第二章　矩阵及其运算

矩阵是线性代数中最有力的工具之一，自然科学和工程技术中的许多问题都可以用矩阵描述，从而使问题得到简化．本章将介绍矩阵的概念和运算．

微视频 2.1 矩阵
PPT 课件 2.1 矩阵

§2.1　矩阵

1.　矩阵的引入

引例1　设在三个不同的超市 S_1、S_2、S_3 里，四类食品 F_1、F_2、F_3、F_4 的价格（以某种货币单位计）如下表：

表 2.1

	F_1	F_2	F_3	F_4
S_1	17	7	11	21
S_2	15	9	13	19
S_3	18	8	15	19

从该表的数字长方阵列中很容易对食品价格的高低进行辨别．

引例2　线性方程组

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - 2x_3 = 1 \\ 2x_1 - x_2 + 2x_3 = 3 \\ 4x_1 + x_2 - 3x_3 = 2 \end{cases} \tag{2.1}$$

的解由未知数前面的系数和常数项决定，故此线性方程组可用如下矩形数表简单表示：

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 & 1 \\ 2 & -1 & 2 & 3 \\ 4 & 1 & -3 & 2 \end{pmatrix},$$

对方程组的研究可转化为对矩形数表的研究．

上述问题均可用矩形数表简单表示，这样的矩形数表称为矩阵．矩阵可以把实际问题变成一个数值表，这样就可以对数据进行研究，从而解决问题．

2. 矩阵的概念

定义 2.1 由 $m\times n$ 个数 a_{ij}（$i=1,2,\cdots,m$；$j=1,2,\cdots,n$）排成的一个 m 行 n 列的矩形数表

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

称为 m 行 n 列矩阵，简称 $m\times n$ 矩阵．a_{ij} 表示矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的第 i 行第 j 列的元素，矩阵 $\boldsymbol{A}$ 也可记作 $\boldsymbol{A}_{m\times n}$ 或 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})_{m\times n}$．

元素是实数的矩阵称为实矩阵，元素是复数的矩阵称为复矩阵．本书主要研究实矩阵．

当 $m=n$ 时，称矩阵 $\boldsymbol{A}$ 为 n 阶方阵．对于方阵，称从左上角到右下角的对角线为主对角线．

只有一行的矩阵 $\boldsymbol{A}=\left(a_1\ a_2\ \cdots\ a_n\right)$ 称为行矩阵；只有一列的矩阵 $\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$ 称为列矩阵．

对于 $\boldsymbol{A}_{m\times n},\boldsymbol{B}_{s\times t}$，若 $m=s,n=t$，则称 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 为同型矩阵．

如果 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 是同型矩阵，且对应元素相等，则称 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 相等，记作 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{B}$．

元素都是 0 的矩阵称为零矩阵，记作 $\boldsymbol{O}$．不同型的零矩阵不相等．

3. 一些特殊矩阵

形如 $\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$ 的方阵称为上三角矩阵，其特点是主对角线下方的元素全是 0．

形如 $\begin{pmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$ 的方阵称为下三角矩阵，其特点是主对角线上方的元素全是 0．

形如$\begin{pmatrix}\lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n\end{pmatrix}$的方阵称为对角矩阵，简称对角阵，其特点是主对角线以外的元素全是 0，也记作$diag(\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n)$.

$\begin{pmatrix}1 & & & \\ & 1 & & \\ & & \ddots & \\ & & & 1\end{pmatrix}_{n\times n}$ 称为n阶单位矩阵，记作$\boldsymbol{E}$ 或 $\boldsymbol{E}_n$. 其特点是主对角线上元素全是 1，其余元素全是 0.

主对角线上元素均为数λ的n阶对角阵，称为n阶数量矩阵.

例1 n个变量x_1，x_2，$\cdots$，x_n与m个变量y_1，y_2，$\cdots$，y_m之间的关系式

$$\begin{cases} y_1 = a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n \\ y_2 = a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n \\ \qquad \cdots\cdots \\ y_m = a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n \end{cases} \tag{2.2}$$

表示一个从变量x_1，x_2，$\cdots$，x_n到变量y_1，y_2，$\cdots$，y_m的线性变换，其中a_{ij}为常数. 线性变换的系数a_{ij}构成矩阵$\boldsymbol{A}=\left(a_{ij}\right)_{m\times n}$.

给定一个线性变换，它的系数所构成的矩阵（称为系数矩阵）也随之确定；反过来，给出一个矩阵作为线性变换的系数矩阵，则线性变换也随之确定，即线性变换和矩阵之间有一一对应的关系.

例如线性变换

$$\begin{cases} y_1 = x_1 \\ y_2 = x_2 \\ \quad\cdots\cdots \\ y_n = x_n \end{cases}$$

叫做恒等变换，它对应n阶单位阵

$$\boldsymbol{E}_n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}.$$

又如线性变换

$$\begin{cases} y_1 = \lambda_1 x_1 \\ y_2 = \lambda_2 x_2 \\ \quad \cdots\cdots \\ y_n = \lambda_n x_n \end{cases}$$

对应n阶对角阵

$$\boldsymbol{\Lambda}_n = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_n \end{pmatrix}.$$

我们可以用矩阵来研究线性变换，另一方面又可以根据变换的实际背景理解矩阵的意义.

例如矩阵$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$对应着线性变换

$$\begin{cases} x_1 = x \\ y_1 = 0 \end{cases},$$

这是 XOY 平面上把点$P(x,y)$变为点$P_1(x,0)$的变换（参见图 2. 1），由于向量$\overrightarrow{OP_1} = (x,0)$是向量$\overrightarrow{OP} = (x,y)$在 X 轴上的投影向量，因此这是一个投影变换.

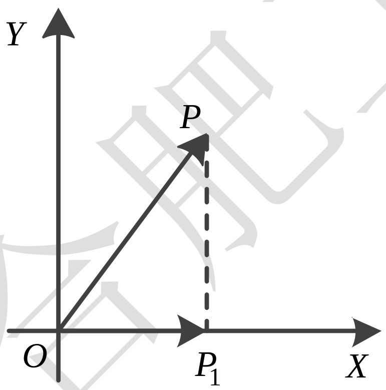

图 2.1

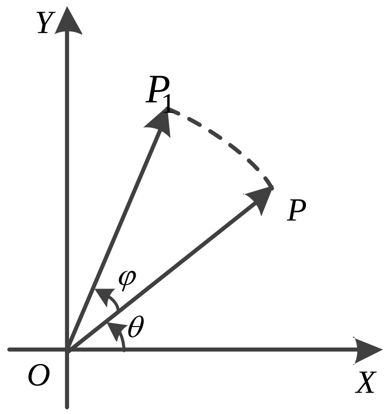

图 2.2

再如矩阵$\begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix}$对应线性变换

$$\begin{cases} x_1 = (\cos\varphi)x - (\sin\varphi)y \\ y_1 = (\sin\varphi)x + (\cos\varphi)y \end{cases},$$

把点$P(r\cos\theta, r\sin\theta)$变为点$P_1(r\cos(\theta+\varphi), r\sin(\theta+\varphi))$，对应到极坐标，就是将极坐

标为(r,θ)的点P变为极坐标为$(r,\theta+\varphi)$的点P_1. 即是将向量$\overrightarrow{OP}$逆时针旋转φ角的变换（参见图 2.2），因此这是一个以原点为中心逆时针旋转φ角的旋转变换.

在线性变换(2.2)中，若$m=n$，且系数矩阵的行列式不为零，则由第一章的克莱姆法则可以求出从变量$y_1, y_2, \cdots, y_n$到变量$x_1, x_2, \cdots, x_n$的线性变换，但计算量太大，因此我们需要通过研究矩阵的运算来简化计算.

微视频 2.2 矩阵的运算
PPT 课件 2.2 矩阵的运算

§ 2.2 矩阵的运算

1. 加法

定义2.2 设$\boldsymbol{A}=(a_{ij})_{m\times n}$，$\boldsymbol{B}=(b_{ij})_{m\times n}$，矩阵$\boldsymbol{A}$与$\boldsymbol{B}$的和为

$$\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}=(a_{ij}+b_{ij})_{m\times n}.$$

两个矩阵只有同型时才能相加.

矩阵的加法满足如下运算规律（设$\boldsymbol{A}$、$\boldsymbol{B}$、$\boldsymbol{C}$、$\boldsymbol{O}$都是同型矩阵）：

（1）$\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}=\boldsymbol{B}+\boldsymbol{A}$；

（2）$(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})+\boldsymbol{C}=\boldsymbol{A}+(\boldsymbol{B}+\boldsymbol{C})$；

（3）$\boldsymbol{A}+\boldsymbol{O}=\boldsymbol{A}$.

2. 数乘矩阵

定义2.3 数λ与矩阵$\boldsymbol{A}=(a_{ij})_{m\times n}$的乘积为

$$\lambda\boldsymbol{A}=(\lambda a_{ij})_{m\times n}.$$

数乘矩阵满足如下运算规律（设$\boldsymbol{A}$、$\boldsymbol{B}$同型，λ、μ为数）：

（1）$(\lambda\mu)\boldsymbol{A}=\lambda(\mu\boldsymbol{A})=\mu(\lambda\boldsymbol{A})$；

（2）$(\lambda+\mu)\boldsymbol{A}=\lambda\boldsymbol{A}+\mu\boldsymbol{A}$；

（3）$\lambda(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})=\lambda\boldsymbol{A}+\lambda\boldsymbol{B}$.

取$\lambda=-1$，称$-\boldsymbol{A}=(-a_{ij})_{m\times n}$为$\boldsymbol{A}$的负矩阵，由此规定矩阵减法为

$$A-B=A+(-B).$$

矩阵加法与数乘运算，统称为矩阵的线性运算.

例1 设 $A=\begin{pmatrix}1&7&5\\3&-1&2\end{pmatrix}$， $B=\begin{pmatrix}2&4&2\\0&3&-1\end{pmatrix}$，求 $A+B$， $2A-3B$.

解 $A+B=\begin{pmatrix}1+2&7+4&5+2\\3+0&-1+3&2-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3&11&7\\3&2&1\end{pmatrix}$，

$$2A-3B=\begin{pmatrix}2\times1-3\times2&2\times7-3\times4&2\times5-3\times2\\2\times3-3\times0&2\times(-1)-3\times3&2\times2-3\times(-1)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-4&2&4\\6&-11&7\end{pmatrix}.$$

3. 矩阵与矩阵相乘

定义2.4 设 $A=(a_{ij})_{m\times n}$， $B=(b_{ij})_{n\times p}$，定义 A 与 B 的乘积为 $m\times p$ 矩阵

$$\begin{pmatrix}a_{11}b_{11}+a_{12}b_{21}+\cdots+a_{1n}b_{n1}&\cdots&a_{11}b_{1p}+a_{12}b_{2p}+\cdots+a_{1n}b_{np}\\ \vdots&\ddots&\vdots\\ a_{m1}b_{11}+a_{m2}b_{21}+\cdots+a_{mn}b_{n1}&\cdots&a_{m1}b_{1p}+a_{m2}b_{2p}+\cdots+a_{mn}b_{np}\end{pmatrix},$$

记作 $C=AB=(c_{ij})_{m\times p}$，其中 $c_{ij}=\sum_{k=1}^{n}a_{ik}b_{kj}$ 是 A 的第 i 行与 B 的第 j 列的对应元素的乘积之和.

例2 设 $A=\begin{pmatrix}3&-2\\2&4\\1&-3\end{pmatrix}$， $B=\begin{pmatrix}-2&1&3\\4&1&6\end{pmatrix}$，求 AB 与 BA.

解 $AB=\begin{pmatrix}3&-2\\2&4\\1&-3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-2&1&3\\4&1&6\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3\times(-2)-2\times4&3\times1-2\times1&3\times3-2\times6\\2\times(-2)+4\times4&2\times1+4\times1&2\times3+4\times6\\1\times(-2)-3\times4&1\times1-3\times1&1\times3-3\times6\end{pmatrix}$

$$=\begin{pmatrix}-14&1&-3\\12&6&30\\-14&-2&-15\end{pmatrix},$$

$$BA=\begin{pmatrix}-2&1&3\\4&1&6\end{pmatrix}\begin{pmatrix}3&-2\\2&4\\1&-3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}(-2)\times3+1\times2+3\times1&(-2)\times(-2)+1\times4+3\times(-3)\\4\times3+1\times2+6\times1&4\times(-2)+1\times4+6\times(-3)\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}-1&-1\\20&-22\end{pmatrix}.$$

例3 设 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}2&4\\1&2\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}2&-2\\-1&1\end{pmatrix}$，求 $\boldsymbol{AB}$ 与 $\boldsymbol{BA}$.

解 $\boldsymbol{AB}=\begin{pmatrix}0&0\\0&0\end{pmatrix}=\boldsymbol{O}$，$\boldsymbol{BA}=\begin{pmatrix}2&4\\-1&-2\end{pmatrix}$.

由定义 2.4 和以上的例子，我们可以看出：

（1）只有当矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的列数与矩阵 $\boldsymbol{B}$ 的行数相同时，$\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 才可以相乘，并且乘积矩阵 $\boldsymbol{C}$ 的行数与 $\boldsymbol{A}$ 的行数相同，$\boldsymbol{C}$ 的列数与 $\boldsymbol{B}$ 的列数相同；

（2）一般情况下，矩阵乘法不满足交换律，即 $\boldsymbol{AB}\neq\boldsymbol{BA}$；

（3）两个非零矩阵的乘积可能是零矩阵，即由 $\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{O}$ 无法推出 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{O}$ 或 $\boldsymbol{B}=\boldsymbol{O}$.

矩阵乘法虽然不满足交换律，但仍然满足下列运算规律（假设运算都是可行的）：

（1）$(\boldsymbol{AB})\boldsymbol{C}=\boldsymbol{A}(\boldsymbol{BC})$；

（2）$\lambda(\boldsymbol{AB})=(\lambda\boldsymbol{A})\boldsymbol{B}=\boldsymbol{A}(\lambda\boldsymbol{B})$，$\lambda$ 为数；

（3）$\boldsymbol{A}(\boldsymbol{B}+\boldsymbol{C})=\boldsymbol{AB}+\boldsymbol{AC}$，$(\boldsymbol{B}+\boldsymbol{C})\boldsymbol{A}=\boldsymbol{BA}+\boldsymbol{CA}$.

对单位阵 $\boldsymbol{E}$，容易验证

$$\boldsymbol{E}_m\boldsymbol{A}_{m\times n}=\boldsymbol{A}_{m\times n}，\ \boldsymbol{A}_{m\times n}\boldsymbol{E}_n=\boldsymbol{A}_{m\times n}.$$

或简写成 $\boldsymbol{EA}=\boldsymbol{AE}=\boldsymbol{A}$. 可见单位阵 $\boldsymbol{E}$ 在矩阵乘法中的作用类似于实数 1.

上节给出的从变量 $x_1, x_2,\cdots, x_n$ 到变量 $y_1, y_2,\cdots, y_m$ 的线性变换的关系式 (2.2) 中，令 $m=n$，记

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}a_{11}&a_{12}&\cdots&a_{1n}\\a_{21}&a_{22}&\cdots&a_{2n}\\\vdots&\vdots&&\vdots\\a_{n1}&a_{n2}&\cdots&a_{nn}\end{pmatrix},\qquad \boldsymbol{x}=\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\\vdots\\x_n\end{pmatrix},\qquad \boldsymbol{y}=\begin{pmatrix}y_1\\y_2\\\vdots\\y_n\end{pmatrix},$$

则线性变换 (2.2) 可用矩阵形式记为 $\boldsymbol{y}=\boldsymbol{Ax}$.

若另有线性变换 $\boldsymbol{z}=\boldsymbol{By}$，其中

$$\boldsymbol{B}=(b_{ij})_{n\times n}，\ \boldsymbol{z}=\begin{pmatrix}z_1\\\vdots\\z_n\end{pmatrix},$$

即

$$\begin{cases} z_1 = b_{11}y_1 + b_{12}y_2 + \cdots + b_{1n}y_n \\ z_2 = b_{21}y_1 + b_{22}y_2 + \cdots + b_{2n}y_n \\ \qquad\cdots\cdots \\ z_n = b_{n1}y_1 + b_{n2}y_2 + \cdots + b_{nn}y_n \end{cases}, \tag{2.3}$$

则将(2.2)代入(2.3)可得变换

$$z = B(Ax) = (BA)x \tag{2.4}$$

(2.4)就是从变量 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ 到变量 $z_1, z_2, \cdots, z_n$ 的线性变换，它是变换(2.2)和(2.3)的合成，所对应的矩阵正是矩阵 $\boldsymbol{B}$ 与 $\boldsymbol{A}$ 的乘积 $\boldsymbol{BA}$.

