§3.2　向量组的线性相关性

一、线性相关和线性无关的概念

定义： 给定向量组 $A:\alpha_1,\alpha_2\cdots,\alpha_m$，如果存在不全为零的实数 $x_1,x_2,\cdots,x_m$，使得

$$x_1\alpha_1+x_2\alpha_2+\cdots+x_m\alpha_m=0$$（零向量）

则称向量组 A 是线性相关的，否则称它是线性无关的.

备注：

- 给定向量组 A，不是线性相关，就是线性无关，两者必居其一.
- 向量组 A：$a_1, a_2, \ldots, a_m$ 线性相关，通常是指 $m \geq 2$ 的情形.
- 若向量组只包含一个向量：当 a 是零向量时，线性相关；当 a 不是零向量时，线性无关.
- 向量组 A：$a_1, a_2, \ldots, a_m$ $(m \geq 2)$ 线性相关，也就是向量组 A 中，至少有一个向量能由其余 $m-1$ 个向量线性表示.

  特别地，

  - a_1, a_2 线性相关当且仅当 a_1, a_2 的分量对应成比例，其几何意义是两向量共线.

例：证明 n 维单位坐标向量组无关.

证明：设 $x_1\varepsilon_1+x_2\varepsilon_2+\cdots+x_n\varepsilon_n=0$，则

$$x_1\begin{pmatrix}1\\0\\\vdots\\0\end{pmatrix}+x_2\begin{pmatrix}0\\1\\\vdots\\0\end{pmatrix}+\cdots+x_n\begin{pmatrix}0\\0\\\vdots\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\\vdots\\0\end{pmatrix}$$

从而 $x_1=x_2=\cdots=x_n=0$，故线性无关.

例：试讨论向量组

$$\beta_1=\alpha_1+\alpha_2,\beta_2=\alpha_2+\alpha_3,\beta_3=\alpha_3+\alpha_4,\beta_4=\alpha_4+\alpha_1$$

的线性相关性.

$$\beta_1-\beta_2+\beta_3-\beta_4=0$$

例： 已知向量组$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 线性无关，且

$$\beta_1=\alpha_1,\beta_2=\alpha_1+\alpha_2,\beta_3=\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3,$$

试证明向量组 β_1,β_2,β_3 线性无关.

证明： 设 $x_1\beta_1+x_2\beta_2+x_3\beta_3=0$，即

$$x_1\alpha_1+x_2(\alpha_1+\alpha_2)+x_3(\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3)=0$$

$$(x_1+x_2+x_3)\alpha_1+(x_2+x_3)\alpha_2+x_3\alpha_3=0$$

因为 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 线性无关，所以

$$\begin{cases} x_1+x_2+x_3=0 \\ \qquad\ \ x_2+x_3=0 \\ \qquad\qquad\ \ x_3=0 \end{cases}$$

从而$x_1=x_2=x_3=0$，得证.

二、线性相关性与线性表示的关系

性质3.1 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m (m \geq 2)$ 线性相关 $\Longleftrightarrow$ 其中至少有一个向量可由其余向量线性表示.

例如:

$$\alpha_1=(1,2,0,1)^T,\alpha_2=(1,-1,1,3)^T,\alpha_3=(1,5,-1,-1)^T \Rightarrow \alpha_3=2\alpha_1-\alpha_2$$

即 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 线性相关，且 α_3 可 α_1,α_2 由线性表示.

分别以 $\alpha_1^T,\alpha_2^T,\alpha_3^T$ 的分量为系数的齐次线性方程组，即，

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + \qquad x_4 = 0 \\ x_1 - x_2 + x_3 + 3x_4 = 0 \\ x_1 + 5x_2 - x_3 - x_4 = 0 \end{cases}$$

说明第三个方程是前面两个的线性组合，由消元法知，

第三个方程多余.

研究向量组的线性相关性对于了解线性方程组中哪些为多余方程、哪些可作为与原方程组同解的保留方程组有密切的联系.

例 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$为$s$个向量组成的向量组,则下列哪些说法是正确的( )

(A) 若α_s不能由$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_{s-1}$线性表示，则$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$线性无关

(B) $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_{s-1}$线性相关，且存在不全为 0 的数$k_1,k_2,\cdots,k_{s\text{-}1}$使得$k_1\alpha_1+\cdots+k_{s-1}\alpha_{s-1}+0\cdot\alpha_s=0$，则$\alpha_s$不能由$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_{s-1}$线性表示

(C) $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$线性相关,则其中任一向量均可由其余向量线性表示

(D) $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$线性无关,则任一向量均不可由其余向量线性表示

(E) $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$线性相关，且$\alpha_s$不可由$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_{s-1}$线性表示，则$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_{s-1}$线性相关

注:

① $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m$线性相关，不能保证每个向量均可由其余向量线性表示，存在即可.

② $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m$线性无关的充要条件是任一向量均不可由其余向量线性表示.

性质3.2 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m$ 线性无关，$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m,\beta$ 线性相关，则 β 可以由 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m$ 唯一线性表示.

