# §3.3　向量组的秩与极大线性无关组

# 一、极大线性无关组

**定义3.7:** 设有向量组 $A$，如果在 $A$ 中能选出 $r$ 个向量 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r$ 满足

① 向量组 $A_0$：$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r$ 线性无关;

② 向量组 $A$ 中任意 $r+1$个向量（如果 $A$ 中有$r+1$个向量的话）都线性相关;

那么称向量组 $A_0$ 是向量组 $A$ 的一个极大线性无关组,

极大无关组所含向量个数 $r$ 称为向量组$A$的秩，记作$R(A)$.

注:

① 线性无关的向量组，它的极大线性无关组为其本身;

② 秩为$r$的向量组中任意$r$个线性无关的向量都是其极大线性无关组;

③ 只含有零向量的向量组没有极大线性无关组，规定其秩为零;

④ 向量组的极大线性无关组不唯一，但秩唯一.

**定义3.7'：** 如果在向量组$A$ 中有 $r$ 个向量 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r$

满足

① 向量组 $A_0:\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r$ 线性无关;

② 向量组 $A$ 中任意一个向量均可由向量组$A_0$线性表示

那么称向量组 $A_0$ 是向量组 $A$ 的一个**极大线性无关组.**

证：只需要证向量组$A$ 中任意 $r$+1 个向量线性相关. 设

$\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_{r+1}$ 是向量组$A$中任意$r$+1个向量，由条件

二知，这$r$+1个向量都可由向量组$A_0$线性表示，从而

$\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_{r+1}$线性相关.

**例:** 求 $\alpha_1=\begin{pmatrix}1\\2\\4\end{pmatrix},\ \alpha_2=\begin{pmatrix}-1\\2\\0\end{pmatrix},\ \alpha_3=\begin{pmatrix}0\\4\\4\end{pmatrix},$

极大线性无关组和秩.

**解:** $\alpha_1,\alpha_2$ 线性无关

$\alpha_3=\alpha_1+\alpha_2$

秩为2，极大线性无关组为 $\alpha_1,\alpha_2$

例：设向量组$B$能由向量组$A$线性表示，且它们的秩相等，证明$A$，$B$等价.

解：设$R(A)=R(B)=s$, 且 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$ 是向量组$A$的极大线性无关组，$\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_s$ 是向量组$B$的极大线性无关组. 令

$$C:\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s,\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_s$$

由于 $\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_s$ 能由 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$ 线性表示，故 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$ 是向量组$C$的极大线性无关组，即$R(C)=s$. 从而 $\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_s$ 是$C$的极大线性无关组. 因此，向量组$A$能由向量组$B$线性表示. 故得证.

注:

（1）任一向量组与其极大线性无关组等价

（2）一个向量组中的任意两个极大线性无关组等价

（3）等价向量组的极大线性无关组等价

（4）$0 \le R\{\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_m\} \le m$

（5）$R\{\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_m\} = m \Leftrightarrow \alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_m$ 线性无关

$R\{\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_m\} < m \Leftrightarrow \alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_m$ 线性相关

**性质3.9** 如果向量组$A:\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$可由向量组$B:\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_t$线性表示，则向量组$A$的秩不超过向量组$B$的秩，

即

$$R(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s)\le R(\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_t)$$

**思想：** $A$的极大线性无关组可由向量组$B$线性表示

所有$A$的极大线性无关组可由$B$的极大线性无关组表示

**推论3.1** 若$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$可由$\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_t$线性表示，且$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$线性无关，则$s\le t$.

**性质3.10:** 等价的向量组具有相同的秩。

**思想:** 极大线性无关组相互线性表示

**推论3.2** 两个线性无关等价的向量组必含有相同个数的向量.

# 二、向量组的秩与矩阵秩的关系

**定理3.1：** 如果矩阵$A$经初等行变换变成矩阵$B$，则

① $A$的行向量组与$B$的行向量组等价;

② $A$中任意$k$个列向量与$B$中对应的$k$个列向量有相同的线性相关性.

**推论3.3：** 对矩阵进行初等行变换不改变其列向量组的线性相关性；对矩阵进行初等列变换不改变其行向量组的线性相关性.

**定理3.2：** 矩阵$A_{n\times m}$的秩等于$A$的行(列)向量组的秩.

**证明：** 设$A=(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m),R(A)=r$，并设$r$阶子式$D_r\neq 0$.由$D_r\neq 0$知，$D_r$所在的$r$列构成的$n\times r$矩阵的秩为$r$；又因为$A$中所有$r+1$阶子式均为零，所以$A$中任意$r+1$个列向量构成的$n\times(r+1)$矩阵的秩小于等于$r$. 故此$r+1$列线性相关. $D_r$所在的$r$列构成$A$的列向量组的一个极大线性无关组，所以列向量组的秩等于$r$.

