$\circ$为K元运算。因为g是A到B的映射，S是B的非空子集，从而$g^{-1}(S)$是A的子集。由于$g^{-1}(S)$非空，任意$x_1,x_2,\cdots,x_k\in g^{-1}(S)\subseteq A$，有$g(x_1),g(x_2),\cdots,g(x_k)\in S\subseteq B$，因为$g$是$\langle A,*\rangle$到$\langle B,\circ\rangle$的同态映射且$\langle S,\circ\rangle$是$\langle B,\circ\rangle$的子代数，所以，$g(*(x_1,x_2,\cdots,x_k))=(g(x_1),g(x_2),\cdots,g(x_k))\in S$，因此$*(x_1,x_2,\cdots,x_k)\in g^{-1}(S)$，即集合$g^{-1}(S)$对运算$*$是封闭的，从而$\langle g^{-1}(S),*\rangle$是代数系统，也就是$\langle A,*\rangle$的子代数。

6. 设$V=\langle Z,+,\times\rangle$，其中$+$和$\times$分别代表普通加法和乘法，对下列给定的每个集合确定他是否构成V的子代数，为什么？(1)$S_1=\{2n|n\in Z\}$；(2)$S_2=\{2n+1|n\in Z\}$；(3)$S_3=\{-1,0,1\}$。

【解】

(1)∵两个偶数相加或相乘，得到的结果仍然是偶数

∴S_1是V的子代数

(2)∵两个奇数相加的结果是偶数

∴S_2不是V的子代数

(3)∵-1,0,1 两两相加或相乘的结果是$-1,0,1$

∴S_3是V的子代数

7. 下列集合都是自然数集N的子集，其是否构成$\langle N,+\rangle$的子代数？

(1)$\{x|x\in N\wedge x$与 5 互素$\}$；　　(2) $\{x|x\in N$且x是 30 的因子$\}$；

【解】

(1) ∵两个与 5 互素的数相加可能是 5 的倍数

∴不能构成$\langle N,+\rangle$的子代数。

(2) ∵两个 30 的因子相加后不是 30 的因子

∴不能构成$\langle N,+\rangle$的子代数。

8. 证明：如果$\langle A,*\rangle$是代数系统，$*$是A上的封闭的二元运算，$x\in A$且是关于$*$的等幂元，则对于任意正整数n，均有$x^n=x$。

【解】∵x是关于$*$的等幂元

∴当$n=1$时，$x=x$，当$n=2$时，$x^2=x*x=x$

假设当$n=k$时，$x^k=x$

当$n=k+1$时，$x^{k+1}=x^k*x=x*x=x$

∴对于任意正整数n，有$x^n=x$

9. 设$\langle A,*\rangle$是一代数系统，$*$是封闭的，可结合的，并且对于任何$a,b\in A$，若$a*b=b*a$，则必有$a=b$。试证明对于任何$a\in A$，有$a*a=a$。

【解】对于任何$a\in A$，令$x_i=a*a,\ x_j=a$。

$x_i*x_j=(a*a)*a=a*(a*a)=x_j*x_i$

∵$a*b=b*a\Rightarrow a=b$

∴$x_i=x_j$

∴$a*a=a$

10. 设非空集合$A=\{1,2,3,4,5\}$，‘$*$’是A上的二元运算，当$*$运算被定义为如下情况的时候，试分别写出该运算所对应的表格表示（即运算表）。（1）$*$运算被

定义为$a*b=a\cdot b-b$；（2）*运算被定义为$a*b=a+b\cdot b$；（3）$*$运算被定义为$a*b=b-a\cdot b$；（4）*运算被定义为$a*b=\max(a+b,a-b)$。

【解】

(1)

*	1	2	3	4	5
1	0	0	0	0	0
2	1	2	3	4	5
3	2	4	6	8	10
4	3	6	9	12	15
5	4	8	12	16	20

(2)

*	1	2	3	4	5
1	2	5	10	17	26
2	3	6	11	18	27
3	4	7	12	19	28
4	5	8	13	20	29
5	6	9	14	21	30

(3)

*	1	2	3	4	5
1	0	0	0	0	0
2	- 1	-2	-3	-4	-5
3	-2	-4	-6	-8	-10
4	-3	-6	-9	-12	-15
5	-4	-8	-12	-16	-20

(4)

*	1	2	3	4	5
1	2	3	4	5	6
2	3	4	5	6	7
3	4	5	6	7	8
4	5	6	7	8	9
5	6	7	8	9	10

表 11.3 题 10 运算表。

11. 确定以运算是否封闭，如果是，说明相关运算所具有的性质（指交换律，结合律，幂等律，消去律，分配律，吸收律）和特异元素（单位元，零元，逆元）。

（1）$A=R$，$x\circ y=|x-y|,\forall x,y\in A$。

（2）$A=P(\{a,b\})$，运算为集合的交。

（3）A为n阶实可逆矩阵的集合，两个运算分别为矩阵加法和乘法。

【解】(1)$\because |x-y|\in A$,

$\therefore$满足封闭性

$x\circ y=|x-y|=|y-x|=y\circ x$

$\therefore$满足交换律

$(x\circ y)\circ z=\big||x-y|-z\big|\neq\big|x-|y-z|\big|=x\circ(y\circ z)$

$\therefore$不满足结合律

$\because x\circ x=0\neq x$

$\therefore$不满足幂等律

$\because \forall a,x,y\in \mathrm{A}$，$a\circ x=|a-x|=|a-y|=a\circ y$

x不一定等于y

$\therefore$不满足消去律

幺元，零元，逆元都不存在。

(2)运算表如表 11.4 所示：

$\cap$	$\emptyset$	$\{a\}$	$\{b\}$	$\{a,b\}$
$\emptyset$	$\emptyset$	$\emptyset$	$\emptyset$	$\emptyset$
$\{a\}$	$\emptyset$	$\{a\}$	$\emptyset$	$\{a\}$
$\{b\}$	$\emptyset$	$\emptyset$	$\{b\}$	$\{b\}$
$\{a,b\}$	$\emptyset$	$\{a\}$	$\{b\}$	$\{a,b\}$

表 11.4。

满足封闭性

对于$\forall x, y \in \mathrm{A}$，$\because x \cap y = y \cap x$

$\therefore$满足交换律

$(x \cap y) \cap z = x \cap (y \cap z)$

$\therefore$满足结合律

$x \cap x = x$ 满足幂等律

若$x \cap y = x \cap \mathrm{z}$，$y$不一定等于$z$

$\therefore$不满足消去律

单位元：$\{a, b\}$，零元：$\emptyset$，$\{a, b\}$的逆元是$\{a, b\}$

(3)两个可逆矩阵相加结果不一定是可逆矩阵

$\therefore$加法不满足封闭性

对于$\forall x, y, z \in \mathrm{A}$，$\because |xy| = |x||y|$且$|x|, |y| \neq 0$

$\therefore |xy| \neq 0$，满足封闭性

$\because xy \neq yx$ $\therefore$不满足交换律

$\because (xy)z = x(yz)$ $\therefore$满足结合律

$\because xx \neq x$ $\therefore$不满足幂等律

若$xy = xz$，$y = z$，$\therefore$满足左消去律

若$yx = zx$，$y = z$，$\therefore$满足右消去律

$\therefore$满足消去律

单位元：E(单位矩阵) 零元不存在

逆元为相应矩阵的逆矩阵

12. 正整数集合Z^+上的两个二元运算‘$\circ$’和‘$*$’定义为：对$\forall x, y \in Z^+$，有$x \circ y = xy, x * y = xy$。证明‘$\circ$’对‘$*$’是不可分配的，‘$*$’对‘$\circ$’也是不可分配的。

