课外练习题 6 参考答案

1．当常数 t 满足 $\underline{-2<t<2}$ 时，二次型 $f(x_1,x_2,x_3)=x_1^2+5x_2^2+4x_3^2+4x_1x_2-2tx_2x_3$ 正定.

2．若 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1 & 1 & 0\\ 1 & k^2+1 & 0\\ 0 & 0 & k+1\end{pmatrix}$ 是正定矩阵，则 k 应满足 $\underline{k>-1, k\neq 0}$.

3．已知二次型 $f(x_1,x_2,x_3)=2x_1^2+ax_2^2+5x_3^2+4x_1x_2-4x_1x_3-8x_2x_3$ 的秩为 2，则 $a=$ $\underline{10/3}$.

4．已知二次型 $f(x_1,x_2,x_3)=(x_1+ax_2)^2+(x_2-ax_3)^2+(x_1+x_3)^2$ 正定，则常数 a 的取值范围为 $\underline{a\neq\pm1}$.

5．设二次型 $f\left(x_1,x_2,x_3\right)=x_1^{\ 2}+2x_2^2+(1-k)x_3^{\ 2}+2kx_1x_2+2x_1x_3$ 是正定的，则 k 应满足的条件是 $\underline{-1<k<0}$.

6. 如果二次型 $f(x_1,x_2,x_3)=x_1^{\ 2}+ax_2^2+x_3^{\ 2}+2bx_1x_2+2x_1x_3+2x_2x_3$ 经过正交变换 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{P}\boldsymbol{y}$ 化为标准形 $f=y_2^2+4y_3^{\ 2}$，则（ C ）.

（A）$a=3, b=-1$　　（B）$a=-3, b=-1$

（C）$a=3, b=1$　　（D）$a=-3, b=1$

7. $\boldsymbol{A}$ 为 n 阶实对称矩阵，则 $\boldsymbol{A}$ 是正定矩阵的充要条件是（ D ）.

（A）二次型 $\boldsymbol{x}^T\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}$ 的负惯性指数为零　　（B）存在 n 阶矩阵 $\boldsymbol{C}$，使得 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{C}^T\boldsymbol{C}$

（C）$\boldsymbol{A}$ 没有负特征值　　（D）$\boldsymbol{A}$ 与单位矩阵合同

8. 设二次型 $f(x_1,x_2,x_3)=(x_1+x_2)^2+(x_2-x_3)^2+(x_3+x_1)^2$，则下列结论正确的是（ B ）.

（A）f 是正定的　（B）f 的秩是 2　（C）f 的秩是 3　（D）f 的特征值是 $1,1,1$

9．$\boldsymbol{A}$ 是 n 阶实对称矩阵，则 $\boldsymbol{A}$ 为正定的充要条件是（ C ）.

（A）$|\boldsymbol{A}|>0$　　（B）存在 n 维列向量 $\boldsymbol{\alpha}\neq\boldsymbol{0}$ 使 $\boldsymbol{\alpha}^T\boldsymbol{A}\boldsymbol{\alpha}>0$

（C）存在 n 阶可逆阵 $\boldsymbol{C}$ 使 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{C}^T\boldsymbol{C}$　　（D）对元素全不为零的向量 $\boldsymbol{x}$，总有 $\boldsymbol{x}^T\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}>0$

10．实二次型 $f(x_1,x_2,x_3)=ax_1^2+bx_2^2+ax_3^2+2cx_1x_3$ 是正定的充要条件是，实数 a,b,c 满足条件（ D ）.

（A）$a>0, b>0, c>0$　　（B）$a>c, b>0$

（C）$|a|>|c|, b>0$　　　　（D）$a>|c|, b>0$

11．设 $\boldsymbol{A}$ 是一个 n 阶矩阵，交换 $\boldsymbol{A}$ 的第 i 列和第 j 列后，再交换第 i 行和第 j 行得矩阵 $\boldsymbol{B}$，则 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 之间关系是（ D ）.

（A）等价但不相似　　　　（B）相似但不合同

（C）相似，合同但不等价　　　　（D）等价，相似，合同

12． $\boldsymbol{A}$ 为实对称矩阵，则下列成立的是（ D ）.

