§4 分块矩阵

前 言

- 由于某些条件的限制，我们经常会遇到大型文件无法上传的情况，如何解决这个问题呢?

  这时我们可以借助**WinRAR**把文件分块，依次上传.

- 家具的拆卸与装配

问题一：什么是矩阵分块法?

问题二：为什么提出矩阵分块法?

问题一：什么是矩阵分块法?

定义： 用一些横线和竖线将矩阵分成若干个小块，这种操作称为**对矩阵进行分块**;

每一个小块称为**矩阵的子块**;

矩阵分块后，以子块为元素的形式上的矩阵称为**分块矩阵**.

$$A=\left(\begin{array}{cc:cc} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ \hdashline a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \end{array}\right)=\begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix}$$

这是2阶方阵吗?

思考题

伴随矩阵是分块矩阵吗?

$$A^* = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \cdots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \cdots & A_{n2} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ A_{1n} & A_{2n} & \cdots & A_{nn} \end{pmatrix}$$

答: 不是. 伴随矩阵的元素是代数余子式（一个数），从而不是分块矩阵.

问题二：为什么提出矩阵分块法？

答: (1) 当矩阵太大时，不适于存储在高速计算机内存中，分块矩阵允许计算机一次处理两到三块子矩阵.

(2) 当矩阵为稀疏矩阵时，把矩阵进行分块后再进行矩阵运算更高效.

(3) 矩阵分块可以将大矩阵的运算转化成小矩阵的运算，体现了化整为零的思想.

分块矩阵的加法

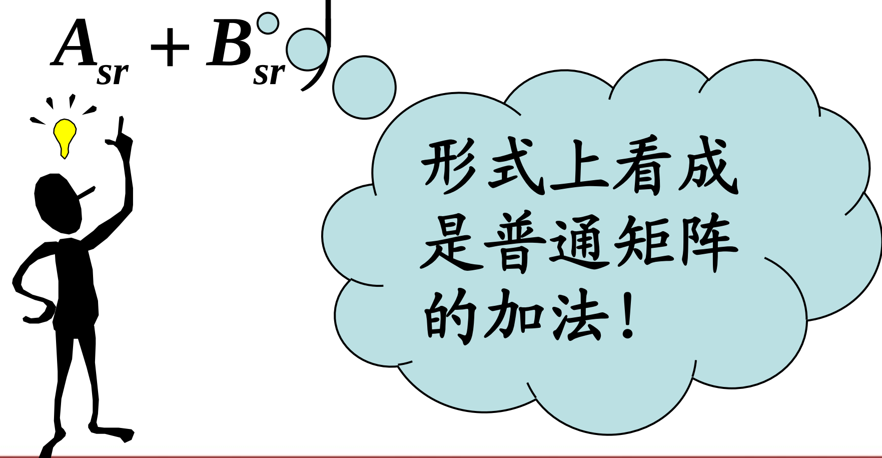
$$A=\begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix},\quad B=\begin{pmatrix} B_{11} & B_{12} \\ B_{21} & B_{22} \end{pmatrix}$$

$$A+B=\begin{pmatrix} A_{11}+B_{11} & A_{12}+B_{12} \\ A_{21}+B_{21} & A_{22}+B_{22} \end{pmatrix}$$

若矩阵A、B是同型矩阵，且采用相同的分块法，即

$$A=\begin{pmatrix} A_{11} & \cdots & A_{1r} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{s1} & \cdots & A_{sr} \end{pmatrix}, B=\begin{pmatrix} B_{11} & \cdots & B_{1r} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ B_{s1} & \cdots & B_{sr} \end{pmatrix}$$

则有 $$A+B=\begin{pmatrix} A_{11}+B_{11} & \cdots & A_{1r}+B_{1r} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{s1}+B_{s1} & \cdots & A_{sr}+B_{sr} \end{pmatrix}$$



