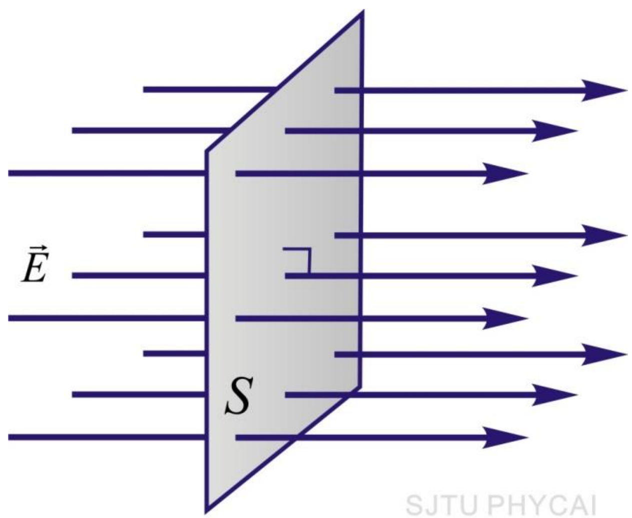
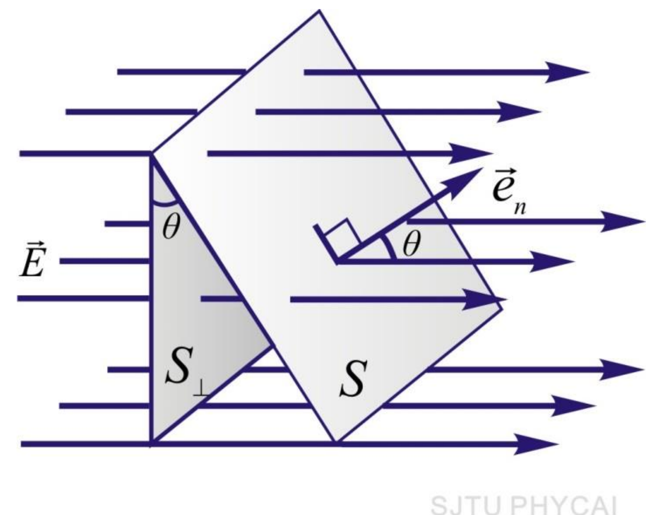
电场强度通量 Ψ_E：

通过电场中任一曲面的电场线条数。

1. 均匀电场中通过平面 S 的电场强度通量



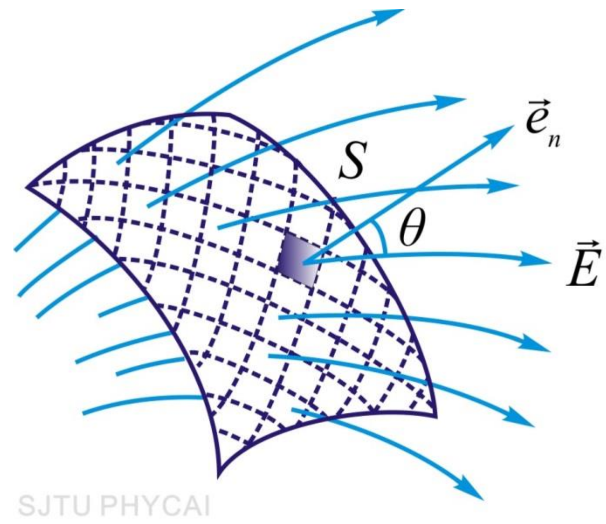


$$\boldsymbol{\Psi_E = nS = ES}$$

$$\boldsymbol{\Psi_E = ES\cos\theta = \vec{E}\cdot\vec{S}}$$

2. 非均匀电场的电场强度通量

$$\mathrm{d}\Psi_E = E\cos\theta \cdot \mathrm{d}S = \vec{E} \cdot \mathrm{d}\vec{S}$$

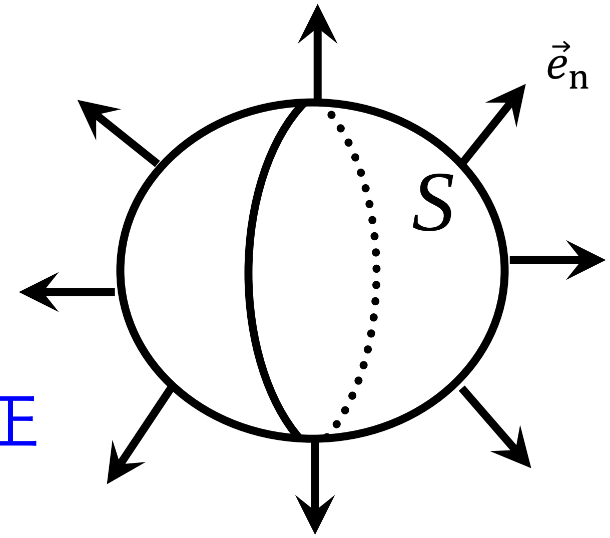


$$\Psi_E = \iint_S E\cos\theta\, dS = \iint_S \vec{E} \cdot \mathrm{d}\vec{S}$$

的正、负取决于面元的法线方向与电场强度方向夹角的大小

对闭合曲面的电通量：

$$\Psi_{\mathrm{e}} = \oiint_S \vec{E} \cdot \mathrm{d}\vec{S} = \oiint_S E \cos\theta \, \mathrm{d}S$$



规定闭合曲面从内指向外的法线方向为正

（1）当$\theta < 90°$时：电场线穿出闭合曲面，对电场强度通量的贡献为正

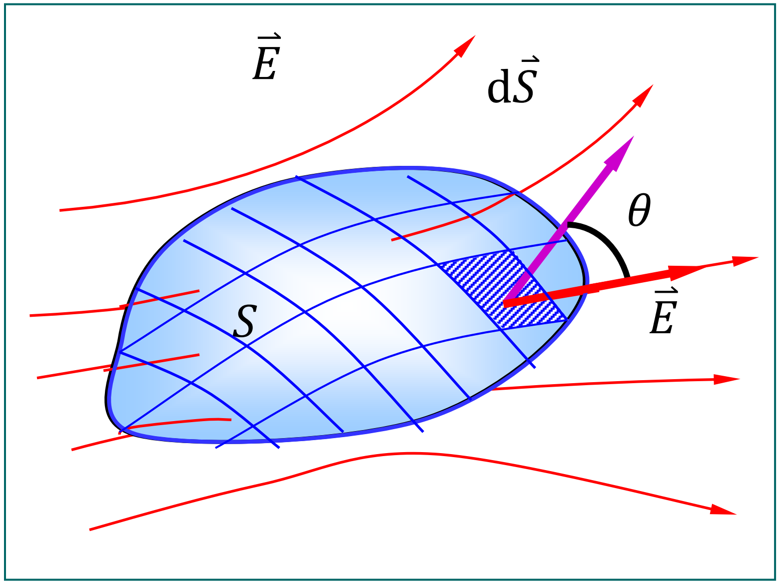
（2）当$\theta > 90°$时：电场线穿入闭合曲面，对电场强度通量的贡献为负

