计算方法

第一章 插值方法

胡 敏
合肥工业大学 计算机与信息学院
jsjxhumin@hfut.edu.cn
uhnim@163.com

第 1 章　插值方法

1.7 分段插值法

1.8 样条函数

1.9 曲线拟合的最小二乘法

1.7 分段插值法

一、为何要进行分段低次插值

1、是否是插值多项式的次数越高，精度就越高？

2、龙格(**Runge**)现象：在端点发生激烈的震荡现象！

3、解决问题的方法:分段插值.

1、是否是插值多项式的次数越高，精度就越高？

插值的目的就是数值逼近的一种手段，而数值逼近，为得是得到一个数学问题的精确解或足够精确的解。那么，是否插值多项式的次数越高，越能够达到这个目的呢？现在，我们来讨论一下这个问题。

我们已经知道：f(x)在n+1个节点x_i(i=0，1，2，…，n)上的n次插值多项式P_n (x) 的余项

$$R(x)=f(x)-P_n(x)=\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}\prod_{i=0}^{n}(x-x_i)$$

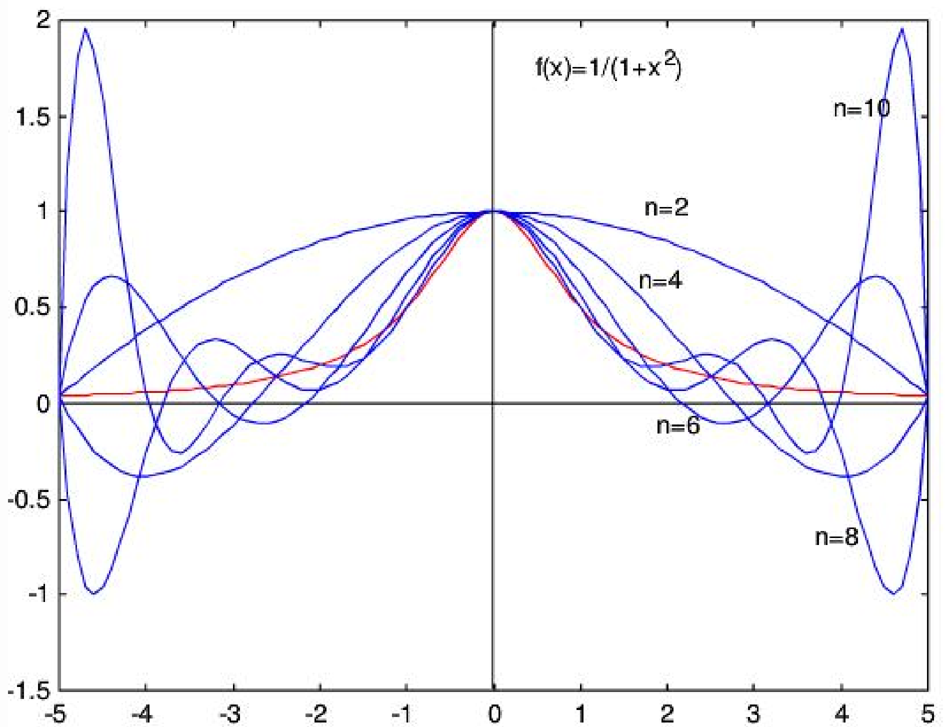
设想当节点数增多时会出现什么情况。由插值余项可知，当f(x)充分光滑时时，余项随n增大而趋于0的，这说明可用增加节点的方法达到这个目的，那么实际是这样吗？

2、龙格Runge现象

插值多项式的次数越高是否越好？通过实例分析知道，并非插值多项式的次数越高，逼近效果越好。随着插值多项式次数的增大以及逼近区间的增大，使得在逼近区间发生振荡现象。从而使得逼近效果不理想（**龙格Runge现象**）。从如图1－8可以看出这一点。

龙格Runge现象

例：在[–5, 5]上考察$f(x)=\dfrac{1}{1+x^2}$的$L_n(x)$。取$x_i=-5+\dfrac{10}{n}i \quad (i=0,\dots,n)$



