doi:10.3969/j.issn.1008-1399.2020.05.005

行最简形矩阵唯一性证明及其应用

高翔宇

(广西师范大学 数学与统计学院, 广西 桂林 541004)

摘　要　本文首先介绍了行最简形矩阵的定义,然后给出行最简形矩阵唯一性证明,最后,给出行最简形矩阵在向量组线性表出及其在解线性方程组中的应用.

关键词　矩阵; 行最简形; 向量组; 线性方程组; 通解

中图分类号　O171　　**文献标识码**　A　　**文章编号**　1008-1399(2020)05-0010-03

On Reduced Row Echelon Form and Its Application

GAO Xiangyu

(College of Mathematics and Statistics, Guangxi Normal University, Guilin, Guangxi 541004, China)

Abstract　In this paper, the reduced row echelon form of a matrix and its uniqueness are discusses. The application to the linear combinations of vectors and the general solutions of linear equation systems are presented.

Keywords　matrix, reduced row echelon form, set of vectors, system of linear equations, general solution

1　引言

在矩阵理论中,矩阵化简是一项很重要的内容.为了求矩阵的秩,可将矩阵化为阶梯形,从而获得矩阵的秩等于其阶梯形的非零行数.关于矩阵秩的应用,一方面,运用矩阵秩理论判定线性方程组解的情况,在此基础上可以进一步求解线性方程组,然而,仅仅根据阶梯形矩阵往往无法直接求出方程组的解,通常需要回代计算[1].另一方面,运用矩阵秩理论求解向量组极大无关组,并且能用向量组极大无关组表示其余向量,不过,仅仅通过阶梯形矩阵还无法直接表示出来,也需要进一步的回代计算[2].针对上述回代问题,下面引入行最简形矩阵的概念,并从理论上证明行最简形矩阵的唯一性,根据行最简形矩阵不仅能直接求线性方程组的解,也能用向量组极大无关组直接表示其余向量.

收稿日期: 2019-09-16　　修改日期: 2020-02-13

基金项目: 广西师范大学 2019 年度教育教学改革立项项目(2019JGA21), 广西研究生教育创新计划项目(JGY2019029), 广西科技基地和人才专项项目(2018AD19211), 广西师范大学博士科研启动基金项目(2018BQ003).

作者简介: 高翔宇(1978—), 男, 河南西华人, 博士, 系统稳定性分析及最优控制设计, Email: gxy578@126.com

2　基本定义和定理

定义 1　设 A 为 $m\times n$ 矩阵,且 A 为非零阶梯形矩阵,称 A 的非零行的第一个非零元素为矩阵 A 的首元素.

定义 2　设 A 为 $m\times n$ 非零阶梯形矩阵,若矩阵 A 的首元素为 1,并且首元素所在的列其余元素全为 0,称 A 为行最简形矩阵.规定零矩阵的行最简形为零.

定理[3]　任意 $m\times n$ 矩阵 A 经过初等行变换总能化为行最简形矩阵.

3　主要定理

定理　设 A 为 $m\times n$ 矩阵,则其行最简形矩阵唯一.

证明

(1)当 A 为零矩阵时，显然.

(2)当 A 为非零矩阵，设 A 的秩为 r，$r\geqslant 1$. 则根据矩阵等价分解可知，存在 m 阶可逆矩阵 $\boldsymbol{P}_0$ 和矩阵 Q_0，使得 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{P}_0\boldsymbol{B}_0=\boldsymbol{Q}_0\boldsymbol{C}_0$，其中 $\boldsymbol{B}_0$ 和 $\boldsymbol{C}_0$ 分别为矩阵 A 和 B 的行最简形矩阵. 令

$$\boldsymbol{P}_0=[\boldsymbol{P}\quad \boldsymbol{P}_1],\boldsymbol{Q}_0=[\boldsymbol{Q}\quad \boldsymbol{Q}_1],$$

$$\boldsymbol{B}_0=\begin{bmatrix}0 & \boldsymbol{B}\\ 0 & 0\end{bmatrix},\ \boldsymbol{C}_0=\begin{bmatrix}0 & \boldsymbol{C}\\ 0 & 0\end{bmatrix},$$

其中 $\boldsymbol{P}$，$\boldsymbol{Q}$ 均为 r 列矩阵，$\boldsymbol{B}$ 和 $\boldsymbol{C}$ 均为第 1 列不为零的行最简形矩阵，且行满秩.