在 § 2.1 引例 2 中，方程组(2.1)的第一个方程为 $x_1 + x_2 - 2x_3 = 1$，令 $\boldsymbol{\alpha} = (1\ 1 -2)$，$\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$，则由矩阵乘法定义得：$\boldsymbol{\alpha x} = (1\ 1 - 2)\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = x_1 + x_2 - 2x_3$，从而第一个方程可写为矩阵方程 $\boldsymbol{\alpha x} = 1$.

令 $\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 2 & -1 & 2 \\ 4 & 1 & -3 \end{pmatrix}$，$\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$，$\boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}$，则方程组$(2.1)$可写为矩阵方程 $\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{b}$，从而简化了方程组的表示.

有了矩阵的乘法，定义方阵 $\boldsymbol{A}$ 的幂如下：

$$\boldsymbol{A}^0 = \boldsymbol{E}，\ \boldsymbol{A}^1 = \boldsymbol{A}，\ \boldsymbol{A}^2 = \boldsymbol{AA}，\ \cdots，\ \boldsymbol{A}^{k+1} = \boldsymbol{AA}^k，$$

其中 k 是正整数．也就是说，$\boldsymbol{A}$ 的 k 次幂是 k 个 $\boldsymbol{A}$ 相乘.

如，线性变换

$$\begin{cases} x' = x\cos\varphi - y\sin\varphi \\ y' = x\sin\varphi + y\cos\varphi \end{cases} \tag{2.5}$$

是用矩阵 $\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix}$ 去左乘向量 $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$，相当于把向量 $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ 沿逆时针方向旋转 φ 角得到向量 $\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$．可以推知，用矩阵 $\boldsymbol{A}^2$ 去左乘向量 $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$，相当于把向量 $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ 沿逆时针方向

旋转 2φ 角.

方阵的幂满足如下运算规律：

$$\boldsymbol{A}^k\boldsymbol{A}^l=\boldsymbol{A}^{k+l}，(\boldsymbol{A}^k)^l=\boldsymbol{A}^{kl}，\text{其中 } k \text{、} l \text{ 是正整数}.$$

设 $\boldsymbol{A}$、$\boldsymbol{B}$ 为 n 阶方阵，k 为正整数，一般地，

概念解析：矩阵的乘法

$$(\boldsymbol{AB})^k\neq\boldsymbol{A}^k\boldsymbol{B}^k;$$

$$(\boldsymbol{A}\pm\boldsymbol{B})^2\neq\boldsymbol{A}^2\pm2\boldsymbol{AB}+\boldsymbol{B}^2;$$

$$(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{B})\neq\boldsymbol{A}^2-\boldsymbol{B}^2.$$

以上各式只有在 $\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{BA}$ 时，等号成立.

注 若 $\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{BA}$，则称矩阵 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 可交换.

例 4 计算 $\begin{pmatrix}1&2\\0&1\end{pmatrix}^k$，$k\ (\geq 2)$ 是正整数.

解法 1 （利用数学归纳法）

$$\begin{pmatrix}1&2\\0&1\end{pmatrix}^2=\begin{pmatrix}1&2\\0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&2\\0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&4\\0&1\end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix}1&2\\0&1\end{pmatrix}^3=\begin{pmatrix}1&2\\0&1\end{pmatrix}^2\begin{pmatrix}1&2\\0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&4\\0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&2\\0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&6\\0&1\end{pmatrix}$$

假设 $\begin{pmatrix}1&2\\0&1\end{pmatrix}^n=\begin{pmatrix}1&2n\\0&1\end{pmatrix}$，则

$$\begin{pmatrix}1&2\\0&1\end{pmatrix}^{n+1}=\begin{pmatrix}1&2\\0&1\end{pmatrix}^n\begin{pmatrix}1&2\\0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&2n\\0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&2\\0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&2(n+1)\\0&1\end{pmatrix}.$$

故由数学归纳法知：$\begin{pmatrix}1&2\\0&1\end{pmatrix}^k=\begin{pmatrix}1&2k\\0&1\end{pmatrix}$.

解法 2 记 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&2\\0&1\end{pmatrix}$，则 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0&2\\0&0\end{pmatrix}=\boldsymbol{E}+\boldsymbol{B}$，其中 $\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}0&2\\0&0\end{pmatrix}$.

因为 $\boldsymbol{E}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 可交换，所以由二项式定理得

$$\boldsymbol{A}^k=(\boldsymbol{E}+\boldsymbol{B})^k=C_k^0\boldsymbol{E}^k+C_k^1\boldsymbol{E}^{k-1}\boldsymbol{B}+C_k^2\boldsymbol{E}^{k-2}\boldsymbol{B}^2+\cdots+C_k^k\boldsymbol{E}^0\boldsymbol{B}^k$$

而 $\boldsymbol{B}^2=\begin{pmatrix}0&2\\0&0\end{pmatrix}^2=\begin{pmatrix}0&0\\0&0\end{pmatrix}$，故 $\boldsymbol{B}^3=\boldsymbol{B}^4=\cdots=\boldsymbol{B}^k=\boldsymbol{O}$.

从而

$$\boldsymbol{A}^k=\boldsymbol{E}+k\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0&2k\\0&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&2k\\0&1\end{pmatrix}.$$

例 5 计算 $\begin{pmatrix}0&-1\\1&0\end{pmatrix}^4$.

解 $\begin{pmatrix}0&-1\\1&0\end{pmatrix}^4=\begin{pmatrix}0&-1\\1&0\end{pmatrix}^2\begin{pmatrix}0&-1\\1&0\end{pmatrix}^2=\begin{pmatrix}-1&0\\0&-1\end{pmatrix}^2=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}$.

此例也可从线性变换的角度考虑．由线性变换 (2.5) 知，矩阵 $\begin{pmatrix}0&-1\\1&0\end{pmatrix}$ $=\begin{pmatrix}\cos 90^\circ&-\sin 90^\circ\\ \sin 90^\circ&\cos 90^\circ\end{pmatrix}$ 对应绕原点逆时针旋转 90° 的变换，因此 $\begin{pmatrix}0&-1\\1&0\end{pmatrix}^4$ 对应绕原点逆时针旋转 360° 的变换，相当于恒等变换，故 $\begin{pmatrix}0&-1\\1&0\end{pmatrix}^4$ 等于单位阵 $\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}$.

4. 矩阵的转置

定义 2.5 设矩阵

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}a_{11}&a_{12}&\cdots&a_{1n}\\a_{21}&a_{22}&\cdots&a_{2n}\\\vdots&\vdots&\vdots&\vdots\\a_{m1}&a_{m2}&\cdots&a_{mn}\end{pmatrix},$$

则称

$$\boldsymbol{A}^T=\begin{pmatrix}a_{11}&a_{21}&\cdots&a_{m1}\\a_{12}&a_{22}&\cdots&a_{m2}\\\vdots&\vdots&\vdots&\vdots\\a_{1n}&a_{2n}&\cdots&a_{mn}\end{pmatrix}$$

为 $\boldsymbol{A}$ 的转置矩阵.

例如，设矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&2&3\\4&5&6\end{pmatrix}$，则 $\boldsymbol{A}^T=\begin{pmatrix}1&4\\2&5\\3&6\end{pmatrix}$.

矩阵的转置满足如下运算规律（假定运算都可行的）：

（1）$(\boldsymbol{A}^T)^T=\boldsymbol{A}$；

（2）$(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})^T=\boldsymbol{A}^T+\boldsymbol{B}^T$；

（3）$(\lambda\boldsymbol{A})^T=\lambda\boldsymbol{A}^T$，$\lambda$ 是数；

（4）$(\boldsymbol{AB})^T=\boldsymbol{B}^T\boldsymbol{A}^T$；

（5）$(\boldsymbol{A}^k)^T=(\boldsymbol{A}^T)^k$，$k$ 为正整数.

定义 2.6 设 $\boldsymbol{A}$ 为 n 阶方阵，若 $\boldsymbol{A}^T=\boldsymbol{A}$，则称 $\boldsymbol{A}$ 是对称阵；若 $\boldsymbol{A}^T=-\boldsymbol{A}$，则称 $\boldsymbol{A}$ 是反对称阵.

例如，$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&2&3\\2&5&4\\3&4&7\end{pmatrix}$是对称阵；$\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}0&2&3\\-2&0&4\\-3&-4&0\end{pmatrix}$是反对称阵.

例 6 设 $\boldsymbol{\alpha}=(a_1,a_2,\cdots,a_n)^T$，矩阵 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\alpha}^T$，证明 $\boldsymbol{A}^k=c^{k-1}\boldsymbol{A}$，其中 $c=\sum_{i=1}^{n}a_i^2$，k 为正整数.

证明 因

$$\boldsymbol{\alpha}^T\boldsymbol{\alpha}=(a_1,a_2,\cdots,a_n)\begin{pmatrix}a_1\\a_2\\\vdots\\a_n\end{pmatrix}=\sum_{i=1}^{n}a_i^2=c,$$

故

概念解析：关于特殊矩阵乘法的注意事项

$$\boldsymbol{A}^k=\underbrace{(\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\alpha}^T)(\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\alpha}^T)\cdots(\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\alpha}^T)}_{k}$$

$$=\boldsymbol{\alpha}\underbrace{(\boldsymbol{\alpha}^T\boldsymbol{\alpha})\cdots(\boldsymbol{\alpha}^T\boldsymbol{\alpha})}_{k-1}\boldsymbol{\alpha}^T$$

$$=c^{k-1}(\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\alpha}^T)=c^{k-1}\boldsymbol{A}.$$

例 7 设矩阵 $\boldsymbol{X}=(x_1,x_2,\cdots,x_n)^T$ 满足 $\boldsymbol{X}^T\boldsymbol{X}=1$，$\boldsymbol{E}$ 为 n 阶单位矩阵，$\boldsymbol{H}=\boldsymbol{E}-2\boldsymbol{X}\boldsymbol{X}^T$，证明 $\boldsymbol{H}$ 是对称矩阵，且 $\boldsymbol{H}\boldsymbol{H}^T=\boldsymbol{E}$.

证　$\boldsymbol{H}^T=(\boldsymbol{E}-2\boldsymbol{X}\boldsymbol{X}^T)^T=\boldsymbol{E}^T-2(\boldsymbol{X}\boldsymbol{X}^T)^T=\boldsymbol{E}-2\boldsymbol{X}\boldsymbol{X}^T=\boldsymbol{H}$，

故 $\boldsymbol{H}$ 是对称矩阵，且

$$\boldsymbol{H}\boldsymbol{H}^T=\boldsymbol{H}^2=(\boldsymbol{E}-2\boldsymbol{X}\boldsymbol{X}^T)^2=\boldsymbol{E}-4\boldsymbol{X}\boldsymbol{X}^T+4(\boldsymbol{X}\boldsymbol{X}^T)(\boldsymbol{X}\boldsymbol{X}^T)$$

$$=\boldsymbol{E}-4\boldsymbol{X}\boldsymbol{X}^T+4\boldsymbol{X}(\boldsymbol{X}^T\boldsymbol{X})\boldsymbol{X}^T=\boldsymbol{E}-4\boldsymbol{X}\boldsymbol{X}^T+4\boldsymbol{X}\boldsymbol{X}^T=\boldsymbol{E}\ .$$

5.　方阵的行列式

定义 2.7　由 n 阶方阵 $\boldsymbol{A}$ 的元素构成的行列式（各元素的位置不变），称为方阵 $\boldsymbol{A}$ 的行列式，记作 $|\boldsymbol{A}|$ 或 $\det\boldsymbol{A}$.

运算规律：

（1）$|\boldsymbol{A}^T|=|\boldsymbol{A}|$；

（2）$|\lambda\boldsymbol{A}|=\lambda^n|\boldsymbol{A}|$，$\lambda$ 是数；

（3）设 $\boldsymbol{A}$，$\boldsymbol{B}$ 均是 n 阶方阵，则 $|\boldsymbol{A}\boldsymbol{B}|=|\boldsymbol{A}||\boldsymbol{B}|$.

（1）和（2）可由行列式的性质直接证得，这里仅证明（3）.

设 $\boldsymbol{A}=\left(a_{ij}\right)_{n\times n}$，$\boldsymbol{B}=\left(b_{ij}\right)_{n\times n}$，$\boldsymbol{D}=\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} & & & \\ \vdots & & \vdots & & O & \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} & & & \\ -1 & & & b_{11} & \cdots & b_{1n} \\ & \ddots & & \vdots & & \vdots \\ & & -1 & b_{n1} & \cdots & b_{nn} \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} \boldsymbol{A} & \boldsymbol{O} \\ -\boldsymbol{E} & \boldsymbol{B} \end{vmatrix}$,

由§1.2 例 5 知，$\boldsymbol{D}=|\boldsymbol{A}||\boldsymbol{B}|$.

在 $\boldsymbol{D}$ 中以 b_{1j} 乘第 1 列，b_{2j} 乘第 2 列，⋯，b_{nj} 乘第 n 列，都加到第 $n+j$ 列上 ($j=1,2,\cdots,n$)，有 $\boldsymbol{D}=\begin{vmatrix} \boldsymbol{A} & \boldsymbol{C} \\ -\boldsymbol{E} & \boldsymbol{O} \end{vmatrix}$，其中 $\boldsymbol{C}=\left(c_{ij}\right)_{n\times n}$，$c_{ij}=a_{i1}b_{1j}+a_{i2}b_{2j}+\cdots+a_{in}b_{nj}$，

故 $\boldsymbol{C}=\boldsymbol{A}\boldsymbol{B}$.

再将 $\boldsymbol{D}$ 的第 i 行与第 $n+i$ 行互换（$i=1,2,\cdots,n$），有

$$\boldsymbol{D}=(-1)^n\begin{vmatrix} -\boldsymbol{E} & \boldsymbol{O} \\ \boldsymbol{A} & \boldsymbol{C} \end{vmatrix}=(-1)^n|-\boldsymbol{E}||\boldsymbol{C}|=|\boldsymbol{C}|=|\boldsymbol{A}\boldsymbol{B}|,$$

从而 $|\boldsymbol{A}\boldsymbol{B}|=|\boldsymbol{A}||\boldsymbol{B}|$.

因此，对方阵 $\boldsymbol{A}$、$\boldsymbol{B}$ 来说，虽然 $\boldsymbol{AB}$ 不一定等于 $\boldsymbol{BA}$，但总有 $|\boldsymbol{AB}|=|\boldsymbol{BA}|=|\boldsymbol{A}||\boldsymbol{B}|$. 但如果 $\boldsymbol{A}$、$\boldsymbol{B}$ 不是方阵，则 $|\boldsymbol{AB}|=|\boldsymbol{BA}|$ 未必成立.

例 8 设 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} a & -b & -c & -d \\ b & a & -d & c \\ c & d & a & -b \\ d & -c & b & a \end{pmatrix}$，求 $|\boldsymbol{A}|$.

解 $|\boldsymbol{A}|^2=|\boldsymbol{A}||\boldsymbol{A}^T|=|\boldsymbol{AA}^T|$

$$=\begin{vmatrix} a^2+b^2+c^2+d^2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a^2+b^2+c^2+d^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a^2+b^2+c^2+d^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a^2+b^2+c^2+d^2 \end{vmatrix}$$

$=(a^2+b^2+c^2+d^2)^4$，

又因为 $\boldsymbol{A}$ 的主对角元全是 a，$|\boldsymbol{A}|$ 中的 a^4 项的符号为正，故

$$|\boldsymbol{A}|=(a^2+b^2+c^2+d^2)^2.$$

微视频 2.3 逆矩阵
PPT 课件 2.3 逆矩阵

§ 2.3 逆矩阵

前面我们已经学习了矩阵的加、减、乘法，实际问题中常常还需要考虑矩阵的“除法”. 比如，在方阵 $\boldsymbol{A}$、$\boldsymbol{B}$ 已知的情况下，求解矩阵方程 $\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{B}$. 回顾解实数方程 $ax=b$，若 $a\neq 0$，就有 $\frac{1}{a}\cdot ax=1\cdot x=\frac{b}{a}=b\cdot a^{-1}$. 类似地，对矩阵方程 $\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{B}$ 来说，若能找到 $\boldsymbol{A}$ 的“逆”矩阵 $\boldsymbol{A}^{-1}$，使其满足 $\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{A}=\boldsymbol{E}$，就有 $\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{EX}=\boldsymbol{X}=\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{B}$. 为此，我们给出矩阵逆的定义.

