计算方法

第2章 数值积分

胡 敏
合肥工业大学 计算机与信息学院
jsjxhumin@hfut.edu.cn
uhnim@163.com

第 2 章　数值积分

2.1 机械求积

2.2 牛顿-柯特斯公式

2.3 龙贝格算法

2.4 高斯求积公式

2.5 数值微分

1．教学内容：

代数精度的概念、插值型的求积公式、牛顿-柯特斯公式、数值积分的误差估计。

2．重点难点：

代数精度的概念、插值型的求积公式、牛顿-柯特斯公式、数值积分的误差估计。

3．教学目标：

了解代数精度的概念、掌握插值型求积和牛顿-柯特斯公式的运用、能进行数值积分的误差估计。

引 言

$$F'(x)=f(x)$$

$$\int_a^b f(x)dx = F(b)-F(a)$$ 牛顿-莱伯尼兹公式

(1) 被积函数f(x)并不一定能够找到用初等函数的有限形式表示的原函数F(x)，例如：

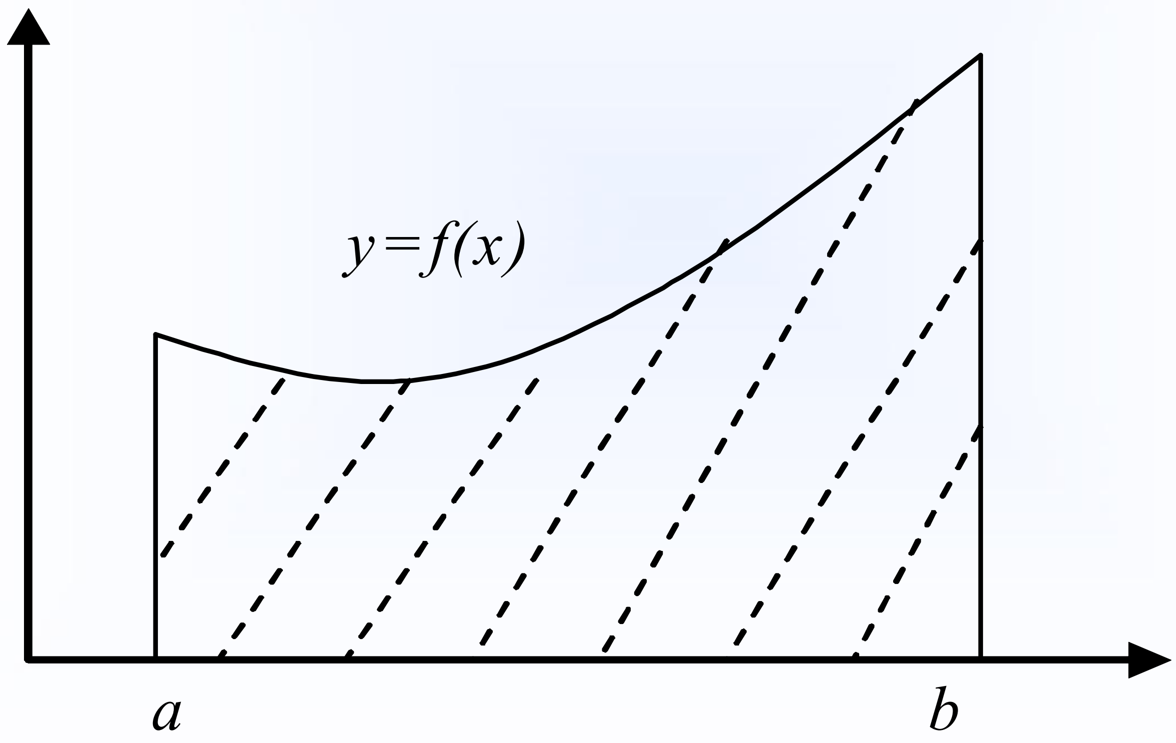
$$\int_0^1 \frac{\sin x}{x} dx \quad 和 \quad \int_0^1 e^{-x^2} dx$$

(2) 还有被积函数f(x)的原函数能用初等函数表示，但表达式太复杂，例如函数 $f(x)=x^2\sqrt{2x^2+3}$

其原函数F(x)为：

$$F(x)=\frac{1}{4}x^3\sqrt{2x^2+3}+\frac{3}{16}x\sqrt{2x^2+3}-\frac{9}{16\sqrt{2}}\ln(\sqrt{2}x+\sqrt{2x^2+3})+C$$

(3) 被积函数f(x)没有具体的解析表达式, 其函数关系由表格或图形表示.



引 言

为克服上述许多缺点，定积分计算的**数值求解**能弥补上述不足，并可带来满意的结果。

积分数值算法的思想是，首先求被积函数 $f(x)$ 的一个逼近函数 $p(x)$，即 $f(x)=p(x)+r(x)$，这里 $r(x)$ 为误差函数

引 言

- 由定积分定义

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{\|\Delta x\| \to 0} \sum_{i=0}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i$$

(1)分割 $\quad a = x_0 < x_1 < \ldots < x_n =_i b$

(2)近似 $\quad \Delta s_i = f(\xi)\Delta x_i \qquad \Delta x_i = x_i - x_{i-1}$

(3)求和 $\quad S_n = \sum_{i=0}^{n} \Delta s_i = \sum_{i=0}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i$

引 言

(4)求极限$\|\Delta x\| = \max\limits_{1\le i\le n}\{|\Delta x_i|\}$

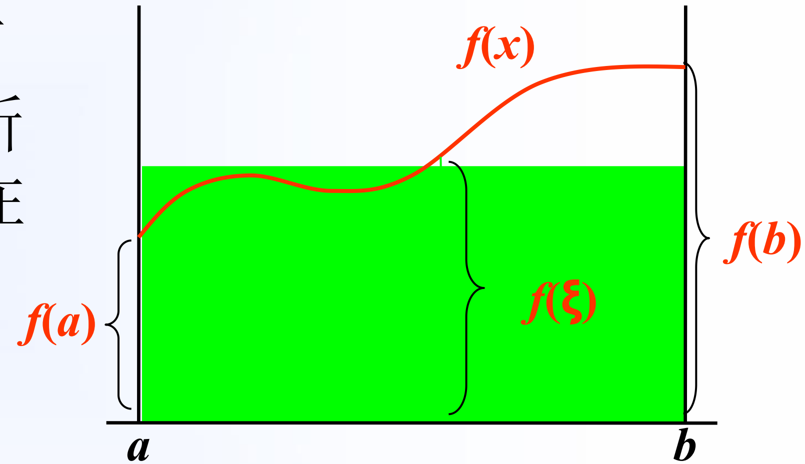
$$\lim_{\|\Delta x\|\to 0} S_n = \lim_{\|\Delta x\|\to 0}\sum_{i=0}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i = \int_a^b f(x)dx$$

2. 1　机械求积

1、数值求积的基本思想

积分 $I = \int_a^b f(x)dx$ 在几何上

可解释为由 x=a，x=b，y=0，y=f(x) 所围成的曲边梯形的面积。积分的困难在于其中有一边是由曲线 y=f(x) 构成的。



积分中值定理

设函数 f(x) 在[a，b]上连续，则在[a，b]内存在一点ξ，成立

$$\int_a^b f(x)dx = (b-a)f(\xi)$$

积分中值定理 $\int_a^b f(x)dx = (b-a)f(\xi)$

称 f(ξ) 为区间[a，b]上的平均高度。由于 ξ 难以确定，因此，f(ξ)的值就无法计算。

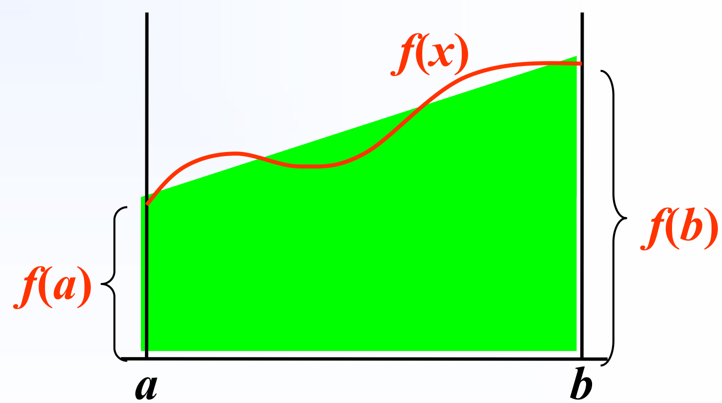
如果能够为 **f(ξ) 提供一种数值算法，可以近似地计算 f(ξ) 的值，就可以得到一种数值求积方法。**