（3）当$\theta = 90°$时：电场线与曲面相切，对电场强度通量的贡献为零

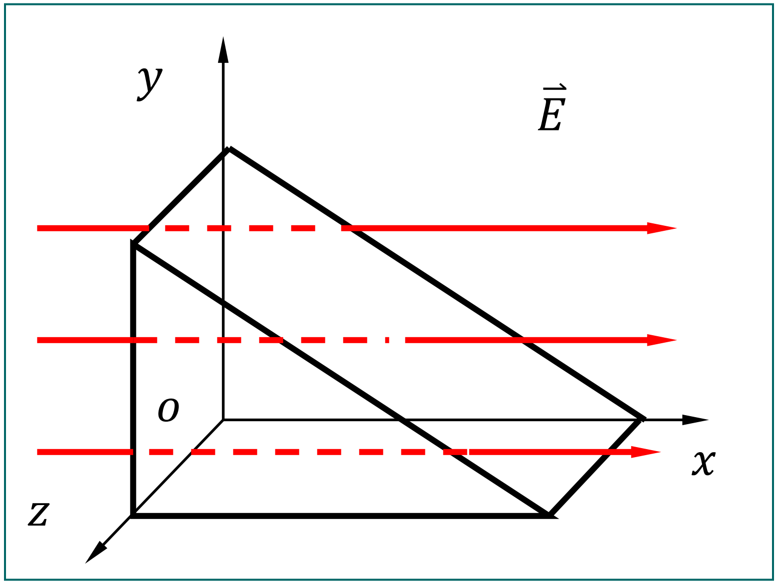
● 闭合曲面的电场强度通量

$$\mathrm{d}\Psi_{\mathrm{e}} = E \cdot \mathrm{d}\vec{S}$$

$$\Psi_{\mathrm{e}} = \oiint_S \vec{E} \cdot \mathrm{d}\vec{S} = \oiint_S E \cos\theta \, \mathrm{d}S$$

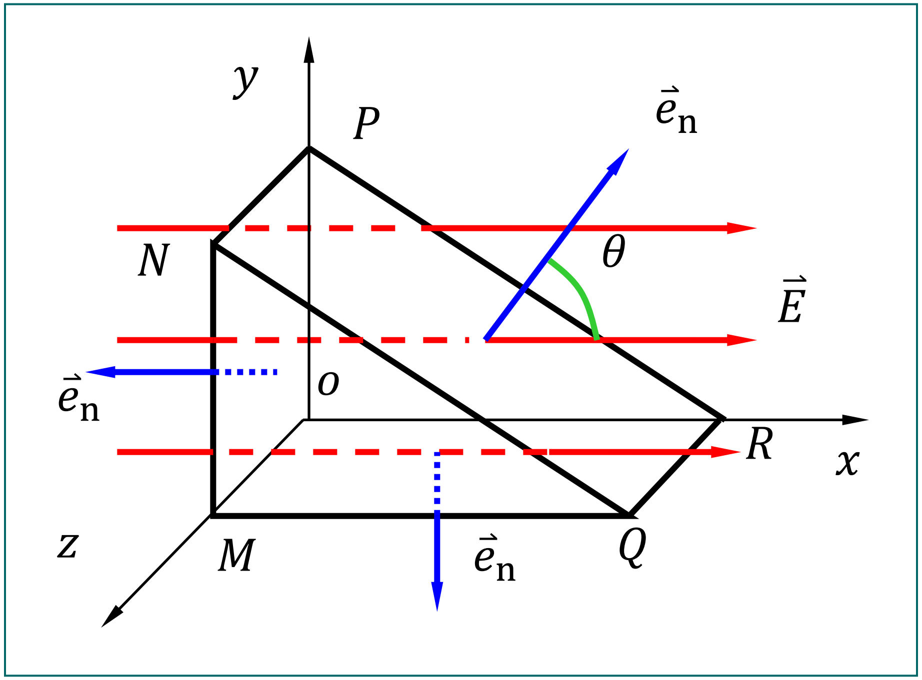


例： 如图所示，有一个三棱柱体放置在电场强度 $\vec{E} = 200\vec{i}\,\mathrm{N} \cdot \mathrm{C}^{-1}$ 的匀强电场中。求通过此三棱柱体的电场强度通量。



解 $\Psi_{\mathrm{e}} = \Psi_{\mathrm{e前}} + \Psi_{\mathrm{e后}} + \Psi_{\mathrm{e左}}$

$$+\Psi_{\mathrm{e右}} + \Psi_{\mathrm{e下}}$$



$$\left\{\begin{aligned} &\Psi_{\mathrm{e前}} = \Psi_{\mathrm{e后}} = \Psi_{\mathrm{e下}} \\ &\qquad = \iint_{s} \vec{E} \cdot \mathrm{d}\vec{S} = 0 \\ &\Psi_{e左} = \iint_{s左} \vec{E} \cdot d\vec{S} = ES_{左} \cos\pi = -ES_{左} \end{aligned}\right.$$

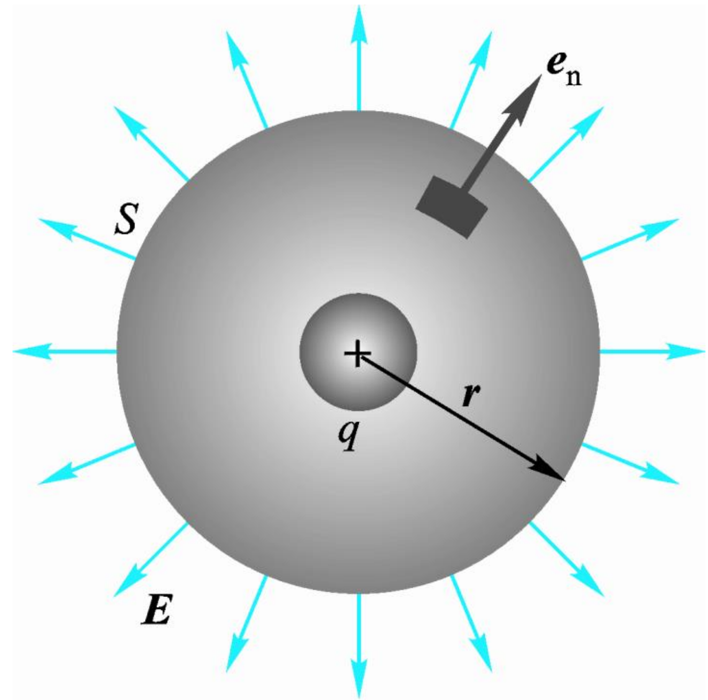
$$\Psi_{\mathrm{e右}} = \iint_{s右} \vec{E} \cdot \mathrm{d}\vec{S} = ES_{右} \cos\theta = ES_{左}$$

$$\Psi_{\mathrm{e}} = \Psi_{\mathrm{e前}} + \Psi_{\mathrm{e后}} + \Psi_{\mathrm{e左}} + \Psi_{\mathrm{e右}} + \Psi_{\mathrm{e下}} = 0$$