1. 逆矩阵的概念

定义 2.8 设 $\boldsymbol{A}$ 为 n 阶方阵，若存在 n 阶方阵 $\boldsymbol{B}$，使得 $\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{BA}=\boldsymbol{E}$，则称 $\boldsymbol{A}$ 可逆（或非奇异），称 $\boldsymbol{B}$ 为 $\boldsymbol{A}$ 的逆矩阵.

若 $\boldsymbol{A}$ 可逆，则其逆矩阵是唯一的. 这是因为：

假设 $\boldsymbol{B}$ 和 $\boldsymbol{C}$ 都是 $\boldsymbol{A}$ 的逆矩阵，由定义知 $\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{BA}=\boldsymbol{E}$ 和 $\boldsymbol{AC}=\boldsymbol{CA}=\boldsymbol{E}$，从而

$$\boldsymbol{B}=\boldsymbol{BE}=\boldsymbol{B}(\boldsymbol{AC})=(\boldsymbol{BA})\boldsymbol{C}=\boldsymbol{EC}=\boldsymbol{C}.$$

$\boldsymbol{A}$ 的逆矩阵记为 $\boldsymbol{A}^{-1}$，即若 $\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{BA}=\boldsymbol{E}$，则 $\boldsymbol{B}=\boldsymbol{A}^{-1}$.

如，$\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$和$\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}$互为逆矩阵，因为

$$\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

又如，$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$没有逆矩阵．事实上，设 $\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix}$为任一 2 阶方阵，则

$$\boldsymbol{BA}=\begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} b_{11} & 0 \\ b_{21} & 0 \end{pmatrix}\neq\boldsymbol{E}.$$

2. 方阵可逆的充分必要条件

定义 2.9 设方阵 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$，则 $\boldsymbol{A}$ 的行列式中各个元素的代数余子式 A_{ij} 所构成的矩阵 $\boldsymbol{A}^*=\begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \cdots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \cdots & A_{n2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ A_{1n} & A_{2n} & \cdots & A_{nn} \end{pmatrix}$称为方阵 $\boldsymbol{A}$ 的伴随矩阵.

关于 n 阶方阵 $\boldsymbol{A}$ 的伴随阵，有如下常用结论：

（1）$\boldsymbol{AA}^*=\boldsymbol{A}^*\boldsymbol{A}=|\boldsymbol{A}|\boldsymbol{E}$；

（2）$(\lambda\boldsymbol{A})^*=\lambda^{n-1}\boldsymbol{A}^*$，$\lambda$ 是数.

由(1)，若 $|\boldsymbol{A}|\neq 0$，则有 $\boldsymbol{A}\dfrac{\boldsymbol{A}^*}{|\boldsymbol{A}|}=\dfrac{\boldsymbol{A}^*}{|\boldsymbol{A}|}\boldsymbol{A}=\boldsymbol{E}$，由定义 2.8 可知，$\dfrac{A^*}{|A|}$就是 A 的逆矩阵．我们有如下结论：

定理 2.1 方阵 $\boldsymbol{A}$ 可逆的充分必要条件是 $|\boldsymbol{A}|\neq 0$，且 $\boldsymbol{A}^{-1}=\dfrac{\boldsymbol{A}^*}{|\boldsymbol{A}|}$.

证 （必要性） 若 $\boldsymbol{A}$ 可逆，则有 $\boldsymbol{A}^{-1}$ 满足 $\boldsymbol{AA}^{-1}=\boldsymbol{E}$，故 $|\boldsymbol{AA}^{-1}|=|\boldsymbol{A}||\boldsymbol{A}^{-1}|=|\boldsymbol{E}|=1$，从而必有 $|\boldsymbol{A}|\neq 0$.

（充分性） 由于 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^* = \boldsymbol{A}^*\boldsymbol{A} = |\boldsymbol{A}|\boldsymbol{E}$，而 $|\boldsymbol{A}| \neq 0$，故有 $\boldsymbol{A}\dfrac{\boldsymbol{A}^*}{|\boldsymbol{A}|} = \dfrac{\boldsymbol{A}^*}{|\boldsymbol{A}|}\boldsymbol{A} = \boldsymbol{E}$，由定义 2.8 得，$\boldsymbol{A}^{-1}$ 存在，且 $\boldsymbol{A}^{-1} = \dfrac{\boldsymbol{A}^*}{|\boldsymbol{A}|}$.

概念解析：关于逆矩阵

例 1 求 $\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & 3 \\ -3 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ 的逆矩阵.

解 由 $|\boldsymbol{A}| = -24 \neq 0$，知 $\boldsymbol{A}$ 可逆. $|\boldsymbol{A}|$ 中各元素的代数余子式为

$$A_{11} = 1，\ A_{21} = -2，\ A_{31} = 7，$$

$$A_{12} = -11，\ A_{22} = -2，\ A_{32} = -5，$$

$$A_{13} = 3，\ A_{23} = -6，\ A_{33} = -3，$$

故

$$\boldsymbol{A}^{-1} = \frac{\boldsymbol{A}^*}{|\boldsymbol{A}|} = -\frac{1}{24}\begin{pmatrix} 1 & -2 & 7 \\ -11 & -2 & -5 \\ 3 & -6 & -3 \end{pmatrix}.$$

推论 2.1 若 n 阶方阵 $\boldsymbol{A}$、$\boldsymbol{B}$ 满足：$\boldsymbol{A}\boldsymbol{B} = \boldsymbol{E}$（或 $\boldsymbol{B}\boldsymbol{A} = \boldsymbol{E}$），则 $\boldsymbol{A}^{-1} = \boldsymbol{B}$，$\boldsymbol{B}^{-1} = \boldsymbol{A}$.

证 由 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{B} = \boldsymbol{E}$，知 $|\boldsymbol{A}||\boldsymbol{B}| = |\boldsymbol{E}| = 1$，故 $|\boldsymbol{A}| \neq 0$，从而 $\boldsymbol{A}^{-1}$ 存在，且有

$$\boldsymbol{A}^{-1} = \boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{E} = \boldsymbol{A}^{-1}(\boldsymbol{A}\boldsymbol{B}) = \boldsymbol{B}.$$

类似可证 $\boldsymbol{B}^{-1} = \boldsymbol{A}$.

注 推论 2.1 是验证矩阵可逆和寻找逆矩阵的常用方法.

方法总结：涉及抽象方阵逆的相关问题及方法

例 2 设方阵 $\boldsymbol{A}$ 满足 $\boldsymbol{A}^2 - \boldsymbol{A} - 2\boldsymbol{E} = \boldsymbol{O}$，求 $\boldsymbol{A}^{-1}$ 及 $(\boldsymbol{A}+2\boldsymbol{E})^{-1}$.

解 由 $\boldsymbol{A}^2 - \boldsymbol{A} - 2\boldsymbol{E} = \boldsymbol{O}$，得 $\boldsymbol{A}\left[\dfrac{1}{2}(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{E})\right] = \boldsymbol{E}$，故 $\boldsymbol{A}$ 可逆，且 $\boldsymbol{A}^{-1} = \dfrac{1}{2}(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{E})$.

典型例题：抽象矩阵求逆

又由 $\boldsymbol{A}^2 - \boldsymbol{A} - 2\boldsymbol{E} = \boldsymbol{O}$，得 $(\boldsymbol{A}+2\boldsymbol{E})(\boldsymbol{A}-3\boldsymbol{E}) = -4\boldsymbol{E}$，即

$$(\boldsymbol{A}+2\boldsymbol{E})[-\frac{1}{4}(\boldsymbol{A}-3\boldsymbol{E})] = \boldsymbol{E},$$

故 $(\boldsymbol{A}+2\boldsymbol{E})^{-1} = -\dfrac{1}{4}(\boldsymbol{A}-3\boldsymbol{E})$.

例 3 设n阶方阵$\boldsymbol{A}$的伴随矩阵为$\boldsymbol{A}^*$，证明：

（1）若$|\boldsymbol{A}|=0$，则$|\boldsymbol{A}^*|=0$；（2）$|\boldsymbol{A}^*|=|\boldsymbol{A}|^{n-1}$.

证 对$\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^*=|\boldsymbol{A}|\boldsymbol{E}$两边取行列式得：$|\boldsymbol{A}||\boldsymbol{A}^*|=|\boldsymbol{A}|^n$.

（1）若$|\boldsymbol{A}|\neq 0$，则有$|\boldsymbol{A}^*|=|\boldsymbol{A}|^{n-1}$；

（2）若$|\boldsymbol{A}|=0$，分两种情况讨论：

i）若$\boldsymbol{A}=\boldsymbol{O}$，则$\boldsymbol{A}^*=\boldsymbol{O}$，从而$|\boldsymbol{A}^*|=0$.

ii）若$\boldsymbol{A}\neq\boldsymbol{O}$，则同样有$|\boldsymbol{A}^*|=0$，否则若$|\boldsymbol{A}^*|\neq 0$，则由定理 2.1 知：$\boldsymbol{A}^*$可逆，$\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^*=|\boldsymbol{A}|\boldsymbol{E}=\boldsymbol{O}$可推得$\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^*\left(\boldsymbol{A}^*\right)^{-1}=\boldsymbol{O}\left(\boldsymbol{A}^*\right)^{-1}=\boldsymbol{O}$，从而$\boldsymbol{A}=\boldsymbol{O}$，这与$\boldsymbol{A}\neq\boldsymbol{O}$矛盾，故$|\boldsymbol{A}^*|=0$.

例 4 设$\boldsymbol{A}$为n阶方阵，$(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{E})^m=\boldsymbol{O}$，$m$为正整数，求证$\boldsymbol{A}$可逆，并求$\boldsymbol{A}^{-1}$.

证 因为

$$(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{E})^m=\boldsymbol{A}^m+C_m^1\boldsymbol{A}^{m-1}+C_m^2\boldsymbol{A}^{m-2}+\cdots+C_m^{m-1}\boldsymbol{A}+\boldsymbol{E}=\boldsymbol{O}$$

移项得

$$-\boldsymbol{A}^m-C_m^1\boldsymbol{A}^{m-1}-C_m^2\boldsymbol{A}^{m-2}-\cdots-C_m^{m-1}\boldsymbol{A}=\boldsymbol{E}$$

即

$$\boldsymbol{A}(-\boldsymbol{A}^{m-1}-C_m^1\boldsymbol{A}^{m-2}-C_m^2\boldsymbol{A}^{m-3}-\cdots-C_m^{m-1}\boldsymbol{E})=\boldsymbol{E}$$

由推论 2.1 知$\boldsymbol{A}$可逆，且

$$\boldsymbol{A}^{-1}=-\boldsymbol{A}^{m-1}-C_m^1\boldsymbol{A}^{m-2}-C_m^2\boldsymbol{A}^{m-3}-\cdots-C_m^{m-1}\boldsymbol{E}.$$

3. 逆矩阵的性质

可逆方阵满足如下性质：

（1）$(\boldsymbol{A}^{-1})^{-1}=\boldsymbol{A}$；

（2）$(\lambda\boldsymbol{A})^{-1}=\dfrac{1}{\lambda}\boldsymbol{A}^{-1}$，数$\lambda\neq 0$；

（3）若$\boldsymbol{A}$、$\boldsymbol{B}$为同阶可逆方阵，则$(\boldsymbol{A}\boldsymbol{B})^{-1}=\boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{A}^{-1}$；

（4）若$\boldsymbol{A}$可逆，则$\boldsymbol{A}^T$也可逆，且$(\boldsymbol{A}^T)^{-1}=(\boldsymbol{A}^{-1})^T$；

（5）$|\boldsymbol{A}^{-1}|=\dfrac{1}{|\boldsymbol{A}|}=|\boldsymbol{A}|^{-1}$.

上述性质均可由推论 2.1 验证.

例 5 设 $\boldsymbol{A}$ 可逆，证明：$(\boldsymbol{A}^*)^{-1}=(\boldsymbol{A}^{-1})^*$.

证 当 $\boldsymbol{A}$ 可逆时，$|\boldsymbol{A}|\neq 0$，且 $\boldsymbol{A}^*=|\boldsymbol{A}|\boldsymbol{A}^{-1}$，从而 $(\boldsymbol{A}^*)^{-1}=(|\boldsymbol{A}|\boldsymbol{A}^{-1})^{-1}=\dfrac{1}{|\boldsymbol{A}|}\boldsymbol{A}$. 而 $(\boldsymbol{A}^{-1})^*=|\boldsymbol{A}^{-1}|(\boldsymbol{A}^{-1})^{-1}=\dfrac{1}{|\boldsymbol{A}|}\boldsymbol{A}$，故 $(\boldsymbol{A}^*)^{-1}=(\boldsymbol{A}^{-1})^*$. 得证.

典型例题：抽象方阵的行列式

例 6 设 $\boldsymbol{A}$ 为 3 阶方阵，且 $|\boldsymbol{A}|=\dfrac{1}{2}$，求 $|(3\boldsymbol{A})^{-1}-\boldsymbol{A}^*|$.

解 由于 $\boldsymbol{A}^*=|\boldsymbol{A}|\boldsymbol{A}^{-1}=\dfrac{1}{2}\boldsymbol{A}^{-1}$，故

$$|(3\boldsymbol{A})^{-1}-\boldsymbol{A}^*|=\left|\frac{1}{3}\boldsymbol{A}^{-1}-\frac{1}{2}\boldsymbol{A}^{-1}\right|=\left|-\frac{1}{6}\boldsymbol{A}^{-1}\right|=\left(-\frac{1}{6}\right)^3|\boldsymbol{A}^{-1}|=-\frac{1}{108}.$$

例7 设 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&2&3\\2&2&1\\3&4&3\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}2&1\\5&3\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{C}=\begin{pmatrix}1&3\\2&0\\3&1\end{pmatrix}$，求矩阵 $\boldsymbol{X}$，使满足

$$\boldsymbol{AXB}=\boldsymbol{C}.$$

解 若 $\boldsymbol{A}^{-1}$，$\boldsymbol{B}^{-1}$ 存在，则用 $\boldsymbol{A}^{-1}$ 左乘上式，$\boldsymbol{B}^{-1}$ 右乘上式，可得

$$\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{AXBB}^{-1}=\boldsymbol{X}=\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{CB}^{-1}.$$

由计算可得 $|\boldsymbol{A}|=2$，$|\boldsymbol{B}|=1$，均不为零，故 $\boldsymbol{A}$ 和 $\boldsymbol{B}$ 都可逆，且

$$\boldsymbol{A}^{-1}=\begin{pmatrix}1&3&-2\\-\frac{3}{2}&-3&\frac{5}{2}\\1&1&-1\end{pmatrix},\quad \boldsymbol{B}^{-1}=\begin{pmatrix}3&-1\\-5&2\end{pmatrix},$$

故

$$\boldsymbol{X}=\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{CB}^{-1}=\begin{pmatrix}1&3&-2\\-\frac{3}{2}&-3&\frac{5}{2}\\1&1&-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&3\\2&0\\3&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}3&-1\\-5&2\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}1&1\\0&-2\\0&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}3&-1\\-5&2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-2&1\\10&-4\\-10&4\end{pmatrix}.$$

4. 方阵的多项式

定义2.10　设

$$f(x)=a_m x^m+a_{m-1}x^{m-1}+\cdots+a_1x+a_0$$

为 x 的 m 次多项式（m 为正整数），$\boldsymbol{A}$ 为方阵，称

$$f(\boldsymbol{A})=a_m\boldsymbol{A}^m+a_{m-1}\boldsymbol{A}^{m-1}+\cdots+a_1\boldsymbol{A}+a_0\boldsymbol{E}$$

为方阵 $\boldsymbol{A}$ 的多项式.

若 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{P}\boldsymbol{B}\boldsymbol{P}^{-1}$，$k$ 为正整数，则 $\boldsymbol{A}^k=\boldsymbol{P}\boldsymbol{B}^k\boldsymbol{P}^{-1}$，从而

$$\begin{aligned}f(\boldsymbol{A})&=a_m\boldsymbol{A}^m+a_{m-1}\boldsymbol{A}^{m-1}+\cdots+a_1\boldsymbol{A}+a_0\boldsymbol{E}\\&=\boldsymbol{P}\left(a_m\boldsymbol{B}^m\right)\boldsymbol{P}^{-1}+\boldsymbol{P}\left(a_{m-1}\boldsymbol{B}^{m-1}\right)\boldsymbol{P}^{-1}+\cdots+\boldsymbol{P}\left(a_1\boldsymbol{B}\right)\boldsymbol{P}^{-1}+\boldsymbol{P}\left(a_0\boldsymbol{E}\right)\boldsymbol{P}^{-1}\\&=\boldsymbol{P}\left(a_m\boldsymbol{B}^m+\cdots+a_1\boldsymbol{B}+a_0\boldsymbol{E}\right)\boldsymbol{P}^{-1}\\&=\boldsymbol{P}f\left(\boldsymbol{B}\right)\boldsymbol{P}^{-1}.\end{aligned}$$

微视频 2.4 分块矩阵
PPT 课件 2.4 分块矩阵

§ 2.4　分块矩阵

1.　矩阵的分块

在处理阶数较高矩阵的运算时，常常把它划分成一些小矩阵，这样会使原矩阵显得结构简单而清晰，给问题的处理带来方便.

