2021～2022 学年第二学期《线性代数》试卷（A）评分标准

一、填空题（每小题 3 分，共 18 分）

1、$\underline{-2^n}$； 2、$\underline{\begin{pmatrix}4&0\\8&2\end{pmatrix}}$； 3、$\underline{\frac{\pi}{4}\left(\text{亦可写成 }45^\circ\text{或者}\arccos\frac{\sqrt{2}}{2}\right)}$； 4、$\underline{2}$； 5、$\underline{6}$； 6、$\underline{1}$.

二、选择题（每小题 3 分，共 18 分）

1、A； 2、D； 3、C； 4、D； 5、B； 6、D.

三、(**10分**) $n(\geq 3)$ 阶行列式 $D_n=\begin{vmatrix}x&a&\cdots&a\\a&x&\cdots&a\\\vdots&\vdots&\ddots&\vdots\\a&a&\cdots&x\end{vmatrix}$, 求 $A_{11}+A_{12}+\cdots+A_{1n}$.

其中 A_{ij} 为 D_n 的(i,j) 位置元素的代数余子式.

解: $\sum_{k=1}^{n}A_{1k}$

$=\begin{vmatrix}1&1&\cdots&1\\a&x&\cdots&a\\\vdots&\vdots&\ddots&\vdots\\a&a&\cdots&x\end{vmatrix}$

$\overset{r_i+r_1\times(-a)}{\underset{i=2,\dots,n}{=\!=\!=\!=}}\begin{vmatrix}1&1&\cdots&1\\0&x-a&\cdots&0\\\vdots&\vdots&\ddots&\vdots\\0&0&\cdots&x-a\end{vmatrix}$

$=(x-a)^{n-1}$

四、(**12分**) $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\beta}^T=\begin{pmatrix}1&1&2\\2&2&x\\y&3&6\end{pmatrix}$, 其中 $\boldsymbol{\alpha}$, $\boldsymbol{\beta}$ 是 3 维实列向量.

(1) 求$R(\boldsymbol{A})$ 以及 x, y, $\boldsymbol{\beta}^T\boldsymbol{\alpha}$； (2) 计算 $\boldsymbol{A}^n$, n 是大于等于 2 的正整数.

(1)解: 由 $\boldsymbol{A}$ 是非零矩阵, 故 $R(\boldsymbol{A})\geq 1$

又 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\beta}^T$, 可知 $R(\boldsymbol{A})\leq 1$. 综上 $R(\boldsymbol{A})=1$.

从而 $x=4$, $y=3$,

$\boldsymbol{\beta}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\alpha}=tr(\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\beta}^T)=9$.

(2)解: $\boldsymbol{A}^n=\boldsymbol{\alpha}(\boldsymbol{\beta}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\alpha})^{n-1}\boldsymbol{\beta}$

$=9^{n-1}\boldsymbol{A}$

五、(**12分**) 求向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1=\begin{pmatrix}1\\0\\0\\1\end{pmatrix}$, $\boldsymbol{\alpha}_2=\begin{pmatrix}1\\1\\1\\1\end{pmatrix}$, $\boldsymbol{\alpha}_3=\begin{pmatrix}5\\2\\2\\5\end{pmatrix}$, $\boldsymbol{\alpha}_4=\begin{pmatrix}0\\0\\1\\1\end{pmatrix}$, $\boldsymbol{\alpha}_5=\begin{pmatrix}11\\5\\9\\15\end{pmatrix}$ 的秩以及一个极大线性无关组, 并将其余向量用该极大无关组线性表示.

解: $(\boldsymbol{\alpha}_1\ \boldsymbol{\alpha}_2\ \boldsymbol{\alpha}_3\ \boldsymbol{\alpha}_4\ \boldsymbol{\alpha}_5)=\begin{pmatrix}1&1&5&0&11\\0&1&2&0&5\\0&1&2&1&9\\1&1&5&1&15\end{pmatrix}$

$\underrightarrow{\text{若干初等行变换}}\begin{pmatrix}1&0&3&0&6\\0&1&2&0&5\\0&0&0&1&4\\0&0&0&0&0\end{pmatrix}$

故该向量组的秩为 3

极大无关组可取 $\boldsymbol{\alpha}_1$, $\boldsymbol{\alpha}_2$, $\boldsymbol{\alpha}_4$

此时 $\boldsymbol{\alpha}_3=3\boldsymbol{\alpha}_1+2\boldsymbol{\alpha}_2$, $\boldsymbol{\alpha}_5=6\boldsymbol{\alpha}_1+5\boldsymbol{\alpha}_2+4\boldsymbol{\alpha}_3$.

六、(**12分**) $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&1&1-a\\1&0&a\\a+1&1&a+1\end{pmatrix}$, $\boldsymbol{b}=\begin{pmatrix}0\\1\\2a-2\end{pmatrix}$, 讨论 a 为何值时线性方程组 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$ 无解, 有唯一解, 有无穷多解? 并在有无穷多解时求其通解.