§ 7-3 静电场的高斯定理

一、静电场的高斯定理

- 点电荷在球面的圆心处



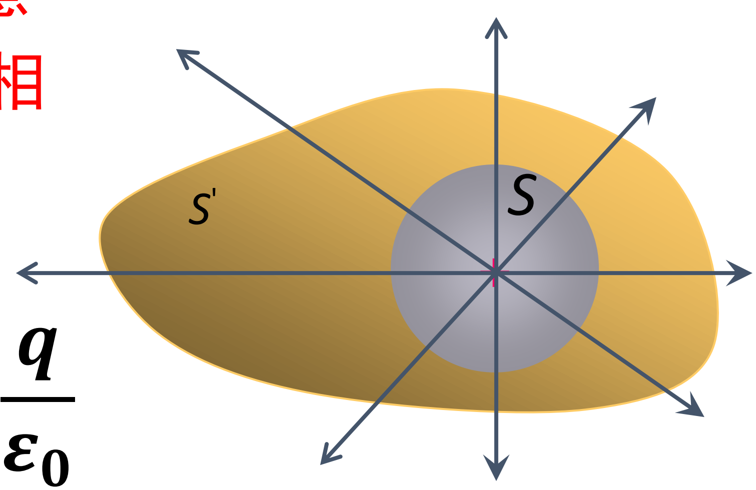
球面场强：$$E=\frac{q}{4\pi\varepsilon_0 R^2}$$

$$\mathrm{d}\Psi_E = E\cos 0^\circ \,\mathrm{d}S = \frac{q\cdot \mathrm{d}S}{4\pi\varepsilon_0 R^2}$$

$$\Psi_E = \oint\!\!\!\oint_S \frac{q\,dS}{4\pi\varepsilon_0 R^2} = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 R^2}\cdot 4\pi R^2 = \frac{q}{\varepsilon_0}$$

- 点电荷（系）在任意形状的闭合面内

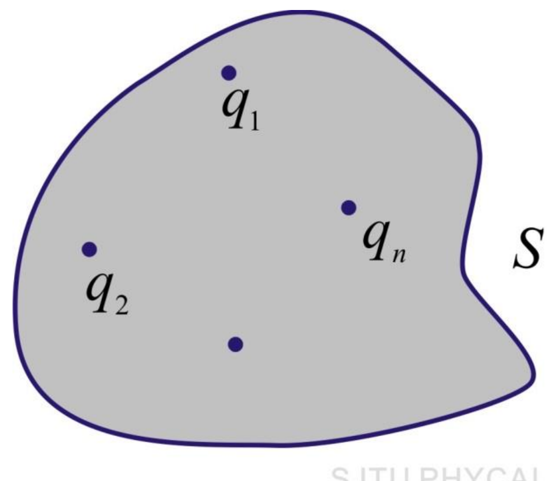
通过球面S 的电场线也必通过任意曲面 S，即它们的电场强度通量相等，为 q/ε_0。



$$\Psi_E = \oint\!\!\oint_{S'} \vec{E} \cdot \mathrm{d}\vec{S'} = \oint\!\!\oint_{S} \vec{E} \cdot \mathrm{d}\vec{S} = \frac{q}{\varepsilon_0}$$

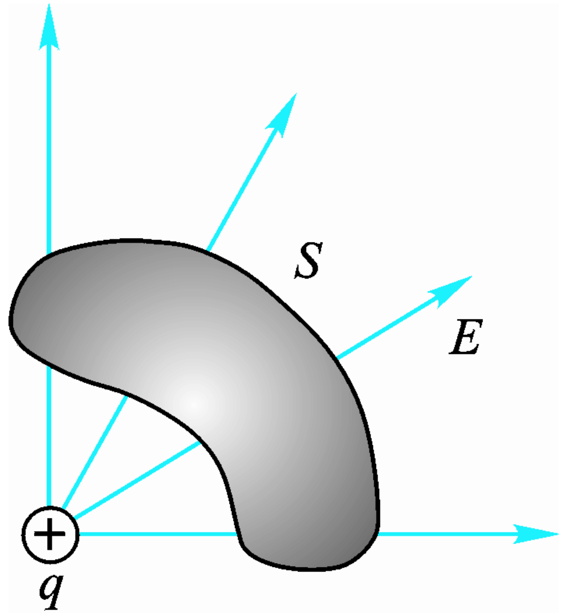
$$\Psi_E = \oint\!\!\oint_{S} \vec{E} \cdot \mathrm{d}\vec{S} = \oint\!\!\oint_{S} \sum_{i=1}^{n} \vec{E_i} \cdot \mathrm{d}\vec{S}$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \frac{q_i}{\varepsilon_0}$$



- 电荷q 在闭合曲面以外

穿进曲面的电场线条数等于穿出曲面的电场线条数。



$$\Psi_E = \oint\!\!\oint_S \vec{E} \cdot \mathrm{d}\vec{S} = 0$$

高斯定理：

静电场中，通过任一闭合曲面的电场强度通量等于该曲面所包围的所有电荷量的代数和的$1/\varepsilon_0$倍。

$$\oint\!\!\oint_S \vec{E} \cdot \mathrm{d}\vec{S} = \frac{1}{\varepsilon_0}\sum_{i=1}^{n} q_{i内} \qquad \oint\!\!\oint_S \vec{E} \cdot \mathrm{d}\vec{S} = \frac{1}{\varepsilon_0}\iiint_V \rho \mathrm{d}V$$

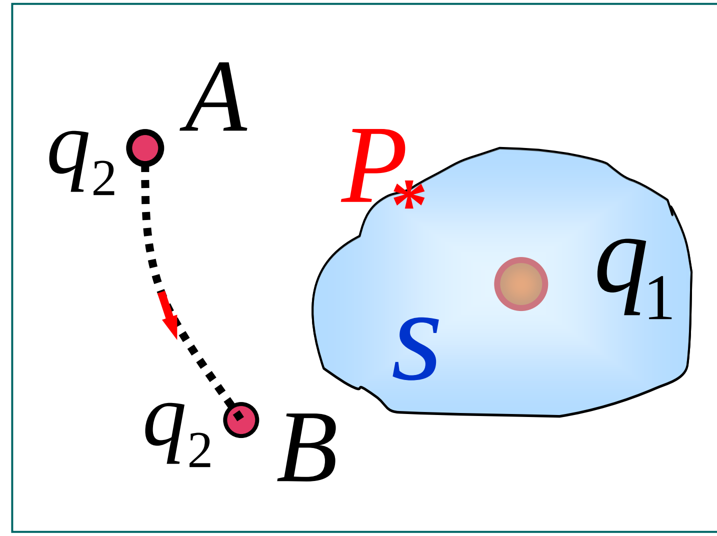
$$\Psi_{\mathrm{e}} = \oiint_S \vec{E} \cdot \mathrm{d}\vec{S} = \frac{1}{\varepsilon_0}\sum_{i=1}^{n} q_{i内}$$

