第 2 节　行列式的性质

一、基本性质

性质1 互换行列式的两行，行列式**变号**. 记作 $r_i \leftrightarrow r_j$.

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} \xlongequal{r_1 \leftrightarrow r_3} -\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix}$$

推论1 若行列式有两行相同，则行列式为 0.

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix} \xlongequal{r_1 \leftrightarrow r_3} -\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix} = 0$$

性质2 用非零数 k 乘行列式的某一行中所有元素，等于用数 k 乘此行列式. 记作 $k\times r_i$.

$$\begin{vmatrix} 2\times1 & 2\times2 & 2\times3 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 2\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix}$$

推论2 行列式中某一行的公因子可以提到行列式符号外面.

$$\begin{vmatrix} 2 & 4 & 6 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 2\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix}$$

推论3 若行列式中存在两行元素对应成比例，则行列式等于**0**.

$$\begin{vmatrix} -2 & -4 & -6 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix} = (-2)\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix} = 0$$

性质3 若某一行是两组数的和，则此行列式等于如下两个行列式的和.

$$\begin{vmatrix} 1+0 & 1+1 & 1+2 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ b_{i1}+c_{i1} & \cdots & b_{in}+c_{in} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ b_{i1} & \cdots & b_{in} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ c_{i1} & \cdots & c_{in} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

注意

$$\begin{vmatrix} a_1+b_1 & a_2+b_2 \\ a_3+b_3 & a_4+b_4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ a_3 & a_4 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_3 & b_4 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} b_1 & b_2 \\ a_3 & a_4 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} b_1 & b_2 \\ b_3 & b_4 \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} ka_{11} & ka_{12} \\ ka_{21} & ka_{22} \end{vmatrix} = k^2 \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$$

性质4 ☆☆☆☆☆

行列式的某一行的所有元素乘以同一数 k 后再加到另一行对应的元素上去，行列式的值不变. 记作 $r_i + kr_j$.

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} \xlongequal{r_2 - r_1} \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -2 & -4 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix}$$

定义 设 $D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$ 则 $D^{T}=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{n1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{n2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$

称 D^{T} 为 D 的**转置行列式**.

性质5 行列式与它的转置行列式相等.

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \\ 3 & -1 & 1 \end{vmatrix}$$

注 由性质5可得前面的所有性质对“列”也成立.

行列式关于行和列的三种运算

(1)互换两行或两列： $r_i \leftrightarrow r_j$ 行列式变号

对调运算 $c_i \leftrightarrow c_j$

(2)数***k*** 乘某行或某列： $r_i \times k$ 行列式扩大***k***倍

倍乘运算 $c_i \times k$

(3)数 ***k*** 乘第 ***i***行(列)加到第 ***j*** 行(列)上：

倍加运算 $r_j + k r_i$ 行列式值不变

$c_j + k c_i$

二、利用性质计算行列式 （化为三角形行列式）

例1 计算下列行列式

$$D=\begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 & -3 & 1 \\ -3 & 3 & -7 & 9 & -5 \\ 2 & 0 & 4 & -2 & 1 \\ 3 & -5 & 7 & -14 & 6 \\ 4 & -4 & 10 & -10 & 2 \end{vmatrix}$$

解 $$D=\begin{array}{l}\begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 & -3 & 1 \\ -3 & 3 & -7 & 9 & -5 \\ 2 & 0 & 4 & -2 & 1 \\ 3 & -5 & 7 & -14 & 6 \\ 4 & -4 & 10 & -10 & 2 \end{vmatrix}\end{array}\begin{array}{l}\times 3 \\ \oplus \\ \\ \\ \\ \end{array}$$

$$\overline{\overline{r_2+3r_1}}\begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 & -3 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & -2 \\ 2 & 0 & 4 & -2 & 1 \\ 3 & -5 & 7 & -14 & 6 \\ 4 & -4 & 10 & -10 & 2 \end{vmatrix}$$

$$\xlongequal{r_2+3r_1}\begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 & -3 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & -2 \\ 2 & 0 & 4 & -2 & 1 \\ 3 & -5 & 7 & -14 & 6 \\ 4 & -4 & 10 & -10 & 2 \end{vmatrix}\begin{array}{l} \times(-2) \\ \oplus \\ \\ \\ \\ \end{array}$$

