第五章　相似矩阵与二次型

对角矩阵作为一种简单特殊的矩阵，不仅在理论研究而且在实际应用中都有重要的意义．本章通过讨论矩阵特征值与特征向量的概念和性质，导出矩阵对角化的条件与方法，指出实对称矩阵与二次型的对应关系，得到了化二次型为标准形的正交变换方法．

微视频 **5-1** 特征值与特征向量
PPT 课件 5-1 特征值与特征向量

§5.1　特征值与特征向量

在物理学、控制论及解析几何等很多学科中，经常会遇到这样一个问题：对于方阵 $\boldsymbol{A}$，能否找到数 λ 和列向量 $\boldsymbol{x}$，使得 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=\lambda\boldsymbol{x}$，即 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}$ 与 $\boldsymbol{x}$ "平行"？于是抽象出下述概念．

1.　特征值与特征向量的概念

定义5.1　设 $\boldsymbol{A}$ 为 n 阶方阵，$\boldsymbol{x}$ 为非零列向量，若存在数 λ，使 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=\lambda\boldsymbol{x}$，则称 λ 为 $\boldsymbol{A}$ 的特征值，称 $\boldsymbol{x}$ 为 $\boldsymbol{A}$ 的属于特征值 λ 的特征向量．

概念解析：特征值、特征向量

例1　设 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&6\\5&2\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{u}=\begin{pmatrix}6\\-5\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{v}=\begin{pmatrix}3\\-2\end{pmatrix}$，判断 $\boldsymbol{u}$ 和 $\boldsymbol{v}$ 是否为 $\boldsymbol{A}$ 的属于某个特征值的特征向量．

典型例题：利用特征值与特征向量定义求抽象矩阵特征值、特征向量

解　因 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{u}=\begin{pmatrix}1&6\\5&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}6\\-5\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-24\\20\end{pmatrix}=-4\boldsymbol{u}$，

$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{v}=\begin{pmatrix}1&6\\5&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}3\\-2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-9\\11\end{pmatrix}\neq\lambda\boldsymbol{v},$$

由定义知，$\boldsymbol{u}$ 是 $\boldsymbol{A}$ 的属于特征值 -4 的特征向量，$\boldsymbol{v}$ 不是 $\boldsymbol{A}$ 的特征向量．

例2　已知3阶方阵 $\boldsymbol{A}$ 的各行元素之和为 -2，求 $\boldsymbol{A}$ 的一个特征值．

解　将3阶方阵 $\boldsymbol{A}$ 的各行元素之和为 -2 写成矩阵形式，有：

$$\boldsymbol{A}\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-2\\-2\\-2\end{pmatrix}=-2\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix},$$

故 $\boldsymbol{A}$ 有特征值 -2．

设 $\boldsymbol{x}$ 为 $\boldsymbol{A}$ 的属于特征值 λ 的特征向量，由于 $\boldsymbol{A}(k\boldsymbol{x})=k(\boldsymbol{A}\boldsymbol{x})=k(\lambda\boldsymbol{x})=\lambda(k\boldsymbol{x})$，故 $k\boldsymbol{x}\,(k\neq0)$ 也为 $\boldsymbol{A}$ 的属于特征值 λ 的特征向量．

2. 特征值与特征向量的求法

对一些特殊的矩阵可以很容易地找到特征值λ和对应的特征向量，比如n阶单位阵$\boldsymbol{E}$，由于$\boldsymbol{E}\boldsymbol{x}=1\cdot\boldsymbol{x}\left(\boldsymbol{x}\neq\boldsymbol{0}\right)$，因此，1 为$\boldsymbol{E}$的特征值，任意$n$维非零列向量$\boldsymbol{x}$都是$\boldsymbol{E}$的属于特征值 1 的特征向量．但是对于一般的方阵，如何去求特征值和特征向量呢？

设λ为n阶方阵$\boldsymbol{A}$的特征值，$\boldsymbol{x}$为属于λ的特征向量，则有$\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=\lambda\boldsymbol{x}$，即

$$\left(\boldsymbol{A}-\lambda\boldsymbol{E}\right)\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0},$$

这是包含n个未知量、n个方程的齐次线性方程组，它有非零解的充分必要条件是系数行列式$\left|\boldsymbol{A}-\lambda\boldsymbol{E}\right|=0$，即

$$\begin{vmatrix} a_{11}-\lambda & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22}-\lambda & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn}-\lambda \end{vmatrix}=0.$$

上式是以λ为未知量的一元n次方程，称为方阵$\boldsymbol{A}$的特征方程，其左端$\left|\boldsymbol{A}-\lambda\boldsymbol{E}\right|$是$\lambda$的$n$次多项式，记作$f(\lambda)$，称为方阵$\boldsymbol{A}$的特征多项式．显然，$\boldsymbol{A}$的特征值就是特征方程的根，特征方程在复数范围内恒有根，其个数为方程的次数（重根按重数计算），因此，n阶方阵在复数范围内有n个特征值，求方阵$\boldsymbol{A}$的特征值就是求解特征方程．

设λ_i是$\boldsymbol{A}$的一个特征值，则由方程

$$\left(\boldsymbol{A}-\lambda_i\boldsymbol{E}\right)\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$$

求得的所有非零解都是$\boldsymbol{A}$的属于特征值λ_i的特征向量．

方法总结：求矩阵（具体、抽象）特征值、特征向量的求法

例 3 求矩阵$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$的特征值与特征向量．

解 $\boldsymbol{A}$的特征多项式为

$$\left|\boldsymbol{A}-\lambda\boldsymbol{E}\right|=\begin{vmatrix} 1-\lambda & 2 & 2 \\ 2 & 1-\lambda & 2 \\ 2 & 2 & 1-\lambda \end{vmatrix}=\left(\lambda+1\right)^2\left(5-\lambda\right),$$

所以$\boldsymbol{A}$的特征值为$\lambda_1=\lambda_2=-1$，$\lambda_3=5$．

对于特征值$\lambda_1=\lambda_2=-1$，解对应的齐次线性方程组$\left(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{E}\right)\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$，即

$$\begin{cases}2x_1+2x_2+2x_3=0\\2x_1+2x_2+2x_3=0\\2x_1+2x_2+2x_3=0\end{cases},$$

得基础解系

$$\boldsymbol{p}_1=\begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix},\quad \boldsymbol{p}_2=\begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix},$$

所以 $\boldsymbol{A}$ 的属于特征值 -1 的全体特征向量为 $k_1\boldsymbol{p}_1+k_2\boldsymbol{p}_2$，其中 k_1, k_2 不全为 0.

对于特征值 $\lambda_3=5$，解对应的齐次线性方程组 $(\boldsymbol{A}-5\boldsymbol{E})\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$，即

$$\begin{cases}-4x_1+2x_2+2x_3=0\\2x_1-4x_2+2x_3=0\\2x_1+2x_2-4x_3=0\end{cases},$$

得基础解系

典型例题：已知含有未知参数矩阵的特征值或特征向量，求未知参数

$$\boldsymbol{p}_3=\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix},$$

所以 $\boldsymbol{A}$ 的属于特征值 5 的全体特征向量为 $k_3\boldsymbol{p}_3$，其中 $k_3\neq 0$.

例 4 求矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}-1&1&0\\-4&3&0\\1&0&2\end{pmatrix}$ 的特征值与特征向量.

解 $\boldsymbol{A}$ 的特征多项式为

$$|\boldsymbol{A}-\lambda\boldsymbol{E}|=\begin{vmatrix}-1-\lambda&1&0\\-4&3-\lambda&0\\1&0&2-\lambda\end{vmatrix}=(2-\lambda)(1-\lambda)^2,$$

所以 $\boldsymbol{A}$ 的特征值为 $\lambda_1=2$，$\lambda_2=\lambda_3=1$.

对于特征值 $\lambda_1=2$，解对应的齐次线性方程组 $(\boldsymbol{A}-2\boldsymbol{E})\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$. 由

$$\boldsymbol{A}-2\boldsymbol{E}=\begin{pmatrix}-3&1&0\\-4&1&0\\1&0&0\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&0\end{pmatrix},$$

得基础解系

$$\boldsymbol{p}_1=\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix},$$

所以$\boldsymbol{A}$的属于特征值2的全体特征向量为$k_1\boldsymbol{p}_1$，其中$k_1\neq 0$.

对于特征值$\lambda_2=\lambda_3=1$，解对应的齐次线性方程组$\left(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{E}\right)\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$. 由

$$\boldsymbol{A}-\boldsymbol{E}=\begin{pmatrix}-2&1&0\\-4&2&0\\1&0&1\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1&0&1\\0&1&2\\0&0&0\end{pmatrix},$$

得基础解系

$$\boldsymbol{p}_2=\begin{pmatrix}-1\\-2\\1\end{pmatrix},$$

所以$\boldsymbol{A}$的属于特征值1的全体特征向量为$k_2\boldsymbol{p}_2$，其中$k_2\neq 0$.

3. 特征值与特征向量的性质

为研究特征值的性质，先来看特征多项式的系数. 在特征多项式

$$|\boldsymbol{A}-\lambda\boldsymbol{E}|=\begin{vmatrix}a_{11}-\lambda&a_{12}&\cdots&a_{1n}\\a_{21}&a_{22}-\lambda&\cdots&a_{2n}\\\vdots&\vdots&\ddots&\vdots\\a_{n1}&a_{n2}&\cdots&a_{nn}-\lambda\end{vmatrix}$$

的展开式中，有一项是主对角线上元素的连乘积

$$(a_{11}-\lambda)(a_{22}-\lambda)\cdots(a_{nn}-\lambda),$$

λ的次数为n；其余各项至多包含$n-2$个主对角线上元素，λ的次数至多为$n-2$. 因此特征多项式中含λ的n次和$n-1$次的项只出现在主对角线上元素的连乘积当中，分别为

$$(-1)^n\lambda^n \text{ 和 } (-1)^{n-1}(a_{11}+a_{22}+\cdots+a_{nn})\lambda^{n-1}.$$

在特征多项式中令$\lambda=0$，可得常数项$|\boldsymbol{A}|$. 故若只写出特征多项式的前两项和常数项，就有

$$|\boldsymbol{A}-\lambda\boldsymbol{E}|=(-1)^n\lambda^n+(-1)^{n-1}(a_{11}+a_{22}+\cdots+a_{nn})\lambda^{n-1}+\cdots+|\boldsymbol{A}|.$$

设n阶方阵$\boldsymbol{A}$的全体特征值为$\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n$，由根与系数的关系可得：

$\boldsymbol{A}$ 的全体特征值的和为 $a_{11}+a_{22}+\cdots+a_{nn}$（称为 $\boldsymbol{A}$ 的迹），$\boldsymbol{A}$ 的全体特征值的乘积为 $|\boldsymbol{A}|$.

性质 5.1 设 $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n$ 是 n 阶方阵 $\boldsymbol{A}$ 的全体特征值，则有

$$|\boldsymbol{A}|=\lambda_1\lambda_2\cdots\lambda_n\text{；}\ \lambda_1+\lambda_2+\cdots+\lambda_n=\sum_{i=1}^{n}a_{ii}\ .$$

由性质 5.1 可知，利用特征值可以求方阵的行列式．于是有

推论 5.1 n 阶方阵 $\boldsymbol{A}$ 可逆的充要条件是 $\boldsymbol{A}$ 的 n 个特征值全都不为零.

例 5 设 λ 是方阵 $\boldsymbol{A}$ 的特征值，证明：

（1）λ^2 是方阵 $\boldsymbol{A}^2$ 的特征值；

（2）λ 的多项式 $\varphi(\lambda)=a_m\lambda^m+a_{m-1}\lambda^{m-1}+\cdots+a_1\lambda+a_0$ 是方阵 $\boldsymbol{A}$ 的多项式 $\varphi(\boldsymbol{A})=a_m\boldsymbol{A}^m+a_{m-1}\boldsymbol{A}^{m-1}+\cdots+a_1\boldsymbol{A}+a_0\boldsymbol{E}$ 的特征值，其中 m 为正整数；

（3）若 $\boldsymbol{A}$ 可逆，则 $\dfrac{1}{\lambda}$ 是 $\boldsymbol{A}^{-1}$ 的特征值，$\dfrac{|\boldsymbol{A}|}{\lambda}$ 是 $\boldsymbol{A}$ 的伴随阵 $\boldsymbol{A}^*$ 的特征值.

证（1）由 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{p}=\lambda\boldsymbol{p}$，$\boldsymbol{p}\neq\boldsymbol{0}$，得

$$\boldsymbol{A}^2\boldsymbol{p}=\boldsymbol{A}(\boldsymbol{A}\boldsymbol{p})=\boldsymbol{A}(\lambda\boldsymbol{p})=\lambda(\boldsymbol{A}\boldsymbol{p})=\lambda^2\boldsymbol{p},$$

故 λ^2 是 $\boldsymbol{A}^2$ 的一个特征值，并且 $\boldsymbol{p}$ 也是 $\boldsymbol{A}^2$ 的属于特征值 λ^2 的一个特征向量.

（2）仿照（1）可证.

（3）由 $\boldsymbol{A}$ 可逆，知 $\lambda\neq 0$．在 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{p}=\lambda\boldsymbol{p}$ 两边同时左乘 $\boldsymbol{A}^{-1}$，得 $\boldsymbol{p}=\lambda\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{p}$，$\dfrac{1}{\lambda}\boldsymbol{p}=\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{p}$，从而 $\dfrac{1}{\lambda}$ 是 $\boldsymbol{A}^{-1}$ 的一个特征值，并且 $\boldsymbol{p}$ 是 $\boldsymbol{A}^{-1}$ 的属于特征值 $\dfrac{1}{\lambda}$ 的一个特征向量．在 $\dfrac{1}{\lambda}\boldsymbol{p}=\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{p}$ 两端同时乘以 $|\boldsymbol{A}|$，得：$\dfrac{|\boldsymbol{A}|}{\lambda}\boldsymbol{p}=|\boldsymbol{A}|\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{p}=\boldsymbol{A}^*\boldsymbol{p}$，知 $\dfrac{|\boldsymbol{A}|}{\lambda}$ 是 $\boldsymbol{A}^*$ 的一个特征值，并且 $\boldsymbol{p}$ 也是 $\boldsymbol{A}^*$ 的属于特征值 $\dfrac{|\boldsymbol{A}|}{\lambda}$ 的一个特征向量.

例 6 设 3 阶方阵 $\boldsymbol{A}$ 的特征值为 1，-1，2，$\boldsymbol{B}=\boldsymbol{A}^*+3\boldsymbol{A}-2\boldsymbol{E}$，（1）求矩阵 $\boldsymbol{B}$ 的特征值；（2）计算 $|\boldsymbol{B}|$.

解 因 $\boldsymbol{A}$ 的特征值全不为 0，故 $\boldsymbol{A}$ 可逆，于是 $\boldsymbol{A}^*=|\boldsymbol{A}|\boldsymbol{A}^{-1}$，而 $|\boldsymbol{A}|=\lambda_1\lambda_2\lambda_3=-2$，故

$$B = A^* + 3A - 2E = -2A^{-1} + 3A - 2E,$$

设 $\boldsymbol{A}$ 的特征值为 λ，由例 5 知：$\boldsymbol{B} = -2\boldsymbol{A}^{-1} + 3\boldsymbol{A} - 2\boldsymbol{E}$ 对应有特征值 $\frac{-2}{\lambda} + 3\lambda - 2$，记 $\varphi(\lambda) = -\frac{2}{\lambda} + 3\lambda - 2$，则对应于 $\boldsymbol{A}$ 的 3 个特征值 1，-1，2，$\boldsymbol{B}$ 有特征值 $\varphi(1) = -1$，$\varphi(-1) = -3$，$\varphi(2) = 3$．于是 $|\boldsymbol{B}| = (-1)\times(-3)\times 3 = 9$．

定理5.1 设 $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_m$ 是方阵 $\boldsymbol{A}$ 的 m 个特征值，$\boldsymbol{p}_1, \boldsymbol{p}_2, \cdots, \boldsymbol{p}_m$ 依次是与之对应的特征向量．若 $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_m$ 互不相等，则 $\boldsymbol{p}_1, \boldsymbol{p}_2, \cdots, \boldsymbol{p}_m$ 线性无关.

证 设有常数 $x_1, x_2, \cdots, x_m$ 使

$$x_1\boldsymbol{p}_1 + x_2\boldsymbol{p}_2 + \cdots + x_m\boldsymbol{p}_m = \boldsymbol{0}.$$

则 $\boldsymbol{A}(x_1\boldsymbol{p}_1 + x_2\boldsymbol{p}_2 + \cdots + x_m\boldsymbol{p}_m) = \boldsymbol{0}$，即

$$\lambda_1 x_1\boldsymbol{p}_1 + \lambda_2 x_2\boldsymbol{p}_2 + \cdots + \lambda_m x_m\boldsymbol{p}_m = \boldsymbol{0},$$

类推可得：

$$\lambda_1^k x_1\boldsymbol{p}_1 + \lambda_2^k x_2\boldsymbol{p}_2 + \cdots + \lambda_m^k x_m\boldsymbol{p}_m = \boldsymbol{0}.\ (k = 1, 2, \cdots, m-1)$$

把上列各式合写成矩阵形式，得

$$(x_1\boldsymbol{p}_1, x_2\boldsymbol{p}_2, \cdots, x_m\boldsymbol{p}_m)\begin{pmatrix} 1 & \lambda_1 & \cdots & \lambda_1^{m-1} \\ 1 & \lambda_2 & \cdots & \lambda_2^{m-1} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & \lambda_m & \cdots & \lambda_m^{m-1} \end{pmatrix} = (\boldsymbol{0}, \boldsymbol{0}, \cdots, \boldsymbol{0}).$$

上式等号左端第二个矩阵的行列式为范德蒙德行列式，当 λ_i 互不相等时该行列式不等于 0，从而该矩阵可逆．于是有

$$(x_1\boldsymbol{p}_1, x_2\boldsymbol{p}_2, \cdots, x_m\boldsymbol{p}_m) = (\boldsymbol{0}, \boldsymbol{0}, \cdots, \boldsymbol{0}),$$

即 $x_j\boldsymbol{p}_j = \boldsymbol{0}\ (j = 1, 2, \cdots, m)$．但 $\boldsymbol{p}_j \neq \boldsymbol{0}$, 故 $x_j = 0\ (j = 1, 2, \cdots, m)$．

故向量组 $\boldsymbol{p}_1, \boldsymbol{p}_2, \cdots, \boldsymbol{p}_m$ 线性无关.

更一般地，有如下结论：

定理5.2 设 $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_m$ 是 n 阶方阵 $\boldsymbol{A}$ 的互不相同的特征值，且 $\boldsymbol{p}_{i1}, \boldsymbol{p}_{i2}, \cdots, \boldsymbol{p}_{i,r_i}$ 是 $\boldsymbol{A}$ 的属于特征值 λ_i 的线性无关特征向量，$i = 1, 2, \cdots, m$，则向量组

$$\boldsymbol{p}_{11},\boldsymbol{p}_{12},\cdots,\boldsymbol{p}_{1,r_1}\text{，}\quad \boldsymbol{p}_{21},\boldsymbol{p}_{22},\cdots,\boldsymbol{p}_{2,r_2}\text{，}\quad \cdots\text{，}\quad \boldsymbol{p}_{m1},\boldsymbol{p}_{m2},\cdots,\boldsymbol{p}_{m,r_m}$$

也线性无关.