说明

- 高斯面上的电场强度为所有内外电荷的总电场强度；
- 高斯定理表示穿过闭合曲面的总电通量，仅由闭曲面内的电荷所决定；
- 静电场及电磁学的基本定律。表明静电场是有源场，电荷是电力线的源；
- 高斯定理对静电场是普遍适用的，但仅对电荷分布具有空间对称性的电荷系统才有可能用此定理计算场强 。

讨论

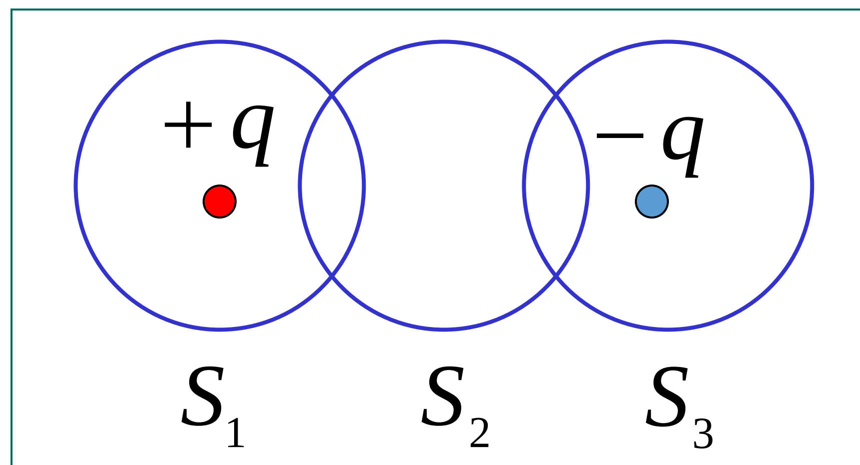
- 将 q_2 从 A 移到 B 点 P 点电场强度是否变化? 穿过高斯面 S 的 Φ_e 有否变化?



- 在点电荷 $+q$ 和 $-q$ 的静电场中，做如下的三个闭合面 S_1, S_2, S_3，求通过各闭合面的电通量。

$$\Psi_{e1} = \oint\!\!\oint_{S_1} \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{q}{\varepsilon_0}$$

$$\Psi_{e2} = 0 \qquad \Psi_{e3} = \frac{-q}{\varepsilon_0}$$



四、 高斯定理的应用

（用高斯定理求解的静电场必须具有一定的对称性）

其步骤为

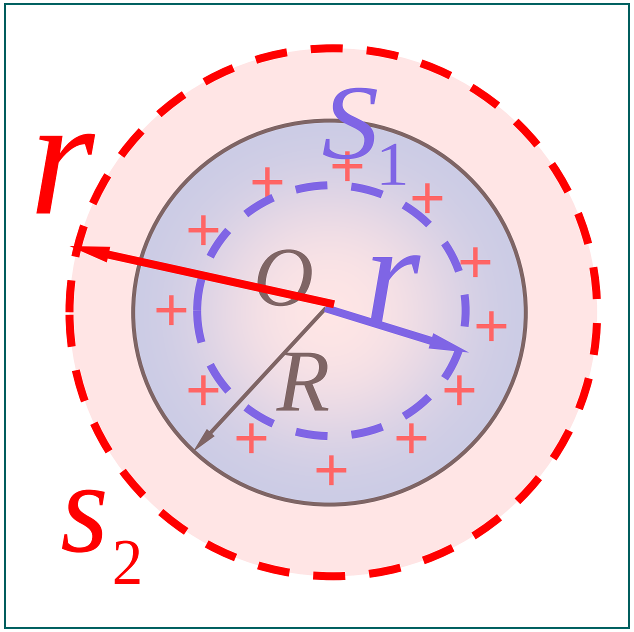
- 对称性分析；
- 根据对称性选择合适的高斯面；
- 应用高斯定理计算.

高斯定理举例：

- 均匀带电球面（球体、球壳等）的电场分布
- 均匀带电直线（圆柱面、圆柱体等）的电场分布
- 均匀带电无限大平面的电场分布

例：均匀带电球壳的电场强度

一半径为R，均匀带电 Q 的薄球壳．求球壳内外任意点的电场强度.



解（1）$0 < r < R$

$$\oint\!\!\oint_{S_1} \vec{E} \cdot d\vec{S} = 0$$

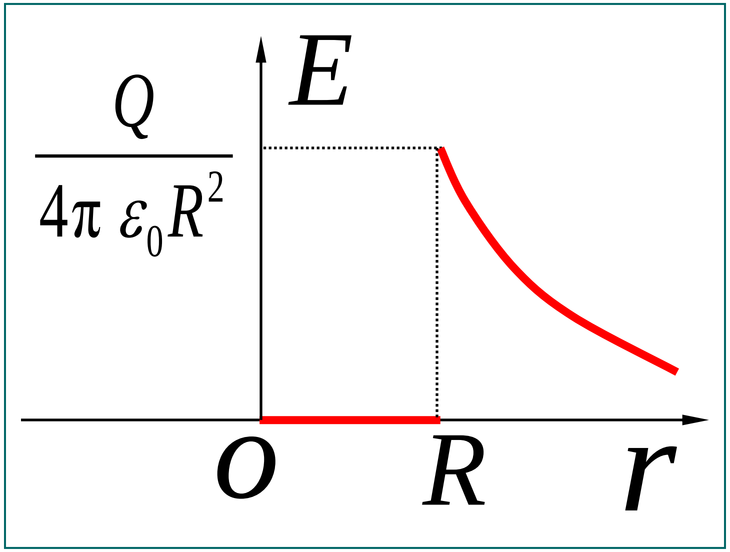
$$\boxed{\vec{E} = 0}$$

（2）$r > R$

$$\oint\!\!\oint_{S_2} \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{Q}{\varepsilon_0}$$

