课外练习题 5 参考答案

1．设矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}-1&1&0\\-4&a&0\\1&0&2\end{pmatrix}$ 与 $\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}2&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$ 相似，则 $a=$____3_____.

2．已知三阶方阵 $\boldsymbol{A}$ 的特征值为 $1,-1,2$，则矩阵 $\boldsymbol{B}=2\boldsymbol{A}+\boldsymbol{E}$ 的特征值为 $\underline{3,-1,5}$.

3．已知矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}x&1&2\\-10&6&7\\y&-2&-1\end{pmatrix}$ 的特征值 $\lambda_1=\lambda_2=1$，$\lambda_3=2$，则 $x=\underline{-1}$，$y=\underline{\ 4\ }$.

4．已知矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}0&0&1\\a&1&1\\1&0&0\end{pmatrix}$ 可对角化，则 $a=$____-1______.

5. 设三阶矩阵 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 相似，且满足 $|\boldsymbol{A}-2\boldsymbol{E}|=0,|\boldsymbol{A}+2\boldsymbol{E}|=0,|2\boldsymbol{A}-\boldsymbol{E}|=0$，则 $|\boldsymbol{B}^{-1}-\boldsymbol{E}|=$

3/4_____.

6．若 4 阶矩阵 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 相似，矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的特征值为 $\frac{1}{2},\frac{1}{3},\frac{1}{4},\frac{1}{5}$，则行列式 $|\boldsymbol{B}^{-1}-\boldsymbol{E}|=$

____24____.

7.设矩阵 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 相似，其中 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&2&3\\-1&x&2\\0&0&1\end{pmatrix}$，已知矩阵 $\boldsymbol{B}$ 有特征值 1，2，3，则 $\boldsymbol{x}=\underline{4}$.

8．设 $\boldsymbol{A}$ 为 2 阶矩阵，$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2$ 为线性无关的 2 维列向量，$\boldsymbol{A}\boldsymbol{\alpha}_1=\boldsymbol{0}$，$\boldsymbol{A}\boldsymbol{\alpha}_2=2\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2$，则 $\boldsymbol{A}$ 的非零特征值为_____1_____.

9．$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&2&3\\1&2&3\\1&2&a\end{pmatrix}$，若 $\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$ 是 $\boldsymbol{A}$ 的一个特征向量，则 $a=$____3_____.

10. 若 3 维列向量 $\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}$ 满足 $\boldsymbol{\alpha}^T\boldsymbol{\beta}=2$，则 $\boldsymbol{\beta}\boldsymbol{\alpha}^T$ 的非零特征值为____2_____.

11. 设 $\lambda=2$ 是矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的特征值，$|\boldsymbol{A}|=4$，则矩阵 $\boldsymbol{A}^*+\boldsymbol{A}^2-3\boldsymbol{E}$ 的特征值（ A ）.

（A）3　　（B）-3　　（C）$\frac{3}{2}$　　（D）$-\frac{3}{2}$

12.设 $\boldsymbol{A}$ 为 n 阶实对称矩阵，则（ C ）.

（A） $\boldsymbol{A}$ 的 n 个特征向量两两正交

（B）$\boldsymbol{A}$ 的 n 个特征向量组成单位正交向量组

（C）若 $\boldsymbol{A}$ 的 k 重特征值为 λ_0，则有 $R(\boldsymbol{A}-\lambda_0\boldsymbol{E})=n-k$

（D）若 $\boldsymbol{A}$ 的 k 重特征值为 λ_0，则有 $R(\boldsymbol{A}-\lambda_0\boldsymbol{E})=k$

13．已知 $\boldsymbol{A}$ 为三阶实对称阵，且 $\boldsymbol{A}^2=\boldsymbol{A},\ R(\boldsymbol{A})=2$，则 $\boldsymbol{A}$ 的特征值为（　C　）.

（A）0,0,0　　（B）0,0,1　　（C）0,1,1　　（D）1,1,1

14．设 n 阶方阵 $\boldsymbol{A}$ 满足 $\boldsymbol{A}^3=\boldsymbol{O}$，则（　C　）.

（A）$\boldsymbol{A}=\boldsymbol{O}$　　（B）$\boldsymbol{A}$ 仅有一个特征值为零，其它 $n-1$ 个可能不为零

（C）$\boldsymbol{A}$ 的特征值全为零　　（D）$\boldsymbol{A}$ 有 n 个线性无关的特征向量

15．设 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&2&3\\2&2&3\\3&3&3\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}1&2&3\\0&2&3\\0&0&3\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{C}=\begin{pmatrix}1&2&3\\0&1&3\\0&0&1\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{D}=\begin{pmatrix}1&1&3\\0&0&-3\\0&0&1\end{pmatrix}$，则

$\boldsymbol{A},\boldsymbol{B},\boldsymbol{C},\boldsymbol{D}$ 中不能与对角阵相似的矩阵是（　C　）.

