§4.3 非齐次线性方程组

非齐次线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \cdots\cdots\cdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m. \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow A_{m\times n}x = b$$

$$\Leftrightarrow x_1\alpha_1 + x_2\alpha_2 + \cdots + x_n\alpha_n = \vec{b}$$

一、非齐次线性方程组解的判定

定理： 对于非齐次线性方程组$Ax=b$，下列条件等价

（1）$Ax=b$有解（或相容）；

（2）b可由A的列向量组$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$ 线性表示;

（3）向量组$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$与向量组$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n,b$ 等价

（4）增广矩阵（A,b）的秩等于系数矩阵A的秩，即

$R(A,b)=R(A)$.

推论： n 元线性方程组 $Ax=b$

① 无解的充分必要条件是 $R(A)<R(A,b)$;

② 有唯一解的充分必要条件是 $R(A)=R(A,b)=n$;

③ 有无穷多解的充分必要条件是 $R(A)=R(A,b)<n$.

分析： 只需证明条件的充分性，即

- $R(A)<R(A,b) \Rightarrow$ 无解;
- $R(A)=R(A,b)=n \Rightarrow$ 唯一解;
- $R(A)=R(A,b)<n \Rightarrow$ 无穷多解.

那么

✓ 无解 $\Rightarrow R(A)<R(A,b)$;

✓ 唯一解 $\Rightarrow R(A)=R(A,b)=n$;

✓ 无穷多解 $\Rightarrow R(A)=R(A,b)<n$.

证明：设 $R(A)=r$，为叙述方便，不妨设 $B=(A,b)$ 的行最简形矩阵为

$$\tilde{B}=\begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 & b_{11} & \cdots & b_{1,n-r} & d_1 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & b_{21} & \cdots & b_{2,n-r} & d_2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & b_{r,1} & \cdots & b_{r,n-r} & d_r \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 & d_{r+1} \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{pmatrix}_{m\times(n+1)}$$

前 r 列　　后 $n-r$ 列

$$\boxed{R(A)\le R(A,b)\le R(A)+1}$$

第一步：往证 $R(A)<R(A,b)\Rightarrow$ 无解.

若 $R(A)<R(A,b)$，即 $R(A,b)=R(A)+1$，则 $d_{r+1}=1$.

于是第 $r+1$ 行对应矛盾方程 $0=1$，故原线性方程组无解.

$$\tilde{B}=\begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 & b_{11} & \cdots & b_{1,n-r} & d_1 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & b_{21} & \cdots & b_{2,n-r} & d_2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & b_{r,1} & \cdots & b_{r,n-r} & d_r \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 & d_{r+1} \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{pmatrix}_{m\times(n+1)}$$

前 n 列　　后 $n-r$ 列

$\tilde{B}$ 对应的线性方程组为

$$\begin{cases} x_1 = d_1, \\ x_2 = d_2, \\ \cdots\cdots \\ x_n = d_n. \end{cases}$$

第二步：往证 $R(A)=R(A,b)=n \Rightarrow$ 唯一解.

若 $R(A)=R(A,b)=n$，　则 $d_{r+1}=0$ 且 $r=n$，从而 b_{ij} 都不出现.

故原线性方程组有唯一解.

$$\tilde{B}=\begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 & b_{11} & \cdots & b_{1,n-r} & d_1 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & b_{21} & \cdots & b_{2,n-r} & d_2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & b_{r,1} & \cdots & b_{r,n-r} & d_r \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 & d_{r+1} \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{pmatrix}_{m\times(n+1)}$$

前 r 列　　后 $n-r$ 列

第三步： 往证 $R(A)=R(A,b)<n \Rightarrow$ 无穷多解.

若 $R(A)=R(A,b)<n$， 即 $r<n$， 则 $d_{r+1}=0$.

