合 肥 工 业 大 学 试 卷（A）参 考 答 案

2023～2024 学年第 一 学期 课程代码 1400091B 课程名称 概率论与数理统计 学分 3 课程性质:必修 考试形式: 闭卷

专业班级（数学班） ________ 考试日期 2024 年 1 月 24 日 10:20—12:20 命题教师 集体 系（所或教研室）主任审批签名 ________

一、填空题(每小题 3 分)

1. 0.2； 2. $B(n,1-p)$； 3. 2； 4. $\frac{1}{4}$； 5. 16.

二、选择题(每小题 3 分)

1. C； 2. B； 3. D； 4. A； 5. C.

三、(12 分)【解】设 A_1:从甲袋中任取一个红球放入乙袋，A_2:从甲袋中任取一个白球放入乙袋，B:从甲袋中任取一球放入乙袋，再从乙袋中任取一球是红球；则 $P(A_1)=\frac{6}{4+6}=\frac{3}{5}$，$P(A_2)=\frac{4}{4+6}=\frac{2}{5}$，

$P(B|A_1)=\frac{5+1}{7+5+1}=\frac{6}{13}$，$P(B|A_2)=\frac{5}{7+5+1}=\frac{5}{13}$.

（1）由全概率公式得 $P(B)=P(A_1)P(B|A_1)+P(A_2)P(B|A_2)=\frac{3}{5}\times\frac{6}{13}+\frac{2}{5}\times\frac{5}{13}=\frac{28}{65}$.

（2）解法一：由贝叶斯公式得 $P(A_1|B)=\frac{P(A_1)P(B|A_1)}{P(B)}=\frac{\frac{3}{5}\times\frac{6}{13}}{\frac{28}{65}}=\frac{9}{14}$，$P(A_2|B)=1-\frac{9}{14}=\frac{5}{14}$，

即 $P(A_1|B)>P(A_2|B)$，所以从甲袋中取到红球的概率大.

解法二：由于 $P(A_1)P(B|A_1)=\frac{3}{5}\times\frac{6}{13}>P(A_2)P(B|A_2)=\frac{2}{5}\times\frac{5}{13}$，所以 $P(A_1|B)>P(A_2|B)$，表明从甲袋中取到红球的概率大.

四、(12 分)【解】(1) 由 $P\{X^2=X\}=2P\{X>1\}$ 得 $P\{X=0\}+P\{X=1\}=2P\{X=2\}$，即

$$a+b=2c \qquad ①$$

由 $P\{|X-1|=1\}=P\{X=1\}$ 得 $P\{X=0\}+P\{X=2\}=P\{X=1\}$，即 $a+c=b$， ②

又根据离散型随机变量的性质得 $a+b+c=1$， ③

由①②③解得 $a=\frac{1}{6},b=\frac{1}{2},c=\frac{1}{3}$.所以 X 的分布律为 $X\sim\begin{pmatrix}0&1&2\\ \frac{1}{6}&\frac{1}{2}&\frac{1}{3}\end{pmatrix}$.

（2） 根据分布函数的定义可得 X 的分布函数为

$$F(x)=\begin{cases}0, & x<0,\\ \frac{1}{6}, & 0\le x<1,\\ \frac{1}{6}+\frac{1}{2}, & 1\le x<2,\\ \frac{1}{6}+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}, & x\ge 2\end{cases}=\begin{cases}0, & x<0,\\ \frac{1}{6}, & 0\le x<1,\\ \frac{2}{3}, & 1\le x<2,\\ 1, & x\ge 2.\end{cases}$$

(3) $P\{|X-1|>a\}=P\left\{|X-1|>\frac{1}{6}\right\}=P\left\{X>\frac{7}{6}\right\}+P\left\{X<\frac{5}{6}\right\}$

$$=P\{X=2\}+P\{X=0\}=\frac{1}{6}+\frac{1}{3}=\frac{1}{2}.$$

五、(14 分)【解】（1）由 $\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)dxdy=1$ 得 $\int_0^1dx\int_0^x cxdy=\int_0^1 cx^2=1$，解得 $c=3$.

故二维随机变量 (X,Y) 的密度函数 $f(x,y)=\begin{cases}3x, & 0<y<x<1,\\ 0, & 其他.\end{cases}$

（2）方法一：分布函数法.

先求 $Z=X-Y$ 的分布函数 $F_Z(z)=P\{Z\le z\}=P\{X-Y\le z\}=\iint\limits_{x-y\le z}f(x,y)dxdy$，

当 $z\le 0$ 时，$F_Z(z)=0$；

当 $z\ge 1$ 时，$F_Z(z)=1$；

当 $0<z<1$ 时， $F_Z(z)=1-\int_z^1dx\int_0^{x-z}3xdy=1-\int_z^1 3x(x-z)dx=\frac{3z-z^3}{2}$.

