# §4.4 简单矩阵方程

**定理：** 矩阵方程 $AX = B$ 有解的充分必要条件是

$$R(A) = R(A, B) .$$

**证明：** 设 $A$ 是 $m \times n$ 矩阵， $B$ 是 $m \times l$ 矩阵， $X$ 是 $n \times l$ 矩阵.

把 $X$ 和 $B$ 按列分块，记作

$$X = ( x_1, x_2, \dots, x_l ) ,\quad B = ( b_1, b_2, \dots, b_l )$$

则 $AX = A(x_1, x_2, \cdots, x_l) = (Ax_1, Ax_2, \cdots, Ax_l) = (b_1, b_2, \cdots, b_l) = B$

即矩阵方程 $AX = B$ 有解 $\Leftrightarrow$ 线性方程组 $Ax_i = b_i$ 有解

$$\Leftrightarrow R(A) = R( A, b_i )$$

设 $R(A)=r$，$A$ 的行最简形矩阵为 $\tilde{A}$，则 $\tilde{A}$ 有 $r$ 个非零行，且 $\tilde{A}$ 的后 $m-r$ 行全是零.

再设 $(A,B)=(A,b_1,b_2,\cdots,b_l)\overset{r}{\sim}(\tilde{A},\tilde{b}_1,\tilde{b}_2,\cdots,\tilde{b}_l)$

从而 $(A,b_i)\overset{r}{\sim}(\tilde{A},\tilde{b}_i)$ .

矩阵方程 $AX=B$ 有解 $\Leftrightarrow$ 线性方程组 $Ax_i=b_i$ 有解

$\Leftrightarrow R(A)=R(A,b_i)$

$\Leftrightarrow$ $\tilde{b}_i$ 的后 $m-r$ 个元素全是零

$\Leftrightarrow$ $(\tilde{b}_1,\tilde{b}_2,\cdots,\tilde{b}_l)$ 的后 $m-r$ 行全是零

$\Leftrightarrow R(A)=R(A,B)$ .

**推论：** 向量组 $Q:\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_l$ 能由向量组 $P:\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m$ 线性表示的充要条件是矩阵 $A=(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m)$ 的秩等于矩阵

$$(A,B)=(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m,\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_l)$$

的秩，即$R(A)=R(A,B)$.

**推论：** 向量组 $Q:\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_l$ 与向量组$P:\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m$ 等价的充要条件是$R(A)=R(B)=R(A,B)$，其中$A,B$分别是向量组$P,Q$所构成的矩阵.

**例：** 设 $AB = C$, 则 $R(C) \le \min\{R(A), R(B)\}$.

**证：**（1）$AX=C$有解，则$R(A)=R(A,C)$

又$R(C)\le R(A,C)$，所以$R(C)\le R(A)$.

（2）又$B^{\mathrm{T}}A^{\mathrm{T}}=C^{\mathrm{T}}$，则$R(C^{\mathrm{T}})\le R(B^{\mathrm{T}})$

又$R(C)=R(C^{\mathrm{T}})$，$R(B)=R(B^{\mathrm{T}})$，故得证.

**例：** 设

$$\alpha_1=\begin{pmatrix}1\\-1\\1\\-1\end{pmatrix},\alpha_2=\begin{pmatrix}3\\1\\1\\3\end{pmatrix},\beta_1=\begin{pmatrix}2\\0\\1\\1\end{pmatrix},\beta_2=\begin{pmatrix}1\\1\\0\\2\end{pmatrix},\beta_3=\begin{pmatrix}3\\-1\\2\\0\end{pmatrix}$$

证明$\alpha_1,\alpha_2$ 与 $\beta_1,\beta_2,\beta_3$ 等价。

$$(A,B)=\begin{pmatrix}1&3&2&1&3\\-1&1&0&1&-1\\1&1&1&0&2\\1&3&1&2&0\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&3&2&1&3\\0&2&1&1&1\\0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0\end{pmatrix}$$

$R(A)=R(A,B)=2,$且 $R(B)=2$