$\tilde{B}$ 对应的线性方程组为

$$\begin{cases} x_1 \qquad\qquad + b_{11}x_{r+1}+\cdots+b_{1,n-r}x_n = d_1, \\ \qquad x_2 \qquad + b_{21}x_{r+1}+\cdots+b_{2,n-r}x_n = d_2, \\ \qquad\qquad \cdots\cdots \\ \qquad\qquad x_r + b_{r1}x_{r+1}+\cdots+b_{r,n-r}x_n = d_r . \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_1 \qquad\qquad + b_{11}x_{r+1} + \cdots + b_{1,n-r}x_n = d_1, \\ \qquad x_2 \qquad + b_{21}x_{r+1} + \cdots + b_{2,n-r}x_n = d_2, \\ \qquad\qquad \cdots\cdots \\ \qquad\qquad x_r + b_{r1}x_{r+1} + \cdots + b_{r,n-r}x_n = d_r. \end{cases}$$

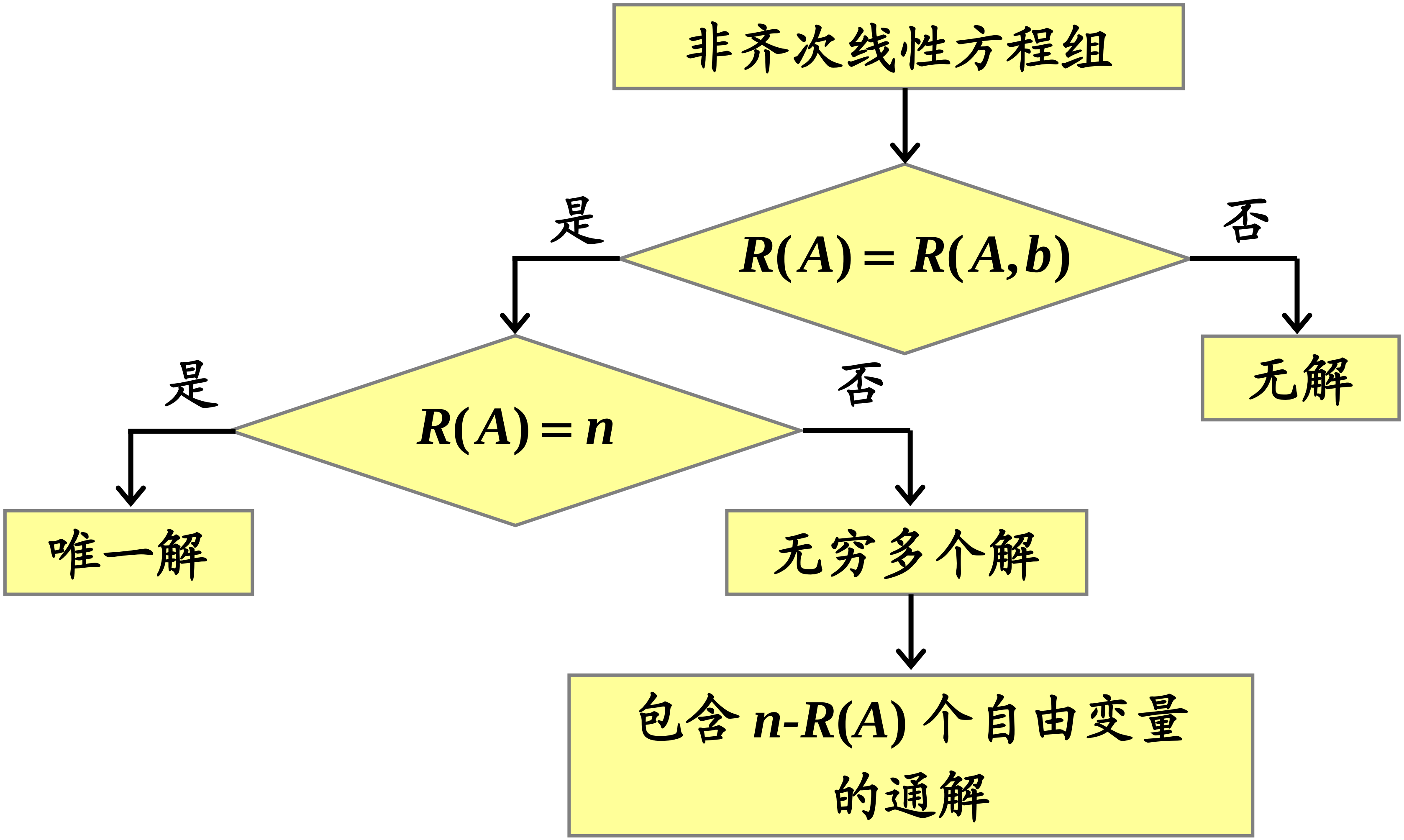
令 $x_{r+1}, \ldots, x_n$ 作自由变量，则

$$\begin{cases} x_1 = -b_{11}x_{r+1} - \cdots - b_{1,n-r}x_n + d_1, \\ x_2 = -b_{21}x_{r+1} - \cdots - b_{2,n-r}x_n + d_2, \\ \qquad \cdots\cdots \\ x_r = -b_{r1}x_{r+1} - \cdots - b_{r,n-r}x_n + d_r. \end{cases}$$

线性方程组的通解

再令 $x_{r+1} = c_1,$

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_r \\ x_{r+1} \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -b_{11}c_1 - \cdots - b_{1,n-r}c_{n-r} + d_1 \\ \vdots \\ -b_{r1}c_1 - \cdots - b_{r,n-r}c_{n-r} + d_r \\ c_1 \\ \ddots \\ c_{n-r} \end{pmatrix} = c_1 \begin{pmatrix} -b_{11} \\ \vdots \\ -b_{r1} \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} + \cdots + c_{n-r} \begin{pmatrix} -b_{1,n-r} \\ \vdots \\ -b_{r,n-r} \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} d_1 \\ \vdots \\ d_r \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$


非齐次线性方程组
$R(A)=R(A,b)$
是
否
无解
$R(A)=n$
是
否
唯一解
无穷多个解
包含 n-$R(A)$ 个自由变量的通解

二、非齐次线性方程组解的性质

性质：若$x=\eta_1,\eta_2$是非齐次线性方程组$Ax=b$的解，

则$x=\eta_1-\eta_2$ 是 $Ax=0$ 的解.

性质：若 $x=\eta$ 是$Ax=b$的解，$x=\xi$是 $Ax=0$ 的解，

则$x=\xi+\eta$ 是$Ax=b$ 的解.

性质：若 $\eta_1,\eta_2,\cdots,\eta_s$ 是$Ax=b$的解,$k_1+k_2+\cdots+k_s=1$

则$x=k_1\eta_1+k_2\eta_2+\cdots+k_s\eta_s$是 $Ax=b$ 的解.

三、非齐次线性方程组解的结构

定理：若非齐次线性方程组$Ax=b$有解，$\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_{n-r}$是对应的齐次线性方程组$Ax=0$的基础解系，$\eta^*$是$Ax=b$的某个解（称为$Ax=b$的一个特解），则$Ax=b$的通解为

$$x=\eta^*+k_1\xi_1+k_2\xi_2+\cdots+k_{n-r}\xi_{n-r}$$

其中$k_1,k_2,\cdots,k_{n-r}$为任意常数.

四、求解 $A_{m\times n}x=b$ 的方法

（1）写出增广矩阵 (A,b);

（2）利用初等行变换将其化为行阶梯形，判断 $R(A)\overset{?}{=}R(A,b)$ 从而确定线性方程组是否有解;

（3）如果线性方程组有解，就继续将 (A,b) 化为行最简形;

（4）从行最简形写回线性方程组，并将每个首非零元素对应的变量放在等号的左边，其余变量（称为自由未知变量）移到等号的右边，自由未知变量全取零，即为特解.

（5）对自由未知变量赋值得解向量 $\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_{n-r}$，即$\xi_1,\cdots,\xi_{n-r}$ 为$Ax=0$的基础解系，写出线性方程组的解或通解.