$$4\pi\, r^2 E = \frac{Q}{\varepsilon_0}$$

$$\boxed{E = \frac{Q}{4\pi\,\varepsilon_0 r^2}}$$

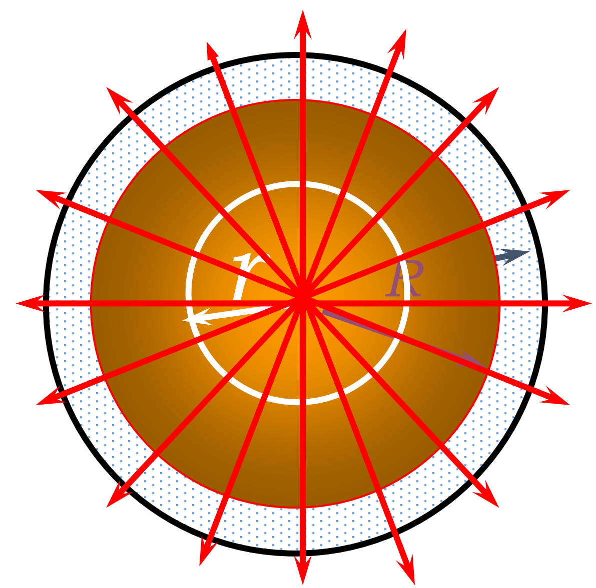


例：均匀带电球体的电场。球半径为R，球的介电常数为 ε_0，总电量为 Q 。

解：电场分布也应有球对称性，方向沿径向。

作同心且半径为r的高斯面

$$\oiint_S \vec{E}\cdot d\vec{S} = E\cdot 4\pi r^2 = \frac{\sum q}{\varepsilon_0}$$



$$E = \frac{\sum q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}$$

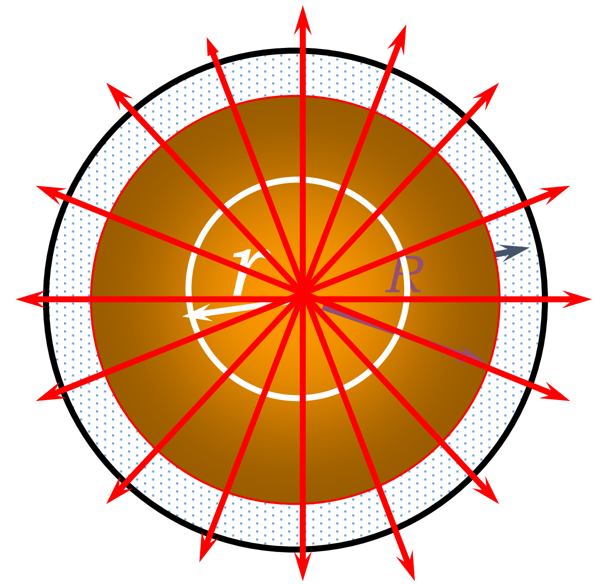
$$E=\frac{\sum q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}$$

$$\rho=\frac{Q}{\frac{4}{3}\pi R^3}$$

r<R 时，高斯面内电荷

$$\sum q=\int \rho dV=\rho\cdot\frac{4}{3}\pi r^3$$

$$E=\frac{\rho}{3\varepsilon_0}r=\frac{Qr}{4\pi\varepsilon_0 R^3}$$



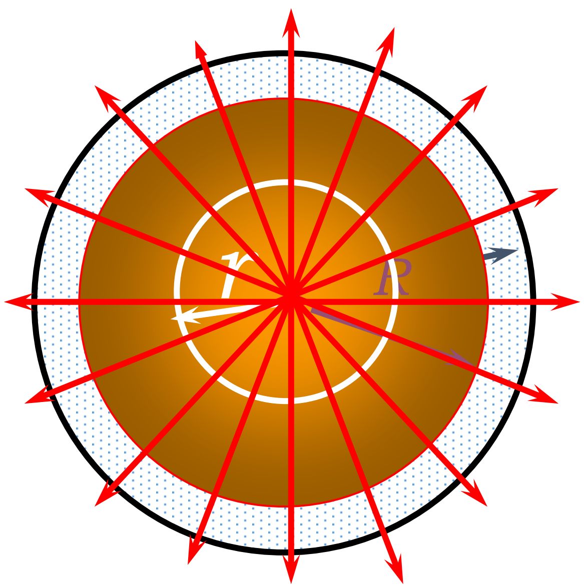
r>R 时，高斯面内电荷

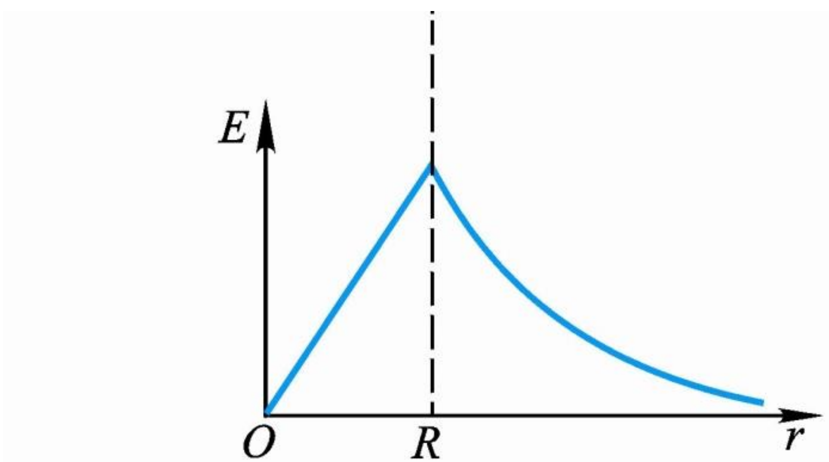
$$\sum q=\rho\cdot\frac{4}{3}\pi R^3$$

$$E=\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}$$

均匀带电球体的电场分布

$$E=\begin{cases}\dfrac{Qr}{4\pi\varepsilon_0 R^3} & r<R\\[2ex] \dfrac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r^2} & r>R\end{cases}$$