$$\xlongequal{r_2-2r_1}\begin{array}{r} (-4)\times \\ \oplus \\ \\ \\ \\ \end{array}\begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 & -3 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & -2 \\ 0 & 2 & 0 & 4 & -1 \\ 3 & -5 & 7 & -14 & 6 \\ 4 & -4 & 10 & -10 & 2 \end{vmatrix}\begin{array}{l} \times(-3) \\ \oplus \\ \\ \\ \\ \end{array}$$

$$\xlongequal[r_4 - 4r_1]{r_3 - 3r_1}\begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 & -3 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & -2 \\ 0 & 2 & 0 & 4 & -1 \\ 0 & -2 & 1 & -5 & 3 \\ 0 & 0 & 2 & 2 & -2 \end{vmatrix}$$

$$\xlongequal{r_2 \leftrightarrow r_4} -\begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 & -3 & 1 \\ 0 & -2 & 1 & -5 & 3 \\ 0 & 2 & 0 & 4 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 2 & 2 & -2 \end{vmatrix}$$

$$\xlongequal{r_3 + r_2} -\begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 & -3 & 1 \\ 0 & -2 & 1 & -5 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 2 & 2 & -2 \end{vmatrix}$$

$$\xlongequal{r_4 + r_3} -\begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 & -3 & 1 \\ 0 & -2 & 1 & -5 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 2 & -2 \end{vmatrix} \times(-2)$$

$$\underline{\underline{r_5 - 2r_3}} \; -\begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 & -3 & 1 \\ 0 & -2 & 1 & -5 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & -6 \end{vmatrix}$$

$$\underline{\underline{r_5 + 4r_4}} \; -\begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 & -3 & 1 \\ 0 & -2 & 1 & -5 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -6 \end{vmatrix} = -(-2)(-1)(-6) = 12.$$

练习1 计算下列行列式

$$D = \begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 & 2 \\ -1 & -1 & -4 & 1 \\ 2 & 4 & -6 & 1 \\ 1 & 2 & 2 & 2 \end{vmatrix}$$

解

$$D=\begin{vmatrix}1&1&-1&2\\-1&-1&-4&1\\2&4&-6&1\\1&2&2&2\end{vmatrix}\xlongequal[r_4-r_1]{\substack{r_2+r_1\\r_3-2r_1}}\begin{vmatrix}1&1&-1&2\\0&0&-5&3\\0&2&-4&-3\\0&1&3&0\end{vmatrix}$$

$$\xlongequal{r_2\leftrightarrow r_4}-\begin{vmatrix}1&1&-1&2\\0&1&3&0\\0&2&-4&-3\\0&0&-5&3\end{vmatrix}\xlongequal{r_3-2r_2}-\begin{vmatrix}1&1&-1&2\\0&1&5&0\\0&0&-10&-3\\0&0&-5&3\end{vmatrix}$$

$$\xlongequal{r_3 \leftrightarrow r_4} \begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & -5 & 3 \\ 0 & 0 & -10 & -3 \end{vmatrix} \xlongequal{r_4 - 2r_3} \begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & -5 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & -9 \end{vmatrix} = 45$$

注：该例题也可通过列变换化成三角行列式.

例2 计算 $D = \begin{vmatrix} \mathbf{3} & \mathbf{1} & \mathbf{1} & \mathbf{1} \\ \mathbf{1} & \mathbf{3} & \mathbf{1} & \mathbf{1} \\ \mathbf{1} & \mathbf{1} & \mathbf{3} & \mathbf{1} \\ \mathbf{1} & \mathbf{1} & \mathbf{1} & \mathbf{3} \end{vmatrix}$

“行等和”行列式

解 $\begin{vmatrix} 3 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 3 \end{vmatrix} \xlongequal{\text{各列加到第一列}} \begin{vmatrix} 6 & 1 & 1 & 1 \\ 6 & 3 & 1 & 1 \\ 6 & 1 & 3 & 1 \\ 6 & 1 & 1 & 3 \end{vmatrix}$

$$=6\begin{vmatrix}1&1&1&1\\1&3&1&1\\1&1&3&1\\1&1&1&3\end{vmatrix}=6\begin{vmatrix}1&1&1&1\\0&2&0&0\\0&0&2&0\\0&0&0&2\end{vmatrix}=48$$

