计算方法

第一章 插值方法

胡 敏
合肥工业大学 计算机与信息学院
jsjxhumin@hfut.edu.cn
uhnim@163.com

第 1 章　插值方法

本节教学内容

1. 教学内容：

代数插值多项式的存在唯一性；
Lagrange插值及其误差估计。

2．重点难点：

Lagrange插值基函数、插值公式的构造、插值余项。

3．教学目标：

了解插值问题的背景及提法、代数插值多项式的存在唯一性；掌握Lagrange插值基函数及其构造法。

1.1 问题的提出

- 描述事物数值之间的关系：
  - 两种情况：

当x为特殊值时，方便计算

表格——离散数据表示函数关系

表达式——明显的表达式表示函数关系，但很复杂，不便于研究和使用。

实际问题：

- ***函数解析式未知,通过实验观测得到的一组数据, 即在某个区间[a, b]上给出一系列点的函数值 $y_i= f(x_i)$***
- ***或者给出函数表***

1.1 问题的提出

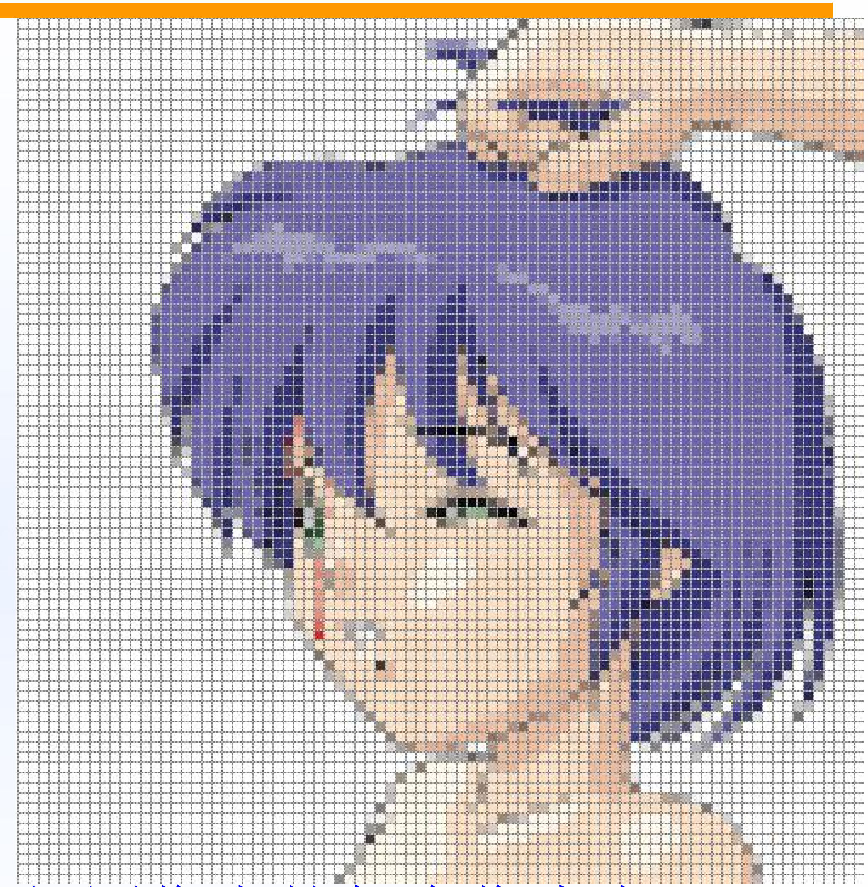
x	x_0	x_1	x_2	……	x_n
y	y_0	y_1	y_2	……	y_n

- 插值方法的应用：

f(x)只是一个数学概念意义下的函数。

（比如：图像的方法处理，天气预报，机床加工等方面）

2	5
2	5



- 首先根据几何变换关系，计算新图像中的每个像素在原图像中的坐标位置。
- 然后，如果对应到原图像中的整数坐标，则直接拷贝，否则，选择插值算法求得这点的像素值

Photoshop软件中的插值算法

- 最近邻插值 （0次插值）
- 双线性插值 （一次插值）
- 双三次插值

2	5
2	5

2	2	5	5
2	2	5	5
2	2	5	5
2	2	5	5

1.1　问题的提法

- 从实际问题需要出发：

1、允许有一定误差

2、可用近似表达式代替函数关系，简化问题

一般情况：构造某种简单函数p(x)作为原函数f(x)的近似函数。

当精确函数$y=f(x)$非常复杂或未知时，在一系列节点处$x_0, x_1, \cdots x_n$处测得函数值

$$y_0=f(x_0), \cdots, y_n=f(x_n),$$

由此构造一个简单易算的函数p(x)：

$$p(x) \approx f(x)$$

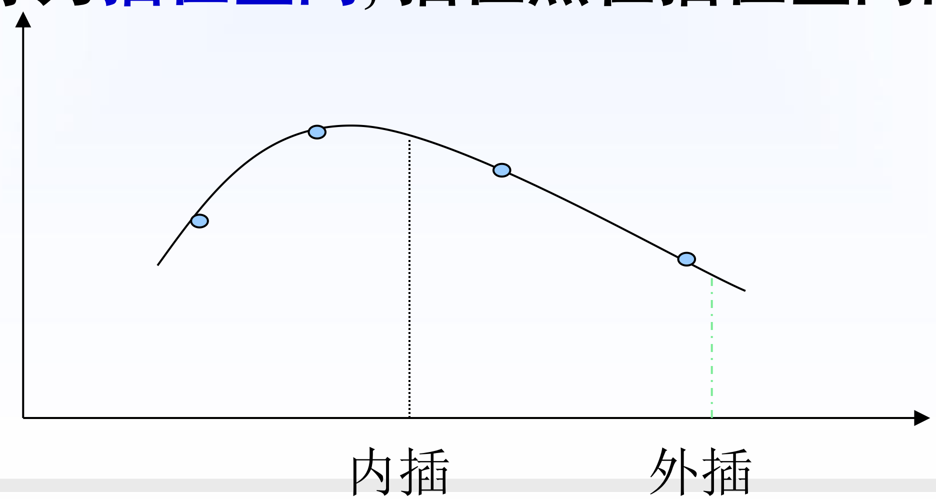
插值函数：

满足条件： $p(x_i)=f(x_i), (i=0,\cdots n)$ (0)

则，p(x)就称为f(x)的插值函数。 f(x)为被插函数，点xi为插值节点，称(0) **式为插值条件.**在其它点x就用 p(x)的值作为f(x) 的近似值。这一过程称为**插值**，

f(x)为被插函数, 点xi为插值节点, 称((0))式为插值条件, 而误差函数R(x)= $f(x)-p(x)$ **称为插值余项**

区间[a, b]称为插值区间, 插值点在插值区间内的称为内插, 否则称外插



插值法的基本原理

插值就是根据被插函数给出的函数表“插出”所要点的函数值。

希望p(x)能较好地逼近f(x),而且还希望它计算简单 。由于代数多项式具有数值计算和理论分析方便的优点。所以本章主要介绍代数插值。即求一个次数不超过n次的多项式。