（A）如行列式 $|\boldsymbol{A}|>0$，则 $\boldsymbol{A}$ 正定

（B）如 $\boldsymbol{A}$ 的主对角线元素全为正，则 $\boldsymbol{A}$ 正定

（C）如 $\boldsymbol{A}^{-1}$ 存在且正定，则 $\boldsymbol{A}$ 正交

（D）如 $\boldsymbol{P}^T\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}$ 正定，其中 $\boldsymbol{P}$ 为可逆矩阵，则 $\boldsymbol{A}$ 正定

13.（15 分）求正交变换 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{P}\boldsymbol{y}$，将二次型

$$f(x_1,x_2,x_3)=x_1^2+x_2^2+x_3^2+4x_1x_2+4x_2x_3+4x_1x_3$$

化为标准形，其中 $\boldsymbol{x}=(x_1,x_2,x_3)^{\mathrm{T}},\boldsymbol{y}=(y_1,y_2,y_3)^{\mathrm{T}}$.

解： 二次型 f 的矩阵为 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&2&2\\2&1&2\\2&2&1\end{pmatrix}$，则 f 的特征多项式为

$$|\boldsymbol{A}-\lambda\boldsymbol{E}|=\begin{vmatrix}1-\lambda&2&2\\2&1-\lambda&2\\2&2&1-\lambda\end{vmatrix}=-(\lambda+1)^2(\lambda-5)$$

故 $\boldsymbol{A}$ 的特征值是 $\lambda_1=\lambda_2=-1,\lambda_3=5$.

当 $\lambda_1=\lambda_2=-1$ 时，解齐次线性方程组 $(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{E})\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$，由

$\boldsymbol{A}+\boldsymbol{E}=\begin{pmatrix}2&2&2\\2&2&2\\2&2&2\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1&1&1\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}$ 得基础解系 $\xi_1=\begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix}$, $\xi_2=\begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix}$. 将 ξ_1, ξ_2 正交化，令

$\beta_1=\xi_1=\begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix}$， $\beta_2=\xi_2-\dfrac{[\beta_1,\xi_2]}{[\beta_1,\beta_1]}\beta_1=\begin{pmatrix}-1/2\\-1/2\\1\end{pmatrix}$，再单位化，得

$$p_1=\frac{\beta_1}{\|\beta_1\|}=\begin{pmatrix}-1/\sqrt{2}\\1/\sqrt{2}\\0\end{pmatrix},\quad p_2=\frac{\beta_2}{\|\beta_2\|}=\begin{pmatrix}-1/\sqrt{6}\\-1/\sqrt{6}\\2/\sqrt{6}\end{pmatrix}.$$

（注意：也可直接得基础解系$\xi_1=\begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix}$，$\xi_2=\begin{pmatrix}1\\1\\-2\end{pmatrix}$，只需单位化即可）

当$\lambda_3=5$时，解齐次线性方程组$(\boldsymbol{A}-5\boldsymbol{E})\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$，由

$$\boldsymbol{A}-5\boldsymbol{E}=\begin{pmatrix}-4&2&2\\2&-4&2\\2&2&-4\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1&0&-1\\0&1&-1\\0&0&0\end{pmatrix}$$

得基础解系$\xi_3=\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$. 单位化得$\boldsymbol{p}_3=\begin{pmatrix}1/\sqrt{3}\\1/\sqrt{3}\\1/\sqrt{3}\end{pmatrix}$.

所求正交变换为

$$\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1/\sqrt{2}&-1/\sqrt{6}&1/\sqrt{3}\\1/\sqrt{2}&-1/\sqrt{6}&1/\sqrt{3}\\0&2/\sqrt{6}&1/\sqrt{3}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}y_1\\y_2\\y_3\end{pmatrix},$$

并将二次型f化为标准形$f=-y_1^2-y_2^2+5y_3^2$.

14.（6 分）设$\boldsymbol{A}$是n阶方阵，矩阵$\boldsymbol{B}=(\boldsymbol{\alpha}_1\ \ \boldsymbol{\alpha}_2\ \ \boldsymbol{\alpha}_3)$，其中$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$是$n$维列向量，$\boldsymbol{\alpha}_1\neq\boldsymbol{0}$，且满足$\boldsymbol{A}(\boldsymbol{\alpha}_1\ \ \boldsymbol{\alpha}_2\ \ \boldsymbol{\alpha}_3)=(\boldsymbol{\alpha}_1\ \ \ \boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2\ \ \ \boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_3)$，证明：（1）齐次线性方程组$\boldsymbol{Bx}=\boldsymbol{0}$仅有零解；（2）$\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{B}$是正定矩阵，其中$\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}$是$\boldsymbol{B}$的转置矩阵.