将矩阵 $\boldsymbol{A}$ 用若干条横线和竖线分成许多个小矩阵，每个小矩阵称为 $\boldsymbol{A}$ 的子块，以子块为元素的形式上的矩阵称为分块矩阵.

例1　将矩阵 $\boldsymbol{A}$ 分块为：

$$\boldsymbol{A}=\left(\begin{array}{cc:cc}1&0&-1&2\\0&1&1&1\\ \hdashline 0&0&1&2\\0&0&2&1\end{array}\right)=\begin{pmatrix}\boldsymbol{A}_{11}&\boldsymbol{A}_{12}\\\boldsymbol{A}_{21}&\boldsymbol{A}_{22}\end{pmatrix}，其中$$

$$\boldsymbol{A}_{11}=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}为 2 阶单位阵，\boldsymbol{A}_{12}=\begin{pmatrix}-1&2\\1&1\end{pmatrix},$$

$$\boldsymbol{A}_{21}=\begin{pmatrix}0&0\\0&0\end{pmatrix}为 2 阶零矩阵，\boldsymbol{A}_{22}=\begin{pmatrix}1&2\\2&1\end{pmatrix}.$$

$\boldsymbol{A}$ 也可以分块为：$\boldsymbol{A}=\left(\begin{array}{c:cc:c}1 & 0 & -1 & 2 \\ \hdashline 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 1\end{array}\right)=\begin{pmatrix}\boldsymbol{B}_{11} & \boldsymbol{B}_{12} & \boldsymbol{B}_{13} \\ \boldsymbol{B}_{21} & \boldsymbol{B}_{22} & \boldsymbol{B}_{23}\end{pmatrix}$，其中

$$\boldsymbol{B}_{11}=1，\boldsymbol{B}_{12}=(0,-1)，\boldsymbol{B}_{13}=2，$$

$$\boldsymbol{B}_{21}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}，\boldsymbol{B}_{22}=\begin{pmatrix}1 & 1\\0 & 1\\0 & 2\end{pmatrix}，\boldsymbol{B}_{23}=\begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix}.$$

第一种分块方式看起来比第二种“简单”，因为其注意到了矩阵元素的分布特征，划分出了单位阵和零矩阵.

2. 分块矩阵的运算

分块矩阵的运算法则与普通矩阵的运算法则类似，但是要注意的是，参与运算的两矩阵分块后能够运算，并且子块之间也能运算.

（1）分块矩阵的加法

设矩阵 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 同型，对它们采用相同的分块方法（即行与列的分法一致）得到两个同型分块矩阵

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{A}_{11} & \cdots & \boldsymbol{A}_{1r}\\ \vdots & & \vdots\\ \boldsymbol{A}_{s1} & \cdots & \boldsymbol{A}_{sr}\end{pmatrix}，\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{B}_{11} & \cdots & \boldsymbol{B}_{1r}\\ \vdots & & \vdots\\ \boldsymbol{B}_{s1} & \cdots & \boldsymbol{B}_{sr}\end{pmatrix}，$$

其中每一个 $\boldsymbol{A}_{ij}$ 与 $\boldsymbol{B}_{ij}$ 是同型子块矩阵，则

$$\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{A}_{11}+\boldsymbol{B}_{11} & \cdots & \boldsymbol{A}_{1r}+\boldsymbol{B}_{1r}\\ \vdots & & \vdots\\ \boldsymbol{A}_{s1}+\boldsymbol{B}_{s1} & \cdots & \boldsymbol{A}_{sr}+\boldsymbol{B}_{sr}\end{pmatrix}.$$

（2）分块矩阵与数的乘法

设 k 为常数，则

$$k\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}k\boldsymbol{A}_{11} & \cdots & k\boldsymbol{A}_{1r}\\ \vdots & & \vdots\\ k\boldsymbol{A}_{s1} & \cdots & k\boldsymbol{A}_{sr}\end{pmatrix}.$$

（3）分块矩阵的乘法

设 $\boldsymbol{A}$ 为 $m\times l$ 矩阵，$\boldsymbol{B}$ 为 $l\times n$ 矩阵，对 $\boldsymbol{A}$ 的列与 $\boldsymbol{B}$ 的行采用一致的分法，得分块矩阵

$$
\boldsymbol{A}_{m\times l}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{A}_{11} & \cdots & \boldsymbol{A}_{1r}\\ \vdots & & \vdots\\ \boldsymbol{A}_{s1} & \cdots & \boldsymbol{A}_{sr}\end{pmatrix},\quad \boldsymbol{B}_{l\times n}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{B}_{11} & \cdots & \boldsymbol{B}_{1t}\\ \vdots & & \vdots\\ \boldsymbol{B}_{r1} & \cdots & \boldsymbol{B}_{rt}\end{pmatrix},
$$

其中 $\boldsymbol{A}$ 的子块 $\boldsymbol{A}_{ik}\ \left(i=1,2,\cdots,s\right)$ 的列数等于矩阵 $\boldsymbol{B}$ 的子块 $\boldsymbol{B}_{kj}\ \left(j=1,2,\cdots,t\right)$ 的行数，其中 $k=1,2,\cdots,r$. 则

$$
\boldsymbol{AB}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{C}_{11} & \cdots & \boldsymbol{C}_{1t}\\ \vdots & & \vdots\\ \boldsymbol{C}_{s1} & \cdots & \boldsymbol{C}_{st}\end{pmatrix},
$$

其中
$$
\boldsymbol{C}_{ij}=\sum_{k=1}^{r}\boldsymbol{A}_{ik}\boldsymbol{B}_{kj}\ \left(i=1,2,\cdots,s;\ j=1,2,\cdots,t\right).
$$

例 2 设

$$
\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1 & -1 & 0 & 0\\ 3 & -1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 2 & -1\end{pmatrix},\quad \boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0 & 0\\ -1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 3 & -1\\ 0 & 2 & 1 & 4\end{pmatrix},
$$

用分块运算求 $\boldsymbol{AB}$.

解 将 $\boldsymbol{A}$ 、$\boldsymbol{B}$ 分块为

$$
\boldsymbol{A}=\left(\begin{array}{cc:cc}1 & -1 & 0 & 0\\ 3 & -1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0 & 0\\ \hdashline 0 & 0 & 2 & -1\end{array}\right)=\begin{pmatrix}\boldsymbol{A}_{11} & \boldsymbol{O}\\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{A}_{22}\end{pmatrix},
$$

$$
\boldsymbol{B}=\left(\begin{array}{c:ccc}1 & 0 & 0 & 0\\ -1 & 0 & 0 & 0\\ \hdashline 0 & 1 & 3 & -1\\ 0 & 2 & 1 & 4\end{array}\right)=\begin{pmatrix}\boldsymbol{B}_{11} & \boldsymbol{O}\\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{B}_{22}\end{pmatrix},
$$

则 $\boldsymbol{AB}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{A}_{11}\boldsymbol{B}_{11} & \boldsymbol{O}\\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{A}_{22}\boldsymbol{B}_{22}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2 & 0 & 0 & 0\\ 4 & 0 & 0 & 0\\ -1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 5 & -6\end{pmatrix}.$

（4）分块矩阵的转置

设分块矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{A}_{11} & \cdots & \boldsymbol{A}_{1r}\\ \vdots & & \vdots\\ \boldsymbol{A}_{s1} & \cdots & \boldsymbol{A}_{sr}\end{pmatrix}$，则 $\boldsymbol{A}^{T}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{A}_{11}^{T} & \cdots & \boldsymbol{A}_{s1}^{T}\\ \vdots & & \vdots\\ \boldsymbol{A}_{1r}^{T} & \cdots & \boldsymbol{A}_{sr}^{T}\end{pmatrix}$.

即转置一个分块矩阵时，在分块矩阵中除了作行、列位置互换外，还要对每个子矩阵作转置.

（5）分块对角矩阵

将 n 阶方阵 $\boldsymbol{A}$ 分块后，$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{A}_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \boldsymbol{A}_m\end{pmatrix}$，其中 $\boldsymbol{A}_1,\cdots,\boldsymbol{A}_m$ 都是方阵，称 $\boldsymbol{A}$ 为分块对角矩阵（或准对角矩阵）.

分块对角矩阵具有如下性质：

① $|\boldsymbol{A}|=|\boldsymbol{A}_1|\cdots|\boldsymbol{A}_m|$；

② 若 $\boldsymbol{A}_1,\cdots,\boldsymbol{A}_m$ 都可逆，则 $\boldsymbol{A}$ 也可逆，且

$$\boldsymbol{A}^{-1}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{A}_1^{-1} & & \\ & \ddots & \\ & & \boldsymbol{A}_m^{-1}\end{pmatrix},$$

特别地，当 $a_1\cdots a_n\neq 0$ 时，有

$$\begin{pmatrix}a_1 & & \\ & \ddots & \\ & & a_n\end{pmatrix}^{-1}=\begin{pmatrix}\frac{1}{a_1} & & \\ & \ddots & \\ & & \frac{1}{a_n}\end{pmatrix};$$

③ $\boldsymbol{A}^k=\begin{pmatrix}\boldsymbol{A}_1^k & & \\ & \ddots & \\ & & \boldsymbol{A}_m^k\end{pmatrix}$，$k\in\mathbb{N}$.

例3 设矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}2 & 1 & 0 & 0\\ 1 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 2 & 0\\ 0 & 0 & -1 & 3\end{pmatrix}$，求 $\boldsymbol{A}^{-1}$.

解 令 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{A}_1 & \\ & \boldsymbol{A}_2\end{pmatrix}$，其中 $\boldsymbol{A}_1=\begin{pmatrix}2 & 1\\ 1 & 1\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{A}_2=\begin{pmatrix}2 & 0\\ -1 & 3\end{pmatrix}$，因 $|\boldsymbol{A}|=|\boldsymbol{A}_1||\boldsymbol{A}_2|=6\neq 0$，

故 $\boldsymbol{A}$ 可逆，而 $\boldsymbol{A}_1^{-1}=\begin{pmatrix}1 & -1\\ -1 & 2\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{A}_2^{-1}=\begin{pmatrix}\frac{1}{2} & 0\\ \frac{1}{6} & \frac{1}{3}\end{pmatrix}$，故

$$\boldsymbol{A}^{-1}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{A}_1^{-1} & \\ & \boldsymbol{A}_2^{-1}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & -1 & 0 & 0\\ -1 & 2 & 0 & 0\\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0\\ 0 & 0 & \frac{1}{6} & \frac{1}{3}\end{pmatrix}.$$

例 4 设 $\boldsymbol{A}$、$\boldsymbol{B}$ 均可逆，求 $\begin{pmatrix}\boldsymbol{A} & \boldsymbol{O}\\ \boldsymbol{C} & \boldsymbol{B}\end{pmatrix}$ 的逆矩阵.

解 因 $\begin{vmatrix}\boldsymbol{A} & \boldsymbol{O}\\ \boldsymbol{C} & \boldsymbol{B}\end{vmatrix}=|\boldsymbol{A}||\boldsymbol{B}|\neq 0$，故 $\begin{pmatrix}\boldsymbol{A} & \boldsymbol{O}\\ \boldsymbol{C} & \boldsymbol{B}\end{pmatrix}$ 可逆. 设 $\begin{pmatrix}\boldsymbol{A} & \boldsymbol{O}\\ \boldsymbol{C} & \boldsymbol{B}\end{pmatrix}^{-1}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{A}_1 & \boldsymbol{A}_2\\ \boldsymbol{A}_3 & \boldsymbol{A}_4\end{pmatrix}$.

由 $\begin{pmatrix}\boldsymbol{A} & \boldsymbol{O}\\ \boldsymbol{C} & \boldsymbol{B}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\boldsymbol{A}_1 & \boldsymbol{A}_2\\ \boldsymbol{A}_3 & \boldsymbol{A}_4\end{pmatrix}=\boldsymbol{E}$，可得

$$\begin{pmatrix}\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}_1 & \boldsymbol{A}\boldsymbol{A}_2\\ \boldsymbol{C}\boldsymbol{A}_1+\boldsymbol{B}\boldsymbol{A}_3 & \boldsymbol{C}\boldsymbol{A}_2+\boldsymbol{B}\boldsymbol{A}_4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{E} & \boldsymbol{O}\\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{E}\end{pmatrix},$$

从而有

$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}_1=\boldsymbol{E},\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}_2=\boldsymbol{O},\boldsymbol{C}\boldsymbol{A}_1+\boldsymbol{B}\boldsymbol{A}_3=\boldsymbol{O},\boldsymbol{C}\boldsymbol{A}_2+\boldsymbol{B}\boldsymbol{A}_4=\boldsymbol{E}.$$

由 $\boldsymbol{A}$、$\boldsymbol{B}$ 均可逆，得

$$\boldsymbol{A}_1=\boldsymbol{A}^{-1},\boldsymbol{A}_2=\boldsymbol{O},\boldsymbol{A}_3=-\boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{C}\boldsymbol{A}^{-1},\boldsymbol{A}_4=\boldsymbol{B}^{-1}.$$

故：$\begin{pmatrix}\boldsymbol{A} & \boldsymbol{O}\\ \boldsymbol{C} & \boldsymbol{B}\end{pmatrix}^{-1}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{A}^{-1} & \boldsymbol{O}\\ -\boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{C}\boldsymbol{A}^{-1} & \boldsymbol{B}^{-1}\end{pmatrix}$.

下面我们利用矩阵的性质给出第一章中介绍的克莱姆法则的另外一种证明方法.

（克莱姆法则）若线性方程组

$$\begin{cases}a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_n=b_1\\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots+a_{2n}x_n=b_2\\ \qquad\cdots\cdots\\ a_{n1}x_1+a_{n2}x_2+\cdots+a_{nn}x_n=b_n\end{cases}\tag{2.6}$$

的系数行列式

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \neq 0,$$

则其有唯一解

$$x_j=\frac{D_j}{D}=\frac{1}{D}(b_1A_{1j}+b_2A_{2j}+\cdots+b_nA_{nj}), \quad j=1,2,\cdots,n.$$

证 方程组(2.6)可写成矩阵方程

$$\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}, \tag{2.7}$$

其中$\boldsymbol{A}=(a_{ij})_{n\times n}$， $\boldsymbol{x}=(x_1,x_2,\cdots,x_n)^T$， $\boldsymbol{b}=(b_1,b_2,\cdots,b_n)^T$.

因$|\boldsymbol{A}|=D\neq 0$，故$\boldsymbol{A}^{-1}$存在. 在(2.7)式两边同时左乘$\boldsymbol{A}^{-1}$，得$\boldsymbol{x}=\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{b}$是方程组$(2.6)$的解．又由逆矩阵的唯一性，知$\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{b}$同时也是$(2.6)$的唯一解.

由$\boldsymbol{A}^{-1}=\dfrac{\boldsymbol{A}^*}{|\boldsymbol{A}|}$，有$\boldsymbol{x}=\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{b}=\dfrac{1}{D}\boldsymbol{A}^*\boldsymbol{b}$，即

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}=\frac{1}{D}\begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \cdots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \cdots & A_{n2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ A_{1n} & A_{2n} & \cdots & A_{nn} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$$

$$=\frac{1}{D}\begin{pmatrix} b_1A_{11}+b_2A_{21}+\cdots+b_nA_{n1} \\ b_1A_{12}+b_2A_{22}+\cdots+b_nA_{n2} \\ \vdots \\ b_1A_{1n}+b_2A_{2n}+\cdots+b_nA_{nn} \end{pmatrix},$$

故

$$x_j=\frac{1}{D}(b_1A_{1j}+b_2A_{2j}+\cdots+b_nA_{nj})=\frac{D_j}{D}, \quad j=1,2,\cdots,n.$$

我们也可以利用分块矩阵及行列式的性质给出克莱姆法则的简单证明.

