

### 课外练习题 3

- 已知向量组  $\alpha_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ a \\ -1 \end{pmatrix}, \alpha_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \alpha_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}$  线性相关, 则  $a =$  \_\_\_\_\_ .
- 设向量组  $\alpha_1 = (a, 0, 1), \alpha_2 = (b, 1, 0), \alpha_3 = (0, a, b)$  线性无关, 则  $a, b$  必满足关系式\_\_\_\_\_.
- 设向量组  $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$  线性无关,  $\alpha_1 + 2\alpha_2, \alpha_2 - \alpha_3, \alpha_1 + \alpha_2 + t\alpha_3$  线性相关, 则  $t =$  \_\_\_\_\_.
- 向量组  $\alpha_1 = (1, 2, 3, 4)^T, \alpha_2 = (1, 3, 4, 5)^T, \alpha_3 = (2, 4, 6, 8)^T, \alpha_4 = (2, 6, 7, 7)^T$  的一个极大无关组为\_\_\_\_\_.
- 若矩阵  $A = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4)$  经初等行变换变为  $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ , 那么向量组  $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$  的一个极大无关组为\_\_\_\_\_, 其余向量由此极大无关组线性表示的关系式为\_\_\_\_\_.
- 向量组  $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$  线性无关, 则向量组  $\alpha_1, \alpha_1 + \alpha_2, \alpha_1 - \alpha_3$  的秩为\_\_\_\_\_.
- 设  $3 \times 2$  矩阵  $A = (\alpha_1, \alpha_2), B = (\beta_1, \beta_2)$ , 其中  $\alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2$  是 3 维列向量, 若  $\alpha_1, \alpha_2$  线性无关, 则  $\beta_1, \beta_2$  线性无关的充要条件是 ( ).  
 (A)  $\alpha_1, \alpha_2$  能由  $\beta_1, \beta_2$  线性表示      (B)  $\beta_1, \beta_2$  能由  $\alpha_1, \alpha_2$  线性表示  
 (C) 矩阵  $A$  与  $B$  等价      (D) 向量组  $\alpha_1, \alpha_2$  与  $\beta_1, \beta_2$  等价
- 已知向量组  $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$  是线性无关向量组, 则下列向量组中仍为线性无关向量组的是 ( ).  
 (A)  $\alpha_1 + \alpha_2, \alpha_2 + \alpha_3, \alpha_3 + \alpha_4, \alpha_4 + \alpha_1$       (B)  $\alpha_1 - \alpha_2, \alpha_2 - \alpha_3, \alpha_3 - \alpha_4, \alpha_4 - \alpha_1$   
 (C)  $\alpha_1 + \alpha_2, \alpha_2 + \alpha_3, \alpha_3 - \alpha_4, \alpha_4 - \alpha_1$       (D)  $\alpha_1 + \alpha_2, \alpha_2 + \alpha_3, \alpha_3 + \alpha_4, \alpha_4 - \alpha_1$
- 设向量组  $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$  线性无关, 向量组  $\alpha_1, \alpha_2, \beta$  线性相关, 则 ( ).  
 (A)  $\beta$  可由  $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$  线性表示,  $\alpha_3$  可由  $\alpha_1, \alpha_2, \beta$  线性表示

- (B)  $\beta$  可由  $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$  线性表示,  $\alpha_3$  不可由  $\alpha_1, \alpha_2, \beta$  线性表示
- (C)  $\beta$  不可由  $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$  线性表示,  $\alpha_3$  可由  $\alpha_1, \alpha_2, \beta$  线性表示
- (D)  $\beta$  不可由  $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$  线性表示,  $\alpha_3$  不可由  $\alpha_1, \alpha_2, \beta$  线性表示

11. 设向量组  $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$  线性无关, 向量  $\beta_1$  能由  $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$  线性表示, 向量  $\beta_2$  不能由  $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$  线性表示, 则必有 ( ).

- (A)  $\alpha_1, \alpha_2, \beta_1$  线性无关 (B)  $\alpha_1, \alpha_2, \beta_1$  线性相关
- (C)  $\alpha_1, \alpha_2, \beta_2$  线性无关 (D)  $\alpha_1, \alpha_2, \beta_2$  线性相关

12.  $n$  维向量组  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m$  ( $3 \leq m \leq n$ ) 线性无关的充要条件是 ( ).

- (A)  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m$  中任意两个向量均线性无关
- (B) 向量组  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m$  的秩小于  $m$
- (C)  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m$  中任意一个向量均不能由其余  $m-1$  个向量线性表示
- (D) 方程组  $x_1\alpha_1 + x_2\alpha_2 + \dots + x_m\alpha_m = \mathbf{0}$  有非零解

13. 向量组  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s$  线性无关的充分必要条件是 ( ).