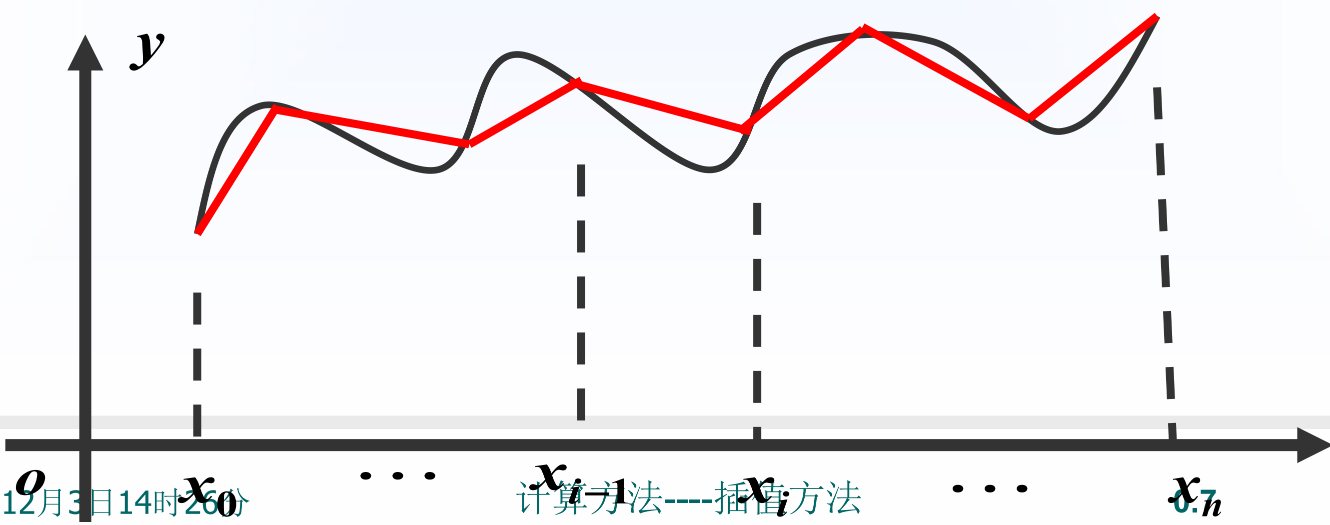
Runge现象

$L_n(x) \not\to f(x)$

这种插值多项式当节点增加时反而不能更好地接近被插之数的现象，称为**龙格现象**。

同时，插值误差除来自截断误差外，还来自初始数据的误差和计算过程中的舍入误差。插值次数越高，计算工作量越大，积累误差也可能越大。

因此，在实际操作作过程中，常常用分段低次插值进行计算，即把整个插值区间分成若干个小区间，在每个小区间上进行低次插值。



二、分段插值的基本概念

1、分段插值

就是将被插值函数逐段多项式化。

2、基本方法

•分划: $\Delta : a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b$

并在每个子段 $[x_i, x_{i+1}]$上构造插值多项式

•将每个子段上的插值多项式组合在一起，作为整个区间 $[a,b]$上的插值函数。这样构造的插值多项式就是分段插值多项式。

如果函数 $S_k(x)$ 在分划 Δ 的每个子段上 $[x_i, x_{i+1}]$ 都是 k 次式，则称 $S_k(x)$ 为具有分划 Δ 的分段 k 次式。点 $x_i(i=0,1,\cdots,n)$ 称作 $S_k(x)$ 的节点。

三、分段线性插值

1、问题7　求作具有分划Δ的分段一次$S_1(x)$，使成立

$$S_1(x_i)=y_i,(i=0,1,\cdots,n)$$

解：注意到每个子段$[x_i,x_{i+1}]$上$S_1(x)$都是一次式，且成立 $S_1(x_i)=y_i$，$S_1(x_{i+1})=y_{i+1}$，知

$$S_1(x)=\varphi_0(\frac{x-x_i}{h_i})y_i+\varphi_1(\frac{x-x_i}{h_i})y_{i+1}$$

式中$h_i=x_{i+1}-x_i$,而

满足 $\begin{cases}\varphi_0(0)=1,\varphi_0(1)=0\\ \varphi_1(0)=0,\varphi_1(1)=1\end{cases}$

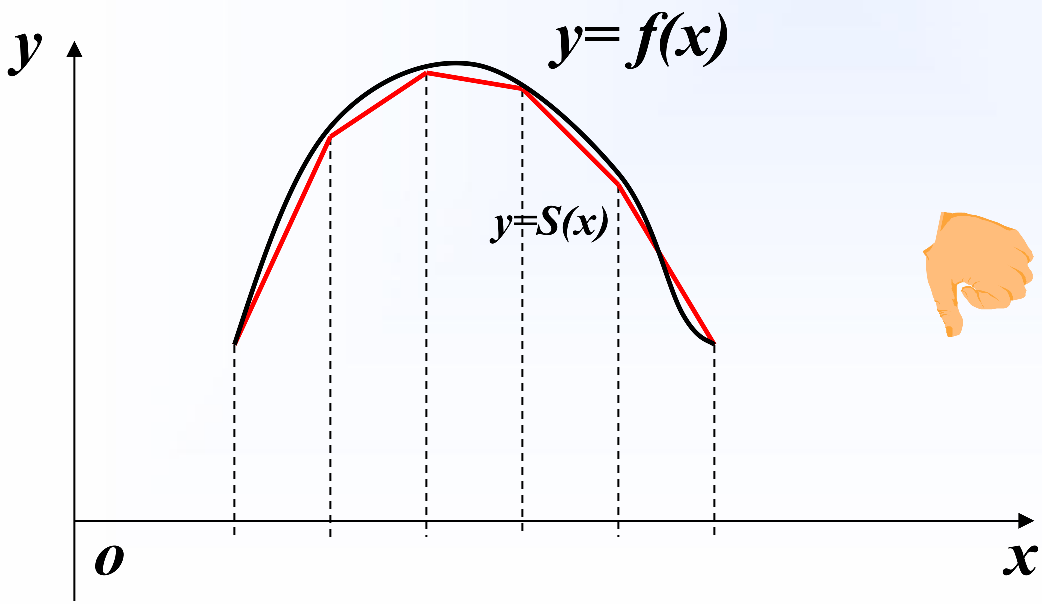
$$\varphi_0(x)=1-x,\varphi_1(x)=x$$

分段线性插值

在每个区间$[x_i, x_{i+1}]$上，用1阶多项式 (直线) 逼近 $f(x)$:

$$f(x) \approx S_1(x) = \frac{x - x_{i+1}}{x_i - x_{i+1}} y_i + \frac{x - x_i}{x_{i+1} - x_i} y_{i+1} \qquad x \in [x_i, x_{i+1}]$$