分块矩阵的数乘

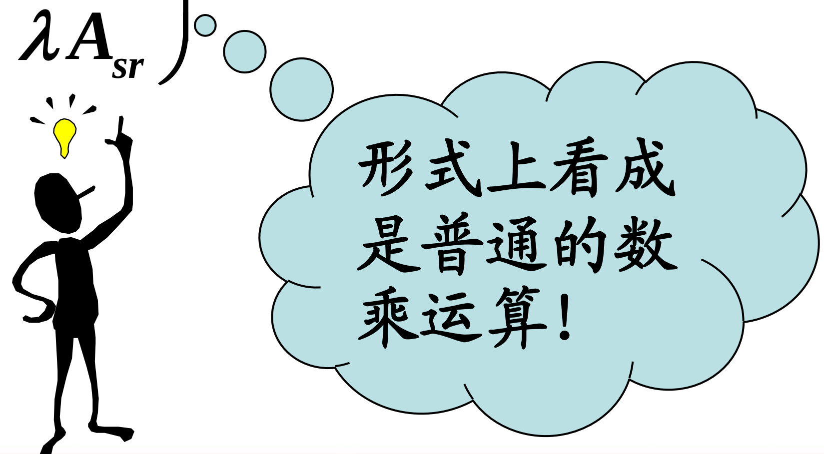
$$A = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix}$$

$$\lambda A = \begin{pmatrix} \lambda A_{11} & \lambda A_{12} \\ \lambda A_{21} & \lambda A_{22} \end{pmatrix}$$

若λ是数，且 $A=\begin{pmatrix} A_{11} & \cdots & A_{1r} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{s1} & \cdots & A_{sr} \end{pmatrix}$

则有

$$\lambda A=\begin{pmatrix} \lambda A_{11} & \cdots & \lambda A_{1r} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \lambda A_{s1} & \cdots & \lambda A_{sr} \end{pmatrix}$$



$$m_1+m_2+\cdots+m_s=m$$

$$l_1+l_2+\cdots+l_t=l$$

$$n_1+n_2+\cdots+n_r=n$$

分块矩阵的乘法

一般地，设 A为$m\times l$ 矩阵，B为$l\times n$矩阵

$$A=\begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & \cdots & A_{1t} \\ A_{21} & A_{22} & \cdots & A_{2t} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ A_{s1} & A_{s2} & \cdots & A_{st} \end{pmatrix},\ B=\begin{pmatrix} B_{11} & B_{12} & \cdots & B_{1r} \\ B_{21} & B_{22} & \cdots & B_{2r} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ B_{t1} & B_{t2} & \cdots & B_{tr} \end{pmatrix},$$

$$C=AB=\begin{pmatrix} C_{11} & C_{12} & \cdots & C_{1r} \\ C_{21} & C_{22} & \cdots & C_{2r} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ C_{s1} & C_{s2} & \cdots & C_{sr} \end{pmatrix},\quad C_{ij}=\sum_{k=1}^{t}A_{ik}B_{kj}$$

$$(i=1,\cdots,s;\ j=1,\cdots,r)$$

按行分块及按列分块

$m \times n$ 矩阵 A 有 m 行 n 列，若将第 i 行记作 $\alpha_i^T = (a_{i1}, a_{i2}, \cdots, a_{in})$

若将第 j 列记作 $\beta_j = \begin{pmatrix} a_{1j} \\ a_{2j} \\ \vdots \\ a_{mj} \end{pmatrix}$,

则

$$A = \left(\begin{array}{c|c|c|c} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \hline a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \hline \vdots & \vdots & & \vdots \\ \hline a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{array}\right) = \begin{pmatrix} \alpha_1^T \\ \alpha_2^T \\ \vdots \\ \alpha_m^T \end{pmatrix} = (\beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_n).$$

于是设 A 为 $m\times s$ 矩阵，B 为 $s\times n$ 矩阵，

若把 A 按行分块，把 B 按列分块，则

$$C=(c_{ij})_{m\times n}=AB=\begin{pmatrix}\alpha_1^T\\ \alpha_2^T\\ \vdots\\ \alpha_m^T\end{pmatrix}(\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_n)=\begin{pmatrix}\alpha_1^T\beta_1 & \alpha_1^T\beta_2 & \cdots & \alpha_1^T\beta_n\\ \alpha_2^T\beta_1 & \alpha_2^T\beta_2 & \cdots & \alpha_2^T\beta_n\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ \alpha_m^T\beta_1 & \alpha_m^T\beta_2 & \cdots & \alpha_m^T\beta_n\end{pmatrix}$$

$$c_{ij}=\alpha_i^T\beta_j=(a_{i1},a_{i2},\cdots,a_{is})\begin{pmatrix}b_{1j}\\ b_{2j}\\ \vdots\\ b_{sj}\end{pmatrix}=\sum_{k=1}^{s}a_{ik}b_{kj}.$$