- (A)  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s$  均不为零向量.
- (B)  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s$  中任意两个向量的分量不成比例.
- (C)  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s$  中任意一个向量均不能由其余各向量线性表示
- (D)  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s$  中有一部分向量线性无关

14. 设  $\alpha_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ c_1 \end{pmatrix}, \alpha_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ c_2 \end{pmatrix}, \alpha_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ c_3 \end{pmatrix}, \alpha_4 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ c_4 \end{pmatrix}$ , 其中  $c_1, c_2, c_3, c_4$  为任意常数, 则下列

向量组线性相关的为 ( )

- (A)  $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$  (B)  $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_4$  (C)  $\alpha_1, \alpha_3, \alpha_4$  (D)  $\alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$

15. 设  $A$  为  $3 \times 4$  矩阵, 且  $R(A) = 3$ , 则  $A$  的 ( )

- (A) 行向量组线性相关, 列向量组线性无关
- (B) 行向量组线性无关, 列向量组线性相关

(C) 行、列向量组均线性相关

(D) 行、列向量组均线性无关

16. 设  $n$  阶矩阵  $A = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$ ,  $B = (\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n)$ ,  $AB = (\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_n)$ . 记向量组

$I: \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ ;  $II: \beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n$ ;  $III: \gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_n$ , 如果向量组  $III$  线性相关, 则( )

(A) 向量组  $I$  线性相关

(B) 向量组  $II$  线性相关

(C) 向量组  $I$  与  $II$  都线性相关

(D) 向量组  $I$  与  $II$  中至少有一个线性相关

17. 设向量组  $I: \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_r$  可由向量组  $II: \beta_1, \beta_2, \dots, \beta_s$  线性表出. 下列命题正确的是

( ).

(A) 若  $r \leq s$ , 则向量组  $I$  线性无关

(B) 若  $r > s$ , 则向量组  $I$  线性相关

(C) 若  $r \leq s$ , 则向量组  $II$  线性无关

(D) 若  $r > s$ , 则向量组  $II$  线性相关

18. 设有向量组  $\alpha_1 = (1, -1, 2, 4)^T$ ,  $\alpha_2 = (0, 3, 1, 2)^T$ ,  $\alpha_3 = (3, 0, 7, 14)^T$ ,  $\alpha_4 = (1, -2, 2, 0)^T$ ,

则该向量组的极大线性无关组是( ).

(A)  $\alpha_1, \alpha_2$

(B)  $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_4$

(C)  $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$

(D)  $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$

19. 设  $A$  是  $m \times n$  矩阵,  $C$  是  $n$  阶可逆矩阵, 矩阵  $A$  的秩为  $r$ , 矩阵  $B = AC$  的秩为  $r_1$ ,

则 ( ).

(A)  $r > r_1$ .

(B)  $r < r_1$ .

(C)  $r = r_1$ .

(D)  $r$  与  $r_1$  的关系依  $C$  而定

20. 设向量组  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s$  的秩为  $r$ , 则 ( ).

(A) 必有  $r < s$

(B) 向量组中任意个数小于  $r$  的部分组必线性无关

(C) 向量组中任意  $r$  个向量必线性无关

(D) 若  $r < s$ , 则向量组中任意  $r+1$  个向量必线性相关

21. 设  $A$  为  $m \times n$  矩阵,  $B$  为  $n \times k$  矩阵,  $AB = O, B \neq O$ , 则下列命题中正确的是( ).

(A)  $A$  的列向量组线性相关

(B)  $A$  的行向量组线性相关

(C)  $A$  的列向量组线性无关

(D)  $A$  的行向量组线性无关

22. (6 分) 设  $A$  是  $n \times m$  矩阵,  $B$  是  $m \times n$  矩阵, 其中  $n < m$ . 若  $AB = E$ , 证明  $B$  的列向量组线性无关.

23. (8 分) 已知向量组  $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$  线性相关,  $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_5$  线性无关, 讨论

$\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_5 - \alpha_4$  的线性相关性.

24. (12 分) 设向量组  $\alpha_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \alpha_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}, \alpha_3 = \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ -2 \\ -3 \end{pmatrix}, \alpha_4 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix}, \alpha_5 = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ , 求

$\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4, \alpha_5$  的一个极大线性无关组, 并将其余向量用该极大无关组线性表示.

25. (10 分) 设向量组:

$$\alpha_1 = (1, 1, 2, -1)^T, \alpha_2 = (1, 2, -1, 1)^T, \alpha_3 = (2, 3, -5, 4)^T, \alpha_4 = (1, -1, \lambda, -1)^T.$$

当参数  $\lambda$  取何值时线性相关, 相关时求其极大线性无关组, 并将其余向量用该极大无关组线性表示.