合 肥 工 业 大 学 试 卷（A）

共 1 页第 1 页

2020～2021 学年第 二 学期 课程代码 1400071B 课程名称 线性代数 学分 2.5 课程性质:必修☑、选修☐、限修☐ 考试形式:开卷☐、闭卷☑

专业班级（教学班）________ 考试日期 2021 年 5 月 19 日 10:20-12:20 命题教师 集体 系（所或教研室）主任审批签名____________

一、填空题（每小题 4 分，共 20 分）

1. $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&0\\2&1\end{pmatrix}$, 则行列式 $|\boldsymbol{A}^{-1}+\boldsymbol{A}^{*}|=$ ______.

2. $\boldsymbol{A}$、$\boldsymbol{B}$ 均为 2 阶非零实方阵, 如果 $\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{O}$, 则 $\mathrm{R}(\boldsymbol{A})=$ ______.

3. 向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_3$ 线性无关，则向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_1-\boldsymbol{\alpha}_3$ 的秩为______.

4. $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&2&3\\1&2&3\\1&2&\mathrm{a}\end{pmatrix}$, 若 $\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$ 是 $\boldsymbol{A}$ 的一个特征向量，则 $\mathrm{a}=$ ______.

5. $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}\mathrm{t}&\sqrt{2}\\\sqrt{2}&\mathrm{t}-1\end{pmatrix}$ 为正定矩阵，则 t 的取值范围是______.

二、选择题（每小题 4 分，共计 20 分）

1. $\boldsymbol{A}$ 是一个 3 阶实方阵，$|\boldsymbol{A}|=0$, 则下述说法正确的是( )

(A) 0 必是 $\boldsymbol{A}$ 的一个特征值 (B) $\boldsymbol{A}$ 必有一行全为 0

(C) $\boldsymbol{A}$ 必有两行成比例 (D) 必有 $\boldsymbol{A}^{*}=\boldsymbol{O}$

2. $\boldsymbol{A}$ 是 3 阶实方阵，则 $\mathrm{R}(\boldsymbol{A}^{*})$ 不可能取到的值为( )

(A) 0 (B) 1 (C) 2 (D) 3

3. $\boldsymbol{P}$、$\boldsymbol{A}$、$\boldsymbol{B}$ 均为 3 阶实方阵，若 $\boldsymbol{PA}=\boldsymbol{B}$, 则下述说法正确的是( )

(A) 必有 $\mathrm{R}(\boldsymbol{A})=\mathrm{R}(\boldsymbol{B})$ (B) $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 的行向量组必等价

(C) $\boldsymbol{A}$ 必可通过初等行变换变为 $\boldsymbol{B}$ (D) $\boldsymbol{B}$ 的行向量组可由 $\boldsymbol{A}$ 的行向量组线性表示

4. 若 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_3$ 是非齐次线性方程组 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$ 的三个不同的解, 则下述是 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$ 的一个解的是( )

(A) $\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2$ (B) $\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2-\boldsymbol{\alpha}_3$

(C) $3\boldsymbol{\alpha}_1-2\boldsymbol{\alpha}_2-\boldsymbol{\alpha}_3$ (D) $\boldsymbol{\alpha}_1-\boldsymbol{\alpha}_2-\boldsymbol{\alpha}_3$

5. 若 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&\mathrm{a}&0\\0&2&\mathrm{b}\\0&0&2\end{pmatrix}$可对角化, 则关于 a、b, 有( )

(A) a 与 b 只能全为 0 (B) $\mathrm{b}=0$, a 可取任意值

(C) $\mathrm{a}=0$, b 可取任意值 (D) a, b 均可取任意值

三、(**12分**) 已知四阶行列式 $\mathrm{D}=\begin{vmatrix}1&1&1&1\\1&2&3&4\\1&4&9&16\\1&8&27&64\end{vmatrix}$, 求 $\mathrm{M}_{11}+\mathrm{M}_{21}+\mathrm{M}_{31}+\mathrm{M}_{41}$.

其中 M_{ij} 为 D 的(i,j) 位置元素的余子式.

四、(**12分**) n 阶实方阵 $\boldsymbol{A}$ 满足 $\boldsymbol{A}^2+2\boldsymbol{A}-3\boldsymbol{E}=\boldsymbol{O}$.

(1) 证明 $\boldsymbol{A}+2\boldsymbol{E}$ 可逆，并求其逆.

(2) 当 $\boldsymbol{A}\neq\boldsymbol{E}$ 时，判断 $\boldsymbol{A}+3\boldsymbol{E}$ 是否可逆，并给出理由.

五、(**10分**) 求向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1=\begin{pmatrix}-5\\1\\1\end{pmatrix}, \boldsymbol{\alpha}_2=\begin{pmatrix}2\\-4\\2\end{pmatrix}, \boldsymbol{\alpha}_3=\begin{pmatrix}3\\3\\-3\end{pmatrix}$ 的一个极大线性无关组，

并将其余向量用该极大无关组线性表示.

六、(**10分**) 解线性方程组 $\begin{cases}\mathrm{x}_1+\mathrm{x}_2+\mathrm{x}_3+\mathrm{x}_4=0\\\mathrm{x}_1+2\mathrm{x}_2+3\mathrm{x}_3+3\mathrm{x}_4=1\\3\mathrm{x}_1+2\mathrm{x}_2+\mathrm{x}_3+\mathrm{x}_4=-1\end{cases}$.

七、(**12分**) 已知二次型 $\mathrm{x}_1{}^2+\mathrm{a}\mathrm{x}_2{}^2+\mathrm{x}_3{}^2+2\mathrm{x}_1\mathrm{x}_2+2\mathrm{x}_1\mathrm{x}_3+2\mathrm{x}_2\mathrm{x}_3$ 可以经过正交变换

$\begin{pmatrix}\mathrm{x}_1\\\mathrm{x}_2\\\mathrm{x}_3\end{pmatrix}=\boldsymbol{P}\begin{pmatrix}\mathrm{y}_1\\\mathrm{y}_2\\\mathrm{y}_3\end{pmatrix}$ 变为 $\mathrm{y}_1{}^2+4\mathrm{y}_2{}^2$. 求 a 的值以及正交矩阵 $\boldsymbol{P}$.

八、(**4分**) $\boldsymbol{A}$ 是一个 2×3 的实矩阵，$\mathrm{R}(\boldsymbol{A})=2$， $\boldsymbol{A}^T$ 的列向量组记为 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2$.

记实向量 $\boldsymbol{\beta}$ 为 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$ 的一个非零解, 证明: 向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\beta}$ 线性无关.