【解】对于$\forall x, y, z \in Z^+$,

$x \circ (y * z) = x^{yz}, (x \circ y) * (x \circ z) = x^{y+z}$

$\therefore x \circ (y * z) \neq (x \circ y) * (x \circ z)$

$\therefore$ ‘$\circ$’对‘$*$’是不可分配的

$\because x * (y \circ z) = x\mathrm{y}^z, (x * y) \circ (x * z) = xy^{xz}$

$\therefore x * \ (y \circ z) \neq (x * y) \circ (x * z)$

$\therefore$ ‘$*$’对‘$\circ$’也是不可分配的

13. 设有集合$A = \{1,2,3,4,6,12\}, \langle A, \mathrm{LCM}, \mathrm{GCD} \rangle$是一代数系统，其中$\mathrm{LCM}(a, b)$是$a$

与b的最小公倍数，$\text{GCD}(a,b)$是a与b的最大公约数。讨论$\langle A,\text{LCM},\text{GCD}\rangle$上是否有幺元，零元，等幂元？指出哪些元素有逆元，是否具有结合律，等幂律，分配律。

【解】LCM,GCD运算表如表 11.5 所示：

LCM	1	2	3	4	6	12
1	1	2	3	4	6	12
2	2	2	6	4	6	12
3	3	6	3	12	6	12
4	4	4	12	4	12	12
6	6	6	6	12	6	12
12	12	12	12	12	12	12

GCD	1	2	3	4	6	12
1	1	1	1	1	1	1
2	1	2	1	2	2	2
3	1	1	3	1	3	3
4	1	2	1	4	2	4
6	1	2	3	2	6	6
12	1	2	3	4	6	12

表 11.5。

LCM：幺元为 1，零元为 12，等幂元：1,2,3,4,6,12。1 的逆元是 1，由表可知，有结合律和等幂律。

GCD：幺元为 12，零元为 1，等幂元：1,2,3,4,6,12。12 的逆元是 12，由表可知，有结合律和等幂律。

由表知，LCM对GCD是可分配的，GCD对LCM也是可分配的。

14. 编写一个程序用来判别有限二元运算表是否满足结合律。

【解】
```
#include<iostream>
using namespace std;
int getindex(char a[], char b) {
    for (int i = 0; i < sizeof(a); i++) {
        if (a[i] == b) return i;
    }
    return 0;
}
int main()
{
    int flag = 0;
    char symbol;
    cout << "请输入运算符号：";
    cin >> symbol;
    int len;
    cout << "请输入有几个运算数：";
    cin >> len;
    char *a = new char[len];
    char b[sizeof(a)][sizeof(a)];
    cout << "请输入运算数：";
    for (int i = 0; i <= len - 1; i++) {
        cin >> a[i];
    }
    for (int i = 0; i <= len - 1; i++) {
        for (int j = 0; j <= len - 1; j++) {
            cout << a[i] << symbol << a[j] << "=";
            cin >> b[i][j];
        }
        cout << endl;
    }
```

```
    for (int i = 0; i <= len - 1; i++) {
        for (int j = 0; j <= len - 1; j++) {
            for (int k = 0; k <= len - 1; k++) {
                if (b[getindex(a, b[i][j])][k] != b[i][getindex(a, b[j][k])]) {
                    flag = 1;
                }
            }
        }
    }
    if (flag == 0) {
        cout << "满足结合律" << endl;
    }
    else {
        cout << "不满足结合律" << endl;
    }
}
```

15. 设有集合$A = \{2x - 1|x \in R\}$, ×是一般算术乘法，证明$\langle A,\times\rangle$是一个代数系统，并解答下列问题：①求出关于运算×的幺元；②说明是否每个元素都有逆元；③说明是否有零元；④证明具有结合律和交换律。

【解】①$\because (2x-1)\times 1 = 2x-1$，$\therefore$幺元为 1

②对于$\forall n \in A$，有逆元$\frac{1}{n}$，使得$n \times \frac{1}{n} = 1$，0 没有逆元

③零元是 0

④对于$\forall x, y, z \in A$，有$(x \times y) \times z = x \times (y \times z)$

$x \times y = y \times x$

$\therefore$具有结合律和交换律。

16. 编写一个程序用来计算有限二元运算表的特殊元，如幺元，零元，逆元等。

【解】

```
#include<iostream>
using namespace std;
int main()
{
    char leftone='a', leftzero='b', rightone, rightzero;
    char one, zero;
    bool ones;
    char symbol;
    cout << "请输入运算符号：";
    cin >> symbol;
    int len;
    cout << "请输入有几个运算数：";
    cin >> len;
    char *a = new char[len];
    char b[sizeof(a)][sizeof(a)];
    cout << "请输入运算数：";
    for (int i = 0; i <= len - 1; i++) {
        cin >> a[i];
    }
    for (int i = 0; i <= len - 1; i++) {
        for (int j = 0; j <= len - 1; j++) {
            cout << a[i] << symbol << a[j] << "=";
            cin >> b[i][j];
        }
        cout << endl;
```

```
    }
    for (int i = 0; i <= len - 1; i++) {
        int flag = 1, flag1 = 1;
        for (int j = 0; j <= len - 1; j++) {
            if (a[j] != b[i][j]) {
                flag = 0;
            }

            if (a[i] != b[i][j]) {
                flag1 = 0;
            }
        }
        if (flag == 1) {
            leftone = a[i];
        }
        if (flag1 == 1) {
            leftzero = a[i];
        }
    }
        for (int i = 0; i <= len - 1; i++) {
            int flag = 1, flag1 = 1;
            for (int j = 0; j <= len - 1; j++) {
                if (a[j] != b[j][i]) {
                    flag = 0;
                }

                if (a[i] != b[j][i]) {
                    flag1 = 0;
                }
            }
            if (flag == 1) {
                rightone = a[i];
            }
            if (flag1 == 1) {
                rightzero = a[i];
            }
        }
        if (leftone == rightone) {
            one = leftone;
            cout << "幺元为" << one << endl;
            ones = true;
        }
        else {
            cout << "无幺元" << endl;
        }
        if (leftzero == rightzero) {
            zero = leftzero;
            cout << "零元为" << zero << endl;
        }
        else {
            cout << "无零元" << endl;
        }
        if (ones == true) {
            for (int i = 0; i <= len - 1; i++) {
                for (int j = 0; j <= len - 1; j++) {
                    if (b[i][j] == one) {
```

```
                        cout << a[i] << "的逆元是" << a[j] << endl;
                    }
                }
            }
        }
        else
        {
            cout << "无逆元" << endl;
        }
    }
```

