课外练习题 2

1．设$\boldsymbol{\alpha}=\left(1/2,0,0,1/2\right)^{\mathrm{T}}$, $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{E}-\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\alpha}^{T}$, $\boldsymbol{B}=\boldsymbol{E}+2\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\alpha}^{T}$，则$\boldsymbol{AB}=$____________.

2．设$\boldsymbol{A}$为三阶方阵，且$\left|\boldsymbol{A}\right| = 2$，则$\left|\dfrac{3}{2}\boldsymbol{A}^{*} + 7\boldsymbol{A}^{-1}\right| =$____________.

3．设$\boldsymbol{A}$是 4 阶方阵，$R(\boldsymbol{A})=2$，$\boldsymbol{A}^{*}$是$\boldsymbol{A}$的伴随矩阵，则$R(\boldsymbol{A}^{*})=$____________.

4．设$\boldsymbol{A}$是n阶可逆矩阵，如果$\boldsymbol{A}$中每行元素之和都是 6，那么$\boldsymbol{A}^{-1}$每行元素之和必是____________.

5. $$\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&-2&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a_{11}&a_{12}&a_{13}\\a_{21}&a_{22}&a_{23}\\a_{31}&a_{32}&a_{33}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0&0\\0&0&1\\0&1&0\end{pmatrix}^{2021}=$$____________.

6．设3×4矩阵$\boldsymbol{B}$的秩$R(\boldsymbol{B})=3$，且$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&1&1\\0&1&3\\0&1&9\end{pmatrix}$，则$R(\boldsymbol{AB})=$_______.

7．已知矩阵$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}2&1&1\\4&2&a+1\\2&1&1\end{pmatrix}$，且$R(\boldsymbol{A})=2$，则$a\neq$_______.

8. 设向量$\boldsymbol{\beta}=\begin{pmatrix}0\\2\\a\end{pmatrix}$可由向量组$\boldsymbol{\alpha}_1=\begin{pmatrix}1\\1\\-1\end{pmatrix},\boldsymbol{\alpha}_2=\begin{pmatrix}-1\\2\\3\end{pmatrix}$线性表示，则$a=$_______.

9. 设$\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$为$n$阶方阵，且$\boldsymbol{ABBA}=\boldsymbol{E}$，则必有（　　）.

（A）$\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{BA}$　（B）$\boldsymbol{B}^2\boldsymbol{A}^2=\boldsymbol{E}$　（C）$(\boldsymbol{AB})^2=\boldsymbol{E}$　（D）$(\boldsymbol{BA})^2=\boldsymbol{E}$

10.设$\boldsymbol{A}$为三阶方阵，交换$\boldsymbol{A}$的第一行和第二行得$\boldsymbol{B}$，则必有（　　）.

（A）交换$\boldsymbol{A}^{*}$的第一行和第二行得$\boldsymbol{B}^{*}$　（B）交换$\boldsymbol{A}^{*}$的第一列和第二列得$\boldsymbol{B}^{*}$

（C）交换$-\boldsymbol{A}^{*}$的第一行和第二行得$\boldsymbol{B}^{*}$　（D）交换$-\boldsymbol{A}^{*}$的第一列和第二列得$\boldsymbol{B}^{*}$

11. 设$\boldsymbol{A}$是 3 阶方阵，将$\boldsymbol{A}$的第一行与第二行交换得$\boldsymbol{B}$，再把$\boldsymbol{B}$的第二行加到第三行得$\boldsymbol{C}$，则满足$\boldsymbol{PA}=\boldsymbol{C}$的可逆矩阵$\boldsymbol{P}=$（　　）.

（A）$\begin{pmatrix}0&1&0\\1&0&0\\1&0&1\end{pmatrix}$　（B）$\begin{pmatrix}0&1&1\\1&0&0\\0&0&1\end{pmatrix}$　（C）$\begin{pmatrix}0&1&0\\1&0&0\\0&-1&1\end{pmatrix}$　（D）$\begin{pmatrix}0&1&0\\1&0&-1\\0&0&1\end{pmatrix}$

12. 设$\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$为 3 阶非零矩阵，满足$\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{O}$，且$R(\boldsymbol{B})=2$，则$R(\boldsymbol{A})=$（　　）.

（A）3　（B）2　（C）1　（D）0

13. 设 $\boldsymbol{A}$ 为3阶方阵，则 $R(\boldsymbol{A}^*)$ 不可能取到的值为（　　）

（A）0　　（B）1　　（C）2　　（D）3

14. 设 $\boldsymbol{P},\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 均为3阶实方阵，若 $\boldsymbol{PA}=\boldsymbol{B}$，则下述说法正确的是（　　）

（A）必有 $R(\boldsymbol{A})=R(\boldsymbol{B})$　　（B）$\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 的行向量组必等价

（C）$\boldsymbol{A}$ 必可通过初等行变换变为 $\boldsymbol{B}$　　（D）$\boldsymbol{B}$ 的行向量组可由 $\boldsymbol{A}$ 的行向量组线性表示

15． n 维向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m$ $(3\le m\le n)$ 线性无关的充要条件是（　　）.

（A）存在一组全为零的数 $k_1,k_2,\cdots,k_m$，使得 $k_1\boldsymbol{\alpha}_1+k_2\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+k_m\boldsymbol{\alpha}_m=\boldsymbol{0}$

（B）$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m$ 中任意两个向量都线性无关

（C）$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m$ 中任意向量都不能由其余向量线性表示

（D）存在不全为零的一组数 $k_1,k_2,\cdots,k_m$，使得 $k_1\boldsymbol{\alpha}_1+k_2\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+k_m\boldsymbol{\alpha}_m\ne\boldsymbol{0}$

16.（**12 分**） n 阶实方阵 $\boldsymbol{A}$ 满足 $\boldsymbol{A}^2+2\boldsymbol{A}-3\boldsymbol{E}=\boldsymbol{O}$.

（1）证明 $\boldsymbol{A}+2\boldsymbol{E}$ 可逆，并求其逆；

（2）当 $\boldsymbol{A}\ne\boldsymbol{E}$ 时，判断 $\boldsymbol{A}+3\boldsymbol{E}$ 是否可逆，并给出理由.

17.（**10 分**）设 $\boldsymbol{A}$ 为 n 阶矩阵，$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n$ 为 n 个线性无关的 n 维列向量，证明：$R(\boldsymbol{A})=n$ 充要条件为 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{A}\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{A}\boldsymbol{\alpha}_n$ 线性无关

18. （**8 分**）设 n 维向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性无关，若 $\boldsymbol{\alpha}_4=k_1\boldsymbol{\alpha}_1+k_2\boldsymbol{\alpha}_2+k_3\boldsymbol{\alpha}_3$ 且 $k_i\ne0$ $(i=1,2,3)$，试证：$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4$ 中任意 3 个向量都线性无关.

19.（**10 分**）已知向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m\,(m\ge2)$ 线性无关，又向量组 $\boldsymbol{\beta}_1=\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2$，$\boldsymbol{\beta}_2=\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_3$，$\cdots$，$\boldsymbol{\beta}_{m-1}=\boldsymbol{\alpha}_{m-1}+\boldsymbol{\alpha}_m$，$\boldsymbol{\beta}_m=\boldsymbol{\alpha}_m+\boldsymbol{\alpha}_1$. 试讨论向量组 $\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_m$ 的线性相关性.