第三章　向量组

§3.1 向量组的线性表示

定义： n个数$a_1,a_2,\cdots,a_n$组成的有序数组

$$(a_1,a_2,\cdots,a_n)$$ 行向量

或

$$\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}$$ 列向量

称为维数为n的向量，简称**n维向量**，第i个数a_i称为此向量的第i个分量.

- 分量全为实数的向量称为**实向量**.
- 分量全为复数的向量称为**复向量**.

定义: 如果向量α和 β 维数相同且对应分量都相等，则称这两个向量相等，记作 $\alpha = \beta$.

备注:

- ✓ 本书一般只讨论实向量（特别说明的除外）.
- ✓ 行向量和列向量总被看作是两个不同的向量.
- ✓ 所讨论的向量在没有指明是行向量还是列向量时，都当作列向量.
- ✓ 本书中，列向量用黑色小写字母α,β,γ等表示，行向量则用 $\alpha^T,\beta^T,\gamma^T$ 表示.

一、向量的线性运算

定义：向量的加法，减法和数乘运算和矩阵相同.

向量运算的性质：

(1) $\alpha+\beta=\beta+\alpha$

(2) $\alpha+(\beta+\gamma)=(\alpha+\beta)+\gamma$

(3) $\alpha+0=\alpha$

(4) $\alpha+(-\alpha)=0$

(5) $k(\alpha+\beta)=k\alpha+k\beta$

(6) $(k+l)\alpha=k\alpha+l\alpha$

(7) $k(l\alpha)=(kl)\alpha$

(8) $1\cdot\alpha=\alpha$

例: 设 $\alpha_1=\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix},\alpha_2=\begin{pmatrix}-1\\2\\3\end{pmatrix},\alpha_3=\begin{pmatrix}1\\-2\\-4\end{pmatrix}$, 计算 $2\alpha_1+\alpha_2-\alpha_3$.

解:

$$2\alpha_1+\alpha_2-\alpha_3=2\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}-1\\2\\3\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}1\\-2\\-4\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}0\\4\\9\end{pmatrix}$$

向量组: 若干个**同维数**的行（列）向量所组成的集合，称为向量组.

$$\alpha_1=\begin{pmatrix}1\\2\\3\\4\end{pmatrix},\alpha_2=\begin{pmatrix}2\\3\\4\\5\end{pmatrix},\alpha_3=\begin{pmatrix}3\\4\\5\\6\end{pmatrix}$$ 是3个四维的列向量组.

$$\beta_1^T=(1,2,3),\beta_2^T=(2,3,4),\beta_3^T=(3,4,5),\beta_4^T=(4,5,6)$$

是4个三维的行向量组.

向量组和矩阵的关系

对于列向量组

$$\alpha_1=\begin{pmatrix}1\\2\\3\\4\end{pmatrix},\alpha_2=\begin{pmatrix}2\\3\\4\\5\end{pmatrix},\alpha_3=\begin{pmatrix}3\\4\\5\\6\end{pmatrix}\leftrightarrow(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)=\begin{pmatrix}1&2&3\\2&3&4\\3&4&5\\4&5&6\end{pmatrix}$$

对于行向量组

$$\beta_1^T=(1,2,3)$$
$$\beta_2^T=(2,3,4)$$
$$\beta_3^T=(3,4,5)$$
$$\beta_4^T=(4,5,6)$$

$$\leftrightarrow\begin{pmatrix}\beta_1^T\\\beta_2^T\\\beta_3^T\\\beta_4^T\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&2&3\\2&3&4\\3&4&5\\4&5&6\end{pmatrix}$$

反过来看:

即矩阵的

特殊分块

非齐次方程组的向量表示

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow (\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n) \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \beta$$

$$\Leftrightarrow x_1\alpha_1 + x_2\alpha_2 + \cdots + x_n\alpha_n = \beta$$

齐次方程组的向量表示

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow (\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n) \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = 0$$

$$\Leftrightarrow x_1\alpha_1 + x_2\alpha_2 + \cdots + x_n\alpha_n = 0$$

二、向量的线性表示

定义: 给定向量组 $\alpha_1,\alpha_2\cdots,\alpha_m$ 和向量 β，如果存在一组实数 $x_1,x_2,\cdots,x_m$，使得

$$\beta=x_1\alpha_1+x_2\alpha_2+\cdots+x_m\alpha_m$$

则向量 β 是向量组 $\alpha_1,\alpha_2\cdots,\alpha_m$ 的线性组合，这时称**向量 β 能由向量组 $\alpha_1,\alpha_2\cdots,\alpha_m$ 线性表示**.