17. 设A是一个n元非空有限集，则A上有多少个二元运算？其中有多少个是可交换的？又有多少个满足单位元律？

【解】

一个二元运算其实就是 $A*A$ 到 A 的映射,故有n^{n^2}个二元运算。

可交换对应于关于对角线对称的对儿上取相同的值,故有$n^{1+2+\cdots+n}$个。

有单位元对应于有一行有一列取定值,故有n^{n^2-2n+1}个。

18. 给定一个代数系统的运算表如下表所示，判断运算∗是否可交换，存在幺元，存在零元。如果存在幺元，找出每个元素的逆元。

*	a	b	c
a	b	a	c
b	a	b	c
c	c	c	b

表 11.6 ∗的运算表

【解】对于$\forall x,y\in\{a,b,c\}$

有$x*y=y\ \ *x$

∴∗满足交换律

由表可知：$b*x=x$

∴幺元为b

无零元

∵$a*a=b,b*b=b,c*c=b$

∴a的逆元是a，b的逆元是b，c的逆元是c。

19. 设$A\ =\ \{a,b,c\}$，试分别讨论由下表所确定的各个运算的性质。

*	a	b	c
a	a	b	c
b	b	c	a
c	c	a	b

表 11.7（a）

*	a	b	c
a	a	b	c
b	b	a	c
c	c	c	c

表 11.7（b）

*	a	b	c
a	a	b	c
b	a	b	c
c	a	b	c

表 11.7（c）

*	a	b	c
a	a	b	c
b	b	b	c
c	c	c	b

表 11.7（d）

*	a	b	c
a	a	b	c
b	b	a	a
c	c	a	a

表 11.7（e）

【解】对于$\forall x,y,z\in A$,

(a)∵$x*y=y*x$，∴满足交换律

∵$(x*y)*z=x*(y*z)$ ∴满足结合律

∵$b*b=c\neq b$ ∴不满足幂等律

若$x*y=x*z$ ∴满足左消去律

同理满足右消去律
∴满足消去律
(b)∵$x*y=y*x$，∴满足交换律
∵$(x*y)*z=x*(y*z)$ ∴满足结合律
∵$b*b=a\neq b$ ∴不满足幂等律
∵$c*a=c*b$，$a\neq b$ ∴不满足消去律
(c)∵$a*\mathrm{b}\neq b*a$ ∴不满足交换律
∵$(x*y)*z=x*(y*z)$ ∴满足结合律
∵$x*x=x$ ∴满足幂等律
∵$b*a=c*a$ 而$\mathrm{b}\neq\mathrm{c}$ ∴不满足消去律
(d)∵$x*y=y*x$，∴满足交换律
∵$(x*y)*z=x*(y*z)$ ∴满足结合律
∵$c*c=b\neq c$ ∴不满足幂等律
∵$c*a=c*b,a\neq b$ ∴不满足消去律
(e)∵$x*y=y*x$，∴满足交换律
∵$(x*y)*z=x*(y*z)$ ∴满足结合律
∵$b*b=a\neq b$ ∴不满足幂等律
∵$b*b=b*c$，而$\mathrm{b}\neq c$ ∴不满足消去律

20. 考虑讨论代数系统$\langle R,*\rangle$，这里R是实数，运算$*$定义为：对于任意的$a,b\in R$，有$a*b=(a+1)*(b+1)-1$。试分别讨论运算$*$是否满足可交换性，可结合性，R是否有幺元，对于运算$*$，每个元素的逆元是否存在，若存在，逆元是什么？
【解】$a*b=(a+1)*(b+1)-1,b*a=(b+1)*(a+1)-1$
∴$a*b=b*a$
∴$*$满足交换律
对于$\forall c\in R,(a*b)*c=(a+1)*(b+1)*(c+1)-1$
$a*(b*c)=(a+1)*(b+1)*(c+1)-1$
∴$(a*b)*c=a*(b*c)$
∴满足结合律
∵$0*a=a$ ∴幺元为 0
对任意a，有逆元$-\frac{a}{a+1}$。

21. 设Q为有理数集，Q上的运算$*$定义为：对于任意的$a,b\in Q$，有$a*b=a+b-3ab$。
（1）运算$*$是可交换和可结合的。
（2）找出代数系统$\langle Q,*\rangle$的幺元。
（3）Q中那些元素有逆元？若有，逆元是什么？
【解】(1)∵$a*b=a+b-3ab=b+a-3ab=b*a$
∴$*$是可交换的。
对$\forall c\in Q$，
∵$(a*b)*c=(a+b-3ab)*c=a+b-3ab+c-3(a+b-3ab)-c=a+b+c-3ab-3ac-3bc+9abc$
$a*(b*c)=a*(b+c-3bc)=a+b+c-3ba-3a(b+c-3bc)=a+b+c-3ba-3ab-3ac+9abc$

∴$*$是可结合的。
(2)$a*b=a+b-3ab=b\Rightarrow a=0$
∴幺元为 0
(3)令$a*b=0$
$a+b-3ab=0$
$a+(1-3a)b=0$
$b=\frac{a}{3a-1}$
∴当$a\neq\frac{1}{3}$时，a的逆元为$\frac{a}{3a-1}$

22. 设$A=\{a,b\}$，A上所有函数的集合为A^A，'∘'是函数的合成运算，试给出A^A上的运算'∘'的运算表，并且指出A^A中是否有幺元？哪些元素有逆元？
【解】因为$|A|=2$，所以A上共有$2^2=4$个不同的函数。令$A^A=\{f_1,f_2,f_3,f_4\}$，其中$f_1(a)=a$，$f_1(b)=b$，$f_2(a)=a$，$f_2(b)=a$，$f_3(a)=a$，$f_3(b)=b$，$f_4(a)=b$,$f_4(b)=a$。则'∘'的运算表如表 11.8 所示

$\circ$	f_1	f_2	f_3	f_4
f_1	f_1	f_2	f_3	f_4
f_2	f_2	f_2	f_3	f_3
f_3	f_3	f_2	f_3	f_2
f_4	f_4	f_2	f_3	f_1

表 11.8。
可以看出，f_1是A^A的幺元，f_1和f_4都有逆元，其逆元为自身。

23. 下述函数是否是代数$\langle R-\{0\},\times\rangle$上的自同态？如果是，说明它是否是满同态，单一同态和同构，并计算出同态像。$f(x)=|x|$；$f(x)=2x$；$f(x)=x-1$ ；$f(x)=x+1$。
【解】

24. 设f和g均是从$\langle A,*\rangle$到$\langle B,\circ\rangle$的同态映射，'$*$'和'∘'分别是A和B上的二元运算，且'∘'是可交换和可结合的，定义h：$A\to B,x\in A,h(x)=f(x)\circ g(x)$，证明$h$是从$\langle A,*\rangle$到$\langle B,\circ\rangle$的同态映射。
【解】对于$\forall x,y\in A$,
有$f(x*y)=f(x)\circ f(y)$　　$g(x*y)=g(x)\circ g(y)$
$h(x*y)=\ f(x*y)\circ g(x*y)=\ f(x)\circ f(y)\circ g(x)\circ g(y)$
∵'∘'是可交换的和可结合的
∴上式$=\ (f(x)\circ g(x))\circ(f(y)\circ g(y))=h(x)\circ h(y)$
∴h是从$\langle A,*\rangle$到$\langle B,\circ\rangle$的同态映射。

25. 代数系统$\langle N_4,*\rangle$的$*$运算定义表 11.9 所示，又知$B=\{a,b\}$，试证明$\langle N_4,*\rangle$与代数系统$\langle P(B),\cup\rangle$同构。

$*$	0	1	2	3
0	0	1	2	3
1	1	1	3	3
2	2	3	2	3
3	3	3	3	3

表 11.9　$*$的运算表

【解】$\cup$的运算表如表 11.10 所示：

$\cup$	$\emptyset$	$\{a\}$	$\{b\}$	$\{a,b\}$
$\emptyset$	$\emptyset$	$\{a\}$	{b}	{a,b}
$\{a\}$	$\{a\}$	$\{a\}$	$\{a,b\}$	$\{a,b\}$
$\{b\}$	$\{b\}$	$\{a,b\}$	$\{b\}$	$\{a,b\}$
$\{a,b\}$	$\{a,b\}$	$\{a,b\}$	$\{a,b\}$	$\{a,b\}$

表 11.10。

构造映射f: $N_4 \to P(B)$如下：$0 \to \emptyset$；$1 \to \{a\}$；$2 \to \{b\}$；$3 \to \{a,b\}$

显然，f是双射。

下面验证f是同构映射：

$$f(1*2) = f(3) = \{a,b\} = \{a\} \cup \{b\} = f(1) \cup f(2)$$
$$f(1*3) = f(3) = \{a,b\} = \{a\} \cup \{a,b\} = f(1) \cup f(3)$$
$$f(2*3) = f(3) = \{a,b\} = \{b\} \cup \{a,b\} = f(2) \cup f(3)$$
$$f(2*2) = f(2) = \{b\} = \{b\} \cup \{b\} = f(2) \cup f(2)$$

可类似证明其余情形。

因此，f是一个保运算的双射，即有$\langle N_4,*\rangle \cong \langle P(B),\cup\rangle$。

26. 设$\langle S_1,\sigma_1\rangle$是一代数系统，$\sigma_1$是二元运算如下表所示，给出$S_1 = \{x_1,x_2,x_3,x_4\}$上的划$\pi$为$\{\{x_1,x_2\},\{x_3,x_4\}\}$，证明$\pi$对应的等价关系$R$是$S_1$上的同余关系。

