2017～2018 学年第一学期《线性代数》试卷（A）参考答案

一、填空题（每小题 4 分，共 20 分）

1、$\underline{-14}$；2、$\begin{pmatrix}2&0&4\\2&1&0\\0&-1&5\end{pmatrix}$；3、$\underline{1}$；4、$\vec{x}=k\begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}1\\2\\3\end{bmatrix}$或$\vec{x}=k\begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}2\\3\\4\end{bmatrix}$；5、$\underline{k>4}$.

二、选择题（每小题 4 分，共 20 分）

1、D；　2、A；　3、C；　4、D；　5、B.

三、（**8** 分）计算行列式 $D=\begin{vmatrix}2&1&1&1\\1&3&1&1\\1&1&4&1\\1&1&1&7\end{vmatrix}$.

解： $D=\begin{vmatrix}2&1&1&1\\-1&2&0&0\\-1&0&3&0\\-1&0&0&6\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}2+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{6}&1&1&1\\0&2&0&0\\0&0&3&0\\0&0&0&6\end{vmatrix}=108$.

四、（**10** 分）设 $A=\begin{pmatrix}3&4&0\\1&2&0\\0&0&1\end{pmatrix}$，矩阵 B 满足 $ABA^{-1}=2AB-E$，求 B.

解： 由 $ABA^{-1}=2AB-E$ 得 $B=((2E-A^{-1})A)^{-1}=(2A-E)^{-1}$，

而 $2A-E=\begin{pmatrix}5&8&0\\2&3&0\\0&0&1\end{pmatrix}$，对此矩阵进行初等行变换得：$B=\begin{pmatrix}-3&8&0\\2&-5&0\\0&0&1\end{pmatrix}$.

五、（**14** 分）已知线性方程组 $\begin{cases}x_1-\lambda x_2-2x_3=-1,\\x_1-x_2+\lambda x_3=2,\\5x_1-5x_2-4x_3=1,\end{cases}$

（1）常数 λ 取何值时，方程组无解、有唯一解、有无穷多解？

（2）当方程组有无穷多解时，求出其通解.

解法一： 对增广矩阵实施初等行变换，得：

$$(A|\vec{b})=\left(\begin{array}{ccc|c}1&-\lambda&-2&-1\\1&-1&\lambda&2\\5&-5&-4&1\end{array}\right)\to\left(\begin{array}{ccc|c}1&-1&\lambda&2\\0&1-\lambda&-2-\lambda&-3\\0&0&-4-5\lambda&-9\end{array}\right).$$

(1) i）当 $\lambda\neq1$ 且 $\lambda\neq-\frac{4}{5}$ 时，方程组有唯一解;

ii）当 $\lambda=-\frac{4}{5}$ 时，$R(A|\vec{b})\neq R(A)$,方程组无解;

iii）当 $\lambda=1$ 时，$R(A|\vec{b})=R(A)=2<3$,方程组有无穷多解.

（2）当 $\lambda=1$ 时，$(A|\vec{b})=\left(\begin{array}{ccc|c}1&-1&-2&-1\\1&-1&1&2\\5&-5&-4&1\end{array}\right)\to\left(\begin{array}{ccc|c}1&-1&0&1\\0&0&1&1\\0&0&0&0\end{array}\right)$，即 $\begin{cases}x_1-x_2=1,\\x_3=1,\end{cases}$

得通解 $\vec{x}=c\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}$（$c$ 为任意常数）.

解法二： 方程组系数行列式 $D=\begin{vmatrix}1&-\lambda&-2\\1&-1&\lambda\\5&-5&-4\end{vmatrix}=-(\lambda-1)(5\lambda+4)$，

以下讨论同解法一.

六、（8 分）已知向量组 $\overline{\alpha_1}=\begin{bmatrix}1\\2\\1\\3\end{bmatrix}$，$\overline{\alpha_2}=\begin{bmatrix}4\\-1\\-5\\-6\end{bmatrix}$，$\overline{\alpha_3}=\begin{bmatrix}1\\-3\\-4\\-7\end{bmatrix}$，求其秩并求一个极大线性无关组.