由于$AE=A$（其中A为方程组的系数矩阵，E为n阶单位阵），从而$A(e_1e_2\cdots e_n)=(a_1a_2\cdots a_n)$，其中$e_i(i=1,2,\cdots,n)$为单位阵$E$的第$i$列元素构成的列矩阵（也称为列向量），$a_i(i=1,2,\cdots,n)$为$A$的第$i$列元素构成的列向量。

由于 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$， $\boldsymbol{A}(e_1\cdots e_{i-1}\boldsymbol{x}e_{i+1}\cdots e_n)=(a_1\cdots a_{i-1}\boldsymbol{b}a_{i+1}a_n)$

两边取行列式，有$|\boldsymbol{A}||(e_1\cdots e_{i-1}\boldsymbol{x}e_{i+1}\cdots e_n)|=|(a_1\cdots a_{i-1}\boldsymbol{b}a_{i+1}a_n)|$

即 $Dx_i=D_i$，故 $x_i=\dfrac{D_i}{D}(i=1,2,\cdots,n)$.

微视频 2.5 矩阵的初等变换
PPT 课件 2.5 矩阵的初等变换

§ 2.5　矩阵的初等变换

矩阵的初等变换是处理矩阵问题的一种基本方法，它在化简矩阵、解线性方程组、求矩阵的逆和矩阵的秩等诸多方面有着广泛的应用.

1.　引例

求解线性方程组

$$\begin{cases}2x_1-x_2+2x_3=4, & ①\\ x_1+x_2+2x_3=1, & ②\\ 4x_1+x_2+4x_3=2. & ③\end{cases} \tag{2.8}$$

解

$$(2.8)\xrightarrow{①\leftrightarrow②}\begin{cases}x_1+x_2+2x_3=1, & ①\\ 2x_1-x_2+2x_3=4, & ②\\ 4x_1+x_2+4x_3=2, & ③\end{cases}$$

$$\xrightarrow[③-4\times①]{②-2\times①}\begin{cases}x_1+x_2+2x_3=1, & ①\\ -3x_2-2x_3=2, & ②\\ -3x_2-4x_3=-2, & ③\end{cases}$$

$$\xrightarrow{③-②}\begin{cases}x_1+x_2+2x_3=1, & ①\\ -3x_2-2x_3=2, & ②\\ -2x_3=-4, & ③\end{cases}$$

$$\xrightarrow[②-③]{①+③}\begin{cases}x_1+x_2=-3, & ①\\ -3x_2=6, & ②\\ -2x_3=-4, & ③\end{cases}$$

$$\xrightarrow[\substack{②\div(-3)\\ ③\div(-2)}]{①+\frac{1}{3}\times②}\begin{cases}x_1=-1,\\ x_2=-2,\\ x_3=2.\end{cases}$$

在上述消元过程中，对方程组进行了下列三种变换：

（1）互换两个方程的位置；

（2）以一个非零数乘某个方程；

（3）在某个方程上加上另一个方程的常数倍．

由于这三种变换都是可逆的，因此变换前后的方程组是同解的，最后求出的解就是原方程组的解．

在上述变换过程中，实质上只对方程组的系数和常数进行运算，未知数并未参与运算，因此，可对此过程进行简化．将方程组的系数和常数单独提取出来构成的矩阵称为方程组的增广矩阵．如，方程组(2.8)的增广矩阵为

$$\boldsymbol{B}=(\boldsymbol{A},\boldsymbol{b})=\begin{pmatrix}2&-1&2&4\\1&1&2&1\\4&1&4&2\end{pmatrix}.$$

上述对方程组的变换过程可以用对增广矩阵的变换过程来表示，方程组的三种同解变换对应到矩阵上去，就得到了矩阵的三种初等行变换．

2. 矩阵的初等变换

定义 2.11 对矩阵的行进行以下三种变换之一，称为对矩阵进行了一次初等行变换：

（1）对调两行（对调i，j两行，记作$r_i \leftrightarrow r_j$）；

（2）以$k \neq 0$乘某一行的所有元素（第i行乘k，记作$r_i \times k$或kr_i）；

（3）将某一行所有元素的k倍加到另一行对应的元素上去（把第j行的k倍加到第i行上去，记作$r_i + kr_j$）．

将定义中的“行”换成“列”，即得矩阵初等列变换的定义（所用记号是将“r”换成“c”）．

定义 2.11′ 对矩阵的列进行以下三种变换之一，称为对矩阵进行了一次初等列变换：

（1）对调两列（对调i，j两列，记作$c_i \leftrightarrow c_j$）；

（2）以$k \neq 0$乘某一列的所有元素（第i列乘k，记作$c_i \times k$或kc_i）；

（3）将某一列所有元素的k倍加到另一列对应的元素上去（把第j列的k倍加到第i

列上去，记作 $c_i + kc_j$ ）.

矩阵的初等行变换和初等列变换统称为矩阵的初等变换.

显然，三种初等变换都是可逆的：变换 $r_i \leftrightarrow r_j$ 的逆变换就是其本身；$r_i \times k$ 的逆变换为 $r_i \times (\frac{1}{k})$；$r_i + kr_j$ 的逆变换为 $r_i - kr_j$. 逆变换都是同一类型的初等变换.

定义 2.12 若矩阵 $\boldsymbol{A}$ 经有限次初等行变换变成矩阵 $\boldsymbol{B}$，则称 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 行等价，记作 $\boldsymbol{A} \overset{r}{\sim} \boldsymbol{B}$；若矩阵 $\boldsymbol{A}$ 经有限次初等列变换变成矩阵 $\boldsymbol{B}$，则称 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 列等价，记作 $\boldsymbol{A} \overset{c}{\sim} \boldsymbol{B}$；若矩阵 $\boldsymbol{A}$ 经有限次初等变换变成矩阵 $\boldsymbol{B}$，则称 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 等价，记作 $\boldsymbol{A} \sim \boldsymbol{B}$.

易证明，矩阵的等价关系满足：

反身性： $\boldsymbol{A} \sim \boldsymbol{A}$；

对称性： 若 $\boldsymbol{A} \sim \boldsymbol{B}$，则 $\boldsymbol{B} \sim \boldsymbol{A}$；

传递性： 若 $\boldsymbol{A} \sim \boldsymbol{B}$ 且 $\boldsymbol{B} \sim \boldsymbol{C}$，则 $\boldsymbol{A} \sim \boldsymbol{C}$.

下面用矩阵的初等行变换来描述线性方程组 (2.8) 的求解过程：

$$\boldsymbol{B} = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 & 4 \\ 1 & 1 & 2 & 1 \\ 4 & 1 & 4 & 2 \end{pmatrix} \overset{r_1 \leftrightarrow r_2}{\sim} \boldsymbol{B}_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 1 \\ 2 & -1 & 2 & 4 \\ 4 & 1 & 4 & 2 \end{pmatrix} \underset{r_3 - 4r_1}{\overset{r_2 - 2r_1}{\sim}} \boldsymbol{B}_2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & -3 & -2 & 2 \\ 0 & -3 & -4 & -2 \end{pmatrix}$$

$$\overset{r_3 - r_2}{\sim} \boldsymbol{B}_3 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & -3 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & -2 & -4 \end{pmatrix} \underset{r_2 - r_3}{\overset{r_1 + r_3}{\sim}} \boldsymbol{B}_4 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & -3 \\ 0 & -3 & 0 & 6 \\ 0 & 0 & -2 & -4 \end{pmatrix}$$

$$\underset{\substack{r_2 \div (-3) \\ r_3 \div (-2)}}{\overset{r_1 + \frac{1}{3} r_2}{\sim}} \boldsymbol{B}_5 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$ （此处需标注阶梯线）

矩阵 $\boldsymbol{B}_3$、$\boldsymbol{B}_4$、$\boldsymbol{B}_5$ 都称为行阶梯形矩阵，其特点是：可画出一条阶梯线，线的下方元素全是 0；每个台阶只有一行，台阶数即是非零行的行数，阶梯线的竖线（每段竖线的长度为一行）后面的第一个元素为非零元，也就是非零行的第一个非零元素.

行阶梯形矩阵 $\boldsymbol{B}_5$ 还称为行最简形矩阵，其特点是非零行的第一个非零元为 1，且其所在列的其余元素都是 0.

求解线性方程组时，一旦将增广矩阵化为行最简形矩阵，该方程组的解即“一目了然”.

可以证明：对任何矩阵 $\boldsymbol{A}_{m \times n}$，总可经有限次初等行变换将其化为行阶梯形矩阵和行最

简形矩阵．

对行最简形矩阵再进行初等列变换，可变成形式更简单的矩阵，称为标准形．如

$$\boldsymbol{B}_5=\begin{pmatrix}1&0&0&-1\\0&1&0&-2\\0&0&1&2\end{pmatrix}\overset{c_4+c_1+2c_2-2c_3}{\sim}\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&1&0\end{pmatrix}=(\boldsymbol{E}_3,\boldsymbol{O})=\boldsymbol{F}\ .$$

矩阵 $\boldsymbol{F}$ 就是矩阵 $\boldsymbol{B}$ 的标准形．一个矩阵的标准形矩阵具有如下特点：左上角是一个单位矩阵，其余元素全为零．

对任何矩阵 $\boldsymbol{A}_{m\times n}$，总可经有限次初等行变换和初等列变换将其化为标准形

$$\boldsymbol{F}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{E}_r&\boldsymbol{O}\\\boldsymbol{O}&\boldsymbol{O}\end{pmatrix}_{m\times n},$$

标准形由 m，n，r 三个数完全确定，r 实质是行阶梯形矩阵中非零行的行数，对应到方程组中，就是有效方程的个数．

显然，所有与 $\boldsymbol{A}_{m\times n}$ 等价的矩阵中，标准形 $\boldsymbol{F}$ 是形式最简单的．

3. 初等矩阵

初等变换虽然很直观，但是不便于深入研究，有必要把变换的过程转化成数学语言．

定义 2.13 单位矩阵经一次初等变换得到的矩阵称为初等矩阵．

概念解析：初等方阵

三种初等变换对应着三种初等矩阵：

（1）将 $\boldsymbol{E}$ 的第 i，j 两行互换位置，得初等矩阵

$$\boldsymbol{E}(i,j)=\begin{array}{c}\begin{pmatrix}1&&&&&&&&&&\\&\ddots&&&&&&&&&\\&&1&&&&&&&&\\&&&0&&&&1&&&\\&&&&1&&&&&&\\&&&&&\ddots&&&&&\\&&&&&&1&&&&\\&&&1&&&&0&&&\\&&&&&&&&1&&\\&&&&&&&&&\ddots&\\&&&&&&&&&&1\end{pmatrix}\end{array}\begin{array}{l}\\\\\\\leftarrow\text{第}i\text{行}\\\\\\\\\leftarrow\text{第}j\text{行}\\\\\\\\\end{array},$$

也可看成是将 $\boldsymbol{E}$ 的第 i，j 两列互换位置得到；

（2）以非零数 k 乘 $\boldsymbol{E}$ 的第 i 行，得初等矩阵

$$\boldsymbol{E}(i(k))=\begin{pmatrix}1 & & & & \\ & \ddots & & & \\ & & k & & \\ & & & \ddots & \\ & & & & 1\end{pmatrix}\begin{array}{l} \\ \\ \leftarrow 第i行 \\ \\ \\ \end{array},$$

也可看成是以非零数 k 乘 $\boldsymbol{E}$ 的第 i 列得到；

（3）将 $\boldsymbol{E}$ 的第 j 行的 k 倍加到第 i 行上去，得初等矩阵

$$\boldsymbol{E}(i,\ j(k))=\begin{pmatrix}1 & & & & & \\ & \ddots & & & & \\ & & 1 & & k & \\ & & & \ddots & & \\ & & & & 1 & \\ & & & & & \ddots & \\ & & & & & & 1\end{pmatrix}\begin{array}{l} \\ \\ \leftarrow 第i行 \\ \\ \leftarrow 第j行 \\ \\ \\ \end{array},$$

也可看成是将第 i 列的 k 倍加到第 j 列上得到（注意行、列变换的不同）.

根据初等变换与初等矩阵的对应关系，易验证下列结论.

定理 2.2　对矩阵 $\boldsymbol{A}_{m\times n}$ 进行一次初等行变换，相当于在 $\boldsymbol{A}_{m\times n}$ 的左边乘以相应的 m 阶初等矩阵；对矩阵 $\boldsymbol{A}_{m\times n}$ 进行一次初等列变换，相当于在 $\boldsymbol{A}_{m\times n}$ 的右边乘以相应的 n 阶初等矩阵.

例如：

$$\begin{pmatrix}0 & 1 & 0\\ 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ 4 & 5 & 6\\ 7 & 8 & 9\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4 & 5 & 6\\ 1 & 2 & 3\\ 7 & 8 & 9\end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix}1 & 1 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ 4 & 5 & 6\\ 7 & 8 & 9\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}5 & 7 & 9\\ 4 & 5 & 6\\ 7 & 8 & 9\end{pmatrix},$$

由于任何矩阵 $\boldsymbol{A}_{m\times n}$ 总可经有限次初等行变换和初等列变换化为标准形，结合定理 2.2 可得：

推论 2.2　对任何矩阵 $\boldsymbol{A}_{m\times n}$，都存在 m 阶初等矩阵 $\boldsymbol{P}_1$、$\boldsymbol{P}_2$、$\cdots$、$\boldsymbol{P}_s$ 和 n 阶初等矩阵 $\boldsymbol{Q}_1$、

$\boldsymbol{Q}_2$、$\cdots$、$\boldsymbol{Q}_t$，使得 $\boldsymbol{P}_s\boldsymbol{P}_{s-1}\cdots\boldsymbol{P}_2\boldsymbol{P}_1\boldsymbol{A}\boldsymbol{Q}_1\boldsymbol{Q}_2\cdots\boldsymbol{Q}_{t-1}\boldsymbol{Q}_t=\begin{pmatrix}\boldsymbol{E}_r & \boldsymbol{O}\\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{O}\end{pmatrix}$.

易计算初等矩阵的行列式：

$$\det\boldsymbol{E}(i,\ j)=-1,\quad \det\boldsymbol{E}(i(k))=k\neq 0,\quad \det\boldsymbol{E}(i,\ j(k))=1,$$

故又有：

推论 2.3 初等矩阵均可逆，且其逆矩阵仍是同类型的初等矩阵，即

$$\boldsymbol{E}(i,\ j)^{-1}=\boldsymbol{E}(i,\ j),\quad \boldsymbol{E}(i(k))^{-1}=\boldsymbol{E}(i(k^{-1})),\quad \boldsymbol{E}(i,\ j(k))^{-1}=\boldsymbol{E}(i,\ j(-k)).$$

如：

$$\begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}^{-1}=\begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix},\ \begin{pmatrix}2 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}^{-1}=\begin{pmatrix}\frac{1}{2} & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix},\ \begin{pmatrix}1 & 2\\ 0 & 1\end{pmatrix}^{-1}=\begin{pmatrix}1 & -2\\ 0 & 1\end{pmatrix}.$$

定理 2.3 设 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 均为 $m\times n$ 矩阵，则：

（1）$\boldsymbol{A}\overset{r}{\sim}\boldsymbol{B}$ 的充分必要条件是存在 m 阶可逆矩阵 $\boldsymbol{P}$，使得 $\boldsymbol{PA}=\boldsymbol{B}$；

（2）$\boldsymbol{A}\overset{c}{\sim}\boldsymbol{B}$ 的充分必要条件是存在 n 阶可逆矩阵 $\boldsymbol{Q}$，使得 $\boldsymbol{AQ}=\boldsymbol{B}$；

（3）$\boldsymbol{A}\sim\boldsymbol{B}$ 的充分必要条件是存在 m 阶可逆矩阵 $\boldsymbol{P}$ 和 n 阶可逆矩阵 $\boldsymbol{Q}$，使得 $\boldsymbol{PAQ}=\boldsymbol{B}$.

由推论 2.3 还可得如下结论：

推论 2.4 $\boldsymbol{A}\sim\boldsymbol{B}$ 的充分必要条件是存在有限个初等矩阵 $\boldsymbol{P}_1$、$\boldsymbol{P}_2$、$\cdots$、$\boldsymbol{P}_l$，使得 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{P}_1\cdots\boldsymbol{P}_s\boldsymbol{B}\boldsymbol{P}_{s+1}\cdots\boldsymbol{P}_l$.

定理 2.4 矩阵 $\boldsymbol{A}_n$ 可逆的充分必要条件是它可以表示成有限个初等矩阵的乘积.