证明：（1）因为$\boldsymbol{A}(\boldsymbol{\alpha}_1\ \boldsymbol{\alpha}_2\ \boldsymbol{\alpha}_3)=(\boldsymbol{\alpha}_1\ \boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2\ \boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_3)$，所以$\boldsymbol{A}\boldsymbol{\alpha}_1=\boldsymbol{\alpha}_1$，$\boldsymbol{A}\boldsymbol{\alpha}_2=\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2$，$\boldsymbol{A}\boldsymbol{\alpha}_3=\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_3$，即$(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{E})\boldsymbol{\alpha}_1=\boldsymbol{O}$，$(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{E})\boldsymbol{\alpha}_2=\boldsymbol{\alpha}_1$，$(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{E})\boldsymbol{\alpha}_3=\boldsymbol{\alpha}_2$. 设存在一组数$k_1,k_2,k_3$，使得

$$k_1\boldsymbol{\alpha}_1+k_2\boldsymbol{\alpha}_2+k_3\boldsymbol{\alpha}_3=\boldsymbol{0}\qquad(*)$$

用$\boldsymbol{A}-\boldsymbol{E}$左乘（*）两次，得$k_3\boldsymbol{\alpha}_1=\boldsymbol{0}$，因为$\boldsymbol{\alpha}_1\neq\boldsymbol{0}$，所以$k_3=0$. 再用$\boldsymbol{A}-\boldsymbol{E}$左乘（*）

一次，得 $k_2\boldsymbol{\alpha}_1=\mathbf{0}$，因为 $\boldsymbol{\alpha}_1\neq\mathbf{0}$，所以 $k_2=0$．此时(*)为 $k_1\boldsymbol{\alpha}_1=\mathbf{0}$，因为 $\boldsymbol{\alpha}_1\neq\mathbf{0}$，所以 $k_1=0$．故向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性无关，于是 $\boldsymbol{B}=(\boldsymbol{\alpha}_1\ \boldsymbol{\alpha}_2\ \boldsymbol{\alpha}_3)$ 列满秩，因此齐次线性方程组 $\boldsymbol{Bx}=\mathbf{0}$ 仅有零解．

（2）对任何非零 3 维列向量 $\boldsymbol{x}$，因为方程组 $\boldsymbol{Bx}=\mathbf{0}$ 仅有零解，所以恒有 $\boldsymbol{Bx}\neq\mathbf{0}$．又因为 $\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{Bx}=(\boldsymbol{Bx})^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{Bx})=\|\boldsymbol{Bx}\|^2>0$，所以 $\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{B}$ 是正定矩阵．

15.（16 分）设有二次型 $f(x_1,x_2,x_3)=4x_2^2-3x_3^2+2ax_1x_2-4x_1x_3+8x_2x_3$（其中 a 为整数），通过正交变换化为标准形 $f=y_1^2+6y_2^2+by_3^2$，（1）求常数 a,b；（2）求化二次型为标准形的正交变换．

解：

$$f(x_1,x_2,x_3)=\begin{pmatrix}x_1 & x_2 & x_3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0 & a & -2\\ a & 4 & 4\\ -2 & 4 & -3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\end{pmatrix}\overset{\boldsymbol{x}=\boldsymbol{Qy}}{=\!=\!=}\begin{pmatrix}y_1 & y_2 & y_3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & & \\ & 6 & \\ & & b\end{pmatrix}\begin{pmatrix}y_1\\ y_2\\ y_3\end{pmatrix}$$

（1）$\begin{pmatrix}0 & a & -2\\ a & 4 & 4\\ -2 & 4 & -3\end{pmatrix}$ 相似于 $\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 6 & 0\\ 0 & 0 & b\end{pmatrix}$，故 $0+4-3=1+6+b\Rightarrow b=-6$

$\therefore\begin{vmatrix}0 & a & -2\\ a & 4 & 4\\ -2 & 4 & -3\end{vmatrix}=6b=-36$，即：$3a^2-16a+20=0$，得 $a=2$（$a=\dfrac{10}{3}$ 舍去）

（2）$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}0 & 2 & -2\\ 2 & 4 & 4\\ -2 & 4 & -3\end{pmatrix}$，当 $\lambda_1=1$ 时，由 $(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{E})\boldsymbol{x}=\mathbf{0}$ 解得 $\boldsymbol{\alpha}_1=\begin{pmatrix}-2\\ 0\\ 1\end{pmatrix}$；当 $\lambda_2=6$ 时，

