§ 4.2 齐次线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = 0, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = 0, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = 0. \end{cases}$$

齐次线性方程组必有零解，什么时候有非零解?

$x_1\alpha_1 + x_2\alpha_2 + \cdots + x_n\alpha_n = 0 \Leftrightarrow A$的列向量组线性相关，即$R(A) < n$.

一、齐次线性方程组解的判定

定理： n 元齐次线性方程组 $Ax=0$

① 有非零解的充分必要条件是 $R(A)<n$(列向量组线性相关);

② 有零解的充分必要条件是 $R(A)=n$ (列向量组线性无关).

推论： n 元齐次线性方程组 $Ax=0$

① 方程个数小于未知量个数必有非零解;

② 方程个数等于未知量个数有非零解的充分必要条件是系数矩阵的行列式 $|A|=0$.

二、齐次线性方程组解的性质

性质：若 $x=\xi_1, x=\xi_2$ 是齐次线性方程组$Ax=0$ 的解，

则 $x=\xi_1+\xi_2$ 仍是$Ax=0$ 的解.

性质：若 $x=\xi$ 是齐次线性方程组 $Ax=0$的解，k 为实数，则 $x=k\xi$ 仍是$Ax=0$的解.

结论：①若 $x=\xi_1,\xi_2,\ldots,\xi_t$ 是齐次线性方程组 $Ax=0$ 的解，则

$$x=k_1\xi_1+k_2\xi_2+\cdots+k_t\xi_t$$

仍是 $Ax=0$的解.

②齐次线性方程组的解构成的空间，称为解空间.

三、基础解系

定义：设齐次线性方程组 $Ax=0$ 有非零解，如果方程组 $Ax=0$ 的解 $\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_r$ 满足：

（1）$\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_r$ 线性无关；

（2）方程组 $Ax=0$ 的任一解都可由 $\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_r$ 线性表示

则称 $\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_r$ 为方程组 $Ax=0$ 的一个基础解系.

注：$Ax=0$ 的基础解系就是 $Ax=0$ 的所有解组成的向量组的极大线性无关组.

定理： 设A是 $m\times n$ 矩阵，$R(A)=r<n$，则齐次线性方程组 $Ax=0$ 的基础解系中含有 $n-r$ 个向量.

推论： 设A是 $m\times n$ 矩阵，$R(A)=r<n$，则齐次线性方程组 $Ax=0$ 的任意$n-r$个线性无关的解向量均可构成基础解系.

由于$R(A)=r$，不妨设 A 前r列线性无关，则其行最简形矩阵为

$$B=\begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 & b_{11} & \cdots & b_{1,n-r} \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & b_{21} & \cdots & b_{2,n-r} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & b_{r,1} & \cdots & b_{r,n-r} \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}_{m\times n}$$

对应的齐次线性方程组

$$\begin{cases} x_1 \quad\quad + b_{11}x_{r+1} + \cdots + b_{1,n-r}x_n = 0, \\ \quad x_2 \quad + b_{21}x_{r+1} + \cdots + b_{2,n-r}x_n = 0, \\ \quad\quad \cdots\cdots \\ \quad\quad x_r + b_{r1}x_{r+1} + \cdots + b_{r,n-r}x_n = 0. \end{cases}$$

令 $x_{r+1}, \ldots, x_n$ 为自由变量，则

通常作法:

$$\begin{cases} x_1 = -b_{11}x_{r+1} - b_{12}x_{r+2} - \cdots - b_{1,n-r}x_n, \\ x_2 = -b_{21}x_{r+1} - b_{22}x_{r+2} - \cdots - b_{2,n-r}x_n, \\ \quad\cdots\cdots \\ x_r = -b_{r1}x_{r+1} - b_{r2}x_{r+2} - \cdots - b_{r,n-r}x_n. \end{cases} \quad (1)$$

