课外练习题

1. $\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\gamma}$ 为三维列向量，已知三阶行列式$|4\boldsymbol{\gamma}-\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}-2\boldsymbol{\gamma},2\boldsymbol{\alpha}|=40$，则行列式 $|\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\gamma}|=$ ______ .

2．设 $\boldsymbol{n}$ 阶矩阵 A 的主对角线元素全为零，其余元素均为 1，则$|\boldsymbol{A}|=$________ .

3．已知三阶行列式$|\boldsymbol{A}|$的第一行各元素及其余子式均为 1，则$|\boldsymbol{A}|=$___________.

4．已知$\boldsymbol{\alpha}=(1,2,3)^T$，$\boldsymbol{\beta}=(1,1/2,1/3)^T$，若 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\beta}^{\boldsymbol{T}}$，则 $\boldsymbol{A}^{2006}=$_____________.

5．设 $\boldsymbol{A}=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3),\boldsymbol{B}=(\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_1,2\boldsymbol{\alpha}_2)$，其中$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$都是 3 维列向量，已知$|\boldsymbol{A}|=2$，

则$|\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}|=$____________________.

6．已知 $|\boldsymbol{A}|=\begin{vmatrix}1&0&1&0\\1&1&0&-1\\1&1&-1&0\\2&2&3&4\end{vmatrix}$，设 $A_{4j}(j=1,2,3,4$是$|\boldsymbol{A}|$中元素 a_{4j} 的代数余子式，则

$A_{41}+A_{42}+A_{43}+A_{44}=$_________.

7．设 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}3&0&0\\1&4&0\\0&0&3\end{pmatrix}$，则$(\boldsymbol{A}\text{-}2\boldsymbol{E})^{-1}=$___________.

8．已知 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 均为n阶矩阵, 则必有(　　).

（A）$(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})^2=\boldsymbol{A}^2+2\boldsymbol{A}\boldsymbol{B}+\boldsymbol{B}^2$,

（B）$(\boldsymbol{A}\boldsymbol{B})^T=\boldsymbol{A}^T\boldsymbol{B}^T$,

（C）$\boldsymbol{A}\boldsymbol{B}=\boldsymbol{O}$ 时, $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{O}$ 或 $\boldsymbol{B}=\boldsymbol{O}$

(D) 行列式$|\boldsymbol{A}+\boldsymbol{A}\boldsymbol{B}|=0$的充分必要条件是$|\boldsymbol{A}|=0$, 或$|\boldsymbol{E}+\boldsymbol{B}|=0$.

9．以下结论正确的是（　　）.

（A）若方阵 $\boldsymbol{A}$ 的行列式$|\boldsymbol{A}|=0$，则 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{O}$

（B）若 $\boldsymbol{A}^2=\boldsymbol{O}$，则 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{O}$

（C）若 $\boldsymbol{A}$ 为对称矩阵，则 $\boldsymbol{A}^2$ 也是对称矩阵

（D）对n阶矩阵 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$，有$(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{B})=\boldsymbol{A}^2-\boldsymbol{B}^2$

10．下列命题中正确的是（　　）.

（A）若 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 可加，且$|\boldsymbol{A}|>0,|\boldsymbol{B}|>0,$则$|\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}|>0$

（B）若 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 可乘，则$|\boldsymbol{A}\boldsymbol{B}|=|\boldsymbol{A}||\boldsymbol{B}|$

（C）若 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 可乘，且 $\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{E}$，则 $\boldsymbol{A}^{-1}=\boldsymbol{B}$

（D）若 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 可乘，且 $|\boldsymbol{A}|>0,|\boldsymbol{B}|<0$，则 $|\boldsymbol{AB}|<0$

11．设 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 为 n 阶矩阵，下列结论正确的是（　　）．

（A）$(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})^T=\boldsymbol{A}^T+\boldsymbol{B}^T$，并且 $(\boldsymbol{AB})^T=\boldsymbol{A}^T\boldsymbol{B}^T$

（B）当 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 均为可逆矩阵时，$(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})^{-1}=\boldsymbol{A}^{-1}+\boldsymbol{B}^{-1}$ 并且 $(\boldsymbol{AB})^{-1}=\boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{A}^{-1}$

（C）若 $\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{O}$，则 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{O}$ 或 $\boldsymbol{B}=\boldsymbol{O}$

（D）若 $\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{O}$，且 $\boldsymbol{A}$ 为可逆矩阵时，$\boldsymbol{B}=\boldsymbol{O}$

12．设 $\boldsymbol{A}$ 为 n 阶矩阵，满足 $\boldsymbol{A}^2+\boldsymbol{A}=\boldsymbol{O}$，则错误结论是（　　）．

（A）$\boldsymbol{A}+2\boldsymbol{E}$ 可逆　（B）$\boldsymbol{A}-\boldsymbol{E}$ 可逆　（C）$\boldsymbol{A}+\boldsymbol{E}$ 可逆　（D）$\boldsymbol{A}-2\boldsymbol{E}$ 可逆

13.（10 分）计算行列式 $D=\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & a_4+x \\ a_1 & a_2 & a_3+x & a_4 \\ a_1 & a_2+x & a_3 & a_4 \\ a_1+x & a_2 & a_3 & a_4 \end{vmatrix}$.

14.（10 分）设矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$，$\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix} 1 & -2 & 4 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ 且 $\boldsymbol{B}(2\boldsymbol{X}-\boldsymbol{A})=\boldsymbol{X}$，求矩阵 $\boldsymbol{X}$.

15.（10 分）已知 $\boldsymbol{A}$、$\boldsymbol{B}$ 为 **3** 阶矩阵，且满足 $\boldsymbol{2A^{-1}B=B-4E}$，其中 $\boldsymbol{E}$ 是 **3** 阶单位矩阵.

(1)证明：矩阵 $\boldsymbol{A}-2\boldsymbol{E}$ 可逆，且 $(\boldsymbol{A}-2\boldsymbol{E})^{-1}=\dfrac{1}{8}(\boldsymbol{B}-4\boldsymbol{E})$；　(2)若 $\boldsymbol{B}=\begin{bmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$，

求矩阵 $\boldsymbol{A}$.

16.（10 分）设 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$，求 $\left(\boldsymbol{A}^*\right)^{-1}$.

17.（10 分）已知 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$，$\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ 且 $\boldsymbol{X}(\boldsymbol{E}-\boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{A})^{\boldsymbol{T}}\boldsymbol{B}^{\boldsymbol{T}}=\boldsymbol{E}$，求 $\boldsymbol{X}$.

18.（8 分）计算行列式 $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ a & b & c & d \\ a^2 & b^2 & c^2 & d^2+1 \\ a^3 & b^3 & c^3 & d^3 \end{vmatrix}$.

19.（10 分）已知 $\boldsymbol{AP}=\boldsymbol{PB}$，其中 $\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&0&0\\0&0&-1\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{P}=\begin{pmatrix}1&0&0\\2&-1&0\\2&1&1\end{pmatrix}$，求 $\boldsymbol{A}$ 及 $\boldsymbol{A}^5$.

20.（10 分）设 4 阶矩阵 $\boldsymbol{A}$ 和 $\boldsymbol{B}$ 满足 $\boldsymbol{A}^*\boldsymbol{B}=\boldsymbol{A}^{-1}+\boldsymbol{B}$，其中 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&2&0&0\\1&3&0&0\\0&0&0&2\\0&0&-1&0\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{A}^*$ 为 $\boldsymbol{A}$ 的伴随矩阵，求矩阵 $\boldsymbol{B}$.