合 肥 工 业 大 学 线 性 代 数 试 卷 （A） 答 案

2022～2023 学年第 二 学期　课程代码 1400071B　课程名称 线性代数　命题教师 集体　系（所或教研室）主任审批签名 田可雷

教学班级________　学生姓名________　学号________　考试日期 2023 年 5 月 14 日 19:00-21:00　成绩________

一、填空题（每小题 3 分，共 18 分）

请将你的答案对应填在横线上：

1. -2, **2.** 1, **3.** $\frac{1}{2}$, **4.** -3,

5. 2, **6.** $(0,2)$.

二、选择题（每小题 3 分，共 18 分）

请将你所选择的字母 A, B, C, D 之一对应填在下列表格里：

题号	1	2	3	4	5	6
答案	A	D	D	B	B	C

三、（本题 12 分）

$D=\begin{vmatrix} 1 & k_1 & k_2 & k_3 \\ k_1 & 1 & 0 & 0 \\ k_2 & 0 & 1 & 0 \\ k_3 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$ 其中 k_i 为实数, $i=1,2,3$.

(1) 求 D;　(2) 若 $D=1$, 求 $k_i, i=1,2,3$.

【解】 (1)

$$D \xlongequal[i=2,3,4]{c_1+c_i\times(-k_{i-1})} \begin{vmatrix} 1-\sum\limits_{i=1}^{3}{k_i}^2 & k_1 & k_2 & k_3 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

$$=1-\sum_{i=1}^{3}{k_i}^2$$

(2) 若 $D=1$, 则 $1-\sum\limits_{i=1}^{3}{k_i}^2=1$

从而 $\sum\limits_{i=1}^{3}{k_i}^2=0$, 故 $k_1=0, i=1,2,3$.

四、（本题 10 分）

求解矩阵方程 $\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{A}^*\boldsymbol{X}+\boldsymbol{E}$. 其中 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{A}^*$ 是 $\boldsymbol{A}$ 的伴随矩阵.

【解】 (1) 原矩阵方程整理可得 $(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{A}^*)\boldsymbol{X}=\boldsymbol{E}$,

故 $\boldsymbol{X}=(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{A}^*)^{-1}$.

$\boldsymbol{A}^*=\begin{pmatrix} 3 & 0 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}$

从而 $\boldsymbol{A}-\boldsymbol{A}^*=\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}$

则 $\boldsymbol{X}=(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{A}^*)^{-1}=\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}$.

五、（本题 12 分）

若向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1=\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{\alpha}_2=\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ a \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{\alpha}_3=\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ 线性相关.

(1) 求 a;

(2) 求上述向量组的秩以及一个极大线性无关组, 并将其余向量用该极大线性无关组线性表示.

【解】 (1) 由 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性相关可知 $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & a & 1 \end{vmatrix}=0$

可得 $a=-1$.

(2) $(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3)=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{化为行最简形}]{\text{初等行变换}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

故该向量组的秩为 2,

极大无关组可取 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2$,

$\boldsymbol{\alpha}_3=\boldsymbol{\alpha}_1-\boldsymbol{\alpha}_2$.

六、（本题 12 分）

$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & a \\ 1 & -a & -1 \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{b}=\begin{pmatrix} -4 \\ 4 \\ -a^2 \end{pmatrix}$. 讨论 a 取何值时线性方程组 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$ 无解, 有唯一解, 有无穷多解? 并在有无穷多解时求其通解.

合 肥 工 业 大 学 线 性 代 数 试 卷 （A） 答 案

2022~2023 学年第__二__学期 课程代码__1400071B__ 课程名称__线性代数__ 命题教师__集体__ 系（所或教研室）主任审批签名__田可雷__

教学班级______ 学生姓名______ 学号______ 考试日期 2023 年 5 月 14 日 19:00–21:00 成绩______

【解】增广矩阵 $(\boldsymbol{A}\,\boldsymbol{b}) \xrightarrow{\text{初等行变换}} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & -4 \\ 0 & 2 & a-2 & 8 \\ 0 & 0 & (a+1)(a-4) & 2a(4-a) \end{pmatrix}$

当 $a \neq -1$ 且 $a \neq 4$ 时, 有唯一解;

当 $a = -1$ 时, 无解;

当 $a = 4$ 时, 有无穷多解

此时增广矩阵 $(\boldsymbol{A}\,\boldsymbol{b}) \xrightarrow[\text{化为行最简形}]{\text{初等行变换}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

求解原方程组等价于求解线性方程组: $\begin{cases} x_1 + 3x_3 = 0 \\ x_2 + x_3 = 4 \end{cases}$ 取 x_1, x_2 为主未知元, x_3 为自由未知元, 求得一个特解为 $\begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix}$,

对应齐次线性方程组的一组基础解系为 $\begin{pmatrix} -3 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$,

则 $\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{b}$ 的通解为 $\begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix} + k \begin{pmatrix} -3 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$, 其中 k 为任意实数.