最常用的插值函数：代数多项式

代数插值

$$P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$$

本节课主要内容

1. 泰勒插值
2. 拉格朗日插值
   线性插值
   抛物插值
   一般情形
3. 插值余项

1.泰勒插值

- 泰勒展开式---一种插值方法

函数 $f(x)$ 的泰勒级数展开

$$f(x)=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)+\ldots\ldots+\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n+\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}$$

泰勒多项式：

$$p_n(x)=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)+\ldots\ldots+\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n \qquad (1)$$

与 $f(x)$ 在点 x_0 具有相同的导数值

$$p_n^{(k)}(x_0)=f^{(k)}(x_0), \qquad k=0,1,\ldots,n$$

因此，$p_n(x)$ 在点 x_0 邻近处，会很好的逼近 $f(x)$。

泰勒插值余项

定理 1（泰勒余项定理） 假设 f（x）在含有点 x_0的区间［a，b］内有直到 n +1阶导数，则当 x∈［a，b］时，对于由式（1）给出的 p_n（x），成立

$$f(x)-p_n(x)=\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}$$

式中 ξ界于 x_0与 x之间，因而 ξ∈［a，b］.

所谓泰勒插值是指下述插值问题：

问题 1： 求作 n 次多项式 $p_n(x)$，使满足条件

$$p_n^{(k)}(x_0)=y_0^{(k)},\quad k=0,1,\ldots,n$$

这里 $y_0^{(k)}(k=0,1,\ldots,n)$为一组已给定的数据。

容易看出，对于给定的函数 $f(x)$，若导数 $f^{(k)}(x_0)=y_0^{(k)},(k=0,1,2,\ldots,n)$已给，则上述泰勒插值问题的解就是泰勒多项式（1）。

泰勒插值

例 1: 求作 $f(x)=\sqrt{x}$ 在 $x_0=100$ 的一次和二次泰勒多项式，利用它们计算 $\sqrt{115}$ 的近似值并估计误差。

解：由于 $x_0=100$，而

$$f(x)=\sqrt{x}，\quad f'(x)=\frac{1}{2\sqrt{x}}，\quad f''(x)=-\frac{1}{4x\sqrt{x}}$$

$$f(x_0)=10，\quad f'(x_0)=\frac{1}{20}，\quad f''(x_0)=-\frac{1}{4000}$$

$f(x)$ 在 x_0 的一次泰勒多项式是

$$p_1(x)=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)=5+0.05x$$

用 $p_1(x)$ 作为 $f(x)$ 的近似表达式，容易求出当 $x_1=115$ 时

$$\sqrt{115}=f(x_1)\approx p_1(x_1)=10.75$$

泰勒插值

据定理 1 可估算出误差

$$0>f(x_1)-p_1(x_1)=\frac{f''(\xi)}{2}(x_1-x_0)^2>\frac{f''(x_0)}{2}(x_1-x_0)^2=-0.028125$$

$\sqrt{115}$ 的精确值为 10.723805…，与精确值相比较，近似值 10.75 的误差大约等于 -0.026，因而它有 3 位有效数字。

修正 $p_1(x)$ 可进一步得出二次泰勒多项式

$$p_2(x)=p_1(x)+\frac{f''(x_0)}{2}(x-x_0)^2$$

据此可得到新的近似值

$$\sqrt{115}=f(x_1)\approx p_2(x_1)=10.75-0.02812=10.721875$$

这个结果有 4 位有效数字。

2.拉格朗日插值

上述泰勒插值要求提供f(x)在 x_0 处各阶导数值，这项要求很苛刻。

如果仅仅给出一系列节点上的函数值 $f(x_i)=y_i$， $i=0,1,2,\ldots,n$ 则插值问题可表述为如下：

问题 求作次数 $\le n$ 多项式 $p_n(x)$，使满足条件

$$p_n(x_i)=y_i,\quad i=0,1,2,\ldots,n \qquad (2)$$

这就是所谓的**拉格朗日（Lagrange）插值**。点 x_i （它们互不相同）称为插值节点。

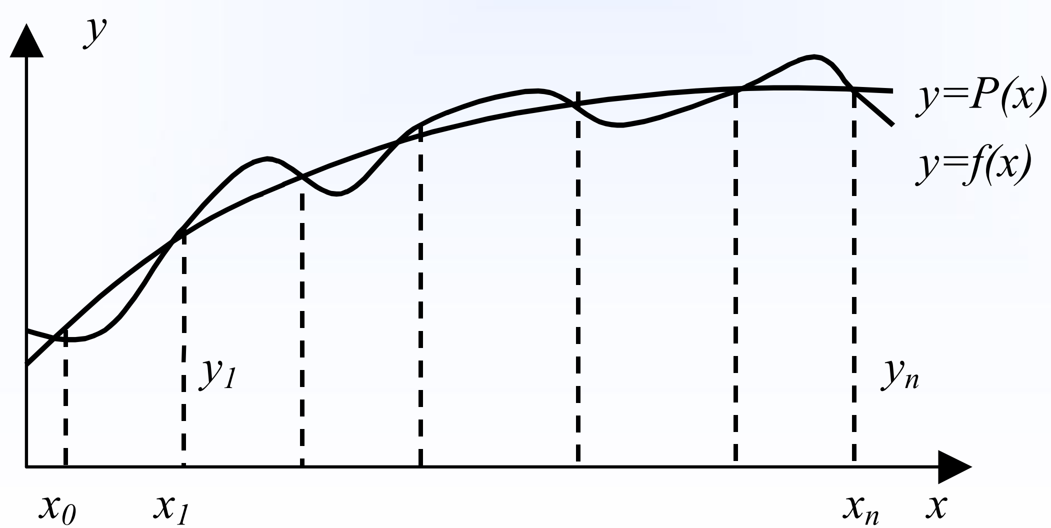
用几何语言来描述，就是，通过曲线y=f(x)上给定的n+1个点 $(x_i, y_i)\ (i=0,1,2,\ldots,n)$，求作一条n次代数曲线 $y=p_n(x)$ 作为Y=f(x)的近似。

2.拉格朗日插值

即求一个次数不超过n次的多项式。

$$P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$$

满足 $P(x_i) = f(x_i) \qquad (i = 0,1,2,\cdots,n)$



插值多项式的存在唯一性

定理2(多项式插值定理)n次代数插值问题的解是存在且惟一的

证明：设n次多项式

$$P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$$

是函数 $y = f(x)$ 在区间[a, b]上的n+1个互异的节点 x_i (i=0, 1, 2, …, n)上的插值多项式, 则求插值多项式P(x)的问题就归结为求它的系数 a_i (i=0, 1, 2, …, n)。

由插值条件: $p(x_i) = f(x_i)$ (i=0, 1, 2, …, n), 可得

$$\begin{cases} a_n x_0^n + a_{n-1} x_0^{n-1} + \cdots + a_1 x_0 + a_0 = f(x_0) \\ a_n x_1^n + a_{n-1} x_1^{n-1} + \cdots + a_1 x_1 + a_0 = f(x_1) \\ \cdots \\ a_n x_n^n + a_{n-1} x_n^{n-1} + \cdots + a_1 x_n + a_0 = f(x_n) \end{cases}$$