按照这种思想，人们便得到了一些近似的积分计算公式。

①梯形公式

$$\int_a^b f(x)dx \cong \frac{b-a}{2}[f(a)+f(b)]$$

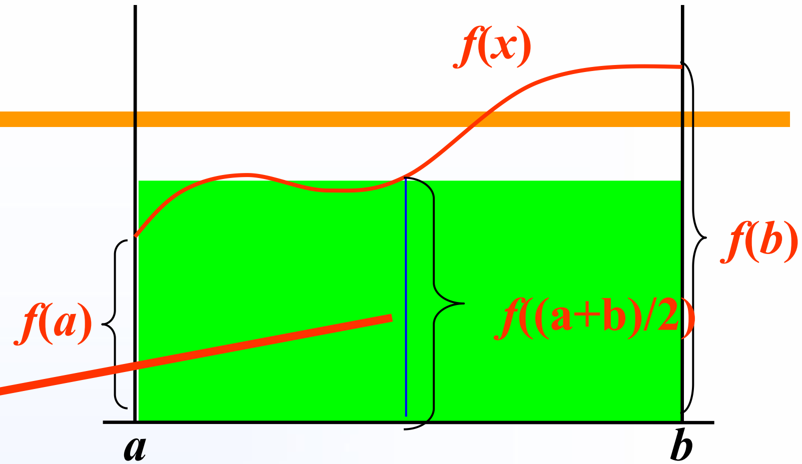
$$f(\xi) \cong \frac{f(a)+f(b)}{2}$$



② 中矩形公式

$$\int_a^b f(x)dx \cong (b-a)f(\frac{a+b}{2})$$

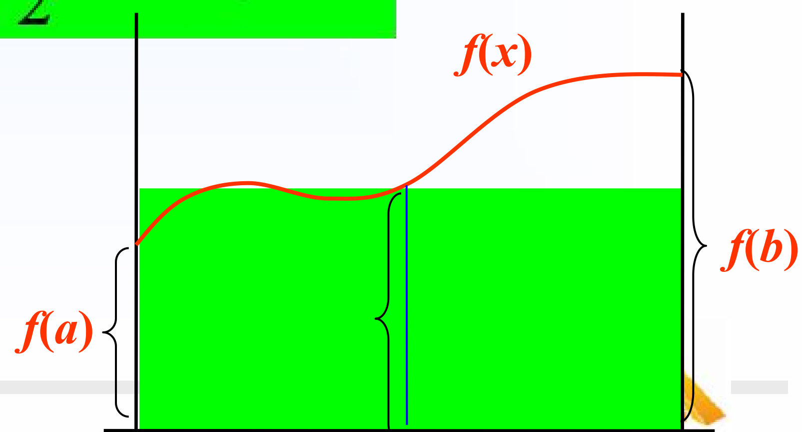
$$f(\xi) \cong f(\frac{a+b}{2})$$



③辛甫生Simpson公式

$$\int_a^b f(x)dx \cong \frac{(b-a)}{6}[f(a)+4f(\frac{a+b}{2})+f(b)]$$

$$f(\xi) \cong \frac{f(a)+4f(\frac{a+b}{2})+f(b)}{6}$$



一般地，设 f(x) 在区间[a，b]上连续，取[a，b]内若干

个节点 x_k 处的高度 $f(x_k)$ ，通过加权平均

$$f(\xi)=\sum_{k=0}^{n}\omega_k f(x_k)$$

求积系数
权系数

求积节点

于是

$$\int_a^b f(x)dx=\sum_{k=0}^{n}\omega_k f(x_k)(b-a)=\sum_{k=0}^{n}A_k f(x_k) \qquad （4）$$

x_k： **求积节点**

A_k： **求积系数**

1．求积系数及节点如何确定？
2．公式的计算精度如何判断？提高计算精度？
3．此公式与Lagrange插值多项式有何关系？

A_k: 由节点决定

与函数无关

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)\Delta x_k$$ 有

称上述求积方法为机械求积法。其特点是直接利用某些节点上的函数值计算积分，而将积分求值问题归结为函数值的计算。

例1　设积分区间[a, b]为[0, 2]，分别用梯形和Simpson公式

$$\int_0^2 f(x)dx \approx f(0)+f(2) \qquad \int_0^2 f(x)dx \approx \frac{1}{3}[f(0)+4f(1)+f(2)]$$

计算 $f(x)=1, x, x^2, x^3, x^4, e^x$ 时积分结果并与准确值进行比较.

解:梯形公式和Simpson公式的计算结果与准确值比较如下表所示

f(x)	1	x	x^2	x^3	x^4	e^x
准确值	2	2	2.67	4	6.40	6.389
梯形公式	2	2	4	8	16	8.389
辛甫生公式	2	2	2.67	4	6.67	6.421

2、代数精度的概念

数值求积方法是近似方法，为保证精度，自然希望所提供求积公式对于“尽可能多”的函数是准确的。

问题： 对于不同 A_k 的，求积方法的精度如何呢？

定义： 如果某个求积公式，对于任何次数不超过m的代数多项式都准确成立，但对于m+1次代数多项式不一定准确成立，则称该求积公式具有m次代数精度。

等价定义 设求积公式 $\int_a^b f(x)dx \approx (b-a)\sum_{k=0}^{n} A_k f(x_k)$ 对于$1, x, x^2, \cdots, x^m$是准确的，而对于 x^{m+1} 是不准确的，则称该求积公式具有m阶代数精度

容易验证，梯形、中矩形公式有1次代数精度。

例2　求梯形公式和Simpson公式的代数精度.

解：1. 梯形公式　$\int_a^b f(x)dx \approx \frac{b-a}{2}[f(a)+f(b)]$

当f(x)=1时，$左=\int_a^b 1dx = b-a$，$右=\frac{b-a}{2}(1+1)=b-a$，左=右；

当f(x)=x时，

$$左=\int_a^b xdx=\frac{1}{2}(b^2-a^2),右=\frac{b-a}{2}(a+b)=\frac{1}{2}(b^2-a^2)$$ ，左=右；

当f(x)=x^2 时，

$$左=\int_a^b x^2dx=\frac{1}{3}(b^3-a^3)，右=\frac{b-a}{2}(a^2+b^2)=\frac{1}{2}(a^2+b^2)(b-a)$$

左 $\neq$ 右 .

所以梯形公式只有1阶代数精度.

2. Simpson公式

$$\int_a^b f(x)dx \approx \frac{1}{6}(b-a)\left[f(a)+4f\left(\frac{a+b}{2}\right)+f(b)\right]$$

当$f(x)=1$时，左 $=\int_a^b 1dx = b-a$，右 $=\dfrac{b-a}{6}(1+4+1)=b-a$，左=右；

当$f(x)=x$时，左 $=\int_a^b xdx = \dfrac{1}{2}(b^2-a^2)$，

$$右=\frac{b-a}{6}\left(a+4\frac{a+b}{2}+b\right)=\frac{1}{2}(b^2-a^2),$$ 左=右；

当$f(x)=x^2$时，左 $=\int_a^b x^2dx = \dfrac{1}{3}(b^3-a^3)$，

$$右=\frac{b-a}{6}\left(a^2+4\left(\frac{a+b}{2}\right)^2+b^2\right)=\frac{b-a}{6}(2a^2+2ab+2b^2)=\frac{1}{3}(b^3-a^3),$$ 左=右；

当$f(x)=x^3$时，左 $=\int_a^b x^3dx=\frac{1}{4}(b^4-a^4)$，

$$右=\frac{b-a}{6}(a^3+4(\frac{a+b}{2})^3+b^3)=\frac{b-a}{6}(a^3+\frac{1}{2}(a^3+3a^2b+3ab^2+b^3)+b^3)$$

$$=\frac{b-a}{6}\frac{3}{2}(a^3+a^2b+ab^2+b^3)=\frac{1}{4}(b^4-a^4)$$，左=右；

当$f(x)=x^4$时， 左 $=\int_a^b x^4dx=\frac{b^5-a^5}{5}$，

$$右=\frac{b-a}{6}(a^4+4(\frac{a+b}{2})^4+b^4)=\frac{b-a}{6}(\frac{5}{4}a^4+\frac{3}{2}a^2b^2+a^3b+ab^3+\frac{5}{4}b^4)\neq\frac{b^5-a^5}{5},$$

左 $\neq$ 右 .