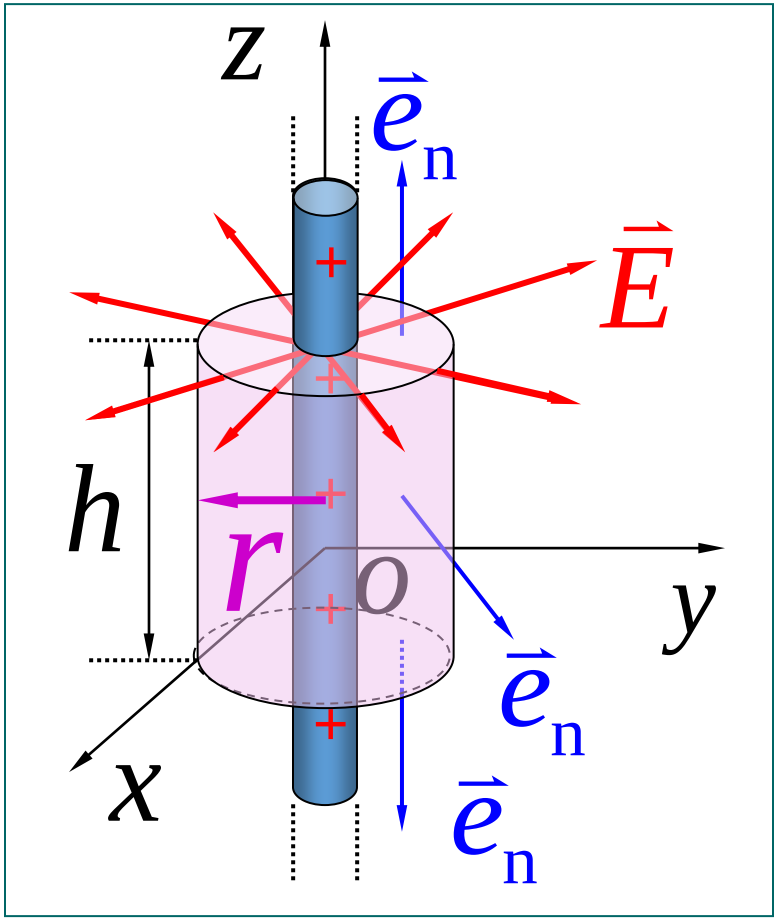


例：无限长均匀带电直线的电场强度

无限长均匀带电直线，单位长度上的电荷，即电荷线密度为λ，求距直线为r处的电场强度.

解 对称性分析：**轴对称**

选取闭合的柱形高斯面



$$\oiint_{s}\vec{E}\cdot \mathrm{d}\vec{S}=\iint_{s(\text{柱面})}\vec{E}\cdot d\vec{S}$$

$$+\iint_{s(\text{上底})}\vec{E}\cdot d\vec{S}+\iint_{s(\text{下底})}\vec{E}\cdot d\vec{S}$$

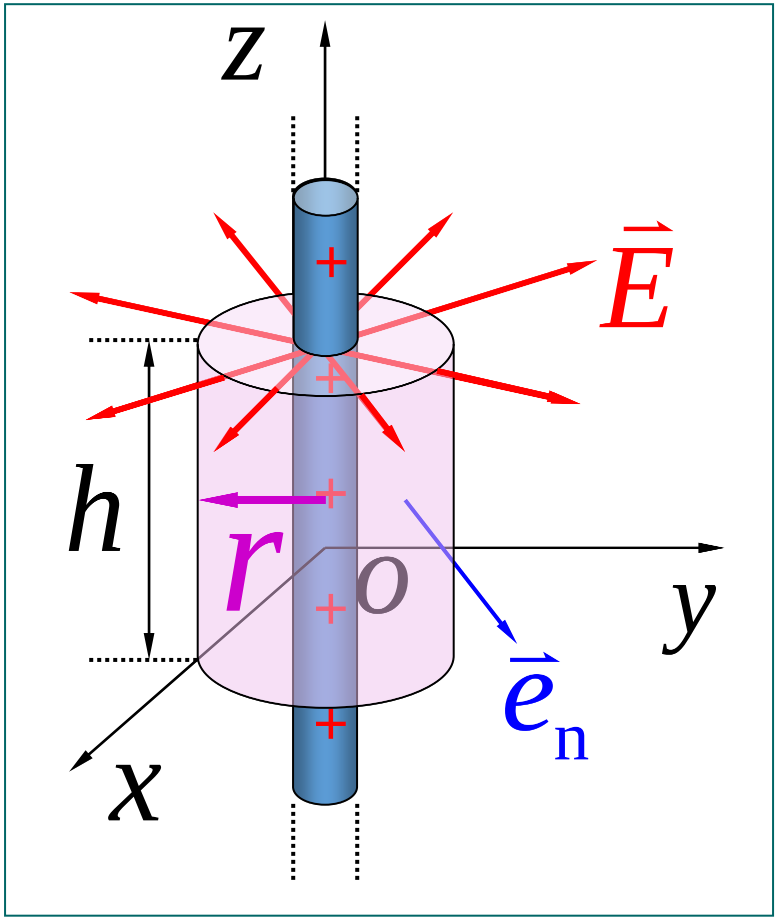
$$=\iint_{s(\text{柱面})}\vec{E}\cdot \mathrm{d}\vec{S}$$

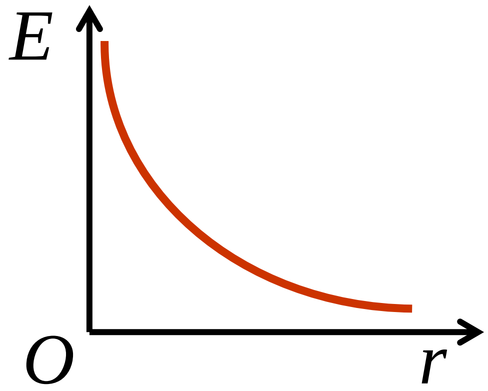
$$\oiint_S \vec{E}\cdot \mathrm{d}\vec{S} = \iint_{s(\text{柱面})} E\,\mathrm{d}S$$