（证明从略，感兴趣的读者请参见[19]之 P229 定理 4.）

例 7 设 $\boldsymbol{p}_1,\boldsymbol{p}_2$ 是方阵 $\boldsymbol{A}$ 的分别对应于特征值 λ_1,λ_2 的特征向量，若 $\lambda_1\neq\lambda_2$，证明 $\boldsymbol{p}_1+\boldsymbol{p}_2$ 不是 $\boldsymbol{A}$ 的特征向量.

证 用反证法. 假设 $\boldsymbol{p}_1+\boldsymbol{p}_2$ 是 $\boldsymbol{A}$ 的属于特征值 λ_0 的特征向量，则

$$\boldsymbol{A}\left(\boldsymbol{p}_1+\boldsymbol{p}_2\right)=\lambda_0\left(\boldsymbol{p}_1+\boldsymbol{p}_2\right)=\lambda_0\boldsymbol{p}_1+\lambda_0\boldsymbol{p}_2\text{，}$$

而由题设条件知

$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{p}_1=\lambda_1\boldsymbol{p}_1\text{，}\quad \boldsymbol{A}\boldsymbol{p}_2=\lambda_2\boldsymbol{p}_2\text{，}$$

从而有

$$\boldsymbol{A}\left(\boldsymbol{p}_1+\boldsymbol{p}_2\right)=\boldsymbol{A}\boldsymbol{p}_1+\boldsymbol{A}\boldsymbol{p}_2=\lambda_1\boldsymbol{p}_1+\lambda_2\boldsymbol{p}_2\text{，}$$

比较上述结果得

$$\left(\lambda_0-\lambda_1\right)\boldsymbol{p}_1+\left(\lambda_0-\lambda_2\right)\boldsymbol{p}_2=\boldsymbol{0}\text{，}$$

由定理 5.1 知，$\boldsymbol{p}_1,\boldsymbol{p}_2$ 线性无关，从而有 $\lambda_0=\lambda_1=\lambda_2$，与题设矛盾. 得证.

事实上，若 $\boldsymbol{p}_1,\boldsymbol{p}_2$ 是方阵 $\boldsymbol{A}$ 的对应于不同特征值 λ_1,λ_2 的特征向量，则 $k_1\boldsymbol{p}_1+k_2\boldsymbol{p}_2(k_1\neq0,k_2\neq0)$ 均不是 $\boldsymbol{A}$ 的特征向量. 请读者自证.

例 8 证明：正交矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的实特征值的绝对值等于 1.

证 设 $\boldsymbol{p}$ 是 $\boldsymbol{A}$ 的对应于特征值 λ 的特征向量，则

$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{p}=\lambda\boldsymbol{p}\text{，}\quad \boldsymbol{p}^T\boldsymbol{A}^T=\lambda\boldsymbol{p}^T.$$

将以上两式相乘，并由 $\boldsymbol{A}^T\boldsymbol{A}=\boldsymbol{E}$（因 $\boldsymbol{A}$ 为正交矩阵），得

$$\boldsymbol{p}^T\boldsymbol{A}^T\boldsymbol{A}\boldsymbol{p}=\lambda^2\boldsymbol{p}^T\boldsymbol{p}\text{，}\quad \boldsymbol{p}^T\boldsymbol{p}=\lambda^2\boldsymbol{p}^T\boldsymbol{p}.$$

又 $\boldsymbol{p}\neq\boldsymbol{0}$，故 $\boldsymbol{p}^T\boldsymbol{p}>0$，于是 $\lambda^2=1$，即 $|\lambda|=1$.

§5.2　相似矩阵

微视频 5-2 相似矩阵
PPT 课件 5-2 相似矩阵

相似是矩阵的另一种等价关系，利用这种关系可研究矩阵的相似对角化问题.

1.　矩阵相似的概念及性质

定义5.2　设 $\boldsymbol{A}$ 、$\boldsymbol{B}$ 是 n 阶方阵，若有可逆阵 $\boldsymbol{P}$ ，使得

$$\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}=\boldsymbol{B},$$

概念解析：矩阵相似

则称 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 相似，记作 $\boldsymbol{A}\backsim\boldsymbol{B}$.

“相似”是矩阵之间的一种关系，这种关系具有如下三个性质：

（1）反身性：$\boldsymbol{A}\backsim\boldsymbol{A}$.

这是因为 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{E}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{E}$.

（2）对称性：若 $\boldsymbol{A}\backsim\boldsymbol{B}$ ，则 $\boldsymbol{B}\backsim\boldsymbol{A}$.

这是因为：若 $\boldsymbol{A}\backsim\boldsymbol{B}$ ，则有可逆阵 $\boldsymbol{P}$ ，使得 $\boldsymbol{B}=\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}$ ，即 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{P}\boldsymbol{B}\boldsymbol{P}^{-1}$. 令 $\boldsymbol{Q}=\boldsymbol{P}^{-1}$ ，则有 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{Q}^{-1}\boldsymbol{B}\boldsymbol{Q}$ ，从而 $\boldsymbol{B}\backsim\boldsymbol{A}$.

（3）传递性：若 $\boldsymbol{A}\backsim\boldsymbol{B}$ ，$\boldsymbol{B}\backsim\boldsymbol{C}$ ，则 $\boldsymbol{A}\backsim\boldsymbol{C}$.

这是因为：若 $\boldsymbol{A}\backsim\boldsymbol{B}$ ，$\boldsymbol{B}\backsim\boldsymbol{C}$ ，则有可逆阵 $\boldsymbol{P}$ 和 $\boldsymbol{Q}$ ，使得 $\boldsymbol{B}=\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}$ ，$\boldsymbol{C}=\boldsymbol{Q}^{-1}\boldsymbol{B}\boldsymbol{Q}$ ，则有 $\boldsymbol{C}=\boldsymbol{Q}^{-1}\left(\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}\right)\boldsymbol{Q}=\left(\boldsymbol{P}\boldsymbol{Q}\right)^{-1}\boldsymbol{A}\left(\boldsymbol{P}\boldsymbol{Q}\right)$ ，因此 $\boldsymbol{A}\backsim\boldsymbol{C}$.

相似矩阵还有下面一些性质.

定理5.3　若 n 阶方阵 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 相似，则

（1）$\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 有相同的特征多项式，从而有相同的特征值和相同的迹；

（2）$|\boldsymbol{A}|=|\boldsymbol{B}|$ ；

（3）$\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 等价，$R(\boldsymbol{A})=R(\boldsymbol{B})$ ；

（4）当 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 都可逆时，$\boldsymbol{A}^{-1}$ 与 $\boldsymbol{B}^{-1}$ 也相似.

证（1）由 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 相似，知有可逆阵 $\boldsymbol{P}$ ，使得 $\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}=\boldsymbol{B}$ ，于是

$$|\boldsymbol{B}-\lambda\boldsymbol{E}|=|\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}-\lambda\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{E}\boldsymbol{P}|=|\boldsymbol{P}^{-1}(\boldsymbol{A}-\lambda\boldsymbol{E})\boldsymbol{P}|=|\boldsymbol{P}^{-1}||\boldsymbol{A}-\lambda\boldsymbol{E}||\boldsymbol{P}|=|\boldsymbol{A}-\lambda\boldsymbol{E}|,$$

即 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 的特征多项式相同. 由于特征值是特征方程的根，故特征值也相同，从而迹也相

同；

（2），（3）显然成立；

（4）若 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 都可逆，则

$$\boldsymbol{B}^{-1}=\left(\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}\right)^{-1}=\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}^{-1}\left(\boldsymbol{P}^{-1}\right)^{-1}=\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{P},$$

即 $\boldsymbol{A}^{-1}$ 与 $\boldsymbol{B}^{-1}$ 也相似.

容易推证：若 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 相似，即有可逆阵 $\boldsymbol{P}$，使 $\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}=\boldsymbol{B}$，则 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{P}\boldsymbol{B}\boldsymbol{P}^{-1}$，$\boldsymbol{A}^k=\boldsymbol{P}\boldsymbol{B}^k\boldsymbol{P}^{-1}$，$\boldsymbol{A}$ 的多项式 $\varphi(\boldsymbol{A})=\boldsymbol{P}\varphi(\boldsymbol{B})\boldsymbol{P}^{-1}$，即 $\boldsymbol{A}^k$ 与 $\boldsymbol{B}^k$ 也相似，$\varphi(\boldsymbol{A})$ 与 $\varphi(\boldsymbol{B})$ 也相似.

特别地，若有可逆阵 $\boldsymbol{P}$，使 $\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}=\boldsymbol{\Lambda}$ 为对角阵，则 $\boldsymbol{A}^k=\boldsymbol{P}\boldsymbol{\Lambda}^k\boldsymbol{P}^{-1}$，$\varphi(\boldsymbol{A})=\boldsymbol{P}\varphi(\boldsymbol{\Lambda})\boldsymbol{P}^{-1}$. 而对角阵 $\boldsymbol{\Lambda}$ 有

$$\boldsymbol{\Lambda}^k=\begin{pmatrix}\lambda_1^k & & & \\ & \lambda_2^k & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n^k\end{pmatrix},\quad \varphi(\boldsymbol{\Lambda})=\begin{pmatrix}\varphi(\lambda_1) & & & \\ & \varphi(\lambda_2) & & \\ & & \ddots & \\ & & & \varphi(\lambda_n)\end{pmatrix},$$

由此可方便地计算 $\boldsymbol{A}$ 的多项式 $\varphi(\boldsymbol{A})$.

2. 矩阵可对角化的条件和方法

定义 5.3 若 n 阶方阵 $\boldsymbol{A}$ 与对角阵相似，则称 $\boldsymbol{A}$ 可对角化.

由于对角阵的特征值就是其主对角线上的元素，故由定理 5.3（1）可得如下推论：

推论 5.2 若 n 阶方阵 $\boldsymbol{A}$ 与对角阵

$$\boldsymbol{\Lambda}=\begin{pmatrix}\lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n\end{pmatrix}$$

相似，则 $\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n$ 是 $\boldsymbol{A}$ 的 n 个特征值.

如前所述，若方阵 $\boldsymbol{A}$ 可对角化，则 $\boldsymbol{A}$ 的多项式 $\varphi(\boldsymbol{A})$ 可得到简便计算，于是我们考虑，在什么条件下方阵可以相似于一个对角阵（即方阵可对角化）？

首先，假设已经找到可逆阵 $\boldsymbol{P}$，使得 $\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}=\boldsymbol{\Lambda}$ 为对角阵，我们来讨论 $\boldsymbol{P}$ 应当具备的条件.

将矩阵 $\boldsymbol{P}$ 按列分块：$\boldsymbol{P}=\left(\boldsymbol{p}_1,\boldsymbol{p}_2,\cdots,\boldsymbol{p}_n\right)$，则由 $\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}=\boldsymbol{\Lambda}$，得 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}=\boldsymbol{P}\boldsymbol{\Lambda}$，即

$$\boldsymbol{A}\left(\boldsymbol{p}_1,\boldsymbol{p}_2,\cdots,\boldsymbol{p}_n\right)=\left(\boldsymbol{p}_1,\boldsymbol{p}_2,\cdots,\boldsymbol{p}_n\right)\begin{pmatrix}\lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n\end{pmatrix}$$

$$=\left(\lambda_1\boldsymbol{p}_1,\lambda_2\boldsymbol{p}_2,\cdots,\lambda_n\boldsymbol{p}_n\right),$$

于是有

$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{p}_i=\lambda_i\boldsymbol{p}_i,\quad i=1,2,\cdots,n,$$

这说明矩阵 $\boldsymbol{P}$ 的 n 个列向量 $\boldsymbol{p}_1,\boldsymbol{p}_2,\cdots,\boldsymbol{p}_n$ 分别是矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的关于特征值 $\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n$ 的特征向量．又 $\boldsymbol{P}$ 是可逆阵，故 $\boldsymbol{p}_1,\boldsymbol{p}_2,\cdots,\boldsymbol{p}_n$ 线性无关，从而得知当 $\boldsymbol{A}$ 相似于对角阵时，$\boldsymbol{A}$ 有 n 个线性无关的特征向量．

反之，若 $\boldsymbol{A}$ 有 n 个线性无关的特征向量，这 n 个特征向量可构成可逆矩阵 $\boldsymbol{P}$，使得 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}=\boldsymbol{P}\boldsymbol{\Lambda}$，从而 $\boldsymbol{A}$ 可对角化．这里需要注意的是，由于特征向量不唯一，故可逆矩阵 $\boldsymbol{P}$ 也不唯一．

由上面的讨论，有如下结论：

定理5.4　n 阶方阵 $\boldsymbol{A}$ 可对角化的充分必要条件是 $\boldsymbol{A}$ 有 n 个线性无关的特征向量．

如§5.1 例3中，$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&2&2\\2&1&2\\2&2&1\end{pmatrix}$有特征值 $\lambda_1=\lambda_2=-1$，$\lambda_3=5$，三个特征向量分别为 $\boldsymbol{p}_1=\begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{p}_2=\begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{p}_3=\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$，易知 $\boldsymbol{p}_1,\boldsymbol{p}_2,\boldsymbol{p}_3$ 线性无关，故由定理5.4，该矩阵可对角化．取 $\boldsymbol{P}=\left(\boldsymbol{p}_1,\boldsymbol{p}_2,\boldsymbol{p}_3\right)=\begin{pmatrix}-1&-1&1\\1&0&1\\0&1&1\end{pmatrix}$，则

$$\boldsymbol{P}^{-1}=\frac{1}{3}\begin{pmatrix}-1&2&-1\\-1&-1&2\\1&1&1\end{pmatrix},\quad \boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}=\begin{pmatrix}-1&&\\&-1&\\&&5\end{pmatrix}.$$

也可取可逆阵 $\boldsymbol{P}_1=\left(\boldsymbol{p}_3,\boldsymbol{p}_1,\boldsymbol{p}_2\right)=\begin{pmatrix}1&-1&-1\\1&1&0\\1&0&1\end{pmatrix}$ 将 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&2&2\\2&1&2\\2&2&1\end{pmatrix}$ 对角化，但此时

$P_1^{-1}AP_1=\begin{pmatrix}5&&\\&-1&\\&&-1\end{pmatrix}$，也就是说，改变特征向量的排列次序，对应的对角阵也会随之发生改变.

§5.1 例4中，三阶方阵 $A=\begin{pmatrix}-1&1&0\\-4&3&0\\1&0&2\end{pmatrix}$ 只有两个线性无关的特征向量，故由定理5.4，该矩阵不能对角化.

注1　若 n 阶方阵 A 可对角化，则可逆阵 P 的列向量是由 A 的 n 个线性无关的特征向量构成的，Λ 的对角元素为 A 相应的特征值；

注2　可逆阵 P 不是唯一的，将 P 的各列重新排列，或将它们乘以一个非零实数，可以得到一个新的可逆阵.

由定理5.1可得 A 可对角化的一个充分条件，即如下推论：

推论5.3　若 n 阶方阵 A 的 n 个特征值互不相等，则 A 必可对角化.

下面利用方阵的可对角化来计算方阵的幂.

方法总结：涉及方阵的相似对角化等问题及方法

例1　设 $A=\begin{pmatrix}1&4&2\\0&-3&4\\0&4&3\end{pmatrix}$，求可逆阵 P，使得 $P^{-1}AP=\Lambda$，并求 A^{100}.

解　方阵 A 的特征多项式为

$$|A-\lambda E|=\begin{vmatrix}1-\lambda&4&2\\0&-3-\lambda&4\\0&4&3-\lambda\end{vmatrix}=(1-\lambda)(\lambda-5)(\lambda+5),$$

所以 A 的特征值为 $\lambda_1=1$，$\lambda_2=5$，$\lambda_3=-5$，于是由推论5.3得，A 可对角化.

易求得，A 的属于特征值 $\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3$ 的特征向量分别为

$$p_1=\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix},\quad p_2=\begin{pmatrix}2\\1\\2\end{pmatrix},\quad p_3=\begin{pmatrix}1\\-2\\1\end{pmatrix},$$

令

$$P=(p_1,p_2,p_3)=\begin{pmatrix}1&2&1\\0&1&-2\\0&2&1\end{pmatrix},$$

则有

$$P^{-1}AP=\Lambda=\begin{pmatrix}1&&\\&5&\\&&-5\end{pmatrix}.$$

又

$$A=P\begin{pmatrix}1&&\\&5&\\&&-5\end{pmatrix}P^{-1},$$

于是

$$A^{100}=P\begin{pmatrix}1&&\\&5&\\&&-5\end{pmatrix}^{100}P^{-1}=P\begin{pmatrix}1&&\\&5^{100}&\\&&(-5)^{100}\end{pmatrix}P^{-1}$$

$$=\begin{pmatrix}1&2&1\\0&1&-2\\0&2&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&&\\&5^{100}&\\&&(-5)^{100}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0&-1\\0&\frac{1}{5}&\frac{2}{5}\\0&-\frac{2}{5}&\frac{1}{5}\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}1&0&5^{100}-1\\0&5^{100}&0\\0&0&5^{100}\end{pmatrix}.$$

推论 5.4　n 阶方阵 A 可对角化的充分必要条件是 A 的每个 k 重特征值 λ 对应 k 个线性无关的特征向量，亦即 A 可对角化的充分必要条件为：若 λ 是 A 的 k 重特征值，则必有 $R(A-\lambda E)=n-k$.

典型例题：已知含有参数的两个矩阵相似，求参数

例 2　设 $A=\begin{pmatrix}0&0&1\\1&1&a\\1&0&0\end{pmatrix}$，问 a 为何值时，矩阵 A 可对角化？

解　由

$$|A-\lambda E|=\begin{vmatrix}-\lambda&0&1\\1&1-\lambda&a\\1&0&-\lambda\end{vmatrix}=-(\lambda-1)^2(\lambda+1),$$

得 $\lambda_1=-1$，$\lambda_2=\lambda_3=1$.

要使矩阵 A 可对角化，由推论 5.4 知，对应二重根 $\lambda_2=\lambda_3=1$ 应有 2 个线性无关的特征

向量，即 $R(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{E})=3-2=1$，由此得 $a=-1$.

一般情形下的 n 阶方阵的对角化问题较为复杂，我们不再深入探讨，下节只考虑当 $\boldsymbol{A}$ 为实对称阵的情况.

微视频 5-3 实对称矩阵的对角化
PPT 课件 5-3 实对称阵的对角化

§5.3　实对称矩阵的对角化

不是每一个方阵都可以对角化，但对于实对称阵，却是一定可以对角化的，并且还能正交相似于对角阵.

