合　肥　工　业　大　学　试　卷（A）

2021～2022 学年第 二 学期 课程代码 1400071B 课程名称 线性代数 学分 2.5 课程性质:必修☑、选修☐、限修☐ 考试形式:开卷☐、闭卷☑

专业班级（教学班）________ 考试日期 2022 年 5 月 11 日 10:20-12:20 命题教师 集体 系（所或教研室）主任审批签名__________

一、填空题（每小题 3 分，共 18 分）

1. $\boldsymbol{A}$、$\boldsymbol{B}$ 是 n 阶方阵, $|\boldsymbol{A}|=-1, |\boldsymbol{B}|=1$, 则行列式 $|\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{B}^*-\boldsymbol{A}^*\boldsymbol{B}^{-1}|=$ ______.

2. $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}2&0\\2&1\end{pmatrix}, \boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}2&0\\2&2\end{pmatrix}$, 2 阶实方阵 $\boldsymbol{X}$ 满足 $\boldsymbol{AXB}=\boldsymbol{E}$, 则 $\boldsymbol{X}^{-1}=$ ______.

3. 向量 $(1,2,2,3)^T$ 与 $(3,1,5,1)^T$ 的夹角为______.

4. $\boldsymbol{A}$ 是 3 阶实矩阵， $R(\boldsymbol{A})=2$, 则 $\boldsymbol{A}^*\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ 的基础解系含有向量个数为______.

5. $\boldsymbol{A}$ 是 3 阶实对称方阵，满足 $\boldsymbol{A}^2-3\boldsymbol{A}=\boldsymbol{O}$ 且 $R(\boldsymbol{A})=2$,则 $\boldsymbol{A}$ 的迹 $tr(\boldsymbol{A})=$ ______.

6. 二次型 $f(x_1,x_2)=x_1{}^2+3x_1x_2+x_2{}^2$ 的正惯性指数为______.

二、选择题（每小题 3 分，共计 18 分）

1. 行列式 $D=\begin{vmatrix}a_1&b_1&c_1\\a_2&b_2&c_2\\a_3&b_3&c_3\end{vmatrix}=1$, 则 $\begin{vmatrix}4a_1&-2b_1&-8c_1\\-2a_2&b_2&4c_2\\-2a_3&b_3&4c_3\end{vmatrix}=$ ( )

(A) 16　(B) −16　(C) 32　(D) −32

2. 非单位方阵 $\boldsymbol{A}$ 满足 $\boldsymbol{A}^2+2\boldsymbol{A}-3\boldsymbol{E}=\boldsymbol{O}$, 则下述矩阵不可逆的是( )

(A) $\boldsymbol{A}$　(B) $\boldsymbol{A}+\boldsymbol{E}$　(C) $\boldsymbol{A}+2\boldsymbol{E}$　(D) $\boldsymbol{A}+3\boldsymbol{E}$

3. $\boldsymbol{A}$、$\boldsymbol{B}$ 均为 3 阶实矩阵，且 $\boldsymbol{A}$ 可通过初等列变换变为 $\boldsymbol{B}$, 则下述说法正确的是( )

(A) 必存在 3 阶矩阵 $\boldsymbol{P}$ 使得 $\boldsymbol{PA}=\boldsymbol{B}$　(B) $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 的行向量组必等价

(C) 必存在 3 阶矩阵 $\boldsymbol{P}$ 使得 $\boldsymbol{BP}=\boldsymbol{A}$　(D) $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$ 与 $\boldsymbol{Bx}=\boldsymbol{0}$ 的解集必然相同

4. 下列矩阵中, 不能相似于对角矩阵的是( )

(A) $\begin{pmatrix}1&1&0\\0&2&1\\0&0&3\end{pmatrix}$　(B) $\begin{pmatrix}1&0&1\\0&1&0\\1&0&1\end{pmatrix}$　(C) $\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&1\\0&0&2\end{pmatrix}$　(D) $\begin{pmatrix}1&1&0\\0&1&0\\0&0&2\end{pmatrix}$