惟一性说明，不论用何种方法来构造，也不论用何种形式来表示插值多项式，只要满足插值条件(2)，其结果都是相互恒等的。

克莱姆法则

$$x_i = \frac{|D_i|}{|D|}$$

$$V = \begin{vmatrix} 1 & x_0 & x_0^2 & \cdots & x_0^n \\ 1 & x_1 & x_1^2 & \cdots & x_1^n \\ \vdots & & & & \vdots \\ 1 & x_n & x_n^2 & \cdots & x_n^n \end{vmatrix} = \prod_{i=1}^{n}\prod_{j=0}^{i-1}(x_i - x_j)$$

称为Vandermonde（范德蒙）行列式，因$x_i \neq x_j$（当$i \neq j$），故$V \neq 0$。根据解线性方程组的克莱姆（Gramer）法则，方程组的解 $a_0, a_1, \cdots, a_n$ 存在惟一，从而P(x)被惟一确定。

克拉默法则

如果线性方程组(8)的系数行列式不等于零，即

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \neq 0,$$

那么方程(4) 有唯一解

$$x_1=\frac{D_1}{D}, x_2=\frac{D_2}{D}, \cdots, x_n=\frac{D_n}{D}$$

其中 $D_j\ (j=1,2,\dots,n\ )$ 是把系数行列式中第 j 列的元素用方程右端的自由项代替后所得到的 n 阶行列式.

多项式插值问题

- 以上关于插值问题可解性的论证是构造型的，通过求解线性方程组即可确定插值函数 $p_n(x)$。

  问题在于这种算法的计算量大，不便于实际应用。

  插值多项式的构造能否回避求解线性方程组呢？回答是肯定的。

1.2 Lagrange插值公式

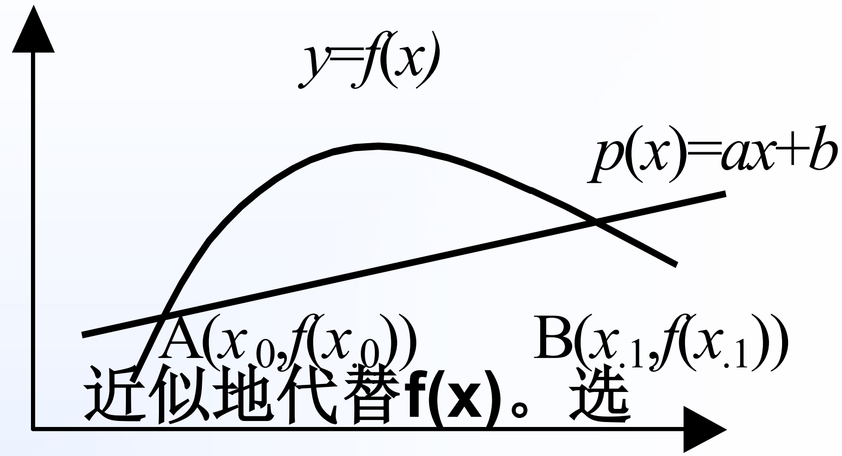
1.线性插值

线性插值是代数插值的最简单形式。假设给定了函数f(x)在两个互异的点的值，x_0，x_1

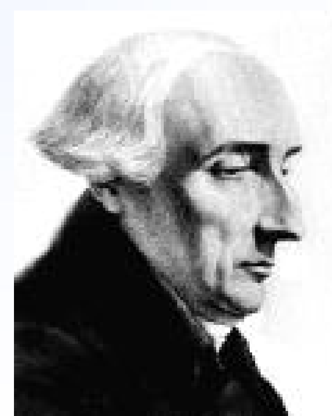
$y_0=f(x_0),\ y_1=f(x_1)$

现要求用线性函数 $p(x)=ax+b$ 近似地代替f(x)。选择参数a和b，使 $p(x_i)=f(x_i)(i=0,1)$。

称这样的线性函数P(x)为f(x)的线性插值函数。



$$p(x)=y_0+\frac{y_1-y_0}{x_1-x_0}(x-x_0)$$



Lagrange

法1736-1813

线性插值

问题3 求作一次式$p_1(x)$，使满足条件

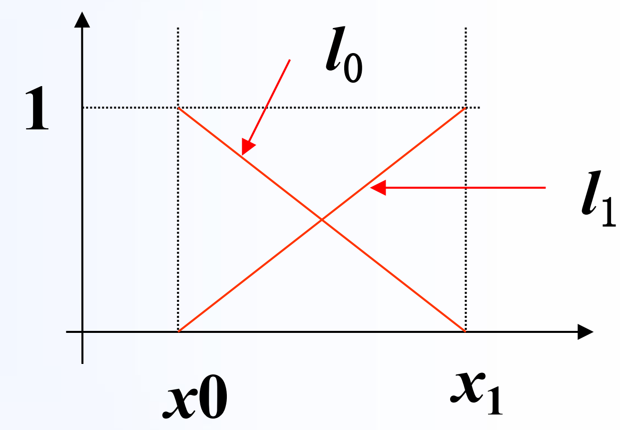
$$p_1(x_0)=y_0,p_1(x_1)=y_1$$

从几何图形上看，$y=p_1(x)$ 表示过两点$(x_0,y_0),(x_1,y_1)$ 的直线，因此可表为如下对称形式：

$$p_1(x)=y_0l_0(x)+y_1l_1(x)$$

其中

$$l_0(x)=\frac{x-x_1}{x_0-x_1},l_1(x)=\frac{x-x_0}{x_1-x_0}$$



$l_0(x)$ 和 $l_1(x)$ 分别满足条件

$$l_0(x_0)=1,l_0(x_1)=0,l_1(x_1)=1,l_1(x_0)=0$$

一次插值也称为线性插值，$l_0(x)$ $l_1(x)$ 称为线性插值基函数。

可见，插值问题的解 $p_1(x)$ 可以通过插值基函数 $l_0(x)$ 和 $l_1(x)$ 的组合得出，且组合系数分别是所给数据 y_0,y_1 。

上述线性插值，它的解可以表示为点斜式：

$$p(x) = y_0 + \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0}(x - x_0) \qquad (3)$$

$$p(x) = \frac{x - x_1}{x_0 - x_1} y_0 + \frac{x - x_0}{x_1 - x_0} y_1 \qquad (4)$$

为了便于推广，记

$$l_0(x) = \frac{x - x_1}{x_0 - x_1}, \quad l_1(x) = \frac{x - x_0}{x_1 - x_0}$$

这是一次函数, 且有性质

$$l_0(x_0) = 1, \quad l_0(x_1) = 0$$
$$l_1(x_0) = 0, \quad l_1(x_1) = 1$$

$$l_0(x) + l_1(x) = 1$$

$$l_k(x_i) = \delta_{ki} = \begin{cases} 1 & (i = k) \\ 0 & (i \neq k) \end{cases}$$