$$= \frac{\lambda h}{\varepsilon_0}$$

$$2\pi r h E = \frac{\lambda h}{\varepsilon_0}$$

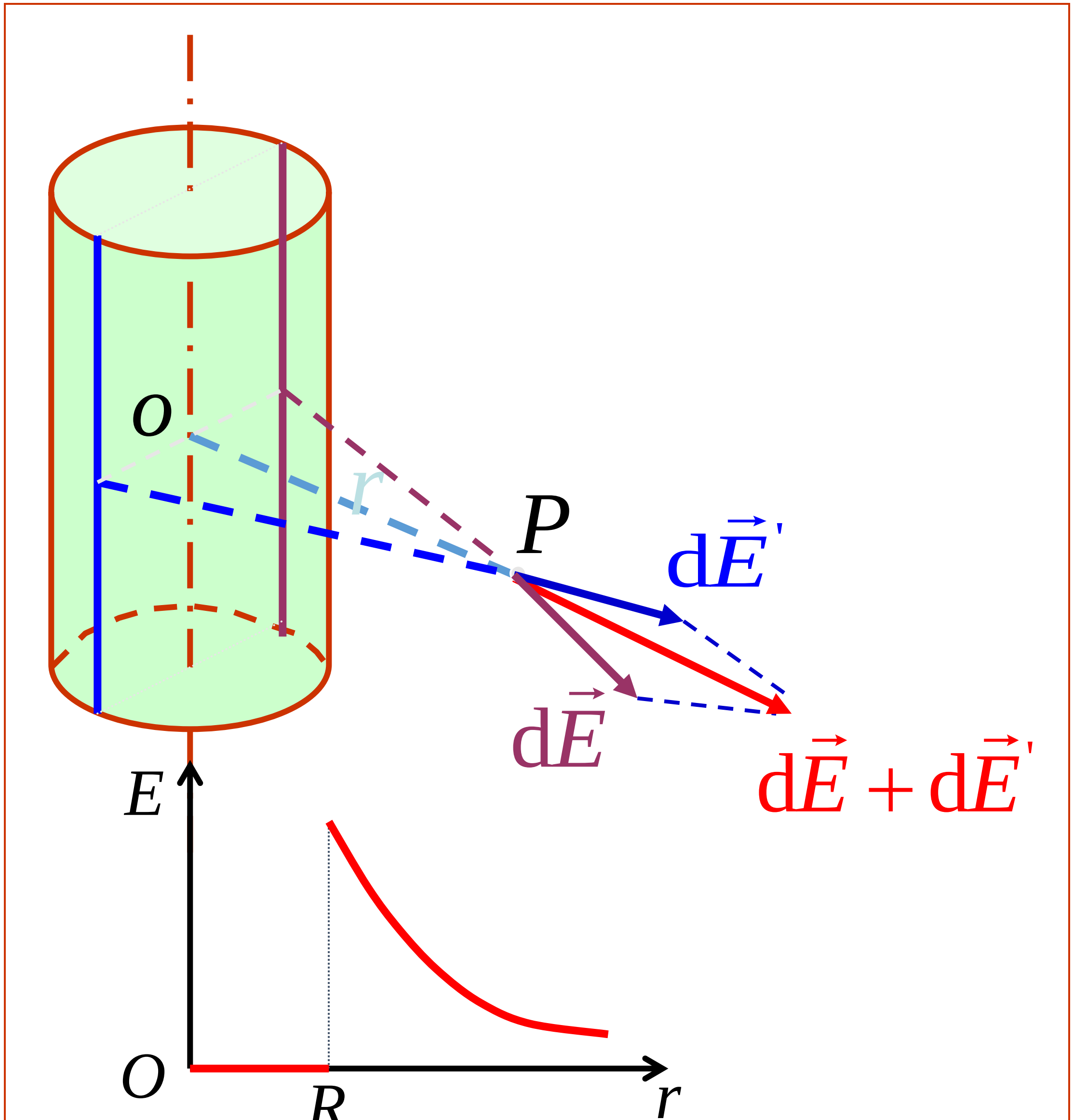
$$\boxed{E = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0 r}}$$





讨 论

● 无限长均匀带电柱面的电场分布



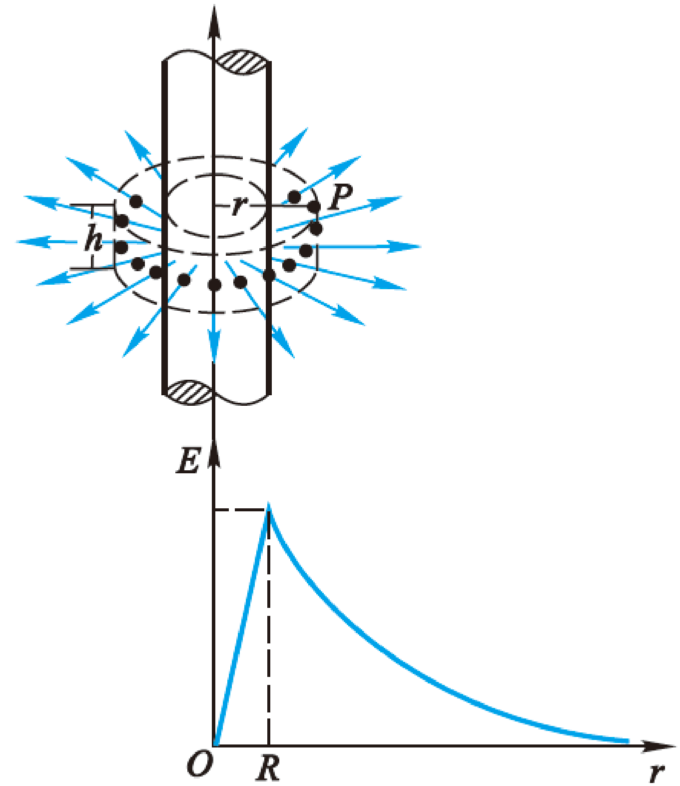
对称性分析：视为无限长均匀带电直线的集合；

选同轴圆柱型高斯面；

由高斯定理计算

$$E=\begin{cases}0 & r<R\\ \dfrac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0 r} & r>R\end{cases}$$

例7-9 柱对称的电场 求均匀带电的“无限长” 圆柱体所激发的电场强度。



解： 过场点*P*作一个与带电圆柱体共轴的圆柱形闭合高斯面*S*，柱高*h*，底面半径*r*

如果*P*点在带电圆柱体外

$$\oint_S \vec{E}\cdot d\vec{S} = 2\pi rhE = \frac{\lambda h}{\varepsilon_0}$$

$$\Rightarrow E = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0 r}$$

如果*P*点在带电圆柱体内

$$\oint_S \vec{E}\cdot d\vec{S} = 2\pi rhE = \frac{\lambda h}{\varepsilon_0 R^2} r^2$$

$$E = \frac{\lambda r}{2\pi\varepsilon_0 R^2}$$

例：无限大均匀带电平面的电场强度

无限大均匀带电平面，单位面积上的电荷，即电荷面密度为 σ，求距平面为 r 处的电场强度.

