课外练习题 4

1. 设 3 阶矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的秩 $R(\boldsymbol{A})=1$，$\boldsymbol{\eta}_1=(-1,3,0)^T$，$\boldsymbol{\eta}_2=(2,-1,1)^T$，$\boldsymbol{\eta}_3=(5,0,k)^T$ 是方程组 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$ 的 3 个解向量，则常数 $k=$______.

2．若齐次线性方程组 $\begin{cases}\lambda x_1+x_2+x_3=0,\\ x_1+\lambda x_2+x_3=0,\\ x_1+x_2+\lambda x_3=0\end{cases}$ $(\lambda\neq 1)$ 有非零解，则 $\lambda=$__________.

3．设齐次线性方程组 $\begin{cases}x_1+kx_2+x_3=0,\\ 2x_1+x_2+x_3=0,\\ kx_2+3x_3=0\end{cases}$ 只有零解，则 k 应满足条件_______.

4．已知四元非齐次线性方程组 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$ 中，$R(\boldsymbol{A})=3$．而 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 为它的三个解向量，且 $\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2=(1,1,0,2)^T,\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_3=(1,0,1,3)^T$，则 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$ 的通解为________________.

5．设 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_{n-1}$ 为 n 阶方阵 $\boldsymbol{A}$ 的列向量组的极大无关组，$\boldsymbol{A}^*$ 为 $\boldsymbol{A}$ 的伴随矩阵，则线性方程组 $\boldsymbol{A}^*\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ 的通解为_________________________.

6． $\boldsymbol{A}$ 为 2×3 阶矩阵，$R(\boldsymbol{A})=2$，已知非齐次线性方程组 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$ 有解 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2$，且 $\boldsymbol{\alpha}_1=\begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix},\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2=\begin{pmatrix}1\\-1\\1\end{pmatrix}$，则对应齐次方程组 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$ 通解为__________________.

7．设 $\boldsymbol{A}$ 是 4×5 矩阵，$\boldsymbol{B}$ 是 5×4 矩阵，且 $R(\boldsymbol{A})=2$，$\boldsymbol{B}$ 的列向量都是 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$ 的解，则 $\max\limits_{\boldsymbol{B}}\{R(\boldsymbol{B})\}=$_______.

8．设 $\boldsymbol{\eta}_1,\boldsymbol{\eta}_2$ 是四元线性非齐次方程组 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$ 的两个不同的解，$R(\boldsymbol{A})=3$，则 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$ 的通解为 $\boldsymbol{x}=$________________.

9．设 $\boldsymbol{A}=(a_{i\times j})_{3\times 3}$ 是实正交矩阵，且 $a_{11}=1$，$\boldsymbol{b}=(1,0,0)^{\boldsymbol{T}}$，则线性方程组 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$ 的解是__________.

10.设 $\boldsymbol{\eta}_1,\boldsymbol{\eta}_2$ 为非齐次线性方程组 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$ 的两个特解，a,b 为实数，若 $a\boldsymbol{\eta}_1-b\boldsymbol{\eta}_2$ 为对应齐次线性方程组 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$ 的解，而 $a\boldsymbol{\eta}_1+b\boldsymbol{\eta}_2$ 仍为非齐次方程组 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$ 的解，则 $2a+4b=$__________________.

11. 设向量组［Ⅰ］是向量组［Ⅱ］的线性无关的部分向量组，则（　　　）.

（A）向量组[Ⅰ]是[Ⅱ]的极大线性无关组

（B）向量组[Ⅰ]与[Ⅱ]的秩相等

（C）当[Ⅰ]中向量均可由[Ⅱ]线性表示时，向量组[Ⅰ]，[Ⅱ]等价

（D）当[Ⅱ]中向量均可由[Ⅰ]线性表示时，向量组[Ⅰ]，[Ⅱ]等价

12．设n阶矩阵$\boldsymbol{A}$的伴随矩阵$\boldsymbol{A}^* \neq \boldsymbol{O}$，若$\boldsymbol{\alpha_1},\boldsymbol{\alpha_2},\boldsymbol{\alpha_3},\boldsymbol{\alpha_4}$是非齐次线性方程组$\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$的互不相等的解，则对应的齐次线性方程组$\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$的基础解系(　　).

（A）不存在.　　（B）仅含有一个非零解向量.

（C）含有两个线性无关的解向量.　　（D）含有三个线性无关的解向量.