例：设 $E=(e_1,e_2,e_3)=\left(\begin{array}{c|c|c}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{array}\right)$

e_1, e_2, e_3的线性组合

那么 $b=\begin{pmatrix}2\\3\\7\end{pmatrix}=2\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}+3\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}+7\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}=2e_1+3e_2+7e_3$

线性组合的系数

一般地，对于任意的 n 维向量b ，必有

$$b=\begin{pmatrix}b_1\\b_2\\b_3\\\vdots\\b_n\end{pmatrix}=b_1\begin{pmatrix}1\\0\\0\\\vdots\\0\end{pmatrix}+b_2\begin{pmatrix}0\\1\\0\\\vdots\\0\end{pmatrix}+b_3\begin{pmatrix}0\\0\\1\\\vdots\\0\end{pmatrix}\cdots+b_n\begin{pmatrix}0\\0\\0\\\vdots\\1\end{pmatrix}$$

$$b = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} = b_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} + b_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} + b_3 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \cdots + b_n \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}$$

n 阶单位矩阵 E_n 的列向量叫做 n 维单位坐标向量.

注：①零向量可由任一和其相同维数的向量组线性表示

②任一n维向量都可以由n维单位坐标向量组线性表示

$$\varepsilon_1=\begin{pmatrix}1\\0\\0\\\vdots\\0\end{pmatrix},\varepsilon_2=\begin{pmatrix}0\\1\\0\\\vdots\\0\end{pmatrix},\cdots,\varepsilon_n=\begin{pmatrix}0\\0\\0\\\vdots\\1\end{pmatrix}$$

向量组等价

定义：设有向量组 $A: \alpha_1, \alpha_2 \cdots, \alpha_m$ 及 $B: \beta_1, \beta_2 \cdots, \beta_l$，若向量组 B 中的每个向量都能由向量组 A 线性表示，则称向量组 B 能由向量组 A 线性表示.

若向量组 A 与向量组 B 能互相线性表示，则称这两个向量组等价.

向量组等价关系具有下列性质:

反身性 $A \sim A$;

对称性 若$A \sim B$, 则 $B \sim A$;

传递性 若$A \sim B$, $B \sim C$, 则 $A \sim C$.

注1：向量组B由向量组A表示的矩阵表示

列向量组 $B:\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_l$ 能由 $A:\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m$ 线性表示，则

$$\begin{cases}\beta_1=k_{11}\alpha_1+k_{21}\alpha_2+\cdots+k_{m1}\alpha_m\\ \beta_2=k_{12}\alpha_1+k_{22}\alpha_2+\cdots+k_{m2}\alpha_m\\ \qquad\cdots\\ \beta_l=k_{1l}\alpha_1+k_{2l}\alpha_2+\cdots+k_{ml}\alpha_m\end{cases}$$

即存在 $m\times l$ 的矩阵K，使得

$$(\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_l)=(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m)\begin{pmatrix}k_{11}&k_{12}&\cdots&k_{1l}\\ k_{21}&k_{22}&\cdots&k_{2l}\\ \cdots&\cdots&\cdots&\cdots\\ k_{m1}&k_{m2}&\cdots&k_{ml}\end{pmatrix}$$

$\leftrightarrow B=AK$（ K 称为系数矩阵）

注2：若$AB=C$，则

C 的列向量组可由A的列向量组线性表示，（$AB=C$）

C 的行向量组可由B的行向量组线性表示，（$AB=C$）

注3：矩阵A经过初等行变换变成矩阵B，则A的行向量组与B的行向量组等价. 但列向量组未必等价.

证明思路：存在可逆矩阵P，使得$PA=B$，即$A=P^{-1}B$.

注4：矩阵A经过初等列变换变成矩阵B，则A的列向量组与B的列向量组等价. 但行向量组未必等价.

证明思路：存在可逆矩阵Q，使得$AQ=B$，即$A=BQ^{-1}$.

矩阵等价与向量组等价的区别

（1）向量组等价不能确定向量组构成的矩阵等价

反例：向量组 B: $\beta_1=(-1,0,0)^T,\beta_2=(0,2,0)^T,\beta_3=(1,1,0)^T$

与向量组 $A:\alpha_1=(1,0,0)^T,\alpha_2=(0,1,0)^T$ 等价，

但矩阵 $B=(\beta_1,\beta_2,\beta_3)=\begin{pmatrix}-1&0&1\\0&2&1\\0&0&0\end{pmatrix}$ 与矩阵

$A=(\alpha_1,\alpha_2)=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\\0&0\end{pmatrix}$ 不等价.　　不同型

（2）矩阵等价不能确定其行（列）向量组等价

反例： 虽然矩阵 $B=(\beta_1,\beta_2)=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\\0&0\end{pmatrix}$ 与矩阵

$A=(\alpha_1,\alpha_2)=\begin{pmatrix}0&0\\0&1\\1&0\end{pmatrix}$ 等价.

但向量组 B: $\beta_1=(1,0,0)^T,\beta_2=(0,1,0)^T$

与向量组 $A:\alpha_1=(0,0,1)^T,\alpha_2=(0,1,0)^T$ 不等价.