第 2 节　行列式的性质

一、基本性质

性质1 互换行列式的两行，行列式**变号**. 记作$r_i \leftrightarrow r_j$.

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} \xlongequal{r_1 \leftrightarrow r_3} -\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix}$$

推论1 若行列式有两行相同，则行列式为 0.

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix} \xlongequal{r_1 \leftrightarrow r_3} -\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix} = 0$$

性质2 用非零数 k 乘行列式的某一行中所有元素，等于用数 k 乘此行列式. 记作 $k\times r_i$.

$$\begin{vmatrix} 2\times1 & 2\times2 & 2\times3 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 2\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix}$$

推论2 行列式中某一行的公因子可以提到行列式符号外面.

$$\begin{vmatrix} 2 & 4 & 6 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 2\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix}$$

推论3 若行列式中存在两行元素对应成比例，则行列式等于**0**.

$$\begin{vmatrix} -2 & -4 & -6 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix} = (-2)\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix} = 0$$

性质3 若某一行是两组数的和，则此行列式等于如下两个行列式的和.

$$\begin{vmatrix} 1+0 & 1+1 & 1+2 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ b_{i1}+c_{i1} & \cdots & b_{in}+c_{in} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ b_{i1} & \cdots & b_{in} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ c_{i1} & \cdots & c_{in} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

注意

$$\begin{vmatrix} a_1+b_1 & a_2+b_2 \\ a_3+b_3 & a_4+b_4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ a_3 & a_4 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_3 & b_4 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} b_1 & b_2 \\ a_3 & a_4 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} b_1 & b_2 \\ b_3 & b_4 \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} ka_{11} & ka_{12} \\ ka_{21} & ka_{22} \end{vmatrix} = k^2 \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$$

性质4 ☆☆☆☆☆

行列式的某一行的所有元素乘以同一数 k 后再加到另一行对应的元素上去，行列式的值不变. 记作 $r_i + kr_j$.

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} \xlongequal{r_2 - r_1} \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -2 & -4 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix}$$

定义

设 $D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$ 则 $D^{\mathrm{T}}=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{n1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{n2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$

称 D^{T} 为 D 的转置行列式.

性质5 行列式与它的转置行列式相等.

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \\ 3 & -1 & 1 \end{vmatrix}$$

注 由性质5可得前面的所有性质对“列”也成立.

行列式关于行和列的三种运算

(1)互换两行或两列： $r_i \leftrightarrow r_j$ 行列式变号

对调运算 $c_i \leftrightarrow c_j$

(2)数*k* 乘某行或某列： $r_i \times k$ 行列式扩大*k*倍

倍乘运算 $c_i \times k$

(3)数 *k* 乘第 *i*行(列)加到第 *j* 行(列)上：

倍加运算 $r_j + k r_i$ 行列式值不变

$c_j + k c_i$

二、利用性质计算行列式 （化为三角形行列式）

例1 计算下列行列式

$$D=\begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 & -3 & 1 \\ -3 & 3 & -7 & 9 & -5 \\ 2 & 0 & 4 & -2 & 1 \\ 3 & -5 & 7 & -14 & 6 \\ 4 & -4 & 10 & -10 & 2 \end{vmatrix}$$

解 $$D=\begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 & -3 & 1 \\ -3 & 3 & -7 & 9 & -5 \\ 2 & 0 & 4 & -2 & 1 \\ 3 & -5 & 7 & -14 & 6 \\ 4 & -4 & 10 & -10 & 2 \end{vmatrix} \begin{matrix} \times 3 \\ \oplus \end{matrix}$$

$$\underline{\underline{r_2+3r_1}}\begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 & -3 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & -2 \\ 2 & 0 & 4 & -2 & 1 \\ 3 & -5 & 7 & -14 & 6 \\ 4 & -4 & 10 & -10 & 2 \end{vmatrix}$$

$$
\begin{vmatrix}
\boxed{1 & -1 & 2 & -3 & 1} \\
0 & 0 & -1 & 0 & -2 \\
2 & 0 & 4 & -2 & 1 \\
3 & -5 & 7 & -14 & 6 \\
4 & -4 & 10 & -10 & 2
\end{vmatrix}
\times(-2) \oplus
$$