解： 设 $A=(\overline{\alpha_1},\overline{\alpha_2},\overline{\alpha_3})=\begin{bmatrix}1&4&1\\2&-1&-3\\1&-5&-4\\3&-6&-7\end{bmatrix}$,对 A 进行初等行变换，化为行阶梯形矩阵 B,

$$A\xrightarrow{r}\begin{bmatrix}1&4&1\\0&1&\frac{5}{9}\\0&0&0\\0&0&0\end{bmatrix}=B,$$

所以 $\overline{\alpha_1},\overline{\alpha_2},\overline{\alpha_3}$ 的秩为 2，$\overline{\alpha_1},\overline{\alpha_2}$ 为其一个极大线性无关组.

注：$\overrightarrow{\alpha_1},\overrightarrow{\alpha_3}$ 或 $\overrightarrow{\alpha_2},\overrightarrow{\alpha_3}$ 也为其一个极大线性无关组.

七、（15 分）已知二次型 $f(x_1,x_2,x_3)=ax_1^2-2x_1x_2+2x_1x_3+2x_2x_3$ 经过正交变换 $\vec{x}=P\vec{y}$ 后化为 $f=-2y_1^2+y_2^2+y_3^2$，其中 $\vec{x}=(x_1,x_2,x_3)^T$，$\vec{y}=(y_1,y_2,y_3)^T$.

（1）求 $\boldsymbol{a}$ 的值；

（2）求正交矩阵 P.

解：（1）f 与标准型矩阵为 $A=\begin{pmatrix} a & -1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix},B=\begin{pmatrix} -2 & & \\ & 1 & \\ & & 1 \end{pmatrix}$.

因为用正交变换化 f 为标准型，所以 f 与其标准型对应的矩阵相似，而相似矩阵的行列式相同，即由

$|A|=|B|$ 有 $\begin{vmatrix} a & -1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$，或由 $a+0+0=-2+1+1$ 得 $a=0$.

（2）（方法一）这时 $A=\begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$. 对于 A 的特征根 $\lambda_1=-2$，$\lambda_2=\lambda_3=1$，解得特征向量分别为

$\xi_1=\begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$，$\xi_2=\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$，$\xi_3=\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.　　将 ξ_1 单位化，得 $p_1=\frac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$，

将 ξ_2,ξ_3 正交化：取 $\eta_2=\xi_2$，　$\eta_3=\xi_3-\frac{[\eta_2,\xi_3]}{\|\eta_2\|^2}\eta_2=\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}+\frac{1}{2}\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}=\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$，

再将 η_2,η_3 单位化，得 $p_2=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$，　　$p_3=\frac{1}{\sqrt{6}}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$.

将 p_1,p_2,p_3 构成正交矩阵 $P=(p_1,p_2,p_3)=\begin{pmatrix} -\frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \\ -\frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & 0 & \frac{2}{\sqrt{6}} \end{pmatrix}$，

有 $P^{-1}AP=P^TAP=\begin{pmatrix} -2 & & \\ & 1 & \\ & & 1 \end{pmatrix}$.

（方法二）这时 $A=\begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$. 对于 A 的特征根 $\lambda_1=-2$，$\lambda_2=\lambda_3=1$，解得特征向量分别为

$\xi_1=\begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$，$\xi_2=\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$，$\xi_3=\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$.　　将 ξ_1 单位化，得 $p_1=\frac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$，

ξ_2,ξ_3 已正交，单位化，得 $p_2=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$，　　$p_3=\frac{1}{\sqrt{6}}\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$. 将 p_1,p_2,p_3 构成正交矩阵

$P=(p_1,p_2,p_3)=\begin{pmatrix} -\frac{1}{\sqrt{3}} & 0 & \frac{2}{\sqrt{6}} \\ -\frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \end{pmatrix}$，有 $P^{-1}AP=P^TAP=\begin{pmatrix} -2 & & \\ & 1 & \\ & & 1 \end{pmatrix}$.

八、（5 分）A 为 n 阶对称矩阵，证明 A^2 为正定的充要条件是 A 为可逆阵.

证明：易知 A^2 对称，设 λ 为 A 的特征值，则 λ^2 为 A^2 的特征值，则 $\lambda^2>0\Leftrightarrow\lambda\neq 0$, 故得证.