§2　矩阵的运算

阿瑟·凯莱（Arthur Cayley） (1821-1895), 英国数学家. 1858 年他在《矩阵论的研究报告》中建立了矩阵的各种运算.

一、矩阵的加法

定义: 设有两个 $m \times n$ 矩阵 $A=(a_{ij})$，$B=(b_{ij})$，那么矩阵 A 与 B 的和记作 $A+B$，规定为

$$A+B=\begin{pmatrix} a_{11}+b_{11} & a_{12}+b_{12} & \cdots & a_{1n}+b_{1n} \\ a_{21}+b_{21} & a_{22}+b_{22} & \cdots & a_{2n}+b_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1}+b_{m1} & a_{m2}+b_{m2} & \cdots & a_{mn}+b_{mn} \end{pmatrix}$$

说明: 只有当两个矩阵是同型矩阵时，才能进行加法运算.

知识点比较

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & b_{12} & a_{13} \\ a_{21} & b_{22} & a_{23} \\ a_{31} & b_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12}+b_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22}+b_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32}+b_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a_{11} & b_{12} & a_{13} \\ a_{21} & b_{22} & a_{23} \\ a_{31} & b_{32} & a_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2a_{11} & a_{12}+b_{12} & 2a_{13} \\ 2a_{21} & a_{22}+b_{22} & 2a_{23} \\ 2a_{31} & a_{32}+b_{32} & 2a_{33} \end{pmatrix}$$

矩阵加法的运算规律

	$\forall a,b,c\in R$	设 A、B、C 是同型矩阵
交换律	$a+b=b+a$	$A+B=B+A$
结合律	$(a+b)+c=a+(b+c)$	$(A+B)+C=A+(B+C)$
其他	设矩阵 $A=(a_{ij})$，记 $-A=(-a_{ij})$，称为矩阵 A 的负矩阵. 显然 $$A+(-A)=O,\quad A-B=A+(-B)$$	

二、数与矩阵相乘

定义: 数 λ 与矩阵 A 的乘积记作 λA 或 $A\lambda$，规定为

$$\lambda A = A\lambda = \begin{pmatrix} \lambda a_{11} & \lambda a_{12} & \cdots & \lambda a_{1n} \\ \lambda a_{21} & \lambda a_{22} & \cdots & \lambda a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \lambda a_{m1} & \lambda a_{m2} & \cdots & \lambda a_{mn} \end{pmatrix}$$

数乘矩阵的运算规律

	$\forall a,b,c \in R$	设 A、B是同型矩阵，λ，μ是数
结合律	$(ab)c = a(bc)$	$(\lambda\mu)A = \lambda(\mu A)$
分配律	$(a+b)\cdot c = ac+bc$ $c\cdot(a+b) = ca+cb$	$(\lambda+\mu)A = \lambda A+\mu A$ $\lambda(A+B) = \lambda A+\lambda B$
备注	矩阵相加与数乘矩阵合起来，统称为**矩阵的线性运算**.	

知识点比较

$$\lambda\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \lambda a_{11} & \lambda a_{12} & \lambda a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \lambda a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & \lambda a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & \lambda a_{33} \end{vmatrix}$$

$$\lambda\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda a_{11} & \lambda a_{12} & \lambda a_{13} \\ \lambda a_{21} & \lambda a_{22} & \lambda a_{23} \\ \lambda a_{31} & \lambda a_{32} & \lambda a_{33} \end{pmatrix}$$

三、矩阵与矩阵相乘

定义： 设 $A=(a_{ij})_{m\times s}$ ，$B=(b_{ij})_{s\times n}$ ，那么规定矩阵 A 与矩阵 B 的乘积是一个 $m\times n$ 矩阵 $C=(c_{ij})$，其中

$$c_{ij}=a_{i1}b_{1j}+a_{i2}b_{2j}+\cdots+a_{is}b_{sj}=\sum_{k=1}^{s}a_{ik}b_{kj}$$

$$(i=1,2,\cdots,m;\ j=1,2,\cdots,n)$$

即：

$$\begin{pmatrix} & & \\ a_{i1} & \cdots & a_{is} \\ & & \end{pmatrix}_{m\times s}\begin{pmatrix} & b_{1j} & \\ & \vdots & \\ & b_{sj} & \end{pmatrix}_{s\times n}=\begin{pmatrix} & & \\ & c_{ij} & \\ & & \end{pmatrix}_{m\times n},$$

并把此乘积记作 $C=AB$. 要点：左行右列

例：设 $A=\begin{pmatrix}1&0&-1&2\\-1&1&3&0\\0&5&-1&4\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}0&3&4\\1&2&1\\3&1&-1\\-1&2&1\end{pmatrix}$

则 $AB=\begin{pmatrix}-5&6&7\\10&2&-6\\-2&17&10\end{pmatrix}$

知识点比较

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{vmatrix}$$ 有意义.