13.设$\boldsymbol{A}$为正交矩阵，且$|\boldsymbol{A}|=-1$，则必有$\boldsymbol{A}^*$=（　　）.

（A）$\boldsymbol{A}^T$　　（B）$-\boldsymbol{A}^T$　　（C）$\boldsymbol{A}$　　（D）$-\boldsymbol{A}$

14．设$\boldsymbol{A}$为$m\times n$矩阵，则下述命题正确的是（　　）.

（A）若$\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$只有零解，则$\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$有唯一解

（B）$\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$有非零解的充要条件是$|\boldsymbol{A}|=0$

（C）$\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$有唯一解的充要条件是$R(\boldsymbol{A})=n$

（D）若$\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$有两个不同的解，则$\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$有非零解

15. 设$\boldsymbol{A}$为n阶矩阵，且$|\boldsymbol{A}|=0$，则（　　）.

（A）$\boldsymbol{A}$的秩为零

（B）$\boldsymbol{A}$的行秩为零

（C）非齐次线性方程组$\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$有无穷多解

（D）齐次线性方程组$\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$有非零解

16．设$\boldsymbol{A}$为5×4矩阵，$\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2$为非齐次方程组$\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$的两个不同的特解，$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2$是对应齐次方程组$\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$的基础解系，对任意常数$k_1,k_2$，则下列正确的是（　　）.

（A）$\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$的通解是$k_1\boldsymbol{\alpha}_1+k_2\boldsymbol{\alpha}_2+\frac{1}{2}(\boldsymbol{\beta}_2-\boldsymbol{\beta}_1)$

（B）$\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$的通解是$k_1(\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2)+k_2(\boldsymbol{\alpha}_1-\boldsymbol{\alpha}_2)+2\boldsymbol{\beta}_2-\boldsymbol{\beta}_1$

（C）$\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$的通解是$k_1(\boldsymbol{\alpha}_2-\boldsymbol{\alpha}_1)+k_2(\boldsymbol{\beta}_2-\boldsymbol{\alpha}_1)$

（D）$\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{O}$的通解是$k_1\boldsymbol{\alpha}_1+k_2(\boldsymbol{\beta}_2-\boldsymbol{\beta}_1)$

17. 已知$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$是$\boldsymbol{Ax}=\mathbf{0}$的一组基础解系，下列结论正确的是（　　）.

（A）$\boldsymbol{\alpha}_1-\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_2-\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_3-\boldsymbol{\alpha}_1$也是$\boldsymbol{Ax}=\mathbf{0}$的一组基础解系

（B）$\boldsymbol{\xi}_1,\boldsymbol{\xi}_2,\boldsymbol{\xi}_3$与$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$等秩，则$\boldsymbol{\xi}_1,\boldsymbol{\xi}_2,\boldsymbol{\xi}_3$也是$\boldsymbol{Ax}=\mathbf{0}$的一组基础解系

（C）$\boldsymbol{\eta}_1,\boldsymbol{\eta}_2,\boldsymbol{\eta}_3,\boldsymbol{\eta}_4$与$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$等价，则$\boldsymbol{\eta}_1,\boldsymbol{\eta}_2,\boldsymbol{\eta}_3,\boldsymbol{\eta}_4$也是$\boldsymbol{Ax}=\mathbf{0}$的一组基础解系

（D）$\boldsymbol{\xi}_1,\boldsymbol{\xi}_2,\boldsymbol{\xi}_3$与$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$等价，则$\boldsymbol{\xi}_1,\boldsymbol{\xi}_2,\boldsymbol{\xi}_3$也是$\boldsymbol{Ax}=\mathbf{0}$的一组基础解系

18. 齐次线性方程组$\boldsymbol{Ax}=\mathbf{0}$和$\boldsymbol{Bx}=\mathbf{0}$同解的充分必要条件为（　　）.

（A）$\boldsymbol{A}$与$\boldsymbol{B}$等价　　（B）$\boldsymbol{A}$与$\boldsymbol{B}$的秩相同

（C）$\boldsymbol{A}$与$\boldsymbol{B}$的列向量组等价　　（D）$\boldsymbol{A}$与$\boldsymbol{B}$的行向量组等价

19. 设$\boldsymbol{A}$为$m\times n$阶矩阵，$R(\boldsymbol{A})=m<n$，则下列结论正确的是（　　）.