定理5.5 实对称阵 $\boldsymbol{A}$ 的特征值都是实数.

仅用二阶实对称阵简单验证. 假设 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix}$ 为实对称阵，则 $\boldsymbol{A}$ 的特征多项式

$$|\boldsymbol{A}-\lambda \boldsymbol{E}|=\begin{vmatrix} a-\lambda & b \\ b & c-\lambda \end{vmatrix}=\lambda^2-(a+c)\lambda+(ac-b^2),$$

因此，$\boldsymbol{A}$ 的特征值 $\lambda=\frac{1}{2}\left[(a+c)\pm\sqrt{(a+c)^2-4(ac-b^2)}\right]$，其判别式

$$(a+c)^2-4(ac-b^2)=(a-c)^2+4b^2\geq 0,\quad \forall\ a, b, c\in R,$$

这说明 $\boldsymbol{A}$ 的特征值都是实数.

定理5.6 实对称阵 $\boldsymbol{A}$ 的对应于不同特征值的特征向量必正交.

证 设 λ_1, λ_2 是 $\boldsymbol{A}$ 的不同的实特征值，$\boldsymbol{p}_i$ 是 $\boldsymbol{A}$ 的属于 λ_i 的特征向量，$i=1, 2$，于是有

$\boldsymbol{A}\boldsymbol{p}_1=\lambda_1\boldsymbol{p}_1$，$\boldsymbol{A}\boldsymbol{p}_2=\lambda_2\boldsymbol{p}_2$.

由 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{p}_1=\lambda_1\boldsymbol{p}_1$，得 $\boldsymbol{p}_1^T\boldsymbol{A}^T=\lambda_1\boldsymbol{p}_1^T$，又 $\boldsymbol{A}^T=\boldsymbol{A}$，故 $\boldsymbol{p}_1^T\boldsymbol{A}=\lambda_1\boldsymbol{p}_1^T$，两边右乘 $\boldsymbol{p}_2$，得 $\lambda_2\boldsymbol{p}_1^T\boldsymbol{p}_2=\lambda_1\boldsymbol{p}_1^T\boldsymbol{p}_2$，由于 $\lambda_1\neq\lambda_2$，故 $[\boldsymbol{p}_1, \boldsymbol{p}_2]=\boldsymbol{p}_1^T\boldsymbol{p}_2=0$，即 $\boldsymbol{p}_1$ 与 $\boldsymbol{p}_2$ 正交.

定理5.7 若 λ 是 n 阶实对称阵 $\boldsymbol{A}$ 的 r 重特征值，则矩阵 $\boldsymbol{A}-\lambda\boldsymbol{E}$ 的秩 $R(\boldsymbol{A}-\lambda\boldsymbol{E})=n-r$，从而对应特征值 λ 恰有 r 个线性无关的特征向量.

详细证明我们从略，感兴趣的读者请参见[13].

定理5.8 设 $\boldsymbol{A}$ 为 n 阶实对称阵，则必有正交阵 $\boldsymbol{P}$，使得 $\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}=\boldsymbol{P}^T\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}=\boldsymbol{\Lambda}$，其中 $\boldsymbol{\Lambda}$ 是以 $\boldsymbol{A}$ 的 n 个特征值为对角元素的对角阵.

证 设 $\boldsymbol{A}$ 的互不相等的特征值为 $\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_s$，它们的重数依次为

$$r_1,r_2,\cdots,r_s,\quad r_1+r_2+\cdots+r_s=n.$$

由定理5.7知，特征值 $\lambda_i\left(i=1,2,\cdots,s\right)$ 恰有 r_i 个线性无关的特征向量，将它们正交化并且单位化，可得到 r_i 个单位正交的特征向量．由 $r_1+r_2+\cdots+r_s=n$，知这样的特征向量共可得 n 个．

由定理5.6知，对应于不同特征值的特征向量正交，故这 n 个单位特征向量两两正交．于是以它们为列向量构成正交阵 $\boldsymbol{P}$，有 $\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{AP}=\boldsymbol{P}^T\boldsymbol{AP}=\boldsymbol{\Lambda}$，其中对角阵 $\boldsymbol{\Lambda}$ 的对角元素含有 r_1 个 λ_1，r_2 个 λ_2，$\cdots$，r_s 个 λ_s，恰是 $\boldsymbol{A}$ 的 n 个特征值．

此定理表明，实对称阵必可对角化．下例说明如何求正交阵来将一个实对称阵对角化．

例1 设 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}0&1&1\\1&0&1\\1&1&0\end{pmatrix}$，求一个正交阵 $\boldsymbol{P}$，使得 $\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{AP}=\boldsymbol{\Lambda}$ 为对角阵．

方法总结：涉及实对称矩阵的相关问题及方法

解 由

$$\left|\boldsymbol{A}-\lambda\boldsymbol{E}\right|=\begin{vmatrix}-\lambda&1&1\\1&-\lambda&1\\1&1&-\lambda\end{vmatrix}=-\left(\lambda+1\right)^2\left(\lambda-2\right),$$

得 $\lambda_1=2$，$\lambda_2=\lambda_3=-1$.

对于 $\lambda_1=2$，解齐次线性方程组

$$\left(\boldsymbol{A}-2\boldsymbol{E}\right)\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0},$$

得基础解系 $\xi_1=\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$，将 ξ_1 单位化，得 $\boldsymbol{p}_1=\dfrac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$.

对于 $\lambda_2=\lambda_3=-1$，解齐次线性方程组 $\left(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{E}\right)\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$，得基础解系

$$\xi_2=\begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix},\quad \xi_3=\begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix},$$

将它们正交单位化，得 $\boldsymbol{p}_2=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{p}_3=\frac{1}{\sqrt{6}}\begin{pmatrix}-1\\-1\\2\end{pmatrix}$.

令

$$\boldsymbol{P}=\left(\boldsymbol{p}_1,\boldsymbol{p}_2,\boldsymbol{p}_3\right)=\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{6}}\\ \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{6}}\\ \frac{1}{\sqrt{3}} & 0 & \frac{2}{\sqrt{6}}\end{pmatrix},$$

则 $\boldsymbol{P}$ 为正交阵，且有

$$\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{AP}=\boldsymbol{P}^T\boldsymbol{AP}=\begin{pmatrix}2 & & \\ & -1 & \\ & & -1\end{pmatrix}.$$

例2 设三阶实对称阵 $\boldsymbol{A}$ 的特征值为 $\lambda_1=-1$，$\lambda_2=\lambda_3=1$，对应于 $\lambda_1=-1$ 的特征向量为 $\xi_1=\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}$, 求 $\boldsymbol{A}$.

解 由 $\boldsymbol{A}$ 是三阶实对称阵，知：对应于特征值 $\lambda_2=\lambda_3=1$，应有两个线性无关的特征向量 ξ_2,ξ_3，它们都与 ξ_1 正交，即有 $\xi_1^T\boldsymbol{x}=(0,1,1)\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}=x_2+x_3=0$，解得 $\xi_2=\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}$，$\xi_3=\begin{pmatrix}0\\1\\-1\end{pmatrix}$. 由于 ξ_2,ξ_3 已正交，且与 ξ_1 必正交，故直接将 ξ_1,ξ_2,ξ_3 单位化，得

$$\boldsymbol{p}_1=\frac{\xi_1}{\|\xi_1\|}=\begin{pmatrix}0\\ \frac{1}{\sqrt{2}}\\ \frac{1}{\sqrt{2}}\end{pmatrix},\boldsymbol{p}_2=\xi_2=\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix},\boldsymbol{p}_3=\frac{\xi_3}{\|\xi_3\|}=\begin{pmatrix}0\\ \frac{1}{\sqrt{2}}\\ -\frac{1}{\sqrt{2}}\end{pmatrix}.$$

取 $\boldsymbol{P}=(\boldsymbol{p}_1,\boldsymbol{p}_2,\boldsymbol{p}_3)=\begin{pmatrix}0 & 1 & 0\\ \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}}\\ \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & -\frac{1}{\sqrt{2}}\end{pmatrix}$，则 $\boldsymbol{P}^{-1}=\boldsymbol{P}^T$，且 $\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{AP}=\boldsymbol{\Lambda}=\begin{pmatrix}-1 & & \\ & 1 & \\ & & 1\end{pmatrix}$，

从而可求得

$$\boldsymbol{A}=\boldsymbol{P\Lambda P}^{T}=\begin{pmatrix}0 & 1 & 0\\ \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}}\\ \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & -\frac{1}{\sqrt{2}}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-1 & & \\ & 1 & \\ & & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}}\\ 1 & 0 & 0\\ 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & -1\\ 0 & -1 & 0\end{pmatrix}.$$

微视频 **5-4** 二次型及其标准型
PPT 课件 **5-4** 二次型及其标准型

§5.4　二次型及其标准形

在平面解析几何中，为了便于研究二次曲线

$$ax^2+bxy+cy^2=1$$

的几何性质，我们可以选择适当的坐标变换

$$\begin{cases}x=x'\cos\theta-y'\sin\theta\\ y=x'\sin\theta+y'\cos\theta\end{cases},$$

将曲线方程化为标准形

$$mx'^2+ny'^2=1,$$

由此来断定其图形是圆、椭圆还是双曲线，并对曲线的其它特征进行研究．

从代数学的角度看，化标准形的过程就是通过变量的线性变换化简一个二次齐次多项式，使其只含平方项．这种问题在许多理论问题或实际问题中常会遇到，我们把这类问题一般化，讨论 n 个变量的二次齐次多项式的化简问题．

定义 5.4　含有 n 个变量 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ 的二次齐次多项式

$$f(x_1, x_2, \cdots, x_n)=a_{11}x_1^2+2a_{12}x_1x_2+\cdots+2a_{1n}x_1x_n$$

$$+a_{22}x_2^2+2a_{23}x_2x_3+\cdots+2a_{2n}x_2x_n+\cdots+a_{nn}x_n^2 \qquad (5.1)$$

称为 n 元二次型，简称二次型．

当系数 a_{ij} 都是实数时，称为实二次型；当系数 a_{ij} 都是复数时，称为复二次型．本章仅讨论实二次型．

取 $a_{ij}=a_{ji}$，则

$$2a_{ij}x_ix_j = a_{ij}x_ix_j + a_{ji}x_jx_i,$$

从而(5.1)式可写成

方法总结：涉及二次型 $f=\boldsymbol{x}^T\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}$ 概念的相关问题及方法

$$\begin{aligned} f(x_1, x_2, \cdots, x_n) = & a_{11}x_1^2 + a_{12}x_1x_2 + \cdots + a_{1n}x_1x_n \\ & + a_{21}x_2x_1 + a_{22}x_2^2 + \cdots + a_{2n}x_2x_n \\ & + \cdots + a_{n1}x_nx_1 + a_{n2}x_nx_2 + \cdots + a_{nn}x_n^2 = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}x_ix_j . \end{aligned}$$

若引入矩阵

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix},$$

其中 $a_{ij}=a_{ji}$，则二次型可表示为

$$\begin{aligned} f(x_1, x_2, \cdots, x_n) &= (x_1\ x_2\ \cdots\ x_n)\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \\ &= \boldsymbol{x}^T\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} \end{aligned} \tag{5.2}$$

即二次型可利用矩阵简单记作：$f=\boldsymbol{x}^T\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}$，其中 $\boldsymbol{A}$ 为实对称矩阵.

任给一个实二次型，可唯一地确定一个实对称阵 $\boldsymbol{A}$；反过来，任给一个实对称阵 $\boldsymbol{A}$，也可唯一地确定一个实二次型，因此，二次型与对称阵之间存在一一对应的关系．因此，对称阵 $\boldsymbol{A}$ 称为二次型 f 的矩阵，f 也称为对称阵 $\boldsymbol{A}$ 的二次型．对称阵 $\boldsymbol{A}$ 的秩就叫做二次型 f 的秩.

例如，二次型 $f(x,y)=x^2+4xy+2y^2$ 用矩阵形式写出来就是：

概念解析：二次型及二次型矩阵

$$f=(x\quad y)\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix},$$

$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$ 就是二次型 f 的矩阵，$R(\boldsymbol{A})=2$，故二次型 f 的秩是 2.

对于二次型，我们讨论的主要问题是：寻求可逆的线性变换

$$
\begin{cases}
x_1 = c_{11}y_1 + c_{12}y_2 + \cdots + c_{1n}y_n \\
x_2 = c_{21}y_1 + c_{22}y_2 + \cdots + c_{2n}y_n \\
\qquad\qquad \cdots\cdots \\
x_n = c_{n1}y_1 + c_{n2}y_2 + \cdots + c_{nn}y_n
\end{cases}
\tag{5.3}
$$

使二次型只含平方项，也就是将(5.3)代入(5.1)，能使

$$
f = d_1y_1^2 + d_2y_2^2 + \cdots + d_ny_n^2 .
$$

这种只含平方项的二次型，称为二次型的标准形．标准形对应的矩阵为对角阵．

令

$$
\boldsymbol{C} = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & \cdots & c_{1n} \\ c_{21} & c_{22} & \cdots & c_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ c_{n1} & c_{n2} & \cdots & c_{nn} \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix},
$$

则线性变换(5.3)可以写成矩阵形式

$$
\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & \cdots & c_{1n} \\ c_{21} & c_{22} & \cdots & c_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ c_{n1} & c_{n2} & \cdots & c_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix},
$$

即　$\boldsymbol{x} = \boldsymbol{C}\boldsymbol{y}$.

若系数矩阵$\boldsymbol{C}$是可逆的，则称该变换为可逆线性变换．若$\boldsymbol{C}$是正交矩阵，则称该变换为正交变换．对二次型$f = \boldsymbol{x}^T\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}$作可逆线性变换$\boldsymbol{x} = \boldsymbol{C}\boldsymbol{y}$，有

$$
f = \boldsymbol{x}^T\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = (\boldsymbol{C}\boldsymbol{y})^T \boldsymbol{A}(\boldsymbol{C}\boldsymbol{y}) = \boldsymbol{y}^T\left(\boldsymbol{C}^T\boldsymbol{A}\boldsymbol{C}\right)\boldsymbol{y} .
$$

即，二次型f在新变量$y_1, y_2, \cdots, y_n$下的表示式为$f = \boldsymbol{y}^T\left(\boldsymbol{C}^T\boldsymbol{A}\boldsymbol{C}\right)\boldsymbol{y}$，若$\boldsymbol{C}^T\boldsymbol{A}\boldsymbol{C}$为对角阵$\boldsymbol{\Lambda}$，则标准形随之得到．这就是说，化实二次型为标准形的问题可归结为矩阵问题：寻找可逆阵$\boldsymbol{C}$，使得$\boldsymbol{C}^T\boldsymbol{A}\boldsymbol{C} = \boldsymbol{\Lambda}$.

定义5.5　设$\boldsymbol{A}$、$\boldsymbol{B}$是n阶方阵，若有可逆阵$\boldsymbol{C}$，使得

概念解析：矩阵合同

$$
\boldsymbol{B} = \boldsymbol{C}^T\boldsymbol{A}\boldsymbol{C} ,
$$

则称$\boldsymbol{A}$与$\boldsymbol{B}$合同.

定理5.9　若$\boldsymbol{A}$与$\boldsymbol{B}$合同，而$\boldsymbol{A}$为对称阵，则$\boldsymbol{B}$亦为对称阵，且$R(\boldsymbol{B}) = R(\boldsymbol{A})$.

证 若 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 合同，则有可逆阵 $\boldsymbol{C}$ ，使得 $\boldsymbol{B}=\boldsymbol{C}^T\boldsymbol{A}\boldsymbol{C}$. 又 $\boldsymbol{A}$ 为对称阵，即 $\boldsymbol{A}^T=\boldsymbol{A}$ ，故

$$\boldsymbol{B}^T=(\boldsymbol{C}^T\boldsymbol{A}\boldsymbol{C})^T=\boldsymbol{C}^T\boldsymbol{A}^T\boldsymbol{C}=\boldsymbol{C}^T\boldsymbol{A}\boldsymbol{C}=\boldsymbol{B},$$

即 $\boldsymbol{B}$ 亦为对称阵.

再证 $R(\boldsymbol{B})=R(\boldsymbol{A})$. 因 $\boldsymbol{B}=\boldsymbol{C}^T\boldsymbol{A}\boldsymbol{C}$ ， $\boldsymbol{C}$ 为可逆阵，故 $\boldsymbol{C}^T$ 亦为可逆阵，由矩阵等价的定义，知 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 等价，故 $R(\boldsymbol{B})=R(\boldsymbol{A})$.

根据前面的讨论知：二次型 $f=\boldsymbol{x}^T\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}$ 经可逆线性变换 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{C}\boldsymbol{y}$ 化为新二次型 $f=\boldsymbol{y}^T\boldsymbol{B}\boldsymbol{y}$ 时，前后两个二次型的矩阵是合同的.

下面介绍两种常用的化二次型为标准形的方法.

1. 用正交变换法化二次型为标准形

由定理5.8知，对实对称阵 $\boldsymbol{A}$ ，必有正交阵 $\boldsymbol{P}$ ，使得 $\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}=\boldsymbol{P}^T\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}=\boldsymbol{\Lambda}$ （即，任何一个实对称阵必合同相似于对角阵)，其中 $\boldsymbol{\Lambda}$ 是以 $\boldsymbol{A}$ 的 n 个特征值为对角元的对角阵，将此结论应用于二次型，即有如下定理：

定理5.10 （主轴定理）任给一个 n 元实二次型 $f=\boldsymbol{x}^T\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}$ ，总存在正交变换 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{P}\boldsymbol{y}$ ，将 f 化为标准形

$$f=\lambda_1y_1^2+\lambda_2y_2^2+\cdots+\lambda_ny_n^2,$$

其中 $\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n$ 是 f 的矩阵 A 的特征值， $\boldsymbol{P}$ 的 n 个列向量 $\boldsymbol{p}_1,\boldsymbol{p}_2,\cdots,\boldsymbol{p}_n$ 是 $\boldsymbol{A}$ 的对应于特征值 $\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n$ 的两两正交的单位特征向量.

用正交变换化实二次型为标准形（主轴定理)，起源于对二次曲线和二次曲面的分类问题的讨论，即将二次曲线和二次曲面方程变形（化为标准形方程)，选有主轴(正交矩阵的列向量)方向的轴作为坐标轴以了解方程的形状.

由上述定理可知，用正交变换法化二次型为标准形的一般步骤为：

（1）由 $\boldsymbol{A}$ 的特征方程 $|\boldsymbol{A}-\lambda\boldsymbol{E}|=0$ ，求出 $\boldsymbol{A}$ 的 n 个特征值 $\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n$ ；

（2）对每个特征值 λ_i ，求出齐次线性方程组 $(\boldsymbol{A}-\lambda_i\boldsymbol{E})\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ 的基础解系，即解空间的基. 若其不是标准正交基，则利用施密特正交规范化方法将其化为两两正交的单位特征向量;

（3）将此两两正交的单位特征向量作为列向量构造正交矩阵 $\boldsymbol{P}$ ，则正交变换 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{P}\boldsymbol{y}$ 就将二次型 $f(x_1,x_2,\cdots,x_n)$ 化为标准形

$$f=\lambda_1 y_1^2+\lambda_2 y_2^2+\cdots+\lambda_n y_n^2 .$$

例1 求正交变换 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{P}\boldsymbol{y}$，将二次型 $f(x_1, x_2, x_3)=2x_1x_2+2x_1x_3+2x_2x_3$ 化为标准形.