只有当第一个矩阵的列数等于第二个矩阵的行数时，两个矩阵才能相乘.

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{pmatrix}$$ 没有意义.

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 6 & 9 \\ 2 & 4 & 6 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

例

$$\begin{pmatrix} -2 & 4 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}_{2\times 2} \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ -3 & -6 \end{pmatrix}_{2\times 2} = \begin{pmatrix} -16 & -32 \\ 8 & 16 \end{pmatrix}_{2\times 2}$$

$$\begin{pmatrix} 2 & 4 \\ -3 & -6 \end{pmatrix}_{2\times 2} \begin{pmatrix} -2 & 4 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}_{2\times 2} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}_{2\times 2}$$

结论:

1. 矩阵乘法不满足交换律.
2. 矩阵 $A \neq O, B \neq O$ ，却有 $AB = O$ ，
   从而不能由 $AB = O$ 得出 $A = O$ 或 $B = O$ 的结论.
3. 矩阵乘法不满足消去律.

矩阵乘法的运算规律

(1) 乘法结合律 $(AB)C = A(BC)$

(2) 数乘和乘法的结合律 $\lambda(AB) = (\lambda A)B$（其中 λ 是数）

(3) 乘法对加法的分配律

$$A(B+C) = AB + AC \qquad (B+C)A = BA + CA$$

(4) 单位矩阵在矩阵乘法中的作用类似于数1，即

$$E_m A_{m\times n} = A_{m\times n} E_n = A$$

纯量阵不同于对角阵

推论: 矩阵乘法不一定满足交换律，但是纯量阵 λE 与任何同阶方阵都是可交换的.

例　设A，B为$n(n>1)$阶方阵，则$A+AB=$（　　　　　）.

(A) $A(1+B)$　　　　(B) $(E+B)A$

(C) $A(E+B)$　　　　(D) 前三个都对

(5) 矩阵的幂　若 A 是 n 阶方阵，定义

$$A^k = \underbrace{AA\cdots A}_{k}$$

显然　$A^kA^l = A^{k+l}$，$(A^k)^l = A^{kl}$

思考：下列等式在什么时候成立？

$$\left.\begin{aligned}&(AB)^k = A^kB^k\\&(A+B)^2 = A^2+2AB+B^2\\&(A+B)(A-B) = A^2-B^2\end{aligned}\right\}$$ A、B可交换时成立

例 计算 $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^n$

解： 设 $A=\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$，则 $A^2=\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

方法一

$$A^3=A^2\cdot A=\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

故猜测 $A^n=\begin{pmatrix} 1 & n \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

数学归纳法

(1) 由上述分析知，当n=2时结论成立，

(2) 假设n=k时结论成立，即 $A^k=\begin{pmatrix}1 & k\\0 & 1\end{pmatrix}$

(3) 则n=k+1时，

$$A^{k+1}=A^k\cdot A=\begin{pmatrix}1 & k\\0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 1\\0 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & k+1\\0 & 1\end{pmatrix}$$

也成立.

故由数学归纳法知，对任意的 $n\in Z^+, A^n=\begin{pmatrix}1 & n\\0 & 1\end{pmatrix}$.

方法二：拆项法

$$A=\begin{pmatrix}1&1\\0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix}=E+B$$

且 $B^2=O$，故 $B^n=O,n\geq 2.$

因此，

$$A^n=(E+B)^n=E^n+nE^{n-1}B+\cdots+B^n$$
$$=E+nEB=\begin{pmatrix}1&n\\0&1\end{pmatrix}.$$

练习 设

$$A=\begin{pmatrix}1 & 1 & 0\\ 0 & 1 & 1\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$$

求 A^n.