$l_0(x)$ 与 $l_1(x)$ 称为**线性插值基函数**。且有

$$l_k(x) = \prod_{\substack{j=0 \\ j\neq k}}^{1} \frac{x - x_j}{x_k - x_j}, \qquad k = 0,1$$

于是线性插值函数可以表示为与基函数的线性组合

$$p_1(x) = l_0(x)y_0 + l_1(x)y_1 \tag{5}$$

例2.1 已知 $\sqrt{100}=10$ ，$\sqrt{121}=11$ ， 求 $y=\sqrt{115}$

解：这里x_0=100，y_0=10，x_1=121，y_1=11, 利用线性插值

$$p(x)=\frac{x-121}{100-121}\times 10+\frac{x-100}{121-100}\times 11$$

$$y=\sqrt{115}\approx p(115)=10.714$$

2. 抛物插值

抛物插值又称二次插值，它也是常用的代数插值之一。设已知f(x)在三个互异点x_0，x_1，x_2的函数值y_0，y_1，y_2，要构造次数不超过二次的多项式

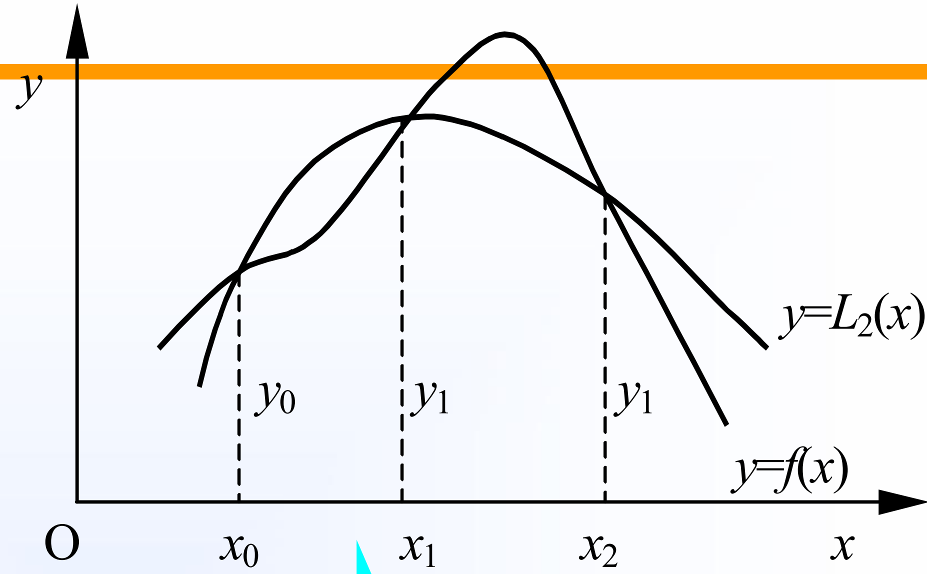
$$P(x)=a_2x^2+a_1x+a_0$$

使满足二次插值条件：

$$P(x_i)=y_i \qquad (i=0,1,2)$$

这就是二次插值问题。其几何意义是用经过3个点 $(x_0,y_0),(x_1,y_1),(x_2,y_2)$ **的抛物线** $y=P(x)$ **近似代替曲线** $y=f(x)$ **，如下图所示。因此也称之为抛物插值。**

P(x)的参数 a_0, a_1, a_2 直接由插值条件决定，即 a_0, a_1, a_2 满足下面的代数方程组：



$$\begin{cases} a_0 + a_1 x_0 + a_2 x_0^2 = y_0 \\ a_0 + a_1 x_1 + a_2 x_1^2 = y_1 \\ a_0 + a_1 x_2 + a_2 x_2^2 = y_2 \end{cases}$$

该三元一次方程组的系数矩阵

$$\begin{bmatrix} 1 & x_0 & x_0^2 \\ 1 & x_1 & x_1^2 \\ 1 & x_2 & x_2^2 \end{bmatrix}$$

的行列式是范德蒙行列式，当 $x_0 \neq x_1 \neq x_2$ 时，方程组的解唯一。

问题4　求二次式 $p_2(x)$, 使其满足条件:

$$p_2(x_0)=y_0\,,\quad p_2(x_1)=y_1\,,\quad p_2(x_2)=y_2 \qquad (6)$$

二次插值的几何解释是用通过三个点 $(x_0,y_0),(x_1,y_1),(x_2,y_2)$ 的抛物线 $y=p_2(x)$ 来近似考察曲线 $y=f(x)$，故称为抛物插值。

为了与下一节的Lagrange插值公式比较, 仿线性插值, 用基函数的方法求解方程组。先考察一个特殊的二次插值问题.

类似于线性插值，令

$$l_0(x_0)=1,\quad l_0(x_1)=0,\quad l_0(x_2)=0 \qquad (7)$$

这个问题容易求解。由上式的后两个条件知:

x_1,x_2 **是** $l_0(x)$ **的两个零点。于是**

类似的可以构造出 $l_0(x)=c(x-x_1)(x-x_2)$

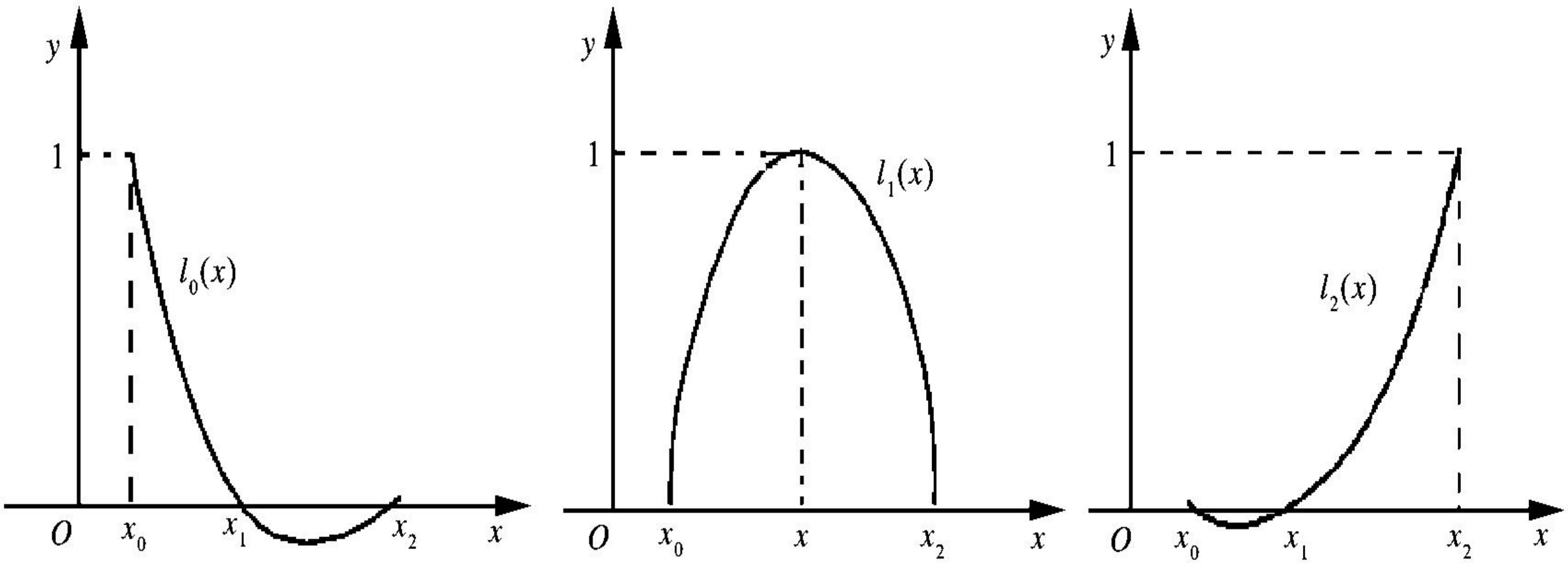
再由另一条件 $l_0(x_0)=1$ **确定系数** $c=\dfrac{1}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)}$