证 必要性：设 $\boldsymbol{A}_n$ 的标准形为

$$\boldsymbol{F}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{E}_r & \boldsymbol{O}\\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{O}\end{pmatrix}_n,$$

由推论 2.4 知，存在有限个初等矩阵 $\boldsymbol{P}_1$、$\boldsymbol{P}_2$、$\cdots$、$\boldsymbol{P}_l$，使得 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{P}_1\cdots\boldsymbol{P}_s\boldsymbol{F}\boldsymbol{P}_{s+1}\cdots\boldsymbol{P}_l$. 由于 $\boldsymbol{A}$ 可逆，初等矩阵 $\boldsymbol{P}_1$、$\boldsymbol{P}_2$、$\cdots$、$\boldsymbol{P}_l$ 也都可逆，故标准形 $\boldsymbol{F}$ 可逆，从而 $r=n$，$\boldsymbol{F}=\boldsymbol{E}$. 即 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{P}_1\cdots\boldsymbol{P}_s\boldsymbol{P}_{s+1}\cdots\boldsymbol{P}_l$.

充分性：若 $\boldsymbol{A}_n$ 可以表示成有限个初等矩阵的乘积，由初等矩阵可逆，初等矩阵之积可逆，知 $\boldsymbol{A}_n$ 也可逆.

推论 2.5 矩阵 $\boldsymbol{A}$ 可逆的充分必要条件是 $\boldsymbol{A} \overset{r}{\sim} \boldsymbol{E}$.

证 $\boldsymbol{A}$ 可逆 $\Leftrightarrow$ 存在可逆阵 $\boldsymbol{P}$，使得 $\boldsymbol{PA}=\boldsymbol{E} \Leftrightarrow \boldsymbol{A} \overset{r}{\sim} \boldsymbol{E}$.

推论 2.5 表明，若 $\boldsymbol{A}$ 可逆，则 $\boldsymbol{A}$ 可经一系列初等行变换变到 $\boldsymbol{E}$，这一系列初等行变换对应的初等矩阵的乘积就是 $\boldsymbol{A}^{-1}$，那么如何去求 $\boldsymbol{A}^{-1}$ 呢？

注意到 $\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{E}=\boldsymbol{A}^{-1}$，$\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{A}=\boldsymbol{E}$，将 $\boldsymbol{A}^{-1}$ 看成初等矩阵的乘积，则用 $\boldsymbol{A}^{-1}$ 左乘矩阵就是对该矩阵进行一系列初等行变换，因此对 $\boldsymbol{A}$ 和 $\boldsymbol{E}$ 同时进行相同的初等行变换，当 $\boldsymbol{A}$ 变成 $\boldsymbol{E}$ 时，$\boldsymbol{E}$ 就变成了 $\boldsymbol{A}^{-1}$. 即

$$(\boldsymbol{A},\boldsymbol{E}) \overset{r}{\sim} (\boldsymbol{E},\boldsymbol{A}^{-1}).$$

方法总结：涉及初等方阵的相关问题及方法

类似地，若 $\boldsymbol{A}$ 可逆，则求解矩阵方程 $\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{B}$ 也可用这种初等行变换的方法

$$(\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}) \overset{r}{\sim} (\boldsymbol{E},\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{B}).$$

另外，也可用初等列变换求矩阵的逆：

$$\begin{pmatrix}\boldsymbol{A}\\ \boldsymbol{E}\end{pmatrix} \overset{c}{\sim} \begin{pmatrix}\boldsymbol{E}\\ \boldsymbol{A}^{-1}\end{pmatrix}.$$

方法总结：具体方阵求逆矩阵的若干方法

例1 设 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}0 & -2 & 1\\ 3 & 0 & -2\\ -2 & 3 & 0\end{pmatrix}$，证明 $\boldsymbol{A}$ 可逆，并求 $\boldsymbol{A}^{-1}$.

解 由推论 2.5 知，若 $\boldsymbol{A}$ 可经一系列初等行变换变到 $\boldsymbol{E}$，则 $\boldsymbol{A}$ 可逆，且将此一系列初等行变换同样地作用到 $\boldsymbol{E}$ 即可得 $\boldsymbol{A}^{-1}$. 运算如下：

$$(\boldsymbol{A},\boldsymbol{E})=\begin{pmatrix}0 & -2 & 1 & 1 & 0 & 0\\ 3 & 0 & -2 & 0 & 1 & 0\\ -2 & 3 & 0 & 0 & 0 & 1\end{pmatrix} \underset{r_1\leftrightarrow r_2}{\overset{\substack{r_3\times 3\\ r_3+2r_2}}{\sim}} \begin{pmatrix}3 & 0 & -2 & 0 & 1 & 0\\ 0 & -2 & 1 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 9 & -4 & 0 & 2 & 3\end{pmatrix}$$

$$\underset{r_3+9r_2}{\overset{r_3\times 2}{\sim}} \begin{pmatrix}3 & 0 & -2 & 0 & 1 & 0\\ 0 & -2 & 1 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 9 & 4 & 6\end{pmatrix} \underset{r_2-r_3}{\overset{r_1+2r_3}{\sim}} \begin{pmatrix}3 & 0 & 0 & 18 & 9 & 12\\ 0 & -2 & 0 & -8 & -4 & -6\\ 0 & 0 & 1 & 9 & 4 & 6\end{pmatrix}$$

$$\overset{r_1 \div 3}{\underset{r_2 \div (-2)}{\sim}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 6 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & 4 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 9 & 4 & 6 \end{pmatrix},$$

典型例题：利用初等方阵求抽象矩阵的逆

因 $\boldsymbol{A} \overset{r}{\sim} \boldsymbol{E}$，故 $\boldsymbol{A}$ 可逆，且 $\boldsymbol{A}^{-1} = \begin{pmatrix} 6 & 3 & 4 \\ 4 & 2 & 3 \\ 9 & 4 & 6 \end{pmatrix}$.

例2 设 $\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$，且满足 $\boldsymbol{AX} = \boldsymbol{A} + \boldsymbol{X}$，求 $\boldsymbol{X}$.

解 由 $\boldsymbol{AX} = \boldsymbol{A} + \boldsymbol{X}$，知 $(\boldsymbol{A} - \boldsymbol{E})\boldsymbol{X} = \boldsymbol{A}$. 又

$$(\boldsymbol{A} - \boldsymbol{E}, \boldsymbol{A}) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 2 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 3 & 2 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \overset{r_2 - 2r_1}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 2 & 2 & 0 \\ 0 & -4 & 3 & -2 & -3 & 3 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\overset{r_2 \leftrightarrow r_3}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 2 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -4 & 3 & -2 & -3 & 3 \end{pmatrix} \overset{r_3 + 4r_2}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 2 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

$$\overset{r_3 \times (-1)}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 2 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & -1 & -3 \end{pmatrix} \overset{r_2 + r_3}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 2 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & -1 & -3 \end{pmatrix}$$

$$\overset{r_1 - 2r_2}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -2 & 2 & 6 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & -1 & -3 \end{pmatrix}.$$

知 $\boldsymbol{A} - \boldsymbol{E} \overset{r}{\sim} \boldsymbol{E}$，故 $\boldsymbol{A} - \boldsymbol{E}$ 可逆，且 $\boldsymbol{X} = (\boldsymbol{A} - \boldsymbol{E})^{-1}\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} -2 & 2 & 6 \\ 2 & 0 & -3 \\ 2 & -1 & -3 \end{pmatrix}$.

§ 2.6 矩阵的秩

微视频 2.6 矩阵的秩
PPT 课件 2.6 矩阵的秩

1. 矩阵的秩的概念

定义2.14 在 $m \times n$ 矩阵 $\boldsymbol{A}$ 中，任取 k 行与 k 列 $(k \le \min\{m, n\})$，位于这些行列交叉处的 k^2 个元素按它们在 $\boldsymbol{A}$ 中原来的位置次序构成的 k 阶行列式，称为矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的一个 k 阶子式.

概念解析:矩阵的秩

显然，$\boldsymbol{A}_{m\times n}$ 的 k 阶子式有 $C_m^k C_n^k$ 个.

定义 2.15 矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的非零子式的最高阶数称为矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的秩，记作 $R(\boldsymbol{A})$. 规定零矩阵的秩是 0.

显然，$R(\boldsymbol{A}) = R(\boldsymbol{A}^T)$.

当 $R(\boldsymbol{A}_{m\times n}) = m$，称矩阵 $\boldsymbol{A}$ 行满秩；当 $R(\boldsymbol{A}_{m\times n}) = n$，称矩阵 $\boldsymbol{A}$ 列满秩.

当 $R(\boldsymbol{A}_{n\times n}) = n$，称 $\boldsymbol{A}$ 为满秩矩阵.

方法总结：具体矩阵求秩的若干方法

2. 初等变换与矩阵的秩

先看一个例子.

例1 设 $\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 7 \\ 1 & 1 & 4 \end{pmatrix}$，$\boldsymbol{B} = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & 7 & 3 \\ 0 & 1 & 4 & -2 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$，求矩阵 $\boldsymbol{A}$ 和 $\boldsymbol{B}$ 的秩.

解 $\boldsymbol{A}$ 中有 2 阶子式 $\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} \neq 0$，3 阶子式只有 $|\boldsymbol{A}|$，经计算可知 $|\boldsymbol{A}| = 0$，因此，$R(\boldsymbol{A}) = 2$.

$\boldsymbol{B}$ 是行阶梯形矩阵，其非零行有 3 行，故 $\boldsymbol{B}$ 的所有 4 阶子式都为 0. 取 3 个非零行的第一个非零元所在的行和列得到的 3 阶子式 $\begin{vmatrix} 2 & -1 & 7 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 2 \neq 0$，因此，$R(\boldsymbol{B}) = 3$.

从这个例子看出，对于行数与列数较高的矩阵，按定义求秩比较麻烦，而行阶梯形矩阵的秩就等于其非零行行数.

定理 2.5 行阶梯形矩阵的秩等于其非零行的行数.

任一矩阵都可经初等行变换化成行阶梯形，那么，矩阵的初等行变换会不会改变矩阵的秩呢？

定理 2.6 矩阵的初等变换不改变矩阵的秩.

证 由于对矩阵作初等列变换相当于对其转置矩阵作初等行变换，而 $R(\boldsymbol{A}) = R(\boldsymbol{A}^T)$，因此，只需证明矩阵经一次初等行变换后秩不变即可.

下面分别就三种初等行变换加以证明.

（1）$r_i \leftrightarrow r_j$：设互换矩阵$\boldsymbol{A}$中某两行得$\boldsymbol{B}$，则$\boldsymbol{B}$中的任一子式或是$\boldsymbol{A}$的子式，或交换两行重新排列是$\boldsymbol{A}$的子式，由行列式的性质知，两者之间只有符号差别，是否为零的性质不会改变．因此，非零子式的最高阶数也不变，即秩不会改变．

（2）$r_i \times k$（$k \neq 0$）：设有非零常数k乘$\boldsymbol{A}$的第i行得$\boldsymbol{C}$，则$\boldsymbol{C}$的子式或是$\boldsymbol{A}$的子式，或是$\boldsymbol{A}$的对应子式的k倍，任一子式是否为零的性质不会改变，因此，秩也不会改变．

（3）$r_i + kr_j$：设$R(\boldsymbol{A}) = r$，把$\boldsymbol{A}$的第j行的k倍加到第i行上去得$\boldsymbol{F}$．设M是$\boldsymbol{F}$的$r+1$阶子式，则有三种可能：

① M不包含$\boldsymbol{F}$中的第i行元素，这时M也是$\boldsymbol{A}$的$r+1$阶子式，故$M=0$；

② M包含$\boldsymbol{F}$中的第i行元素，也包含$\boldsymbol{F}$中的第j行元素，由行列式性质知，$M=0$；

③ M包含$\boldsymbol{F}$中的第i行元素，但不包含$\boldsymbol{F}$中的第j行元素，这时

$$\begin{aligned} M &= \begin{vmatrix} \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{it_1} + ka_{jt_1} & a_{it_2} + ka_{jt_2} & \cdots & a_{it_{r+1}} + ka_{jt_{r+1}} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \end{vmatrix} \\ &= \begin{vmatrix} \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{it_1} & a_{it_2} & \cdots & a_{it_{r+1}} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ ka_{jt_1} & ka_{jt_2} & \cdots & ka_{jt_{r+1}} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \end{vmatrix} \\ &= M_1 + kM_2 \end{aligned}$$

M_1是$\boldsymbol{A}$的一个$r+1$阶子式，故$M_1 = 0$；

M_2经过行重新排列也是$\boldsymbol{A}$的一个$r+1$阶子式，由行列式性质，知$M_2 = 0$，于是$M = 0$.

综上，$\boldsymbol{F}$的$r+1$阶子式全为0，故$R(\boldsymbol{F}) \leq R(\boldsymbol{A})$.

又矩阵的初等变换是可逆的，把$\boldsymbol{F}$的第j行的$-k$倍加到第i行上去得$\boldsymbol{A}$，故又有$R(\boldsymbol{A}) \leq R(\boldsymbol{F})$，故$R(\boldsymbol{A}) = R(\boldsymbol{F})$.

因此，一次初等行变换不改变矩阵的秩．证毕．

定理 2.6 也可叙述为：

定理 $2.6'$　等价的矩阵具有相同的秩．

例 2 求矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&-1&5&-1\\1&1&-2&3\\3&-1&8&1\\1&3&-9&7\end{pmatrix}$ 的秩.

典型例题：求含有参数矩阵的秩

解 $\boldsymbol{A}\overset{\substack{r_2-r_1\\r_3-3r_1}}{\underset{r_4-r_1}{\sim}}\begin{pmatrix}1&-1&5&-1\\0&2&-7&4\\0&2&-7&4\\0&4&-14&8\end{pmatrix}\overset{\substack{r_3-r_2\\r_4-2r_2}}{\sim}\begin{pmatrix}1&-1&5&-1\\0&2&-7&4\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{pmatrix}$,

故 $R(\boldsymbol{A})=2$.

定理 2.7 设 $\boldsymbol{A}$ 是 n 阶方阵，则以下结论等价：

（i） $\boldsymbol{A}$ 可逆；

（ii） $\boldsymbol{A}$ 是满秩矩阵；

（iii） $|\boldsymbol{A}|\neq 0$.

3. 矩阵秩的性质

性质 2.1 $\max\{R(\boldsymbol{A}),R(\boldsymbol{B})\}\le R(\boldsymbol{A},\boldsymbol{B})\le R(\boldsymbol{A})+R(\boldsymbol{B})$.

证 因为 $\boldsymbol{A}$ 、$\boldsymbol{B}$ 的子式都是矩阵 $(\boldsymbol{A},\boldsymbol{B})$ 的子式，所以

$$\max\{R(\boldsymbol{A}),R(\boldsymbol{B})\}\le R(\boldsymbol{A},\boldsymbol{B});$$

$R(\boldsymbol{A},\boldsymbol{B})\le R(\boldsymbol{A})+R(\boldsymbol{B})$ 的证明见 § 3.3 例 4.

性质 2.2 设 $\boldsymbol{A}$ 、$\boldsymbol{B}$ 均为 $m\times n$ 矩阵，则 $R(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})\le R(\boldsymbol{A})+R(\boldsymbol{B})$.

证 因为 $(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B},\boldsymbol{B})\overset{c_i-c_{i+n}}{\underset{i=1,2,\cdots,n}{\sim}}(\boldsymbol{A},\boldsymbol{B})$，故

$$R(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})\le R(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B},\boldsymbol{B})=R(\boldsymbol{A},\boldsymbol{B})\le R(\boldsymbol{A})+R(\boldsymbol{B}).$$

性质 2.3 设 $\boldsymbol{A}$ 为 $m\times n$ 矩阵，$\boldsymbol{B}$ 为 $n\times s$ 矩阵，则 $R(\boldsymbol{AB})\le\min\{R(\boldsymbol{A}),R(\boldsymbol{B})\}$.

证

$$R(\boldsymbol{AB})\le R\begin{pmatrix}\boldsymbol{A}&\boldsymbol{AB}\\\boldsymbol{0}&\boldsymbol{0}\end{pmatrix}=R\begin{pmatrix}\boldsymbol{A}&\boldsymbol{AB}\\\boldsymbol{0}&\boldsymbol{0}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\boldsymbol{E}&\boldsymbol{-B}\\\boldsymbol{0}&\boldsymbol{E}\end{pmatrix}=R\begin{pmatrix}\boldsymbol{A}&\boldsymbol{0}\\\boldsymbol{0}&\boldsymbol{0}\end{pmatrix}=R(\boldsymbol{A}),$$

$$R(\boldsymbol{AB}) \le R\begin{pmatrix} \boldsymbol{0} & \boldsymbol{B} \\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{AB} \end{pmatrix} = R\begin{pmatrix} \boldsymbol{E} & \boldsymbol{0} \\ -\boldsymbol{A} & \boldsymbol{E} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \boldsymbol{0} & \boldsymbol{B} \\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{AB} \end{pmatrix} = R\begin{pmatrix} \boldsymbol{0} & \boldsymbol{B} \\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{0} \end{pmatrix} = R(\boldsymbol{B}),$$

故 $R(\boldsymbol{AB}) \le \min\{R(\boldsymbol{A}), R(\boldsymbol{B})\}$.