四、矩阵的转置

定义: 把矩阵 A 的行换成同序数的列得到的新矩阵，叫做的**转置矩阵**，记作A^{T} .

例

$$A=\begin{pmatrix}1 & 2 & 2\\ 4 & 5 & 8\end{pmatrix},\qquad A^{T}=\begin{pmatrix}1 & 4\\ 2 & 5\\ 2 & 8\end{pmatrix};$$

$$B=\begin{pmatrix}18 & 6\end{pmatrix},\qquad B^{T}=\begin{pmatrix}18\\ 6\end{pmatrix}.$$

转置矩阵的运算性质

(1) $(A^T)^T = A;$

(2) $(A+B)^T = A^T + B^T;$

(3) $(\lambda A)^T = \lambda A^T;$

(4) $(AB)^T = B^T A^T.$

例：已知

$$A=\begin{pmatrix}2&0&-1\\1&3&2\end{pmatrix},\quad B=\begin{pmatrix}1&7&-1\\4&2&3\\2&0&1\end{pmatrix},\text{ 求}(AB)^T.$$

解法1

$$\because AB=\begin{pmatrix}2&0&-1\\1&3&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&7&-1\\4&2&3\\2&0&1\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}0&14&-3\\17&13&10\end{pmatrix},\qquad \therefore (AB)^T=\begin{pmatrix}0&17\\14&13\\-3&10\end{pmatrix}.$$

解法2

$$(AB)^T = B^T A^T$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 4 & 2 \\ 7 & 2 & 0 \\ -1 & 3 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 3 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 17 \\ 14 & 13 \\ -3 & 10 \end{pmatrix}.$$

定义： 设 A 为 n 阶方阵，如果满足 $A = A^T$，即

$$a_{ij} = a_{ji} \quad (i, j = 1, 2, \cdots, n)$$

那么 A 称为**对称阵**.

如果满足 $A = -A^T$，那么 A 称为**反对称阵**.

$$A = \begin{pmatrix} 12 & 6 & 1 \\ 6 & 8 & 0 \\ 1 & 0 & 6 \end{pmatrix} \qquad A = \begin{pmatrix} 0 & -6 & 1 \\ 6 & 0 & 7 \\ -1 & -7 & 0 \end{pmatrix}$$

对称阵　　　　反对称阵

例: 设列矩阵 $X = (x_1, x_2, \ldots, x_n)^{\mathrm{T}}$ 满足 $X^{\mathrm{T}}X = 1$，E 为 n 阶单位阵，$H = E - 2XX^{\mathrm{T}}$，试证明 H 是对称阵，且 $HH^{\mathrm{T}} = E$.

证明:

$$H^T = (E - 2XX^T)^T = E^T + (-2XX^T)^T = E - 2(XX^T)^T$$

$$= E - 2(X^T)^T X^T = E - 2XX^T = H$$

从而 H 是对称阵.

$$HH^T = H^2 = (E - 2XX^T)^2 = E^2 - 4XX^T + (-2XX^T)^2$$

$$= E - 4XX^T + 4XX^T XX^T = E - 4XX^T + 4X(X^T X)X^T$$

$$= E - 4XX^T + 4XX^T = E$$

五、方阵的行列式

定义：由 n 阶方阵的元素所构成的行列式，叫做方阵 A 的行列式，记作 $|A|$ 或 $\det A$.

运算性质 (1) $\left|A^T\right| = |A|$; (2) $|\lambda A| = \lambda^n |A|$;

(3) $|AB| = |A||B|$; $\Rightarrow |AB| = |BA|$.

证明： 要使得 $|AB| = |A|\,|B|$ 有意义，A、B 必为同阶方阵，

假设 $A = (a_{ij})_{n\times n}$，$B = (b_{ij})_{n\times n}$.

