合　肥　工　业　大　学　试　卷　（A）

2022~2023 学年第 二 学期　课程代码 1400071B　课程名称 线性代数　学分 2.5　课程性质：必修☑选修☐限修☐　考试形式：开卷☐闭卷☑

专业班级（教学班）________　考试日期 2023 年 5 月 14 日 19:00-21:00　命题教师 集体　系（所或教研室）主任审批签名 田可雪

一、填空题（每题 3 分，共 18 分）

1. $\boldsymbol{A}$ 为 3 阶实方阵，交换 $\boldsymbol{A}$ 的第 1 行与第 2 行得到矩阵 $\boldsymbol{B}$. 若 $|\boldsymbol{A}|=\sqrt{2}$, 则 $|\boldsymbol{AB}|=$____________.

2. $\boldsymbol{A}$ 为 3 阶非零实方阵且 $\boldsymbol{A}^2=\boldsymbol{O}$, 则 $\mathrm{R}(\boldsymbol{A})=$____________.

3. 向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性无关. 若向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1-\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_2-2k\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_3-\boldsymbol{\alpha}_1$ 线性相关，则 $k=$____________.

4. $(-1,1,0)^T,(-1,0,1)^T$ 是齐次线性方程组 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$ 的一组基础解系，若 $\boldsymbol{\alpha}=(1,2,a)^T$ 满足 $\boldsymbol{A\alpha}=\boldsymbol{0}$, 则 $a=$____________.

5. $\boldsymbol{A}$ 为 2 阶实方阵，$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2$ 为线性无关的 2 维实列向量组. 若 $\boldsymbol{A\alpha}_1=\boldsymbol{0},\boldsymbol{A\alpha}_2=3\boldsymbol{\alpha}_1+2\boldsymbol{\alpha}_2$, 则 $\boldsymbol{A}$ 的非零特征值为____________.

6. 若二次型 $f(x_1,x_2)=ax_1{}^2+2ax_1x_2+2x_2{}^2$ 正定，则 a 的取值范围是____________.

二、单项选择题（每题 3 分，共 18 分）

1. $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 皆为 n 阶实方阵 $(n\geqslant 2)$, 下列说法**错误**的是（　）

   A. $\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{O}$ 当且仅当 $\boldsymbol{BA}=\boldsymbol{O}$　　B. $\boldsymbol{AB}$ 可逆当且仅当 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 皆可逆
   C. $\boldsymbol{AB}$ 可逆当且仅当 $\boldsymbol{BA}$ 可逆　　D. $\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{E}$ 当且仅当 $\boldsymbol{BA}=\boldsymbol{E}$

2. $\boldsymbol{A}$ 是 n 阶可逆矩阵 $(n\geqslant 2)$, 交换 $\boldsymbol{A}$ 的第 1 行与第 2 行得到矩阵 $\boldsymbol{B}$. $\boldsymbol{A}^*,\boldsymbol{B}^*$ 分别是 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 的伴随矩阵，则 $\boldsymbol{B}^*$ 可由（　）所得.

   A. 交换 $\boldsymbol{A}^*$ 的第 1 行与第 2 行　　B. 交换 $\boldsymbol{A}^*$ 的第 1 列与第 2 列
   C. 交换 $-\boldsymbol{A}^*$ 的第 1 行与第 2 行　　D. 交换 $-\boldsymbol{A}^*$ 的第 1 列与第 2 列

3. 向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2$ 线性无关，则向量组 $a\boldsymbol{\alpha}_1+b\boldsymbol{\alpha}_2,b\boldsymbol{\alpha}_1+a\boldsymbol{\alpha}_2$ 线性无关的充分必要条件是（　）

   A. $a\neq b$　　B. $a\neq -b$　　C. a,b 不全为 0　　D. $a\neq\pm b$

4. $\boldsymbol{A}$ 是 3×4 的实矩阵，按列分块为 $\boldsymbol{A}=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4)$. 若齐次线性方程组 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$ 的通解为 $k(2,0,2,3)^T$, 其中 k 为任意常数. 下列说法**错误**的是（　）

   A. $\boldsymbol{\alpha}_1$ 可由向量组 $\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4$ 线性表示　　B. $\boldsymbol{\alpha}_2$ 可由向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4$ 线性表示
   C. $\boldsymbol{A}$ 的行向量组线性无关　　D. 线性方程组 $\boldsymbol{A}^T\boldsymbol{y}=\boldsymbol{0}$ 只有零解

5. $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 皆为 3 阶实方阵. 下列选项（　）一定能得出 $\boldsymbol{A}$ 可对角化.

   A. $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{B}^2$　　B. $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{B}+\boldsymbol{B}^T$
   C. $\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{BA}$　　D. $\boldsymbol{A}$ 的特征值有正有负

6. $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&0\\0&-2\end{pmatrix},\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}0&a\\a&0\end{pmatrix}$, 其中 a 是非零实数. 则 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$（　）

   A. 相似且合同　　B. 相似但不合同　　C. 合同但不相似　　D. 既不相似也不合同

三、（本题 12 分）

$D=\begin{vmatrix}1&k_1&k_2&k_3\\k_1&1&0&0\\k_2&0&1&0\\k_3&0&0&1\end{vmatrix}$, 其中 k_i 为实数, $i=1,2,3$.

(1) 求 D;　　(2) 若 $D=1$, 求 $k_i,i=1,2,3$.

四、（本题 10 分）

求解矩阵方程 $\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{A}^*\boldsymbol{X}+\boldsymbol{E}$. 其中 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}2&0\\2&3\end{pmatrix}$, $\boldsymbol{A}^*$ 是 $\boldsymbol{A}$ 的伴随矩阵.

五、（本题 12 分）

若向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1=(1,1,0)^T$, $\boldsymbol{\alpha}_2=(0,1,a)^T$, $\boldsymbol{\alpha}_3=(1,0,1)^T$ 线性相关.

(1) 求 a;

(2) 求上述向量组的秩以及一个极大线性无关组, 并将其余向量用该极大线性无关组线性表示.

六、（本题 12 分）

$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&-1&2\\1&1&a\\1&-a&-1\end{pmatrix},\boldsymbol{b}=\begin{pmatrix}-4\\4\\-a^2\end{pmatrix}$. 讨论 a 取何值时线性方程组 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$ 无解, 有唯一解, 有无穷多解? 并在有无穷多解时求其通解.

七、（本题 12 分）

已知二次型 $f(x_1,x_2,x_3)=x_1{}^2+ax_2{}^2+x_3{}^2+2bx_1x_2+2x_1x_3+2x_2x_3$ 经过正交变换 $\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}=\boldsymbol{P}\begin{pmatrix}y_1\\y_2\\y_3\end{pmatrix}$ 变为 $y_2{}^2+4y_3{}^2$.　(1) 求 a,b;　(2) 求正交矩阵 $\boldsymbol{P}$.

八、（本题 6 分）

$\boldsymbol{A}$ 是 n 阶非零实方阵. 证明: 线性方程组 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$ 有解的充分必要条件是齐次线性方程组 $\boldsymbol{A}^T\boldsymbol{y}=\boldsymbol{0}$ 与 $\begin{pmatrix}\boldsymbol{A}^T\\\boldsymbol{b}^T\end{pmatrix}\boldsymbol{y}=\boldsymbol{0}$ 的解集相同.