例3 求行列式

$$D=\begin{vmatrix}1 & 1 & 1 & \cdots & 1\\ 1 & 2 & 0 & \cdots & 0\\ 1 & 0 & 3 & \cdots & 0\\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots\\ 1 & 0 & 0 & \cdots & n\end{vmatrix}$$

爪型行列式

解

$$D \xlongequal{c_1 - \frac{1}{2}c_2 - \cdots - \frac{1}{n}c_n} \begin{vmatrix} 1-\sum_{i=2}^{n}\frac{1}{i} & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 0 & 2 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 3 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & n \end{vmatrix}$$

$$= n!\left(1 - \sum_{i=2}^{n}\frac{1}{i}\right)$$

例4 求行列式 $D=\begin{vmatrix} 1+a & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2+a & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 3+a & 4 \\ 1 & 2 & 3 & 4+a \end{vmatrix}$

解 方法一

$$D=\begin{vmatrix} 1+a & 2 & 3 & 4 \\ 1+0 & 2+a & 3 & 4 \\ 1+0 & 2 & 3+a & 4 \\ 1+0 & 2 & 3 & 4+a \end{vmatrix}$$

拆项法(此题也可拆一行)

方法二

$$D=\begin{vmatrix}1&0&0&0&0\\1&1+a&2&3&4\\1&1&2+a&3&4\\1&1&2&3+a&4\\1&1&2&3&4+a\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1&-1&-2&-3&-4\\1&a&0&0&0\\1&0&a&0&0\\1&0&0&a&0\\1&0&0&0&a\end{vmatrix}$$

加边法(此题也可加一行)

当$a\neq 0$时,

$$D=\begin{vmatrix} 1+\frac{10}{a} & -1 & -2 & -3 & -4 \\ 0 & a & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & a \end{vmatrix}=(1+\frac{10}{a})\cdot a^4$$

$$=a^4+10a^3$$

当$a=0$时, D=0, 综上所述$D=a^4+10a^3$

例5 设

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1k} & & & \\ \vdots & & \vdots & & 0 & \\ a_{k1} & \cdots & a_{kk} & & & \\ c_{11} & \cdots & c_{1k} & b_{11} & \cdots & b_{1n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ c_{n1} & \cdots & c_{nk} & b_{n1} & \cdots & b_{nn} \end{vmatrix}$$

$$D_1=\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1k} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{k1} & \cdots & a_{kk} \end{vmatrix} \qquad D_2=\begin{vmatrix} b_{11} & \cdots & b_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ b_{n1} & \cdots & b_{nn} \end{vmatrix}$$

证明:

$$D = D_1 D_2$$

证明：利用行的运算性质把D_1化成下三角形，

$$D_1 \overset{r}{=\!=} \begin{vmatrix} p_{11} & & \\ \vdots & \ddots & \\ p_{1k} & \cdots & p_{kk} \end{vmatrix} = p_{11}\cdots p_{kk}$$

再利用列的运算性质把 D_2化成下三角形，

$$D_2 \overset{c}{=\!=} \begin{vmatrix} q_{11} & & \\ \vdots & \ddots & \\ q_{1n} & \cdots & q_{nn} \end{vmatrix} = q_{11}\cdots q_{nn}$$

对 D 的前 k 行作运算 r，后 n 列作运算 c，则有

$$D \xlongequal[c]{r} \begin{vmatrix} p_{11} & & & & & \\ \vdots & \ddots & & & & \\ p_{k1} & \cdots & p_{kk} & & & \\ c_{11} & \cdots & c_{1k} & q_{11} & & \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \ddots & \\ c_{n1} & \cdots & c_{nk} & q_{n1} & \cdots & q_{nn} \end{vmatrix}$$

$$= p_{11} \cdots p_{kk} q_{11} \cdots q_{nn} = D_1 D_2$$

例

$$D=\begin{vmatrix}1 & 1 & 1 & 0 & 0\\ 1 & 2 & 0 & 0 & 0\\ 1 & 0 & 3 & 0 & 0\\ 1 & -1 & 5 & 1 & 2\\ 1 & 4 & 7 & 3 & 4\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1 & 1 & 1\\ 1 & 2 & 0\\ 1 & 0 & 3\end{vmatrix}\begin{vmatrix}1 & 2\\ 3 & 4\end{vmatrix}=-2$$

$$D=\begin{vmatrix} & 0 & & a_{11} & \cdots & a_{1k} \\ & & & \vdots & & \vdots \\ & & & a_{k1} & \cdots & a_{kk} \\ b_{11} & \cdots & b_{1n} & c_{11} & \cdots & c_{1k} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_{n1} & \cdots & b_{nn} & c_{n1} & \cdots & c_{nk} \end{vmatrix}=(-1)^{n\times k}D_1D_2$$