令 $\begin{pmatrix} x_{r+1} \\ x_{r+2} \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \cdots, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$， 则 $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2, \\ \vdots \\ x_r \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -b_{11} \\ -b_{21} \\ \vdots \\ -b_{r1} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -b_{12} \\ -b_{22} \\ \vdots \\ -b_{r2} \end{pmatrix}, \cdots, \begin{pmatrix} -b_{1,n-r} \\ -b_{2,n-r} \\ \vdots \\ -b_{r,n-r} \end{pmatrix}$

$$\xi_1 = \begin{pmatrix} -b_{11} \\ \vdots \\ -b_{r1} \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \xi_2 = \begin{pmatrix} -b_{12} \\ \vdots \\ -b_{r2} \\ 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \cdots, \xi_{n-r} = \begin{pmatrix} -b_{1,n-r} \\ \vdots \\ -b_{r,n-r} \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$$

得其线性无关且$Ax = 0$的任一解向量 ξ 均可由$\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_{n-r}$线性表示

$$\xi = c_1\xi_1 + c_2\xi_2 + \cdots + c_{n-r}\xi_{n-r}$$

若$\xi=(d_1,d_2,\cdots,d_r,k_1,k_2,\cdots,k_{n-r})^T$是$Ax=0$的任一解向量，由于

$$\eta=k_1\xi_1+k_2\xi_2+\cdots+k_{n-r}\xi_{n-r}$$

也是 $Ax=0$ 的一个解，所以

$$\xi-\eta=\begin{pmatrix} d_1\\ \vdots\\ d_r\\ k_1\\ k_2\\ \vdots\\ k_{n-r}\end{pmatrix}-k_1\begin{pmatrix} -c_{1,r+1}\\ \vdots\\ -c_{r,r+1}\\ 1\\ 0\\ \vdots\\ 0\end{pmatrix}-k_2\begin{pmatrix} -c_{1,r+2}\\ \vdots\\ -c_{r,r+2}\\ 0\\ 1\\ \vdots\\ 0\end{pmatrix}-\cdots-k_{n-r}\begin{pmatrix} -c_{1n}\\ \vdots\\ -c_{rn}\\ 0\\ 0\\ \vdots\\ 1\end{pmatrix}\triangleq\begin{pmatrix} l_1\\ \vdots\\ l_r\\ 0\\ 0\\ \vdots\\ 0\end{pmatrix}$$

仍是 $Ax=0$ 的一个解向量，将其带入(1)式，得 $l_i=0(i=1,2,\cdots,r)$，
从而

$$\xi=\eta=k_1\xi_1+k_2\xi_2+\cdots+k_{n-r}\xi_{n-r},$$

综上得，$\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_{n-r}$ 是齐次线性方程组 $Ax=0$ 的一个基础解系，所含向量个数恰为 $n-r$ 个.

四、求 $A_{m\times n}x=0$ 的基础解系的方法

（1）利用初等行变换将系数矩阵A化为行最简形，求出 $R(A)=r$

（2）从行最简形写回线性方程组，并将每个首非零元素对应的变量放在等号的左边，其余*n*-*r*个变量（称为自由未知量）移到等号的右边，

（3）对自由未知变量 $x_{r+1},x_{r+2},\cdots,x_n$ 分别赋值

$$\begin{pmatrix} x_{r+1} \\ x_{r+2} \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \cdots, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$$

得解向量 $\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_{n-r}$，即 $\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_{n-r}$ 为 $Ax=0$ 的基础解系.

例： 求解齐次线性方程组

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 - x_4 = 0, \\ 2x_1 - 5x_2 + 3x_3 + 2x_4 = 0, \\ 7x_1 - 7x_2 + 3x_3 + x_4 = 0 \end{cases}$$

的基础解系和通解.

解：对方程组的系数矩阵A作初等行变换化为行最简形矩阵

$$A=\begin{pmatrix}1 & 1 & -1 & -1\\ 2 & -5 & 3 & 2\\ 7 & -7 & 3 & 1\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1 & 0 & -2/7 & -3/7\\ 0 & 1 & -5/7 & -4/7\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$$

$R(A)=2<4$，方程组有无穷多解，$n-R(A)=2$，基础解系含两个解向量，原方程组同解于方程组

$$\begin{cases}x_1=\dfrac{2}{7}x_3+\dfrac{3}{7}x_4\\ x_2=\dfrac{5}{7}x_3+\dfrac{4}{7}x_4\end{cases}$$

