§5.2　相似矩阵

相似矩阵的定义:

定义：设 A, B 都是 n 阶矩阵，若存在可逆矩阵 P 使得

$$P^{-1}AP = B\ ,$$

则称矩阵A相似于矩阵 B，或称矩阵A与矩阵B相似.

运算$P^{-1}AP$称为对A作相似变换.

可逆矩阵P 称为相似变换矩阵.

矩阵相似的性质

- 反身性：A与A相似
- 对称性：若A与B相似，则B与A相似
- 传递性：若A与B相似，B与C相似，则A与C相似

矩阵的相似关系是一种等价关系.

相似与等价的关系

（1）若A与B相似（$P^{-1}AP=B$），则A，B等价（$PAQ=B$）；

（2）若A与B等价，则A，B未必相似.

反例：取 $A=E=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix},B=\begin{pmatrix}1&1\\0&1\end{pmatrix}$

则A与B等价，但A，B不相似.

(因为对任意的可逆矩阵P，$P^{-1}AP=P^{-1}EP=E\neq B$.)

矩阵相似的性质

定理： 设n阶矩阵A与B相似，则有

（1）$R(A)=R(B)$;

（2）$|A|=|B|$;

（3）A和B等价;

（4）当它们可逆时，它们的逆矩阵也相似;

（5）A^T与B^T相似;

（6）A^k与B^k相似;

（7）A^*与B^*相似;

（8）$tr(A)=tr(B)$

定理： 相似矩阵具有相同的特征多项式、特征值.

$\because P^{-1}AP = B$

$\therefore |B-\lambda E| = |P^{-1}AP-\lambda E| = |P^{-1}(A-\lambda E)P| = |A-\lambda E|$

注： 上述定理的逆命题不成立.

设 $A=\begin{pmatrix}1 & 0\\0 & 1\end{pmatrix}, B=\begin{pmatrix}1 & 1\\0 & 1\end{pmatrix}$，则它们特征多项式相同，

但它们不相似.

推论: 若矩阵A与对角矩阵$\Lambda=\begin{pmatrix}\lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n\end{pmatrix}$相似,

则 $\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n$是$A$的$n$个特征值.

例： 若4阶方阵A与B相似，A的特征值为1，2，3，4. 则$|B+E|$=____________.

解： $B+E$的特征值为2，3，4，5. 因此有$|B+E|=120$.

相似对角化问题（方阵何时与对角矩阵相似？）

定义： 对n阶矩阵A，若存在可逆矩阵P，使得

$$P^{-1}AP=\Lambda=\begin{pmatrix}\lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n\end{pmatrix}=diag(\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n)$$

称方阵A能相似对角化.

矩阵可对角化的条件

定理： n阶矩阵A与对角矩阵相似（A可对角化）

$\Leftrightarrow A$有n个线性无关的特征向量.

若n 阶矩阵 A 与对角阵相似（A可对角化）

$\Rightarrow P^{-1}AP=\Lambda \quad \Rightarrow AP=P\Lambda \qquad set\ P=(p_1,p_2,\cdots,p_n)$

$$\Leftrightarrow A(p_1,p_2,\cdots,p_n)=(p_1,p_2,\cdots,p_n)\begin{pmatrix}\lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n\end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow (Ap_1,Ap_2,\cdots,Ap_n)=(\lambda_1 p_1,\lambda_2 p_2,\cdots,\lambda_n p_n)$$

即若 $P^{-1}AP=\Lambda$，则 λ_i 为A的特征值，P 的第 i 个列向量为A的属于λ_i 的特征向量，可逆矩阵P的n个列向量为A的n个线性无关的特征向量.

$\boxed{可逆矩阵 P}$，满足 $P^{-1}AP = \Lambda$（对角阵）

$\Updownarrow$?

矩阵 P 的列向量组线性无关

$AP = P\Lambda$

$\Updownarrow$

$Ap_i = \lambda_i p_i \ (i = 1, 2, \ldots, n) \iff (A-\lambda_i E)\, p_i = 0$

A 的特征值

对应的特征向量

其中

$$A(p_1, p_2, \cdots, p_n) = (p_1, p_2, \cdots, p_n)\begin{pmatrix} \lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n \end{pmatrix}$$

推论: 若n阶方阵A有n个互不相同的特征值，则A可对角化（与对角矩阵相似）.

（逆命题不成立）

定理： 设n阶方阵A的互不相同的特征值为$\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_s$，它们的重数分别为$r_1,r_2,\cdots,r_s(r_1+r_2+\cdots+r_s=n)$，则$A$可对角化的**充要条件**为$A$的每个$r_i$重特征值$\lambda_i$都恰好对应$r_i$个线性无关的特征向量，**亦即$A$可对角化的充要条件是**

$$R(A-\lambda_i E)=n-r_i, i=1,2,\cdots,s.$$

例　设n阶方阵A, B相似，则(　　)

（A）　对任意常数t，$A-tE$与$B-tE$相似

（B）　A, B具有相同的特征值和特征向量

（C）　A, B都相似于一个对角矩阵

（D）　$A-tE=B-tE$

例：判断下列矩阵 A 能否分别相似对角化：

（1）A是二阶矩阵，且$|A|<0$.

答案：（1）有两个异号（不同）的特征值，能相似对角化.

（2）$A=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

答案：（2）有三个不同的特征值1，3，0，能相似对角化.

（3）$A=\begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ -4 & 1 & 3 \end{pmatrix}$

答案：（3）虽然特征值为-1，2，2，但有三个线性无关的特征向量，能相似对角化.

（4）$A=\begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ -4 & 3 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$

答案：（4）（参见上节例）虽然特征值为2，1，1，但没有三个线性无关的特征向量，不能相似对角化.

例： 下列矩阵不能相似于对角阵的是（　）

（A）$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$　　（B）$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$

（C）$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$　　（D）$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 3 \end{pmatrix}$

例： 问 $A=\begin{pmatrix}1&1&1\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}$ 能否对角化？若能，求出一个可逆阵P，使得$P^{-1}AP=\Lambda$.

解： 由于A为上三角矩阵，故A的特征值为 $\lambda_1=1,\lambda_2=\lambda_3=0$.

当$\lambda_1=1$时，$(A-E)x=\begin{pmatrix}0&1&1\\0&-1&0\\0&0&-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$，取$p_1=\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}$

当$\lambda_2=\lambda_3=0$时，$Ax=\begin{pmatrix}1&1&1\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$

取 $p_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, p_3 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

所以A有三个线性无关的特征向量，故A可相似对角化，且

$$P = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

例：设 $A=\begin{pmatrix} 2 & 2 & 0 \\ 8 & 2 & a \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix}$相似于对角矩阵$\Lambda$，求常数$a$的值.

解：

$$|A-\lambda E|=\begin{vmatrix} 2-\lambda & 2 & 0 \\ 8 & 2-\lambda & a \\ 0 & 0 & 6-\lambda \end{vmatrix}=-(2+\lambda)(6-\lambda)^2=0,$$

$$\lambda_1=\lambda_2=6,\ \lambda_3=-2$$

因为A可相似对角化，故对应单根 $\lambda_3=-2$，可求出线性无关的特征向量恰有一个，而对应二重根 $\lambda_1=\lambda_2=6$ 应有两个线性无关的特征向量，即方程组$(A-6E)x=0$有两个线性无关的解，

所以 $R(A-6E)=1.$

当 $\lambda=6$ 时，

$$A-6E=\begin{pmatrix} -4 & 2 & 0 \\ 8 & -4 & a \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & a \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

故$a=0$.