> 方法总结：求二次型 $f=\boldsymbol{x}^T\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}$ 标准形的方法

解 二次型 f 的矩阵为

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}0&1&1\\1&0&1\\1&1&0\end{pmatrix},$$

由 § 5.3 例1的结果知，有正交矩阵

$$\boldsymbol{P}=\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{3}}&-\frac{1}{\sqrt{2}}&-\frac{1}{\sqrt{6}}\\\frac{1}{\sqrt{3}}&\frac{1}{\sqrt{2}}&-\frac{1}{\sqrt{6}}\\\frac{1}{\sqrt{3}}&0&\frac{2}{\sqrt{6}}\end{pmatrix},$$

使 $\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}=\boldsymbol{P}^T\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}=\begin{pmatrix}2&&\\&-1&\\&&-1\end{pmatrix}$，于是有正交变换 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{P}\boldsymbol{y}$，将二次型 f 化为标准形

$$f=2y_1^2-y_2^2-y_3^2 .$$

例2 已知二次型

$$f(x_1, x_2, x_3)=ax_1^2+3x_2^2+3x_3^2+4x_2x_3$$

通过正交变换 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{P}\boldsymbol{y}$ 化为标准形 $f=y_1^2+2y_2^2+5y_3^2$，求参数 a 及所用的正交变换矩阵 P .

解 二次型 f 的矩阵

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}a&0&0\\0&3&2\\0&2&3\end{pmatrix},$$

由于 $\boldsymbol{A}$ 与对角阵 $\begin{pmatrix}1&0&0\\0&2&0\\0&0&5\end{pmatrix}$ 相似，故 $\boldsymbol{A}$ 的特征值为 $1, 2, 5$ ，又由相似矩阵迹相同，知

$a+3+3=1+2+5$，故 $a=2$．

对 $\lambda_1=1$，$\lambda_2=2$，$\lambda_3=5$ 分别求得特征向量 $\xi_1=\begin{pmatrix}0\\1\\-1\end{pmatrix},\xi_2=\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix},\xi_3=\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}$，将它们单位化得 $\boldsymbol{p}_1=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}0\\1\\-1\end{pmatrix},\boldsymbol{p}_2=\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix},\boldsymbol{p}_3=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}$，故所求正交阵为

$$\boldsymbol{P}=\begin{pmatrix}0&1&0\\ \frac{1}{\sqrt{2}}&0&\frac{1}{\sqrt{2}}\\ -\frac{1}{\sqrt{2}}&0&\frac{1}{\sqrt{2}}\end{pmatrix}.$$

例3 已知在平面直角坐标系 Ox_1x_2 中，二次曲线的方程为

$$x_1^2-\sqrt{3}x_1x_2+2x_2^2=1,$$

试确定其形状．

解 这是个解析几何的问题．为判定此方程所表示的曲线的形状，可先将其化成标准方程．为此，令

$$f=x_1^2-\sqrt{3}x_1x_2+2x_2^2,$$

此二次型的实对称阵为

$$\begin{pmatrix}1&-\frac{\sqrt{3}}{2}\\ -\frac{\sqrt{3}}{2}&2\end{pmatrix},$$

特征值为 $\lambda_1=\frac{5}{2},\lambda_2=\frac{1}{2}$，故可用正交变换将 f 化为标准形 $\frac{5}{2}y_1^2+\frac{1}{2}y_2^2$．

故在新坐标系中，该曲线的方程为 $\frac{5}{2}y_1^2+\frac{1}{2}y_2^2=1$，这是一个椭圆．从而原方程在坐标系 Ox_1x_2 下也表示椭圆．

2.用配方法化二次型为标准形

用正交变换化二次型为标准形，具有保持几何形状不变的优点．除了正交变换法，初等

代数的配方技巧也可将任二次型化为标准形．这里只介绍拉格朗日配方法．下面举例来说明这种方法．

例4 化二次型

$$f(x_1, x_2, x_3)=x_1^2+x_1x_2+x_2x_3+x_1x_3$$

为标准形，并写出所用的线性变换．

解 由于 f 中含变量 x_1 的平方项，故把含 x_1 的项归并起来，配方可得

$$\begin{aligned}f(x_1, x_2, x_3)&=x_1^2+x_1x_2+x_2x_3+x_1x_3\\&=x_1^2+x_1(x_2+x_3)+\left(\frac{x_2+x_3}{2}\right)^2-\frac{1}{4}x_2^2-\frac{1}{4}x_3^2+\frac{1}{2}x_2x_3\\&=\left(x_1+\frac{x_2}{2}+\frac{x_3}{2}\right)^2-\frac{1}{4}\left(x_2^2+x_3^2-2x_2x_3\right)\\&=\left(x_1+\frac{1}{2}x_2+\frac{1}{2}x_3\right)^2-\left(\frac{1}{2}x_2-\frac{1}{2}x_3\right)^2\end{aligned}$$

作可逆线性变换

$$\begin{cases}y_1=x_1+\frac{1}{2}x_2+\frac{1}{2}x_3\\y_2=\frac{1}{2}x_2-\frac{1}{2}x_3\\y_3=x_3\end{cases}，即\begin{cases}x_1=y_1-y_2-y_3\\x_2=\quad 2y_2+y_3\\x_3=\qquad\quad y_3\end{cases}$$

就将二次型 f 化为标准形 $f=y_1^2-y_2^2$，所用变换矩阵为

$$\boldsymbol{C}=\begin{pmatrix}1&-1&-1\\0&2&1\\0&0&1\end{pmatrix}，(|\boldsymbol{C}|=2\neq 0).$$

例5 化二次型

$$f(x_1,x_2,x_3)=x_1x_2+2x_1x_3$$

为标准形，并写出所用的线性变换．

解 在 f 中不含平方项．由于含有 x_1x_2 乘积项，故令

$$\begin{cases}x_1=y_1+y_2\\x_2=y_1-y_2\\x_3=\qquad y_3\end{cases},$$

代入可得 $$f=y_1^2-y_2^2+2y_1y_3+2y_2y_3.$$

再配方，得 $$f=(y_1+y_3)^2-(y_2-y_3)^2,$$

令

$$\begin{cases} z_1 = y_1+y_3 \\ z_2 = y_2-y_3 \\ z_3 = \quad\ \ y_3 \end{cases}，即 \begin{cases} y_1 = z_1-z_3 \\ y_2 = z_2+z_3 \\ y_3 = \quad\ \ z_3 \end{cases},$$

即有 $f=z_1{}^2-z_2{}^2$．所用变换矩阵为

$$\boldsymbol{C}=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}，(|\boldsymbol{C}|=-2\neq 0).$$

一般地，任何二次型都可用上面两例的方法找到可逆变换，将二次型化为标准形．要注意的是，用配方法得到的标准形中平方项的系数不一定是二次型的矩阵的特征值，但是，标准形中含有的项数，就是二次型的秩．

微视频 5-5 正定二次型
PPT 课件 5-5 正定二次型

§5.5 正定二次型

1.惯性定理

在上节的学习中我们知道，二次型的标准形不是唯一的，它与所取的可逆线性变换有关，但是标准形所含的项数，即二次型的秩，是确定的．下面的定理指出，不仅如此，在限定变换为实变换时，标准形中正系数的个数是不变的（从而负系数的个数也不变）．

定理 5.11 （惯性定理）设有实二次型 $f=\boldsymbol{x}^T\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}$，它的秩为 r，有两个实的可逆变换

$$\boldsymbol{x}=\boldsymbol{C}\boldsymbol{y} \quad 和 \quad \boldsymbol{x}=\boldsymbol{P}\boldsymbol{z}$$

使 $$f=k_1y_1^2+k_2y_2^2+\cdots+k_ry_r^2 \quad (k_i\neq 0),$$

及 $$f=\lambda_1z_1^2+\lambda_2z_2^2+\cdots+\lambda_rz_r^2 \quad (\lambda_i\neq 0),$$

则 $k_1, k_2, \cdots, k_r$ 中正数的个数与 $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_r$ 中正数的个数相等.

证明从略.

定义 5.6 在秩为 r 的实二次型 $f(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ 的标准形中，正平方项的项数 p 称为二次型 f 的正惯性指数，负平方项的项数 q 称为 f 的负惯性指数；它们的差 $p-q=p-(r-p)=2p-r$ 称为二次型 f 的符号差.

设秩为 r 的实二次型 $f(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ 经可逆线性变换，再适当交换变量的次序，化为标准形

$$d_1 y_1^2 + d_2 y_2^2 + \cdots + d_p y_p^2 - d_{p+1} y_{p+1}^2 - \cdots - d_r y_r^2 , \tag{5.4}$$

其中 $d_i > 0$. 由于正实数在实数域中总可以开平方，所以再对 (5.4) 作一可逆线性变换

$$\begin{cases} y_1 = \dfrac{1}{\sqrt{d_1}} z_1 \\ \quad \vdots \\ y_r = \dfrac{1}{\sqrt{d_r}} z_r \\ y_{r+1} = z_{r+1} \\ \quad \vdots \\ y_n = z_n \end{cases} ,$$

概念解析：二次标准型、规范性

则 (5.4) 式就变成

$$z_1^2 + z_2^2 + \cdots + z_p^2 - z_{p+1}^2 - \cdots - z_r^2 , \tag{5.5}$$

称 (5.5) 式为二次型的规范形.

定义 5.7 若二次型的标准形中平方项的系数只是 1，-1 和 0，则称该标准形为二次型的规范形.

规范形完全被 r 和 p 这两个数所决定.

定理 5.12 任意一个实二次型总可经过适当的可逆线性变换化为规范形，且规范形是唯一的.

用矩阵语言可描述如下：

方法总结：关于实对称矩阵相似与合同等相关问题及方法

定理5.13 任意n阶实对称阵$\boldsymbol{A}$合同于对角阵

$$\begin{pmatrix} \boldsymbol{E}_p & & \\ & -\boldsymbol{E}_{r-p} & \\ & & \boldsymbol{O} \end{pmatrix},$$

其中$r=R(\boldsymbol{A})$，p为$\boldsymbol{A}$的正特征值个数，$r-p$为$\boldsymbol{A}$的负特征值个数（重根按重数计算）.

2.正定二次型

概念解析：正定矩阵

定义5.8 设n元实二次型$f=\boldsymbol{x}^T\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}$，若对任意一组不全为零的实数$c_1, c_2, \cdots, c_n$，都有$f(c_1, c_2, \cdots, c_n)>0$，则称$f$为正定二次型，并称实对称阵$\boldsymbol{A}$是正定矩阵.

若对任意一组不全为零的实数$c_1, c_2, \cdots, c_n$，都有$f(c_1, c_2, \cdots, c_n)<0$，则称$f$为负定二次型，并称实对称阵$\boldsymbol{A}$是负定矩阵. 因为$f$负定的充分必要条件是$-f$正定，本节主要研究正定二次型.

方法总结：关于正定矩阵的判定方法

例1 判断下列二次型的正定性.

（1）$f(x_1, x_2, x_3)=x_1^2+x_2^2+x_3^2$；

（2）$g(x_1, x_2, x_3)=x_1^2+x_2^2$；

（3）$h(x_1, x_2, x_3)=x_1^2+x_2^2-x_3^2$.

解 （1） 因为对任意一组不全为零的实数c_1, c_2, c_3，都有$f(c_1, c_2, c_3)=c_1^2+c_2^2+c_3^2>0$，所以$f$是正定的.

（2）因为$g(0, 0, 1)=0$，所以g不是正定的.

注 如果将g看成是两个变量的二次型，则g为正定的

（3）因为$h(0, 0, 1)=-1$，所以h不是正定的.

从上例可以看出，根据二次型的标准形来判断二次型的正定性是比较容易的，有如下一般结论：

定理5.14 n元实二次型$f(x_1,x_2,\cdots,x_n)=\boldsymbol{x}^T\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}$正定的充分必要条件是它的标准形的$n$个系数全为正，即$f$的正惯性指数等于$n$.

证 设有可逆线性变换 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{C}\boldsymbol{y}$，使 $f=d_1y_1^2+\cdots+d_ny_n^2$. 因 $\boldsymbol{C}$ 可逆，故对任意 $\boldsymbol{x}\neq\boldsymbol{0}$，有 $\boldsymbol{y}=\boldsymbol{C}^{-1}\boldsymbol{x}\neq\boldsymbol{0}$，从而

$$f(x_1,\,x_2,\,\cdots,\,x_n)=\sum_{i=1}^{n}d_iy_i^2>0,$$

等价于 $d_i>0$，$i=1,2,\cdots,n$，即 f 的正惯性指数为 n.

推论 5.5 实对称阵 $\boldsymbol{A}$ 正定的充分必要条件是 $\boldsymbol{A}$ 的特征值全为正.

证 对任一实对称阵 $\boldsymbol{A}$，总存在一正交矩阵 $\boldsymbol{P}$，使得

$$\boldsymbol{P}^T\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}=\begin{pmatrix}\lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n\end{pmatrix},$$

其中 $\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n$ 是 $\boldsymbol{A}$ 的全部特征值（重根按重数计算）. 从而得证.

由于正定二次型 $f(x_1,x_2,\cdots,x_n)=\boldsymbol{x}^T\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}$ 总可经过可逆线性变换 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{C}\boldsymbol{y}$ 化为正惯性指数为 n 的规范形

$$f=y_1^2+y_2^2+\cdots+y_n^2=\boldsymbol{y}^T\boldsymbol{E}\boldsymbol{y},$$

故又有

推论 5.6 实对称阵 $\boldsymbol{A}$ 正定的充分必要条件是存在可逆阵 $\boldsymbol{C}$，使 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{C}^T\boldsymbol{C}$，即 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{E}$ 合同.

推论 5.7 若实对称阵 $\boldsymbol{A}$ 正定，则 $|\boldsymbol{A}|>0$.

证 由 $\boldsymbol{A}$ 正定，知存在可逆阵 $\boldsymbol{C}$，使 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{C}^T\boldsymbol{C}$，故 $|\boldsymbol{A}|=|\boldsymbol{C}^T\boldsymbol{C}|=|\boldsymbol{C}|^2$，而 $|\boldsymbol{C}|\neq0$，故 $|\boldsymbol{A}|>0$.

例 2 设矩阵 $\boldsymbol{A}$ 正定，证明 $|\boldsymbol{A}+\boldsymbol{E}|>1$.

证 因 $\boldsymbol{A}$ 正定，故 $\boldsymbol{A}$ 的特征值全为正. 设 $\boldsymbol{A}$ 的全部特征值是 $\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n$，则 $\boldsymbol{A}+\boldsymbol{E}$ 的全部特征值是 $\lambda_1+1,\lambda_2+1,\cdots,\lambda_n+1$，从而

$$|\boldsymbol{A}+\boldsymbol{E}|=(\lambda_1+1)(\lambda_2+1)\cdots(\lambda_n+1)>1.$$

另外，我们常用下述赫尔维茨定理判断二次型的正定性.

定理 5.15 实二次型 $f(x_1,x_2,\cdots,x_n)=\boldsymbol{x}^T\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}$ 正定的充分必要条件为实对称阵 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})_{n\times n}$ 的各阶顺序主子式都为正，即

$$a_{11}>0,\quad \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}>0,\quad \cdots,\quad \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}>0.$$

证明从略.

对于负定二次型 $\boldsymbol{x}^T\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}$，由于 $-\boldsymbol{x}^T\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{x}^T(-\boldsymbol{A})\boldsymbol{x}$ 为正定二次型，故由定理 5.15 可得如下推论：

推论 5.8 实二次型 $f(x_1,x_2,\cdots,x_n)=\boldsymbol{x}^T\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}$ 负定的充分必要条件为实对称阵 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})_{n\times n}$ 的奇数阶顺序主子式全都小于零，而偶数阶顺序主子式全都大于零.

典型例题：已知含有参数的二次型正定，求参数

例 3 设实二次型 $f(x_1,\ x_2,\ x_3)=tx_1^2+tx_2^2+tx_3^2+2x_1x_2+2x_1x_3-2x_2x_3$，问：$t$ 满足什么条件时，二次型 f 是正定的？

解 二次型 f 的矩阵为 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} t & 1 & 1 \\ 1 & t & -1 \\ 1 & -1 & t \end{pmatrix}$，由 $t>0$，$\begin{vmatrix} t & 1 \\ 1 & t \end{vmatrix}>0$，$\begin{vmatrix} t & 1 & 1 \\ 1 & t & -1 \\ 1 & -1 & t \end{vmatrix}>0$，解得 $t>2$．故当 $t>2$ 时，二次型 f 是正定的.

典型例题：已知两个矩阵为正定，其乘积正定的充要条件

例 4 证明：如果 $\boldsymbol{A}$ 是正定矩阵，则 $\boldsymbol{A}^{-1}$ 也是正定矩阵.

证 由于 $\boldsymbol{A}$ 是实对称阵，故 $\left(\boldsymbol{A}^{-1}\right)^T=\left(\boldsymbol{A}^T\right)^{-1}=\boldsymbol{A}^{-1}$，即 $\boldsymbol{A}^{-1}$ 也是实对称阵.

由 $\boldsymbol{A}$ 是正定阵，知 $\boldsymbol{A}$ 的特征值 $\lambda_i>0$，$i=1,2,\cdots,n$，故 $\boldsymbol{A}^{-1}$ 的全部特征值对应为 $\mu_i=\dfrac{1}{\lambda_i}>0$，$i=1,2,\cdots,n$，从而 $\boldsymbol{A}^{-1}$ 也是正定矩阵.

§ 5.6　应用实例

1.　圆锥曲线的分类问题

关于两个变量 x 和 y 的方程

$$ax^2+2bxy+cy^2+dx+ey+f=0 \tag{5.6}$$

所对应的图形称为圆锥曲线（conic section）. 方程(5.6)可写为

$$(x,y)\begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}+(d,e)\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}+f=0,$$

令$\boldsymbol{x}=\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$，$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix}$，则

$$\boldsymbol{x}^T\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=ax^2+2bxy+cy^2$$

称为与(5.6)相关的二次型.

注：若没有有序数对(x,y)满足方程(5.6)，则称(5.6)表示一个虚圆锥曲线. 若其图形仅包含一个点、一条直线或两条直线，则称为退化的圆锥曲线. 我们关心的是非退化的圆锥曲线：圆、椭圆、抛物线或双曲线.