记 $h = \max |x_{i+1} - x_i|$，易证：当 $h \to 0$时，$S_1^h(x) \xrightarrow{\text{一致}} f(x)$



失去了原函数的光滑性。

2、误差估计

定理5

设 $f(x)\in C^2[a,b], f(x_i)=y_i\ (i=0,1,\cdots,n)$ 已给出，则当 $x\in[a,b]$ 时，对于问题7的解 $S_1(x)$ 成立

$$|f(x)-S_1(x)|\le\frac{h^2}{8}\max_{a\le x\le b}|f''(x)|$$

式中 $h=\max\limits_i h_i$ ，由此得知，$S_1(x)$ 在 $[a,b]$ 上一致收敛到 $f(x)$。

分析：$$|f(x)-S_1(x)|=\left|\frac{f''(\xi)}{2}(x-x_i)(x-x_{i+1})\right|\le\frac{h^2}{8}\max_{a\le x\le b}|f''(x)|$$

分段线性插值的余项

$$\left|f(x)-s_1(x)\right| \le \max_{x_i\le x\le x_{i+1}}\left|f(x)-s_1(x)\right|$$

$$\le \left|\max_{x_i\le x\le x_{i+1}} \frac{f''(\xi_i)}{2!}(x-x_i)(x-x_{i+1})\right|$$

$$\le \frac{\max\limits_{x_i\le x\le x_{i+1}}\left|f''(x)\right|}{2!}\left(\frac{x_j-x_i}{2}\right)^2 \le \frac{h_i^2}{8}\max_{x_i\le x\le x_{i+1}}\left|f''(x)\right|$$

例：已知函数$f(x)=\dfrac{1}{1+x^2}$在区间[0,5]上取等距插值节点（如下表），求区间 [0,5]上分段线性插值函数，并利用它求出$f(4.5)$的近似值。

x_i	0	1	2	3	4	5
y_i	1	0.5	0.2	0.1	0.05882	0.03846

解：在每个小区间$[i,i+1]$上：

$$S_1(x)=y_i\varphi(\frac{x-x_i}{h_i})+y_{i+1}\varphi(\frac{x-x_i}{h_i})$$

$$=y_i(1-\frac{x-x_i}{h_i})+y_{i+1}(\frac{x-x_i}{h_i})=y_i(1-x+i)+y_{i+1}(x-i)$$

$$s(x)=\begin{cases}(1-x)+0.5x, x\in[0,1]\\0.5(2-x)+0.2(x-1), x\in[1,2]\\0.2(3-x)+0.1(x-2), x\in[2,3]\\0.1(4-x)+0.05882(x-2), x\in[3,4]\\0.05882(5-x)+0.03846(x-4), x\in[4,5]\end{cases}$$

$$P(4.5)\approx 0.05882(5-4.5)+0.03846(4.5-4)$$

$$\approx 0.04864$$

练习：对下列数据作分段线性插值，并计算 $f(1.2),f(3.3)$

xi	-3	-1	2	3	9
yi	12	5	1	6	12

解：$s_1(x) = y_i\varphi_0\left(\frac{x-x_i}{h_i}\right) + y_{i+1}\varphi_1\left(\frac{x-x_i}{h_i}\right)$

$= y_i\left(1-\frac{x-x_i}{h_i}\right) + y_{i+1}\left(\frac{x-x_i}{h_i}\right)$

$$s_1(x) = \begin{cases} 12\left(1+\frac{x+3}{2}\right)+5\left(\frac{x+3}{2}\right), x\in[-3,-1] \\ 5\left(1-\frac{x+1}{3}\right)+\frac{x+1}{3}, x\in[-1,2] \\ (1-x+2)+6(x-2), x\in[2,3] \\ 6\left(1-\frac{x-3}{6}\right)+12\left(\frac{x-3}{6}\right), x\in[3,9] \end{cases}$$

$f(1.2)\approx 5\times\left(1-\frac{1.2+1}{3}\right)+\frac{1.2+1}{3}\approx 2.0667$

$f(3.3)\approx 6-(3.3-3)+2\times(3.3-3)=6.3$

四、分段三次Hermite插值

1、问题8　求作具有分划 Δ 的分段三次式 $S_3(x)$，使成立

$$S_3(x_i)=y_i, S_3'(x_i)=y_i', \quad (i=0,1,\cdots,n)$$

解：注意到每个子段 $[x_i,x_{i+1}]$上 $S_3(x)$ 都是三次式，且成立 $S_3(x_i)=y_i$，$S_3'(x_i)=y_i'$，$S_3(x_{i+1})=y_{i+1}$，$S_3'(x_{i+1})=y_{i+1}'$，根据Hermite插值方法，由（28）式知

$$S_3(x)=\varphi_0\left(\frac{x-x_i}{h_i}\right)y_i+\varphi_1\left(\frac{x-x_i}{h_i}\right)y_{i+1}+h_i\psi_0\left(\frac{x-x_i}{h_i}\right)y_i'+h_i\psi_1\left(\frac{x-x_i}{h_i}\right)y_{i+1}' \tag{31}$$