证明： 由 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m,\beta$ 线性相关，知存在不全为零的数 $x_1,x_2,\cdots,x_m,x$ 使得

$$x_1\alpha_1+x_2\alpha_2+\cdots+x_m\alpha_m+x\beta=0$$

由 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m$ 线性无关，可得 $x\neq 0$，因此

$$\beta=-\frac{x_1}{x}\alpha_1-\frac{x_2}{x}\alpha_2-\cdots-\frac{x_m}{x}\alpha_m$$

即 β 可由 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m$ 线性表示.

再证表示式的唯一性. 设

$$\beta = l_1\alpha_1 + l_2\alpha_2 + \cdots + l_m\alpha_m$$

及

$$\beta = k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2 + \cdots + k_m\alpha_m$$

于是

$$(l_1 - k_1)\alpha_1 + (l_2 - k_2)\alpha_2 + \cdots + (l_m - k_m)\alpha_m = 0$$

因 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m$ 线性无关，故 $l_i = k_i,(i = 1,2,\cdots,m)$. 表示式唯一.

思考题：已知β可由向量组$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$线性表示，但不可由向量组(I) $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_{s-1}$线性表示，记(II) $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_{s-1},\beta$，则(　　)

（A） α_s不可由向量组(I)线性表示，但可由向量组(II)线性表示

（B） α_s不可由向量组(I)线性表示，也不可由向量组(II)线性表示

（C） α_s可由向量组(I)线性表示，也可由向量组(II)线性表示

（D） α_s可由向量组(I)线性表示，不可由向量组(II)线性表示

三、线性相关性的判定

性质3.3 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m$ 线性相关，则 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m,\alpha_{m+1}$ 也线性相关。

(逆否命题) 若 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m,\alpha_{m+1}$ 线性无关，则 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m$ 也线性无关。

注： 部分相关，则整体相关；

整体无关，则部分无关。

例: 设 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 线性相关，$\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$ 线性无关，证明:

(1) α_1 能由 α_2,α_3 线性表示;

(2) α_4 不能由 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 线性表示.

解: (1) 由 $\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$ 线性无关，得 α_2,α_3 线性无关.

又 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 线性相关，故 α_1 能由 α_2,α_3 线性表示.

(2) 反证法 若 α_4 能由 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 线性表示，由(1)得

α_4 能由 α_2,α_3 线性表示，所以 $\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$ 线性相关.

与题设矛盾，故 α_4 不能由 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 线性表示.

性质3.4 设有两个向量组

$$A:\alpha_j=(\alpha_{1j},\alpha_{2j},\cdots,\alpha_{rj})^T,\ j=1,\cdots,m$$

$$B:\beta_j=(\alpha_{1j},\alpha_{2j},\cdots,\alpha_{rj},\alpha_{r+1,j},\cdots,\alpha_{nj})^T,\ j=1,\cdots,m$$

即 β_j 是由 α_j 加上 $n-r$ 个分量得到的，则

(1) 若B线性相关，则A线性相关；

(2) 若A线性无关，则B线性无关. ((1)逆否命题)

注：高维相关，则低维相关；

低维无关，则高维无关.

与添加的个数和位置无关！

思想:

B线性相关 $x_1\beta_1+x_2\beta_2+\cdots+x_m\beta_m=0$ 等价于方程组(1)有非零解。同样，A线性相关，等价于方程组(2)有非零解.

$$\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1m}x_m=0 \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots+a_{2m}x_m=0 \\ \cdots \\ a_{r1}x_1+a_{r2}x_2+\cdots+a_{rm}x_m=0 \\ a_{r+1,1}x_1+a_{r+1,2}x_2+\cdots+a_{r+1,m}x_m=0 \\ \cdots \\ a_{n1}x_1+a_{n2}x_2+\cdots+a_{nm}x_m=0 \end{cases} \quad (1)$$

$$\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1m}x_m=0 \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots+a_{2m}x_m=0 \\ \cdots \\ a_{r1}x_1+a_{r2}x_2+\cdots+a_{rm}x_m=0 \end{cases} \quad (2)$$

显然，当方程组(1)有非零解时，方程组(2)也有非零解. 因此，当向量组 $\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_m$ 线性相关时，向量组$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m$ 也线性相关.

性质3.5 设A是一个n阶方阵，则：

(1) $|A| = 0 \Leftrightarrow$ A的行（列）向量组线性相关；

(2) $|A| \neq 0 \Leftrightarrow$ A的行（列）向量组线性无关.

思想: $A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12}\cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2}\cdots & a_{nn} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\alpha_1 & \alpha_2\cdots & \alpha_n\end{pmatrix}$

$$x_1\alpha_1+x_2\alpha_2+\cdots+x_n\alpha_n=0$$

$$\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_n=0 \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots+a_{2n}x_n=0 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{n1}x_1+a_{n2}x_2+\cdots+a_{nn}x_n=0 \end{cases}$$

$|A|=0$，有非零解

例： 设A是n阶方阵，且其行列式$|A|=0$，则下列说法中正确的是(　　)

（A）　A中必有一列元素全为 0

（B）　A中必有两列元素对应成比例

（C）　A中必有一个列向量可由其余列向量线性表示

（D）　A中任意列向量均可由其余列向量线性表示

性质3.6 当$m>n$时，m个n维向量线性相关.