例： 求线性方程组 $\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 = 1 \\ 2x_1 - x_2 + 2x_3 - 2x_4 = 3 \\ 3x_1 + x_2 + 5x_3 + 2x_4 = 4 \end{cases}$ 的通解.

解： 其增广矩阵为

$$(A,b)=\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 3 & 4 & 1 \\ 2 & -1 & 2 & -2 & 3 \\ 3 & 1 & 5 & 2 & 4 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 3 & 4 & 1 \\ 0 & -5 & -4 & -10 & 1 \\ 0 & -5 & -4 & -10 & 1 \end{array}\right)$$

$$\sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 3 & 4 & 1 \\ 0 & -5 & -4 & -10 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$ （行阶梯形，并判断出有解）

$$\sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 3 & 4 & 1 \\ 0 & 1 & 4/5 & 2 & -1/5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 7/5 & 0 & 7/5 \\ 0 & 1 & 4/5 & 2 & -1/5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

所以 $\begin{cases} x_1 + \frac{7}{5}x_3 = \frac{7}{5} \\ x_2 + \frac{4}{5}x_3 + 2x_4 = -\frac{1}{5} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = \frac{7}{5} - \frac{7}{5}x_3 \\ x_2 = -\frac{1}{5} - \frac{4}{5}x_3 - 2x_4 \end{cases}$

（写回线性方程组）　　(x_3, x_4称为自由未知变量)

故通解为 $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{7}{5} \\ -\frac{1}{5} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + k_1 \begin{pmatrix} -\frac{7}{5} \\ -\frac{4}{5} \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + k_2 \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, k_1, k_2为任意常数.

例： 已知η_1,η_2是非齐次线性方程组$Ax=b$的两个不同的解，ξ_1,ξ_2是对应齐次线性方程组$Ax=0$的基础解系，k_1,k_2为任意常数，则方程组$Ax=b$的通解为(　　)

（A）　$k_1\xi_1+k_2(\xi_1+\xi_2)+\dfrac{\eta_1-\eta_2}{2}$

（B）　$k_1\xi_1+k_2(\xi_1-\xi_2)+\dfrac{\eta_1+\eta_2}{2}$

（C）　$k_1\xi_1+k_2(\eta_1+\eta_2)+\dfrac{\eta_1-\eta_2}{2}$

（D）　$k_1\xi_1+k_2(\eta_1-\eta_2)+\dfrac{\eta_1+\eta_2}{2}$

例： 设A是$m\times n$的矩阵，$Ax=0$是非齐次线性方程组$Ax=b$所对应的齐次线性方程组，则下列结论正确的是(　　)

（A）若$Ax=0$仅有零解，则$Ax=b$有唯一解

（B）若$Ax=0$有非零解，则$Ax=b$有无穷多个解

（C）若$Ax=b$有无穷多个解，则$Ax=0$仅有零解

（D）若$Ax=b$有无穷多个解，则$Ax=0$有非零解

若A为n阶方阵且含参数时，求出$|A|\neq 0$的条件，即唯一解的条件. 再将$|A|=0$的参数带入，对(A,b)作初等行变换化为行阶梯形；判断$R(A)\overset{?}{=}R(A,b)$，从而确定无解，还是无穷多解.

例：设有方程组
$$\begin{cases}(1+\lambda)x_1+x_2+x_3=0\\ x_1+(1+\lambda)x_2+x_3=3\\ x_1+x_2+(1+\lambda)x_3=\lambda\end{cases}$$
，问λ取何值时

（1）方程组有唯一解;

（2）无解;

（3）有无穷多解？并求其通解.

解： 系数行列式

$$|A|=\begin{vmatrix}1+\lambda & 1 & 1\\ 1 & 1+\lambda & 1\\ 1 & 1 & 1+\lambda\end{vmatrix}=(\lambda+3)\lambda^2$$

当$\lambda\neq -3$且$\lambda\neq 0$时，$|A|\neq 0$，方程组有唯一解.