$$
\underline{\underline{r_2 + 3r_1}}
$$

$$
(-4)\times
\begin{vmatrix}
1 & -1 & 2 & -3 & 1 \\
0 & 0 & -1 & 0 & -2 \\
0 & 2 & 0 & 4 & -1 \\
3 & -5 & 7 & -14 & 6 \\
4 & -4 & 10 & -10 & 2
\end{vmatrix}
\times(-3) \oplus \oplus
$$

$$
\underline{\underline{r_2 - 2r_1}}
$$

$$\xlongequal[r_4-4r_1]{r_3-3r_1}\begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 & -3 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & -2 \\ 0 & 2 & 0 & 4 & -1 \\ 0 & -2 & 1 & -5 & 3 \\ 0 & 0 & 2 & 2 & -2 \end{vmatrix}$$

$$\xlongequal{r_2 \leftrightarrow r_4} -\begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 & -3 & 1 \\ 0 & -2 & 1 & -5 & 3 \\ 0 & 2 & 0 & 4 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 2 & 2 & -2 \end{vmatrix} \oplus$$

$$
\xlongequal{r_3 + r_2} -\begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 & -3 & 1 \\ 0 & -2 & 1 & -5 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 2 & 2 & -2 \end{vmatrix}
$$

$$
\xlongequal{r_4 + r_3} -\begin{array}{|ccccc|l} 1 & -1 & 2 & -3 & 1 & \\ 0 & -2 & 1 & -5 & 3 & \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 2 & \times(-2) \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & \\ 0 & 0 & 2 & 2 & -2 & \end{array}
$$

$$\underline{\underline{r_5 - 2r_3}} \; -\begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 & -3 & 1 \\ 0 & -2 & 1 & -5 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & -6 \end{vmatrix} \begin{matrix} \\ \\ \\ \times 4 \\ \oplus \end{matrix}$$

$$\underline{\underline{r_5 + 4r_4}} \; -\begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 & -3 & 1 \\ 0 & -2 & 1 & -5 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -6 \end{vmatrix} = -(-2)(-1)(-6) = 12.$$

练习1 计算下列行列式

$$D=\begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 & 2 \\ -1 & -1 & -4 & 1 \\ 2 & 4 & -6 & 1 \\ 1 & 2 & 2 & 2 \end{vmatrix}$$

解

$$D=\begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 & 2 \\ -1 & -1 & -4 & 1 \\ 2 & 4 & -6 & 1 \\ 1 & 2 & 2 & 2 \end{vmatrix} \xlongequal[\substack{r_3-2r_1 \\ r_4-r_1}]{r_2+r_1} \begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & -5 & 3 \\ 0 & 2 & -4 & -3 \\ 0 & 1 & 3 & 0 \end{vmatrix}$$

$$\xlongequal{r_2 \leftrightarrow r_4} -\begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & 2 & -4 & -3 \\ 0 & 0 & -5 & 3 \end{vmatrix} \xlongequal{r_3-2r_2} -\begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & -10 & -3 \\ 0 & 0 & -5 & 3 \end{vmatrix}$$

$$\xlongequal{r_3 \leftrightarrow r_4} \begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & -5 & 3 \\ 0 & 0 & -10 & -3 \end{vmatrix} \xlongequal{r_4 - 2r_3} \begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & -5 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & -9 \end{vmatrix} = 45$$

注：该例题也可通过列变换化成三角行列式.

例2 计算 $D=\begin{vmatrix} 3 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 3 \end{vmatrix}$

“行等和”行列式

解 $$\begin{vmatrix} 3 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 3 \end{vmatrix} \xlongequal[\text{第一列}]{\text{各列加到}} \begin{vmatrix} 6 & 1 & 1 & 1 \\ 6 & 3 & 1 & 1 \\ 6 & 1 & 3 & 1 \\ 6 & 1 & 1 & 3 \end{vmatrix}$$

$$= 6\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 3 \end{vmatrix} = 6\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{vmatrix} = 48$$

例3 求行列式

$$D=\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 2 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & 0 & 3 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & 0 & 0 & \cdots & n \end{vmatrix}$$