所以抛物线公式具有三阶代数精度.

例3 若对于给定的一组求积节点 $x_k(k=0,1,2,\cdots,n)$相应的求积公式

$$\int_a^b f(x)dx \approx (b-a)\sum_{k=0}^{n} \mathrm{A}_k f(x_k)$$

至少具有 n 次代数精度，试确定其求积系数.

解 由已知对于 $f(x)=1,x,x^2,\cdots,x^n$，求积公式

均成立等式，得：$\int_a^b f(x)dx \approx (b-a)\sum_{k=0}^{n} \mathrm{A}_k f(x_k)$

$$\begin{cases} A_0 + A_1 + \cdots + A_n = 1 \\ x_0 A_0 + x_1 A_1 + \cdots + x_n A_n = \dfrac{b+a}{2} \\ \cdots \\ x_0^n A_0 + x_1^n A_1 + \cdots + x_n^n A_n = \dfrac{1}{b-a}\dfrac{b^{n+1} - a^{n+1}}{n+1} \end{cases}$$

其系数矩阵

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ x_0 & x_1 & \cdots & x_n \\ x_0^2 & x_1^2 & \cdots & x_n^2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ x_0^n & x_1^n & \cdots & x_n^n \end{bmatrix} = \prod_{0 \le i < j \le n} (x_j - x_i) \neq 0$$

当 $x_k\ (k = 0,1,\cdots,n)$ **互异时非奇异，故** A_k **有唯一解.**

3、插值型的求积公式

由插值法知道，无论多么复杂的函数或用表格形式给出的函数 f(x)，都可以用一个简单的插值多项式 $p_n(x)$ 去近似。故可以用插值多项式代替被积函数进行近似的积分计算。

设已给 $f(x)$ 在节点 $x_k\ (k=0,1,\cdots,n)$ 的函数值，作插值多项式

$$P_n(x)=\sum_{k=0}^{n} f(x_k)l_k(x)$$

其中
$$l_k(x)=\prod_{\substack{j=0\\ j\neq k}}^{n}\frac{x-x_j}{x_k-x_j}$$

由于多项式的求积是容易的，令

$$\int_a^b f(x)dx \approx \int_n^b P_n(x)dx \qquad （7）$$

这样得到的求积公式称为**插值型**的求积公式，其求积系数为

$$A_k = \int_a^b l_k(x)dx \tag{8}$$

则可得到形如（4）式的求积公式

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^b p_n(x)dx = \int_a^b \sum_{k=0}^{n} l_k(x) f(x_k) dx$$

$$= \sum_{k=0}^{n} f(x_k) \int_a^b l_k(x)dx = \sum_{k=0}^{n} A_k f(x_k)$$

定理1 机械求积公式至少有 n 次代数精度的充分必要条件是它是插值型的。

证：

对于任意次数 $\leq$ n的多项式f(x)，其插值多项式 $p_n(x)$ 就是它自身，即：$f(x) = p_n(x)$

因此，求积公式

$$\int_a^b f(x)dx \approx \int_a^b p_n(x)dx$$

对任意次数不超过 n的多项式都准确成立，故至少具有n 次代数精度。

反之，如果机械求积公式至少有 n 次代数精度，则它对于插值基函数是准确成立的，即有：

$$\int_a^b l_k(x)dx = \sum_{j=0}^{n} A_k l_k(x_j)$$

因为 $l_k(x_j)=\delta_{kj}=\begin{cases}1 & k=j\\ 0 & k\neq j\end{cases}$

$$A_k=\int_a^b l_k(x)dx$$

所以有 $\int_a^b l_k(x)dx = \sum_{j=0}^{n} A_k l_k(x_j)$

由线性方程组
$$\begin{cases}A_0+A_1+\cdots+A_n=b-a\\ A_0x_0+A_1x_1+\cdots+A_nx_n=\dfrac{b^2-a^2}{2}\\ \cdots\\ A_0x_0^n+A_1x_1^n+\cdots+A_nx_n^n=\dfrac{b^{n+1}-a^{n+1}}{n+1}\end{cases}$$

可知 A_k 有唯一解

故求积公式（4）必为插值型的 $\int_a^b f(x)dx=\sum_{k=0}^{n}\omega_k f(x_k)(b-a)=\sum_{k=0}^{n}A_k f(x_k)$

2.2 牛顿—柯特斯(Newton-Cotes)公式

为便于上机计算，通常在求积公式中取等距节点，即将积分区间$[a,b]$ n等分，步长 $h=(b-a)/n$，且记$x_0=a, x_n=b$，则节点为$x_k = x_0 + kh (k=0,1,\ldots n)$，作变换:$t=(x-x_0)/h$，代入求积系数公式：

$$A_k = \int_a^b l_k(x)dx = \int_a^b \frac{(x-x_0)\cdots(x-x_{k-1})(x-x_{k+1})\cdots(x-x_n)}{(x_k-x_0)\cdots(x_k-x_{k-1})(x_k-x_{k+1})\cdots(x_k-x_n)}dx$$

$$= \int_0^n \frac{h^n t(t-1)\cdots(t-\overline{k-1})(x-\overline{k+1})\cdots(t-n)}{(-1)^{n-k}(h)^n(n-k)!k!}hdt$$

$$= \frac{(-1)^{n-k}h}{(n-k)!k!}\int_0^n t(t-1)\cdots(t-\overline{k-1})(x-\overline{k+1})\cdots(t-n)dt$$

令

$$C_k=\frac{A_k}{b-a}=\frac{A_k}{nh} \qquad (10)$$

$$=\frac{(-1)^{n-k}}{n\cdot(n-k)!k!}\int_0^n\prod_{\substack{j=0\\j\neq k}}^{n}(t-j)dt$$

则可得到插值型求积公式

$$I_n=(b-a)\sum_{k=0}^{n}C_kf(x_k) \qquad (9)$$

称作n阶**牛顿一柯特斯公式**。

其中 C_k 称为**柯特斯系数**

注：Cotes 系数仅取决于 n 和 k， 可查表得到。与 $f(x)$ 及区间$[a, b]$均无关。

几种低阶的牛顿-柯斯特公式

一、公式的导出

1. 当 $n=1$ 时，$h=b-a$，节点为 $x_0=a, x_1=b$，此时求积公式为

$$\int_a^b f(x)dx \approx (b-a)(\lambda_0 f(a)+\lambda_1 f(b))$$

具有1阶代数精度，则由代数精度的定义知即为梯形公式

$$\int_a^b f(x)dx \approx \frac{b-a}{2}(f(a)+f(b))$$

即梯形公式为1阶 $Newton—Cotes$

$$C_0=\frac{(-1)^{1-0}}{1\times 0!\times(1-0)!}\int_0^1 (t-1)dt=\frac{-1}{1}\frac{(t-1)^2}{2}\Big|_0^1=\frac{1}{2}$$

$$C_1=\frac{(-1)^{1-1}}{1\times 1!\times(1-1)!}\int_0^1 (t-0)dt=\frac{1}{1}\frac{t^2}{2}\Big|_0^1=\frac{1}{2}$$

2． $n=2$ ，$h=\frac{b-a}{2}$， $x_0=a, x_1=\frac{a+b}{2}, x_2=b$ ， 此时求积公式为

$$\int_a^b f(x)dx \approx (b-a)(\lambda_0 f(a)+\lambda_1 f(\frac{a+b}{2})+\lambda_2 f(b))$$