（A）$\boldsymbol{A}$　　（B）$\boldsymbol{B}$　　（C）$\boldsymbol{C}$　　（D）$\boldsymbol{D}$

16．齐次线性方程组 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$ 和 $\boldsymbol{Bx}=\boldsymbol{0}$ 同解的充分必要条件为（　D　）.

（A）$\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 等价　　（B）$\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 相似

（C）$\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 的列向量组等价　　（D）$\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 的行向量组等价

17．$\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 均为 3 阶实方阵，如果 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 相似，则下列说法错误的是（　C　）.

（A）若 $\boldsymbol{A}$ 可对角化，　$\boldsymbol{B}$ 必可对角化　　（B）$\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 的特征值相同

（C）$\boldsymbol{A}$ 必可通过初等行变换变为 $\boldsymbol{B}$　　（D）$\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 的迹相同

18．设 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 都是 n 阶方阵，则下列结论正确的是（　C　）.

（A）若 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 相似，则 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 有相同的特征值和特征向量

（B）若 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 相似，则 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 都相似于同一个对角阵

（C）若 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 相似，则 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 等价

（D）若 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 等价，则 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 相似

19. 设 3 阶方阵 $\boldsymbol{A}$ 有 3 个线性无关的特征向量，$\lambda=3$ 是 $\boldsymbol{A}$ 的二重特征值，则 $R(\boldsymbol{A}-3\boldsymbol{E})=$（　A　）.

（A）1　　（B）2　　（C）3　　（D）无法确定

20．设 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 为 n 阶矩阵，且 $\boldsymbol{A}$ 相似于 $\boldsymbol{B}$，则（　A　）.

（A） $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 有相同的特征值　　　　　（B） $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 相似于同一个对角矩阵

（C）存在正交矩阵 $\boldsymbol{P}$，使 $\boldsymbol{P}^T\boldsymbol{AP}=\boldsymbol{B}$　　（D）存在可逆矩阵 $\boldsymbol{P}$，使 $\boldsymbol{P}^T\boldsymbol{AP}=\boldsymbol{B}$

21． n 阶矩阵 $\boldsymbol{A}$ 与对角阵相似的充要条件是（　D　）.

（A） $\boldsymbol{A}$ 可逆

（B） $\boldsymbol{A}$ 的 n 个特征值无零特征值

（C） $\boldsymbol{A}$ 的 n 个特征值互不相同

（D）对应 $\boldsymbol{A}$ 的每一个 k 重特征根 λ， $\boldsymbol{A}$ 一定有 k 个线性无关的特征向量

22．设 $\boldsymbol{A}$ 为 n 阶矩阵， $\boldsymbol{P}$ 为 n 阶可逆矩阵， n 维列向量 $\boldsymbol{\alpha}$ 是矩阵 $\boldsymbol{A}$ 属于特征值 λ 的特征向量，那么在下列矩阵中① $\boldsymbol{A}^2$；② $\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{AP}$；③ $\boldsymbol{A}^T$；④ $\boldsymbol{E}-\frac{1}{2}\boldsymbol{A}$， $\boldsymbol{\alpha}$ 肯定是其特征值向量的矩阵共有（　B　）.

（A）1 个　　　　（B）2 个　　　　（C）3 个　　　　（D）4 个

23．设 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 均为 n 阶方阵，且 $\boldsymbol{A}$ 相似于 $\boldsymbol{B}$，则下面说法中正确的是（　B　）.

（A） $\boldsymbol{A}-\lambda\boldsymbol{E}=\boldsymbol{B}-\lambda\boldsymbol{E}$　　　　（B）存在 n 阶可逆方阵 $\boldsymbol{P}$，使 $\boldsymbol{AP}=\boldsymbol{PB}$

（C） $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 与同一对角阵相似　　　（D）存在 n 阶可逆方阵 $\boldsymbol{Q}$，使 $\boldsymbol{Q}^T\boldsymbol{AQ}=\boldsymbol{B}$

24. 如果向量 $\boldsymbol{\alpha}=(1,k)^T$ 是矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}3 & 1\\ 5 & -1\end{pmatrix}$ 的逆矩阵 $\boldsymbol{A}^{-1}$ 的特征向量，求常数 k 的值.

