2020-2021合肥工业大学春线代期末试题（线下）

一、填空题

1、行列式$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 2 & 0 \\ 2 & 2 & 1 & 0 \end{vmatrix} =$ ________

2、设$A=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3),B=(\alpha_1+2\alpha_3,3\alpha_1+2\alpha_2,\alpha_2)$，其中$\alpha_i(i=1,2,3)$为3维列向量，若$|\boldsymbol{A}|=-1$，则$|B|=$ ________

3、设矩阵$A=\begin{bmatrix} 1 & 6 & 7 \\ 2 & 5 & 8 \\ 3 & 4 & 9 \end{bmatrix},P=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix},Q=\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$,则$P^3AQ^4=$ ________

4、设3×4矩阵$\boldsymbol{B}$的秩$\boldsymbol{R}(\boldsymbol{B})=2$，且$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \\ 4 & 1 & 9 \end{bmatrix}$，则$R(AB)=$ ________

5、$Ax=b$是三元非齐次线性方程组，若矩阵$\boldsymbol{A}$的秩为2，且$\xi_1=\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix},\xi_2=\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$是其两个特解，则$Ax=b$的通解是 ________

二、选择题

1、设$\boldsymbol{A}$和$\boldsymbol{B}$均为$n\times n$矩阵，则必有(　　)

$\boldsymbol{A}$、$\boldsymbol{A}^2-\boldsymbol{B}^2=(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{B})(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})$　　$\boldsymbol{B}$、$(\boldsymbol{AB})^T=\boldsymbol{B}^T\boldsymbol{A}^T$

$\boldsymbol{C}$、$(\boldsymbol{AB})^{-1}=\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{B}^{-1}$　　$\boldsymbol{D}$、$|\boldsymbol{AB}|=|\boldsymbol{BA}|=|\boldsymbol{A}|\,|\boldsymbol{B}|$

2、设$A=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&2&0\\0&0&1\end{bmatrix}$,$B=\begin{bmatrix}2&1&0\\1&2&1\\0&1&1\end{bmatrix}$,$C=AB^{-1}=(\boldsymbol{c}_{ij})_{3\times3}$,则$\boldsymbol{c}_{32}$等于(　　)

$\boldsymbol{A}$、2　　$\boldsymbol{B}$、1　　$\boldsymbol{C}$、-2　　$\boldsymbol{D}$、-1

3、向量组$\boldsymbol{\beta}_1=3\boldsymbol{\alpha}_1+3\boldsymbol{\alpha}_2+2\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\beta}_2=2\boldsymbol{\alpha}_1-1\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\beta}_3=3\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_3$,则下列结论正确的是(　　)

$\boldsymbol{A}$、当向量组$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$线性无关时，向量组$\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3$线性无关

$\boldsymbol{B}$、仅当向量组$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$线性相关时，向量组$\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3$才会线性相关

$\boldsymbol{C}$、对任意向量组$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$，向量组$\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3$线性无关

$\boldsymbol{D}$、对任意向量组$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$，向量组$\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3$线性相关

4、已知$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m$的秩为$\boldsymbol{r}$，则(　　)

$\boldsymbol{A}$、向量组中任意$\boldsymbol{r}$个向量必线性无关

$\boldsymbol{B}$、若$\boldsymbol{r}<\boldsymbol{n}$，则向量组中任意$\boldsymbol{r}+1$个向量必线性相关

$\boldsymbol{C}$、向量组中任意$\boldsymbol{s}(\boldsymbol{s}<\boldsymbol{r})$个向量构成的部分组必线性无关

$\boldsymbol{D}$、必有$\boldsymbol{r}<\boldsymbol{n}$

5、设$\boldsymbol{A}$与$\boldsymbol{B}$均为$\boldsymbol{n}\times\boldsymbol{n}$矩阵，且$\boldsymbol{A}$相似于$\boldsymbol{B}$,则(　　)

$\boldsymbol{A}$、$\boldsymbol{A}$，$\boldsymbol{B}$有相同的特征向量

$\boldsymbol{B}$、$\boldsymbol{A}$，$\boldsymbol{B}$有相同的特征值

$\boldsymbol{C}$、存在可逆矩阵$\boldsymbol{P}$，使得$\boldsymbol{P}^T\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}=\boldsymbol{B}$

$\boldsymbol{D}$、$\boldsymbol{A}$，$\boldsymbol{B}$相似于同一个对角阵

三、已知行列式$\boldsymbol{D}=\begin{vmatrix}2&1&4&0\\1&2&2&0\\0&3&3&2\\0&4&7&5\end{vmatrix}$，求 $3A_{21}+2A_{22}+4A_{32}+10A_{42}$，其中$\boldsymbol{A}_{j2}$为$\boldsymbol{D}$中元素的代数余子式$(\boldsymbol{j}=1,2,3,4)$

四、已知$\boldsymbol{AB}=2\boldsymbol{B}+\boldsymbol{A}$，且$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}3&2&0\\0&3&2\\0&0&3\end{bmatrix}$，求矩阵$\boldsymbol{B}$

五、设向量组：$\boldsymbol{\alpha_1}=(1,2,3,0)^T,\boldsymbol{\alpha_2}=(-1,-2,0,3)^T,\boldsymbol{\alpha}_3=(2,4,6,0)^T,\boldsymbol{\alpha}_4=(1,2,6,0)^T$，$\boldsymbol{\alpha}_5=(0,0,3,3)^T$，求向量组的秩及一个极大无关组,并将其余向量用该极大无关组线性表示.

六、设方程组$\begin{cases}\boldsymbol{a}\boldsymbol{x}_1+2\boldsymbol{x}_2+2\boldsymbol{x}_3=\boldsymbol{a}+1\\2\boldsymbol{x}_1+\boldsymbol{a}\boldsymbol{x}_2+2\boldsymbol{x}_3=3\\2\boldsymbol{x}_1+2\boldsymbol{x}_2+\boldsymbol{a}\boldsymbol{x}_3=2\end{cases}$

(1)求系数行列式$|\boldsymbol{A}|$；

(2)$\boldsymbol{a}$取何值时，方程组有唯一解、无解及无穷多解，当方程组有无穷多解时，求出其通解。

七、矩阵$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}1&1&1\\0&1&4\\0&1&1\end{bmatrix}$可否相似对角化？若能相似对角化，则求可逆矩阵$\boldsymbol{P}$，使得$\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{AP}$为对角阵。

八、设$\boldsymbol{A}$为$\boldsymbol{n}\times\boldsymbol{m}$矩阵，且其行向量组线性无关，$\boldsymbol{B}$为$\boldsymbol{n}$解方阵，且满足$\boldsymbol{BA}=\boldsymbol{A}$

证明：$\boldsymbol{R}(\boldsymbol{B})=\boldsymbol{n}$