(1) 权值求法1

n=2时，至少具有二阶精度．为简化计算，不妨设 $a=-1, b=1$，

此时求积公式为 $\int_{-1}^{1} f(x)dx \approx 2(C_0 f(-1)+C_1 f(0)+C_2 f(1))$

则此求积公式对于 $1, x, x^2$ 应成立等式，得

$$\begin{cases} C_0+C_1+C_2=1 \\ -C_0+C_2=0 \\ C_0+C_2=\frac{1}{3} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} C_0=\frac{1}{6} \\ C_1=\frac{4}{6} \\ C_2=\frac{1}{6} \end{cases}$$

因此求积公式：

$$\int_{-1}^{1} f(x)dx \approx \frac{1}{3}(f(-1)+4f(0)+f(1))$$

(1) 权值求法2

$$C_0 = \frac{(-1)^{2-0}}{2\times 0!\times(2-0)!}\int_0^2 (t-1)(t-2)\,dt$$

$$= \frac{1}{4}\int_0^2 [(t-2)^2+(t-2)]\,dt$$

$$= \frac{1}{4}[\frac{1}{3}(t-2)^3+\frac{1}{2}(t-2)^2]\Big|_0^2 = \frac{1}{6}$$

同理可得 $C_1 = \frac{4}{6}$, $C_2 = \frac{1}{6}$

则

$$\int_a^b f(x)dx \approx \frac{b-a}{6}(f(a)+4f(\frac{a+b}{2})+f(b))$$

具有3阶精度，即二阶的 *Newton—Cotes* ---------**Simpson公式**

3. 柯特斯公式

当n=4时， $h=\dfrac{b-a}{4}$ ，$x_0=a, x_i=a+ih, i=1,2,3,4$

Newton-Cotes公式为

$$\int_a^b f(x)dx \approx \frac{b-a}{90}[7f(x_0)+32f(x_1)+12f(x_2)+32f(x_3)+7f(x_4)]$$

称为**柯特斯公式**

其代数精度为5

柯特斯系数表

n	C_k						
1	1/2	1/2					
2	1/6	4/6	1/6				
3	1/8	3/8	3/8	1/8			
4	7/90	32/90	12/90	32/90	7/90		
5	19/288	75/288	50/288	50/288	75/288	19/288	
6	41/840	216/840	27/840	272/840	27/840	216/840	41/840

例6 分别用梯形公式、辛甫生公式和柯特斯公式计算定积分 $\int_{0.5}^{1}\sqrt{x}\mathrm{d}x$ 的近似值（计算结果取5位有效数字）

（1） 用梯形公式计算

$$\int_{0.5}^{1}\sqrt{x}\mathrm{d}x \approx \frac{1-0.5}{2}[f(0.5)+f(1)] = 0.25\times[0.70711+1] = 0.4267767$$

（2） 用辛甫生公式

$$\int_{0.5}^{1}\sqrt{x}\mathrm{d}x \approx \frac{1-0.5}{6}[\sqrt{0.5}+4\times\sqrt{(0.5+1)/2}+\sqrt{1}]$$

$$=\frac{1}{12}\times[0.70711+4\times0.86603+1] = 0.43093403$$

（3） 用柯特斯公式计算，系数为

$$\frac{7}{90},\frac{32}{90},\frac{12}{90},\frac{32}{90},\frac{7}{90}$$

$$\int_{0.5}^{1}\sqrt{x}\mathrm{d}x \approx \frac{1-0.5}{90}[7\times\sqrt{0.5}+32\times\sqrt{0.625}+12\times\sqrt{0.75}+32\times\sqrt{0.875}+7\times\sqrt{1}]$$

$$=\frac{1}{180}\times[4.94975+25.29822+10.39223+29.93326+7]=0.43096407$$

积分的准确值为

0.4267767　　0.43093403

$$\int_{0.5}^{1}\sqrt{x}\mathrm{d}x=\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}\Big|_{0.5}^{1}=0.43096441$$

可见，三个求积公式的精度逐渐提高.

例4　用辛甫生公式和柯特斯公式计算

$$I = 20\frac{2}{3}$$

$$\int_1^3 (x^3 - 2x^2 + 7x - 5)\mathrm{d}x = I$$

的近似值，并估计其误差（计算结果取5位小数）

解：辛甫生公式

$$I \approx \frac{b-a}{6}\left[f(a)+4f\left(\frac{a+b}{2}\right)+f(b)\right]=\frac{3-1}{6}[1+4\times9+25]=\frac{62}{3}=20\frac{2}{3}$$

柯特斯公式

$$I \approx \frac{3-1}{90}[7f(1)+32f(1.5)+12f(2)+32f(2.5)+7f(3)]$$

$$=\frac{1}{45}\left[7+32\times\frac{35}{8}+12\times9+32\times\frac{125}{8}+7\times9\right]=20\frac{2}{3}$$

$Newton—Cotes$ 公式的基本性质

(1) $\sum_{j=0}^{n} C_j = 1$

(2) $C_j, j = 0, \cdots, n$ 与 $f(x)$，a，b 无关，只与等分数 n 及等分点有关；

(3) $Newton—Cotes$ 系数可以用待定系数法求出；

(4) $C_{n-k} = C_k, k = 0 \sim n$

(5) 当 $n \leq 7$ 时，其 $Newton—Cotes$ 系数为正；当 $n \geq 8$ 时，其 $Newton—Cotes$ 系数有正、有负.

2、几种低阶求积公式的代数精度

例 利用牛顿—柯特斯公式计算积分

$$I = \int_0^1 \frac{\sin x}{x} dx$$

解 计

与三阶公式精度相当

与五阶公式精度相当

n		m	n		m
1	0.92[illegible]354	1	4	0.9460[illegible]30	5
2	0.9461359	3	5	0.9460830	5
3	0.9461109	3			

n 为偶数阶的牛顿—柯特斯公式至少有 $n+1$ 次代数精度

。

2. 几种低阶求积公式的代数精度

n	l_k	m
1	$\frac{1}{2}\{1,1\}$	1
2	$\frac{1}{6}\{1,4,1\}$	3
3	$\frac{1}{8}\{1,3,3,1\}$	3
4	$\frac{1}{90}\{7,32,12,32,7\}$	5
5	$\frac{1}{288}\{19,75,50,50,75,19\}$	5
6	$\frac{1}{840}\{41,216,27,272,27,216,41\}$	7
7	$\frac{1}{17280}\{751,3577,1323,2989,2989,1323,3577,751\}$	7
8	$\frac{1}{28350}\{989,5888,-928,10496,-4540,10496,-928,5888,989\}$	9

在几种低阶的**牛顿—柯特斯公式**中，人们比较感兴趣的是：

梯形公式（最简单、最基本）

$$\int_a^b f(x)dx \cong \frac{b-a}{2}[f(a)+f(b)]$$

辛甫生

$$\int_a^b f(x)dx \cong \frac{(b-a)}{6}[f(a)+4f(\frac{a+b}{2})+f(b)]$$

柯特斯公式

$$\int_a^b f(x)dx = \frac{b-a}{90}(7f(x_0)+32f(x_1)+12f(x_2)+32f(x_3)+7f(x_4))$$

3、几种低阶求积公式的余项

利用线性插值的余项公式以及积分中值定理，我们可以得

到**梯形公式**的余项：$R_T = \int_a^b (f(x) - p_1(x))dx = \int_a^b \frac{f''(\xi_x)}{2!}(x-a)(x-b)dx$

由于（x-a)(x-b)在[a,b]内保号，应用积分中值定理，

必有 $\xi \in [a,b]$ ，使成立

$$R_T = \frac{f''(\xi)}{2}\int_a^b (x-a)(x-b)dx = -\frac{(b-a)^3}{12}f''(\xi)$$

第一积分中值定理。若函数$f(x)$，$g(x)$在区间［a，b］上有界且可积，$f(x)$连续，$g(x)$在区间［a，b］内不变号，则在区间［a，b］内至少存在一个数$\xi(a<\xi<b)$，使得

$$\int_a^b f(x)g(x)dx = f(\xi)\int_a^b g(x)dx \qquad （14）$$

利用埃尔米特插值的余项公式以及积分中值定理我们可以得到

辛甫生公式的余项：

$$R_s = I - S = \int_a^b [f(x) - H(x)]dx$$

$$= \int_a^b \frac{f^{(4)}(\xi)}{4!}(x-a)(x-\frac{b+a}{2})^2(x-b)dx$$

$$R_s = I - S = -\frac{b-a}{180}\left(\frac{b-a}{2}\right)^4 f^{(4)}(\xi), \xi \in [a,b] \qquad (16)$$