性质 2.4 设 $\boldsymbol{A}$ 为 $m\times n$ 矩阵，$\boldsymbol{P},\boldsymbol{Q}$ 分别为 m 阶和 n 阶可逆矩阵, 则 $R(\boldsymbol{A}) = R(\boldsymbol{PAQ})$.

性质 2.5 设 $\boldsymbol{A}$ 为 $m\times n$ 矩阵，$\boldsymbol{B}$ 为 $n\times s$ 矩阵, 若 $\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{O}$, 则 $R(\boldsymbol{A})+R(\boldsymbol{B}) \le n$.

证明见 § 4.1.

例 3 设 $\boldsymbol{\alpha}$, $\boldsymbol{\beta}$ 都是 n 维非零列矩阵, 证明: $R(\boldsymbol{\alpha\beta}^T)=1$.

证 由题意知 $\boldsymbol{\alpha\beta}^T \ne \boldsymbol{O}$, 故 $R(\boldsymbol{\alpha\beta}^T)\ge 1$, 又 $R(\boldsymbol{\alpha\beta}^T) \le R(\boldsymbol{\alpha}) \le 1$, 所以 $R(\boldsymbol{\alpha\beta}^T)=1$.

例 4 设 $\boldsymbol{A}$ 为 n 阶方阵, 且 $\boldsymbol{A}^2=\boldsymbol{A}$, 证明: $R(\boldsymbol{A})+R(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{E})=n$.

证 已知 $\boldsymbol{A}^2=\boldsymbol{A}$, 即 $\boldsymbol{A}(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{E})=\boldsymbol{O}$. 由上题知, $R(\boldsymbol{A})+R(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{E})\le n$，又

$$R(\boldsymbol{A})+R(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{E}) = R(\boldsymbol{A})+R(\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})) \ge R(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}) = n,$$

所以 $R(\boldsymbol{A})+R(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{E})=n$.

例 5 设 $\boldsymbol{A}^*$ 是 n 阶方阵 $\boldsymbol{A}$ 的伴随矩阵，证明

$$R(\boldsymbol{A}^*) = \begin{cases} n, & R(\boldsymbol{A})=n, \\ 1, & R(\boldsymbol{A})=n-1, \\ 0, & R(\boldsymbol{A})<n-1. \end{cases}$$

方法总结：涉及抽象矩阵秩相关问题及方法

证（1）当 $R(\boldsymbol{A})=n$ 时，$\boldsymbol{A}$ 可逆，有 $|\boldsymbol{A}|\ne 0$. 由 $\boldsymbol{AA}^*=|\boldsymbol{A}|\boldsymbol{E}$ 知，$\boldsymbol{A}^*$ 也可逆，故 $R(\boldsymbol{A}^*)=n$；

（2）当 $R(\boldsymbol{A})=n-1$ 时，$|\boldsymbol{A}|=0$，有 $\boldsymbol{AA}^*=\boldsymbol{O}$，故 $R(\boldsymbol{A})+R(\boldsymbol{A}^*)\le n$，$R(\boldsymbol{A}^*)\le 1$；因 $R(\boldsymbol{A})=n-1$，故 $\boldsymbol{A}$ 中至少有一个 $n-1$ 阶子式不为零, 知 $\boldsymbol{A}^*\ne\boldsymbol{O}$，$R(\boldsymbol{A}^*)\ge 1$，从而 $R(\boldsymbol{A}^*)=1$；

（3）当 $R(\boldsymbol{A})<n-1$ 时，$\boldsymbol{A}$ 中所有 $n-1$ 阶子式全为零，故 $\boldsymbol{A}^*=\boldsymbol{O}$，即 $R(\boldsymbol{A}^*)=0$.

§ 2.7　应用实例

1.　密码问题

矩阵密码法是信息编码与解码的技巧,其中的一种是基于利用可逆矩阵的方法.先在26个英文字母与数字间建立起一一对应，例如可以是

$$\begin{array}{ccccc} A & B & \cdots & Y & Z \\ \updownarrow & \updownarrow & \cdots & \updownarrow & \updownarrow \\ 1 & 2 & \cdots & 25 & 26 \end{array}.$$

若要发出信息“$SEND\ \ MONEY$”，使用上述代码，则此信息的编码是19，5，14，4，13，15，14，5，25，其中5表示字母E．不幸的是，这种编码很容易被别人破译．在一个较长的信息编码中，人们会根据那个出现频率最高的数值而猜出它代表的是哪个字母，比如上述编码中出现最多次的数值时5，人们自然会想到它代表的是字母E，因为统计规律告诉我们，字母E是英文单词中出现频率最高的．

我们可以利用矩阵乘法来对“明文”$SEND\ \ MONEY$进行加密，将其变成“密文”后再传送，增加非法用户破译的难度，而让合法用户轻松解密．如果一个矩阵$\boldsymbol{A}$的元素均为整数，且其行列式$|\boldsymbol{A}|=\pm1$，那么由$\boldsymbol{A}^{-1}=\dfrac{\boldsymbol{A}^*}{|\boldsymbol{A}|}$可知，$\boldsymbol{A}^{-1}$的元素均为整数．我们可以利用这样的矩阵$\boldsymbol{A}$来对明文加密，使加密之后的密文很难破译．现在取

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 5 & 3 \\ 2 & 3 & 2 \end{pmatrix},$$

明文“$SEND\ \ MONEY$”对应的9个数值按3列被排成以下矩阵

$$\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix} 19 & 4 & 14 \\ 5 & 13 & 5 \\ 14 & 15 & 25 \end{pmatrix},$$

矩阵乘积

$$\boldsymbol{AB}=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 5 & 3 \\ 2 & 3 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 19 & 4 & 14 \\ 5 & 13 & 5 \\ 14 & 15 & 25 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 43 & 45 & 49 \\ 105 & 118 & 128 \\ 81 & 77 & 93 \end{pmatrix},$$

对应着将发出去的密文编码：

43，105，81，45，118，77，49，128，93，

合法用户用 $\boldsymbol{A}^{-1}$ 去左乘上述矩阵即可解密得到明文：

$$\boldsymbol{A}^{-1}\begin{pmatrix}43 & 45 & 49\\105 & 118 & 128\\81 & 77 & 93\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & -1 & 1\\2 & 0 & -1\\-4 & 1 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}43 & 45 & 49\\105 & 118 & 128\\81 & 77 & 93\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}19 & 4 & 14\\5 & 13 & 5\\14 & 15 & 25\end{pmatrix}.$$

为了构造“密钥”矩阵 $\boldsymbol{A}$，我们可以从单位阵 $\boldsymbol{E}$ 开始，有限次地使用第三类初等行变换，而且只用某行的整数倍加到另一行，当然，第一类初等行变换也能使用. 这样得到的矩阵 $\boldsymbol{A}$，其元素均为整数，而且由 $|\boldsymbol{A}|=\pm 1$ 可知，$\boldsymbol{A}^{-1}$ 的元素必然均为整数.

2. 动物繁殖问题

某农场饲养的某种动物所能达到的最大年龄为15岁，将其分成三个年龄组：第一组，0～5岁；第二组，6～10岁；第三组，11～15岁. 动物从第二年龄组起开始繁殖后代，经过长期统计，第二组和第三组的繁殖率分别为4和3. 第一年龄和第二年龄组的动物能顺利进入下一个年龄组的存活率分别为 $\frac{1}{2}$ 和 $\frac{1}{4}$. 假设农场现有三个年龄段的动物各100头，问15年后农场三个年龄段的动物各有多少头？

解 因年龄分组为5岁一段，故将时间周期也取为5年. 15年后就经过了3个时间周期. 设 $x_i^{(k)}$ 表示第 k 个时间周期的第 i 组年龄阶段动物的数量（$k=1,2,3$；$i=1,2,3$）. 因为某一时间周期第二年龄组和第三年龄组动物的数量是由上一时间周期上一年龄组存活下来动物的数量，所以有

$$x_2^{(k)}=\frac{1}{2}x_1^{(k-1)},\quad x_3^{(k)}=\frac{1}{4}x_2^{(k-1)},\quad k=1,2,3.$$

又因为某一时间周期，第一年龄组动物的数量是上一时间周期各年龄组出生的动物的数量，所以有

$$x_1^{(k)}=4x_2^{(k-1)}+3x_3^{(k-1)},\quad k=1,2,3,$$

于是得到递推关系式：

$$\begin{cases}x_1^{(k)}=4x_2^{(k-1)}+3x_3^{(k-1)}\\ x_2^{(k)}=\frac{1}{2}x_1^{(k-1)}\\ x_3^{(k)}=\frac{1}{4}x_2^{(k-1)}\end{cases},$$

用矩阵表示为

$$\begin{pmatrix} x_1^{(k)} \\ x_2^{(k)} \\ x_3^{(k)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 4 & 3 \\ \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{4} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1^{(k-1)} \\ x_2^{(k-1)} \\ x_3^{(k-1)} \end{pmatrix}, \quad k = 1, 2, 3,$$

或记为 $\boldsymbol{x}^{(k)} = \boldsymbol{L}\boldsymbol{x}^{(k-1)}$，$k = 1, 2, 3$，其中

$$\boldsymbol{L} = \begin{pmatrix} 0 & 4 & 3 \\ \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{4} & 0 \end{pmatrix}, \ \boldsymbol{x}^{(k)} = \begin{pmatrix} x_1^{(k)} \\ x_2^{(k)} \\ x_3^{(k)} \end{pmatrix}, \ \boldsymbol{x}^{(0)} = \begin{pmatrix} 1000 \\ 1000 \\ 1000 \end{pmatrix},$$

则有

$$\boldsymbol{x}^{(1)} = \boldsymbol{L}\boldsymbol{x}^{(0)} = \begin{pmatrix} 0 & 4 & 3 \\ \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{4} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1000 \\ 1000 \\ 1000 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7000 \\ 500 \\ 250 \end{pmatrix},$$

$$\boldsymbol{x}^{(2)} = \boldsymbol{L}\boldsymbol{x}^{(1)} = \begin{pmatrix} 0 & 4 & 3 \\ \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{4} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 7000 \\ 500 \\ 250 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2750 \\ 3500 \\ 125 \end{pmatrix},$$

$$\boldsymbol{x}^{(3)} = \boldsymbol{L}\boldsymbol{x}^{(2)} = \begin{pmatrix} 0 & 4 & 3 \\ \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{4} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2750 \\ 3500 \\ 125 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 14375 \\ 1375 \\ 875 \end{pmatrix}.$$

因此，15年后，农场饲养的动物总数将达到16625头，其中0～5岁的有14375头，占86.47%，6～10岁的有1375头，占8.27%，11～15岁的有875头，占5.26%．15年间，动物总增长 $16625-3000=13625$ 头，总增长率为 $13625/3000 = 454.17\%$.

同时，要知道很多年以后的情况，可通过分析式子 $\boldsymbol{x}^{(k)} = \boldsymbol{L}\boldsymbol{x}^{(k-1)} = \cdots = \boldsymbol{L}^k\boldsymbol{x}^{(0)}$ 中当

$k \to \infty$ 时的极限状况得到.

3. 企业投入产出模型

某地区有三个重要产业，一个煤矿、一个发电厂和一条地方铁路. 开采一元钱的煤，煤矿要支付 0.25 元的电费及 0.25 元的运输费. 生产一元钱的电力，发电厂要支付 0.65 元的煤费，0.05 元的电费及 0.05 元的运输费. 创收一元钱的运输费, 铁路要支付 0.55 元的煤费及 0.10 元的电费. 在某一周内，煤矿接到外地金额为 50000 元的定货，发电厂接到外地金额为 25000 元的定货，外界对地方铁路没有需求, 问三个企业在这一周内总产值多少才能满足自身及外界的需求？

解 假设 x_1 为煤矿本周内的总产值，x_2 为电厂本周的总产值, x_3 为铁路本周内的总产值，则

$$\begin{cases} x_1 - (0 \times x_1 + 0.65x_2 + 0.55x_3) = 50000 \\ x_2 - (0.25x_1 + 0.05x_2 + 0.10x_3) = 25000 \\ x_3 - (0.25x_1 + 0.05x_2 + 0 \times x_3) = 0 \end{cases}, \tag{2.9}$$

即

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 0.65 & 0.55 \\ 0.25 & 0.05 & 0.10 \\ 0.25 & 0.05 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 50000 \\ 25000 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

令

$$\boldsymbol{X} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}, \boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 0 & 0.65 & 0.55 \\ 0.25 & 0.05 & 0.10 \\ 0.25 & 0.05 & 0 \end{pmatrix}, \boldsymbol{Y} = \begin{pmatrix} 50000 \\ 25000 \\ 0 \end{pmatrix},$$

矩阵 $\boldsymbol{A}$ 称为直接消耗矩阵，$\boldsymbol{X}$ 称为产出向量，$\boldsymbol{Y}$ 称为需求向量，则方程组(2.9)为

$$\boldsymbol{X} - \boldsymbol{AX} = \boldsymbol{Y},$$

即

$$(\boldsymbol{E} - \boldsymbol{A})\boldsymbol{X} = \boldsymbol{Y}, \tag{2.10}$$

其中矩阵 $\boldsymbol{E}$ 为单位矩阵，$\boldsymbol{E} - \boldsymbol{A}$ 称为列昂惕夫矩阵，列昂惕夫矩阵为可逆矩阵.

投入产出分析表 设 $\boldsymbol{B} = (\boldsymbol{E} - \boldsymbol{A})^{-1} - \boldsymbol{E}$, $\boldsymbol{C} = \boldsymbol{A}\begin{pmatrix} x_1 & 0 & 0 \\ 0 & x_2 & 0 \\ 0 & 0 & x_3 \end{pmatrix}$，$\boldsymbol{K} = (1\ 1\ 1)\boldsymbol{C}$. $\boldsymbol{B}$ 称为完全消耗矩阵, 它与矩阵 $\boldsymbol{A}$ 一起在各个部门之间的投入产生中起平衡作用, 矩阵 $\boldsymbol{C}$ 可以称

为投入产出矩阵，它的元素表示煤矿、电厂、铁路之间的投入产出关系. 矩阵 $\boldsymbol{K}$ 称为总投入向量，它的元素是矩阵 $\boldsymbol{C}$ 的对应列元素之和，分别表示煤矿、电厂、铁路得到的总投入.

由矩阵 $\boldsymbol{C}$， $\boldsymbol{K}$, 向量 $\boldsymbol{Y}$ 和 $\boldsymbol{X}$，可得投入产出分析表 2.2 .

表 2.2 投入产出分析表　　　单位：元

	煤矿	电厂	铁路	外界需求	总产出
煤矿	c_{11}	c_{12}	c_{13}	y_1	x_1
电厂	c_{21}	c_{22}	c_{23}	y_2	x_2
铁路	c_{31}	c_{32}	c_{33}	y_3	x_3
总投入	d_1	d_2	d_3		

计算求解　按 (2.10) 式解矩阵方程可得产出向量 $\boldsymbol{X}$，于是可计算矩阵 $\boldsymbol{C}$ 和 $\boldsymbol{K}$，计算结果如表 2.3.

表 2.3 投入产出计算结果　　　单位：元

	煤矿	电厂	铁路	外界需求	总产出
煤矿	0	36505.96	15581.51	50000	102087.48
电厂	25521.87	2808.15	2833.00	25000	56163.02
铁路	25521.87	2808.15	0	0	28330.02
总投入	51043.74	42122.27	18414.52		

§ 2.8　用 Matlab 作矩阵运算

例 1　已知矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} 4 & -1 & 3 \\ -2 & 1 & 2 \\ 3 & -1 & 0 \end{pmatrix}$，计算 $\boldsymbol{G}=\boldsymbol{A}^{-1}$.

解：Matlab 命令为

```
>> A=[4 -1 3;-2 1 2;3 -1 0];
>> G=inv(A)
```

运行结果：

```
G =

    -2     3     5
```

```
   -6      9     14
    1     -1     -2
```

例 2 求矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}3 & 2 & -1 & -3 & -1\\ 2 & -1 & 3 & 1 & -3\\ 7 & 0 & 5 & -1 & -8\end{pmatrix}$ 的秩.