式中$x_i \le x \le x_{i+1}$，根据Hermite插值基函数（29）式，有

$$\varphi_0(x) = (x-1)^2(2x+1)$$

$$\varphi_1(x) = x^2(-2x+3)$$

$$\psi_0(x) = x(x-1)^2 \qquad (32)$$

$$\psi_1(x) = x^2(x-1)$$

2、误差估计

定理 6

设 $f(x) \in C^4[a,b], f(x_i) = y_i, f'(x_i) = y_i' \quad (i = 0,1,\cdots,n)$ 已给出，则当 $x \in [a,b]$时，对于问题8的解 $S_3(x)$成立

$$\left| f(x) - S_3(x) \right| \le \frac{h^4}{384} \max_{a \le x \le b} \left| f^{(4)}(x) \right|$$

式中 $h = \max_i h_i$ ，由此得知，$S_3(x)$在 $[a,b]$ 上一致收敛到 $f(x)$。

关于整体误差，若 $f(x)\in C^4[a,b]$，则可按如下方式考虑：

$$|R(x)|=|f(x)-H(x)|\le\max_{1\le i\le n}|R_i(x)|$$
$$\le\max_{1\le i\le n}\left(\frac{M_i}{384}h_i^4\right)\le\frac{1}{384}\max_{1\le i\le n}M_i\max_{1\le i\le n}h_i^4$$

记 $M=\max\limits_{1\le i\le n}M_i$ $h=\max\limits_{1\le i\le n}h_i$

则有： $$|R(x)|\le\frac{M}{384}h^4$$

于是,当$h\to 0$ 时，$R(x)\to 0$.说明分段三次Hermite插值 $H(x)$ 收敛于$f(x)$ 。

例：已知函数$f(x)=\dfrac{1}{1+x^2}$在区间[0,3]上取等距插值节点（如下表），求区间[0,3]上分段三次插值函数，并利用它求出$f(1.5)$的近似值。

x_i	0	1	2
y_i	1	0.5	0.2
y_i'	0	-0.5	-0.16

解：在每个小区间$[i,i+1]$上：

$$S_3(x)=\varphi_0\left(\frac{x-x_i}{h_i}\right)y_i+\varphi_1\left(\frac{x-x_i}{h_i}\right)y_{i+1}+h_i\psi_0\left(\frac{x-x_i}{h_i}\right)y_i'+h_i\psi_1\left(\frac{x-x_i}{h_i}\right)y_{i+1}'$$

$$=y_i[(x-i-1)^2(2(x-i)+1)]+y_{i+1}[(x-i)^2(-2(x-i)+3)$$

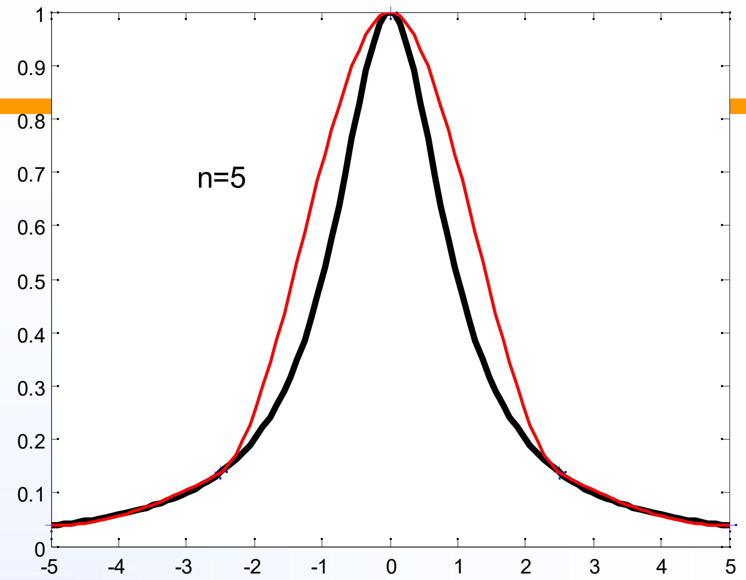
$$+y_i'[(x-i)(x-i-1)]^2+y_{i+1}'[(x-i)^2(x-i-1)$$

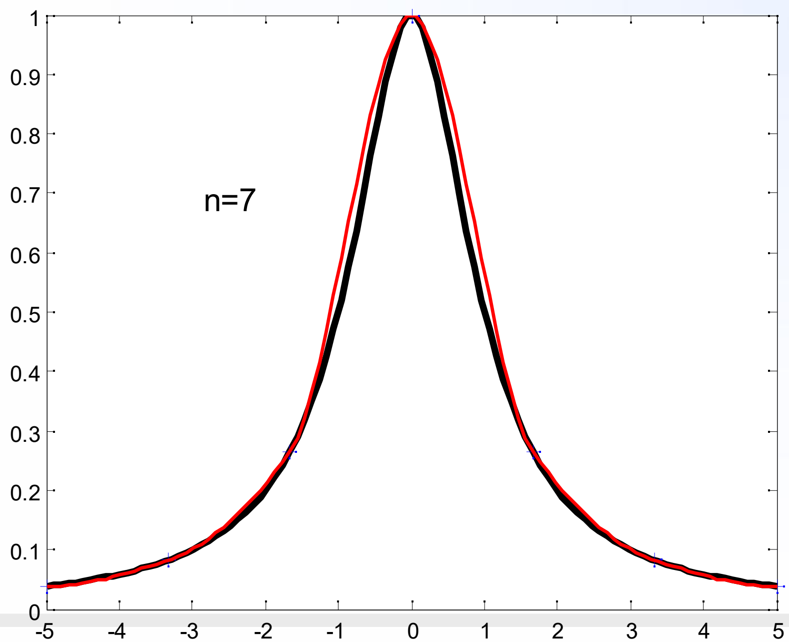
$$s_3(x)=\begin{cases}(1+2x)(x-1)^2+0.5(4-3x)x^2, x\in[0,1]\\0.5x(x-2)^2-0.04(14x-33)(x-1)^2, x\in[1,2]\end{cases}$$