由 $\boldsymbol{P}_0\boldsymbol{B}_0=\boldsymbol{Q}_0\boldsymbol{C}_0$ 计算可知 $\boldsymbol{PB}=\boldsymbol{QC}$. 又由 $\boldsymbol{PB}$ 和 $\boldsymbol{QC}$ 的秩均为 r，则 $\boldsymbol{P}$ 和 $\boldsymbol{Q}$ 均为列满秩矩阵.

令

$$\boldsymbol{P}=[p_1,p_2,\cdots,p_r],\ \boldsymbol{Q}=[q_1,q_2,\cdots,q_r]$$

和

$$\boldsymbol{B}=(b_{ij})_{r\times s},\ \boldsymbol{C}=(c_{ij})_{r\times s}$$

由 $\boldsymbol{B}$ 和 $\boldsymbol{C}$ 均为行最简形矩阵且第 1 列元素均不全为零，容易看出 $b_{11}=c_{11}=1$.

假设 $\boldsymbol{B}$ 和 $\boldsymbol{C}$ 前 k 行首元素的对应位置均相同，其中 $k\geqslant 1$，则由 $\boldsymbol{PB}=\boldsymbol{QC}$ 知 $\boldsymbol{P}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 的第 i 个首元素所在列的乘积等于 Q 与 C 的第 i 个首元素所在列的乘积，即：$\boldsymbol{p}_i=\boldsymbol{q}_i$，$i=1,2,\cdots k$. 设 $\boldsymbol{B}$ 和 $\boldsymbol{C}$ 第 $k+1$ 行首元素分别位于 $(k+1,j)$ 位置和 $(k+1,l)$ 位置，则

(i)若 $j=l$，则 $\boldsymbol{B}$ 和 $\boldsymbol{C}$ 第 $k+1$ 行的首元素相同.

(ii)若 $j\neq l$，不妨设 $j<l$ 并且

$$\boldsymbol{p}_{k+1}=c_{1j}\boldsymbol{q}_1+c_{2j}\boldsymbol{q}_2+\cdots+c_{kj}\boldsymbol{q}_k,$$

由 $\boldsymbol{p}_i=\boldsymbol{q}_i$，$i=1,2,\cdots k$ 知

$$\boldsymbol{p}_{k+1}=c_{1j}\boldsymbol{p}_1+c_{2j}\boldsymbol{p}_2+\cdots+c_{kj}\boldsymbol{p}_k,$$

这样，$\boldsymbol{P}$ 的第 $k+1$ 列可由其前 k 列线性表出，这与 $\boldsymbol{P}$ 为列满秩矩阵相矛盾. 所以行最简形矩阵 $\boldsymbol{B}$ 和 $\boldsymbol{C}$ 在对应位置上的首元素相同，由此可知 $\boldsymbol{P}=\boldsymbol{Q}$. 又因为 $\boldsymbol{P}$，$\boldsymbol{Q}$ 均为列满秩矩阵，且 $\boldsymbol{PB}=\boldsymbol{QC}$，所以 $\boldsymbol{B}=\boldsymbol{C}$.

4　矩阵行最简形的应用

4.1　用向量组极大无关组表示其余向量

例 1　求向量组 $\alpha_1=\begin{bmatrix}1\\2\\3\\4\end{bmatrix}$，$\alpha_2=\begin{bmatrix}0\\2\\4\\6\end{bmatrix}$，$\alpha_3=\begin{bmatrix}3\\4\\5\\6\end{bmatrix}$，$\alpha_4=\begin{bmatrix}1\\3\\5\\9\end{bmatrix}$，$\alpha_5=\begin{bmatrix}0\\1\\2\\1\end{bmatrix}$，求此向量组一个的极大无关无关组，并用极大无关组表示其余向量.

解　令 $\boldsymbol{A}=[\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4,\alpha_5]$，则对矩阵 $\boldsymbol{A}$ 进行初等行变换将其化为阶梯形.