当$\lambda=0$时，

$$(A,b)=\left(\begin{array}{ccc|c}1&1&1&0\\1&1&1&3\\1&1&1&0\end{array}\right)\sim\left(\begin{array}{ccc|c}1&1&1&0\\0&0&0&3\\0&0&0&0\end{array}\right)$$

$R(A)=1<R(A,b)=2$，所以方程组无解.

当λ= -3时，

$$(A,b)=\left(\begin{array}{ccc|c} -2 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & -2 & -3 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

$R(A)=R(A,b)=2<3$，所以方程组有无穷多解，且其通解为

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix} + k\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, k \in R.$$

附注:

- ✓ 对含参数的矩阵作初等变换时，由于 λ， $\lambda+3$ 等因式可能等于零，故不宜进行下列的变换:

$$r_2-\frac{1}{\lambda}r_1 \qquad r_2\times(3+\lambda) \qquad r_3\div(\lambda+3)$$

- ✓ 如果作了这样的变换，则需对 $\lambda=0$（或 $\lambda+3=0$）的情况另作讨论.

例: 已知4阶方阵 $A=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4)$，且 $\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$ 线性无关 $\alpha_1=2\alpha_2-\alpha_3$，如果 $\beta=\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3+\alpha_4$，求 $Ax=\beta$ 的通解.

解: 由 $\beta=\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3+\alpha_4$ 知，$\eta=(1,1,1,1)^T$ 是 $Ax=\beta$ 的解.

又由题意知，$R(A)=3$，且

$$A\begin{pmatrix}1\\-2\\1\\0\end{pmatrix}=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4)\begin{pmatrix}1\\-2\\1\\0\end{pmatrix}=\alpha_1-2\alpha_2+\alpha_3=0,$$

所以 $\xi=(1,-2,1,0)^T$ 为 $Ax=0$ 的基础解系，故 $Ax=\beta$ 的通解为

$$c=(1,1,1,1)^T+k(1,-2,1,0)^T,k\in R.$$

例：设有四元非齐次线性方程组的系数矩阵的秩为3，已知 η_1,η_2,η_3 是它的三个解向量，且

$$\eta_1=\begin{pmatrix}2\\3\\4\\5\end{pmatrix} \qquad \eta_2+\eta_3=\begin{pmatrix}1\\2\\3\\4\end{pmatrix}$$

求该方程组的通解.

解: 由四元非齐次线性方程组的系数矩阵的秩为3知，其对应的齐次线性方程组的基础解系含有一个向量，而

$$2\eta_1-(\eta_2+\eta_3)=(\eta_1-\eta_2)+(\eta_1-\eta_3)=2\begin{pmatrix}2\\3\\4\\5\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}1\\2\\3\\4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3\\4\\5\\6\end{pmatrix}$$

是齐次线性方程组的一个非零解，故为基础解系，从而非齐次线性方程组的通解为

$$\begin{pmatrix}2\\3\\4\\5\end{pmatrix}+k\begin{pmatrix}3\\4\\5\\6\end{pmatrix},k\in R.$$

矩阵秩、方程组的解与向量组线性相关性的关系

① 齐次线性方程组$Ax=0$

	A的秩	方程组的解	A列向量组$\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_n$
等价关系	$R(A)=n$	唯一解	线性无关
	$R(A)<n$	无穷多解	线性相关

② 非齐次线性方程组$Ax=b$

	A,B的秩	方程组的解	b与组P关系	组P与组Q关系
等价关系	$R(A)<R(B)$	无解	b不能由组P线性表示	组P与组Q不等价
	$R(A)=R(B)=n$	唯一解	b可由组P表示(唯一)	组P无关组Q相关
	$R(A)=R(B)<n$	无穷多解	b可由组P表示(不唯一)	组P与组Q皆相关

其中$B=(A,b)$，向量组$P:\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_n$；向量组$Q:\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_n,b$.