由 $(\boldsymbol{A}-6\boldsymbol{E})\boldsymbol{x}=\mathbf{0}$，解得 $\boldsymbol{\alpha}_2=\begin{pmatrix}1\\ 5\\ 2\end{pmatrix}$；当 $\lambda_3=-6$ 时，由 $(\boldsymbol{A}+6\boldsymbol{E})\boldsymbol{x}=\mathbf{0}$，解得 $\boldsymbol{\alpha}_3=\begin{pmatrix}1\\ -1\\ 2\end{pmatrix}$．

将 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 单位化得：$\boldsymbol{\eta}_1=\begin{pmatrix}-2/\sqrt{5}\\ 0\\ 1/\sqrt{5}\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{\eta}_2=\begin{pmatrix}1/\sqrt{30}\\ 5/\sqrt{30}\\ 2/\sqrt{30}\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{\eta}_3=\begin{pmatrix}1/\sqrt{6}\\ -1/\sqrt{6}\\ 2/\sqrt{6}\end{pmatrix}$，故 $\boldsymbol{Q}=(\boldsymbol{\eta}_1\ \boldsymbol{\eta}_2\ \boldsymbol{\eta}_3)$，

正交变换为 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{Qy}$．

16.（14 分）已知二次型 $f(x_1,x_2,x_3)=ax_1^2-2x_1x_2+2x_1x_3+2x_2x_3$ 经过正交变换 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{P}\boldsymbol{y}$ 后化为 $f=-2y_1^2+y_2^2+y_3^2$，其中 $\boldsymbol{x}=(x_1,x_2,x_3)^T$， $\boldsymbol{y}=(y_1,y_2,y_3)^T$．求（1）常数 a；（2）正交矩阵 $\boldsymbol{P}$．

解：（1）二次型的矩阵为 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} a & -1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix},\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix} -2 & & \\ & 1 & \\ & & 1 \end{pmatrix}$．因为用正交变换化 f 为标准形，所以 f 与其标准形对应的矩阵相似，而相似矩阵的行列式相同，即由 $|\boldsymbol{A}|=|\boldsymbol{B}|$ 有

$\begin{vmatrix} a & -1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$，或由 $a+0+0=-2+1+1$ 得 $a=0$．

（2）（方法 1）这时 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$．对于 $\boldsymbol{A}$ 的特征根 $\lambda_1=-2,\lambda_2=\lambda_3=1$，解得特征向量分别为 $\xi_1=\begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$， $\xi_2=\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$， $\xi_3=\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$．将 ξ_1 单位化，得 $\boldsymbol{p}_1=\frac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$，将 ξ_2,ξ_3 正交化： 取 $\boldsymbol{\eta}_2=\xi_2,\boldsymbol{\eta}_3=\xi_3-\frac{[\boldsymbol{\eta}_2,\xi_3]}{\|\boldsymbol{\eta}_2\|^2}\boldsymbol{\eta}_2=\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}+\frac{1}{2}\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}=\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$， 再将 $\boldsymbol{\eta}_2,\boldsymbol{\eta}_3$ 单位化，得 $\boldsymbol{p}_2=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$， $\boldsymbol{p}_3=\frac{1}{\sqrt{6}}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$．将 $\boldsymbol{p}_1,\boldsymbol{p}_2,\boldsymbol{p}_3$ 构成正交矩阵

$$\boldsymbol{P}=(\boldsymbol{p}_1,\boldsymbol{p}_2,\boldsymbol{p}_3)=\begin{pmatrix} -1/\sqrt{3} & -1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{6} \\ -1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{6} \\ 1/\sqrt{3} & 0 & 2/\sqrt{6} \end{pmatrix},$$

有 $\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}=\boldsymbol{P}^T\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}=\begin{pmatrix} -2 & & \\ & 1 & \\ & & 1 \end{pmatrix}$．

（方法 2）对于 $\boldsymbol{A}$ 的特征根 $\lambda_1=-2$，$\lambda_2=\lambda_3=1$，解得特征向量分别为 $\xi_1=\begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$，$\xi_2=\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$，

$\xi_3=\begin{pmatrix}2\\-1\\1\end{pmatrix}$. 将 ξ_1 单位化，得 $p_1=\frac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix}-1\\-1\\1\end{pmatrix}$，$\xi_2,\xi_3$ 已正交，单位化，得 $p_2=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}$，

$p_3=\frac{1}{\sqrt{6}}\begin{pmatrix}2\\-1\\1\end{pmatrix}$. 由 p_1,p_2,p_3 即可构成所求正交矩阵.

