合 肥 工 业 大 学 试 卷（A）

2017～2018 学年第 二 学期 课程代码 1400071B 课程名称 线性代数 学分 2.5 课程性质:必修☑、选修☐、限修☐ 考试形式:开卷☐、闭卷☑

专业班级（教学班）________ 考试日期 2018 年 5 月 8 日 8:00-10:00 命题教师 集体 系（所或教研室）主任审批签名____________

一、填空题（每小题 4 分，共 20 分）

1．已知 $|A|=\begin{vmatrix}1&0&1\\3&1&2\\2&3&1\end{vmatrix}$，$A_{ij}$ 表示 $|A|$ 中元素 a_{ij} 的代数余子式，则 $A_{11}+2A_{12}+3A_{13}=$__________.

2．设矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&2&3\\4&5&6\\7&8&9\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{P}=\begin{pmatrix}0&0&1\\0&1&0\\1&0&0\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{Q}=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&0&1\\0&1&0\end{pmatrix}$，则 $\boldsymbol{P}^{20}\boldsymbol{A}\boldsymbol{Q}^{21}=$_____________.

3．设三阶方阵 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 相似，且 $\boldsymbol{A}$ 的特征值分别为 $\frac{1}{3},\frac{1}{4},\frac{1}{5}$，则 $|\boldsymbol{B}^{-1}-2\boldsymbol{E}|=$________.

4．设 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&2&-2\\2&1&2\\3&0&4\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{\alpha}=(x,1,1)^T$，已知 $\boldsymbol{A\alpha}$ 与 $\boldsymbol{\alpha}$ 线性相关，求 $x=$________.

5．设 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$ 是3元非齐次线性方程组，若矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的秩为2，且 $\boldsymbol{\xi}_1=\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{\xi}_2=\begin{pmatrix}1\\5\\3\end{pmatrix}$ 是其两个特解，则 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$ 的通解是______________________.

二、选择题（每小题 4 分，共计 20 分）

1．已知 $\boldsymbol{Q}=\begin{pmatrix}1&2&3\\2&4&t\\3&6&9\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{P}$ 为 3 阶非零矩阵,且满足 $\boldsymbol{PQ}=\boldsymbol{0}$，则(　　).

(A) $t=6$ 时，$\boldsymbol{P}$ 的秩必为 1；　(B) $t=6$ 时，$\boldsymbol{P}$ 的秩必为 2；
(C) $t\neq6$ 时，$\boldsymbol{P}$ 的秩必为 1；　(D) $t\neq6$ 时，$\boldsymbol{P}$ 的秩必为 2.

2．设 $\boldsymbol{\alpha}_1=\begin{pmatrix}0\\0\\c_1\end{pmatrix},\boldsymbol{\alpha}_2=\begin{pmatrix}0\\1\\c_2\end{pmatrix},\boldsymbol{\alpha}_3=\begin{pmatrix}1\\-1\\c_3\end{pmatrix},\boldsymbol{\alpha}_4=\begin{pmatrix}-1\\1\\c_4\end{pmatrix}$，其中 c_1,c_2,c_3,c_4 为任意常数，则下列向量组线性相关的为(　　).

(A) $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$；　(B) $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_4$；　(C) $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4$；　(D) $\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4$.

3．设向量 $\boldsymbol{\beta}$ 可由向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m$ 线性表示，但不能由向量组（I）$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_{m-1}$ 线性表示，又记向量组（II）$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_{m-1},\boldsymbol{\beta}$，则（　　）.

(A) $\boldsymbol{\alpha}_m$ 不能由（I）线性表示，也不能由（II）线性表示；
(B) $\boldsymbol{\alpha}_m$ 不能由（I）线性表示，但能由（II）线性表示；
(C) $\boldsymbol{\alpha}_m$ 能由（I）线性表示，也能由（II）线性表示；
(D) $\boldsymbol{\alpha}_m$ 能由（I）线性表示，但不能由（II）线性表示.