爪型行列式

解

$$D \xlongequal{c_1 - \frac{1}{2}c_2 - \cdots - \frac{1}{n}c_n} \begin{vmatrix} 1-\sum_{i=2}^{n}\frac{1}{i} & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 0 & 2 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 3 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & n \end{vmatrix}$$

$$= n!\left(1-\sum_{i=2}^{n}\frac{1}{i}\right)$$

例4 求行列式 $D=\begin{vmatrix}1+a & 2 & 3 & 4\\ 1 & 2+a & 3 & 4\\ 1 & 2 & 3+a & 4\\ 1 & 2 & 3 & 4+a\end{vmatrix}$

解 方法一

$$D=\begin{vmatrix}1+a & 2 & 3 & 4\\ 1+0 & 2+a & 3 & 4\\ 1+0 & 2 & 3+a & 4\\ 1+0 & 2 & 3 & 4+a\end{vmatrix}$$

拆项法(此题也可拆一行)

方法二

$$D=\begin{vmatrix}1&0&0&0&0\\1&1+a&2&3&4\\1&1&2+a&3&4\\1&1&2&3+a&4\\1&1&2&3&4+a\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1&-1&-2&-3&-4\\1&a&0&0&0\\1&0&a&0&0\\1&0&0&a&0\\1&0&0&0&a\end{vmatrix}$$

加边法(此题也可加一行)

合肥工业大学 HEFEI UNIVERSITY OF TECHNOLOGY

当$a\neq 0$时,

$$D=\begin{vmatrix} 1+\dfrac{10}{a} & -1 & -2 & -3 & -4 \\ 0 & a & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & a \end{vmatrix}=(1+\frac{10}{a})\cdot a^4$$

$$=a^4+10a^3$$

当$a=0$时, D=0，综上所述D= a^4+10a^3

例5 设

$$D=\left|\begin{array}{ccc:ccc} a_{11} & \cdots & a_{1k} & & & \\ \vdots & & \vdots & & 0 & \\ a_{k1} & \cdots & a_{kk} & & & \\ \hdashline c_{11} & \cdots & c_{1k} & b_{11} & \cdots & b_{1n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ c_{n1} & \cdots & c_{nk} & b_{n1} & \cdots & b_{nn} \end{array}\right|$$

$$D_1=\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1k} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{k1} & \cdots & a_{kk} \end{vmatrix} \qquad D_2=\begin{vmatrix} b_{11} & \cdots & b_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ b_{n1} & \cdots & b_{nn} \end{vmatrix}$$

证明:

$$D=D_1D_2$$

证明：利用行的运算性质把D_1化成下三角形，

$$D_1 \overset{r}{=\!=} \begin{vmatrix} p_{11} & & \\ \vdots & \ddots & \\ p_{1k} & \cdots & p_{kk} \end{vmatrix} = p_{11}\cdots p_{kk}$$

再利用列的运算性质把 D_2化成下三角形，

$$D_2 \overset{c}{=\!=} \begin{vmatrix} q_{11} & & \\ \vdots & \ddots & \\ q_{1n} & \cdots & q_{nn} \end{vmatrix} = q_{11}\cdots q_{nn}$$

对 D 的前 k 行作运算 r，后 n 列作运算 c，则有

$$D \overset{r}{\underset{c}{=\!=}} \begin{vmatrix} p_{11} & & & & & \\ \vdots & \ddots & & & & \\ p_{k1} & \cdots & p_{kk} & & & \\ c_{11} & \cdots & c_{1k} & q_{11} & & \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \ddots & \\ c_{n1} & \cdots & c_{nk} & q_{n1} & \cdots & q_{nn} \end{vmatrix}$$

$$= p_{11} \cdots p_{kk} q_{11} \cdots q_{nn} = D_1 D_2$$

例

$$D=\left|\begin{array}{ccc|cc}1&1&1&0&0\\1&2&0&0&0\\1&0&3&0&0\\\hline 1&-1&5&1&2\\1&4&7&3&4\end{array}\right|=\begin{vmatrix}1&1&1\\1&2&0\\1&0&3\end{vmatrix}\begin{vmatrix}1&2\\3&4\end{vmatrix}=-2$$

$$D=\begin{vmatrix} & 0 & & a_{11} & \cdots & a_{1k} \\ & & & \vdots & & \vdots \\ & & & a_{k1} & \cdots & a_{kk} \\ b_{11} & \cdots & b_{1n} & c_{11} & \cdots & c_{1k} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_{n1} & \cdots & b_{nn} & c_{n1} & \cdots & c_{nk} \end{vmatrix}=(-1)^{n\times k}D_1D_2$$