17.（16 分）设矩阵 $A=\begin{pmatrix}2&-1&0\\-1&a&0\\0&0&2\end{pmatrix}$ 与 $\Lambda=\begin{pmatrix}1&&\\&2&\\&&b\end{pmatrix}$ 相似.（1）确定 a,b 的值；（2）求正交矩阵 Q，使得 $Q^TAQ=\Lambda$；（3）判定二次型 $f=x^TAx$ 的正定性，并指出方程 $x^TAx=1$ 表示何种二次曲面.

解：（1）相似矩阵性质：$\because$ A,Λ 相似，$\therefore |A|=|\Lambda|,\mathrm{tr}A=\mathrm{tr}\Lambda$，即 $\begin{cases}2(2a-1)=2b\\4+a=3+b\end{cases}$，解得：

$a=2,b=3$. 此时，$A=\begin{pmatrix}2&-1&0\\-1&2&0\\0&0&2\end{pmatrix}$，$\Lambda=\begin{pmatrix}1&&\\&2&\\&&3\end{pmatrix}$.

（2）实对称阵正交相似对角化：求 A 的特征值：由相似矩阵性质知：A 的特征值为 $\lambda_1=1,\lambda_2=2,\lambda_3=3$. 求 A 的线性无关特征向量组：

对 $\lambda_1=1$，由 $A-E=\begin{pmatrix}1&-1&0\\-1&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&-1&0\\0&0&1\\0&0&0\end{pmatrix}$ 可得：$p_1=\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}$；

对 $\lambda_2=2$，由 $A-2E=\begin{pmatrix}0&-1&0\\-1&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&0\end{pmatrix}$ 可得：$p_2=\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$；

对 $\lambda_3=3$，由 $A-3E=\begin{pmatrix}-1&-1&0\\-1&-1&0\\0&0&-1\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&1&0\\0&0&1\\0&0&0\end{pmatrix}$ 可得：$p_3=\begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix}$.

正交化、单位化，作正交阵：$\because$ 三阶实对称阵 A 有三个相异特征值，$\therefore$ p_1,p_2,p_3 两两正交.

于是，只需单位化：

$$q_1 = \frac{1}{\| p_1 \|} p_1 = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} \\ 0 \end{pmatrix}, q_2 = p_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, q_3 = \frac{1}{\| p_3 \|} p_3 = \begin{pmatrix} -1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} \\ 0 \end{pmatrix}$$

作正交矩阵$\boldsymbol{Q} = (\boldsymbol{q}_1, \boldsymbol{q}_2, \boldsymbol{q}_3)$，则$\boldsymbol{Q}^T \boldsymbol{A} \boldsymbol{Q} = \boldsymbol{\Lambda}$.

（3）二次型的正定性：$\because$ $\boldsymbol{A}$ 的三个特征值全为正，$\therefore$ $f = \boldsymbol{x}^T \boldsymbol{A} \boldsymbol{x}$ 为正定二次型．曲面 $\boldsymbol{x}^T \boldsymbol{A} \boldsymbol{x} = 1$ 经正交变换 $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{Q} \boldsymbol{y}$ 化为 $\boldsymbol{y}^T \boldsymbol{A} \boldsymbol{y} = 1$，即 $y_1^2 + 2y_2^2 + 3y_3^2 = 1$，表示椭球面.

18.（16 分）已知二次型 $f(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + 2x_2^2 + ax_3^2 - 4x_1x_2 - 4x_2x_3$ 通过正交变换可化为标准形 $f(\boldsymbol{Y}) = 2y_1^2 + 5y_2^2 + by_3^2$，求参数 a、b 及所用的正交矩阵，并判定二次型的正定性.

解：（1）二次型 $f(\boldsymbol{x})$ 的矩阵为 $\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ -2 & 2 & -2 \\ 0 & -2 & a \end{pmatrix}$，由题意 $\boldsymbol{A}$ 的特征值为 $2, 5, b$，则 $|\boldsymbol{A}| = 10b = -2a - 4,\ a + 3 = b + 7$，解得 $a = 3,\ b = -1$.