$A^T$的秩等于$A^T$的列向量组的秩，而$R(A)=R(A^T)$，$A^T$的列向量组就是$A$的行向量组，所以矩阵的秩也等于其行向量组的秩.

例：设$\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_s$均为$n$维列向量，$A$是$m\times n$矩阵，下列选项正确的是(　)

（A） 如果$\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_s$线性相关，则$A\alpha_1,A\alpha_2,\ldots,A\alpha_s$线性相关

（B） 如果$\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_s$线性相关，则$A\alpha_1,A\alpha_2,\ldots,A\alpha_s$线性无关

（C） 如果$\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_s$线性无关，则$A\alpha_1,A\alpha_2,\ldots,A\alpha_s$线性相关

（D） 如果$\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_s$线性无关，则$A\alpha_1,A\alpha_2,\ldots,A\alpha_s$线性无关

例：设$A,B$为满足$AB=0$的任意两个非零矩阵，则必有(　)

（A）　$A$的列向量组线性相关，$B$的行向量组线性相关

（B）　$A$的列向量组线性相关，$B$的列向量组线性相关

（C）　$A$的行向量组线性相关，$B$的行向量组线性相关

（D）　$A$的行向量组线性相关，$B$的列向量组线性相关

**求列向量组 $A:\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m$ 的极大无关组和秩 $r$ 的方法:**

(1) 先将列向量组$A:\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m$构成矩阵 $A=(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m)$;

(2) 再对矩阵 $A=(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m)$ 作初等行变换化为行阶梯形,

则在行阶梯形中,

(a) 非零行的行数即为列向量组 $A:\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m$ 的秩$r$;

(b) 每个非零行的首非零元素所在的列向量的全体即为列向量组 $A=(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m)$ 的一个极大无关组;

(3) 继续将矩阵$A=(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m)$ 作初等行变换化为行最简形,

则利用行最简形，可将其余向量由极大无关组线性表示.

**原理:** 对矩阵进行初等行变换不改变其列向量组的线性相关性.

例: 已知

$$\alpha_1=(1,2,-1,1)^T,\alpha_2=(2,0,t,0)^T,\alpha_3=(0,-4,5,-2)^T$$

的秩为2, 求$t$.

解:

$$(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)=\begin{pmatrix}1&2&0\\2&0&-4\\-1&t&5\\1&0&-2\end{pmatrix}\rightarrow\begin{pmatrix}1&2&0\\0&-4&-4\\0&t+2&5\\0&-2&-2\end{pmatrix}$$

$$\rightarrow\begin{pmatrix}1&2&0\\0&1&1\\0&t+2&5\\0&0&0\end{pmatrix}\rightarrow\begin{pmatrix}1&2&0\\0&1&1\\0&0&3-t\\0&0&0\end{pmatrix}$$

故 $t=3$.

例：求 $\alpha_1=(1,-2,2,3)^T,\alpha_2=(-2,4,-1,3)^T,\alpha_3=(-1,2,0,3)^T$

$$\alpha_4=(0,6,2,3)^T,\alpha_5=(2,-6,3,4)^T$$

的一个极大线性无关组，并用它们表示其余的向量.

解：

$$(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4,\alpha_5)=\begin{pmatrix}1&-2&-1&0&2\\-2&4&2&6&-6\\2&-1&0&2&3\\3&3&3&3&4\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&-2&-1&0&2\\0&3&2&2&-1\\0&0&0&-3&1\\0&0&0&0&0\end{pmatrix}$$

$$\to\begin{pmatrix}1&-2&-1&0&2\\0&1&2/3&2/3&-1/3\\0&0&0&1&-1/3\\0&0&0&0&0\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&0&1/3&0&16/9\\0&1&2/3&0&-1/9\\0&0&0&1&-1/3\\0&0&0&0&0\end{pmatrix}$$

极大无关组为 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_4,\alpha_3=\frac{1}{3}\alpha_1+\frac{2}{3}\alpha_2,\alpha_5=\frac{16}{9}\alpha_1-\frac{1}{9}\alpha_2-\frac{1}{3}\alpha_4$

**练习：** 设向量组

$$\alpha_1=\begin{pmatrix}1+a\\1\\1\\1\end{pmatrix},\alpha_2=\begin{pmatrix}2\\2+a\\2\\2\end{pmatrix},\alpha_3=\begin{pmatrix}3\\3\\3+a\\3\end{pmatrix},\alpha_4=\begin{pmatrix}4\\4\\4\\4+a\end{pmatrix}$$

问$a$为何值时，$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$线性相关？当$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$线性相关时，求其一个极大线性无关组，并将其余的向量用该极大线性无关组线性表示.