5. n 阶实对称矩阵 $\boldsymbol{A}$ 正定的充分必要条件是( )

(A) $\boldsymbol{A}$ 与单位矩阵等价　(B) $\boldsymbol{A}$ 与单位矩阵合同

(C) $\boldsymbol{A}$ 与单位矩阵相似　(D) $\boldsymbol{A}$ 的秩 $R(A)=n$

6. $\boldsymbol{A}$ 为 $m\times n$ 的实矩阵, 则下述说法正确的是( )

(A) 若 $m>n$, 则 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$ 必只有零解

(B) 若 $\boldsymbol{A}^T\boldsymbol{y}=\boldsymbol{0}$ 只有零解, 则 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$ 只有零解

(C) 若 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$ 有非零解, 则 $\boldsymbol{A}$ 的行向量组必线性相关

(D) 若 $\boldsymbol{A}^T\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$ 只有零解, 则 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$ 只有零解

三、(10分) $n(\geq 3)$ 阶行列式 $\mathrm{D}_n=\begin{vmatrix}x&a&\cdots&a\\a&x&\cdots&a\\\vdots&\vdots&\ddots&\vdots\\a&a&\cdots&x\end{vmatrix}$, 求 $A_{11}+A_{12}+\cdots+A_{1n}$.

其中 A_{ij} 为 D_n 的 (i,j) 位置元素的代数余子式.

四、(12分) $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{\alpha\beta}^T=\begin{pmatrix}1&1&2\\2&2&x\\y&3&6\end{pmatrix}$, 其中 $\boldsymbol{\alpha}$, $\boldsymbol{\beta}$ 是 3 维实列向量.

(1) 求 $R(\boldsymbol{A})$ 以及 x, y, $\boldsymbol{\beta}^T\boldsymbol{\alpha}$；(2) 计算 $\boldsymbol{A}^n$, n 是大于等于 2 的正整数.

五、(12分) 求向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1=\begin{pmatrix}1\\0\\0\\1\end{pmatrix}, \boldsymbol{\alpha}_2=\begin{pmatrix}1\\1\\1\\1\end{pmatrix}, \boldsymbol{\alpha}_3=\begin{pmatrix}5\\2\\2\\5\end{pmatrix}, \boldsymbol{\alpha}_4=\begin{pmatrix}0\\0\\1\\1\end{pmatrix}, \boldsymbol{\alpha}_5=\begin{pmatrix}11\\5\\9\\15\end{pmatrix}$ 的秩以及一个极大线性无关组,

并将其余向量用该极大无关组线性表示.

六、(12分) $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&1&1-a\\1&0&a\\a+1&1&a+1\end{pmatrix}, \boldsymbol{b}=\begin{pmatrix}0\\1\\2a-2\end{pmatrix}$, 讨论 a 为何值时线性方程组 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$

无解, 有唯一解, 有无穷多解? 并在有无穷多解时求其通解.

七、(12分)已知二次型 $f(x_1,x_2,x_3)=ax_1{}^2+ax_2{}^2+ax_3{}^2+2x_1x_2+2x_1x_3+2x_2x_3$ 的秩为 2.

(1) 求 a;

(2) f 经过正交变换 $\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}=\boldsymbol{P}\begin{pmatrix}y_1\\y_2\\y_3\end{pmatrix}$ 化为标准形，求 $\boldsymbol{P}$ 以及对应的标准形.

八、(6分) $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_3, \boldsymbol{\alpha}_4$ 皆是 3 维实列向量, 且 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2$ 线性无关, $\boldsymbol{\alpha}_3, \boldsymbol{\alpha}_4$ 线性无关.

证明: 必存在 3 维非零列向量 $\boldsymbol{\beta}$, 满足 $\boldsymbol{\beta}$ 既可由 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2$ 线性表示, 也可由 $\boldsymbol{\alpha}_3, \boldsymbol{\alpha}_4$ 线性表示.