当圆锥曲线的方程化为下列标准形式时，其类别很容易判断：

（1）$x^2+y^2=r^2$（圆），

（2）$\dfrac{x^2}{\alpha^2}+\dfrac{y^2}{\beta^2}=1$（椭圆），

（3）$\dfrac{x^2}{\alpha^2}-\dfrac{y^2}{\beta^2}=1$或$\dfrac{y^2}{\alpha^2}-\dfrac{x^2}{\beta^2}=1$（双曲线），

（4）$x^2=\alpha y$或$y^2=\alpha x$（抛物线），

其中α,β和γ均为非零实数. 方程为标准形式的圆锥曲线称为在标准位置.

判断圆锥曲线形状时，若其不在标准位置，常寻求一个新坐标系，使该曲线在新坐标系下为标准位置.

例1 绘制方程$9x^2-18x+4y^2+16y-11=0$的草图.

解 首先对原方程进行配方，得到：

$$\frac{(x-1)^2}{4}+\frac{(y+2)^2}{9}=1,$$

令$x'=x-1, y'=y+2$，原方程化为

$$\frac{(x')^2}{4}+\frac{(y')^2}{9}=1\,.$$

也就是说，将 x 轴向下平移两个单位得到 x' 轴，y 轴向右平移一个单位得到 y' 轴，则在新坐标系 $O'x'y'$ 下原图形是标准位置的椭圆，如图 5.1 所示.

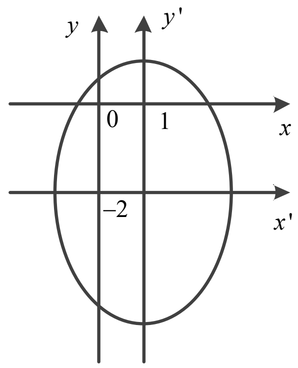


图 5.1

例 2 绘制二次方程

$$3x^2+2xy+3y^2-8=0$$

所表示的圆锥曲线的图形.

解 由于该方程含有交叉项，为将交叉项消去，将其写成

$$(x,y)\begin{pmatrix}3&1\\1&3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=8\,,$$

矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}3&1\\1&3\end{pmatrix}$ 的特征值为 $\lambda_1=2,\lambda_2=4,$ 对应的正交单位特征向量为 $\left(\frac{1}{\sqrt{2}},-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^T$ 和 $\left(\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^T$，取

$$\boldsymbol{Q}=\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}}&\frac{1}{\sqrt{2}}\\-\frac{1}{\sqrt{2}}&\frac{1}{\sqrt{2}}\end{pmatrix},$$

作变换

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$$

得 $\boldsymbol{Q}^T \boldsymbol{A} \boldsymbol{Q} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$，将原曲线化为标准形 $2(x')^2 + 4(y')^2 = 8$，即 $\frac{(x')^2}{4} + \frac{(y')^2}{2} = 1$.

正交阵 $\boldsymbol{Q}$ 的列称为二次型 $\boldsymbol{x}^T \boldsymbol{A} \boldsymbol{x}$ 的主轴，向量 $\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$ 是向量 $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ 在由这些主轴构成的 $\mathbb{R}^2$ 空间的单位正交基下的坐标向量. 找到主轴，相当于找到一个新的坐标系，在该新的坐标系下其图形是在标准位置的图形.

图 5.2 中的椭圆是 $3x^2 + 2xy + 3y^2 - 8 = 0$ 的图形表示，x' 轴的正向是正交阵 $\boldsymbol{Q}$ 第一列的方向，y' 轴的正向是正交阵 $\boldsymbol{Q}$ 第二列的方向.

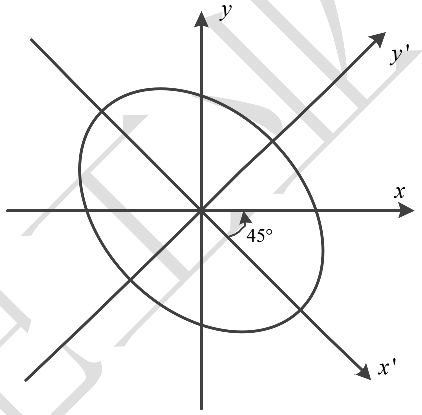


图 5.2

例 3 绘制二次方程

$$3x^2 + 2xy + 3y^2 + 4\sqrt{2}y - 4 = 0$$

所表示的圆锥曲线的图形.

解 首先利用上例结果在原方程中消去交叉项：作正交变换

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix},$$

将方程化为：

$$2(x')^2+4(y')^2+(0,4\sqrt{2})\begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}=4,$$

即： $(x')^2-4x'+2(y')^2+4y'=2$，再进行配方，得到：$(x'-2)^2+2(y'+1)^2=8$，令 $x''=x'-2, y''=y'+1$，方程化简为：$\frac{(x'')^2}{8}+\frac{(y'')^2}{4}=1$，故通过先旋转再平移坐标轴的方法即可使原二次方程所表示的圆锥曲线处于标准位置，图形绘制如下：

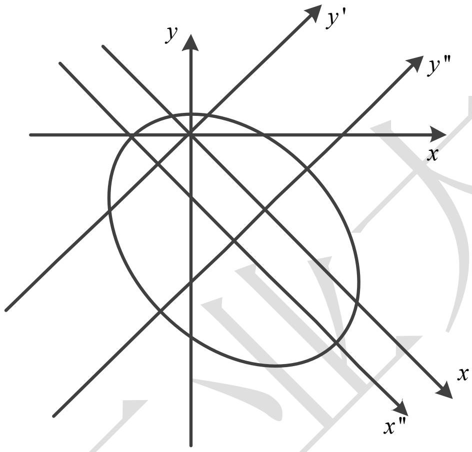


图 5.3

以上讨论只涉及圆锥曲线分类，事实上，对高等数学中二次曲面的分类也可作类似讨论．感兴趣的读者可参见[8]和[12]．

2. 用矩阵的正定性判定多元函数极值的存在性

工科院校学生使用的《高等数学》教材中，关于二元函数极值存在性的判定，有如下结论（参见[17]）：

定理（充分条件）：设函数 $z=f(x,y)$ 在点 (x_0,y_0) 的某邻域内连续且具有一阶及二阶连续偏导数，又 $f_x(x_0,y_0)$ 、 $f_y(x_0,y_0)$ 均为 0，令 $f_{xx}(x_0,y_0)=A$， $f_{xy}(x_0,y_0)=B$， $f_{yy}(x_0,y_0)=C$，则 $f(x,y)$ 在点 (x_0,y_0) 处是否取得极值的判别条件如下：

（1） $AC-B^2>0$ 时，具有极值，且当 $A<0$ 时有极大值，当 $A>0$ 时有极小值；

（2） $AC-B^2<0$ 时，没有极值；

（3） $AC-B^2=0$ 时，可能有极值，也可能没有极值，需另作讨论．

上述定理中，由于二阶偏导数连续，故有 $f_{xy}(x_0,y_0)=f_{yx}(x_0,y_0)$．引进矩阵

$$\boldsymbol{D}=\begin{pmatrix}A & B\\ B & C\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}f_{xx} & f_{xy}\\ f_{yx} & f_{yy}\end{pmatrix},$$

则 $f(x,y)$ 在点 (x_0,y_0) 处取得极大值的充分条件相当于矩阵 $\boldsymbol{D}$ 为负定矩阵，取得极小值的充分条件相当于矩阵 $\boldsymbol{D}$ 为正定矩阵，而当 $\boldsymbol{D}$ 为不定矩阵时，(x_0,y_0) 不是极值点．如此，判断二元函数在驻点处是否存在极值的问题就转化为判断矩阵 $\boldsymbol{D}$ 的正定性问题．[18]将结论推广到三元函数求极值的问题，具体如下．

首先引进记号：

$$\text{点}\, P=\left(x_1,x_2,x_3\right)，\text{点}\, P_0=\left(x_1^{(0)},x_2^{(0)},x_3^{(0)}\right),$$

$$\Delta P=\left(x_1-x_1^{(0)},x_2-x_2^{(0)},x_3-x_3^{(0)}\right)=\left(h_1,h_2,h_3\right);$$

f_i 表示三元函数 $f\left(x_1,x_2,x_3\right)$ 对 x_i 的偏导数，$i=1,2,3$；f_{ij} 表示 $f\left(x_1,x_2,x_3\right)$ 先对 x_i 后对 x_j 的二阶混合偏导数，$i,j=1,2,3$．

设三元函数 $u=f\left(x_1,x_2,x_3\right)=f\left(P\right)$ 在点 P_0 的某邻域内连续且具有一阶及二阶连续偏导数，又 $f_1(P_0)=f_2(P_0)=f_3(P_0)=0$，即 P_0 是 $u=f\left(P\right)$ 的驻点．在驻点 P_0 处，作三阶方阵

$$\boldsymbol{D}=\begin{pmatrix}f_{11} & f_{12} & f_{13}\\ f_{21} & f_{22} & f_{23}\\ f_{31} & f_{32} & f_{33}\end{pmatrix},$$

若 $\boldsymbol{D}$ 为正定矩阵，则函数 $f\left(P\right)$ 在 P_0 点取得极小值；若 $\boldsymbol{D}$ 为负定矩阵，则函数 $f\left(P\right)$ 在 P_0 点取得极大值；若 $\boldsymbol{D}$ 为不定矩阵，则函数 $f\left(P\right)$ 在 P_0 点不取极值．

证：设 P 是 P_0 的某邻域内任意一点，且 $P=\left(x_1^{(0)}+h_1,x_2^{(0)}+h_2,x_3^{(0)}+h_3\right)=P_0+\Delta P$，令

$$\Phi(t)=f(x_1^{(0)}+h_1t,x_2^{(0)}+h_2t,x_3^{(0)}+h_3t)=f(P_0+\Delta P\cdot t),$$

则

$$\Phi(0)=f(P_0)，\ \Phi(1)=f(P),$$

$$\Phi'(t)=h_1\cdot f_1(P_0+\Delta P\cdot t)+h_2\cdot f_2(P_0+\Delta P\cdot t)+h_3\cdot f_3(P_0+\Delta P\cdot t),$$

$$\begin{aligned}\Phi''(t)=&h_1^2\cdot f_{11}(P_0+\Delta P\cdot t)+h_2^2\cdot f_{22}(P_0+\Delta P\cdot t)+h_3^2\cdot f_{33}(P_0+\Delta P\cdot t)\\&+2h_1h_2\cdot f_{12}(P_0+\Delta P\cdot t)+2h_1h_3\cdot f_{13}(P_0+\Delta P\cdot t)+2h_2h_3\cdot f_{23}(P_0+\Delta P\cdot t),\end{aligned}$$

利用一元函数展开式得：$\Phi(1)=\Phi(0)+\Phi'(0)+\frac{1}{2!}\Phi''(\theta)$，$0<\theta<1$，

即：

$$\begin{aligned}f(P)=&f(P_0)+h_1\cdot f_1(P_0)+h_2\cdot f_2(P_0)+h_3\cdot f_3(P_0)\\&+\frac{1}{2!}[h_1^2\cdot f_{11}(P_0+\Delta P\cdot\theta)+h_2^2\cdot f_{22}(P_0+\Delta P\cdot\theta)+h_3^2\cdot f_{33}(P_0+\Delta P\cdot\theta)\\&+2h_1h_2\cdot f_{12}(P_0+\Delta P\cdot\theta)+2h_1h_3\cdot f_{13}(P_0+\Delta P\cdot\theta)+2h_2h_3\cdot f_{23}(P_0+\Delta P\cdot\theta)],\end{aligned}$$

由于 $f\left(x_1,x_2,x_3\right)$ 具有二阶连续偏导数，故有 $\lim\limits_{\Delta P\to\mathbf{0}}f_{ij}(P_0+\Delta P\cdot\theta)=f_{ij}(P_0)$，$i,j=1,2,3$，

即

$$f_{ij}(P_0+\Delta P\cdot\theta)=f_{ij}(P_0)+\alpha_{ij},$$

其中

$$\lim_{\Delta P\to\mathbf{0}}\alpha_{ij}=0,\quad i,j=1,2,3.$$

又 $f_1(P_0)=f_2(P_0)=f_3(P_0)=0$，故

$$f(P)-f(P_0)=\frac{1}{2}[\sum_{i=1}^{3}\sum_{j=1}^{3}f_{ij}(P_0)h_ih_j+\sum_{i=1}^{3}\sum_{j=1}^{3}\alpha_{ij}h_ih_j].$$

在 P_0 点作矩阵：

$$\boldsymbol{D}=\begin{pmatrix}f_{11}&f_{12}&f_{13}\\f_{21}&f_{22}&f_{23}\\f_{31}&f_{32}&f_{33}\end{pmatrix},$$

由于 $f\left(x_1,x_2,x_3\right)$ 具有二阶连续偏导数，故 $f_{ij}=f_{ji}$，$\boldsymbol{D}$ 是对称阵，且是二次型 $\sum\limits_{i=1}^{3}\sum\limits_{j=1}^{3}f_{ij}(P_0)h_ih_j$ 的矩阵.

由于 $\lim\limits_{\Delta P\to\mathbf{0}}\alpha_{ij}=0$，故 $\lim\limits_{\Delta P\to\mathbf{0}}\sum\limits_{i=1}^{3}\sum\limits_{j=1}^{3}\alpha_{ij}h_ih_j=0$，从而总可以找到正数 δ，在 P_0 的 δ 邻域内恒有：

$$\left|\sum_{i=1}^{3}\sum_{j=1}^{3}\alpha_{ij}h_i h_j\right| < \left|\sum_{i=1}^{3}\sum_{j=1}^{3}f_{ij}(P_0)h_i h_j\right| \tag{5.7}$$

当 $\boldsymbol{D}$ 为正定矩阵时，二次型 $\sum_{i=1}^{3}\sum_{j=1}^{3}f_{ij}(P_0)h_i h_j$ 正定，且由 (5.7) 式得：

$$\sum_{i=1}^{3}\sum_{j=1}^{3}f_{ij}(P_0)h_i h_j > \sum_{i=1}^{3}\sum_{j=1}^{3}\alpha_{ij}h_i h_j,$$

故在 P_0 的 δ 邻域内恒有：$f(P)-f(P_0)>0$ 或 $f(P)>f(P_0)$，即 $f(P)$ 在 P_0 点取得极小值.

当 $\boldsymbol{D}$ 为负定矩阵时，二次型 $\sum_{i=1}^{3}\sum_{j=1}^{3}f_{ij}(P_0)h_i h_j$ 负定，且由 (5.7) 式得：

$$-\sum_{i=1}^{3}\sum_{j=1}^{3}f_{ij}(P_0)h_i h_j > \sum_{i=1}^{3}\sum_{j=1}^{3}\alpha_{ij}h_i h_j,$$

故在 P_0 的 δ 邻域内恒有：$f(P)-f(P_0)<0$ 或 $f(P)<f(P_0)$，即 $f(P)$ 在 P_0 点取得极大值.

当 $\boldsymbol{D}$ 为不定矩阵，则 $f(P)$ 在 P_0 点不取极值．证毕.

n 元函数情形也有类似结论：

设 n 元函数 $u=f(x_1,x_2,\cdots,x_n)$ 在驻点 $P_0=\left(x_1^{(0)},x_2^{(0)},\cdots,x_n^{(0)}\right)$ 的某邻域内连续且具有一阶及二阶连续偏导数．在驻点 P_0 处，作 n 阶方阵

$$\boldsymbol{D}=\begin{pmatrix} f_{11} & f_{12} & \cdots & f_{1n} \\ f_{21} & f_{22} & \cdots & f_{2n} \\ & \cdots & \cdots & \\ f_{n1} & f_{n2} & \cdots & f_{nn} \end{pmatrix},$$

若 $\boldsymbol{D}$ 为正定矩阵，则函数在 P_0 点取得极小值；若 $\boldsymbol{D}$ 为负定矩阵，则函数在 P_0 点取得极大值；若 $\boldsymbol{D}$ 为不定矩阵，则函数在 P_0 点不取极值．具体证明此处不再赘述.

例 4 求函数

$$u=x+\frac{y^2}{4x}+\frac{z^2}{y}+\frac{2}{z} \qquad (x>0,y>0,z>0)$$

的极值.

解 先求驻点. 令

$$\begin{cases} u_1 = 1 - \dfrac{y^2}{4x^2} = 0 \\ u_2 = \dfrac{2y}{4x} - \dfrac{z^2}{y^2} = 0 \\ u_3 = \dfrac{2z}{y} - \dfrac{2}{z^2} = 0 \end{cases},$$

得驻点 $P_0\left(\dfrac{1}{2},1,1\right)$.

在驻点 P_0 处，$u_{11}=4, u_{12}=-2, u_{13}=0, u_{22}=3, u_{23}=-2, u_{33}=6$. 作矩阵

$$\boldsymbol{D} = \begin{pmatrix} 4 & -2 & 0 \\ -2 & 3 & -2 \\ 0 & -2 & 6 \end{pmatrix},$$

由于 $u_{11}=4>0$，$\begin{vmatrix} 4 & -2 \\ -2 & 3 \end{vmatrix} = 8 > 0$，$|\boldsymbol{D}| = 32 > 0$，故 $\boldsymbol{D}$ 为正定矩阵，由前述结论知，函数在 P_0 点取得极小值，为 $f\left(\dfrac{1}{2},1,1\right)=4$.

3. 人口流动问题

例 5 设某国人口流动状态的统计规律是每年有十分之一的城市人口流向农村，十分之二的农村人口流入城市．假定人口总数不变，那么经过许多年后，全国人口将会集中在城市中吗？

解 设最初城市和农村人口分别为 x_0，y_0，第一年末城乡人口为

$$\begin{cases} x_1 = 0.9x_0 + 0.2y_0 \\ y_1 = 0.1x_0 + 0.8y_0 \end{cases},$$

即

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.9 & 0.2 \\ 0.1 & 0.8 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix},$$

则第 k 年末城乡人口为

$$\begin{pmatrix} x_k \\ y_k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.9 & 0.2 \\ 0.1 & 0.8 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_{k-1} \\ y_{k-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.9 & 0.2 \\ 0.1 & 0.8 \end{pmatrix}^k \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}.$$

设 $\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 0.9 & 0.2 \\ 0.1 & 0.8 \end{pmatrix}$，经计算得 $\boldsymbol{A} = \boldsymbol{P}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0.7 \end{pmatrix}\boldsymbol{P}^{-1}$，其中 $\boldsymbol{P} = \dfrac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$，于是

$$\boldsymbol{A}^k=\boldsymbol{P}\begin{pmatrix}1&0\\0&0.7\end{pmatrix}^k\boldsymbol{P}^{-1}=\begin{pmatrix}\frac{2}{3}+\frac{1}{3}\times0.7^k & \frac{2}{3}-\frac{2}{3}\times0.7^k\\ \frac{1}{3}-\frac{1}{3}\times0.7^k & \frac{1}{3}+\frac{2}{3}\times0.7^k\end{pmatrix},$$

从而

$$\begin{pmatrix}x_k\\y_k\end{pmatrix}=\boldsymbol{A}^k\begin{pmatrix}x_0\\y_0\end{pmatrix}=(x_0+y_0)\begin{pmatrix}\frac{2}{3}\\ \frac{1}{3}\end{pmatrix}+(x_0-2y_0)0.7^k\begin{pmatrix}\frac{1}{3}\\ -\frac{1}{3}\end{pmatrix}.$$

当$k\to\infty$时，$0.7^k\to0$，故

$$\begin{pmatrix}x_\infty\\y_\infty\end{pmatrix}=(x_0+y_0)\begin{pmatrix}\frac{2}{3}\\ \frac{1}{3}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{2}{3}(x_0+y_0)\\ \frac{1}{3}(x_0+y_0)\end{pmatrix},$$

即当$k\to\infty$时，城市与农村人口为$2:1$，趋于稳定的分布状态.