$$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}1&0&3&1&0\\2&2&4&3&1\\3&4&5&5&2\\4&6&6&9&1\end{bmatrix}$$

$$\to\begin{bmatrix}1&0&3&1&0\\0&2&-2&1&1\\0&4&-4&2&2\\0&6&-6&5&1\end{bmatrix}$$

$$\to\begin{bmatrix}1&0&3&1&0\\0&2&-2&1&1\\0&0&0&0&0\\0&0&0&2&-2\end{bmatrix}$$

$$\to\begin{bmatrix}1&0&3&1&0\\0&2&-2&1&1\\0&0&0&2&-2\\0&0&0&0&0\end{bmatrix}$$

由此可得矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的秩为 3，所以 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_4$ 为向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4,\alpha_5$ 的一个极大无关组. 不过，该极大无关组还无法直接将其余向量 α_3,α_5 表示出来. 为此，下面需要对上述阶梯形矩阵进一步化简为行最简形矩阵

$$\begin{bmatrix}1&0&3&1&0\\0&2&-2&1&1\\0&0&0&2&-2\\0&0&0&0&0\end{bmatrix}$$

$$\to\begin{bmatrix}1&0&3&1&0\\0&1&-1&1/2&1/2\\0&0&0&1&-1\\0&0&0&0&0\end{bmatrix}$$

$$\to\begin{bmatrix}1&0&3&0&1\\0&1&-1&0&1\\0&0&0&1&-1\\0&0&0&0&0\end{bmatrix}$$

由此可直接获得

$$\alpha_3=3\alpha_1-\alpha_2,\alpha_5=\alpha_1+\alpha_2-\alpha_4.$$

4.2 求解线性方程组

例2 求下列齐次方程组

$$\begin{cases} x_1-x_2-x_3+2x_5=0 \\ 2x_1-x_2+x_3-2x_4+x_5=0 \\ 3x_1-x_2+4x_3-3x_4+4x_5=0 \end{cases}$$

的基础解系和通解.

解 令

$$A=\begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 & 0 & 2 \\ 2 & -1 & 1 & -2 & 1 \\ 3 & -1 & 4 & -3 & 4 \end{bmatrix}$$

对 A 进行初等行变换变为

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 & 0 & 2 \\ 2 & -1 & 1 & -2 & 1 \\ 3 & -1 & 4 & -3 & 4 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 3 & -2 & -3 \\ 0 & 2 & 7 & -3 & -2 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 3 & -2 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 4 \end{bmatrix}$$

为了避免迭代对上述矩阵阶梯形继续进行初等行变换化为行最简形

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 3 & -2 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 4 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 1 & 6 \\ 0 & 1 & 0 & -5 & -15 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 4 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -4 & -9 \\ 0 & 1 & 0 & -5 & -15 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 4 \end{bmatrix}$$

由行最简形矩阵可直接求得矩阵的基础解系为

$$\xi_1=\begin{bmatrix} 4 \\ 5 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix},\ \xi_2=\begin{bmatrix} 9 \\ 15 \\ -4 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix},$$

则该方程组的通解为

$$\xi=k_1\xi_1+k_2\xi_2,\ \forall k_1,k_2\in R,$$

例3 求下列非齐次线性方程组

$$\begin{cases} x_1-x_2-x_3+x_4=0 \\ x_1-x_2+x_3-3x_4=1 \\ x_1-x_2-2x_3+3x_4=-1/2 \end{cases}$$

的通解.

解 令

$$A=\begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -3 \\ 1 & -1 & -2 & 3 \end{bmatrix},\ b=\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -1/2 \end{bmatrix}$$

则

$$\begin{aligned} \overline{A}&=[A,b] \\ &=\left[\begin{array}{cccc:c} 1 & -1 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & -3 & 1 \\ 1 & -1 & -2 & 3 & -1/2 \end{array}\right] \\ &\to \left[\begin{array}{cccc:c} 1 & -1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & -4 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 2 & -1/2 \end{array}\right] \\ &\to \left[\begin{array}{cccc:c} 1 & -1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 1/2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \\ &\to \left[\begin{array}{cccc:c} 1 & -1 & 0 & -1 & 1/2 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 1/2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \end{aligned}$$

令 $x=[x_1,x_2,x_3,x_4]^T$，由此可求得 $Ax=b$ 的一个特解为

$$\eta_0=\begin{bmatrix} 1/2 \\ 0 \\ 1/2 \\ 0 \end{bmatrix},$$

并且 $Ax=0$ 的基础解系为

$$\xi_1=\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix},\ \xi_2=\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix},$$

所以此方程组的通解为 $\eta=\eta_0+k_1\xi_1+k_2\xi_2,\ \forall k_1,k_2\in R$.

参考文献

[1] 易忠. 高等代数与解析几何[M]. 北京：清华大学出版社，2007.

[2] 北京大学数学系几何与代数教研室前代数小组. 高等代数[M]. 北京：高等教育出版社，2003.

[3] 同济大学应用数学系. 线性代数[M]. 北京：高等教育出版社，2003.