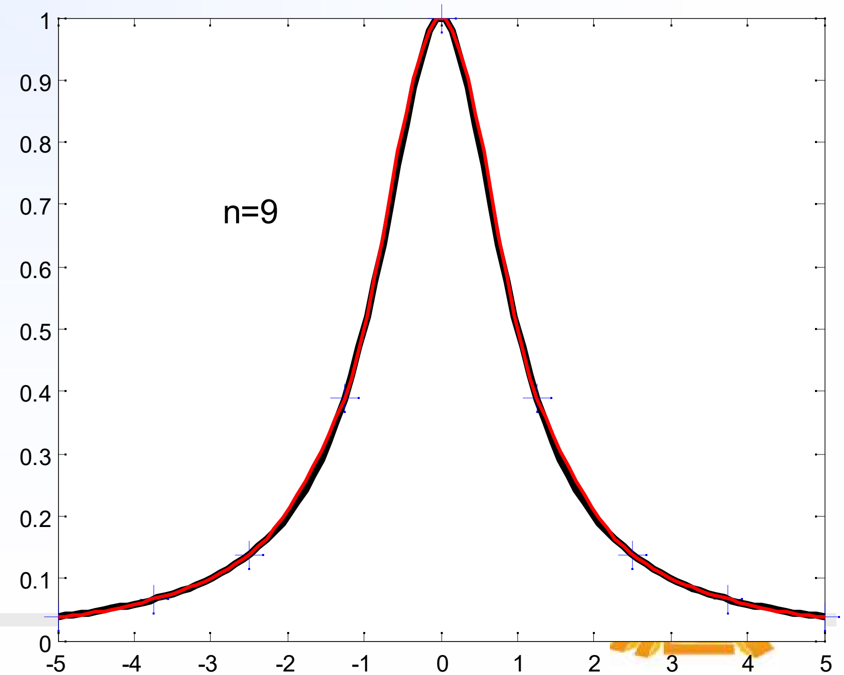
$$f(1.5)\approx 0.5\times 1.5\times(1.5-2)^2$$
$$-0.04\times(14\times 1.5-33)\times(1.5-1)^2$$
$$=0.3075$$

$$g(x)=\frac{1}{1+x^2},\quad -5\le x\le 5$$

用三次Hermite插值法求插值，并观察插值误差. 如图所示。







本节问题

1. 何为高次插值的Runge 现象，应如何避免？

2. 分段线性插值有何优缺点？如何估计误差？

3. 分段三次Hermite插值有何优缺点, 如何估计误差

$$R_i(x)=f(x)-H_i(x)=\frac{f^{(4)}(\xi_i)}{4!}(x-x_{i-1})^2(x-x_i)^2$$

4. 分段线性插值算法的程序如何设计？

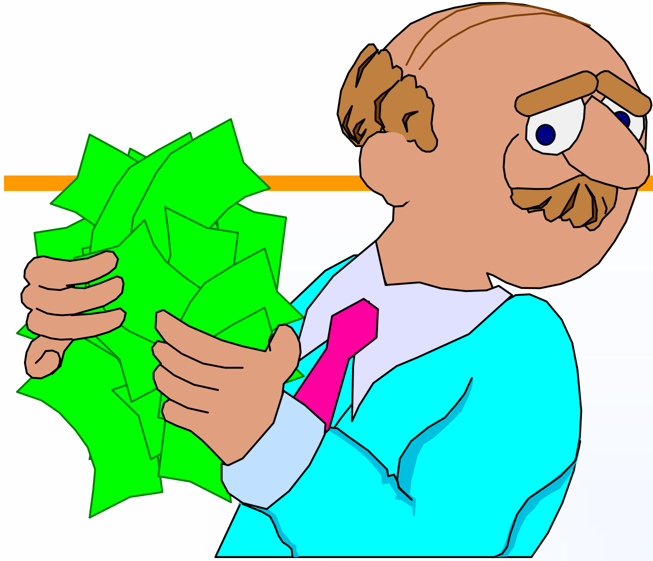
5. 如何构造满足以下条件的插值多项式并估计误差？

x_i	x_0	x_1	x_2
$f(x_i)$	y_0	y_1	y_2
$f'(x_i)$	y'_0		

分段插值的优缺点

1、优点：显式算法，方法简单，收敛性好，只要节点距离充分小，分段插值总能达到所要的精度要求，而不会象高次插值那样发生龙格现象。另一个重要特点就是局部性质。如果修改某个数据，那么插值曲线仅仅在某个局部范围受到影响，而代数插值却会影响到整个插值区间。

2、缺点：分段线性插值与分段三次埃尔米特插值（问题8）虽然改善了精度，但是这种插值要求给出各个节点上的导数值，所要提供的信息太多，同时它的光滑性也不高（只有连续的一阶导数）。改进这种插值以克服其缺点，这就是下一节介绍的三次样条插值方法（问题）。