解: $|\boldsymbol{A}|=a(a-2)$

当 $a\neq 0$ 且 $a\neq 2$ 时有唯一解; ·

当 $a=0$ 时该方程组无解;

当 $a=2$ 时, 该方程组有无穷多解,

此时$(\boldsymbol{A}\ \boldsymbol{b})\underrightarrow{\text{若干初等行变换}}\begin{pmatrix}1&0&2&1\\0&1&-3&-1\\0&0&0&0\end{pmatrix}$

等价于解方程组$\begin{cases}x_1+2x_3=1\\x_2-3x_3=-1\end{cases}$

取 x_3 为自由变元, 求得一个特解为 $\boldsymbol{\alpha}=(1\ \ -1\ \ 0)^T$,

$\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$ 的一组基础解系为 $\boldsymbol{\beta}=(-2\ \ 3\ \ 1)^T$.

此时通解可取为 $\boldsymbol{\alpha}+\mathrm{k}\boldsymbol{\beta}$, $\mathrm{k}\in\mathbb{R}$

2021～2022 学年第二学期《线性代数》试卷（A）评分标准

七、(**12分**)已知二次型 $f(x_1,x_2,x_3)=ax_1{}^2+ax_2{}^2+ax_3{}^2+2x_1x_2+2x_1x_3+2x_2x_3$ 的秩为 2.

(1) 求 a;

(2) f 经过正交变换 $\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}=\boldsymbol{P}\begin{pmatrix}y_1\\y_2\\y_3\end{pmatrix}$ 化为标准形，求 $\boldsymbol{P}$ 以及对应的标准形.

解: (1)由条件可知二次型的矩阵为 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}a&1&1\\1&a&1\\1&1&a\end{pmatrix}$

由 $\boldsymbol{A}$ 的秩为 2, 可得 $|\boldsymbol{A}|=0$ 且 $a\neq1$, 故 $a=-2$.

(2)$|\boldsymbol{A}-\lambda\boldsymbol{E}|=-\lambda(\lambda+3)^2$, 从而 $\boldsymbol{A}$ 的特征值为 0，-3(二重)

求解 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$, 可得 $\boldsymbol{A}$ 的属于特征值 0 的一个特征向量 $(1\ \ 1\ \ 1)^T$, 单位化得 $\boldsymbol{\alpha}_1=\dfrac{1}{\sqrt{3}}(1\ \ 1\ \ 1)^T$;

求解 $(\boldsymbol{A}+3\boldsymbol{E})\boldsymbol{x}=0$, 可得 $\boldsymbol{A}$ 的属于特征值 -3 的两个线性无关的特征向量 $(-1\ 1\ 0)^T$, $(-1\ 0\ 1)^T$,

正交化、单位化可得 $\boldsymbol{\alpha}_2=\dfrac{1}{\sqrt{2}}(-1\ 1\ 0)^T$, $\boldsymbol{\alpha}_3=\dfrac{\sqrt{6}}{3}\left(-\dfrac{1}{2}\ \ -\dfrac{1}{2}\ \ 1\right)$.

可取 $\boldsymbol{P}=(\boldsymbol{\alpha}_1\ \boldsymbol{\alpha}_2\ \boldsymbol{\alpha}_3)$, 此时 $\boldsymbol{P}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{AP}=\begin{pmatrix}0&0&0\\0&-3&0\\0&0&-3\end{pmatrix}$.

八、(**6分**) $\boldsymbol{\alpha}_1$, $\boldsymbol{\alpha}_2$, $\boldsymbol{\alpha}_3$, $\boldsymbol{\alpha}_4$ 皆是 3 维实列向量, 且 $\boldsymbol{\alpha}_1$, $\boldsymbol{\alpha}_2$ 线性无关, $\boldsymbol{\alpha}_3$,$\boldsymbol{\alpha}_4$ 线性无关.
证明: 必存在 3 维非零列向量 $\boldsymbol{\beta}$, 满足 $\boldsymbol{\beta}$ 既可由 $\boldsymbol{\alpha}_1$, $\boldsymbol{\alpha}_2$ 线性表示, 也可由 $\boldsymbol{\alpha}_3$, $\boldsymbol{\alpha}_4$ 线性表示.

证明: 由于都是 3 维列向量,
故 $\boldsymbol{\alpha}_1$, $\boldsymbol{\alpha}_2$, $\boldsymbol{\alpha}_3$, $\boldsymbol{\alpha}_4$ 线性相关.
从而存在不全为 0 的 k_i, $i=1,2,3,4$
使得 $k_1\boldsymbol{\alpha}_1+k_2\boldsymbol{\alpha}_2+k_3\boldsymbol{\alpha}_3+k_4\boldsymbol{\alpha}_4=\boldsymbol{0}\cdot$
亦即 $k_1\boldsymbol{\alpha}_1+k_2\boldsymbol{\alpha}_2=-k_3\boldsymbol{\alpha}_3-k_4\boldsymbol{\alpha}_4$
由 $\boldsymbol{\alpha}_3$, $\boldsymbol{\alpha}_4$ 线性无关, 可知若 $k_1=k_2=0$, 必有所有 k_i 全为 0, 矛盾.
故 k_1, k_2 不全为 0, 由 $\boldsymbol{\alpha}_1$, $\boldsymbol{\alpha}_2$ 线性无关 可知 $k_1\boldsymbol{\alpha}_1+k_2\boldsymbol{\alpha}_2\neq\boldsymbol{0}$
令 $\boldsymbol{\beta}=k_1\boldsymbol{\alpha}_1+k_2\boldsymbol{\alpha}_2$ 得证.