思想： m个未知数，n个方程，必有非零解.

$$x_1\alpha_1+x_2\alpha_2+\cdots+x_m\alpha_m=0$$

$$\begin{pmatrix}\alpha_1 & \alpha_2\cdots & \alpha_m\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a_{11} & a_{12}\cdots & a_{1m}\\ \cdots & \cdots & \cdots\\ a_{n1} & a_{n2}\cdots & a_{nm}\end{pmatrix}$$

$$\begin{cases}a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1m}x_m=0\\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots+a_{2m}x_m=0\\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\ a_{n1}x_1+a_{n2}x_2+\cdots+a_{nm}x_m=0\end{cases}$$

性质3.7 如果 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$ 可由 $\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_t$ 线性表示，且 $s>t$，则 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$ 线性相关.

证 向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$ 可由 $\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_t$ 线性表示，则存在矩阵 $K_{t\times s}$，使得

$$(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s)=(\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_t)K.$$

令 $K=(\gamma_1,\gamma_2,\cdots,\gamma_s)$，因 $s>t$，故 $\gamma_1,\gamma_2,\cdots,\gamma_s$ 线性相关.
因此，存在不全为零的数 $x_1,x_2,\cdots,x_s$ 使得

$$K\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\\vdots\\x_s\end{pmatrix}=(\gamma_1,\gamma_2,\cdots,\gamma_s)\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\\vdots\\x_s\end{pmatrix}=0,$$

从而

$$(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s)\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\\vdots\\x_s\end{pmatrix}=(\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_t)K\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\\vdots\\x_s\end{pmatrix}=0$$

所以 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$ 线性相关.

推论3.1 若 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$ 可由 $\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_t$ 线性表示，且 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$ 线性无关，则 $s\le t$.

推论3.2 两个线性无关等价的向量组必含有相同个数的向量.

例：下列向量组中线性无关的是(　　)

（A）　(1,2,3,4), (4,3,2,1), (0,0,0,0)

（B）　(a,b,c), (b,c,d), (c,d,e), (d,e,f)

（C）　(a,1,b,2,3), (c,0,d,4,5), (e,0,f,0,6)

（D）　(a,1,2,3), (b,1,2,3), (c,4,2,3), (d,0,0,0)

性质3.8 设n维向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$ 线性无关，且

$$(\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_s)=(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s)\begin{pmatrix} k_{11} & k_{12} & \cdots & k_{1s} \\ k_{21} & k_{22} & \cdots & k_{2s} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ k_{s1} & k_{s2} & \cdots & k_{ss} \end{pmatrix}$$

则

$$\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_s\text{线性无关} \Leftrightarrow \begin{vmatrix} k_{11} & k_{12} & \cdots & k_{1s} \\ k_{21} & k_{22} & \cdots & k_{2s} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ k_{s1} & k_{s2} & \cdots & k_{ss} \end{vmatrix} \neq 0$$

例： 已知向量组$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 线性无关，讨论向量组

$$\alpha_1+\alpha_2,\alpha_2+\alpha_3,\alpha_3+\alpha_1$$

的线性相关性.

解： 易知

$$(\alpha_1+\alpha_2,\alpha_2+\alpha_3,\alpha_3+\alpha_1)=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)\begin{pmatrix}1&0&1\\1&1&0\\0&1&1\end{pmatrix}$$

因为 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 线性无关，且 $\begin{vmatrix}1&0&1\\1&1&0\\0&1&1\end{vmatrix}=2\neq 0$ ，

所以 $\alpha_1+\alpha_2,\alpha_2+\alpha_3,\alpha_3+\alpha_1$ 线性无关.

例：n维向量组$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m(3\le m\le n)$线性无关的充要条件是（ ）

(A)存在一组全为零的数$k_1,k_2,\cdots,k_m$使得$k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+\cdots+k_m\alpha_m=0$

(B) $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m$中任意两个向量都线性无关

(C) $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m$中任意向量都不能由其余向量线性表示

(D)存在不全为零的一组数$k_1,k_2,\cdots,k_m$使得$k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+\cdots+k_m\alpha_m\ne 0$

例： 下列说法错误的是（　　　　）.

（A）若向量组$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$线性无关，则其中任意两个向量线性无关

（B）若向量组$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$中任意两个向量线性无关，则向量组$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$线性无关

（C）向量组$\alpha_1-\alpha_2$，$\alpha_2-\alpha_3$，$\alpha_3-\alpha_1$线性相关

（D）若向量组$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$线性无关，则向量组$\alpha_1$，$\alpha_1+\alpha_2$，$\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3$也线性无关

例：α,β,γ线性无关，α,β,δ线性相关，则（　　）.

（A）α必可由β,γ,δ线性表示

（B）β必不可由α,γ,δ线性表示

（C）δ必可由α,β,γ线性表示

（D）δ必不可由α,β,γ线性表示