实际上，上面介绍的分段低次插值，虽然具有计算简便，收敛性有保证，数值稳定性又好且易在计算机上实现等优点，但它却不能保证整条曲线的光滑性，从而不能满足某些工程技术上的要求，从六十年代开始，首先由于航空、造船等工程设计的需要而发展起来的样条插值（**spline)**方法，既保留了分段低次插值的各种优点，又提高了插值函数的光滑性，在许多领域显得越来越广泛的应用。

要求：插值曲线既要简单，又要在曲线的连接处比较光滑。

这样的分段插值函数在分段上要求多项式次数低，

而在节点上不仅连续，还存在连续的低阶导数，

把满足这样条件的插值函数，称为**样条插值函数**，

它所对应的曲线称为**样条曲线**，其节点称为**样点**，

这种插值方法称为——**样条插值**。

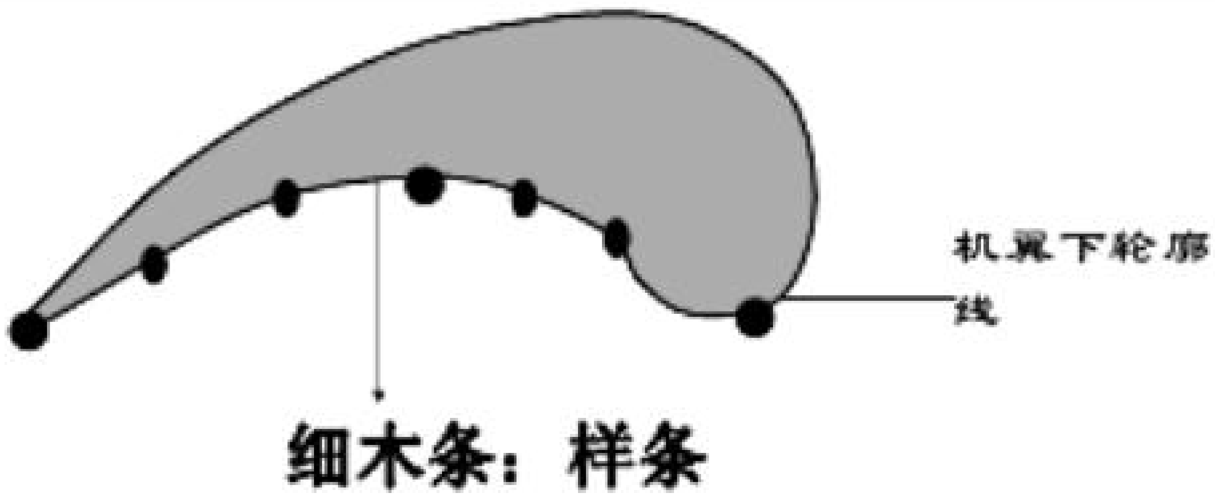
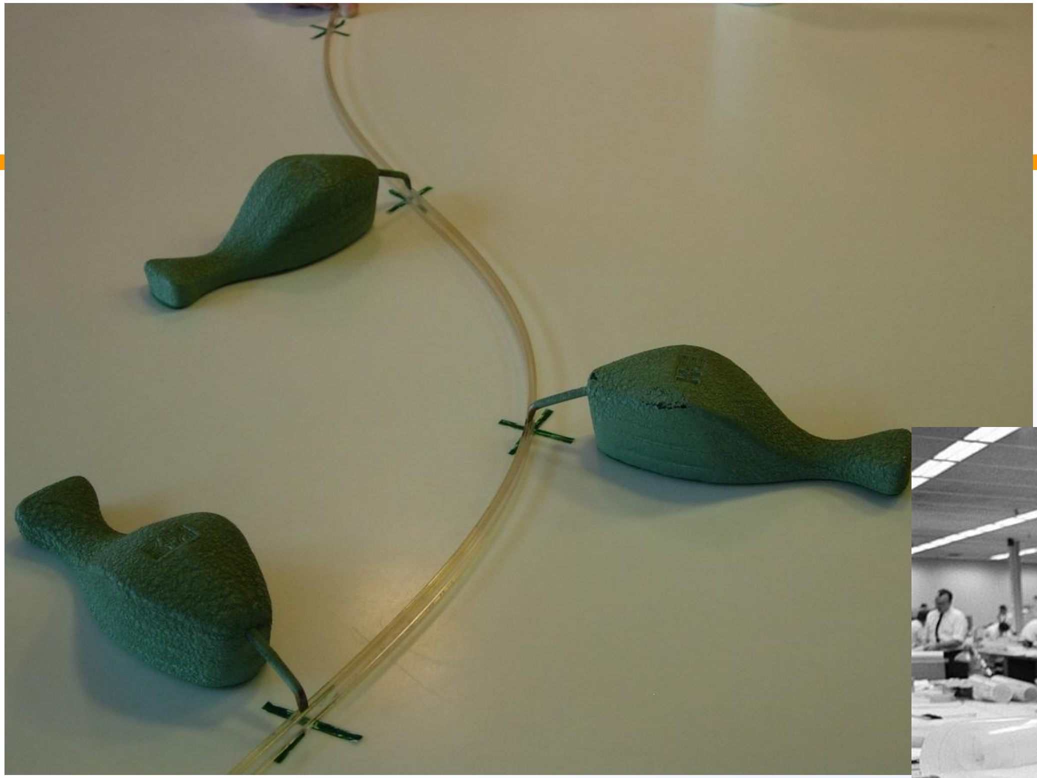


图2.1 早期机翼下轮廓的放样

如图2.1所示，在早期的板材曲线切割时，常把富有弹性的细长木条（样条）固定在样点上，其它地方让其自由弯曲，然后画出长条的曲线称为样条曲线，由此启发设计计整体连续光滑的样条插值函数。



1.8 样条函数插值

一、 样条函数的概念

1.定义 具有分划Δ：$a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b$ 的分段k次式 $S_k(x)$ 为k次样条，如果它在每个结点 $x_i(i = 1, 2, \cdots n-1)$ 上具有直到k-1阶连续导数.