另外，我们可以得到如下**柯特斯公式**的积分余项：

$$R_c = I - C = -\frac{2(b-a)}{945}\left(\frac{b-a}{4}\right)^6 f^{(6)}(\xi), \xi \in [a,b] \qquad (17)$$

4、复化求积公式

在使用牛顿—柯特斯公式时，通过提高阶的途径并不总能取得满意的效果，为了改善求积公式的精度，一种行之有效的方法是复化求积。

将 $[a,b]$分为 n等份，步长 $h=\dfrac{b-a}{n}$ ，分点 $x_k=a+kh, k=0,1,\cdots,n$

所谓复化求积公式，就是先用低阶的求积公式求得每个子段上的积分值 I_k ，然后用 $\sum_{k=0}^{n-1} I_k$ 作为积分I 的近似值。

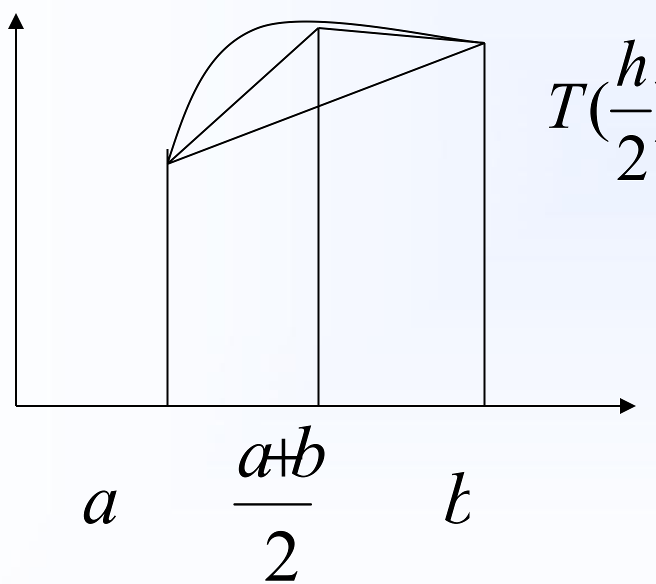
复化梯形公式有如下形式：

$$T_n=\sum_{k=0}^{n-1}\frac{h}{2}[f(x_k)+f(x_{k+1})]=\frac{h}{2}\left[f(a)+2\sum_{k=1}^{n-1}f(x_k)+f(b)\right] \qquad （18）$$

$$=\frac{h}{2}[f(x_0)+2(f(x_1)+f(x_2)+\cdots+f(x_{n-1}))+f(x_n)]$$

定步长复化求积公式

■ 复化梯形求积公式



$$T(h)=\frac{a-b}{2}(f(a)+f(b))$$

$$T(\frac{h}{2})=\frac{\frac{a-b}{2}}{2}(f(a)+f(\frac{a+b}{2}))$$

$$+\frac{\frac{a-b}{2}}{2}(f(\frac{a+b}{2})+f(b))$$

$$=\frac{b-a}{4}(f(a)+2f(\frac{a+b}{2})+f(b))$$

- 一般地将[a,b]区间n等分，则

- 一般地将[a,b]区间n等分，则

$$h = \frac{a-b}{n}, x_j = a + jh \qquad (j = 0,1,2,\dots n)$$

对每个子区间 $[x_{j-1}, x_j] \quad (j = 1,2,\dots n)$

使用 T 公式有

$$S_j = \frac{h}{2}(f(x_{j-1}) + f(x_j))$$

■ 所以

$$\int_a^b f(x)dx = \sum_{j=1}^{n} S_j + R_T[f,h]$$

$$而\sum_{j=1}^{n} S_j = \frac{h}{2}\sum_{j=1}^{n}(f(x_{j-1}) + f(x_j))$$

$$= \frac{h}{2}(f(a) + f(x_1) + f(x_1) + f(x_2) + \ldots$$

$$+ f(x_{n-1}) + f(b) + f(b) - f(b))$$

$$= \frac{h}{2}(f(a) - f(b) + 2\sum_{j=1}^{n} f(x_j))$$

$$= \frac{h}{2}(f(a) - f(b) + 2\sum_{j=1}^{n} f(a + jh)) = T_n(h)$$

- 而

$$R_T[f,h] = -\frac{h^3}{12}\sum_{j=1}^{n} f''(\xi_j) \quad \xi_j \in (x_{j-1}, x_j)$$

证明：若$f(x)$是$[a,b]$区间上的二阶连续函数

则必存在一点$\xi \in$（a,b）使得

$$f''(\xi) = \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} f''(\xi_j)$$

故$R_T[f,h] = -\frac{h^3}{12} n f''(\xi) = -\frac{(b-a)h^2}{12} f''(\xi)$

记字段 $[x_k, x_{k+1}]$ 的中点为 $x_{k+\frac{1}{2}}$，

复化辛甫生公式为

$$S_n = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{h}{6}[f(x_k) + 4f(x_{k+\frac{1}{2}}) + f(x_{k+1})] \qquad (19)$$

$$= \frac{h}{6}[f(a) + 4\sum_{k=0}^{n-1} f(x_{k+\frac{1}{2}}) + 2\sum_{k=1}^{n-1} f(x_k) + f(b)]$$

如果每个子段 $[x_k, x_{k+1}]$ 四等分，

内分点依次记 $x_{k+\frac{1}{4}}, x_{k+\frac{1}{2}}, x_{k+\frac{3}{4}}$，

复化柯特斯公式为

$$C_n = \frac{h}{90}[7f(a) + 32\sum_{k=0}^{n-1} f(x_{k+\frac{1}{4}}) + 12\sum_{k=0}^{n-1} f(x_{k+\frac{1}{2}})$$

0）

$$32\sum_{k=0}^{n-1} f(x_{k+\frac{1}{4}}) + 14\sum_{k=1}^{n-1} f(x_k) + 7f(b)]$$

复化梯形公式的余项为：

$$I - T_n \approx \frac{h^2}{12}\left[f'(b) - f'(a)\right] \qquad (21)$$

复化辛甫生公式的余项为：

$$I - S_n \approx -\frac{1}{180}\left(\frac{h}{2}\right)^4\left[f'''(b) - f'''(a)\right] \qquad (22)$$

复化柯斯特公式的余项为：

$$I - C_n \approx -\frac{1}{945}\left(\frac{h}{4}\right)^6\left[f^{(5)}(b) - f^{(5)}(a)\right] \qquad (23)$$

例： 若用复化的Simpson公式计算 $I=\int_0^1 \frac{\sin x}{x}dx$ 需将[0,1]多少等分才能保证误差不超过 10^{-6} ？

解： 设 $f(x)=\frac{\sin x}{x}=\int_0^1 \cos(xt)dt$ ，则 $f^{(4)}(x)=\int_0^1 t^4\cos(xt)dt$，

由

$$\left|f^{(4)}(x)\right|\le\int_0^1 t^4dt=\frac{1}{5}$$ ，

得

$$\left|I-S_n\right|=\frac{b-a}{180}\left(\frac{h}{2}\right)^4\left|f^{(4)}(\eta)\right|\le\left(\frac{1}{2n}\right)^4\cdot\frac{1}{180}\cdot\frac{1}{5}\le 10^{-6}$$

即

$$n\ge\frac{5}{3}\sqrt{3}$$

取n=3即可。

$$R_S=I-S=-\frac{b-a}{180}\left(\frac{b-a}{2}\right)^4 f^{(4)}(\xi),\xi\in[a,b]$$