则 $Z=X-Y$ 的概率密度 $f_Z(z)=F_Z'(z)=\begin{cases}\frac{3}{2}(1-z^2), & 0<z<1,\\ 0, & 其他.\end{cases}$

方法二：公式法. 由 $f_Z(z)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,x-z)dx$，

当 $z\le 0$ 时，$f(x,x-z)=0$，则 $f_Z(z)=0$；

当 $z\ge 1$ 时，$f(x,x-z)=0$，则 $f_Z(z)=0$；

当 $0<z<1$ 时， $f_Z(z)=\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,x-z)dx=\int_z^1 3xdx=\frac{3}{2}(1-z^2)$.

所以 $Z=X-Y$ 的概率密度 $f_Z(z)=\begin{cases}\frac{3}{2}(1-z^2), & 0<z<1,\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$

（3） X 的边缘概率密度 $f_X(x)=\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)dy=\begin{cases}\int_0^x 3xdy=3x^2, & 0<x<1,\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$

Y 的边缘概率密度 $f_Y(y)=\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)dx=\begin{cases}\int_y^1 3xdx=\frac{3(1-y^2)}{2}, & 0<y<1,\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$

显然 $f_X(x)f_Y(y)\neq f(x,y)$，所以 X 和 Y 不相互独立.

六、**(12 分)【解】** $Cov(X,Y)=\rho_{XY}\sqrt{D(X)}\sqrt{D(Y)}=-0.5\times\sqrt{4}\times\sqrt{9}=-3$，

$E(XY)=Cov(X,Y)+E(X)E(Y)=-3+(-2)\times 4=-11$，

$E(X^2)=D(X)+(E(X))^2=4+(-2)^2=8$，

$E(Y^2)=D(Y)+(E(Y))^2=9+4^2=25$，

所以 $E(Z)=E(3X^2-2XY+Y^2-3)=3E(X^2)-2E(XY)+E(Y^2)-3=68$.

七、**(14 分)【解】**(1) $E(X)=\int_{-\infty}^{+\infty} xf(x;\theta)dx=\int_\theta^{+\infty}\frac{2\theta^2}{x^2}dx=-\frac{2\theta^2}{x}\Big|_\theta^{+\infty}=2\theta$，令 $E(X)=\overline{X}$，即 $2\theta=\overline{X}$，

解得 θ 的矩估计量 $\hat{\theta}_M=\frac{\overline{X}}{2}$.

（2）当 $X_i\geq\theta>0, i=1,2,\cdots,n$，似然函数 $L(\theta)=\prod_{i=1}^n f(X_i;\theta)=\prod_{i=1}^n\frac{2\theta^2}{X_i^3}=\frac{2^n\theta^{2n}}{\prod_{i=1}^n X_i^3}$，

两边取对数得 $\ln L(\theta)=n\ln 2+2n\ln\theta-3\sum_{i=1}^n\ln X_i$，

而 $\frac{d\ln L(\theta)}{d\theta}=\frac{2n}{\theta}>0$， $L(\theta)$ 为 θ 的单增函数，且 $\theta\leq X_i, i=1,2,\cdots,n$.

当 $\theta=\min\{X_1,X_2,\cdots,X_n\}$ 时，$L(\theta)$ 最大，故未知参数 θ 的极大似然估计量为

$\theta=\min\{X_1,X_2,\cdots,X_n\}$.

（3） $E\hat{\theta}_M=E\left(\frac{\overline{X}}{2}\right)=\frac{1}{2}E(X)=\frac{1}{2}\times 2\theta=\theta$，所以 $\hat{\theta}_M$ 是 θ 的无偏估计.

八、**(6 分)【解】** 由于 $\overline{X}$ 与 S^2 独立，故 $D\left[\overline{X}^2+\left(1-\frac{1}{n}\right)S^2\right]=D(\overline{X}^2)+\left(1-\frac{1}{n}\right)^2 D(S^2)$.

又因为 $X\sim N(0,\sigma^2)$， $\overline{X}\sim N(0,\frac{\sigma^2}{n})$， $\frac{\sqrt{n}\,\overline{X}}{\sigma}\sim N(0,1)$， $\frac{n\overline{X}^2}{\sigma^2}\sim\chi^2(1)$，故

$D\left(\frac{n\overline{X}^2}{\sigma^2}\right)=2$， $D(\overline{X}^2)=\frac{2\sigma^4}{n^2}$.

同理， $\frac{(n-1)S^2}{\sigma^2}\sim\chi^2(n-1)$， $D\left[\frac{(n-1)S^2}{\sigma^2}\right]=2(n-1)$， $D(S^2)=\frac{2\sigma^4}{n-1}$，

所以 $D\left[\overline{X}^2+\left(1-\frac{1}{n}\right)S^2\right]=\frac{2\sigma^4}{n^2}+\frac{2(n-1)\sigma^4}{n^2}=\frac{2\sigma^4}{n}$.