点 $x_i(1 \le i \le n-1)$ 则称作样条函数 $s_k(x)$ 的节点。

特点：光滑性即外形美观，间断性则使它能转折自如，即灵活。

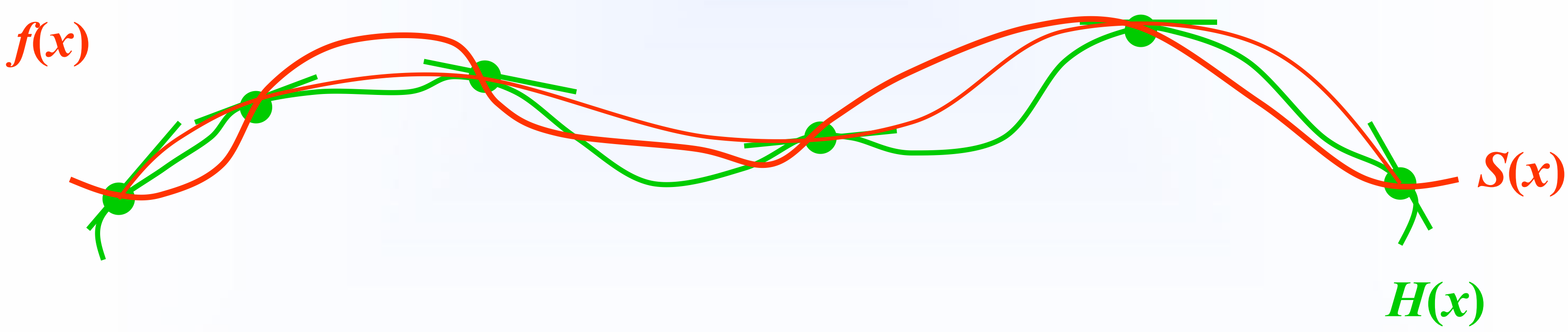
$k-1$

2、三次样条插值

特别地，称 $S_3(x)$ 为具有分划 Δ 的三次样条，如果它在分划 Δ 的每个小区间 $[x_i, x_{i+1}]$ 上都是三次式，且在每个内结点 $x_i, i=1\sim n-1$ 上具有连续的二阶导数，即成立

$$\begin{cases} S_3(x_i-0)=S_3(x_i+0) \\ S_3'(x_i-0)=S_3'(x_i+0) \\ S_3''(x_i-0)=S_3''(x_i+0) \end{cases}, \quad i=1,2,\cdots,n-1$$

注：三次样条与分段 Hermite 插值的根本区别在于 $S(x)$自身光滑，不需要知道 f 的导数值（除了在2个端点可能需要）；而Hermite插值依赖于f 在所有插值点的导数值。



三次样条插值的实质与特点

实质：分段插值。

特点：插值函数具有二阶连续导数。

三次样条插值函数的求解

分析：

1、区间 $[x_k, x_{k+1}]$ 上的三次多项式，共需待定系数 $4n$ 个。

2、已知条件有

$$S(x_j) = f(x_j), \quad j = 0,1,2,\cdots,n, \qquad n+1 \text{ 个}$$

$$S(x_j - 0) = S(x_j + 0), \quad j = 1,2,\cdots,n-1, \qquad n-1 \text{ 个}$$

$$S'(x_j - 0) = S'(x_j + 0), \quad j = 1,2,\cdots,n-1, \qquad n-1 \text{ 个}$$

$$S''(x_j - 0) = S''(x_j + 0), \quad j = 1,2,\cdots,n-1, \qquad n-1 \text{ 个}$$

共计 $4n-2$ 个

解决的办法：引入边界条件。

边界条件：在确定三次样条插值函数时，所缺少的两个条件由插值区间[a, b]的边界点a、b 处给出，这个条件通常被称为边界条件。

边界条件的类型

- (1) 已知一阶导数值；
- (2) 已知二阶导数值；
- (3) 被逼近函数是周期函数。

1、 $S'(x_0) = f'(x_0), \quad S'(x_n) = f'(x_n)$

边界条件

2、 $S''(x_0) = f''(x_0), \quad S''(x_n) = f''(x_n)$

特别 $S''(x_0) = S''(x_n) = 0$

称自然边界条件

3、 周期性条件

$$S'(x_0 + 0) = S'(x_n - 0),$$
$$S''(x_0 + 0) = S''(x_n - 0)$$

问题9 求作具有分划Δ 的三次样条 $S_3(x)$，使满足

$$S_3(x_i)=y_i\,,\quad i=0,1,\cdots,n$$

$$S_3'(x_0)=y_0'\,,\quad S_3'(x_n)=y_n'$$

求三次样条插值函数的基本思想：先利用一阶（或二阶）导数$S'(x)(S''(x))$在内节点 $x_i(i=1,2,\cdots,n-1)$ 上的连续性以及边界条件，列出确定二阶（一阶）导数(例如：$m_i=S'(x_i)(i=0,1,2,\cdots,n-1)$) 的线性方程组，并由此解出 m_i，然后用 m_i来表达$S_3(x)$.