从而导出 $$l_0(x)=\frac{(x-x_1)(x-x_2)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)}$$

类似导出 $$l_1(x)=\frac{(x-x_0)(x-x_2)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)}$$

$$l_2(x)=\frac{(x-x_0)(x-x_1)}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)}$$

$$p_2(x)=l_0(x)y_0+l_1(x)y_1+l_2(x)y_2$$


y
1
O
x_0
x_1
x_2
x
$l_0(x)$
y
1
O
x_0
x
x_2
x
$l_1(x)$
y
1
O
x_0
x_1
x_2
x
$l_2(x)$

3 拉格朗日插值多项式一般形式

运用基函数法求拉格朗日问题

基函数的一般形式

$$p_n(x)=l_0(x)y_0+l_1(x)y_1+\cdots+l_n(x)y_n$$

满足初始条件：

$$p_n(x_n)=y_n$$

要求

$$l_k\left(x_j\right)=\delta_{kj}=\begin{cases}0, j\neq k\\1, j=k\end{cases} \qquad (9)$$

基函数表

x	x_0	x_1	$\cdots$	x_n
$l_0(x)$	1	0	$\cdots$	0
$l_1(x)$	0	1	$\cdots$	0
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$	$\vdots$
$l_n(x)$	0	0	$\cdots$	1

构造基函数

由已知条件，假设

$$l_0(x)=c(x-x_1)(x-x_2)\cdots(x-x_n)$$

又因为 $$l_0(x_0)=1$$

则

$$c=\frac{1}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)\cdots(x_0-x_n)}$$

基函数的一般形式

即

$$l_0(x)=\frac{(x-x_1)(x-x_2)\cdots(x-x_n)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)\cdots(x_0-x_n)}=\prod_{1\le j\le n}\frac{x-x_j}{x_0-x_j}$$

$$l_1(x)=\frac{(x-x_0)(x-x_2)\cdots(x-x_n)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)\cdots(x_1-x_n)}=\prod_{\substack{0\le j\le n\\ j\ne 1}}\frac{x-x_j}{x_1-x_j}$$

$$l_n(x)=\frac{(x-x_1)(x-x_2)\cdots(x-x_{n-1})}{(x_n-x_1)(x_n-x_2)\cdots(x_n-x_{n-1})}=\prod_{1\le j\le n-1}\frac{x-x_j}{x_n-x_j}$$

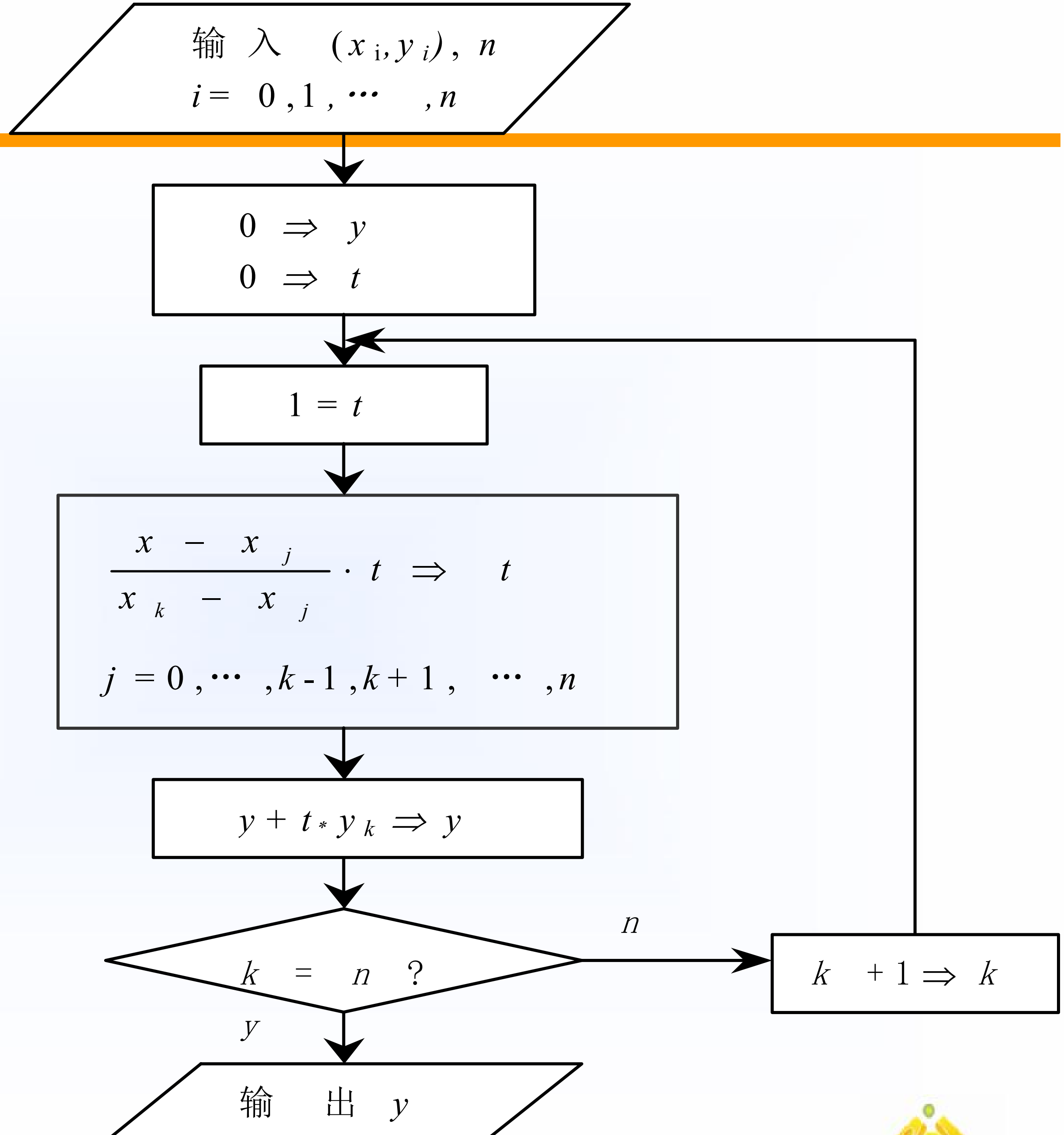
基函数插值的一般表达式

$$l_k(x)=\prod_{\substack{j=0\\ j\neq k}}^{n}\frac{x-x_j}{x_k-x_j}$$

$$p_n(x)=\sum_{k=0}^{n}l_k(x)y_k \qquad （10）$$

是次数不超过n次的多项式，称形如（10）式的插值多项式为n次拉格朗日插值多项式。

拉格朗日插值算法实现



输 入 (x_i, y_i), n
$i = 0, 1, \cdots, n$
$0 \Rightarrow y$
$0 \Rightarrow t$
$1 = t$
$\dfrac{x - x_j}{x_k - x_j} \cdot t \Rightarrow t$
$j = 0, \cdots, k-1, k+1, \cdots, n$
$y + t * y_k \Rightarrow y$
$k = n$?
n
$k + 1 \Rightarrow k$
y
输 出 y