4. 斐波纳契数列

例 6 比萨的列奥纳多$Leonardo$（又名斐波那契$Fibonacci$）在他写的一本数学书中提出了下列问题，一对新生兔子在一个月大小时开始繁殖，因此每个月生产一对兔子. 假定我们开始于一对新生的兔子，它们生的兔子没有死的，那么每个月初有多少对兔子产生？

解 设当月份为 0 时，我们只有一对新生的兔子P_1. 一个月后我们仍然只有一对新生的兔子P_1，因为它们还没有产生后代. 2 个月后我们有原始的那对兔子P_1和它们产生的第一对后代P_2. 3 个月后我们有原始的兔子对P_1，它们在 2 个月时生的第一代兔子对P_2以及它们生的第二代兔子对P_3. 4 个月后我们有兔子对P_1，P_2，P_3和P_1的后代P_4及P_2的后代P_5. 用u_n表示n个月后兔子对数，那么我们知道

$$u_0=1,\ u_1=1,\ u_2=2,\ u_3=3,\ u_4=5,\ u_5=8.$$

为了得到u_n的通项表达式，我们通过下列方式来求，n个月后兔子对数等于$n-1$个月后的兔子对数加上第n个月新生的兔子对数，后者是u_{n-2}，因为一对兔子在 2 个月后产生新兔子，这样

$$u_n=u_{n-1}+u_{n-2}. \tag{5.8}$$

即每个数是前面两个数之和，这样得到的数列称为斐波纳契数列. 这个数列有广泛应用，例

如，某种树叶的分布、向日葵籽的分布、数值分析中的搜索技术，统计学随机数的生成等等.

为了用递归关系(5.8) 来计算u_n，我们必须计算$u_0, u_1, \ldots, u_{n-2}, u_{n-1}$. 当$n$比较大时，计算相当复杂，下面我们介绍一种直接计算$u_n$的公式.

记$u_{n-1} = u_{n-1}$，则

$$\begin{cases} u_n = u_{n-1} + u_{n-2} \\ u_{n-1} = u_{n-1} \end{cases}, \tag{5.9}$$

把它写成矩阵形式

$$\begin{pmatrix} u_n \\ u_{n-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_{n-1} \\ u_{n-2} \end{pmatrix}. \tag{5.10}$$

现在我们定义

$$\boldsymbol{w}_k = \begin{pmatrix} u_{k+1} \\ u_k \end{pmatrix}, \boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad 0 \le k \le n-1,$$

则

$$\begin{aligned} \boldsymbol{w}_0 &= \begin{pmatrix} u_1 \\ u_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \\ \boldsymbol{w}_1 &= \begin{pmatrix} u_2 \\ u_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \\ &\vdots \\ \boldsymbol{w}_{n-1} &= \begin{pmatrix} u_n \\ u_{n-1} \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

于是(5.10)能写成

$$\boldsymbol{w}_{n-1} = \boldsymbol{A}\boldsymbol{w}_{n-2},$$

所以

$$\begin{aligned} \boldsymbol{w}_1 &= \boldsymbol{A}\boldsymbol{w}_0, \\ \boldsymbol{w}_2 &= \boldsymbol{A}^2\boldsymbol{w}_0, \\ &\vdots \\ \boldsymbol{w}_{n-1} &= \boldsymbol{A}^{n-1}\boldsymbol{w}_0. \end{aligned} \tag{5.11}$$

由此我们知道，为了计算u_n，只需计算$\boldsymbol{A}^{n-1}$. 当n比较大时，计算仍然相当繁琐，为了克服这个困难，我们找一个与矩阵$\boldsymbol{A}$相似的对角矩阵，易求得

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}\frac{1+\sqrt{5}}{2} & \frac{1-\sqrt{5}}{2}\\ 1 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\frac{1+\sqrt{5}}{2} & 0\\ 0 & \frac{1-\sqrt{5}}{2}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\frac{1+\sqrt{5}}{2} & \frac{1-\sqrt{5}}{2}\\ 1 & 1\end{pmatrix}^{-1},$$

根据(5.11)，有

$$\boldsymbol{w}_{n-1}=\boldsymbol{A}^{n-1}\boldsymbol{w}_0=\begin{pmatrix}\frac{1+\sqrt{5}}{2} & \frac{1-\sqrt{5}}{2}\\ 1 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\frac{1+\sqrt{5}}{2} & 0\\ 0 & \frac{1-\sqrt{5}}{2}\end{pmatrix}^{n-1}\begin{pmatrix}\frac{1+\sqrt{5}}{2} & \frac{1-\sqrt{5}}{2}\\ 1 & 1\end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix},$$

这个等式给出u_n的直接计算公式

$$u_n=\frac{1}{\sqrt{5}}\left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1}-\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1}\right),$$

用计算机，我们计算出当$n=50$时，u_{50}近似于 203.65 亿.

5. 小行星轨道问题

例 7 天文学家要确定一颗小行星绕太阳运行的轨道，在轨道平面内建立以太阳为原点的直角坐标系，在两坐标轴上取天文测量单位（一天文单位为地球到太阳的平均距离：1.496×10^{11} m）. 在五个不同的时间点对小行星作了观察，测得轨道上五个点的坐标数据如表5.1：

表5.1　小行星观测数据

x	4.5596	5.0816	5.5546	5.9636	6.2756
y	0.8145	1.3685	1.9895	2.6925	3.5265

由开普勒第一定律知，小行星轨道为一椭圆. 设方程为

$$a_1x^2+2a_2xy+a_3y^2+2a_4x+2a_5y+1=0.$$

试确定椭圆的方程，在轨道平面内以太阳为原点绘出椭圆曲线，并应用坐标平移变换和正交变换将该二次曲线方程化为标准方程，绘出椭圆轨道图.

解 该二次曲线方程中有五个待定系数：a_1，a_2，a_3，a_4，a_5. 将观察所得的五个点坐标数据$(x_j,y_j)(j=1,2,\cdots,5)$代入其中，得到关于$a_1$，$a_2$，$a_3$，$a_4$，$a_5$的线性方程组

$$\begin{cases} a_1x_1^2+2a_2x_1y_1+a_3y_1^2+2a_4x_1+2a_5y_1=-1 \\ a_1x_2^2+2a_2x_2y_2+a_3y_2^2+2a_4x_2+2a_5y_2=-1 \\ a_1x_3^2+2a_2x_3y_3+a_3y_3^2+2a_4x_3+2a_5y_3=-1 \\ a_1x_4^2+2a_2x_4y_4+a_3y_4^2+2a_4x_4+2a_5y_4=-1 \\ a_1x_5^2+2a_2x_5y_5+a_3y_5^2+2a_4x_5+2a_5y_5=-1 \end{cases}$$

求解该方程组得椭圆的方程系数：(a_1，a_2，a_3，a_4，a_5).

将椭圆的一般方程写成矩阵形式

$$\begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a_1 & a_2 \\ a_2 & a_3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}+2\begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a_4 \\ a_5 \end{pmatrix}+1=0,$$

通过变量变换（平移变换和旋转变换）化为椭圆标准方程. 首先化去一次项，然后将二次型化为标准形. 为了用平移变换消去一次项，令 $x=x_0+\xi, y=y_0+\eta$（x_0, y_0 待定），代入方程整理，得

$$\begin{pmatrix} \xi & \eta \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a_1 & a_2 \\ a_2 & a_3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \xi \\ \eta \end{pmatrix}+2\begin{pmatrix} \xi & \eta \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a_1 & a_2 \\ a_2 & a_3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}+2\begin{pmatrix} \xi & \eta \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a_4 \\ a_5 \end{pmatrix}+F=0,$$

其中，$F=a_1x_0^2+2a_2x_0y_0+a_3y_0^2+2a_4x_0+2a_5y_0+1$. 要化简消去一次项，只需选择 x_0，y_0，使之满足二阶线性方程组

$$\begin{pmatrix} a_1 & a_2 \\ a_2 & a_3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} a_4 \\ a_5 \end{pmatrix}=0.$$

将 x_0，y_0 代入椭圆的一般方程，得

$$\begin{pmatrix} \xi & \eta \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a_1 & a_2 \\ a_2 & a_3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \xi \\ \eta \end{pmatrix}+F=0.$$

令 $\boldsymbol{C}=\begin{pmatrix} a_1 & a_2 \\ a_2 & a_3 \end{pmatrix}$，求出特征值 λ_1，λ_2 及其对应的特征向量 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2$. 取与 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2$ 等价的正交单位向量 $\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2$，构造正交矩阵 $\boldsymbol{Q}=(\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2)$，利用正交变换

$$\begin{pmatrix} \xi \\ \eta \end{pmatrix}=\boldsymbol{Q}\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}$$

得椭圆的标准方程：$\lambda_1u^2+\lambda_2v^2+F=0$. 椭圆长半轴和短半轴分别为

$$a=\sqrt{-F/\lambda_1},\quad b=\sqrt{-F/\lambda_2}.$$

结果表明：二次曲线方程中的各项系数为

$$a_1=-0.3378,\ a_2=0.1892,\ a_3=-0.3818,\ a_4=0.4609,\ a_5=0.4104.$$

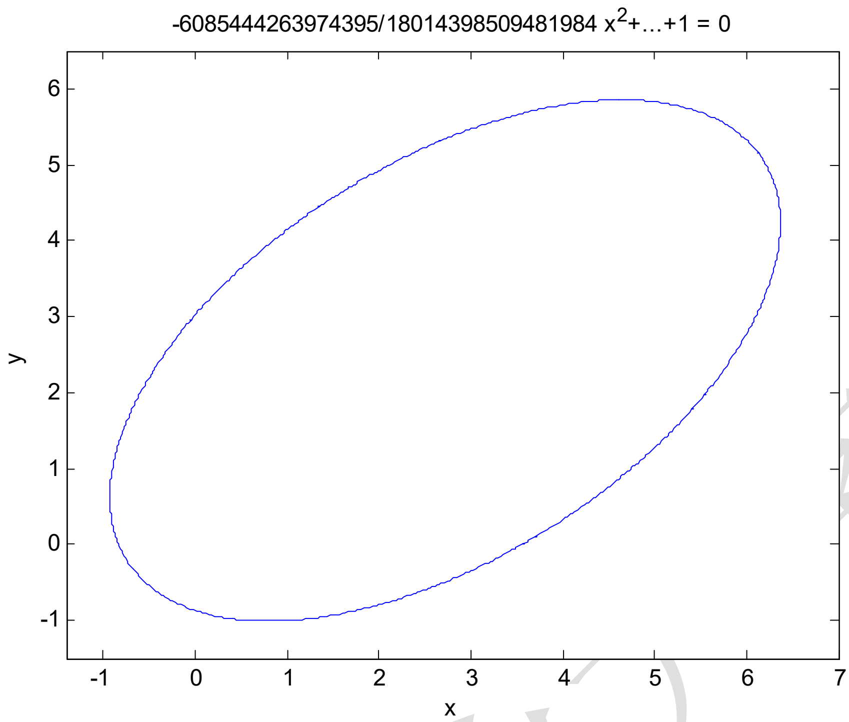


图 5.4 小行星绕太阳运行的轨道

椭圆标准方程为

$$\frac{(x-2.7213)^2}{4.3799^2}+\frac{(y-2.4234)^2}{2.4299^2}=1.$$

§5.7 用 Matlab 求特征值与特征向量

例 求矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}4 & 6 & 0\\ -3 & -5 & 0\\ -3 & -6 & 1\end{pmatrix}$ 的特征值与特征向量.

解：这里需掌握求矩阵的特征值与特征向量 eig 命令. 实验过程如下：

```
>> A=[4 6 0;-3 -5 0;-3 -6 1];
>> [kesai,lamda]=eig(A)

kesai =

       0           780/1351    -2584/2889
       0          -780/1351     1292/2889
       1          -780/1351          0


lamda =
```

1	0	0
0	-2	0
0	0	1

即矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的特征值为 $\lambda_1=1,\lambda_2=-2,\lambda_3=1$.

对应的特征向量为：$\xi_1=\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix},\xi_2=\begin{pmatrix}\frac{780}{1351}\\-\frac{780}{1351}\\-\frac{780}{1351}\end{pmatrix},\xi_3=\begin{pmatrix}-\frac{2584}{2889}\\\frac{1292}{2889}\\0\end{pmatrix}$.

背景资料 ------- 矩阵特征值及二次型问题

特征方程(characteristic equation)的概念最早隐含地出现在瑞士数学家欧拉(Leonhard Euler,1707—1783)的著作中，这个术语首先由柯西明确地给出，他证明了阶数超过 3 的矩阵有特征值及任意阶实对称矩阵都有特征值；给出了相似矩阵的概念，并证明了相似矩阵有相同的特征值；研究了代换理论.

1855 年，埃尔米特证明了别的数学家发现的一些矩阵类的特征根的特殊性质，如现在称为埃尔米特矩阵的特征根性质等. 1858 年，凯莱给出了方阵的特征方程和特征根（特征值）以及有关矩阵的一些基本结果. 后来，克莱伯施（A.Clebsch,1831—1872)、布克海姆(A.buchheim)等证明了对称矩阵的特征根性质. 泰伯（H.Taber）引入矩阵的迹的概念并给出了一些有关的结论.

二次型 (quadratic form) 的系统研究是从 18 世纪开始的，它起源于对二次曲线和二次曲面的分类问题的讨论，将二次曲线和二次曲面的方程变形，选有主轴方向的轴作为坐标轴以简化方程的形状. 柯西在其著作中给出结论：当方程是标准形时，二次曲面用二次项的符号来进行分类. 然而，那时并不太清楚，在化简成标准形时，为何总是得到同样数目的正项和负项. 西尔维斯特回答了这个问题，他给出了 n 个变数的二次型的惯性定理，但没有证明. 这个定理后被雅可比重新发现和证明. 1801 年，高斯在《算术研究》中引进了二次型的正定、负定、半正定和半负定等术语.

二次型化简的进一步研究涉及二次型或矩阵的特征方程的概念. 特征方程的概念隐含地

出现在欧拉的著作中,拉格朗日在其关于线性微分方程组的著作中首先明确地给出了这个概念．而 3 个变数的二次型的特征值的实性则是由法国数学家阿歇特(J.N.Hachette,1769—1834)、蒙日（G.. Monge，1746—1818）和泊松（S-D Poisson,1781—1840）建立的.

柯西在别人著作的基础上，着手研究化简变数的二次型问题，并证明了特征方程在直角坐标系的任何变换下的不变性．后来，他又证明了 n 个变数的两个二次型能用同一个线性变换同时化成平方和．1851 年，西尔维斯特在研究二次曲线和二次曲面的切触和相交时需要考虑这种二次曲线和二次曲面束的分类.在他的分类方法中他引进了初等因子和不变因子的概念，但他没有证明“不变因子组成两个二次型的不变量的完全集”这一结论．1854 年，约当研究了矩阵化为标准形的问题．1858 年，德国数学家魏斯特拉斯（Wilhem Weierstrass，1815—1897）对同时化两个二次型成平方和给出了一个一般的方法，并证明，如果二次型之一是正定的，那么即使某些特征根相等，这个化简也是可能的，魏斯特拉斯比较系统地完成了二次型的理论并将其推广到双线性型．费罗贝尼乌斯对二次型的理论的贡献是不可磨灭的，他不仅引进了矩阵的秩、不变因子和初等因子、正交矩阵、矩阵的相似变换、合同矩阵等概念，而且讨论了正交矩阵与合同矩阵的一些重要性质．

二次型理论在几何、物理等学科有广泛应用，通过坐标的正交变换所得标准形称为主轴形式，它是解析几何问题的自然推广．

自测题五

习题五解答

综合与提高题

习题五

一、填空题

1．二次型 $f(x_1, x_2, x_3)=(x_1+x_2)^2+(x_2-x_3)^2+(x_1+x_3)^2$ 的秩为_______.

2．设 $\boldsymbol{A}$ 为 2 阶方阵，$\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2$ 为线性无关的 2 维列向量，$\boldsymbol{A}\boldsymbol{\alpha}_1=\mathbf{0}$，$\boldsymbol{A}\boldsymbol{\alpha}_2=2\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2$，则 $\boldsymbol{A}$ 的非零特征值为_______.

3．若 4 阶方阵 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 相似，$\boldsymbol{A}$ 的特征值为 $\frac{1}{2},\frac{1}{3},\frac{1}{4},\frac{1}{5}$，则行列式 $\left|\boldsymbol{B}^{-1}-\boldsymbol{E}\right|=$______.

4．设 $\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}$ 为 3 维列向量，若矩阵 $\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\beta}^T$ 相似于 $\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$，则 $\boldsymbol{\beta}^T\boldsymbol{\alpha}=$_______.

5. 设$\alpha=(1,1,1)^T$，$\beta=(1,0,k)^T$，若矩阵$\alpha\beta^T$相似于$\begin{pmatrix}3&0&0\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}$，则$k=$______.

6. 设$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}0&-1&0\\1&0&0\\0&0&-1\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{B}=\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}$，其中$\boldsymbol{P}$为3阶可逆阵，则$\boldsymbol{B}^{2004}-2\boldsymbol{A}^2=$______.

7. 设3阶方阵$\boldsymbol{A}$的特征值互不相同，若行列式$|\boldsymbol{A}|=0$，则$\boldsymbol{A}$的秩为______.

8. 设$\boldsymbol{A}=(a_{ij})_{3\times 3}$是正交矩阵，且$a_{11}=1$, $\boldsymbol{b}=(1,0,0)^T$，则线性方程组$\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$的一个解为______.

9. 已知实二次型$f(x_1, x_2, x_3)=a(x_1^2+x_2^2+x_3^2)+4x_1x_2+4x_1x_3+4x_2x_3$经正交变换$\boldsymbol{x}=\boldsymbol{Py}$可化成标准形$f=6y_1^2$，则$a=$______.

10. 若二次型$f(x_1, x_2, x_3)=2x_1^2+x_2^2+x_3^2+2x_1x_2+tx_2x_3$是正定的，则$t$的取值范围是______.

二、选择题

1. 设$\boldsymbol{A}$、$\boldsymbol{B}$为同阶可逆阵，则（ ）.

(A) $\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{BA}$　　(B) 存在可逆阵$\boldsymbol{P}$，使$\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{AP}=\boldsymbol{B}$

(C) 存在可逆阵$\boldsymbol{C}$，使$\boldsymbol{C}^T\boldsymbol{AC}=\boldsymbol{B}$　　(D) 存在可逆阵$\boldsymbol{P}$和$\boldsymbol{Q}$，使$\boldsymbol{PAQ}=\boldsymbol{B}$.