（A）$\boldsymbol{A}$的任意m个列向量线性无关　　（B）$\boldsymbol{A}$的任意一个m阶子式不等于 0

（C）$\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$一定有无穷多个解　　（D）$\boldsymbol{A}$经过初等行变换可化为$(\boldsymbol{E}_m,\boldsymbol{O})$形式

20. 设$\boldsymbol{A}$是4×3矩阵，$\boldsymbol{B}$是3×4矩阵，则下列结论正确的是(　　).

（A）$\boldsymbol{ABx}=\mathbf{0}$必有非零解　　（B）$\boldsymbol{ABx}=\mathbf{0}$只有零解

（C）$\boldsymbol{BAx}=\mathbf{0}$必有非零解　　（D）$\boldsymbol{BAx}=\mathbf{0}$只有零解

21. n元线性方程组$\boldsymbol{A}_{m\times n}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{b}$有唯一解的充要条件是（　　）.

（A）$R(\boldsymbol{A})=n$　　（B）$\boldsymbol{A}$为方阵，且$|\boldsymbol{A}|\neq 0$

（C）$R(\boldsymbol{A})=R(\boldsymbol{A},\boldsymbol{b})=n$　　（D）$R(\boldsymbol{A})=m$

22. 设$\boldsymbol{A}$是$m\times n$矩阵，则（　　）.

（A）当$\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{\beta}$有惟一解时，$m=n$

（B）当$\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{\beta}$有惟一解时，$R(\boldsymbol{A})=n$

（C）当$\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{\beta}$有无穷多解时，$\boldsymbol{Ax}=\mathbf{0}$只有零解

（D）当$\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{\beta}$有无穷多解时，$R(\boldsymbol{A})<m$

23.（10 分）求向量组：$\boldsymbol{\alpha}_1=(1,1,1)^{\mathrm{T}},\boldsymbol{\alpha}_2=(0,2,5)^{\mathrm{T}},\boldsymbol{\alpha}_3=(2,4,7)^{\mathrm{T}},\boldsymbol{\alpha}_4=(-1,1,3)^{\mathrm{T}}$的一个极大线性无关组，并指出$\boldsymbol{\alpha}_4$能否被$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$线性表示.

24.（10 分） 设$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4$是某齐次线性方程组的基础解系，又$\boldsymbol{\beta}_1=\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2$，

$\boldsymbol{\beta}_2=\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_3$，$\boldsymbol{\beta}_3=\boldsymbol{\alpha}_3+\boldsymbol{\alpha}_4$，$\boldsymbol{\beta}_4=\boldsymbol{\alpha}_4-\boldsymbol{\alpha}_1$，问$\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3,\boldsymbol{\beta}_4$是否也可作为该方程组的基础解系？为什么？

25. （10 分）设向量组$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m$线性无关，非零向量$\boldsymbol{\beta}$与每个向量$\boldsymbol{\alpha}_i(1\le i\le m)$均正交，证明$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m,\boldsymbol{\beta}$线性无关.

26.（17 分）已知齐次线性方程组

$$\begin{cases}(a_1+b)x_1+a_2x_2+a_3x_3=0,\\ a_1x_1+(a_2+b)x_2+a_3x_3=0,\\ a_1x_1+a_2x_2+(a_3+b)x_3=0,\end{cases}$$

其中$a_1+a_2+a_3\neq 0$，试讨论a_1,a_2,a_3和b满足何种关系时①方程组仅有零解；②方程组有非零解，并求其全部解.

27.（14 分）对于线性方程组$\begin{cases}x_1+x_2+x_3=1,\\ x_1+kx_2+x_3=k,\\ x_1+x_2+k^2x_3=k,\end{cases}$，问$k$取何值时，方程组无解、有惟一解和无穷多组解? 并在方程组有无穷多组解时，求其通解.

28.（10 分）设$\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$都是$n$阶方阵，且$\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{O}$. 证明：$R(\boldsymbol{A})+R(\boldsymbol{B})\le n$.

29.（14 分）设方程组$\begin{cases}\lambda x_1+x_2+x_3=1,\\ x_1+\lambda x_2+x_3=\lambda,\\ x_1+x_2+\lambda x_3=\lambda^2,\end{cases}$试问$\lambda$分别为何值时，

(1)方程组有唯一解；(2)方程组无解；(3)方程组有无穷多解,并求出通解表示式.

30.（6 分）设n方阵$\boldsymbol{A}$满足$\boldsymbol{A}^T\boldsymbol{A}=\boldsymbol{E}$，且$|\boldsymbol{A}|<0$,证明$|\boldsymbol{A}+\boldsymbol{E}|=0$.