例2 依次用n=8的复化梯形公式、n=4的复化Simpson公式计算定积分

$$I=\int_0^1 \frac{\sin x}{x}\,\mathrm{d}x$$

解：首先计算出所需各节点的函数值，n=8时， $h=\frac{1}{8}=0.125$

由复化梯形公式得

$$T_8=\frac{1}{16}\left[f(0)+2f(0.125)+2f(0.25)+2f(0.375)+2f(0.5)\right.$$

$$\left.+2f(0.625)+2f(0.75)+2f(0.875)+f(1)\right]$$

$$=0.9456909$$

x	f(x)	x	f(x)
0	1.0000000	5/8	0.9361556
1/8	0.9973978	¾	0.9088516
¼	0.9896158	7/8	0.8771925
3/8	0.9767267	1	0.8414709
1/2	0.9588510		

由复化Simpson公式得

$$S_4 = \frac{1}{24}\Big[f(0) + f(1) + 2(f(0.25) + f(0.5) + f(0.75))$$

$$+4(f(0.125) + f(0.375) + f(0.625) + f(0.875))\Big]$$

$$= 0.9460832$$

（积分准确值I=0. 9460831）

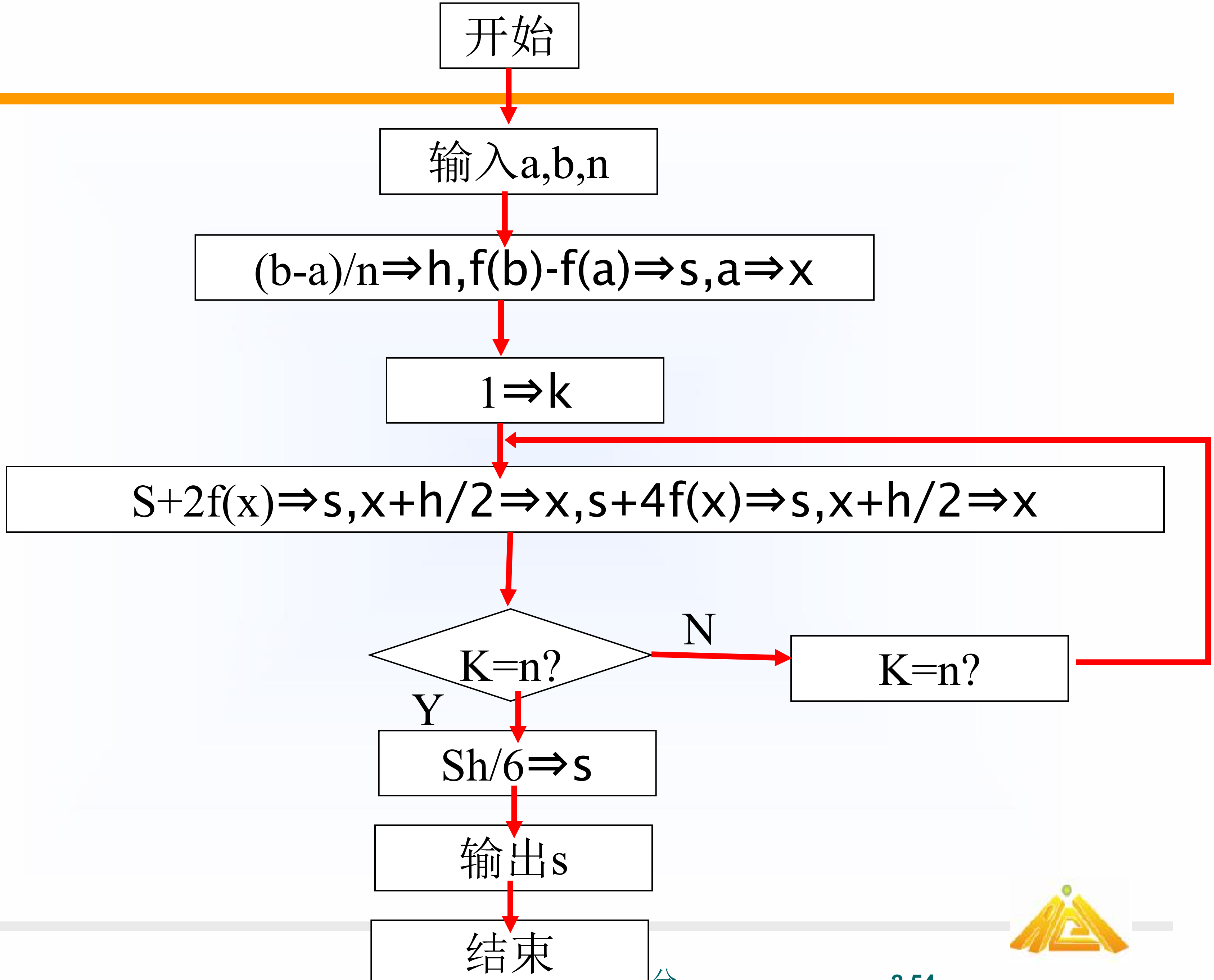
$$T_8 = 0.9456909$$

$$T_1 = 0.9270354$$

$$S_1 = 0.9461359$$

为了便于程序循环的设计，可将求积公式改写为：

$$
\begin{aligned}
S_n &= \frac{h}{6}\left[f(a) + 4\sum_{k=0}^{n-1} f(x_{k+\frac{1}{2}}) + 2\sum_{k=1}^{n-1} f(x_k) + f(b)\right] \\
&= \frac{h}{6}\left[f(a) + 4\sum_{k=0}^{n-1} f(x_{k+\frac{1}{2}}) + 2\sum_{k=0}^{n-1} f(x_k) - f(b)\right] \\
&= \frac{h}{6}\left[f(a) - f(b) + \sum_{k=0}^{n-1}\left[4f(x_{k+\frac{1}{2}}) + 2f(x_k)\right]\right]
\end{aligned}
$$


开始
输入a,b,n
(b-a)/n⇒h,f(b)-f(a)⇒s,a⇒x
1⇒k
S+2f(x)⇒s,x+h/2⇒x,s+4f(x)⇒s,x+h/2⇒x
K=n?
N
K=n?
Y
Sh/6⇒s
输出s
结束

2.3 龙贝格算法

实际计算中，由于要事先给出一个合适的步长往往很困难，所以我们往往采用变步长的计算方案，即在步长逐步分半的过程中，反复利用复化求积公式进行计算，直到所求得的积分值满足精度要求为止。

1、梯形法的递推化

设当前求积区间[a, b]分成n等分，则有n+1个节点 $x_k = a + kh$ ，$h = \dfrac{b-a}{n}$

按复化梯形公式有

$$T_n = \frac{h}{2}\left[f(a) + 2\sum_{k=1}^{n-1} f(x_k) + f(b) \right]$$

现将子区间 $[x_k, x_{k+1}]$ 一分为二，增加的分点为

$$x_{k+\frac{1}{2}} = (x_k + x_{k+1})/2 = a + (k+\frac{1}{2})h = a + (2k+1)\frac{h}{2}$$

在区间 $[x_k, x_{k+1}]$ 上

二分前的积分： $$T_1 = \frac{h}{2}[f(x_k) + f(x_{k+1})]$$

二分后的积分： $$T_2 = \frac{\frac{h}{2}}{2}[f(x_k) + f(x_{k+\frac{1}{2}}) + f(x_{k+\frac{1}{2}}) + f(x_{k+1})]$$