1. 用一阶导数表示的三次样条

设 $S_3'(x_i)=m_i=f'(x_i),\ i=0\sim n$ ，则在 $[x_i,x_{i+1}]$ 上插值条件为

$$S_3(x_i)=y_i,\ S_3'(x_i)=m_i,\ S_3(x_{i+1})=y_{i+1},\ S_3'(x_{i+1})=m_{i+1}$$

问题：关键在于参数导数值的选择。

方法：样条函数的构造用待定系数法。

三次样条插值函数为：

$$s_3(x)=\varphi_0\left(\frac{x-x_i}{h_i}\right)y_i+\varphi_1\left(\frac{x-x_i}{h_i}\right)y_{i+1}$$

$$+h_i\psi_0\left(\frac{x-x_i}{h_i}\right)m_i+h_i\psi_1\left(\frac{x-x_i}{h_i}\right)m_{i+1}$$

（35）

其中 $h_i=x_{i+1}-x_i, x\in[x_i,x_{i+1}]$，而

$$\varphi_0(x)=(x-1)^2(2x+1), \varphi_1(x)=x^2(-2x+3)$$

$$\psi_0(x)=x(x-1)^2, \qquad \psi_1(x)=x^2(x-1)$$

不论如何确定参数 m_i ，这样构造出的三次样条插值函数在每个节点 x_i 上均连续且有连续的一阶导数，现在的问题是如何确定参数 m_i 使其二阶导数也连续。对 $s_3(x)$ 求两次导数，并计算在子区间 $[x_i, x_{i+1}]$ 的端点上的导数值有

$$s_3''(x_i) = 6\frac{y_{i+1} - y_i}{h_i^2} - \frac{4m_i + 2m_{i+1}}{h_i} \qquad (36)$$

$$s_3''(x_{i+1}) = -6\frac{y_{i+1} - y_i}{h_i^2} + \frac{2m_i + 4m_{i+1}}{h_i} \qquad (37)$$

为了保证二阶导数的连续性，要求成立

$$s_3''(x_i - 0) = s_3''(x_i + 0), \qquad (38)$$

$$(i = 1, 2, \cdots, n-1)$$

即要求（36）与（37）相容，即把（37）式中的 $i+1$ 改写为 i，i 改写为 $i-1$，因而有

$$s_3''(x_i) = -6\frac{y_i - y_{i-1}}{h_{i-1}^2} + \frac{2m_{i-1} + 4m_i}{h_{i-1}} \qquad (37')$$

把（37'）和（36）式代入（38），有

$$\frac{m_{i-1}+2m_i}{h_{i-1}}+\frac{2m_i+m_{i+1}}{h_i}=3\left(\frac{y_i-y_{i-1}}{h_{i-1}^2}+\frac{y_{i+1}-y_i}{h_i^2}\right)$$

令

$$\alpha_i=\frac{h_{i-1}}{h_{i-1}+h_i},\beta_i=3\left((1-\alpha_i)\frac{y_i-y_{i-1}}{h_{i-1}}+\alpha_i\frac{y_{i+1}-y_i}{h_i}\right)$$

（39）

$f[x_{i-1},x_i]$ $f[x_i,x_{i+1}]$

差商

则式（38）可表示为

$$(1-\alpha_i)m_{i-1}+2m_i+\alpha_i m_{i+1}=\beta_i$$

（40）

并注意到 $m_0=y_0', m_n=y_n'$

因而有三对角方程组（基本方程组）

$$\begin{cases} 2m_1+\alpha_1 m_2=\beta_1-(1-\alpha_1)y_0' \\ (1-\alpha_2)m_1+2m_2+\alpha_2 m_3=\beta_2 \\ \qquad\qquad \cdots\cdots \\ (1-\alpha_{n-2})m_{n-3}+2m_{n-2}+\alpha_{n-2}m_{n-1}=\beta_{n-2} \\ (1-\alpha_{n-1})m_{n-2}+2m_{n-1}=\beta_{n-1}-\alpha_{n-1}y_n' \end{cases}$$

其系数行列式是一个三对角行列式，在后面将用追赶方法求其解，于是得到分段插值多项式，即三次样条函数。

或者

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & & & & \\ 1-\alpha_1 & 2 & \alpha_1 & & & \\ & 1-\alpha_2 & 2 & \alpha_2 & & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & & 1-\alpha_{n-1} & 2 & \alpha_{n-1} \\ & & & & 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} m_0 \\ m_1 \\ m_2 \\ \vdots \\ m_{n-1} \\ m_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \beta_0 \\ \beta_1 \\ \beta_2 \\ \vdots \\ \beta_{n-1} \\ \beta_n \end{pmatrix}$$

其中

$$\alpha_i = \frac{h_{i-1}}{h_i + h_{i-1}}, \qquad 1-\alpha_i = \frac{h_i}{h_i + h_{i-1}}$$

$$h_i = x_{i+1} - x_i$$

作业

P54　6、11、12、13、16、17、31、36、37