选 x_3, x_4 为自由未知量，且分别取

$$\begin{pmatrix} x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

得基础解系为

$$\xi_1 = \begin{pmatrix} 2/7 \\ 5/7 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \xi_2 = \begin{pmatrix} 3/7 \\ 4/7 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

通解为

$$x = k_1\xi_1 + k_2\xi_2, k_1, k_2 \text{ 为任意常数.}$$

例： 设A是n阶方阵，$R(A)=n-1$，又α_1, α_2是齐次线性方程组$Ax=0$的两个不同的解，则$Ax=0$的通解为（　　）

（A）$k\alpha_1$ （B）$k\alpha_2$ （C）$k(\alpha_1+\alpha_2)$ （D）$k(\alpha_1-\alpha_2)$

例： 设A为$m\times n$矩阵，$R(A)=n-3$，ξ_1,ξ_2,ξ_3是齐次线性方程组$Ax=0$的三个线性无关的解向量，则$Ax=0$的基础解系为(　)

（A）ξ_1,ξ_2

（B）$\xi_1+\xi_2,\xi_2+\xi_3,\xi_3+\xi_1$

（C）$\xi_1,\xi_1-\xi_2-\xi_3,\xi_1+\xi_2+\xi_3$

（D）$\xi_1-\xi_2,\xi_2-\xi_3,\xi_3-\xi_1$

（E）与ξ_1,ξ_2,ξ_3等价的一个向量组

（F）与ξ_1,ξ_2,ξ_3等秩的一个向量组

例：设n阶矩阵A的各行元素之和均为零，且$R(A)=n-1$，则线性方程组$Ax=0$的通解为____________.

例：若$R(A_n)=n-1(n\geq 2)$，且代数余子式$A_{11}\neq 0$，则$A^*x=0$的通解为____________.

例：若B是一个非零的三阶矩阵，它的每一个列向量都是

$$\begin{cases} x_1+2x_2-2x_3=0, \\ 2x_1-x_2+\lambda x_3=0, \\ 3x_1+x_2-x_3=0 \end{cases}$$

的解，（1）求λ；（2）证明$|B|=0$.

解： 设A为上述方程组的系数矩阵，并将该方程组记为$Ax=0$.

(1) 由$B\neq 0$知，$Ax=0$有非零解，因此,$|A|=0$，即

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 2 & -1 & \lambda \\ 3 & 1 & -1 \end{vmatrix} = 0,$$

解得 $\lambda = 1$.

(2) 若 $B=(\beta_1,\beta_2,\beta_3)$，则其列向量为$Ax=0$的解，从而

$$R(B)=R\{\beta_1,\beta_2,\beta_3\}\leq 3-R(A)$$

又 $R(A)\geq 1$，故 $R(B)<3$，即 $|B|=0$.

例: 设有矩阵 $A_{m\times n}, B_{n\times s}$ 满足 $AB=O$，证明 $R(A)+R(B)\le n$.

证明: 将矩阵B按列分块为 $B=(\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_s)$，由 $AB=O$ 得

$$A\beta_j=0, j=1,2,\cdots,s,$$

即矩阵B的每个列向量均是齐次线性方程组$Ax=0$的解向量.

若$B=O$，则显然有 $R(A)+R(B)\le n$ ；

若$B\ne O$，则$Ax=0$有非零解，解空间的维数为n-$R(A)$，从而

$$R(B)=R(\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_s)\le n-R(A)$$

故 $R(A)+R(B)\le n$.

例： 设 $A_{m\times n}$ ，证明$R(A^{\mathrm{T}}A)=R(A)$.

证明： 设x为n维列向量，可证齐次线性方程组$Ax=0$与$A^{\mathrm{T}}Ax=0$同解，从而系数矩阵的秩相等.

事实上，若x满足$Ax=0$，则有$A^{\mathrm{T}}Ax=0$. 若x满足$A^{\mathrm{T}}Ax=0$，两边左乘x^{T}得$x^{\mathrm{T}}A^{\mathrm{T}}Ax=0$，即$(Ax)^{\mathrm{T}}(Ax)=0$. 可推知$Ax=0$.

因此，$Ax=0$与 $A^{\mathrm{T}}Ax=0$同解，故得证.