2017～2018 学年第一学期《线性代数》试卷（A）参考答案

一、填空题（每小题 4 分，共 20 分）

1、$-\dfrac{1}{2}$； 2、1； 3、48； 4、4； 5、$t>2$.

二、选择题（每小题 4 分，共 20 分）

1、B； 2、D； 3、C； 4、D； 5、C.

三、(**8 分**) 设向量组 $\vec{\alpha}_1=(1,-1,2,4)^T$, $\vec{\alpha}_2=(0,3,1,2)^T$, $\vec{\alpha}_3=(3,0,7,14)^T$, $\vec{\alpha}_4=(1,-2,2,0)^T$，求此向量组的一个极大线性无关组，并将其余向量用这个极大线性无关组线性表示.

解： $A=\left(\overrightarrow{\alpha_1},\overrightarrow{\alpha_2},\overrightarrow{\alpha_3},\overrightarrow{\alpha_4}\right)=\begin{pmatrix}1&0&3&1\\-1&3&0&-2\\2&1&7&2\\4&2&14&0\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&0&3&1\\0&3&3&-1\\0&1&1&0\\0&2&2&-4\end{pmatrix}$

$$\to\begin{pmatrix}1&0&3&1\\0&0&0&-1\\0&1&1&0\\0&0&0&-4\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&0&3&1\\0&1&1&0\\0&0&0&1\\0&0&0&0\end{pmatrix},$$

$R(A)=3$，由于 $\begin{vmatrix}1&0&1\\0&1&0\\0&0&1\end{vmatrix}\neq 0$，所以 $\overrightarrow{\alpha_1},\overrightarrow{\alpha_2},\overrightarrow{\alpha_4}$ 是向量组的一个极大线性无关组，

$\overrightarrow{\alpha_3}=3\overrightarrow{\alpha_1}+\overrightarrow{\alpha_2}$.

注：$\overrightarrow{\alpha_1},\overrightarrow{\alpha_3},\overrightarrow{\alpha_4}$ 都是向量组的一个极大线性无关组，$\overrightarrow{\alpha_2}=-3\overrightarrow{\alpha_1}+\overrightarrow{\alpha_3}$.

四、(**12 分**) λ 取何值时，线性方程组

$$\begin{cases}\lambda x_1+x_2+x_3=\lambda-3,\\x_1+\lambda x_2+x_3=-2,\\x_1+x_2+\lambda x_3=-2\end{cases}$$

无解、有唯一解、有无穷多解？当方程组有无穷多解时，求其通解.

解： 因为 $|A|=\begin{vmatrix}\lambda&1&1\\1&\lambda&1\\1&1&\lambda\end{vmatrix}=(\lambda+2)(\lambda-1)^2$，故

①当 $\lambda\neq-2,1$ 时，$|A|\neq 0$，由克莱姆法则可知：方程组有唯一解；

②当 $\lambda=-2$ 时，$|A|=0$，而

$$\left(\begin{array}{ccc|c}-2&1&1&-5\\1&-2&1&-2\\1&1&-2&-2\end{array}\right)\xrightarrow{r_3+r_1+r_2}\left(\begin{array}{ccc|c}-2&1&1&-5\\1&-2&1&-2\\0&0&0&-9\end{array}\right),$$

故 $R(A)=2<3=R(A,\vec{b})$，方程组无解；

③当 $\lambda=1$ 时，方程组为 $x_1+x_2+x_3=-2$，有无穷多解，其通解为

$$\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}=c_1\begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix}+c_2\begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}-2\\0\\0\end{pmatrix}(c_1,c_2\in R).$$

五、(**8 分**) 如果向量 $\vec{\alpha}=(1,k)^T$ 是矩阵 $A=\begin{bmatrix}3&1\\5&-1\end{bmatrix}$ 的逆矩阵 A^{-1} 的特征向量，求常数 k 的值.

解： 由题意知 $\begin{bmatrix}3&1\\5&-1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\k\end{bmatrix}=\lambda\begin{bmatrix}1\\k\end{bmatrix}$

得 $\begin{cases}3+k=\lambda\\5-k=\lambda k\end{cases}$，解得 $k=1$ 或 $k=-5$.

六、(12 分) 设三阶对称阵 A 的特征值为 $\lambda_1=6,\ \lambda_2=\lambda_3=3$. 若与特征值 $\lambda_1=6$ 对应的特征向量为 $\vec{p}_1=(1,1,1)^T$，求 A .

解： 设 $\lambda_2=\lambda_3=3$ 的特征向量为 $\overrightarrow{p_2}=\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{bmatrix}$，则 $x_1+x_2+x_3=0$，

取 $\overrightarrow{p_2}=\begin{bmatrix}-1\\1\\0\end{bmatrix}$，$\overrightarrow{p_3}=\begin{bmatrix}-1\\0\\1\end{bmatrix}$，得可逆阵 $P=\begin{bmatrix}1&-1&-1\\1&1&0\\1&0&1\end{bmatrix}$，$P^{-1}=\begin{bmatrix}\frac{1}{3}&\frac{1}{3}&\frac{1}{3}\\-\frac{1}{3}&\frac{2}{3}&-\frac{1}{3}\\-\frac{1}{3}&-\frac{1}{3}&\frac{2}{3}\end{bmatrix}$

从而 $P^{-1}AP=\Lambda=\begin{bmatrix}6&&\\&3&\\&&3\end{bmatrix}$，$A=P\Lambda P^{-1}$，求得 $A=\begin{bmatrix}4&1&1\\1&4&1\\1&1&4\end{bmatrix}$.