解：Matlab 命令为

```
>> A=[3 2 -1 -3 -1;2 -1 3 1 -3;7 0 5 -1 -8];
>> r=rank(A)
```

运行结果：

```
r =

     3
```

背景资料 -------- 矩阵

矩阵(matrix)是数学中的一个重要的基本概念，是代数学的一个主要研究对象，也是数学研究和应用的一个重要工具．“矩阵”（该词来源于拉丁语，表示一排数的意思）这一术语是英格兰数学家西尔维斯特(J. J. Sylvester, 1814—1897)在 1850 年首先使用的，他是为了将数字的矩形阵列区别于行列式而发明了这个术语．由于西尔维斯特是犹太人，故他在取得剑桥大学数学荣誉会考第二名的优异成绩时，仍被禁止在剑桥大学任教． 从 1841 年起他接受过一些较低的教授职位，也担任过书记官和律师．经过一些年的努力，他终于成为霍布金斯大学的教授，并于 1884 年 70 岁时重返英格兰成为牛津大学的教授.他开创了美国纯数学研究,并创办了《美国数学杂志》.在长达 50 多年的时间内，他是行列式和矩阵论始终不渝的作者之一.

实际上，矩阵这个课题在诞生之前就已经发展得很好了．从行列式的大量工作中明显地表现出来，为了很多目的，不管行列式的值是否与问题有关，方阵本身都可以研究和使用，矩阵的许多基本性质也是在行列式的发展中建立起来的．在逻辑上，矩阵的概念应先于行列式的概念，然而在历史上次序正好相反.

矩阵作为线性方程组系数的排列形式可以追溯到古代（我国《九章算术》一书中已有类似形式）．在 18 世纪，这种排列式在线性方程组和行列式计算中应用日广．最早利用矩阵概念的属意大利数学家拉格朗日(J. L. Lagrange, 1736—1813，后移居法国），这一工作在其双线性型研究中得到体现.

从 19 世纪 50 年代开始，英国数学家凯莱和西尔维斯特进一步发展了矩阵理论，且把矩阵作为极为重要的研究工具．凯莱一般被公认为是矩阵论的创立者，因为他首先把矩阵作为一个独立的数学概念提出来，并首先发表了关于这个题目的一系列文章．1858 年，他发表了关于这一课题的第一篇论文《矩阵论的研究报告》，系统地阐述了关于矩阵的理论，文中他给出了现在通用的一系列定义，如两个矩阵的相等、零矩阵、单位矩阵、两个矩阵的和、一个数与一个矩阵的数量积、两个矩阵的积、矩阵的逆矩阵、转置矩阵等．凯莱注意到矩阵乘法是可结合的，但一般不可交换．凯莱出生于一个古老而有才能的英国家庭，剑桥大学三一学院大学毕业后留校讲授数学，3 年后他转从律师职业，工作卓有成效，并利用业余时间研究数学，发表了大量的数学论文．

矩阵由最初作为一种工具经过两个多世纪的发展，现在已成为独立的一门数学分支--矩阵论．而矩阵论又可分为矩阵方程论、矩阵分解论和广义逆矩阵论等矩阵的现代理论．矩阵及其理论现已应用于自然科学、工程技术、社会科学等许多领域．如在观测、导航、机器人的位移、化学分子结构的稳定性分析、密码通讯、模糊识别、计算机层析及 X 射线照相术等方面都有广泛的应用．随着现代数字计算机的飞速发展和广泛应用，许多实际问题可以通过离散化的数值计算得到定量的解决．于是作为处理离散问题的线性代数和矩阵计算，成为从事科学研究和工程设计的科技人员必备的数学基础．

习题二

自测题二

习题二解答

综合与提高题

一、选择题

1．设 $\boldsymbol{A}$、$\boldsymbol{B}$、$\boldsymbol{C}$ 均为 n 阶方阵， $\boldsymbol{E}$ 为 n 阶单位阵，若 $\boldsymbol{B}=\boldsymbol{E}+\boldsymbol{AB}, \boldsymbol{C}=\boldsymbol{A}+\boldsymbol{CA}$，则 $\boldsymbol{B}-\boldsymbol{C}$ 为（ ）．

(A) $\boldsymbol{E}$　　(B) $-\boldsymbol{E}$　　(C) $\boldsymbol{A}$　　(D) $-\boldsymbol{A}$．

2．设 $\boldsymbol{A}^*$、$\boldsymbol{B}^*$ 分别为 n 阶方阵 $\boldsymbol{A}$、$\boldsymbol{B}$ 的伴随矩阵，分块矩阵 $\boldsymbol{C}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{A} & \boldsymbol{O}\\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{B}\end{pmatrix}$，则 $\boldsymbol{C}$ 的伴

随矩阵$\boldsymbol{C}^*=$（ ）.

$(A)\ \begin{pmatrix} |\boldsymbol{A}|\boldsymbol{A}^* & \boldsymbol{O} \\ \boldsymbol{O} & |\boldsymbol{B}|\boldsymbol{B}^* \end{pmatrix}$　　$(B)\ \begin{pmatrix} |\boldsymbol{B}|\boldsymbol{B}^* & \boldsymbol{O} \\ \boldsymbol{O} & |\boldsymbol{A}|\boldsymbol{A}^* \end{pmatrix}$

$(C)\ \begin{pmatrix} |\boldsymbol{A}|\boldsymbol{B}^* & \boldsymbol{O} \\ \boldsymbol{O} & |\boldsymbol{B}|\boldsymbol{A}^* \end{pmatrix}$　　$(D)\ \begin{pmatrix} |\boldsymbol{B}|\boldsymbol{A}^* & \boldsymbol{O} \\ \boldsymbol{O} & |\boldsymbol{A}|\boldsymbol{B}^* \end{pmatrix}$.

3．设n阶方阵$\boldsymbol{A}$、$\boldsymbol{B}$等价，则必有（ ）.

(A) 当$|\boldsymbol{A}|=a\neq 0$时，$|\boldsymbol{B}|=a$　　(B) 当$|\boldsymbol{A}|=a\neq 0$时，$|\boldsymbol{B}|=-a$

(C) 当$|\boldsymbol{A}|\neq 0$时，$|\boldsymbol{B}|=0$　　(D) 当$|\boldsymbol{A}|=0$时，$|\boldsymbol{B}|=0$.

4．设$\boldsymbol{A}$、$\boldsymbol{B}$、$\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}$、$\boldsymbol{A}^{-1}+\boldsymbol{B}^{-1}$均为$n$阶可逆矩阵，则$\left(\boldsymbol{A}^{-1}+\boldsymbol{B}^{-1}\right)^{-1}$等于（ ）.

(A) $\boldsymbol{A}^{-1}+\boldsymbol{B}^{-1}$　(B) $\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}$　(C) $\boldsymbol{A}\left(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}\right)^{-1}\boldsymbol{B}$　(D) $\left(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}\right)^{-1}$.

5．设n阶方阵$\boldsymbol{A}$可逆（$n\geq 2$），$\boldsymbol{A}^*$是$\boldsymbol{A}$的伴随阵，则（ ）.

(A) $\left(\boldsymbol{A}^*\right)^*=|\boldsymbol{A}|^{n-1}\boldsymbol{A}$　　(B) $\left(\boldsymbol{A}^*\right)^*=|\boldsymbol{A}|^{n+1}\boldsymbol{A}$

(C) $\left(\boldsymbol{A}^*\right)^*=|\boldsymbol{A}|^{n-2}\boldsymbol{A}$　　(D) $\left(\boldsymbol{A}^*\right)^*=|\boldsymbol{A}|^{n+2}\boldsymbol{A}$.

二、填空题

1．设$\boldsymbol{\alpha}_1$、$\boldsymbol{\alpha}_2$、$\boldsymbol{\alpha}_3$均为3维列向量，记矩阵

$$\boldsymbol{A}=\left(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3\right),\quad \boldsymbol{B}=\left(\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_1+2\boldsymbol{\alpha}_2+4\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_1+3\boldsymbol{\alpha}_2+9\boldsymbol{\alpha}_3\right),$$

如果$|\boldsymbol{A}|=1$，那么$|\boldsymbol{B}|=$_____.

2．设$\boldsymbol{A}$、$\boldsymbol{B}$均为n阶方阵，$|\boldsymbol{A}|=2$，$|\boldsymbol{B}|=-3$，则$\left|2\boldsymbol{A}^*\boldsymbol{B}^{-1}\right|=$_______.

3．设$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} 5 & 2 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$，则$\boldsymbol{A}^{-1}=$_____.

4．设矩阵$\boldsymbol{A}$满足$\boldsymbol{A}^2+\boldsymbol{A}-4\boldsymbol{E}=\boldsymbol{O}$，其中$\boldsymbol{E}$为单位阵，则$\left(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{E}\right)^{-1}=$_____.

5．设三阶方阵 $\boldsymbol{A}$、$\boldsymbol{B}$ 满足关系式 $\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{BA}=6\boldsymbol{A}+\boldsymbol{BA}$，且 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}\frac{1}{3}&0&0\\0&\frac{1}{4}&0\\0&0&\frac{1}{7}\end{pmatrix}$，则 $\boldsymbol{B}=$ ________.

6．设 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&0&0&0\\-2&3&0&0\\0&-4&5&0\\0&0&-6&7\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{E}$ 为四阶单位阵，且 $\boldsymbol{B}=(\boldsymbol{E}+\boldsymbol{A})^{-1}(\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})$，则 $(\boldsymbol{E}+\boldsymbol{B})^{-1}=$_____.

7．设四阶方阵 $\boldsymbol{A}$ 的秩为 2，则其伴随矩阵 $\boldsymbol{A}^*$ 的秩为_____.

8．设 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}a_1b_1&a_1b_2&\cdots&a_1b_n\\a_2b_1&a_2b_2&\cdots&a_2b_n\\\vdots&\vdots&\vdots&\vdots\\a_nb_1&a_nb_2&\cdots&a_nb_n\end{pmatrix}$，其中 $a_i\neq 0$，$b_i\neq 0$，$i=1,2,\cdots,n$，则 $R(\boldsymbol{A})=$ ____.

9．设 $\boldsymbol{A}$ 是 4×3 矩阵，且 $R(\boldsymbol{A})=2$，而 $\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}1&0&2\\0&2&0\\-1&0&3\end{pmatrix}$，则 $R(\boldsymbol{AB})=$____.

10．设 $\boldsymbol{\alpha}=(1,0,-1)^T$，$\boldsymbol{A}=\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\alpha}^T$，$n$ 为正整数，则 $\left|a\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}^n\right|=$____.

三、计算证明题

1．设 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&1&1\\1&1&-1\\1&-1&1\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}1&2&3\\-1&-2&4\\0&5&1\end{pmatrix}$，求 $3\boldsymbol{AB}-2\boldsymbol{A}$ 及 $\boldsymbol{A}^T\boldsymbol{B}$．

2．计算下列乘积：

（1）$\begin{pmatrix}4&3&1\\1&-2&3\\5&7&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}7\\2\\1\end{pmatrix}$；（2）$\begin{pmatrix}1&2&3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}3\\2\\1\end{pmatrix}$；

（3）$\begin{pmatrix}2\\1\\3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-1 & 2\end{pmatrix}$；（4）$\begin{pmatrix}2 & 1 & 4 & 0\\1 & -1 & 3 & 4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 3 & 1\\0 & -1 & 2\\1 & -3 & 1\\4 & 0 & -2\end{pmatrix}$；

（5）$\begin{pmatrix}x_1 & x_2 & x_3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a_{11} & a_{12} & a_{13}\\a_{12} & a_{22} & a_{23}\\a_{13} & a_{23} & a_{33}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}$；

（6）$\begin{pmatrix}1 & 2 & 1 & 0\\0 & 1 & 0 & 1\\0 & 0 & 2 & 1\\0 & 0 & 0 & 3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 0 & 3 & 1\\0 & 1 & 2 & -1\\0 & 0 & -2 & 3\\0 & 0 & 0 & -3\end{pmatrix}$.

3．计算下列矩阵，其中n为正整数：

（1）$\begin{pmatrix}1 & 1\\0 & 0\end{pmatrix}^n$；（2）$\begin{pmatrix}1 & 0\\\lambda & 1\end{pmatrix}^n$；（3）$\begin{pmatrix}a & 0 & 0\\0 & b & 0\\0 & 0 & c\end{pmatrix}^n$.

4．设$\boldsymbol{A}$、$\boldsymbol{B}$为n阶方阵，且$\boldsymbol{A}$为对称阵，证明$\boldsymbol{B}^T\boldsymbol{AB}$也是对称阵.

5．设$\boldsymbol{A}$、$\boldsymbol{B}$都是n阶对称阵，证明$\boldsymbol{AB}$是对称阵的充分必要条件是$\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{BA}$.

6．求下列矩阵的逆矩阵：

（1）$\begin{pmatrix}3 & 4\\2 & 5\end{pmatrix}$；（2）$\begin{pmatrix}\cos\theta & -\sin\theta\\\sin\theta & \cos\theta\end{pmatrix}$；

（3）$\begin{pmatrix}5 & 2 & 0 & 0\\2 & 1 & 0 & 0\\0 & 0 & 8 & 3\\0 & 0 & 5 & 2\end{pmatrix}$；（4）$\begin{pmatrix}a_1 & & & \\ & a_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & a_n\end{pmatrix}$，$(a_1a_2\cdots a_n\neq 0)$.

7．解下列矩阵方程：

（1）$\begin{pmatrix}2 & 5\\1 & 3\end{pmatrix}\boldsymbol{X}=\begin{pmatrix}4 & -6\\2 & 1\end{pmatrix}$；（2）$\boldsymbol{X}\begin{pmatrix}2 & 1 & -1\\2 & 1 & 0\\1 & -1 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & -1 & 3\\4 & 3 & 2\end{pmatrix}$；

（3）$\begin{pmatrix}1 & 4\\-1 & 2\end{pmatrix}\boldsymbol{X}\begin{pmatrix}2 & 0\\-1 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3 & 1\\0 & -1\end{pmatrix}$；

（4）$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \boldsymbol{X} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -4 & 3 \\ 2 & 0 & -1 \\ 1 & -2 & 0 \end{pmatrix}$.

8．设 $\boldsymbol{AP} = \boldsymbol{P\Lambda}$，其中 $\boldsymbol{P} = \begin{pmatrix} -1 & -4 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$，$\boldsymbol{\Lambda} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$，求 $\boldsymbol{A}^{12}$.

9．把下列矩阵化为行最简形矩阵：

（1）$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & -1 \\ 2 & 0 & 3 & 1 \\ 3 & 0 & 4 & 3 \end{pmatrix}$；（2）$\begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 & -3 & -7 \\ 1 & 2 & 0 & -2 & -4 \\ 3 & -2 & 8 & 3 & 0 \\ 2 & -3 & 7 & 4 & 3 \end{pmatrix}$.

10．求下列矩阵的标准形：

（1）$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 & 1 \\ 1 & 3 & 2 & 5 \\ 2 & 2 & 6 & 7 \\ 2 & 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}$；（2）$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 2 & 1 \\ 3 & 4 & 3 \end{pmatrix}$.

11．从矩阵 $\boldsymbol{A}$ 中划去一行得到矩阵 $\boldsymbol{B}$，问 $\boldsymbol{A}$、$\boldsymbol{B}$ 的秩的关系怎样？

12．求下列矩阵的秩：

（1）$\begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 2 & -1 \\ 1 & 3 & -4 & 4 \end{pmatrix}$；（2）$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & 1 & 0 \\ 2 & -2 & 4 & -2 & 4 \\ 3 & 0 & 6 & -1 & 1 \\ 0 & 3 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

13．设 $\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3k \\ -1 & 2k & -3 \\ k & -2 & 3 \end{pmatrix}$，问 k 为何值时，可使（1）$R(\boldsymbol{A}) = 1$；（2）$R(\boldsymbol{A}) = 2$；（3）$R(\boldsymbol{A}) = 3$？

14．设 $\boldsymbol{A}$ 是 n 阶可逆阵，将 $\boldsymbol{A}$ 的第 i 行与第 j 行对换后得到 $\boldsymbol{B}$.（1）证明矩阵 $\boldsymbol{B}$ 可逆；（2）求 $\boldsymbol{AB}^{-1}$.

15．利用矩阵的初等变换，求下列方阵的逆矩阵：

（1）$\begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 5 \\ 3 & 2 & 3 \end{pmatrix}$；（2）$\begin{pmatrix} 3 & -2 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 2 & 1 \\ 1 & -2 & -3 & -2 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$.

16．（1）设 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}4&1&-2\\2&2&1\\3&1&-1\end{pmatrix},\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}1&-3\\2&2\\3&-1\end{pmatrix}$，求 $\boldsymbol{X}$ 使 $\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{B}$；

（2）设 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}0&2&1\\2&-1&3\\-3&3&-4\end{pmatrix},\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}1&2&3\\2&-3&1\end{pmatrix}$，求 $\boldsymbol{X}$ 使 $\boldsymbol{XA}=\boldsymbol{B}$.