2. 设$\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}0&0&1\\0&1&0\\1&0&0\end{pmatrix}$，已知$\boldsymbol{A}$相似于$\boldsymbol{B}$，则$R(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{E})+R(\boldsymbol{A}-2\boldsymbol{E})=$（ ）.

(A) 2　　(B) 3　　(C) 4　　(D) 5.

3. 设$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&1&1&1\\1&1&1&1\\1&1&1&1\\1&1&1&1\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}4&0&0&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{pmatrix}$，则$\boldsymbol{A}$与$\boldsymbol{B}$（ ）.

(A) 合同且相似　　(B) 合同但不相似

(C) 不合同但相似　　(D) 不合同且不相似.

4．设λ_1、λ_2是矩阵$\boldsymbol{A}$的两个不同的特征值，对应的特征向量分别为$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2$，则$\boldsymbol{\alpha}_1$，$\boldsymbol{A}(\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2)$线性无关的充分必要条件是（ ）.

$(A)\ \lambda_1 \neq 0$　　$(B)\ \lambda_2 \neq 0$　　$(C)\ \lambda_1 = 0$　　$(D)\ \lambda_2 = 0$.

5．设$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1 & 2\\ 2 & 1\end{pmatrix}$，则在实数域上与$\boldsymbol{A}$合同的矩阵为（ ）.

$(A)\begin{pmatrix}-2 & 1\\ 1 & -2\end{pmatrix}$　　$(B)\begin{pmatrix}2 & -1\\ -1 & 2\end{pmatrix}$　　$(C)\begin{pmatrix}2 & 1\\ 1 & 2\end{pmatrix}$　　$(D)\begin{pmatrix}1 & -2\\ -2 & 1\end{pmatrix}$.

三、计算证明题

1．求下列矩阵的特征值和特征向量：

（1）$\begin{pmatrix}1 & -1\\ 2 & 4\end{pmatrix}$；　（2）$\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ 2 & 1 & 3\\ 3 & 3 & 6\end{pmatrix}$；　（3）$\begin{pmatrix}-2 & 1 & 1\\ 0 & 2 & 0\\ -4 & 1 & 3\end{pmatrix}$.

2．已知$\boldsymbol{A}$为n阶方阵，且$\boldsymbol{A}^2=\boldsymbol{A}$　$\boldsymbol{A}$的特征值.

3．设3阶方阵$\boldsymbol{A}$的特征值为1, 2，3，求$\left|\boldsymbol{A}^3-5\boldsymbol{A}^2+7\boldsymbol{A}\right|$.

4．设3阶方阵$\boldsymbol{A}$的特征值为1, -1，2，求$\left|\left(\frac{1}{3}\boldsymbol{A}^2\right)^{-1}+\boldsymbol{A}-\boldsymbol{E}\right|$.

5．若4阶方阵$\boldsymbol{A}$与$\boldsymbol{B}$相似，$\boldsymbol{A}$的特征值为$\frac{1}{2},\frac{1}{3},\frac{1}{4},\frac{1}{5}$，求$\left|\boldsymbol{B}^{-1}-\boldsymbol{E}\right|$.

6．已知矩阵$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}-2 & 0 & 0\\ 2 & x & 2\\ 3 & 1 & 1\end{pmatrix}$与$\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}-1 & 0 & 0\\ 0 & 2 & 0\\ 0 & 0 & y\end{pmatrix}$相似，（1）求$x$与$y$；（2）求可逆阵$\boldsymbol{P}$，使$\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}=\boldsymbol{B}$.

7．设3阶方阵$\boldsymbol{A}$的特征值为$\lambda_1=1,\lambda_2=0,\lambda_3=-1$，对应的特征向量依次为$\boldsymbol{p}_1=\begin{pmatrix}1\\ 2\\ 2\end{pmatrix},\boldsymbol{p}_2=\begin{pmatrix}2\\ -2\\ 1\end{pmatrix},\boldsymbol{p}_3=\begin{pmatrix}-2\\ -1\\ 2\end{pmatrix}$，求$\boldsymbol{A}$.

8．（1）设$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}3 & -2\\ -2 & 3\end{pmatrix}$，求$\varphi(\boldsymbol{A})=\boldsymbol{A}^{10}-5\boldsymbol{A}^9$；

（2）设 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}2&1&2\\1&2&2\\2&2&1\end{pmatrix}$，求 $\varphi(\boldsymbol{A})=\boldsymbol{A}^{10}-6\boldsymbol{A}^{9}+5\boldsymbol{A}^{8}$.

9. 设矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}0&0&1\\x&1&y\\1&0&0\end{pmatrix}$ 可对角化，求 x 与 y 应满足的关系式.

10. 设 $\boldsymbol{A}$ 是 n 阶方阵，满足 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^{T}=\boldsymbol{E}$，$|\boldsymbol{A}|<0$，求 $|\boldsymbol{A}+\boldsymbol{E}|$.

11. 求一个正交的相似变换矩阵，将下列实对称矩阵化为对角阵：

（1）$\begin{pmatrix}1&2&2\\2&1&2\\2&2&1\end{pmatrix}$；（2）$\begin{pmatrix}2&-2&0\\-2&1&-2\\0&-2&0\end{pmatrix}$.

12. 设三阶实对称阵 $\boldsymbol{A}$ 的特征值为 $\lambda_1=-1$，$\lambda_2=\lambda_3=1$，对应于 λ_1 的特征向量为 $\xi_1=\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}$，求 $\boldsymbol{A}$.

13. 设三阶实对称阵 $\boldsymbol{A}$ 的秩为 2，$\lambda_1=\lambda_2=6$ 是 $\boldsymbol{A}$ 的二重特征值. 若 $\boldsymbol{p}_1=\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix},\boldsymbol{p}_2=\begin{pmatrix}2\\1\\1\end{pmatrix}$ 都是 $\boldsymbol{A}$ 的对应于特征值 6 的特征向量.

（1） 求 $\boldsymbol{A}$ 的另一特征值和对应的特征向量；

（2） 求 $\boldsymbol{A}$.

14. 设三阶实对称阵 $\boldsymbol{A}$ 的特征值是 6,3,3,与特征值 6 对应的特征向量为 $\boldsymbol{p}_1=(1,1,1)^{T}$，求 $\boldsymbol{A}$.

15. 已知

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&-1&1\\x&4&y\\-3&-3&5\end{pmatrix}$$

可对角化，$\lambda_1=\lambda_2=2$ 是 $\boldsymbol{A}$ 的二重特征值，求可逆阵 $\boldsymbol{P}$，使 $\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}=\boldsymbol{\Lambda}$.

16. 设三阶实对称阵 $\boldsymbol{A}$ 的各行元素之和均为 3，向量 $\boldsymbol{\alpha}_1=(-1,2,-1)^{T}$，$\boldsymbol{\alpha}_2=(0,-1,1)^{T}$ 是线性方程组 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ 的两个解.

（1） 求 $\boldsymbol{A}$ 的特征值与特征向量；

（2） 求正交阵 $\boldsymbol{Q}$ 和对角阵 $\boldsymbol{\Lambda}$，使 $\boldsymbol{Q}^T\boldsymbol{A}\boldsymbol{Q}=\boldsymbol{\Lambda}$.

17. 设 n 阶方阵 $\boldsymbol{A}$，$\boldsymbol{B}$ 满足 $R(\boldsymbol{A})+R(\boldsymbol{B})<n$，证明：$\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 存在公共的特征值，存在公共的特征向量.

18. 设 ξ 为 n 维非零列向量，$\xi=\left(a_1,a_2,\cdots,a_n\right)^T$，$|\xi|=2$，$\boldsymbol{A}=\xi\xi^T$. 证明：

（1） $\boldsymbol{A}^2=4\boldsymbol{A}$；（2）$\xi$ 为 $\boldsymbol{A}$ 的一个特征向量；

（3）$\boldsymbol{A}$ 相似于对角阵 $\boldsymbol{\Lambda}$，并写出对角阵 $\boldsymbol{\Lambda}$.

19. 用矩阵记号表示下列二次型：

（1）$f\left(x,y,z\right)=x^2+y^2-7z^2-2xy-4xz-4yz$；

（2）$f\left(x,y,z\right)=x^2+4xy+4y^2+2xz+z^2+4yz$；

（3）$f\left(x_1,x_2,x_3,x_4\right)=x_1^2+x_2^2+x_3^2+x_4^2-2x_1x_2+4x_1x_3-2x_1x_4+6x_2x_3-4x_2x_4$.

20. 求一个正交变换将下列二次型化成标准形：

（1）$f\left(x_1,x_2,x_3\right)=2x_1^2+3x_2^2+3x_3^2+4x_2x_3$；

（2）$f\left(x_1,x_2,x_3\right)=x_1^2+2x_2^2+2x_3^2+2x_1x_2-2x_1x_3$；

（3）$f\left(x_1,x_2,x_3,x_4\right)=2x_1x_2-2x_3x_4$；

（4）$f\left(x_1,x_2,x_3,x_4\right)=x_1^2+x_2^2+x_3^2+x_4^2+2x_1x_2-2x_1x_4-2x_2x_3+2x_3x_4$.

21. 判别下列二次型的正定性：

（1）$f\left(x_1,x_2,x_3\right)=-2x_1^2-6x_2^2-4x_3^2+2x_1x_2+2x_1x_3$；

（2）$f=x_1^2+3x_2^2+9x_3^2+19x_4^2-2x_1x_2+4x_1x_3+2x_1x_4-6x_2x_4-12x_3x_4$.

22. 已知二次型 $f\left(x_1,x_2,x_3\right)=5x_1^2+5x_2^2+cx_3^2-2x_1x_2+6x_1x_3-6x_2x_3$ 的秩为 2.

（1）求参数 c 及此二次型对应矩阵的特征值；

（2）指出方程 $f\left(x_1,\ x_2,\ x_3\right)=1$ 表示何种二次曲面.

23. 已知二次曲面方程 $x^2+ay^2+z^2+2bxy+2xz+2yz=4$ 可经正交变换化成椭圆柱面方程 $y'^2+4z'^2=4$，求 a,b 的值和正交矩阵 $\boldsymbol{P}$.

24. 已知二次型 $f\left(x_1,x_2,x_3\right)=-\frac{1}{3}x_1^2+\frac{1}{3}x_3^2+\frac{2}{3}a^2x_1x_2-\frac{4}{3}x_2x_3$，在正交变换 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{P}\boldsymbol{y}$ 下的标准形是 $f=y_1^2-y_2^2$.（1）求实数 a；（2）求此正交变换矩阵 $\boldsymbol{P}$.

25. 设 $\boldsymbol{A}$ 是正定矩阵，证明 $\boldsymbol{A}$ 的伴随矩阵 $\boldsymbol{A}^*$ 也是正定矩阵.

26. 设 $\boldsymbol{A}$ 是实对称矩阵，证明存在实数 $t_0>0$，使当 $t>t_0$ 时，$\boldsymbol{A}+t\boldsymbol{E}$ 为正定矩阵.

27. 设矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&0&1\\0&2&0\\1&0&1\end{pmatrix}$，矩阵 $\boldsymbol{B}=\left(k\boldsymbol{E}+\boldsymbol{A}\right)^2$，其中 k 为实数，$\boldsymbol{E}$ 为单位矩阵. 求对角阵 $\boldsymbol{\Lambda}$，使 $\boldsymbol{B}$ 与 $\boldsymbol{\Lambda}$ 相似，并求 k 为何值时，$\boldsymbol{B}$ 为正定矩阵.

28. 设 $\boldsymbol{A}$ 为 n 阶正定矩阵，$\boldsymbol{B}$ 为 n 阶实反对称矩阵，证明 $\boldsymbol{A}-\boldsymbol{B}^2$ 为正定矩阵.

29. 设 $\boldsymbol{A}$ 为 m 阶实对称阵且正定，$\boldsymbol{B}$ 为 $m\times n$ 实矩阵，试证：$\boldsymbol{B}^T\boldsymbol{A}\boldsymbol{B}$ 为正定阵的充分必要条件是 $\boldsymbol{B}$ 的秩 $R\left(\boldsymbol{B}\right)=n$.

30. 证明：二次型 $f=\boldsymbol{x}^T\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}$ 在 $\|\boldsymbol{x}\|=1$ 时的最大值为矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的最大特征值.

附录 Matlab 简介

Matlab 是矩阵实验室（Matrix Laboratory）的简称。20 世纪 70 年代后期，美国新墨西哥大学计算机系主任 Cleve.Moler 教授为了便于教学，减轻学生编写程序的负担，为两个矩阵运算软件包 Linpack 和 Eispack 编写了接口程序，这就算是 Matlab 第一个版本。

1983 年春天，Cleve.Moler 教授到斯坦福大学讲学，Matlab 深深地吸引了工程师 John，他敏锐地觉察到 Matlab 在工程领域的广泛前景，便和 Cleve.Moler、Steve Bangert 一起，成立了 MathWorks 公司，用 C 语言开发了第二代 Matlab，将 Matlab 正式推向市场，并继续进行 Matlab 的研究与开发，在 20 世纪 90 年代，Matlab 已经成为工程技术人员必备的标准计算软件。

1.Matlab 的主要特点

Matlab 作为科学计算的高级语言之所以受到欢迎，是因为它有丰富的函数资源和工具箱资源，用户可以根据自己的需要选择函数，而无需再去编写大量繁琐的程序代码。从而减轻了用户的负担。Matlab 主要有以下特点：

（1）简洁、高效。Matlab 是一个高级的矩阵/阵列语言，它包含控制语言、函数、数据结构，输入、输出和面向对象编程等特点。Matlab 程序设计语言集成度高，语句简洁，往往用 C 或 C^{++} 等语言编写数百条语句，用 Matlab 一条语句就能解决问题，其程序可靠性高、易于维护，可以大大提高解决问题的效率和水平；

（2）出色的绘图功能。Matlab 可以用最直观的语句将实验数据或计算结果用图形方式显示出来，并可以将以往很难显示出来的隐函数直接用曲线绘制出来。只需要调用相应的绘图函数即可，既方便又快捷。随着硬件的发展和 Matlab 版本的提高，Matlab 的图形功能会更好，可视化编程能力得到进一步提高；

（3）强大的科学计算机数据处理能力。Matlab 是一个包含大量计算算法的集合。其拥有 600 多个工程中要用到的数学运算能力，可以方便的实现用户所需的各种计算功能。

（4）庞大的工具箱与模块集。Matlab 包含两部分：核心部分和各种可选的工具箱。核心部分中又有数百个核心内部函数。工具箱又分为两类：功能性工具箱和学科性工具箱。功能性工具箱主要用来扩充其符号计算功能，图示建模仿真功能，文字处理功能以及硬件实时交互功能。功能性工具箱用于多种学科，而学科性工具箱是专业性比较强的，大都覆盖了本

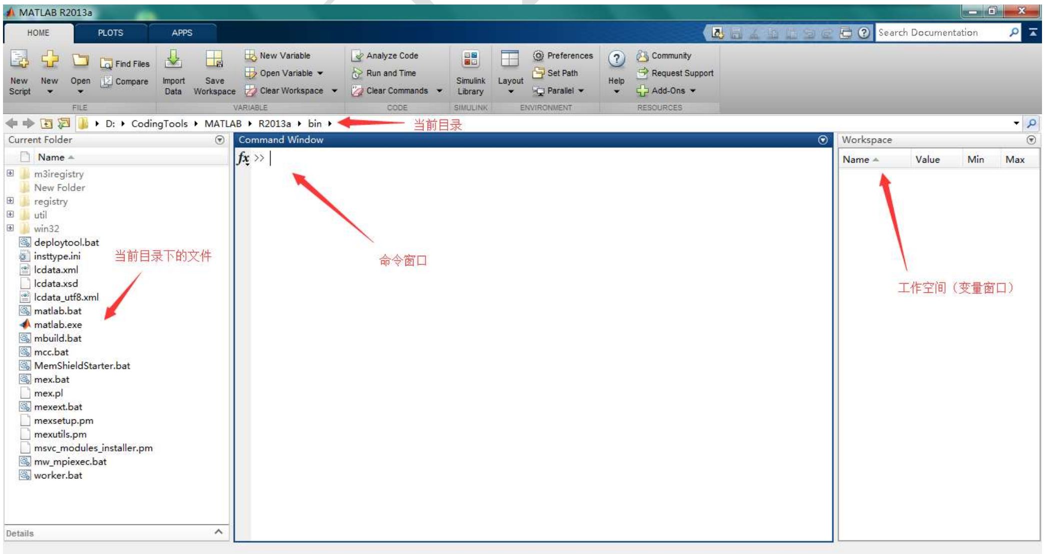
学科所有的已有的基本概念和基本运算。如符号数学工具箱，简直就是一个高等数学、工程数学解题器。极限、导数、微分、积分、级数运算与展开、微分方程求解、Laplace 变换等应有尽有。还有控制系统、信号处理、模糊逻辑、神经网络、小波分析、统计、优化、金融预测工具等工具箱。这些工具箱都是由该领域内学术水平很高的专家编写。用户无需编写自己学科范围内的基础程序。这些工具箱还可以添加自己根据需要编写的函数，用户可以不断更新自己的工具箱，市值更适合于自己的研究和计算。

（5）强大的动态系统仿真功能。Matlab 有一个基于框图仿真方法的理想工具 Simulink。它提供的面向框图的仿真及概念性仿真功能，使得用户能容易简历复杂系统模型，准确地其进行仿真分析。概念性仿真模块集允许用户在一个框架下对含有控制环节、机械环节和电子、电机环节的机电一体化系统进行建模与仿真，这是其他计算机语言无法做到的。

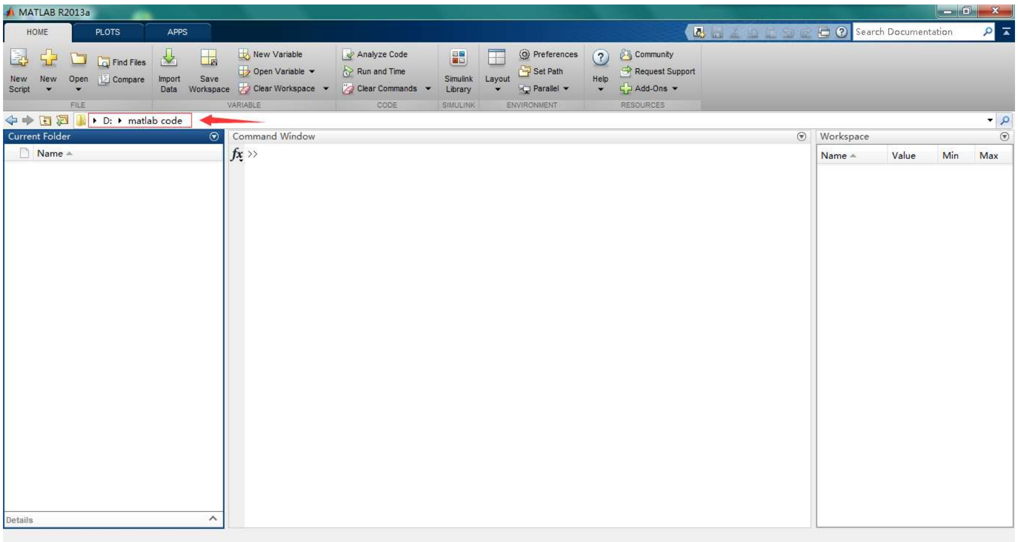
（6）源程序的开放性。除内部函数外，所有 Matlab 的核心文件和工具箱文件都是可读可改文件，用户可以通过对源程序的修改以及加入自己的文件构成新的工具箱。