我们以 $n = 3$ 为例，构造一个6阶行列式

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & 0 & 0 & 0 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & 0 & 0 & 0 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ 0 & -1 & 0 & b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ 0 & 0 & -1 & b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{vmatrix} = |A|\cdot|B|$$

$$\begin{vmatrix} \boxed{\begin{matrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{matrix}} & \begin{matrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{matrix} \\ \begin{matrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{matrix} & \boxed{\begin{matrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{matrix}} \end{vmatrix} \underset{\substack{c_5 + b_{12}c_1 \\ c_6 + b_{13}c_1}}{\overset{c_4 + b_{11}c_1}{=\!=}} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{11}b_{11} & a_{11}b_{12} & a_{11}b_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{21}b_{11} & a_{21}b_{12} & a_{21}b_{13} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{31}b_{11} & a_{31}b_{12} & a_{31}b_{13} \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ 0 & 0 & -1 & b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{vmatrix}$$

$$\underset{\substack{c_5 + b_{22}c_2 \\ c_6 + b_{23}c_2}}{\overset{c_4 + b_{21}c_2}{=\!=}} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21} & a_{11}b_{12} + a_{12}b_{22} & a_{11}b_{13} + a_{12}b_{23} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{21}b_{11} + a_{22}b_{21} & a_{21}b_{12} + a_{22}b_{22} & a_{21}b_{13} + a_{22}b_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{31}b_{11} + a_{32}b_{21} & a_{31}b_{12} + a_{32}b_{22} & a_{31}b_{13} + a_{32}b_{23} \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{vmatrix}$$

$$
\begin{vmatrix}
a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{11}b_{11}+a_{12}b_{21} & a_{11}b_{12}+a_{12}b_{22} & a_{11}b_{13}+a_{12}b_{23} \\
a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{21}b_{11}+a_{22}b_{21} & a_{21}b_{12}+a_{22}b_{22} & a_{21}b_{13}+a_{22}b_{23} \\
a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{31}b_{11}+a_{32}b_{21} & a_{31}b_{12}+a_{32}b_{22} & a_{31}b_{13}+a_{32}b_{23} \\
-1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & -1 & b_{31} & b_{32} & b_{33}
\end{vmatrix}
\begin{array}{l}
c_4+b_{31}c_3 \\
\underline{c_5+b_{32}c_3} \\
\overline{c_6+b_{33}c_3}
\end{array}
$$

$$
\begin{vmatrix}
a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{11}b_{11}+a_{12}b_{21}+a_{13}b_{31} & a_{11}b_{12}+a_{12}b_{22}+a_{13}b_{32} & a_{11}b_{13}+a_{12}b_{23}+a_{13}b_{33} \\
a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{21}b_{11}+a_{22}b_{21}+a_{23}b_{31} & a_{21}b_{12}+a_{22}b_{22}+a_{23}b_{32} & a_{21}b_{13}+a_{22}b_{23}+a_{23}b_{33} \\
a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{31}b_{11}+a_{32}b_{21}+a_{33}b_{31} & a_{31}b_{12}+a_{32}b_{22}+a_{33}b_{32} & a_{31}b_{13}+a_{32}b_{23}+a_{23}b_{33} \\
-1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0
\end{vmatrix}
$$

$$
\begin{vmatrix}
a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{11}b_{11}+a_{12}b_{21}+a_{13}b_{31} & a_{11}b_{12}+a_{12}b_{22}+a_{13}b_{32} & a_{11}b_{13}+a_{12}b_{23}+a_{13}b_{33} \\
a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{21}b_{11}+a_{22}b_{21}+a_{23}b_{31} & a_{21}b_{12}+a_{22}b_{22}+a_{23}b_{32} & a_{21}b_{13}+a_{22}b_{23}+a_{23}b_{33} \\
a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{31}b_{11}+a_{32}b_{21}+a_{33}b_{31} & a_{31}b_{12}+a_{32}b_{22}+a_{33}b_{32} & a_{31}b_{13}+a_{32}b_{23}+a_{33}b_{33} \\
-1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0
\end{vmatrix}
$$

令 $c_{ij}=\sum_{k=1}^{3} a_{ik}b_{kj}$ ， 则 $C=(c_{ij})=AB$.