思考题

1. 求解下列方程

(1) $$\begin{vmatrix} x+1 & 2 & -1 \\ 2 & x+1 & 1 \\ -1 & 1 & x+1 \end{vmatrix} = 0$$

(2) $f(x) = \begin{vmatrix} x & a & b & c \\ a & x & b & c \\ a & b & x & c \\ a & b & c & x \end{vmatrix}$，求 $f(x)=0$ 的根。

解: (1) 将第2列加到第1列上得到

$$D=\begin{vmatrix} x+1 & 2 & -1 \\ 2 & x+1 & 1 \\ -1 & 1 & x+1 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} x+3 & 2 & -1 \\ x+3 & x+1 & 1 \\ 0 & 1 & x+1 \end{vmatrix}$$

$$=(x+3)\begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 1 & x+1 & 1 \\ 0 & 1 & x+1 \end{vmatrix}=(x+3)(x^2-3)$$

故方程的根为 $-3, \pm\sqrt{3}$

(2) 由行列式的性质易得$x=a,b,c$为方程的3个解.

又将第2,3,4列加到第1列有公因子$(x+a+b+c)$提出, 所以方程的第4个解为 $-(a+b+c)$.

其他解法?

2. 计算4阶行列式

$$D = \begin{vmatrix} a^2+\frac{1}{a^2} & a & \frac{1}{a} & 1 \\ b^2+\frac{1}{b^2} & b & \frac{1}{b} & 1 \\ c^2+\frac{1}{c^2} & c & \frac{1}{c} & 1 \\ d^2+\frac{1}{d^2} & d & \frac{1}{d} & 1 \end{vmatrix} \quad (\text{已知 } abcd=1)$$

解

$$D=\begin{vmatrix} a^2 & a & \frac{1}{a} & 1 \\ b^2 & b & \frac{1}{b} & 1 \\ c^2 & c & \frac{1}{c} & 1 \\ d^2 & d & \frac{1}{d} & 1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \frac{1}{a^2} & a & \frac{1}{a} & 1 \\ \frac{1}{b^2} & b & \frac{1}{b} & 1 \\ \frac{1}{c^2} & c & \frac{1}{c} & 1 \\ \frac{1}{d^2} & d & \frac{1}{d} & 1 \end{vmatrix}$$

$$= abcd\begin{vmatrix} a & 1 & \frac{1}{a^2} & \frac{1}{a} \\ b & 1 & \frac{1}{b^2} & \frac{1}{b} \\ c & 1 & \frac{1}{c^2} & \frac{1}{c} \\ d & 1 & \frac{1}{d^2} & \frac{1}{d} \end{vmatrix} + (-1)^3 \begin{vmatrix} a & 1 & \frac{1}{a^2} & \frac{1}{a} \\ b & 1 & \frac{1}{b^2} & \frac{1}{b} \\ c & 1 & \frac{1}{c^2} & \frac{1}{c} \\ d & 1 & \frac{1}{d^2} & \frac{1}{d} \end{vmatrix}$$

$$= 0.$$

性质6 行列式按行(列)展开定理（Laplace降阶法）

行列式等于它的任一行（列）的各元素与其对应的代数余子式乘积之和，即

$$D = a_{i1}A_{i1} + a_{i2}A_{i2} + \cdots + a_{in}A_{in}\ (i = 1, 2, \cdots, n)$$

例6 求 $\begin{vmatrix} a_1 & 0 & 0 & b_1 \\ 0 & a_2 & b_2 & 0 \\ 0 & b_3 & a_3 & 0 \\ b_4 & 0 & 0 & a_4 \end{vmatrix}$

直接按某行或列展开即可. 答案为$(a_1a_4 - b_1b_4)(a_2a_3 - b_2b_3)$