解： 由 $\begin{pmatrix}3 & 1\\ 5 & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\ k\end{pmatrix}=\lambda\begin{pmatrix}1\\ k\end{pmatrix}$ 得 $\begin{cases}3+k=\lambda\\ 5-k=\lambda k\end{cases}$，解得 $k=1$ 或 $k=-5$.

25.（10 分）设 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1 & -1 & 1\\ 2 & 4 & -2\\ -3 & -3 & a\end{pmatrix},\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}2 & 0 & 0\\ 0 & 2 & 0\\ 0 & 0 & b\end{pmatrix}$，且 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 相似，求 a,b，并求可逆矩阵 $\boldsymbol{P}$，使 $\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{AP}=\boldsymbol{B}$.

解： 由 $|\boldsymbol{A}|=|\boldsymbol{B}|$ 及 $2+2+b=1+4+a$ 得 $a=5,b=6$． $\boldsymbol{A}$ 的特征值为 $2,2,6$.

当 $\lambda=2$ 时，对应的齐次方程为 $x_1+x_2-x_3=0$，特征向量为

$\boldsymbol{p}_1=(1\quad 0\quad 1)^T,\boldsymbol{p}_2=(-1\quad 1\quad 0)^T$.

当$\lambda=6$时，对应的齐次方程为$\begin{cases}x_1-x_2-x_3=0\\3x_2+2x_3=0\end{cases}$，特征向量为$\boldsymbol{p}_3=(1\quad -2\quad 3)^T$，

则有$\boldsymbol{P}=\begin{pmatrix}1&-1&1\\0&1&-2\\1&0&3\end{pmatrix}$，使$\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}=\boldsymbol{B}$.

26.（10分）（1）设$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&1&1&1\\1&2&3&a\\1&4&9&a^2\\1&8&27&a^3\end{pmatrix}$，若存在4阶非零矩阵$\boldsymbol{B}$，使$\boldsymbol{A}\boldsymbol{B}=\boldsymbol{O}$，问：①$\boldsymbol{B}$是否可逆？②$a$可能取哪些值？（2）已知3阶矩阵$\boldsymbol{A}$的特征值为$1,2,-3$，求$\left|\boldsymbol{A}^*+2\boldsymbol{E}\right|$.

解：（1）①若$\boldsymbol{B}$可逆，则由$\boldsymbol{A}\boldsymbol{B}=\boldsymbol{O}$知$\boldsymbol{A}\boldsymbol{B}\boldsymbol{B}^{-1}=\boldsymbol{O}$即$\boldsymbol{A}=\boldsymbol{O}$，矛盾！故$\boldsymbol{B}$不可逆.

② $\boldsymbol{A}\boldsymbol{B}=\boldsymbol{O}\Rightarrow R(\boldsymbol{A})+R(\boldsymbol{B})\le 4$，又$\boldsymbol{B}\ne 0\Rightarrow R(\boldsymbol{B})\ge 1$，则$R(\boldsymbol{A})\le 3\Rightarrow \left|\boldsymbol{A}\right|=0$，

而$\left|\boldsymbol{A}\right|=2(a-1)(a-2)(a-3)$，则$a=1,2,3$.

（2）$\left|\boldsymbol{A}^*+2\boldsymbol{E}\right|=\left|\left|\boldsymbol{A}\right|\boldsymbol{A}^{-1}+2\boldsymbol{E}\right|=\left|1\cdot 2\cdot(-3)\boldsymbol{A}^{-1}+2\boldsymbol{E}\right|$

$$=\left|2\boldsymbol{E}-6\boldsymbol{A}^{-1}\right|=\left(2-\frac{6}{1}\right)\left(2-\frac{6}{2}\right)\left(2-\frac{6}{-3}\right)=16.$$

27.（12 分）矩阵$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&0&0\\2&2&0\\1&1&3\end{pmatrix}$可否相似对角化？若能相似对角化，则求可逆矩阵$\boldsymbol{P}$，使得$\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}$为对角矩阵.

解：（1）求特征值：$\left|\boldsymbol{A}-\lambda\boldsymbol{E}\right|=\begin{vmatrix}1-\lambda&0&0\\2&2-\lambda&0\\1&1&3-\lambda\end{vmatrix}=(1-\lambda)(2-\lambda)(3-\lambda)$，故$\boldsymbol{A}$的特征值为$\lambda_1=1,\lambda_2=2,\lambda_3=3$.

（2）判定对角化：由于$\boldsymbol{A}$有3个不同的特征值，故$\boldsymbol{A}$可相似对角化.

