第二章　矩阵

§1　矩阵的定义

一、矩阵的定义

由 $m\times n$ 个数 $a_{ij}\ (i=1,2,\cdots,m;\ j=1,2,\cdots,n)$ 排成的 m 行 n 列的数表

$$\begin{matrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{matrix}$$

称为 m 行 n 列矩阵，简称 $m\times n$ 矩阵．记作

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

简记为 $A=A_{m\times n}=(a_{ij})_{m\times n}=(a_{ij})$

这 $m\times n$ 个数称为矩阵A的元素，简称为元.

元素是实数的矩阵称为实矩阵,

元素是复数的矩阵称为复矩阵.

行列式	矩阵
$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$	$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$
■行数等于列数 ■共有n^2个元素 ■本质是一个数	■行数不等于列数 ■共有$m \times n$个元素 ■本质上就是一个数表
$\det(a_{ij}),\ \lvert a_{ij} \rvert_{n\times n}$	$(a_{ij})_{m\times n}$

二、特殊的矩阵

1. 行数与列数都等于 n 的矩阵，称为 n 阶方阵．可记作 A_n .

2. 只有一行的矩阵 $A=(a_1,a_2,\cdots,a_n)$ 称为行矩阵(或行向量) .

只有一列的矩阵 $B=\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}$ 称为列矩阵(或列向量) .

3. 元素全是零的矩阵称为零距阵．可记作 O . 例如:

$$O_{2\times 2}=\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad O_{1\times 4}=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

4. 形如 $\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_n \end{pmatrix}$ 的方阵称为**对角阵**. 记作

$$A = diag(\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n)$$

特别地，方阵 $\begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}$ 称为**单位阵**. 记作 E_n .

注： n阶方阵与n阶行列式形式上有点相似，但是概念完全不同. 当n=1时，一阶方阵 $(a_{11}) = a_{11}$.

同型矩阵与矩阵相等的概念

1. 两个矩阵的行数相等、列数也相等时，称为同型矩阵.

例如$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 5 & 6 \\ 3 & 7 \end{pmatrix}$与$\begin{pmatrix} 14 & 3 \\ 8 & 4 \\ 3 & 9 \end{pmatrix}$为同型矩阵.

2. 两个矩阵$A=(a_{ij})$与$B=(b_{ij})$为同型矩阵，并且对应元素相等，即 $a_{ij}=b_{ij}\ (i=1,2,\cdots,m;\ j=1,2,\cdots,n)$

则称矩阵A与B相等，记作$A=B$.

例如 $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$

注意：不同型的零矩阵是不相等的.

三、矩阵与线性变换

n 个变量 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ 与 m 个变量 $y_1, y_2, \cdots, y_m$ 之间的关系式

$$\begin{cases} y_1 = a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n, \\ y_2 = a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ y_m = a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n. \end{cases}$$

表示一个从变量 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ 到变量 $y_1, y_2, \cdots, y_m$ 的线性变换，其中 a_{ij} 为常数.

$$\begin{cases} y_1 = a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n, \\ y_2 = a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ y_m = a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n. \end{cases}$$

$$\downarrow \qquad \downarrow \qquad \cdots\cdots \qquad \downarrow$$

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

系数矩阵

线性变换与矩阵之间存在着一一对应关系.

例　线性变换 $\begin{cases} y_1 = x_1, \\ y_2 = x_2, \\ \cdots\cdots\cdots \\ y_n = x_n \end{cases}$ 称为恒等变换.

$$\begin{cases} y_1 = x_1, \\ y_2 = x_2, \\ \cdots\cdots\cdots \\ y_n = x_n \end{cases} = \begin{cases} y_1 = 1\cdot x_1 + 0\cdot x_2 + \cdots + 0\cdot x_n, \\ y_2 = 0\cdot x_1 + 1\cdot x_2 + \cdots + 0\cdot x_n, \\ \cdots\cdots\cdots \\ y_n = 0\cdot x_1 + 0\cdot x_2 + \cdots + 1\cdot x_n \end{cases}$$

$$\xleftrightarrow{\text{对应}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix} \text{单位阵 } E_n$$