注意：

(1) 对于插值节点,只要求它们互异,与大小次序无关;

(2) 插值基函数$l_i(x)$ 仅由插值节点x_i $(i=0,1, \dots ,n)$确定,与被插函数 $f(x)$无关;

(3) 插值基函数$l_i(x)$ 的顺序与插值节点x_i $(i=0,1, \dots ,n)$ 的顺序一致.

以 x_i $(i=0,1,\dots,n)$为插值节点, 函数 $f(x)\equiv 1$作插值多项式, 由插值多项式的唯一性即得基函数的一个性质

$$\sum_{i=0}^{n} l_i(x) \equiv 1$$

这是因为若取$f(x)=x^k$ (k=0,1,…,n),由插值多项式的唯一性有

$$\sum_{i=0}^{n} l_i(x) x_i^k = x^k, \qquad k = 0,1,\cdots,n$$

特别当k=0时, 就得到

$$\sum_{i=0}^{n} l_i(x) \equiv 1$$

例1 已知 $y=\sqrt{x}, x_0=4, x_1=9$，用线性插值(即一次插值多项式)求 $\sqrt{7}$ 的近似值。

解 $y_0=2, y_1=3$, 基函数分别为:

$$l_0(x)=\frac{x-9}{4-9}=-\frac{1}{5}(x-9), l_1(x)=\frac{x-4}{9-4}=\frac{1}{5}(x-4)$$

插值多项式为

$$L_1(x)=y_0l_0(x)+y_1l_1(x)=2\times\frac{-1}{5}(x-9)+3\times\frac{1}{5}(x-4)$$

$$=-\frac{2}{5}(x-9)+\frac{3}{5}(x-4)\left(=\frac{1}{5}(x+6)\right)$$

所以 $$\sqrt{7}\approx L_1(7)=\frac{13}{5}=2.6$$

例3：利用100，121，144的开方值求 $\sqrt{115}$

解：用抛物插值

已知：$x_0=100, y_0=10$, $x_1=121, y_1=11$,
$x_2=144, y_2=12$, $x=115$

代入抛物插值公式得：

$$\sqrt{115} \approx \frac{(115-121)(115-144)}{(100-121)(100-144)} \times 10 + \frac{(115-100)(115-144)}{(121-100)(121-144)} \times 11 + \frac{(115-100)(115-121)}{(144-100)(144-121)} \times 12 \approx 10.7228$$

例2 求过点(−1,−2), (1,0), (3,−6), (4,3)的三次插值多项式.

解 以 $x_0=-1, x_1=1, x_2=3, x_3=4$ 以为节点的基函数分别为:

$$l_0(x)=\frac{(x-1)(x-3)(x-4)}{(-1-1)(-1-3)(-1-4)}=-\frac{1}{40}(x-1)(x-3)(x-4)$$

$$l_1(x)=\frac{(x+1)(x-3)(x-4)}{(1+1)(1-3)(1-4)}=\frac{1}{12}(x+1)(x-3)(x-4)$$

$$l_2(x)=\frac{(x+1)(x-1)(x-4)}{(3+1)(3-1)(3-4)}=-\frac{1}{8}(x+1)(x-1)(x-4)$$

$$l_3(x)=\frac{(x+1)(x-1)(x-3)}{(4+1)(4-1)(4-3)}=\frac{1}{15}(x+1)(x-1)(x-3)$$

则拉格朗日的三次插值多项式为

$$L_3(x) = y_0 l_0(x) + y_1 l_1(x) + y_2 l_2(x) + y_3 l_3(x)$$

$$=(-2)\times\frac{-1}{40}(x-1)(x-3)(x-4)+0\times\frac{1}{12}(x+1)(x-3)(x-4)$$

$$+(-6)\times\frac{-1}{8}(x+1)(x-1)(x-4)+3\times\frac{1}{15}(x+1)(x-1)(x-3)$$

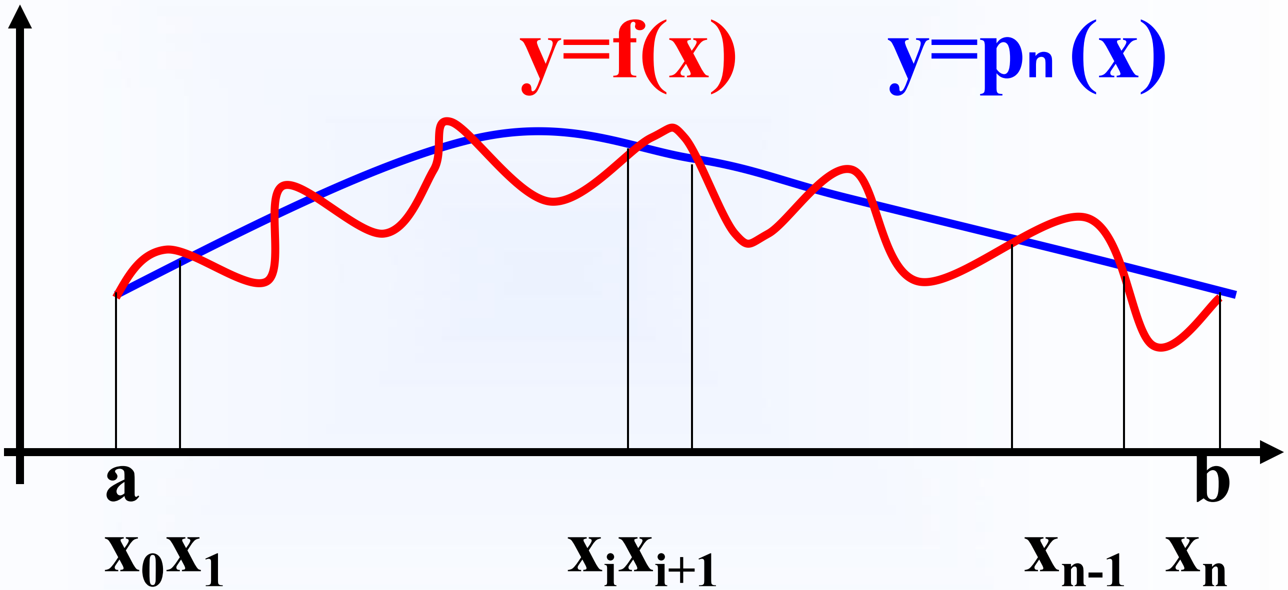
$$=\frac{1}{20}(x-1)(x-3)(x-4)+\frac{3}{4}(x+1)(x-1)(x-4)$$