（3）对角化：

对于$\lambda_1=1$，由$\boldsymbol{A}-\boldsymbol{E}=\begin{pmatrix}0&0&0\\2&1&0\\1&1&2\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&0&-2\\0&1&4\\0&0&0\end{pmatrix}$，可得对应的特征向量为

$\boldsymbol{p}_1=\begin{pmatrix}2\\-4\\1\end{pmatrix}$；

对于 $\lambda_2=2$，由 $\boldsymbol{A}-2\boldsymbol{E}=\begin{pmatrix}-1&0&0\\2&0&0\\1&1&1\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&1\\0&0&0\end{pmatrix}$，可得对应的特征向量为

$\boldsymbol{p}_2=\begin{pmatrix}0\\-1\\1\end{pmatrix}$；

对于 $\lambda_3=3$，由 $\boldsymbol{A}-3\boldsymbol{E}=\begin{pmatrix}-2&0&0\\2&-1&0\\1&1&0\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&0\end{pmatrix}$，可得对应的特征向量为

$\boldsymbol{p}_3=\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$；

作可逆矩阵 $\boldsymbol{P}=(\boldsymbol{p}_1,\boldsymbol{p}_2,\boldsymbol{p}_3)$，对角阵 $\Lambda=\begin{pmatrix}1&&\\&2&\\&&3\end{pmatrix}$，有 $\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}=\Lambda$.

28.（12 分）已知三阶实对称矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的特征值为 $\lambda_1=2$，$\lambda_2=\lambda_3=1$，且对应于 $\lambda_2=\lambda_3=1$ 的特征向量为 $\boldsymbol{\alpha}_2=\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix},\boldsymbol{\alpha}_3=\begin{pmatrix}2\\2\\-1\end{pmatrix}$.（1）求 $\boldsymbol{A}$ 的对应于 $\lambda_1=2$ 的特征向量；（2）求 $\boldsymbol{A}$.

解：（1）设 $\boldsymbol{A}$ 的对应于 $\lambda_1=2$ 的特征向量为 $\boldsymbol{\alpha}_1=\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}$，因为实对称矩阵对应于不同特征值的特征向量正交，所以 $\begin{cases}x_1+x_2=0\\2x_1+2x_2-x_3=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x_1+x_2=0\\x_3=0\end{cases}$，取其一解 $\boldsymbol{\alpha}_1=\begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix}$ 即可.

（2）构造矩阵 $\boldsymbol{P}=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3)=\begin{pmatrix}-1&1&2\\1&1&2\\0&0&-1\end{pmatrix}$，有 $\boldsymbol{P}^{-1}=\begin{pmatrix}-1/2&1/2&0\\1/2&1/2&2\\0&0&-1\end{pmatrix}$，从而

$$\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}=\Lambda=\begin{pmatrix}2&&\\&1&\\&&1\end{pmatrix}\Rightarrow \boldsymbol{A}=\boldsymbol{P}\Lambda\boldsymbol{P}^{-1}=\begin{pmatrix}3/2&-1/2&0\\-1/2&3/2&0\\0&0&1\end{pmatrix}.$$

29.（6 分）设 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 为 n 阶非零矩阵，且 $\boldsymbol{A}^2+\boldsymbol{A}=\boldsymbol{O},\boldsymbol{B}^2+\boldsymbol{B}=\boldsymbol{O}$.（1）证明 $\lambda=-1$ 必是 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 的特征值；（2）若 $\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{BA}=\boldsymbol{O}$，$\xi_1,\xi_2$ 分别是 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 对应于特征值 $\lambda=-1$ 的特征向量，证明 ξ_1,ξ_2 线性无关.

证明：(1) $\boldsymbol{A}^2+\boldsymbol{A}=(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{E})\boldsymbol{A}=\boldsymbol{O}$，而 $\boldsymbol{A}\neq\boldsymbol{O}$，故方程组 $(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{E})\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ 有非零解，则 $|\boldsymbol{A}+\boldsymbol{E}|=0$，知 $\lambda=-1$ 是 $\boldsymbol{A}$ 的特征值. 同理 $\lambda=-1$ 也是 $\boldsymbol{B}$ 特征值. (2) $\boldsymbol{A}\xi_1=-\xi_1$，两边左乘 $\boldsymbol{B}$ 得 $\boldsymbol{BA}\xi_1=-\boldsymbol{B}\xi_1$，即 $\boldsymbol{B}\xi_1=\boldsymbol{0}\xi_1=\boldsymbol{0}$，可见 ξ_1 是 $\boldsymbol{B}$ 的对应于 $\lambda=0$ 的特征向量. 故 ξ_1,ξ_2 是 $\boldsymbol{B}$ 的分别对应于 $\lambda=0$ 和 $\lambda=-1$ 的特征向量，从而 ξ_1,ξ_2 线性无关.