思考题

1. 求解下列方程

(1) $$\begin{vmatrix} x+1 & 2 & -1 \\ 2 & x+1 & 1 \\ -1 & 1 & x+1 \end{vmatrix} = 0$$

(2) $$f(x) = \begin{vmatrix} x & a & b & c \\ a & x & b & c \\ a & b & x & c \\ a & b & c & x \end{vmatrix},$$ 求 $f(x)=0$ 的根。

解:(1)将第2列加到第1列上得到

$$D=\begin{vmatrix} x+1 & 2 & -1 \\ 2 & x+1 & 1 \\ -1 & 1 & x+1 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} x+3 & 2 & -1 \\ x+3 & x+1 & 1 \\ 0 & 1 & x+1 \end{vmatrix}$$

$$=(x+3)\begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 1 & x+1 & 1 \\ 0 & 1 & x+1 \end{vmatrix}=(x+3)(x^2-3)$$

故方程的根为 $-3,\pm\sqrt{3}$

(2) 由行列式的性质易得$x=a,b,c$为方程的3个解.

又将第2,3,4列加到第1列有公因子$(x+a+b+c)$提出, 所以方程的第4个解为 $-(a+b+c)$.

其他解法?

2. 计算4阶行列式

$$D=\begin{vmatrix} a^2+\dfrac{1}{a^2} & a & \dfrac{1}{a} & 1 \\ b^2+\dfrac{1}{b^2} & b & \dfrac{1}{b} & 1 \\ c^2+\dfrac{1}{c^2} & c & \dfrac{1}{c} & 1 \\ d^2+\dfrac{1}{d^2} & d & \dfrac{1}{d} & 1 \end{vmatrix} \qquad \left(\text{已知 } abcd=1\right)$$

解

$$D=\begin{vmatrix} a^2 & a & \frac{1}{a} & 1 \\ b^2 & b & \frac{1}{b} & 1 \\ c^2 & c & \frac{1}{c} & 1 \\ d^2 & d & \frac{1}{d} & 1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \frac{1}{a^2} & a & \frac{1}{a} & 1 \\ \frac{1}{b^2} & b & \frac{1}{b} & 1 \\ \frac{1}{c^2} & c & \frac{1}{c} & 1 \\ \frac{1}{d^2} & d & \frac{1}{d} & 1 \end{vmatrix}$$

$$= abcd\begin{vmatrix} a & 1 & \frac{1}{a^2} & \frac{1}{a} \\ b & 1 & \frac{1}{b^2} & \frac{1}{b} \\ c & 1 & \frac{1}{c^2} & \frac{1}{c} \\ d & 1 & \frac{1}{d^2} & \frac{1}{d} \end{vmatrix} + (-1)^3 \begin{vmatrix} a & 1 & \frac{1}{a^2} & \frac{1}{a} \\ b & 1 & \frac{1}{b^2} & \frac{1}{b} \\ c & 1 & \frac{1}{c^2} & \frac{1}{c} \\ d & 1 & \frac{1}{d^2} & \frac{1}{d} \end{vmatrix}$$

$$= 0.$$

性质6 行列式按行(列)展开定理（Laplace降阶法）

行列式等于它的任一行（列）的各元素与其对应的代数余子式乘积之和，即

$$D = a_{i1}A_{i1} + a_{i2}A_{i2} + \cdots + a_{in}A_{in} \left(i = 1, 2, \cdots, n \right)$$

例6 求 $\begin{vmatrix} a_1 & 0 & 0 & b_1 \\ 0 & a_2 & b_2 & 0 \\ 0 & b_3 & a_3 & 0 \\ b_4 & 0 & 0 & a_4 \end{vmatrix}$

直接按某行或列展开即可. 答案为$(a_1a_4 - b_1b_4)(a_2a_3 - b_2b_3)$

例7 证明n阶行列式 递推法

$$\begin{vmatrix} x & -1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & x & -1 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & x & \cdots & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & x & -1 \\ a_n & a_{n-1} & a_{n-2} & \cdots & a_2 & a_1 \end{vmatrix} = a_1x^{n-1} + a_2x^{n-2} + \cdots + a_{n-1}x + a_n$$