$$+\frac{1}{5}(x+1)(x-1)(x-3)$$

$$(= x^3 - 4x^2 + 3)$$

1.3 插值余项

在插值区间[a, b]上用插值多项式p(x)近似代替f(x)，除了在插值节点x_i上没有误差外，在其它点上一般是存在误差的。



若记 $R(x) = f(x) - p_n(x)$

则 R(x) 就是用 p(x) 近似代替 f(x) 时的**截断误差**, 或称**插值余项**.我们可根据后面的定理来估计它的大小。

插值余项

1.拉格朗日余项定理：

- 插值余项：$R(x)=f(x)-p_n(x)$
  也称截断误差。

- 定理3（拉格朗日余项定理）：设区间[a,b],含有节点$x_0,x_1,\ldots x_n$, 而f(x)在[a,b]内有连续的直到n+1阶导数，且$f(x_i)=y_i(i=0,1,\ldots,n)$已给，则当$x\in[a,b]$时，对于由式（10）给出的$P_n(x)$,成立

$$f(x)-p_n(x)=\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}\prod_{k=0}^{n}(x-x_k)$$

式中ξ是与x有关的点，它包含在由点$x_0,x_1,\ldots x_n$和x所界定的范围内，因而$\xi\in[a,b]$

证明：当$x=x_i$的时候，显然成立，下面假设x非插值节点

作辅助函数：$g(t)=p_n(t)+c\omega(t);\ \omega(t)=\prod_{k=0}^{n}(t-x_k)$

显见：x_i都是$\omega(t)$的零点，所以 $g(x_i)=f(x_i)$

取$c=\dfrac{f(x)-p_n(x)}{\omega(x)}$，则有$g(x)=f(x)$

所以，误差函数R(t)=f(t)-g(t)至少有n+2个零点, 则存在点ξ

$$R^{(n+1)}(\xi)=0$$

应用罗尔定理即得证

罗尔定理：若函数f(x)满足下列条件：
1、 在闭区间[a,b]内连续；2、在开区间（a,b）内可导；
3、f(a)=f(b)
则至少存在一点ξ∈（a,b),使得f`(ξ)=0

若 $\max\limits_{a\le x\le b}|f^{(n+1)}(x)|=M_{n+1}$，则

$$|R_n(x)|\le\frac{M_{n+1}}{(n+1)!}|\omega_{n+1}(x)|,$$

对于线性插值，其误差为

$$R(x)=f(x)-P(x)=\frac{1}{2}f''(\xi)(x-x_0)(x-x_1)\qquad \xi\in(a,b)$$

在书上P29页例 3 有一个结论 $R(x)\le\frac{1}{8}(b-a)^2M_2$

对于抛物插值（二次插值），其误差为

$$R(x)=f(x)-P(x)=\frac{1}{6}f'''(\xi)(x-x_0)(x-x_1)(x-x_2)\quad \xi\in(a,b)$$

例 已知 $x_0=100, x_1=121$, 用线性插值估计 $f(x)=\sqrt{x}$ 在x=115时的**截断误差**

解：由插值余项公式知 $R_1(x)=\frac{1}{2}f''(\xi)\omega(x)$

因为 $f''(x)=-\frac{1}{4}x^{-\frac{3}{2}}$

$$R_1(x)=-\frac{1}{8}\xi^{-\frac{3}{2}}(x-x_0)(x-x_1)$$

$$R_1(115)=-\frac{1}{8}\xi^{-\frac{3}{2}}(115-100)(115-121)$$

$$\le\frac{1}{8}\times\left|(115-100)(115-121)\right|\times\max_{\xi\in[100,121]}\xi^{-\frac{3}{2}}$$

$$\le\frac{1}{8}\times10^{-3}\times\left|(115-100)(115-121)\right|$$

$$=\frac{1}{8}\times15\times6\times10^{-3}=0.01125$$

- 插值区间：

  由插值节点所界定的范围[$\min x_i$,$\max x_i$]
- 内插：

  插值点x位于插值区间内
- 外推：

  插值点x位于插值区间外

2、误差的事后估计

- 考察拉格朗日余项公式：

$$f(x)-p_n(x)=\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)}\prod_{k=0}^{n}(x-x_k)$$

解决办法：
事后误差估计法

- 误差估计：计算n+1阶导数

考虑例2（P16）：

已知$\sqrt{100}=10,\sqrt{121}=11,\sqrt{144}=12$，求$y=\sqrt{115}$

- 只给出了三个离散值，并未给出具体的分析式，若用余项公式求误差，将会十分复杂。

事后误差估计法:

- 考察3个节点x_0,x_1,x_2,对于给定的插值点x:

- 先用x_0与x_1,x_2进行线性插值，求出y=f(x)的一个近似值y_1；同样取x_0与 x_2,求出y_2。
- 按余项定理得:

$$y-y_1=\frac{f''(\xi_1)}{2}(x-x_0)(x-x_1)$$

$$y-y_2=\frac{f''(\xi_2)}{2}(x-x_0)(x-x_2)$$

- 将上面两个式子相除

假设 $f''(x)$在插值区间内改变不大，

则可消去近似相等的 $f''(\xi_1)$和 $f''(\xi_2)$, 得到

$$\frac{y-y_1}{y-y_2} \approx \frac{x-x_1}{x-x_2}$$

据此可得：

$$\boxed{\begin{aligned} & y \approx \frac{x-x_2}{x_1-x_2} y_1 + \frac{x-x_1}{x_2-x_1} y_2 \\ & \Longrightarrow \\ & y - y_1 \approx \frac{x-x_1}{x_2-x_1}(y_2 - y_1) \end{aligned}}$$

由上式可看出：近似值y_1的误差$y-y_1$可以通过两个结果的偏差y_2-y_1来估计, 这就是**事后误差估计法。**

例：用事后误差法考察例2的误差。

- 先取x_0=100,x_1=121作节点，求得y_a,再用x_0=100,x_2=144作节点，求得y_b

$$y_a=\frac{x-x_1}{x_0-x_1}y_0+\frac{x-x_0}{x_1-x_0}y_1=10.71428$$

$$y_b=\frac{x-x_2}{x_0-x_2}y_0+\frac{x-x_0}{x_2-x_0}y_1=10.68182$$

按事后误差估计法：

$$y-y_a\approx\frac{115-121}{144-121}\times(10.68182-10.71428)=0.00847$$

可用这个误差值来修正结果y_a,得到新的近似值：

y=10.71428+0.00847=10.7228

与例3抛物插值结果相同

例题选讲1.1　拉格朗日插值基函数

例1：列出函数$f(x)=x^k(k=0,1,\ldots,n)$关于节点$x_i(i=0,1,\ldots n)$的拉格朗日插值公式

解：∵ $f(x)=x^k(k=0,1,\ldots,n)$，其拉格朗日插值多项式为

$$L_n(x)=\sum_{j=0}^{n}x_j^{\,k}l_j(x)$$

又∵ $f^{(n+1)}(x)\equiv 0$,所以其插值余项$E(x)=0$,

$$\therefore \sum_{j=0}^{n}x_j^{\,k}l_j(x)\equiv x^k$$

特别的,当$k=0$时，有$\sum_{j=0}^{n}l_j(x)=\sum_{i=0}^{n}\prod_{j\neq i}\frac{x-x_j}{x_i-x_j}\equiv 1$

