2019-2010 第一学期线代期末试卷（A）参考答案

一、填空题（每小题 4 分，共 20 分）

1. $\dfrac{81}{64}$；　2. $-\dfrac{11}{2}$；　3. $t=-3$；　4. 1；　5. $t>\dfrac{\sqrt{2}}{2}$

二、选择题（每小题 4 分，共 20 分）

1. A　2. D　3.D　4.D　5.C

三、（8 分）解：

$$D_4=\begin{vmatrix}1+a_1 & 1 & 1 & 1\\ 1 & 1+a_2 & 1 & 1\\ 1 & 1 & 1+a_3 & 1\\ 1 & 1 & 1 & 1+a_4\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1+a_1 & 1 & 1 & 1\\ -a_1 & a_2 & 0 & 0\\ -a_1 & 0 & a_3 & 0\\ -a_1 & 0 & 0 & a_4\end{vmatrix}$$

$$=a_1a_2a_3a_4\begin{vmatrix}1+\frac{1}{a_1} & \frac{1}{a_2} & \frac{1}{a_3} & \frac{1}{a_4}\\ -1 & 1 & 0 & 0\\ -1 & 0 & 1 & 0\\ -1 & 0 & 0 & 1\end{vmatrix}=a_1a_2a_3a_4\left(1+\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\frac{1}{a_3}+\frac{1}{a_4}\right)$$

四、（10 分）解：因 $\boldsymbol{P}=\begin{pmatrix}1 & 2\\ 0 & 1\end{pmatrix}$可逆，且 $\boldsymbol{P}^{-1}=\begin{pmatrix}1 & -2\\ 0 & 1\end{pmatrix}$, 则由 $\boldsymbol{AP}=\boldsymbol{P}\Lambda$得

$\boldsymbol{A}=\boldsymbol{P}\Lambda\boldsymbol{P}^{-1}$，从而

$$\boldsymbol{A}^n=\boldsymbol{P}\Lambda^n\boldsymbol{P}^{-1}=\begin{pmatrix}1 & 2\\ 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 2^n\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & -2\\ 0 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 2^{n+1}\\ 0 & 2^n\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & -2\\ 0 & 1\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}1 & -2+2^{n+1}\\ 0 & 2^n\end{pmatrix}$$

五、（12 分）解：

因

$$(\vec{\alpha}_1,\vec{\alpha}_2,\vec{\alpha}_3,\vec{\alpha}_4)=\begin{pmatrix}1 & 4 & 1 & 0\\ 2 & 5 & -1 & 3\\ 1 & 0 & -3 & 1\\ 0 & 5 & 5 & 1\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1 & 4 & 1 & 0\\ 0 & -3 & -3 & 3\\ 0 & -4 & -4 & 1\\ 0 & 5 & 5 & 1\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1 & 4 & 1 & 0\\ 0 & -1 & -1 & 1\\ 0 & 0 & 0 & -3\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$$

$$\rightarrow\begin{pmatrix}1&0&-3&0\\0&1&1&0\\0&0&0&1\\0&0&0&0\end{pmatrix}$$，则 $R(\vec{\alpha}_1,\vec{\alpha}_2,\vec{\alpha}_3,\vec{\alpha}_4)=3$, $\vec{\alpha}_1,\vec{\alpha}_2,\vec{\alpha}_4$ 为其一个极大无关组，

且 $\vec{\alpha}_3=-3\vec{\alpha}_1+\vec{\alpha}_2+0\vec{\alpha}_4$。

六、（12 分）解：

$$|A|=\begin{vmatrix}2-\lambda&2&-2\\2&5-\lambda&-4\\-2&-4&5-\lambda\end{vmatrix}=-(\lambda-1)^2(\lambda-10)$$

（1）当 $\lambda\neq 1$ 且 $\lambda\neq 10$ 时，方程有唯一解；

（2）当 $\lambda=10$ 时，$$(A,\vec{b})=\left(\begin{array}{ccc|c}-8&2&-2&1\\2&-5&-4&2\\-2&-4&-5&-11\end{array}\right)\sim\left(\begin{array}{ccc|c}2&-5&-4&2\\0&1&1&1\\0&0&0&3\end{array}\right)$$