解 $D_n = xD_{n-1} + a_n = x(xD_{n-2} + a_{n-1}) + a_n = x^2D_{n-2} + a_{n-1}x + a_n$

$= \cdots = x^{n-1}D_1 + a_2x^{n-2} + \cdots + a_{n-1}x + a_n$

$= a_1x^{n-1} + a_2x^{n-2} + \cdots + a_{n-1}x + a_n$

引例 $$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} \xlongequal{\text{按第2行展开}} 1\times \boldsymbol{A}_{21} + 0\times \boldsymbol{A}_{22} + (-1)\times \boldsymbol{A}_{23}$$

或者 $$1\times \boldsymbol{A}_{21} + 0\times \boldsymbol{A}_{22} + (-1)\times \boldsymbol{A}_{23} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix}$$

那么

$$b_1 A_{21} + b_2 A_{22} + b_3 A_{23} = ? \qquad \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix}$$

推论4

$$b_1A_{i1}+b_2A_{i2}+\cdots+b_nA_{in}=\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{i-1,1} & \cdots & a_{i-1,n} \\ b_1 & \cdots & b_n \\ a_{i+1,1} & & a_{i+1,n} \\ \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

推论5 行列式任一行(列)的元素与另一行(列)的对应元素的代数余子式乘积之和等于零，即

$$a_{i1}A_{j1}+a_{i2}A_{j2}+\cdots+a_{in}A_{jn}=0,\quad i\neq j$$

例8 设 $D=\begin{vmatrix} 1 & -1 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & -2 & 3 \\ 1 & 4 & 4 & 9 \\ -1 & 8 & -8 & 27 \end{vmatrix}$

求 $A_{11}-2A_{12}+2A_{13}-3A_{14}$

解

$$A_{11}-2A_{12}+2A_{13}-3A_{14}=\begin{vmatrix} 1 & -2 & 2 & -3 \\ -1 & 2 & -2 & 3 \\ 1 & 4 & 4 & 9 \\ -1 & 8 & -8 & 27 \end{vmatrix}=0$$

思考题

1. 设 $D=\begin{vmatrix} 3 & -5 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & -5 \\ -1 & 3 & 1 & 3 \\ 2 & -4 & -1 & -3 \end{vmatrix}$，$D$ 的 (i,j)元的余子式和代数余子式分别为 M_{ij}和A_{ij}，求

$$A_{11}+A_{12}+A_{13}+A_{14} \text{ 及 } M_{11}+M_{21}+M_{31}+M_{41}.$$

分析 利用

$$a_{11}A_{11}+a_{12}A_{12}+a_{13}A_{13}+a_{14}A_{14}=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix}$$

解 $A_{11}+A_{12}+A_{13}+A_{14}=\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & -5 \\ -1 & 3 & 1 & 3 \\ 2 & -4 & -1 & -3 \end{vmatrix}$

$$\xlongequal[r_3-r_1]{r_4+r_3}\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & -5 \\ -2 & 2 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} 1 & 1 & -5 \\ -2 & 2 & 2 \\ 1 & -1 & 0 \end{vmatrix}$$

$$\xlongequal{c_2+c_1}\begin{vmatrix} 1 & 2 & -5 \\ -2 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} 2 & -5 \\ 0 & 2 \end{vmatrix}=4.$$

$$M_{11}+M_{21}+M_{34}+M_{41}=A_{11}-A_{21}+A_{31}-A_{41}$$

$$=\begin{vmatrix}1&-5&2&1\\-1&1&0&-5\\1&3&1&3\\-1&-4&-1&-3\end{vmatrix}\overset{r_4+r_3}{=\!=\!=}\begin{vmatrix}1&-5&2&1\\-1&1&0&-5\\1&3&1&3\\0&-1&0&0\end{vmatrix}$$

$$=-\begin{vmatrix}1&2&1\\-1&0&-5\\1&1&3\end{vmatrix}\overset{r_1-2r_3}{=\!=\!=}-\begin{vmatrix}-1&0&-5\\-1&0&-5\\1&1&3\end{vmatrix}=0.$$