分块矩阵的转置

若 $A=\begin{pmatrix} A_{11} & \cdots & A_{1r} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{s1} & \cdots & A_{sr} \end{pmatrix}$，则 $A^T=\begin{pmatrix} A_{11}^T & \cdots & A_{s1}^T \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{1r}^T & \cdots & A_{sr}^T \end{pmatrix}$

例如： $A=\left(\begin{array}{c|c|c|c} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \end{array}\right)$

$$A^T=\left(\begin{array}{ccc} a_{11} & a_{21} & a_{31} \\ \hline a_{12} & a_{22} & a_{32} \\ \hline a_{13} & a_{23} & a_{33} \\ \hline a_{14} & a_{24} & a_{34} \end{array}\right)=\begin{pmatrix} \alpha_1^T \\ \alpha_2^T \\ \alpha_3^T \\ \alpha_4^T \end{pmatrix}$$

分块矩阵不仅形式上进行转置，而且每一个子块也进行转置.（自转+公转）

分块对角矩阵

定义：设 A 是 n 阶矩阵，若

1. A 的分块矩阵只有在对角线上有非零子块，
2. 其余子块都为零子块，
3. 对角线上的子块都是方阵，

那么称 A 为分块对角矩阵.

例如：

$$A = \left(\begin{array}{c|c|cc} 5 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 8 & 3 \\ 0 & 0 & 5 & 2 \end{array}\right) = \begin{pmatrix} A_1 & O & O \\ O & A_2 & O \\ O & O & A_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} B_1 & O \\ O & B_2 \end{pmatrix}$$

分块对角矩阵的性质

$$A=\begin{pmatrix} A_1 & & & \\ & A_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & A_s \end{pmatrix}$$

① 分块矩阵A的行列式 $|A|=|A_1||A_2|\cdots|A_s|$

② 分块矩阵A的幂 $A^n=\begin{pmatrix} A_1^n & & & \\ & A_2^n & & \\ & & \ddots & \\ & & & A_s^n \end{pmatrix}$

③ 分块矩阵的逆矩阵

$$\begin{pmatrix} A & O \\ O & B \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} A^{-1} & O \\ O & B^{-1} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} O & A \\ B & O \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} O & B^{-1} \\ A^{-1} & O \end{pmatrix}$$

$$A = \begin{pmatrix} A_1 & & & \\ & A_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & A_s \end{pmatrix} \qquad A^{-1} = \begin{pmatrix} A_1^{-1} & & & \\ & A_2^{-1} & & \\ & & \ddots & \\ & & & A_s^{-1} \end{pmatrix}$$

例 设方阵A,B是n阶方阵，A^*,B^*分别为A,B对应的伴随矩阵，分块矩阵$C=\begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix}$，则$C$的伴随矩阵

$C^* =$ ( )

(A) $\begin{pmatrix} |A|A^* & 0 \\ 0 & |B|B^* \end{pmatrix}$ (B) $\begin{pmatrix} |B|B^* & 0 \\ 0 & |A|A^* \end{pmatrix}$

(C) $\begin{pmatrix} |A|B^* & 0 \\ 0 & |B|A^* \end{pmatrix}$ (D) $\begin{pmatrix} |B|A^* & 0 \\ 0 & |A|B^* \end{pmatrix}$

例: 设$A=\begin{pmatrix}5&0&0\\0&3&1\\0&2&1\end{pmatrix}$，求$A^{-1}$.

解:

$$A=\left(\begin{array}{c|cc}5&0&0\\\hline 0&3&1\\0&2&1\end{array}\right)=\begin{pmatrix}A_1&O\\O&A_2\end{pmatrix}\qquad A^{-1}=\begin{pmatrix}A_1^{-1}&O\\O&A_2^{-1}\end{pmatrix}$$

$$A_1=(5),A_1^{-1}=\left(\frac{1}{5}\right)$$

$$A_2=\begin{pmatrix}3&1\\2&1\end{pmatrix},A_2^{-1}=\begin{pmatrix}1&-1\\-2&3\end{pmatrix}$$

例: 设A,B 均可逆，求$\begin{pmatrix} A & O \\ C & B \end{pmatrix}$的逆矩阵.