因 $R(A)=2<R(A,\vec{b})$，方程组无解。

（3）当 $\lambda=1$ 时，

$$(A,\vec{b})=\begin{pmatrix}1&2&-2&1\\2&4&-4&2\\-2&-4&4&-2\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1&2&-2&1\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{pmatrix}$$ 因 $R(A)=1=R(A,\vec{b})<3$,

则方程有无穷多解。

七、（14 分）解：（1）二次型的矩阵为 $A=\begin{pmatrix}2&0&0\\0&3&2a\\0&2a&3\end{pmatrix}$,

由已知得 $\lambda_1=5,\ \lambda_2=2,\ \lambda_3=1$ 是 A 的三个特征值，则 $|A|=1\times2\times5$,

因 $|A|=\begin{vmatrix}2&0&0\\0&3&2a\\0&2a&3\end{vmatrix}=2(9-4a^2)$，则 $2(9-4a^2)=10$，所以 $a=1\ (a>0)$.

（2）由（1）知 $A=\begin{pmatrix}2&0&0\\0&3&2\\0&2&3\end{pmatrix}$, 且其特征值为 $\lambda_1=5,\ \lambda_2=2,\ \lambda_3=1$

当 $\lambda_1=5$ 时，解 $(A-5E)\vec{x}=\vec{0}$

因 $A-5E=\begin{pmatrix}-3&0&0\\0&-2&2\\0&2&-2\end{pmatrix}\rightarrow\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&-1\\0&0&0\end{pmatrix}$，基础解系：$\vec{\xi}_1=(0,1,1)^T$；

当λ_2=2时，解$\left(\boldsymbol{A}-2\boldsymbol{E}\right)\vec{x}=\vec{0}$

因$\boldsymbol{A}-2\boldsymbol{E}=\begin{pmatrix}0&0&0\\0&1&2\\0&2&1\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}0&1&0\\0&0&1\\0&0&0\end{pmatrix}$，基础解系：$\vec{\xi}_2=\left(\mathbf{1,0,0}\right)^{T}$；

当λ_3=1时，解$\left(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{E}\right)\vec{x}=\vec{0}$

因$\boldsymbol{A}-\boldsymbol{E}=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&2&2\\0&2&2\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&1\\0&0&0\end{pmatrix}$，基础解系：$\vec{\xi}_3=\left(\mathbf{0,-1,1}\right)^{T}$；

因A是实对称矩阵，则$\vec{\xi}_1,\vec{\xi}_2,\vec{\xi}_3$正交，单位化得

$$\vec{p}_1=\frac{\vec{\xi}_1}{\left|\vec{\xi}_1\right|}=\left(0,\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^{T},\vec{p}_2=\frac{\vec{\xi}_2}{\left|\vec{\xi}_2\right|}=\left(1,0,0\right)^{T},\vec{p}_3=\frac{\vec{\xi}_3}{\left|\vec{\xi}_3\right|}=\left(0,\ -\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^{T}.$$

令$\boldsymbol{P}=\left(\vec{p}_1,\vec{p}_2,\vec{p}_3\right)=\begin{pmatrix}0&1&0\\\frac{1}{\sqrt{2}}&0&-\frac{1}{\sqrt{2}}\\\frac{1}{\sqrt{2}}&0&\frac{1}{\sqrt{2}}\end{pmatrix}$，则$\boldsymbol{P}$为正交矩阵，且当$\vec{x}=\boldsymbol{P}\vec{y}$时，可化二次型为标准型：

$$f=5y_1^2+2y_2^2+y_3^2$$

.八、（4分）证：$R(A^TA)=R(A)$，只需证$A\vec{x}=\vec{0}$与$A^TA\vec{x}=\vec{0}$同解。

若$A\vec{x}=\vec{0}$，则$A^T\left(A\vec{x}\right)=A^T\vec{0}=\vec{0}$，即$A\vec{x}=\vec{0}$的解也是$A^TA\vec{x}=\vec{0}$的解；

若$A^TA\vec{x}=\vec{0}$，则$\vec{x}^T\left(A^TA\vec{x}\right)=\vec{x}^T\vec{0}=\vec{0}$，即$\left(A\vec{x}\right)^T\left(A\vec{x}\right)=\vec{0}$，所以$A\vec{x}=\vec{0}$，

从而$A^TA\vec{x}=\vec{0}$的解也是$A\vec{x}=\vec{0}$的解；,

综上得$A\vec{x}=\vec{0}$与$A^TA\vec{x}=\vec{0}$同解，所以$R(A^TA)=R(A)$.