4．已知 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 是 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$ 的一组基础解系，下列结论正确的是（　　）.

(A) $\boldsymbol{\alpha}_1-\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_2-\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_3-\boldsymbol{\alpha}_1$ 也是 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$ 的一组基础解系；
(B) $\boldsymbol{\xi}_1,\boldsymbol{\xi}_2,\boldsymbol{\xi}_3$ 与 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 等秩，则 $\boldsymbol{\xi}_1,\boldsymbol{\xi}_2,\boldsymbol{\xi}_3$ 也是 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$ 的一组基础解系；
(C) $\boldsymbol{\eta}_1,\boldsymbol{\eta}_2,\boldsymbol{\eta}_3,\boldsymbol{\eta}_4$ 与 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 等价，则 $\boldsymbol{\eta}_1,\boldsymbol{\eta}_2,\boldsymbol{\eta}_3,\boldsymbol{\eta}_4$ 也是 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$ 的一组基础解系；
(D) $\boldsymbol{\xi}_1,\boldsymbol{\xi}_2,\boldsymbol{\xi}_3$ 与 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 等价，则 $\boldsymbol{\xi}_1,\boldsymbol{\xi}_2,\boldsymbol{\xi}_3$ 也是 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$ 的一组基础解系.

5．设 $\boldsymbol{A}$ 为正交阵，且 $|\boldsymbol{A}|=-1$，则必有 $\boldsymbol{A}^*=$（　　）.

(A) $\boldsymbol{A}^T$；　(B) $-\boldsymbol{A}^T$；　(C) $\boldsymbol{A}$；　(D) $-\boldsymbol{A}$.

三、（8 分）设 $\boldsymbol{E}$ 为3阶单位阵，$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}-2&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$，求满足 $\boldsymbol{A}^*\boldsymbol{BA}=2\boldsymbol{BA}-4\boldsymbol{E}$ 的矩阵 $\boldsymbol{B}$.

四、（12 分） 设向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1=\begin{pmatrix}1+x\\1\\1\\1\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{\alpha}_2=\begin{pmatrix}2\\2+x\\2\\2\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{\alpha}_3=\begin{pmatrix}3\\3\\3+x\\3\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{\alpha}_4=\begin{pmatrix}4\\4\\4\\4+x\end{pmatrix}$，其中 $x\neq0$，且矩阵 $\boldsymbol{A}=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4)$，(1)求行列式 $|\boldsymbol{A}|$；(2) x 为何值时，$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4$ 线性相关？(3)当 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4$ 线性相关时，求其一个极大线性无关组，并将其余向量用该极大无关组线性表示.

五、（12 分）设方程组 $\begin{cases}x_1+x_2+x_3=1,\\x_1+kx_2+x_3=k,\\x_1+x_2+k^2x_3=k,\end{cases}$（1）$k$ 取何值时，方程组无解、有唯一解、有无穷多解？

（2）当方程组有无穷多解时，求出其通解.

六、（12 分）已知三阶实对称阵 $\boldsymbol{A}$ 的特征值为 $\lambda_1=2,\lambda_2=\lambda_3=1$，且对应于 $\lambda_2=\lambda_3=1$ 的特征向量为 $\boldsymbol{\alpha}_2=\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{\alpha}_3=\begin{pmatrix}2\\2\\-1\end{pmatrix}$.（1）求 $\boldsymbol{A}$ 的对应于 $\lambda_1=2$ 的特征向量；（2）求 $\boldsymbol{A}$.

七、（12 分）求一个正交变换 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{Py}$，将二次型 $f(x_1,x_2,x_3)=2x_1x_2+2x_1x_3+2x_2x_3$ 化为标准形.

八、（4 分）设 $\boldsymbol{A}$ 是 $n\times m$ 矩阵，$\boldsymbol{B}$ 是 $m\times n$ 矩阵其中 $n<m$，$\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{E}_n$，证明：矩阵 $\boldsymbol{B}$ 的列向量组线性无关.