合肥工业大学试卷（A）参考答案

2015～2016 学年第 二 学期 课程代码 1400071B 课程名称 线性代数 学分 2.5 课程性质：必修☑、选修□、限修□ 考试形式:开卷□、闭卷☑

专业班级（教学班）＿＿＿＿＿ 考试日期＿＿＿＿＿ 命题教师 集体 系（所或教研室）主任审批签名＿＿＿＿＿

一、填空题（每小题 4 分，共 20 分）

1. $x=1,2,3$; 2. $\dfrac{1}{125}$；3. 1；4. 1；$k_1\begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix}+k_2\begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}$；5. $-2\sqrt{3}<a<2\sqrt{3}.$

二、选择题（每小题 4 分，共 20 分）

D C D A B

三、（**8** 分）

解:方法一:由行列式定义

$$D_n=\begin{vmatrix}0&\cdots&0&1&0\\0&\cdots&2&0&0\\\vdots&\cdots&\vdots&\vdots&\vdots\\n-1&\cdots&0&0&0\\0&\cdots&0&0&n\end{vmatrix}=\sum(-1)^t a_{1j_1}a_{2j2}\cdots a_{nj_n}=(-1)^{t(n-1n-2\cdots1n)}n!=(-1)^{\frac{(n-1)(n-2)}{2}}n!$$

四、（**10** 分）

解: $|P|=-1\neq 0, P$ 可逆，用初等行变换求出 P^{-1}

$$\begin{pmatrix}1&0&0&1&0&0\\2&-1&0&0&1&0\\2&1&1&0&0&1\end{pmatrix}\overset{r}{\sim}\begin{pmatrix}1&0&0&1&0&0\\0&1&0&2&-1&0\\0&0&1&-4&1&1\end{pmatrix},\text{则 }P^{-1}=\begin{pmatrix}1&0&0\\2&-1&0\\-4&1&1\end{pmatrix},$$

$$A=PBP^{-1}=\begin{pmatrix}1&0&0\\2&-1&0\\2&1&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0&0\\0&0&0\\0&0&-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0&0\\2&-1&0\\-4&1&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0&0\\2&0&0\\6&-1&-1\end{pmatrix}$$

$A^5=PB^5P^{-1}=PBP^{-1}=A$

五、（**8** 分）

解: $|A-3I|=\begin{vmatrix}-3&1&0&0\\1&-3&0&0\\0&0&y-3&1\\0&0&1&-1\end{vmatrix}=8(2-y)=0$，所以 $y=2$.

六、（**8** 分）

解: $|A+B|=|\alpha_1+\alpha_2,2\beta_1,2\beta_2,2\beta_3|=8(|\alpha_1,\beta_1,\beta_2,\beta_3|+|\alpha_2,\beta_1,\beta_2,\beta_3|)=8\times(1+4)=40.$

七、（**8** 分）

证明: (1) α_1 能由 α_2,α_3 线性表示.

因为已知向量组 $\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$ 线性无关, 故其部分组 α_2,α_3 也线性无关, 又知向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 线性相关, 所以 α_1 能由 α_2,α_3 线性表示.

(2) α_4 不能由 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 线性表示.

用反证法, 设 α_4 能由 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 线性表示, 即存在常数 $\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3$, 使得 $\alpha_4=\lambda_1\alpha_1+\lambda_2\alpha_2+\lambda_3\alpha_3$,

又由(1)知 α_1 能由 α_2,α_3 线性表示, 即有 $\alpha_1=\mu_2\alpha_2+\mu_3\alpha_3$, 代入上式得

$\alpha_4=\lambda_1\alpha_1+\lambda_2\alpha_2+\lambda_3\alpha_3=\lambda_1(\mu_2\alpha_2+\mu_3\alpha_3)+\lambda_2\alpha_2+\lambda_3\alpha_3=(\lambda_1\mu_2+\lambda_2)\alpha_2+(\lambda_1\mu_3+\lambda_3)\alpha_3$，即 α_4 能由 α_2,α_3 线性表示, 从而向量组 $\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$ 线性相关, 与已知矛盾, 所以 α_4 不能由 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 线性表示.

八、（**12** 分）

解: $f(x)=x^TAx$，其中 $A=\begin{pmatrix}2&0&0\\0&3&a\\0&a&3\end{pmatrix}$, 特征值 $\lambda_1=1,\lambda_2=2,\lambda_3=5$, 则 $|A|=1\times2\times5=10$，又

$|A|=18-2a^2$, 所以 $18-2a^2=10$, 得 $\alpha=\pm2$, 又 $\alpha>0$, 则 $\alpha=2$，此时 $A=\begin{pmatrix}2&0&0\\0&3&2\\0&2&3\end{pmatrix}$,

$\lambda_1=1$，解 $(A-E)x=\theta$，得 $\alpha_1=\begin{pmatrix}0\\1\\-1\end{pmatrix}$，单位化 $\beta_1=\begin{pmatrix}0\\1/\sqrt{2}\\-1/\sqrt{2}\end{pmatrix}$,

$\lambda_2=2$，解 $(A-2E)x=\theta$，得 $\alpha_2=\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}$，单位化 $\beta_2=\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}$,

$\lambda_3=5$，解 $(A-5E)x=\theta$，得 $\alpha_1=\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}$，单位化 $\beta_3=\begin{pmatrix}0\\1/\sqrt{2}\\1/\sqrt{2}\end{pmatrix}$,

2015～2016 学年第 二 学期 课程代码 1400071B 课程名称 线性代数 学分 2.5 课程性质：必修☑、选修☐、限修☐ 考试形式:开卷☐、闭卷☑

专业班级（教学班）________ 考试日期________ 命题教师 集体 系（所或教研室）主任审批签名________

取 $P=(\beta_1,\beta_2,\beta_3)$， 则 $P^TAP=\begin{pmatrix}1 & & \\ & 2 & \\ & & 5\end{pmatrix}$, $P=\begin{pmatrix}0 & 1 & 0\\ 1/\sqrt{2} & 0 & 1/\sqrt{2}\\ -1/\sqrt{2} & 0 & 1/\sqrt{2}\end{pmatrix}$为所求正交变换矩阵。

九、（**6** 分）

证明：由 $A=BC$，则 $R(A)=R(BC)\le\min\{R(B),R(C)\}$，又 $|A|\ne 0$，所以 $R(A)=n\le R(B)\le\min(n,k)$

即 $R(B)=n$， B^T 为 $k\times n$ 矩阵， $R(B^T)=R(B)=n$，所以 $B^Tx=0$ 只有零解。