七、（本题 12 分） 已知二次型 $f(x_1, x_2, x_3) = {x_1}^2 + a{x_2}^2 + {x_3}^2 + 2bx_1x_2 + 2x_1x_3 + 2x_2x_3$ 经过正交变换 $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \boldsymbol{P} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}$ 变为 ${y_2}^2 + 4{y_3}^2$.

(1) 求 a, b; (2) 求正交矩阵 $\boldsymbol{P}$.

【解】 (1) 二次型的矩阵为 $\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 1 & b & 1 \\ b & a & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$,

则 $\boldsymbol{A}$ 与 $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$ 相似,

故上述矩阵的行列式与迹相等. 由此可得 $a = 3, b = 1$

分别就 $\lambda = 0, 1, 4$ 时求解线性方程组 $(\lambda \boldsymbol{E} - \boldsymbol{A})\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$, 并进行单位化, 可得:

$\boldsymbol{A}$ 属于特征值 $\lambda = 0$ 的一个单位特征向量为 $\boldsymbol{\alpha}_1 = (\frac{-1}{\sqrt{2}}, 0, \frac{1}{\sqrt{2}})^T$,

$\boldsymbol{A}$ 属于特征值 $\lambda = 1$ 的一个单位特征向量为 $\boldsymbol{\alpha}_2 = (\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{-1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}})^T$,

$\boldsymbol{A}$ 属于特征值 $\lambda = 4$ 的一个单位特征向量为 $\boldsymbol{\alpha}_3 = (\frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{2}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}})^T$,

$\boldsymbol{P} = (\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_3)$.

八、（本题 6 分） $\boldsymbol{A}$ 是 n 阶非零实方阵. 证明: 线性方程组 $\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{b}$ 有解的充分必要条件是齐次线性方程组 $\boldsymbol{A}^T\boldsymbol{y} = \boldsymbol{0}$ 与 $\begin{pmatrix} \boldsymbol{A}^T \\ \boldsymbol{b}^T \end{pmatrix} \boldsymbol{y} = \boldsymbol{0}$ 的解集相同.

【证明】证法一 **充分性**: 由同解的齐次线性方程组其系数矩阵的秩等, 可得 $R(\boldsymbol{A}^T) = R\begin{pmatrix} \boldsymbol{A}^T \\ \boldsymbol{b}^T \end{pmatrix}$,

由此可得 $R(\boldsymbol{A}) = R(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{b})$, 故线性方程组 $\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{b}$ 有解.

必要性: 容易验证 $\begin{pmatrix} \boldsymbol{A}^T \\ \boldsymbol{b}^T \end{pmatrix} \boldsymbol{y} = \boldsymbol{0}$ 的解都是 $\boldsymbol{A}^T\boldsymbol{y} = \boldsymbol{0}$ 的解.

下面证明反过来也成立 (亦可类似 证法二 由秩来说明): 由于 $\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{b}$ 有解, 故必有某个 $\boldsymbol{x}_0$ 使得 $\boldsymbol{b} = \boldsymbol{Ax}_0$. 从而若 $\boldsymbol{A}^T\boldsymbol{y} = \boldsymbol{0}$, 则 $\boldsymbol{b}^T\boldsymbol{y} = (\boldsymbol{Ax}_0)^T\boldsymbol{y} = {\boldsymbol{x}_0}^T(\boldsymbol{A}^T\boldsymbol{y}) = \boldsymbol{0}$.

故 $\boldsymbol{A}^T\boldsymbol{y} = \boldsymbol{0}$ 与 $\begin{pmatrix} \boldsymbol{A}^T \\ \boldsymbol{b}^T \end{pmatrix} \boldsymbol{y} = \boldsymbol{0}$ 的解集相同.

证法二 容易验证 $\begin{pmatrix} \boldsymbol{A}^T \\ \boldsymbol{b}^T \end{pmatrix} \boldsymbol{y} = \boldsymbol{0}$ 的解都是 $\boldsymbol{A}^T\boldsymbol{y} = 0$ 的解,

故在此条件下, 上述两个齐次线性方程组解集相同的充分必要条件是它们的系数矩阵的秩相等,

亦即 $R(\boldsymbol{A}^T) = R\begin{pmatrix} \boldsymbol{A}^T \\ \boldsymbol{b}^T \end{pmatrix}$

上述等式与 $R(\boldsymbol{A}) = R(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{b})$ 等价,

这正是线性方程组 $\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{b}$ 有解的充分必要条件.