解: 因为$\begin{vmatrix} A & O \\ C & B \end{vmatrix} = |A||B| \neq 0$

设$\begin{pmatrix} A & O \\ C & B \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} A_1 & A_2 \\ A_3 & A_4 \end{pmatrix}$

由$\begin{pmatrix} A & O \\ C & B \end{pmatrix}\begin{pmatrix} A_1 & A_2 \\ A_3 & A_4 \end{pmatrix} = E$ 可得

$$\begin{pmatrix} AA_1 & AA_2 \\ CA_1 + BA_3 & CA_2 + BA_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} E & O \\ O & E \end{pmatrix}$$

从而

$$AA_1 = E$$

$$AA_2 = O$$

$$CA_1 + BA_3 = O$$

$$CA_2 + BA_4 = E$$

由 A，B 可逆， 可得

$$A_1 = A^{-1}, A_2 = O, A_3 = -B^{-1}CA^{-1}, A_4 = B^{-1}$$

故 $\begin{pmatrix} A & O \\ C & B \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} A^{-1} & O \\ -B^{-1}CA^{-1} & B^{-1} \end{pmatrix}.$

例： 往证 $A_{m\times n}=O_{m\times n}$ 的充分必要条件是方阵 $A^TA=O_{n\times n}$.

证明： 把 A 按列分块，有 $A=(a_{ij})_{m\times n}=\left(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n\right)$

于是 $$A^TA=\begin{pmatrix}\alpha_1^T\\ \alpha_2^T\\ \vdots\\ \alpha_n^T\end{pmatrix}\left(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n\right)=\begin{pmatrix}\alpha_1^T\alpha_1 & \alpha_1^T\alpha_2 & \cdots & \alpha_1^T\alpha_n\\ \alpha_2^T\alpha_1 & \alpha_2^T\alpha_2 & \cdots & \alpha_2^T\alpha_n\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ \alpha_n^T\alpha_1 & \alpha_n^T\alpha_2 & \cdots & \alpha_n^T\alpha_n\end{pmatrix}=O$$

那么

$$\alpha_j^T\alpha_j=\left(a_{1j},a_{2j},\cdots,a_{mj}\right)\begin{pmatrix}a_{1j}\\ a_{2j}\\ \vdots\\ a_{mj}\end{pmatrix}=a_{1j}^{\ 2}+a_{2j}^{\ 2}+\cdots+a_{mj}^{\ 2}=0$$

$$a_{1j}=a_{2j}=\cdots=a_{mj}=0$$

即 $A=O$.

克莱姆法则

如果线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n = b_n \end{cases} \qquad (1)$$

的系数行列式不等于零，即 $D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \neq 0$

那么线性方程组(1)有解并且解是唯一的，解可以表示成

$$x_1=\frac{D_1}{D},\ x_2=\frac{D_2}{D},\ x_3=\frac{D_3}{D},\cdots,x_n=\frac{D_n}{D}. \qquad (2)$$

其中D_j是把系数行列式D中第j列的元素用方程组右端的常数项代替后所得到的n阶行列式，即

$$D_j=\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1,j-1} & b_1 & a_{1,j+1} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{n,j-1} & b_n & a_{n,j+1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

$$=b_1A_{1j}+b_2A_{2j}+\cdots+b_nA_{nj}$$

证: 线性方程组可写成矩阵方程

$$Ax = b \qquad (2)$$

其中 $A=(a_{ij})_{n\times n}, x=(x_1,x_2,\cdots,x_n)^T, b=(b_1,b_2,\cdots,b_n)^T$.

因为 $|A|=D\neq 0$ ，故 A^{-1} 存在. (2)式两边左乘以 A^{-1} ，

得 $x=A^{-1}b$ 是方程组得解. 根据逆矩阵的唯一性，知 $A^{-1}b$

是方程组的唯一解.由 $A^{-1}=\dfrac{A^*}{|A|}$，$x=A^{-1}b=\dfrac{1}{D}A^*b$，即

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \frac{1}{D}\begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \cdots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \cdots & A_{n2} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ A_{1n} & A_{2n} & \cdots & A_{nn} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} = \frac{1}{D}\begin{pmatrix} b_1A_{11}+\cdots+b_nA_{n1} \\ b_1A_{12}+\cdots+b_nA_{n2} \\ \vdots \\ b_1A_{1n}+\cdots+b_nA_{nn} \end{pmatrix}$$