七、（15 分）设实对称矩阵 $A=\begin{bmatrix}0&1&0\\1&0&0\\0&0&2\end{bmatrix}$.

（1）分别写出以 A，A^{-1} 为系数矩阵的二次型；

（2）求一个正交变换 $\vec{x}=P\vec{y}$ 将二次型 $f(x_1,x_2,x_3)=\vec{x}^TA\vec{x}$ 化为标准形.

解：$A=\begin{bmatrix}0&1&0\\1&0&0\\0&0&2\end{bmatrix}, A^{-1}=\begin{bmatrix}0&1&0\\1&0&0\\0&0&\frac{1}{2}\end{bmatrix}$

（1）$f=\vec{x}^TA\vec{x}=2x_1x_2+2x_3^2$，$f=\vec{x}^TA^{-1}\vec{x}=2x_1x_2+\frac{1}{2}x_3^2$

（2）由 $|A-\lambda E|=\begin{vmatrix}-\lambda&1&0\\1&-\lambda&0\\0&0&2-\lambda\end{vmatrix}=0$ 知 A 的特征值为 $-1,1,2$；

对 $\lambda_1=-1$，由

$$A+E=\begin{pmatrix}1&1&0\\1&1&0\\0&0&3\end{pmatrix}\xrightarrow{r_2-r_1}\begin{pmatrix}1&1&0\\0&0&0\\0&0&3\end{pmatrix}\xrightarrow{\frac{1}{3}r_3}\begin{pmatrix}1&1&0\\0&0&0\\0&0&1\end{pmatrix}\rightarrow\begin{pmatrix}1&1&0\\0&0&1\\0&0&0\end{pmatrix}$$

可得对应的线性无关特征向量为 $\vec{p}_1=\begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix}$；

对 $\lambda_2=1$，由

$$A-E=\begin{pmatrix}-1&1&0\\1&-1&0\\0&0&1\end{pmatrix}\xrightarrow{r_2+r_1}\begin{pmatrix}-1&1&0\\0&0&0\\0&0&1\end{pmatrix}\xrightarrow{-r_1}\begin{pmatrix}1&-1&0\\0&0&0\\0&0&1\end{pmatrix}\rightarrow\begin{pmatrix}1&-1&0\\0&0&1\\0&0&0\end{pmatrix}$$

可得对应的线性无关特征向量为 $\vec{p}_2=\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}$；

对 $\lambda_3=2$，由

$$A-2E=\begin{pmatrix}-2&1&0\\1&-2&0\\0&0&0\end{pmatrix}\xrightarrow{r_2+\frac{1}{2}r_1}\begin{pmatrix}-2&1&0\\0&-\frac{3}{2}&0\\0&0&0\end{pmatrix}\rightarrow\begin{pmatrix}1&-\frac{1}{2}&0\\0&1&0\\0&0&0\end{pmatrix}$$

可得对应的线性无关特征向量为 $\vec{p}_3=\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$；

• 正交化单位化

A 为实对称阵，且有三个单特征值，故其对应的特征向量已经正交，因此只需单位化：

$$\vec{e}_1=\frac{1}{\|\vec{p}_1\|}\vec{p}_1=\begin{pmatrix}\sqrt{2}/2\\-\sqrt{2}/2\\0\end{pmatrix},\vec{e}_2=\frac{1}{\|\vec{p}_2\|}\vec{p}_2=\begin{pmatrix}\sqrt{2}/2\\\sqrt{2}/2\\0\end{pmatrix},\vec{e}_2=\frac{1}{\|\vec{p}_2\|}\vec{p}_3=\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix};$$

• 作正交阵与对角阵

作正交阵 $P=(\vec{e}_1,\vec{e}_2,\vec{e}_3)=\begin{pmatrix}\sqrt{2}/2&\sqrt{2}/2&0\\-\sqrt{2}/2&\sqrt{2}/2&0\\0&0&1\end{pmatrix}$，对角阵 $\Lambda=\begin{pmatrix}-1&0&0\\0&1&0\\0&0&2\end{pmatrix}$，则二次型经正交变换 $\vec{x}=P\vec{y}$ 化为标准形 $f=-y_1^2+y_2^2+2y_3^2$.

八、（5 分）设 λ_1,λ_2 是 n 阶矩阵 A 的两个不同特征值，对应的特征向量分别为 $\vec{\alpha}_1,\vec{\alpha}_2$. 试证 $c_1\vec{\alpha}_1+c_2\vec{\alpha}_2$ （c_1,c_2 为非零常数）不是 A 的特征向量.

证明：已知 $A\alpha_1=\lambda_1\alpha_1, A\alpha_2=\lambda_2\alpha_2, \lambda_1\neq\lambda_2$

若 $A(c_1\alpha_1+c_2\alpha_2)=\lambda(c_1\alpha_1+c_2\alpha_2)$ 则有 $c_1(\lambda_1-\lambda)\alpha_1+c_2(\lambda_2-\lambda)\alpha_2=0$

由于 α_1,α_2 无关，c_1,c_2 非零，所以 $\lambda_1=\lambda=\lambda_2$ 矛盾.