σ_1	x_1	x_2	x_3	x_4
x_1	x_1	x_2	x_3	x_4
x_2	x_2	x_1	x_4	x_3
x_3	x_3	x_4	x_1	x_2
x_4	x_4	x_3	x_2	x_1

表 11.11　σ_1的运算表

【解】略

第十二章 典型抽象代数结构

1. 判断下列集合关于指定运算是否构成半群、独异点和群。

（1）集合$G=\{a^n|a\in R^+,n\in Z\}$，运算是普通乘法。

【解】满足封闭性，结合律可以构成半群，设单位元为e，$x\in G$则$e*x=x$所以$e=1\in G$，可以构成独异点，设y为x的逆元，$x*y=e=1$，$y=\frac{1}{x}\in G$有逆元素，所以可以构成群。

（2）集合是正有理数集合Q^+，运算是普通乘法。

【解】满足封闭性，结合律可以构成半群，设单位元为e，$x\in Q^+$则$e*x=x$所以$e=1\in Q^+$，可以构成独异点，设y为x的逆元$x*y=e=1$，$y=\frac{1}{x}\in Q^+$ 有逆元素，所以可以构成群。

（3）集合是正有理数集合Q^+，运算是普通加法。

【解】满足封闭性，结合律可以构成半群， 设单位元为e，$x\in Q^+$则$e+x=x$所以$e=0\notin Q^+$，不可以构成独异点。

（4）集合是一元实系数多项式集合，运算是多项式乘法。

【解】封闭性：是实系数相乘，指数相加，结果仍是实系数，故仍为实系数多项式。可结合性：3 个多项式相乘，是系数相乘后再相加，指数相加，满足可结合性。单位元：实数 1 为单位元，即多项式退化为常数 1。逆元：两个多项式相乘为结果 1，$(x+1)\times y=1$，则$y=1/(1+x)$，显然$1/(1+x)$不是多项式，因此不存在逆元。综上可以构成半群和独异点，不能构成群。

（5）集合是一元实系数多项式集合，运算是多项式加法。

【解】满足封闭性，结合律可以构成半群，单位元为$e=0$，可以构成独异点，各项系数的相反数即为逆元，所以可以构成群。

2. 设集合$G=\{a,b,c\}$上的二元运算如表 12.4 所示。

表 12.1 G上的二元运算$(\cdot)$

.	a	b	c
a	a	b	c
b	b	a	c
c	c	c	c

则$\langle G,\cdot\rangle$是否为半群？是否为群？为什么？

【解】由表可知$\langle G,\cdot\rangle$满足封闭性，结合律所以为半群。设单位元为e，$x\in G$则$e\cdot x=x$，由表可知$e=a$，由表可知不存在$y\in G$，$c\cdot y=a$，所以不能构成群。

3. 设$\langle S,*\rangle$是半群，且对$\forall a,b\in S$，若$a\neq b$，就有$a*b\neq b*a$。试证明：

（1）对$\forall a\in S$，必有$a*a=a$；

【证明】假设$a*a\neq a$则$(a*a)*a\neq a*(a*a)$不满足结合律，与$\langle S,*\rangle$是半群矛盾，所以$a*a=a$。

（2）对$\forall b\in S$，必有$b*b=b$；

【证明】同上

（3）对$\forall a,b,c\in S$，必有$a*b*c=a*c$。

【证明】对$\forall a,b,c\in S$，必有：$(a*b*c)*(a*c)=(a*(b*c)*a)*c=a*c=a*(c*(a*b)*c)=(a*c)*((a*b)*c)$，由题意知$\forall a,b\in S$，若$a*b=b*a$，则必有$a=b$，所以有$a*b*c=a*c$。

4. 设P为正整数集合$x,y\in P$，规定

（1）$x\circ y=\mathrm{GCD}(x,y)$（GCD 表示$x,y$的最大公因数）；（2）$x*y=x^y$。

试问：$\langle P,\circ\rangle$和$\langle P,*\rangle$是半群吗？

【解】(1) $(x\circ y)\circ z=\mathrm{GCD}(\mathrm{GCD}(x,y),z)$，$x\circ(y\circ z)=\mathrm{GCD}(x,\mathrm{GCD}(y,z))$所以$(x\circ y)\circ z=x\circ(y\circ z)$，满足结合律，显然也满足封闭性所以$\langle P,\circ\rangle$是半群。

(2) 由于任意$x,y\in P,x^y\in P$且是P中唯一的正整数，于是$*$是P上的二元运算。但是$*$不满足结合律，例如$2,2,3\in P$，则有：

$$(2*2)*3=2^2*3=64，2*(2*3)=2*2^3=256$$

所以不满足结合律，故$\langle P,*\rangle$不是半群。

5. 设$\langle S,*\rangle$是一个半群，$G=\{f_a|a\in S,f_a(x)=a*x,x\in S\}$，证明$\langle G,\circ\rangle$是$\langle S^S,\circ\rangle$的子半群。这里“∘”表示函数的复合运算。

【解】$\langle S^S,\circ\rangle$是半群。G是S^S的非空子集，只需验证运算“∘”在G上是封闭的即可。任取$a,b\in S$，对于任意$x\in S$，有：

$$(f_a\circ f_b)(x)=f_b(f_a(x))=f_b(a*x)=b*(a*x)=(b*a)*x$$

因为$\langle S,*\rangle$是一个半群，所以$b*a\in S$，从而$f_a\circ f_b=f_b*a\in G$，即“∘”在 G 上是封闭的从而$\langle G,\circ\rangle$是$\langle S^S,\circ\rangle$的子半群。

6. 设$\langle A,*\rangle$是半群，a是A中的一个元素，使得对A中的每一个元素x，存在$u,v\in A$满足$a*u=u*a=x$，证明A中存在幺元。

【证明】取$a\in A$，存在$u_a,v_a\in A$，满足$a*u_a=v_a*a=x$，因为对于$x\in A$，存在$u,v\in A$满足$a*u=v*a=x$，所以有：

$$x*u_a=(v*a)*u_a=v*(a*u_a)=v*a=x$$

因此u_a是A中关于”$*$”的右幺元；又有：

$$v_a*x=v_a*(a*u)=(v_a*a)*u=a*u=x$$

因此v_a是A中关于”$*$”的左幺元，故$u_a=v_a$为A中关于”$*$”的幺元。

7. 设$\langle G,\cdot\rangle$是代数系统，则$\langle G\times G,*\rangle$是代数系统，这里的运算“$*$”规定如下

$$\langle a,b\rangle*\langle c,d\rangle=\langle a\cdot b,c\cdot d\rangle$$

其中a,b,c,d为G中的元素。求证（1）当$\langle G,\cdot\rangle$是半群时，$\langle G\times G,*\rangle$是半群；（2）当$\langle G,\cdot\rangle$有单位元时，$\langle G\times G,*\rangle$有单位元；（3）当$\langle G,\cdot\rangle$是群时，$\langle G\times G,*\rangle$是群。

【证明】（1）$\langle a,b\rangle\in G$，$\langle c,d\rangle\in G$，有：

$$\langle e,f\rangle\in G\langle a,b\rangle*\langle c,d\rangle*\langle e,f\rangle=\langle a,b,c,d,e,f\rangle=\langle a,b\rangle*(\langle c,d\rangle*\langle e,f\rangle)$$

所以满足结合律，显然满足封闭性，所以$\langle G\times G,*\rangle$是半群。

（2）$\langle G,\cdot\rangle$有单位元，所以$x\cdot e=e\cdot x=x$，设$\langle e_1,e_2\rangle$为$\langle G\times G,*\rangle$有单位元，$\langle a,b\rangle*\langle e_1,e_2\rangle=\langle a,b,e_1,e_2\rangle=\langle a,b\rangle$，即$\langle e_1,e_2\rangle=1$是$\langle G\times G,*\rangle$的单位元