当$k=1$时，有$\sum_{j=0}^{n}x_il_j(x)=\sum_{i=0}^{n}\left(\prod_{j\neq i}\frac{x-x_j}{x_i-x_j}\right)x_i\equiv x$

例2：证明下列恒等式成立

$$(1)\sum_{i=0}^{n}\prod_{j\neq i}\frac{x-j}{i-j}\equiv 1$$

证：由上题，设$x_i=i$,则有

$$\sum_{i=0}^{n}\prod_{j\neq i}\frac{x-j}{i-j}=\sum_{i=0}^{n}\prod_{j\neq i}\frac{x-x_j}{x_i-x_j}\equiv 1$$

$$(2)\sum_{i=0}^{n}\prod_{j\neq i}\frac{x-j}{i-j}\bullet i\equiv x$$

证： 由例1 知，当 x=i，则

$$\sum_{i=0}^{n}\prod_{j\neq i}\frac{x-j}{i-j}\bullet i=\sum_{i=0}^{n}\Big(\prod_{j\neq i}\frac{x-x_j}{x_i-x_j}\Big)x_i\equiv x$$

例3：对于给定的二元函数f(x,y),求作二元一次式u(x,y),使在给定点$(x_i,y_i)(i=0,1,2)$与f(x,y)取相同的函数值，即满足插值条件：$u(x_i,y_i)=f(x_i,y_i),i=0,1,2$

解：用基函数构造方法，首先构造二元一次式$l_0(x,y)$,使满足
$l_0(x_0,y_0)=1$， $l_0(x_1,y_1)= l_0(x_2,y_2)=0$

结果为：$l_0(x,y)=\begin{vmatrix}1 & x & y\\ 1 & x_1 & y_1\\ 1 & x_2 & y_2\end{vmatrix} / \begin{vmatrix}1 & x_0 & y_0\\ 1 & x_1 & y_1\\ 1 & x_2 & y_2\end{vmatrix}$,由节点的对称性，有

$$l_1(x,y)=\begin{vmatrix}1 & x & y\\ 1 & x_2 & y_2\\ 1 & x_0 & y_0\end{vmatrix} / \begin{vmatrix}1 & x_1 & y_1\\ 1 & x_2 & y_2\\ 1 & x_0 & y_0\end{vmatrix}, l_2(x,y)=\begin{vmatrix}1 & x & y\\ 1 & x_0 & y_0\\ 1 & x_1 & y_1\end{vmatrix} / \begin{vmatrix}1 & x_2 & y_2\\ 1 & x_0 & y_0\\ 1 & x_1 & y_1\end{vmatrix}$$

所求插值多项式为：

$$u(x,y)=f(x_0,y_0)l_0(x,y)+f(x_1,y_1)l_1(x,y)+f(x_2,y_2)l_2(x,y)$$

例题选讲1.2　插值余项

例1：设 $f(x)$充分光滑，　$f(a)=f(b)=0$，求证

$$\max_{a\le x\le b}|f(x)|\le\frac{(b-a)^2}{8}\max_{a\le x\le b}|f''(x)|$$

证：满足条件p(a)=p(b)=0的插值多项式p(x)=0,按拉格朗日余项定理有

$$f(x)=f(x)-p(x)=\frac{f''(\xi)}{2}(x-a)(x-b)$$

$$\because \max_{a\le x\le b}|(x-a)(x-b)|=\left(\frac{b-a}{2}\right)^2$$

$$\max_{a\le x\le b}|f(x)|\le\frac{(b-a)^2}{8}\max_{a\le x\le b}|f''(x)|$$

例:设$f(x)=x^4$,试利用拉格朗日余项定理给出$f(x)$以-1，0，1，2为节点的插值多项式$p(x)$

- 解：当$f(x)=x^4$时，$f^{(4)}(x)=4!$,据拉格朗日余项定理，有余项

$$\omega(x)=f(x)-p(x)=\frac{f^{(3+1)}(\xi)}{(3+1)!}\prod_{k=0}^{n}(x-x_k)$$

$$=\frac{4!}{4!}\times\prod_{k=0}^{n}(x-x_k)=(x+1)x(x-1)(x-2)$$

所求多项式：

$p(x)=f(x)-\omega(x)=x^4-x^4+2x^3+x^2-2x＝2x^3+x^2-2x$

插值误差举例

❑ 例：已知函数 $y=\ln x$ 的函数值如下

x	10	11	12	13	14
$\ln x$	2.3026	2.3979	2.4849	2.5649	2.6391

试给出线性插值和抛物线插值计算 ln11.75的误差。

解：$$R_1(x)=\frac{f''(\xi)}{2!}(x-x_0)(x-x_1),\quad \xi\in(x_0,x_1)$$

又 $f''(x)=-1/x^2$；且 $x_0=11, x_1=12, \xi\in(11,12)$

所以 $$\begin{aligned}|R_1(11.75)| &= |(11.75-x_0)(11.75-x_1)f''(\xi)/2| \\ &< |(11.75-11)(11.75-12)/(2\times 11^2)| \\ &< 7.75\times 10^{-4}\end{aligned}$$

$$R_2(x)=\frac{f^{(3)}(\xi)}{3!}(x-x_0)(x-x_1)(x-x_2),\quad \xi\in(x_0,x_2)$$

又 $f^{(3)}(x)=2/x^3$，$\xi\in(11,13)$ ➡ $|f^{(3)}(\xi)|=2/\xi^3<2/11^3$

➡ $|R_2(11.75)|<|(11.75-11)(11.75-12)(11.75-13)|\times 2/(6\times 11^3)$

$<\underline{5.87\times 10^{-5}}$

$|R_1(11.75)|<\underline{7.75\times 10^{-4}}$

高次插值通常
优于低次插值

拉格朗日插值的几点问题

问题：

- 对于相同的插值公式，内插与外推哪一个的精度高。
- 插值点越多得到插值公式的精度越高？
- 拉格朗日插值对于不同的初始函数，在相同点上的插值公式也不同。
- 多项式插值是唯一的插值方式？
- 基函数的形式只和插值点的**x**坐标相关，和**y**值无关。
- 由**n**个点插值得到的基函数的次数必定是**n-1**次的多项式

课外兴趣

放大4.5倍使用最近邻插值算法

双线性插值

双立方插值