$$= \frac{h}{4}[f(x_k) + 2f(x_{k+\frac{1}{2}}) + f(x_{k+1})]$$

区间 $[x_k, x_{k+1}]$ k=0,1,…,n-1共n个，把该区间的 T_2 从0到n-1求和

当k=0时

c当k#0时

当k#n-1时

当k=n-1时

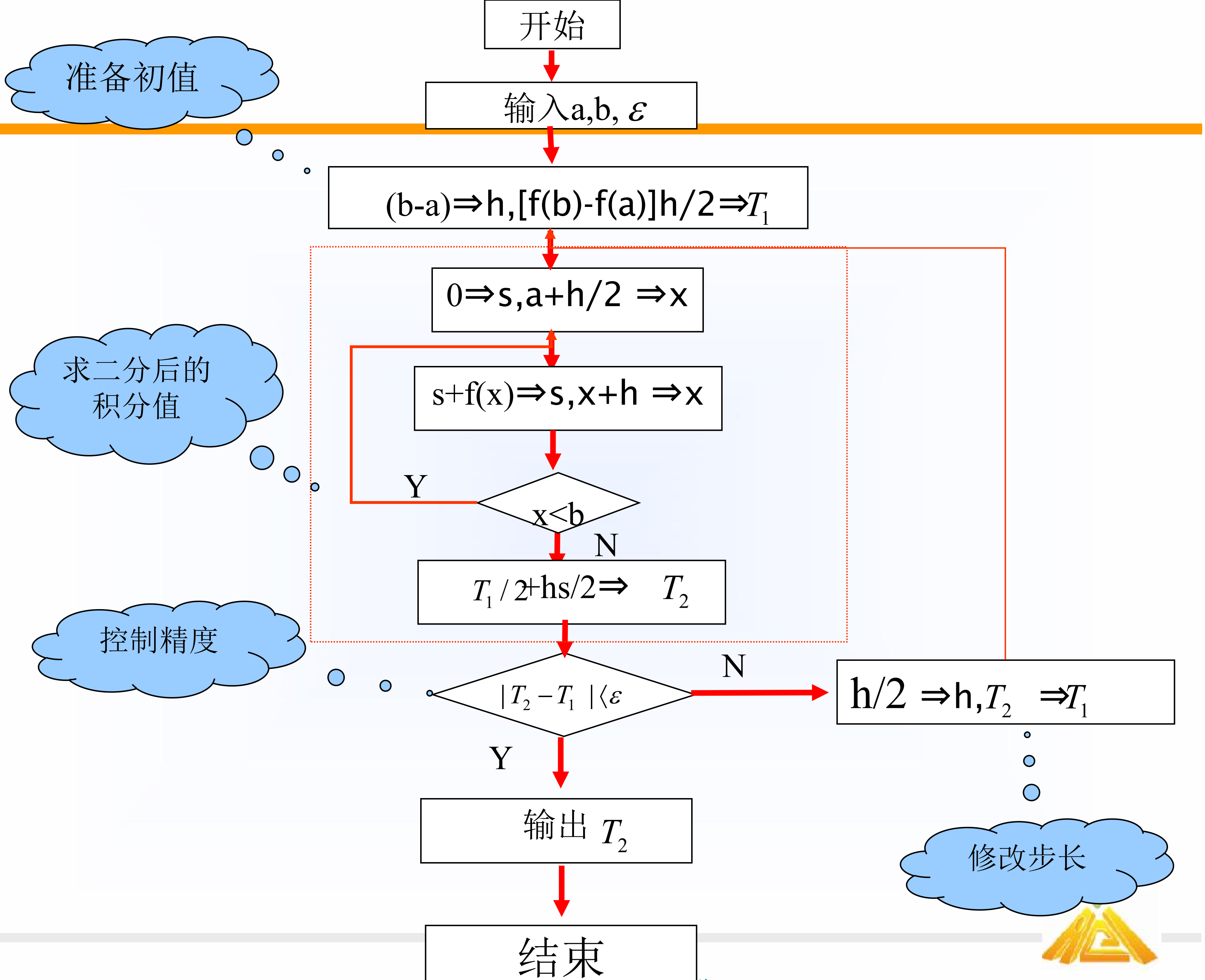
得：

$$T_{2n} = \frac{h}{4}\sum_{k=0}^{n-1}\left[f(x_k) + 2f(x_{k+\frac{1}{2}}) + f(x_{k+1}) \right]$$

$$= \frac{h}{4}\left[f(a) + 2\sum_{k=1}^{n-1} f(x_k) + 2\sum_{k=0}^{n-1} f(x_{k+\frac{1}{2}}) + f(b) \right]$$

$$= \frac{T_n}{2} + \frac{h}{2}\sum_{k=0}^{n-1} f(x_{k+\frac{1}{2}})$$

所以，步长折半后，只需求新增分点 $x_{k+\frac{1}{2}}$ 处的函数值 $f(x_{k+\frac{1}{2}})$ 之和。


准备初值
求二分后的
积分值
控制精度
修改步长
开始
输入a,b, ε
(b-a)⇒h,[f(b)-f(a)]h/2⇒T_1
0⇒s,a+h/2 ⇒x
s+f(x)⇒s,x+h ⇒x
x<b
Y
N
$T_1/2$+hs/2⇒ T_2
$|T_2-T_1|<\varepsilon$
N
h/2 ⇒h,T_2 ⇒T_1
Y
输出 T_2
结束

例 3

例　用变步长梯形法则计算积分 $I=\int_0^1 \frac{\sin x}{x}\mathrm{d}x$，并加速。

解　对区间 $[0,1]$ 用梯形公式，$f(x)=\frac{\sin x}{x}$，$f(0)=1$，$f(1)=0.8414710$。所以，$T_1=\frac{1}{2}[f(0)+f(1)]=0.9207355$

将区间二等分，$f(\frac{1}{2})=0.9588510$，$T_2=\frac{1}{2}T_1+\frac{1}{2}f(\frac{1}{2})=0.9397933$

再将区间二等分，$f(1/4)=0.9896158$，$f(3/4)=0.9088516$

$$T_4=\frac{1}{2}T_2+\frac{1}{4}\left[f\left(\frac{1}{4}\right)+f\left(\frac{3}{4}\right)\right]=0.9445135$$，有 2 位有效数字。

再将区间二等分，$f(1/8)=0.9973979$，$f(3/8)=0.9767267$，

$f(5/8)=0.9361551$，$f(7/8)=0.8771926$

$$T_8=\frac{1}{2}T_4+\frac{1}{8}\left[f\left(\frac{1}{8}\right)+f\left(\frac{3}{8}\right)+f\left(\frac{5}{8}\right)+f\left(\frac{7}{8}\right)\right]=0.9456909$$，有 3 位有效数字。加速 $S_4=\frac{4}{3}T_8-\frac{1}{3}T_4=0.9460834$，已有 6 位有效数字。

2、龙贝格公式

梯形法的算法简单，但精度低，收敛的速度缓慢。如何提高收敛速度以节省计算量呢？

由复化梯形公式的截断误差公式

$$I-T_n \approx -\frac{h^2}{12}\left[f'(b)-f'(a)\right]$$

二分后截断误差

$$I-T_{2n} \approx -\frac{(\frac{h}{2})^2}{12}[f'(b)-f'(a)] = -\frac{h^2}{4\times 12}[f'(b)-f'(a)]$$

所以 $$\frac{I-T_{2n}}{I-T_n} \approx \frac{1}{4}$$

$$\boxed{\begin{aligned}4I-4T_{2n} &\approx I-T_n\\ 3I-3T_{2n} &\approx T_{2n}-T_n\end{aligned}}$$

整理得：$I-T_{2n} \approx \frac{1}{3}\left(T_{2n}-T_n\right)$　　　　(25)

只要二分前后两个积分值 T_n, T_{2n} ，相当接近，就可以保

证计算结果 T_{2n} 的误差很小。（**事后估计法**）

推测： **把（25）式的误差估计作为 T_{2n} 的补偿**

$$I - T_{2n} \approx \frac{1}{3}(T_{2n} - T_n) \qquad (25)$$

$$I \approx \frac{4}{3}T_{2n} - \frac{1}{3}T_n$$

$$T_{2n} + \frac{1}{3}(T_{2n} - T_n) = \frac{4}{3}T_{2n} - \frac{1}{3}T_n$$

应该比 $I \approx T_{2n}$ 有更好的近似程度。

(26)

考察例3，从计算结果表中可知：

$$T_4 = 0.9445135, \mathrm{T}_8 = 0.9456909$$

精确度很差，但如果按（26）式作线性组合，则有：

$$\bar{T} = \frac{4}{3}T_8 - \frac{1}{3}T_4 = 0.9460834$$

却有六位有效数字。**可以证明（26）式实际上就是逐次分半的复化辛甫生公式**

令 $$S_n = \frac{4}{3}T_{2n} - \frac{1}{3}T_n \tag{27}$$

按（22）式 $$I - S_n = -\frac{1}{180}\left(\frac{h}{2}\right)^4 [f'''(b) - f'''(a)]$$