（3）$\langle G,\cdot\rangle$是群则存在$x\cdot y=e$，$\langle x_1,y_1\rangle*\langle x_2,y_2\rangle=\langle x_1\cdot x_2,y_1\cdot y_2\rangle$，显然$x_1\cdot x_2=e_1$，$y_1\cdot y_2=e_2$存在，所以$\langle G\times G,*\rangle$有逆元，即$\langle G\times G,*\rangle$是群。

8. 设$G=\langle a\rangle$是 15 阶循环群，

（1）求出G的全部生成元；

【解】因为$a=(a^2)^8=a^{15}*a$；

$a=(a^4)^2=a^{15}*a$；

$a=(a^7)^{-2}=a^{15}*a^{-14}$；

$a=(a^8)^2=a^{15}*a$；

$a=(a^{11})^{11}=(a^{15})^8*a$；

$a=(a^{13})^{-8}=(a^{15})^7*(a^{13})^{-8}$；

$a=(a^{14})^{-1}=(a^{15})*(a^{14})^{-1}$

所以生成元为a，a^2，a^4，a^7，a^8，a^{11}，a^{13}，a^{14}。

（2）求出G的全部子群。

【解】子群为$\langle e\rangle=\{e\}$，$\langle a\rangle=G$，

$\langle a^3\rangle=\{e，a^3，a^6，a^9，a^{12}\}$，$\langle a^5\rangle=\{e，a^5，a^{10}\}$

9. 求三次对称群$\langle S_3,\circ\rangle$中各元素的阶，并求出下列置换所生成的子群：

$$\begin{pmatrix}1&2&3\\1&3&2\end{pmatrix}$$

【解】$S_3=\{P_i|i=1,2,3,4,5,6\}$，则$P_1$为幺元，其阶为 1；$P_2$，$P_3$，$P_4$的阶都为 2；$P_5$，$P_6$的阶都为 3。由$P_4=\begin{pmatrix}1&2&3\\1&3&2\end{pmatrix}$生成的子群为$\langle\{P_4，P_1\}，\circ\rangle$

10. 设G为群，求证如果对于G的任意元素x都有$x^2=e$，则G是交换群。

【证明】$\forall a,b\in G$，$a^2=e$，$b^2=e$，$(ab)^2=e$，所以$abab=e=a^2b^2=aabb$，则有：ab=ba 即 G 是交换群

11. 设Z为整数集，“$*$”为对$\forall a,b\in Z$，$a*b=a+b-2$，这里“+”、“$-$”为数的加法和减法运算。证明：$\langle Z,*\rangle$是一个群。

【证明】封闭性：$a*b=a+b-2\in Z$，结合律：

$$(a*b*c=a+b-2+c-2=a+b+c-4$$

$$a*(b*c)=a+b+c-2-2=a+b+c-4=(a*b)*c$$

设a为幺元对于$\forall x\in Z$则有$a*x=x=a+x-2$，所以$a=2$，即$\langle Z,*\rangle$的幺元为 2，对于$\forall x,y\in Z$，$x*y=2=x+y-2$，所以$y=4-x$逆元存在，综上$\langle Z,*\rangle$是一个群得证。

12. 设G是一个群，n是整数，证明：对$\forall a,b\in G$，有$(a^{-1}ba)^n=a^{-1}b^na$。

【证明】当n为正整数时，$(a^{-1}ba)^n=(a^{-1}ba)(a^{-1}ba)\ldots(a^{-1}ba)(a^{-1}ba)$

$=a^{-1}b(aa^{-1})b(aa^{-1})\ldots b(aa^{-1})ba=a^{-1}bebe\ldots beba=a^{-1}bna$

当$n=0$时$(a^{-1}ba)^0=e=a^{-1}b^0a$，当$n$为负整数时$n=-k$，

$(a^{-1}ba)^n=(a^{-1}ba)^{-k}=((a^{-1}ba)^{-1})^k=(a^{-1}b^{-1}a)^k=a^{-1}(b^{-1})^ka=a^{-1}b^{-k}a$

$=a^{-1}bna$

13. 设G是一个群，e是幺元$a,b,c\in G$。证明：

（1）a和a^{-1}，b和b^{-1}的周期相同；

【证明】设$|a|=r$，$|a^{-1}|=t$则$a^r=e$，$a^{-t}=e$，$a^ra^{-t}=e=a^{r-t}$又因为$a^0=e$所以$r-t=0,r=t$即a和a^{-1}周期相同得证，同理可证b和b^{-1}的周期相同

(2) ab和ba的周期相同;

【证明】设$|ab| = r$, $|ba| = t$则$(ab)^r = e$, $(ba)^t = e$

$(ab)^t = (ab)(ab) \dots (ab)$=$a(ba)(ba) \dots (ba)a^{-1}$=$a(ba)^t a^{-1}$ =aea^{-1} =e

由定理知: $r|t$

$(ba)^r = (ba)(ba) \dots (ba)$ =$b(ab)(ab) \dots (ab)b^{-1}$=$b(ab)^r b^{-1}$=$beb^{-1}$=$e$

由定理知: $t|r$, 综上所述: $t = r$, 即ab和ba的周期相同得证。

(3) abc, bca和cab的元素个数必定是偶数。

【证明】由上面证明可知$|abc| = |bca| = |cab| = u$, u为有限数且大于 2, 所以abc, bca和cab的元素一定为互逆元, 而有限群中互逆元个数一定为偶数, 所以abc, bca和cab的元素个数必定是偶数。

14. 设p为质数。求证: 在阿贝尔群中, 若a, b的阶都是p次幂, 则的$a * b$阶也是p的方幂。

【证明】设a的阶为p^{k1}, b的阶为p^{k2}, $k1$, $k2 \in N^+$那么$a^{p^{k1}} = e$, $b^{p^{k2}} = e$, 又因为阿贝尔群中运算$*$可交换, 于是$(a * b)^{p^{k1+k2}}$=$a^{p^{k1}p^{k2}} * b^{p^{k2}p^{k1}}$ =$e^{p^{k2}} * e^{p^{k1}}$=e

$a * b$的阶整除p^{k1+k2}而p为质数, 因此$a * b$的阶必为p的方幂。

15. 设H_1和H_2都是群G的子群, 则$H = H_1 \cap H_2$也是G的子群, $H_1 \cup H_2$是G的子群吗?

【解】当且仅当$H_1 \subseteq H_2$或$H_2 \subseteq H_1$时$H_1 \cup H_2$是G的子群才成立。充分性显然。必要性: 设H_1不是H_2的子集, 且H_2不是H_1的子集, 那么有$h_1 \in H_1$, 但$h_1 \notin H_2$, 同时有$h_2 \in H_2$, 但$h_2 \notin H_1$。而此时$h_1 \in H_1 \cup H_2$, $h_2 \in H_1 \cup H_2$, 由于$\langle H_1 \cup H_2, *\rangle$为$\langle G, *\rangle$的子群, 故$h_1 * h_1 \in H_1 \cup H_2$。于是$h_1 * h_1 \in H_1$或$h_1 * h_1 \in H_2$。当$h_1 * h_1 \in H_1$时, 因为$\langle H_1, *\rangle$为$\langle G, *\rangle$的子群, 以及$h_1 \in H_1$, 所以${h_1}^{-1} \in H_1$, 从而${h_1}^{-1} * h_1 * h_2 \in H_1$, 此与$h_2 \notin H_1$矛盾。当$h_1 * h_2 \in H_1$时, 同样会导致矛盾。故$H_1 \subseteq H_2$或$H_2 \subseteq H_1$。

16. 设$G = \langle a \rangle$是以a为生成元的n阶循环群。若r与n的最大公约数是d, a^r的周期是多少? 由此看来, G中哪些元素可以作为生成元?