$$
=\begin{vmatrix}
a_{11} & a_{12} & a_{13} & c_{11} & c_{12} & c_{13} \\
a_{21} & a_{22} & a_{23} & c_{21} & c_{22} & c_{23} \\
a_{31} & a_{32} & a_{33} & c_{31} & c_{32} & c_{33} \\
-1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0
\end{vmatrix}
\xlongequal[r_3 \leftrightarrow r_6]{\substack{r_1 \leftrightarrow r_4 \\ r_2 \leftrightarrow r_5}} (-1)^3
\begin{vmatrix}
-1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\
a_{11} & a_{12} & a_{13} & c_{11} & c_{12} & c_{13} \\
a_{21} & a_{22} & a_{23} & c_{21} & c_{22} & c_{23} \\
a_{31} & a_{32} & a_{33} & c_{31} & c_{32} & c_{33}
\end{vmatrix}
$$

$$-\begin{vmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ a_{11} & a_{12} & a_{13} & c_{11} & c_{12} & c_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & c_{21} & c_{22} & c_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & c_{31} & c_{32} & c_{33} \end{vmatrix} = -|-E_3|\cdot|C| = |C| = |AB|$$

从而 $|AB| = |A||B|$.

例 设有 3 阶方阵

$$A=\begin{pmatrix} a_1 & c_1 & d_1 \\ a_2 & c_2 & d_2 \\ a_3 & c_3 & d_3 \end{pmatrix}, B=\begin{pmatrix} b_1 & c_1 & d_1 \\ b_2 & c_2 & d_2 \\ b_3 & c_3 & d_3 \end{pmatrix},$$

且已知$|A|=2, |B|=-\dfrac{1}{2}$,则$|A+B|=$ ______.

例 设

$$A=\begin{pmatrix} a & -b & -c & -d \\ b & a & -d & c \\ c & d & a & -b \\ d & -c & b & a \end{pmatrix}$$

求$|A|$.

解 $|A^2| = |A||A^T| = |AA^T|$

$$= \begin{vmatrix} m & 0 & 0 & 0 \\ 0 & m & 0 & 0 \\ 0 & 0 & m & 0 \\ 0 & 0 & 0 & m \end{vmatrix} (m = a^2 + b^2 + c^2 + d^2)$$

$$= (a^2 + b^2 + c^2 + d^2)^4$$

又因为A的主对角元全是 a, $|A|$中的 a^4 的符号为正，故

$$|A| = (a^2 + b^2 + c^2 + d^2)^2.$$

定义: 行列式 $|A|$ 的各个元素的代数余子式 A_{ij} 所构成的如下矩阵

$$A^* = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \cdots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \cdots & A_{n2} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ A_{1n} & A_{2n} & \cdots & A_{nn} \end{pmatrix}$$

称为矩阵 A 的**伴随矩阵**.

元素 a_{ij} 的代数余子式 A_{ij} 位于第 j 行第 i 列

性质 $AA^* = A^*A = |A|E.$

证明

$$AA^* = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \cdots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \cdots & A_{n2} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ A_{1n} & A_{2n} & \cdots & A_{nn} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} |A| & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & |A| & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \ddots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & |A| \end{pmatrix} = |A|E$$

例 设n阶矩阵A非奇异$(n \geq 2)$，A^*是A的伴随阵，则(   )

(A) $(A^*)^* = |A|^{n-1} A$ (B) $(A^*)^* = |A|^{n+1} A$

(C) $(A^*)^* = |A|^{n-2} A$ (D) $(A^*)^* = |A|^{n+2} A$

例 设A是 3 阶方阵，A^*是A的伴随矩阵，又k为常数$(k \neq 0, \pm 1)$，则$(kA)^* = ($　　$)$.

(A) kA^*　　(B) k^2A^*

(C) k^3A^*　　(D) $\dfrac{1}{3}A^*$

例 设A,B是n阶方阵，且$AB=O$, 则必有（　）

(A) $A=O$或$B=O$　　(B) $A+B=O$

(C) $|A|=0$或$|B|=0$　　(D) $|A+B|=0$

例 设$1\times n$阶矩阵 $X=(\frac{1}{2},0,\ldots,0,\frac{1}{2}), A=E-X^TX$，

$B=E+2X^TX, E$为n阶单位阵，则$AB=$ ____.

例 设

$$A=\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

三阶方阵B满足$BA^{*}=B+E$，求$|B|$.

例 计算下列矩阵的n次方幂

（1） 设$\alpha=(1,2,3),\beta=(1,\frac{1}{2},\frac{1}{3}),A=\alpha^T\beta$,求$A^n$;

（2） 设

$$B=\begin{pmatrix}1&2&3\\2&4&6\\3&6&9\end{pmatrix},$$

求B^n.