2. Matlab 的工作界面

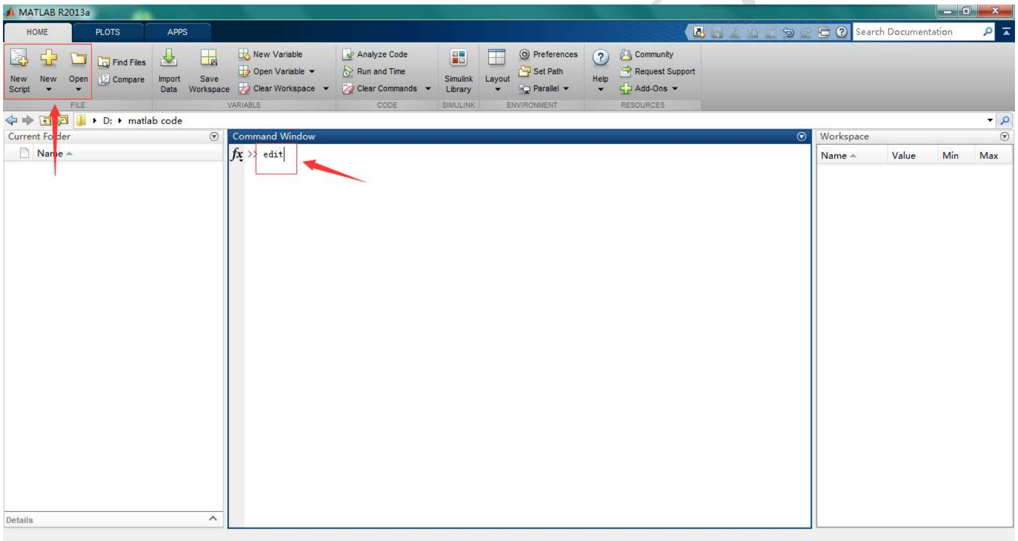
在安装好的 Matlab（本文以 Matlab R2013a 为例）的计算机上，通过单击 Windows 的“开始”菜单中相应的程序选项或者双击桌面上的 Matlab 图标可启动 Matlab，当 Matlab 程序启动后，会出现 Matlab 桌面的窗口。默认的 Matlab 桌面结构如下图:



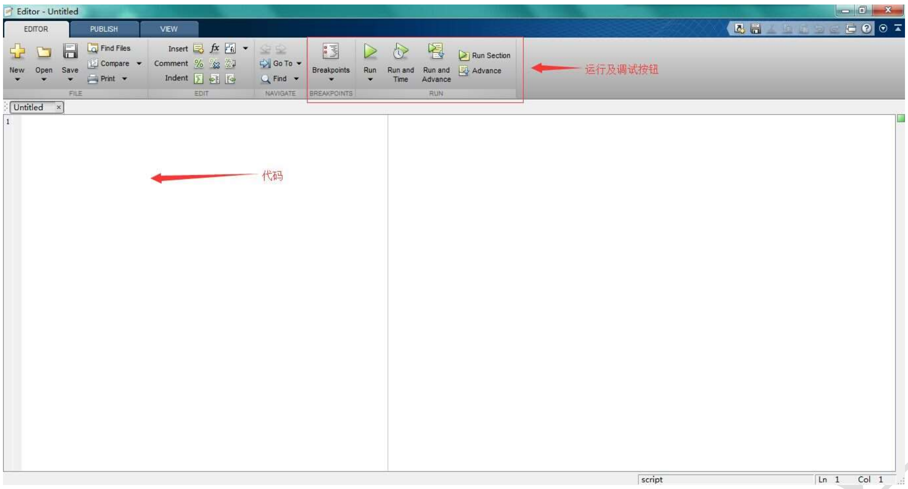
主要界面包括“命令菜单”、“当前目录”、“命令窗口”、“工作空间”。通常情况下，打开 MATLAB 默认的“当前目录”在 MATLAB 的安装目录下（不建议直接在该目录下存放代码），我们需要把该目录切换为代码存放的目录。为了方便，在 D 盘下新建一个文件夹“matlab code”，并将当前目录切换到该目录下：



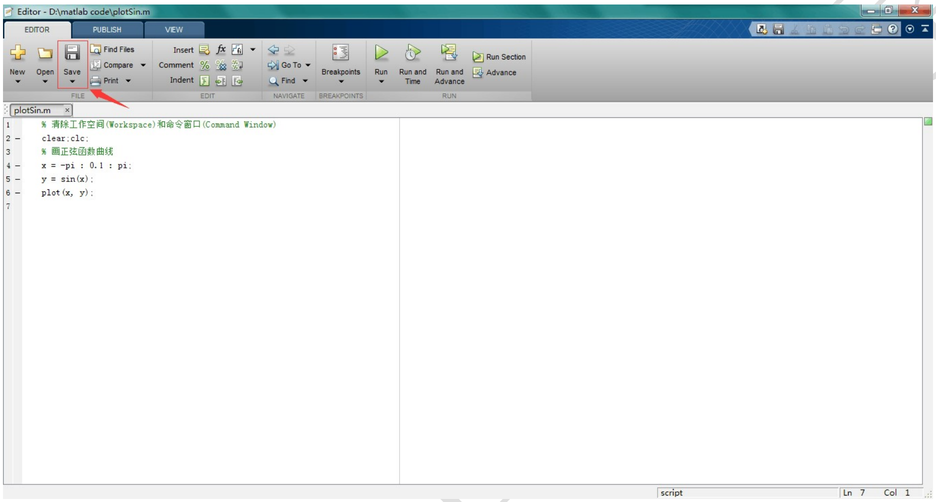
接下来，我们将展示使用 MATLAB 画正弦曲线。首先，新建一个 m 文件，将代码都保存在该文件中。新建 m 文件有两种方式：1、点击下图方框中的“New Script”；2、在“Command Window”中输入 edit，然后回车：



选择一种方式打开 script，打开的窗口默认名为 Untitled.m，窗口上部为命令按钮，常用的按钮为方框中的按钮：“Run”运行该脚本；“Breakpoints”：在光标所在行设置断点；“Run Section”：运行选择部分的代码。如下图所示：

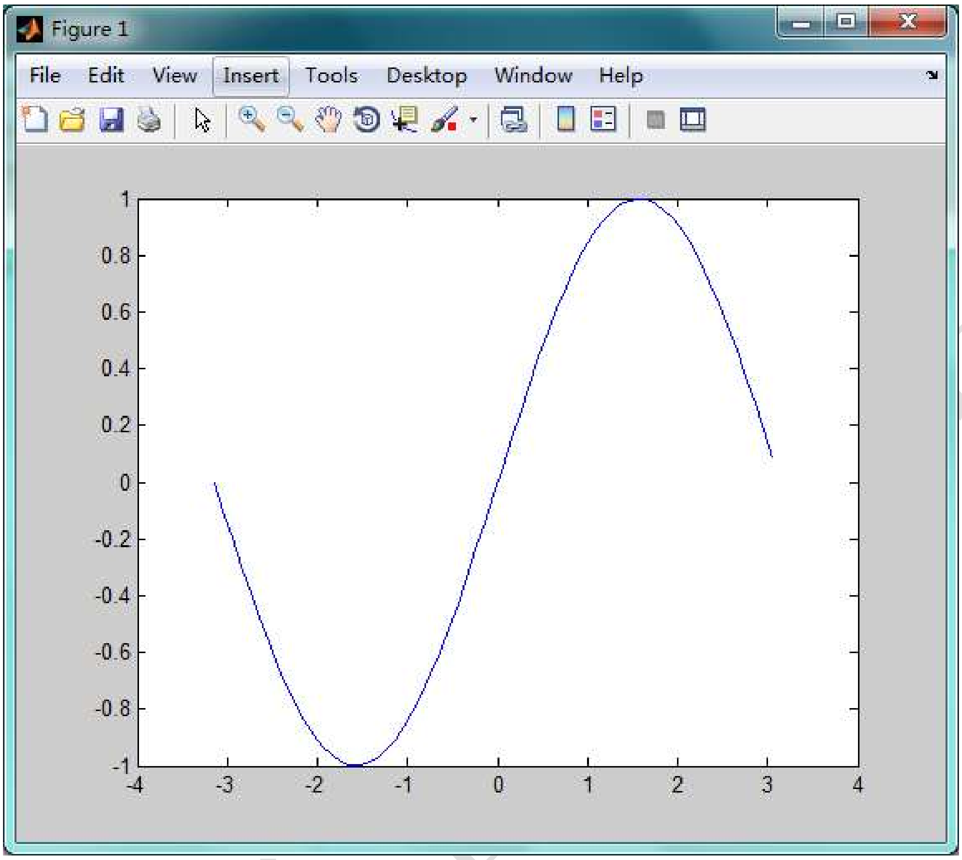


在空白区域编辑代码，用 plot 函数画正弦函数曲线：

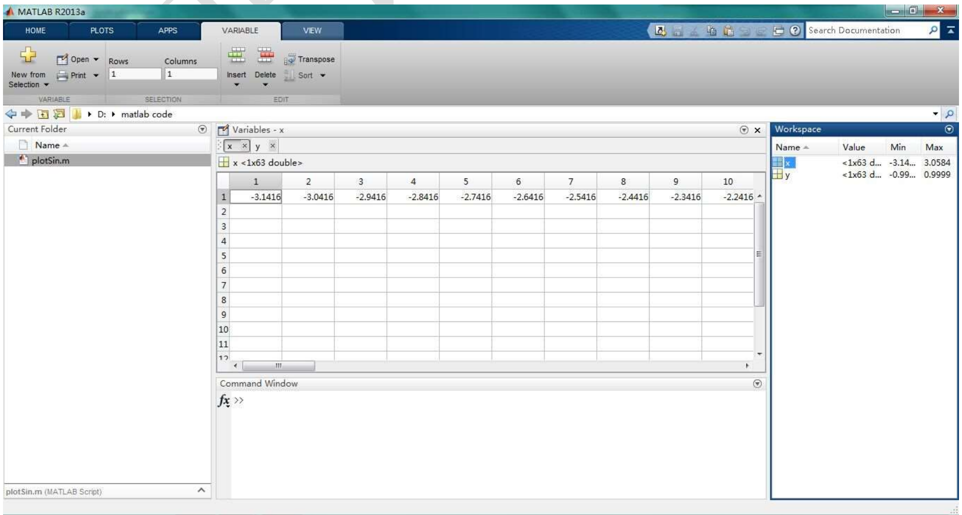


代码编辑完毕，保存：点击窗口上部的“Save”按钮，或者键盘输入“Ctrl + S”保存，则弹出如下保存界面：

可以看到，默认的保存目录为我们前面设置的“当前目录”，文件名称默认为 Untitled.m，修改为 plotSin.m，修改完毕，点击“保存”按钮，该文件就保存到了我们选择的 D 盘的“matlab code”目录下。接下来，运行该程序，点击“Run”按钮，就会弹出如下窗口：



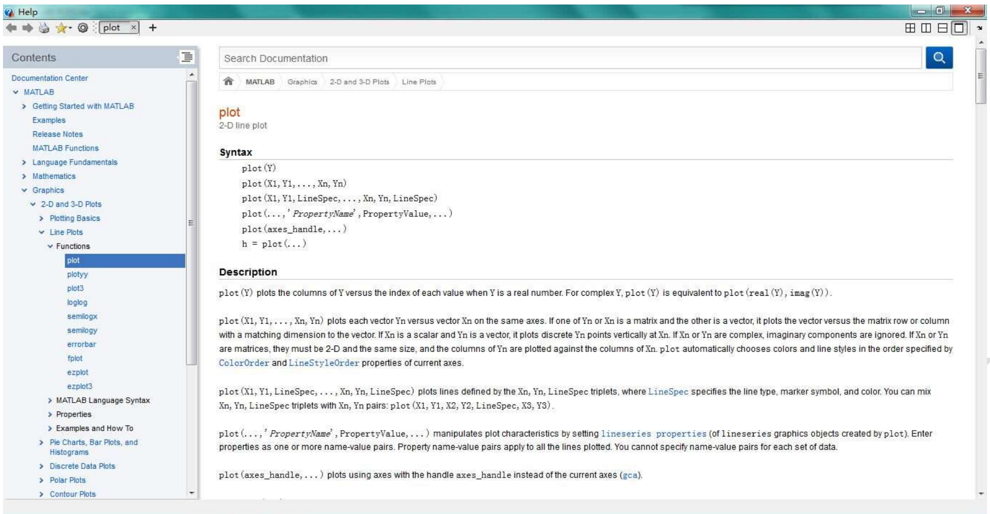
回到 Matlab 主界面，可以看到在“Current Folder”下多了一个 plotSin.m 的文件，在“Workspace”窗口下多了两个变量名：x 和 y。我们可以点击 x 或 y 来查看他们的值：



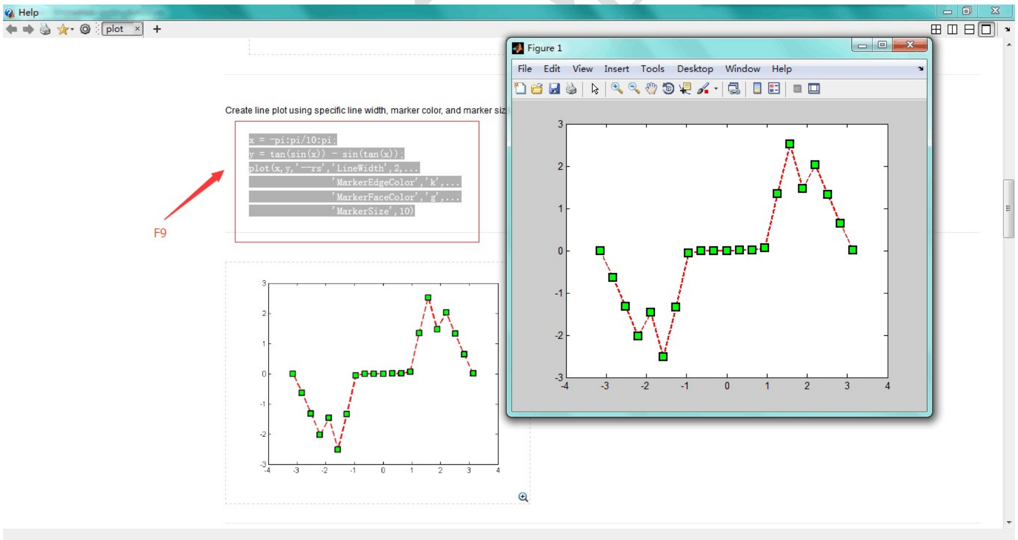
必须明确一点，Matlab 中的变量是以矩阵的形式存在，这里显示的 x 可以看成是一个 1*63 的矩阵。

在 Matlab 里还有一个重要的东西：帮助文档。当我们不知道某个函数的使用方法时，

可以使用help 或doc命令来查看。如我们想查看plot函数的使用方法，在“Command Window”中输入“doc plot”，回车就会看到如下的窗口：



窗口左侧显示了 Matlab 工具箱中的函数，也可以在 plot 函数周围查找具有类似功能的函数，如“plot3”表示在 3 维空间中画曲线；窗口的右侧则显示了我们查找的函数的解释。往下也会有相关的示例，可以像前面介绍plotSin.m的方式，放到m文件中运行，也可以直接在该窗口选中代码，按“F9”直接运行。如下图：



参考文献

[1] 刘剑平，施劲松，钱夕元．线性代数及其应用．上海：华东理工大学出版社，2005.

[2] 俞正光，李永乐，詹汉生．线性代数与解析几何．北京：清华大学出版社，1998.

[3] 游宏，吴勃英，董培福．线性代数与解析几何．北京：科学出版社，2002.

[4] 孟昭为，孙锦萍，赵文玲．线性代数．北京：科学出版社，2004.

[5] 樊恽，郑延履．线性代数与几何引论．北京：科学出版社，2004.

[6] 赵连昌，刘晓东．线性代数与几何．北京：高等教育出版社，2001.

[7] 李尚志．线性代数．北京：高等教育出版社，2006.

[8] 陈发来，陈效群，李思敏，王新茂．线性代数与解析几何．北京：高等教育出版社，2011.

[9] 黄廷祝，成孝予．线性代数与空间解析几何．3 版．北京：高等教育出版社，2008.

[10] 方文波．线性代数及其应用．北京：高等教育出版社，2011.

[11] David C. Lay. 线性代数及其应用．3 版．刘深泉，洪毅，马东魁，郭国雄，刘勇平，译．北京：机械工业出版社，2005.

[12] Steven J. Leon. 线性代数．8 版．张文博，张丽静，译．北京：机械工业出版社，2010.

[13] 谢国瑞．线性代数及应用．北京：高等教育出版社，1999.

[14] 同济大学数学教研室．工程数学：线性代数．3 版．北京：高等教育出版社，1999.

[15] 同济大学数学系．工程数学：线性代数．5 版．北京：高等教育出版社，2007.

[16] 北京大学数学系几何与代数教研室代数小组．高等代数．2 版．北京：高等教育出版社，1988.

[17] 朱士信、唐烁．高等数学（上、下）．北京：高等教育出版社，2014、2015.

[18] 纪跃芝.用矩阵的正定性判定多元函数极值的存在性.吉林工学院学报，1995(4):71-75.

[19] 王萼芳．高等代数．北京：高等教育出版社，2009.

[20] 王仁宏．数值逼近．北京：高等教育出版社，1999.

[21] 合肥工业大学基础数学教研室．线性代数．重庆：重庆大学出版社，2011.

[22] 华中科技大学数学系．线性代数．2 版．北京：高等教育出版社，2003.

[23] 张圣勤. MATLAB7.0 实用教程. 北京：机械工业出版社，2012.

[24] 朱旭、李换勤、藉万新. MATLAB 软件与基础数学实验. 西安：西安交通大学出版社，2008.

[25] 郭科. 数学实验-数学软件教程. 北京：高等教育出版社，2010.

[26] 黄立宏. 湖南省 21 世纪数学系列教材编写组. 线性代数. 北京：北京邮电大学出版社，2003.

[27] 任功全，封建湖，薛宏智. 线性代数. 北京：科学出版社，2005.

[28] 毛纲源. 线性代数-解题方法技巧归纳. 武汉：华中科技大学出版社，2000.