【解】设e是G中的单位元, 显然$(a^r)^{\frac{d}{n}}$=$a^{\frac{m}{d}}$=$(a^n)^{\frac{r}{d}}$=$e^{\frac{r}{d}}$=e。设a^r的周期为m, 则$m|\frac{r}{d}.m \dots (1)$。又$(a^n)^m = e$, 即$a^m$=$e$得$n|rm$, 则$\frac{n}{d}|\frac{r}{d}.m$。因$(\frac{n}{d}, \frac{r}{d}) = 1$, 所以$\frac{n}{d}|m \cdots (2)$。由(1)和(2)知$m$=$\frac{n}{d}$, 即$a^r$的周期为$\frac{n}{d}$。

由此知G中周期为n的元a^r必使 d=1, 而有$(r, n) = 1$, 故a^r是生成元的充要条件是r与n互质。

17. 设A是非空有限集合, $\langle S, \circ\rangle$是A上的对称群, $\langle G, \circ\rangle$是A的一个置换群, 构造一个A上的二元关系R满足: $aRb \Leftrightarrow \exists\tau(\tau \in G \wedge \tau(a) = b)$。证明$R$是等价关系。

【解】略

18. 计算 12 阶循环群$G = \{e, c, c^2, c^3, c^4, c^5, \cdots, c^{11}\}$的子群$H = \{e, c^4, c^8\}$在$G$中的所有左陪集。

【解】$H = eH$是一个左陪集, 取$c \in G$且$c \notin H$, 则$cH = \{c, c^5, c^9\}$也是一个左陪集, 取不属于$H \cup cH$的G中的元素, 如c^2则$c^2H = \{c^2, c^6, c^{10}\}$也是一个左陪集。

取不属于$H\cup cH\cup c^2H$的G中的元素，如$c^3H=\{c^3,c^7,c^{11}\}$也是一个左陪集，于是$G=H\cup cH\cup c^2H\cup c^3H$，集$H$在$G$中所有的左陪集有$H$，$cH$，$c^2H$，$c^3H$。

19. 设H是群G的子集，对任何给定的是G的子群$g\in G$，$g^{-1}Hg=\{g^{-1}\hbar g|\hbar\in H\}$，并且$H$是$G$的正规子群当且仅当$g\in G$，$g^{-1}Hg=H$。

【证明】必要性：设H为正规子群，对任意$g\in G$，$gH=Hg$于是对任意$h\in H$，$h*g\in Hg$蕴含$h*g\in gH$，从而有$h_1\in H$，使$h*g=g*h_1$，从而$g^{-1}*h*g=h_1\in H$故$g^{-1}Hg=H$。

充分性：对任意$g\in G$，$h\in H$，$h*g\in Hg$，由于$g^{-1}*h*g\in g^{-1}Hg$，而$g^{-1}Hg\subseteq H$，故$g^{-1}*h*g\in H$。从而有$h_2\in H$，使$g^{-1}*h*g=h_2$，因此$h*g=g*h_2\in gH$。$Hg\subseteq gH$得证。

另一方面，对任意$g\in G$，$h*g\in gH$，由于$(g^{-1})^{-1}Hg^{-1}\subseteq H$，$(g^{-1})^{-1}*h*g^{-1}=g*h*g^{-1}\in(g^{-1})^{-1}Hg^{-1}$。故$g*h*g^{-1}\in H$。于是有$h_3\in H$使$g*h*g^{-1}=h_3$，从而$g*h=h_3*g\in Hg$。$gH\subseteq Hg$得证。综上，对任意$g\in G$，$gH=Hg$，即$H$为正规子群。

20. 编写一个程序能计算有限子群的左、右陪集。

【解】略

21. 设G是一个循环群，N是G的一个子集，证明：商群G/N也是循环群。

【证明】由G为循环群知，G一定是交换群，故N是正规子群，G/N有意义。设$G=(a)$，则任取G/N中元素bN，其中$b\in G$，故存在$k\in Z$使得$b=a^k$，因此$bN=a^kN=(aN)^k$, 故G/N是循环群。

22. 设代数系统$\langle I,\oplus,\otimes\rangle$中运算$\oplus$，$\otimes$定义如下：对任何整数，

$$a\oplus b=a+b-1,\quad a\otimes b=a+b-a\cdot b$$

(这里+，$\cdot$分别是数加和数乘)。证明$\langle I,\oplus,\otimes\rangle$是含幺交换环。

【证明】(1) 首先$\langle R,\oplus\rangle$为加群。

① 对任意a，$b\in R$，因为$a\oplus b=b\oplus a=a+b-1\in R$，所以运算$\oplus$在$R$上封闭且满足交换律；

② 对任意$a,b,c\in R$，都有：

$$(a\oplus b)\oplus c=(a+b-1)\oplus c=(a+b-1)+c-1=\ a+b+c-2$$

而$a\oplus(b\oplus c)=a\oplus(b\oplus c)$，即运算$\oplus$可结合。

③ 因为对任意$a\in R$，都有$1\oplus a=a+1-1=a=a\oplus 1$，所以元素 1 为加法幺元；

④ 对任意$a\in R$，有元素$2-a$满足

$$a\oplus(2-a)=(2-a)\oplus a=a+(2-a)-1=1$$

所以对任意$a\in R$有加法逆元$2-a$。

综上①②③④知$\langle R,\oplus\rangle$为加群。

(2) 其次证$\langle R,\otimes\rangle$独异点。

① 对任意$a,b\in R$，因为 a⊗b = a⊗b=a+b−ab∈R, 所以运算⊗在 R 上满足交换律.

② 对任意$a,b,c\in R$，

$$(a\otimes b)\otimes c=(a+b-ab)\otimes c=(a+b-ab)+c-(a+b-ab)c$$
$$=\ a+b+c-bc-ab-ac+abc$$

所以对任意$a,b,c \in R$，都有$(a⊗b)⊗c = a⊗(b⊗c)$, 即运算⊗可结合。
③ 因为对任意$a \in R$，都有$a⊗0 = 0⊗a = a + 0 - a \cdot 0 = a$, 所以元素 0 为乘法逆元．综上①②③可知为交换独异点。
(3)最后证运算⊗对⊕可分配。对任意$a,b,c \in R$，都有

$$a⊗(b⊕c) = a⊗(b + c - 1) = a + (b + c - 1) - a(b + c - 1)$$
$$=2a + b + c - ab - ac - 1$$

而$(a⊗b)⊕(a⊕c) = (a + b - ab)⊕(a + c - ac) = (a + b - ab) + (a + b - ac) - 1$
$$= 2a + b + c - ab - ac - 1$$

即对任意$a,b,c \in R$，都有$a⊗(b⊕c) = (a⊗b)⊕(a⊕c)$, 同理可证:
$(b⊕c)⊗a = (b⊗a)⊕(c⊕a)$, 所以运算⊗对⊕可分配。
综和(1)(2)(3)$\langle I,⊕,⊗\rangle$是含幺交换环得证。

23. 问$\langle\{5x|x\epsilon I\},+,\cdot\rangle$（+，·分别为数加和数乘）是否为环？
【解】$\langle\{5x|x\epsilon I\},+,\cdot\rangle$为环。因为：对任意$5x_1, 5x_2, 5x_3 \in \{5x \mid x \in I\}, x_1, x_2, x_3 \in I$ 所以有：

$$5x_1 + 5x_2 = 5(x_1 + x_2) \in \{5x \mid x \in I\}, x_1 + x_2 \in I$$
$$(5x_1 + 5x_2) + 5x_3 = 5x_1 + 5x_2 + 5x_3 = 5x_1 + (5x_2 + 5x_3)$$