例9 证明范德蒙德（Vandermonde）行列式

(法国数学家, 1735～1796, 在高等代数方面有重要贡献)

$$D_n=\begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ x_1 & x_2 & \cdots & x_n \\ x_1^2 & x_2^2 & \cdots & x_n^2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ x_1^{n-1} & x_2^{n-1} & \cdots & x_n^{n-1} \end{vmatrix}=\prod_{n\ge i>j\ge 1}(x_i-x_j) \qquad (1)$$

中文名	范德蒙德行列式	应用学科	数学
外文名	Vandermonde Matrix	适用领域范围	阵列信号处理
提出者	范德蒙德	适用领域范围	线性方程

广泛地应用于插值理论、函数逼近、以及代数编码中.

证明：用数学归纳法

(1) 当 $n=2$ 时

$$D_2=\begin{vmatrix}1 & 1\\ x_1 & x_2\end{vmatrix}=x_2-x_1=\prod_{2\geq i>j\geq 1}(x_i-x_j),$$

(2) 设 n-1 阶范德蒙德行列式成立, 则

$$D_n = \begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ x_1 & x_2 & \cdots & x_n \\ x_1^2 & x_2^2 & \cdots & x_n^2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ x_1^{n-1} & x_2^{n-1} & \cdots & x_n^{n-1} \end{vmatrix} \overset{\substack{r_n - x_n r_{n-1} \\ }}{\underset{\substack{r_{n-1} - x_n r_{n-2} \\ \\ r_2 - x_n r_1}}{=\!=\!=\!=}}$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ x_1 - x_n & x_2 - x_n & \cdots & x_{n-1} - x_n & 0 \\ x_1(x_1 - x_n) & x_2(x_2 - x_n) & \cdots & x_{n-1}(x_{n-1} - x_n) & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ x_1^{n-2}(x_1 - x_n) & x_2^{n-2}(x_2 - x_n) & \cdots & x_{n-1}^{n-2}(x_{n-1} - x_n) & 0 \end{vmatrix}$$

按第 n 列展开，再提出第 j 列的公因子 $(x_j - x_n)$

$$= (-1)^{1+n}(x_1 - x_n)(x_2 - x_n)\cdots(x_{n-1} - x_n)\begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ x_1 & x_2 & \cdots & x_{n-1} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ x_1^{n-2} & x_2^{n-2} & \cdots & x_{n-1}^{n-2} \end{vmatrix}$$

$$= (x_n - x_1)(x_n - x_2)\cdots(x_n - x_{n-1})\prod_{n-1 \geq i > j \geq 1}(x_i - x_j)$$

$$= \prod_{n \geq i > j \geq 1}(x_i - x_j)$$

例 10

$$D = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & -2 & 3 \\ 1 & 4 & 4 & 9 \\ -1 & 8 & -8 & 27 \end{vmatrix}$$

$= 3 \times (-1) \times 4 \times (-4) \times 1 \times 5$

$= 240$

例11　计算

$$D=\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ a & b & c & d \\ a^2 & b^2 & c^2 & d^2 \\ a^4 & b^4 & c^4 & d^4 \end{vmatrix}$$

方法一：按第4行直接展开

解　方法二

$$D_1 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ a & b & c & d & x \\ a^2 & b^2 & c^2 & d^2 & x^2 \\ a^3 & b^3 & c^3 & d^3 & x^3 \\ a^4 & b^4 & c^4 & d^4 & x^4 \end{vmatrix}$$

构造辅助行列式

按最后一列展开得到关于**x**的多项式函数, 其中 $\boxed{x^3}$的系数为 $\boldsymbol{D}$ 的相反数.

$$\boldsymbol{D_1} = (b-a)(c-a)(d-a)(x-a)(c-b)$$
$$(d-b)(x-b)(d-c)(x-c)(x-d)$$

即D=(b-a)(c-a)(d-a)(c-b)(d-b)(d-c)(a+b+c+d)

总结: n 阶行列式常用的计算方法

1. 对二, 三阶行列式按定义(对角线法则)直接计算.

2. 对特殊的行列式, 如三角形行列式, 其值为主对角线元素的乘积;

3. 利用行列式的性质将行列式化为三角形行列式来计算, 这是常用的基本方法;

4. 利用n阶行列式的展开定理将其降阶处理, 即*Laplace*展开法;

5. 根据行列式的特点利用加边法、拆项法、递推法、数学归纳法等方法计算.