（2）记 $\boldsymbol{A}$ 的特征值为 $\lambda_1 = 2, \lambda_2 = 5, \lambda_3 = -1$，则当 $\lambda_1 = 2$ 时，解齐次线性方程组 $(\boldsymbol{A} - 2\boldsymbol{E})\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$，得特征向量为 $\xi_1 = (-2, 1, 2)^T$；当 $\lambda_2 = 5$ 时，解齐次线性方程组 $(\boldsymbol{A} - 5\boldsymbol{E})\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$，得特征向量为 $\xi_2 = (1, -2, 2)^T$；当 $\lambda_3 = -1$ 时，解齐次线性方程组 $(\boldsymbol{A} + \boldsymbol{E})\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$，得特征向量为 $\xi_3 = (2, 2, 1)^T$．因为实对称矩阵不同特征值所对应的特征向量相互正交，所以 ξ_1, ξ_2, ξ_3 构成一个正交向量组．将它们单位化，得

$$\eta_1 = \frac{1}{\|\xi_1\|} \xi_1 = \left(-\frac{2}{3}, \frac{1}{3}, \frac{2}{3} \right)^T, \quad \eta_2 = \left(\frac{1}{3}, -\frac{2}{3}, \frac{2}{3} \right)^T, \quad \eta_3 = \frac{1}{\|\xi_3\|} \xi_3 = \left(\frac{2}{3}, \frac{2}{3}, \frac{1}{3} \right)^T$$

故所求的正交矩阵为 $\boldsymbol{P} = (\eta_1, \eta_2, \eta_3) = \begin{pmatrix} -2/3 & 1/3 & 2/3 \\ 1/3 & -2/3 & 2/3 \\ 2/3 & 2/3 & 1/3 \end{pmatrix}$.

（3）该二次型不是正定型

19. 设 $\boldsymbol{A}$ 为 n 阶正定矩阵，$\boldsymbol{B}$ 为 n 阶实反对称矩阵，证明 $\boldsymbol{A} - \boldsymbol{B}^2$ 为正定矩阵.

证明：对任意 n 维非零向量 $\boldsymbol{x}$，$\boldsymbol{x}^T (\boldsymbol{A} - \boldsymbol{B}^2) \boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}^T \boldsymbol{A} \boldsymbol{x} + \boldsymbol{x}^T \boldsymbol{B}^T \boldsymbol{B} \boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}^T \boldsymbol{A} \boldsymbol{x} + \|\boldsymbol{B} \boldsymbol{x}\|^2$，

由于 $\boldsymbol{A}$ 为 n 阶正定矩阵， $\boldsymbol{x}^{T}\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}>0$，而 $\|\boldsymbol{B}\boldsymbol{x}\|\geq 0$，故 $\boldsymbol{x}^{T}(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{B}^{2})\boldsymbol{x}>0$， 从而得证.

20.（6 分）设 $\boldsymbol{A}$ 是 n 阶正定矩阵， $\boldsymbol{E}$ 是 n 阶单位矩阵，证明：$|\boldsymbol{E}+\boldsymbol{A}|>1$.

证明：设 $\boldsymbol{A}$ 的特征值为 $\lambda_i(i=1,2,\cdots,n)$，因为 $\boldsymbol{A}$ 是正定矩阵，所以 $\boldsymbol{A}$ 的特征值 $\lambda_i>0(i=1,2,\cdots,n)$.

方法 1: 因为 $\boldsymbol{A}+\boldsymbol{E}$ 的特征值 $\lambda_i+1>1(i=1,2,\cdots,n)$，所以 $|\boldsymbol{A}+\boldsymbol{E}|=\prod_{i=1}^{n}(\lambda_i+1)>1$.

方法 2：存在正交矩阵 $\boldsymbol{Q}$，使 $\boldsymbol{Q}^{T}\boldsymbol{A}\boldsymbol{Q}=\boldsymbol{Q}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{Q}=\begin{pmatrix}\lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n\end{pmatrix}$

$$\therefore \boldsymbol{A}+\boldsymbol{E}=\boldsymbol{Q}\begin{pmatrix}\lambda_1+1 & & & \\ & \lambda_2+1 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n+1\end{pmatrix}\boldsymbol{Q}^{-1}，|\boldsymbol{A}+\boldsymbol{E}|=\prod_{i=1}^{n}(\lambda_i+1)>1.$$