容易得出： $$\frac{I - S_{2n}}{I - S_n} \approx \frac{1}{16}$$

整理得： $$I - S_{2n} \approx \frac{1}{15}(S_{2n} - S_n)$$

$$I \approx \frac{16}{15}S_{2n} - \frac{1}{15}S_n$$

容易验证，上式右端其实就是 C_n

既是说，用**辛甫生法**二分前后的两个积分值 S_n, S_{2n}

按上式再作线性组合，结果得到柯特斯法的积分 C_n

即 $$C_n \approx \frac{16}{15} S_{2n} - \frac{1}{15} S_n$$

重复同样的手续，依据柯特斯法的误差公式

$$I - C_n = -\frac{2}{945}\left(\frac{h}{2}\right)^6 [f^{(5)}(b) - f^{(5)}(a)] \qquad (23)$$

又可进一步导出**龙贝格公式**

$$R_n = \frac{64}{63} C_{2n} - \frac{1}{63} C_n \qquad (28)$$

我们可以在步长逐步分半过程中将粗糙的积分值 T_n

逐步加工为 S_n, C_n, R_n 精度较高的积分值：

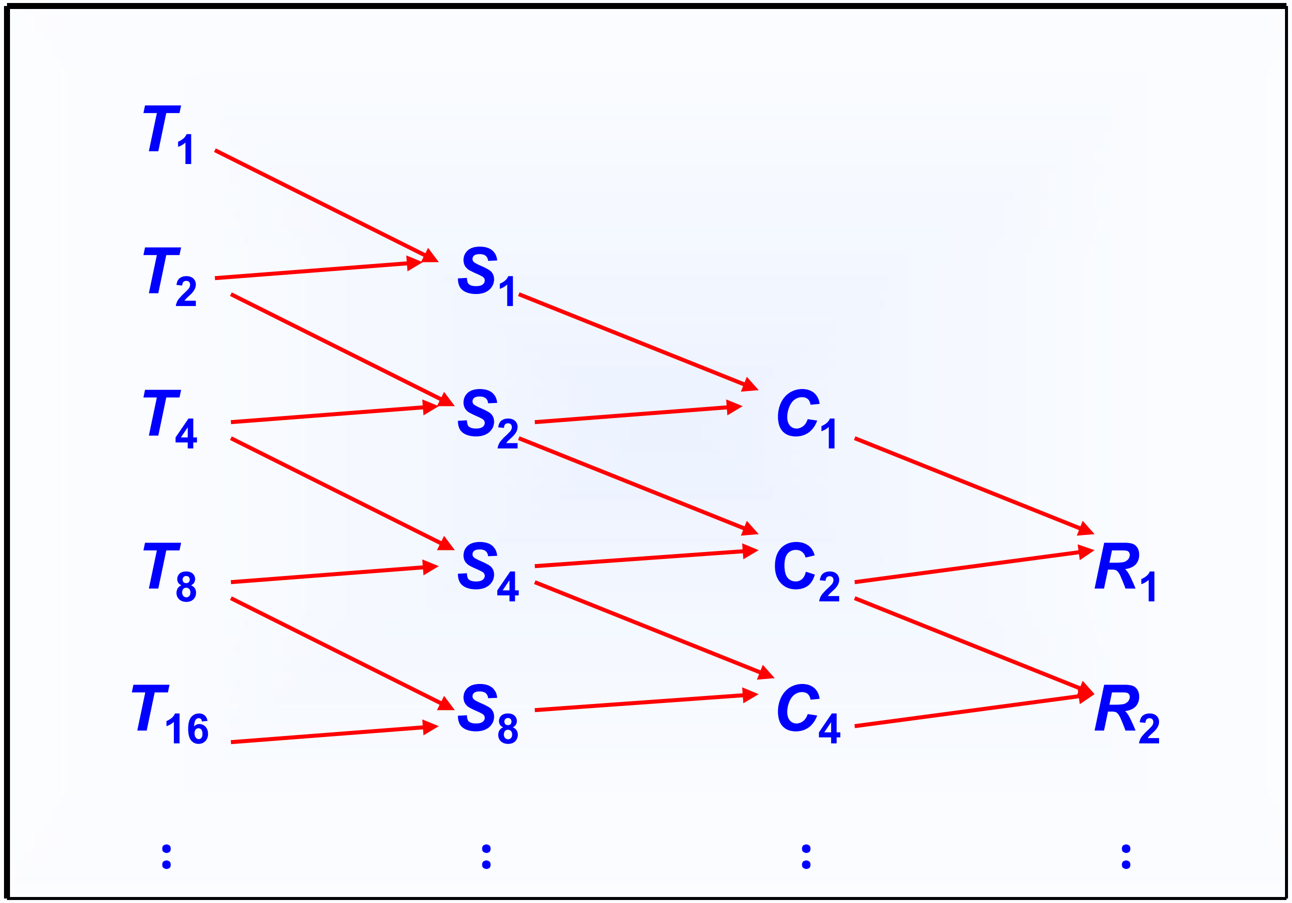
$$S_n = \frac{4}{3} T_{2n} - \frac{1}{3} T_n$$

$$C_n = \frac{16}{15} S_{2n} - \frac{1}{15} S_n$$

$$R_n = \frac{64}{63} C_{2n} - \frac{1}{63} C_n$$

或者说将收敛缓慢的梯形值序列 T_n 加工成收敛迅速的积分值序列 S_n, C_n, R_n，这种加速方法称为**龙贝格算法**。

其加工流程图如下



例： 用龙贝格算法计算积分 $I=\int_0^1 \frac{\sin x}{x}dx$ ，要求误差不超过 $\varepsilon=10^{-7}$。

k	T_2^k	S_2^{k-1}	C_2^{k-2}	R_2^{k-3}
0	0.9207355			
1				
2				
3				9460831

结果：对分3次，涉及到8个点处的函数值，经过三次加速，增加的工作量很小，却得到了变步长梯形法要对分10次，涉及到1000多个点处的函数值才能得到的结果0.9460831

$$T_{2n}=\frac{T_n}{2}+\frac{h}{2}\sum_{k=0}^{n-1} f(x_{k+\frac{1}{2}})$$

$$S_n=\frac{4}{3}T_{2n}-\frac{1}{3}T_n$$

$$C_n=\frac{16}{15}S_{2n}-\frac{1}{15}S_n$$

$$R_n=\frac{64}{63}C_{2n}-\frac{1}{63}C_n$$

练习：用龙贝格求积法计算积分 $I=\int_0^1 \frac{4}{1+x^2}dx$ 的近似值.

解：$f(x)=\dfrac{4}{1+x^2}$

(1) $f(0)=4,\ f(1)=2$

$$T_1=\frac{1}{2}[f(0)+f(1)]=3$$

(2)：$f(\frac{1}{2})=3.2$

$$T_2=\frac{1}{2}T_1+\frac{1}{2}f(\frac{1}{2})=3.1$$

$$S_1=\frac{4}{3}T_2-\frac{1}{3}T_1=3.13333$$

(3)：$f(\frac{1}{4})=3.76471,\ f(\frac{3}{4})=2.56$

$$T_4=\frac{1}{2}T_2+\frac{1}{4}[f(\frac{1}{4})+f(\frac{3}{4})]=3.13118$$

$$S_2=\frac{4}{3}T_4-\frac{1}{3}T_2=3.14157$$

$$C_1=\frac{16}{15}S_2-\frac{1}{15}S_1=3.14212$$

(4)：$f(\frac{1}{8})=3.93846,\ f(\frac{3}{8})=3.50685$

$f(\frac{5}{8})=2.87640,\ f(\frac{7}{8})=2.26549$

$$T_8=\frac{1}{2}T_4+\frac{1}{8}[f(\frac{1}{8})+f(\frac{3}{8})+f(\frac{5}{8})+f(\frac{7}{8})]=3.13899$$

$$S_4=\frac{4}{3}T_8-\frac{1}{3}T_4=3.14159$$

$$C_2=\frac{16}{15}S_4-\frac{1}{15}S_2=3.14159$$

$$R_1=\frac{64}{63}C_2-\frac{1}{63}C_1=3.14158$$