$0 + 5x = 5x + 0 = 5x$，0 为加法幺元，$-(5x) = -5x = 5(-x)$，$5x$有加法逆元$5(-x), -x \in I$。因此$\langle\{5x|x\epsilon I\},+\rangle$为交换群，又$5x_1 \cdot 5x_2 = 5(5x_1x_2)$，$5x_1x_2 \in I$，故$5x_1 \cdot 5x_2 \in \{5x|x\epsilon I\}$。而$(5x_1 \cdot 5x_2) \cdot 5x_3 = 125x_1x_2x_3 = 5x_1 \cdot (5x2 \cdot 5x_3)$，因此$\langle\{5x|x\epsilon I\},\cdot\rangle$为半群。

此外，由于数乘对数加有分配律。综上$\langle\{5x|x\epsilon I\},+,\cdot\rangle$为环。

24. 下述代数结构是环吗？并加以证明。
$\langle a + b\sqrt{3}|a,b \in Z,+,\times\rangle$其中 Z 是整数集，“+”、“×”表示普通的加法和乘法。
【解】是环，证明如下：
设$R = \{a + b\sqrt{3}|a,b \in Z\}$，对任意$x_1, x_2, x_3 \in R$，则$x_1 + x_2 \in R$，

$$(x_1 + x_2) + x_3 = (a_1 + b_1\sqrt{3} + a_2 + b_2\sqrt{3}) + a_3 + b_3\sqrt{3}$$
$$= (a_1 + a_2 + a_3) + (b_1 + b_2 + b_3)\sqrt{3}$$
$$x_1 + (x_2 + x_3) = a_1 + b_1\sqrt{3} + (a2 + b2\sqrt{3} + a_3 + b_3\sqrt{3})$$
$$= (a_1 + a_2 + a_3) + (b_1 + b_2 + b_3)\sqrt{3}$$

满足结合律

$0 + x_1 = x_1 + 0 = x_1$，0 为加法幺元

$a_1 + b_1\sqrt{3} + a_2 + b_2\sqrt{3} = 0$，$a_2 = -a_1 \in Z$，$b_2 = -b_1 \in Z$，逆元存在，所以$\langle a + b\sqrt{3}|a,b \in Z,+\rangle$为交换群，

$$x_1 \times (x_2 + x_3) = (a_1 + b_1\sqrt{3}) \times (a_2 + b_2\sqrt{3}) + (a_1 + b_1\sqrt{3}) \times (a_3 + b_3\sqrt{3})$$
$$(x_2 + x_3) \times x_1 = (a_2 + b_2\sqrt{3}) \times (a_1 + b_1\sqrt{3}) + (a_3 + b_3\sqrt{3}) \times (a_1 + b_1\sqrt{3})$$

因此$\langle a + b\sqrt{3}|a,b \in Z,\times\rangle$为半群。综上$\langle a + b\sqrt{3}|a,b \in Z,+,\times\rangle$为环

25. 设$\langle A,\le\rangle$是一格，B是A的子集，对于任意给定$a \in A$，$B = \{x|x \in A, x \le a\}$，证明：$B$是$A$的子格。
【证明】对于任意$x,y \in B$，必有$x \le a, y \le a$，所以$x * y \le a$，$x⊕y \le a$，$x * y \in B$，$x⊕y \in B$，因此B是A的子格。

26. 设$\langle L,\leq\rangle$是格，其保交和保联运算分别为$*$和$\oplus$，则对$\forall a,b,c,d\in L$,证明:
（1）$(a*b)\oplus(c*d)\leq(a\oplus c)*(b\oplus d)$
【证明】因为$a*b\leq a$，$c*d\leq d$，所以$(a*b)\oplus(c*d)\leq a\oplus c$；
又因为$a*b\leq b$，$c*d\leq d$，所以$(a*b)\oplus(c*d)\leq b\oplus d$，所以

$$(a*b)\oplus(c*d)\leq(a\oplus c)*(b\oplus d)$$

（2）$(a*b)\oplus(b*c)\oplus(c*a)\leq(a\oplus b)*(b\oplus c)*(c\oplus a)$
【证明】$a*b\leq a$，$b*c\leq b$，$c*a\leq a$，所以

$$(a*b)\oplus(b*c)\oplus(c*a)\leq a\oplus b$$

因为$a*b\leq b$，$b*c\leq c$，$c*a\leq c$，所以

$$(a*b)\oplus(b*c)\oplus(c*a)\leq b\oplus c$$

因为$a*b\leq a$，$b*c\leq c$，$c*a\leq c$，所以

$$(a*b)\oplus(b*c)\oplus(c*a)\leq c\oplus a$$

所以$(a*b)\oplus(b*c)\oplus(c*a)\leq(a\oplus b)*(b\oplus c)*(c\oplus a)$

27. $\langle L,|\rangle$和$\langle S,\leq\rangle$是两个格，其中$L=\{2,4,8,16\}$，$|$为整除关系，$S=\{1,2,3,\cdots,10\}$，$\leq$为数的小于或等于关系。试给出从L到S的两个不同的格同态映射。
【解】$\langle L,|\rangle$的保联和保交分别为求两个数的最大公约数GCD和求最小公倍数LCM，$\langle S,\leq\rangle$的保联和保交分别为求两个数的中的较大者max和求较小者min。
取f：$L->S$为$f(2^n)=n$，$n=1,2,3,4$。容易验证，对任意$a,b\in L$有：

$$f(\text{GCD}(a,b))=\min(f(a),f(b)),\ f(\text{LCM}(a,b))=\max(f(a),f(b)),$$

故f是$\langle L,|\rangle$到$\langle S,\leq\rangle$的格同态。取g：$L->S$为$g(2)=g(2^2)=2$，$g(2^3)=g(2^4)=4$。也不难验证，g是$\langle L,|\rangle$到$\langle S,\leq\rangle$的格同态。

28. 试画出所有含有 5 个元素的互不同构的格，并指出其中哪些格是有补格，哪些格是分配格，哪些格是布尔格。
【解】含有 5 个元素的互不同构的格有 5 个，如下图所示

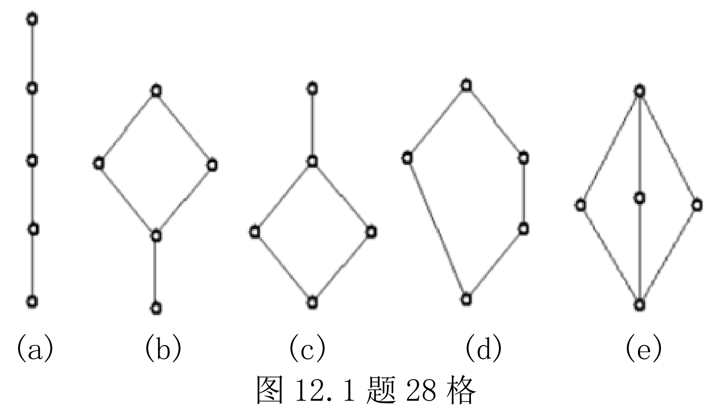


图 12.1 题 28 格

如图所示图 12.1 所示(a)、(b)、(c)是分配格，(d)、(e)是有补格，无布尔格。

29. 给出三个具有六个元素的格，使得其中一个是分配格，一个不是分配格但是模格，一个既不是分配格也不是模格。

【解】

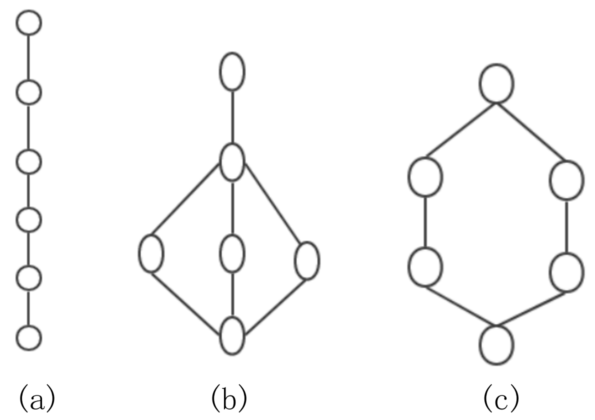


图 12.2 题 29 格

如图 12.2 所示(a)是分配格。(b)不是分配格但是模格，(c)即不是分配格也不是模格。

30. 设$\langle A,\le\rangle$是一格，B是A的子集，对于任意给定$a\in A$，$B=\{x|x\in A,x\le a\}$，证明：B是A的子格。