解 对称性分析：$\vec{E}$ 垂直平面

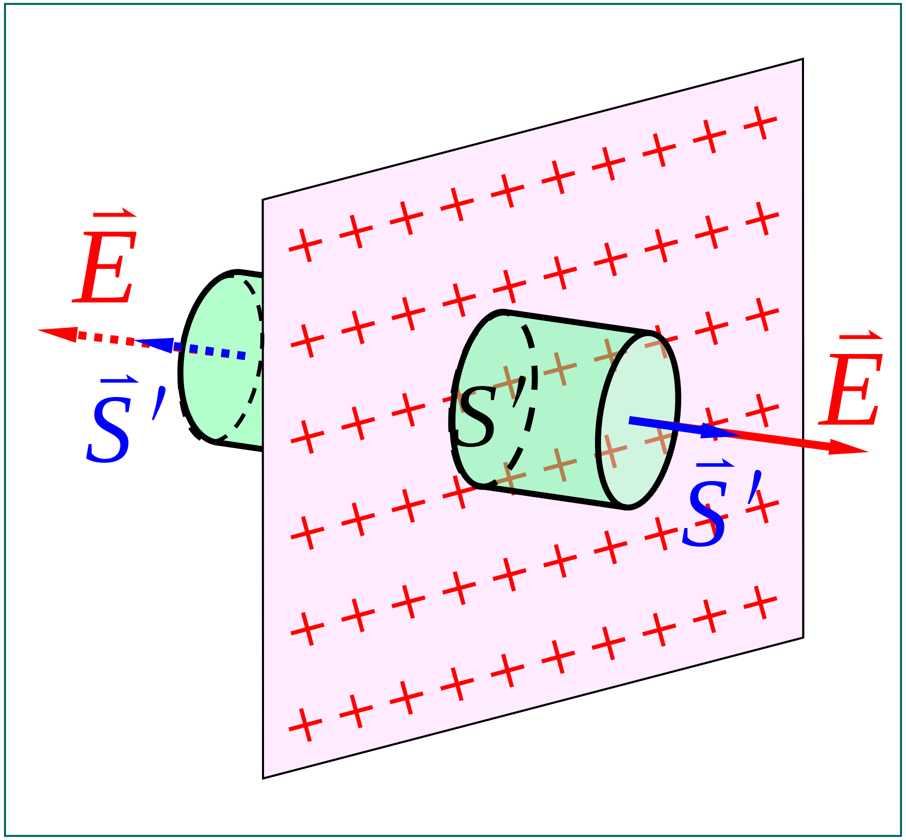
选取闭合的柱形高斯面

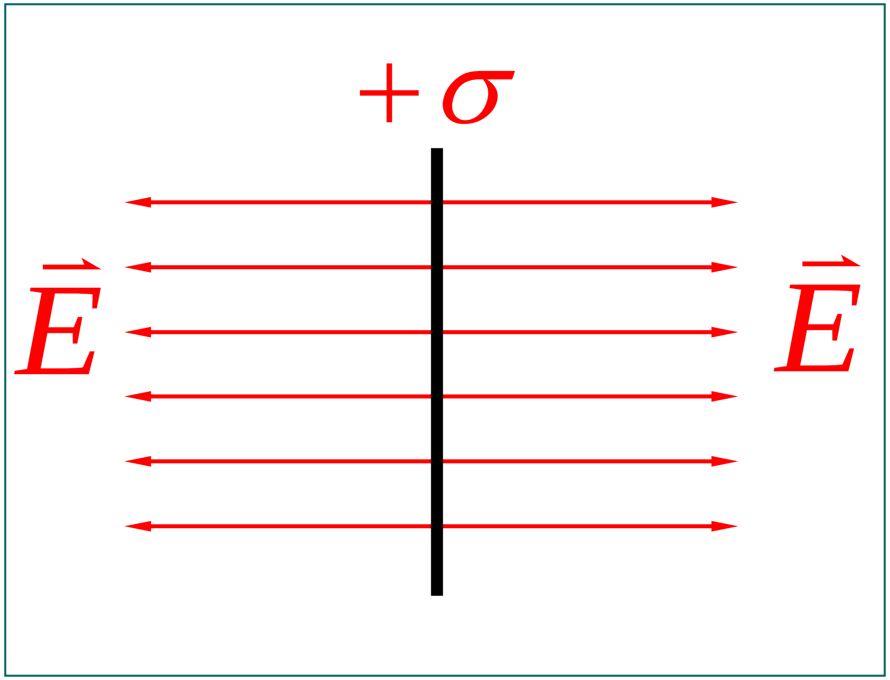
$$\oiint_S \vec{E}\cdot \mathrm{d}\vec{S} = \frac{\sigma S'}{\varepsilon_0}$$

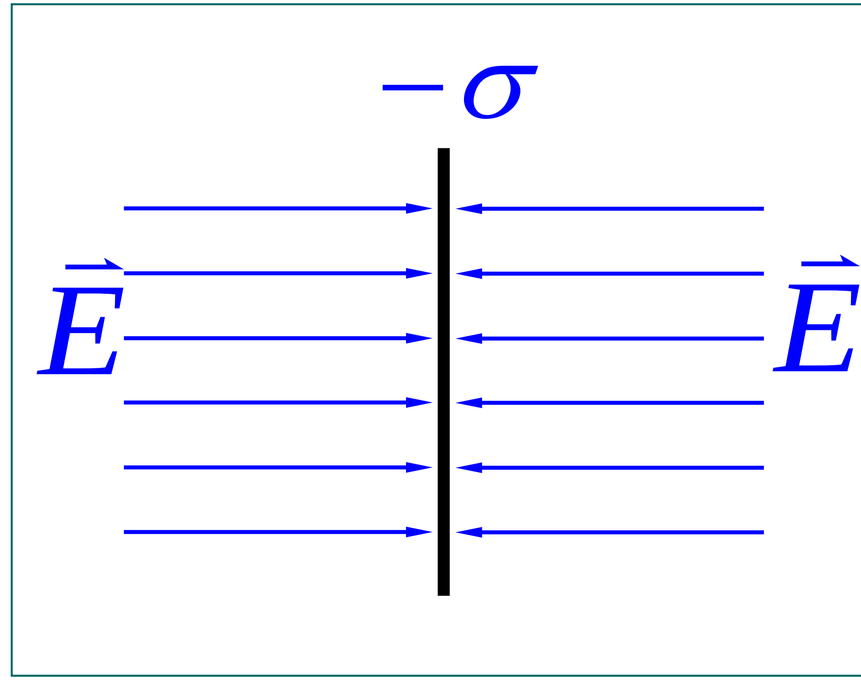
底面积

$$2S'E = \frac{\sigma S'}{\varepsilon_0}$$

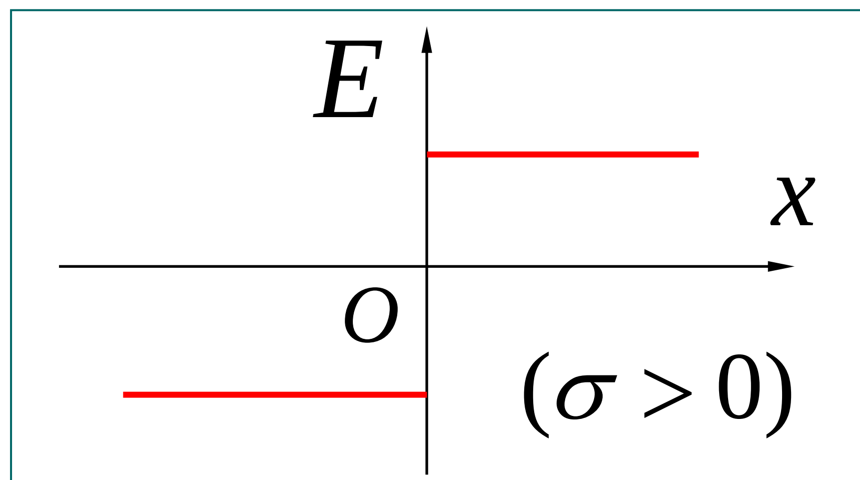
$$\boxed{E = \sigma/2\varepsilon_0}$$







$$E = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}$$



讨论

无限大带电平面的电场叠加问题