本题与第 25 题相同。

31. 设A,B是两个集合，f：$A\to B$是一函数。证明：$\langle S,\subseteq\rangle$是$\langle\rho(B),\subseteq\rangle$的子格，$S=\{y|y=f(x),x\in\rho(A)\}$，$\rho(A)$是$A$的幂集。

【解】略

32. 证明：对于任意格，满足若有$a\le b\le c$必有

$$(a\wedge b)\vee(b\wedge c)=(a\vee b)\wedge(b\vee c)=b。$$

【证明】由$a\le b$得$a\vee b=b$，而由$b\le c$得$b\wedge c=b$，所以

$$(a\wedge b)\vee(b\wedge c)=(a\wedge b)\vee b=b,$$

由$a\vee b=b,b\vee c=c$得$(a\vee b)\wedge(b\vee c)=b\wedge c=b$，所以

$$(a\wedge b)\vee(b\wedge c)=(a\vee b)\wedge(b\vee c)=b\text{得证。}$$

33. 设$\langle A,\le\rangle$是一布尔格，其对应的布尔函数为$\langle A,\vee,\wedge,-,0,1\rangle$，对任意$a,b,c\in A$，试化简以下的表达式。

(1) $((\bar a\vee b)\wedge(\bar b\vee a))\vee\bar b$;

【解】$((\bar a\vee b)\wedge(\bar b\vee a))\vee\bar b$

$=((\bar a\vee b)\vee\bar b)\wedge((\bar b\vee a)\vee\bar b)$ $=1\wedge(\bar b\vee a)$=$\bar b\vee a$

(2) $((\bar a\vee b)\wedge\bar a)\vee((\bar b\vee a)\vee\bar b))$

【解】$((\bar a\vee b)\wedge\bar a)\vee((\bar b\vee a)\vee\bar b))$

$=((\bar a\vee b)\wedge\bar a)\vee(\bar b\vee a)$=$((\bar a\vee b)\vee(\bar b\vee a))\wedge(\bar a\vee(\bar b\vee a))$=$1\wedge(\bar a\vee(\bar b\vee a))$=1

34. 设$\langle\{0,1\},\vee,\wedge,-\rangle$是一布尔代数，求出下列表达式的析取、合取范式。

(1) $(a\vee b\vee\bar c)\wedge\bar d$; (2) $(\bar b\wedge\bar c)\vee\bar d\vee(a\wedge b)$; (3) $(\bar c\wedge\bar d\wedge a)\vee b$

【解】(1) $(a\vee b\vee\bar c)\wedge\bar d$(合取范式)=$(a\wedge\bar d)\vee(b\wedge\bar d)\vee(\bar c\wedge\bar d)$(析取范式)

(2) $(\bar b\wedge\bar c)\vee\bar d\vee(a\wedge b)$(析取范式)=$((\bar b\vee\bar d)\wedge(\bar c\vee\bar d))\vee(a\wedge b)$

$=((\bar b\vee\bar d)\vee(a\wedge b))\wedge((\bar c\vee\bar d)\vee(a\wedge b))$

$=((\bar{b}\vee\bar{d}\vee a)\wedge(\bar{b}\vee\bar{d}\vee b))\wedge((\bar{c}\vee\bar{d}\vee a)\wedge(\bar{c}\vee\bar{d}\vee b))$

$=(\bar{b}\vee\bar{d}\vee a)\wedge(\bar{c}\vee\bar{d}\vee a)\wedge(\bar{c}\vee\bar{d}\vee b)$ 合取范式

(3) $(\bar{c}\wedge\bar{d}\wedge a)\vee b$(析取范式)$=(\bar{c}\vee b)\wedge(\bar{d}\vee b)\wedge(a\vee b)$(合取范式)

35. 证明下列布尔恒等式。

（1）$a\oplus(a'*b)=a\oplus b$；

【证明】$a\oplus(a'*b)=(a\oplus a')*(a\oplus b)=1*(a\oplus b)=a\oplus b$

（2）$a*(a'\oplus b)=a*b$

【证明】$a*(a'\oplus b)=(a*a')\oplus(a*b)=0\oplus(a*b)=a*b$

（3）$(a*c)\oplus(a'*b)\oplus(b*c)=(a*c)\oplus(a'*b)$

【证明】$((a\oplus a')*(a\oplus b)*(c\oplus a')*(c\oplus b))\oplus(b*c)$

$=\big(1*(a\oplus b)*(c\oplus a')*(c\oplus b)\big)\oplus(b*c)$

$=((a\oplus b)*(c\oplus a')*(c\oplus b))\oplus(b*c)$

$=((a\oplus b)\oplus(b*c))*((c\oplus a')\oplus(b*c))*((c\oplus b)\oplus(b*c))$

$=(a\oplus b\oplus b)\oplus(a\oplus b\oplus c)*(c\oplus a'\oplus b)*(c\oplus a'\oplus c)*(c\oplus b\oplus b)*(c\oplus b\oplus c)$

$=(a\oplus b)\oplus(a\oplus b\oplus c)*(c\oplus a'\oplus b)*(a'\oplus c)*(c\oplus b)*(b\oplus c)$

$=(a\oplus b)\oplus(a'\oplus c)*(c\oplus b)*(a\oplus a')$

$=((a\oplus b)*(a\oplus a'))*((a'\oplus c)*(c\oplus b))$

$=(a\oplus(a'*b))*(c\oplus(a'*b))$

$=(a*c)\oplus(a'*b)$

（4）$(a\oplus b')*(b\oplus c')*(c\oplus a')=(a'\oplus b)*(b'\oplus c)*(c'\oplus a)$

【证明】左边$=(a\oplus b')*(b\oplus c')*(c\oplus a')$

$=((a*b)\oplus(a*c')\oplus(b*b')\oplus(b'*c'))*(c\oplus a')$

$=((a*b)\oplus(a*c')\oplus 0\oplus(b'*c'))*(c\oplus a')$

$=((a*b)\oplus(a*c')\oplus(b'*c'))*(c\oplus a')$

$=((a*b)*(c\oplus a'))\oplus((a*c')*(c\oplus a'))\oplus((b'*c')*(c\oplus a'))$

$=((a*b*c)\oplus(a*b*a'))\oplus((a*c'*c)\oplus(a*c'*a'))\oplus((b'*c'*c)\oplus(b'*c'*a'))$

$=((a*b*c)\oplus 0)\oplus(0\oplus 0)\oplus(0\oplus(b'*c'*a'))$

$=(a*b*c)\oplus(b'*c'*a')$

右边$=(a'\oplus b)*(b'\oplus c)*(c'\oplus a)$

$=((a'*b')\oplus(a'*c)\oplus(b*b')\oplus(b*c))*(c'\oplus a)$

$=((a'*b')\oplus(a'*c)\oplus(b*c))*(c'\oplus a)$

$=(a'*b'*c')\oplus(a'*b'*a)\oplus(a'*c*c')\oplus(a'*c*a)\oplus(b*c*c')\oplus(b*c*a)$

$=(a*b*c)\oplus(b'*c'*a')$

左边=右边，即等式成立。

（5）$(a\oplus b)\oplus(a'*c)\oplus(b'*c)=(a*b)\oplus c$

【证明】$(a\oplus b)\oplus(a'*c)\oplus(b'*c)=(a*b)\oplus((a'\oplus b')*c)$

$=((a*b)\oplus(a'\oplus b'))*((a*b)\oplus c)$

$=(a\oplus a'\oplus b')*(b\oplus a'\oplus b')*((a*b)\oplus c)$

$=1*(a*b)\oplus c$

$=(a*b)\oplus c$