计算方法

第一章 插值方法

胡 敏
合肥工业大学 计算机与信息学院
jsjxhumin@hfut.edu.cn
uhnim@163.com

第 1 章 插值方法

1.4 埃特金算法（自学）

1.5 牛顿插值法

1.6 埃尔米特插值

1.4 埃特金插值

埃特金算法：

考察拉格朗日插值公式：

临时增加
一个插值节点

$$p_n(x) = \sum_{k=0}^{n} y_k l_k(x) = \sum_{k=0}^{n} \left(\prod_{\substack{j=0 \\ j \neq k}}^{n} \frac{x - x_j}{x_k - x_j} \right) y_k$$

- $y = f(x) \approx \dfrac{x - x_2}{x_1 - x_2} y_1 + \dfrac{x - x_1}{x_2 - x_1} y_2$ (14)

解决：埃特金算法

专用记号

- 对于给定的插值点x，如果除顺序排列的k个节点$x_0,x_1,\ldots x_{k-1}$外，再增加一个节点$x_i(i>k)$进行k次插值，则插值结果依赖于所给定的次数k与节点x_i，这一结果记为$f_k(x_i)$

例如：$f_1(x_i)$表示取x_0,x_i进行线性插值，即

$$f_1(x_i)=\frac{x-x_i}{x_0-x_i}f(x_0)+\frac{x-x_0}{x_i-x_0}f(x_i)$$

特别地：

$$f_1(x_1)=\frac{x-x_1}{x_0-x_1}f(x_0)+\frac{x-x_0}{x_1-x_0}f(x_1) \quad (16)$$

$$f_1(x_2)=\frac{x-x_2}{x_0-x_2}f(x_0)+\frac{x-x_0}{x_2-x_0}f(x_2) \quad (17)$$

又如：$f_2(x_i)$表示取x_0,x_1,x_i为节点进行抛物插值的结果，特别的有：

$$f_2(x_2)=\frac{(x-x_1)(x-x_2)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)}f(x_0)+\frac{(x-x_0)(x-x_2)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)}f(x_1)$$

$$+\frac{(x-x_0)(x-x_1)}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)}f(x_2) \quad (18)$$

$$y=f(x)\approx\frac{x-x_2}{x_1-x_2}y_1+\frac{x-x_1}{x_2-x_1}y_2$$

用近似公式(14)，求这个公式中的y1，y2，分别是$f_1(x_1)$，$f_1(x_2)$，于是有：

$$f(x)\approx\frac{x-x_2}{x_1-x_2}f_1(x_1)+\frac{x-x_1}{x_2-x_1}f_1(x_2)$$

将式（16）（17）代入直接验证，有：

$$f_2(x_2)\approx\frac{x-x_2}{x_1-x_2}f_1(x_1)+\frac{x-x_1}{x_2-x_1}f_1(x_2)$$

此结果说明：用线性插值的两个结果$f_1(x_1)$和$f_1(x_2)$在做线性插值，结果得到了抛物插值的结果$f_2(x_2)$

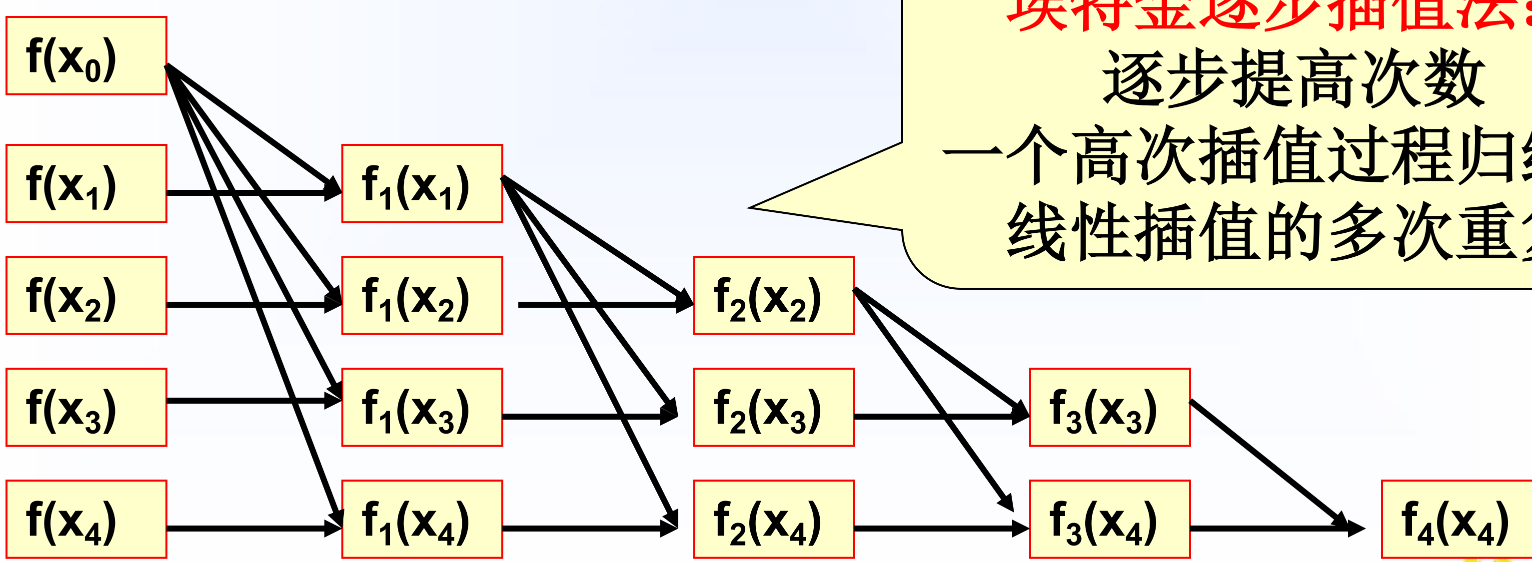
将上述过程继续：

利用两个k-1次插值$f_{k-1}(x_{k-1})$和$f_{k-1}(x_i)$在做线性插值，结果得到k次插值$f_k(x_i)$，　**递推公式：**

$$f_k(x_i) \approx \frac{x - x_i}{x_{k-1} - x_i} f_{k-1}(x_{k-1}) + \frac{x - x_{k-1}}{x_i - x_{k-1}} f_{k-1}(x_i), i \geq k \qquad (21)$$

这里约定$f_0(x_i)=f(x_i)$，对k=1, 2, ..., n和i=k, k+1, ..., n反复执行这一算式，可以构造出埃特

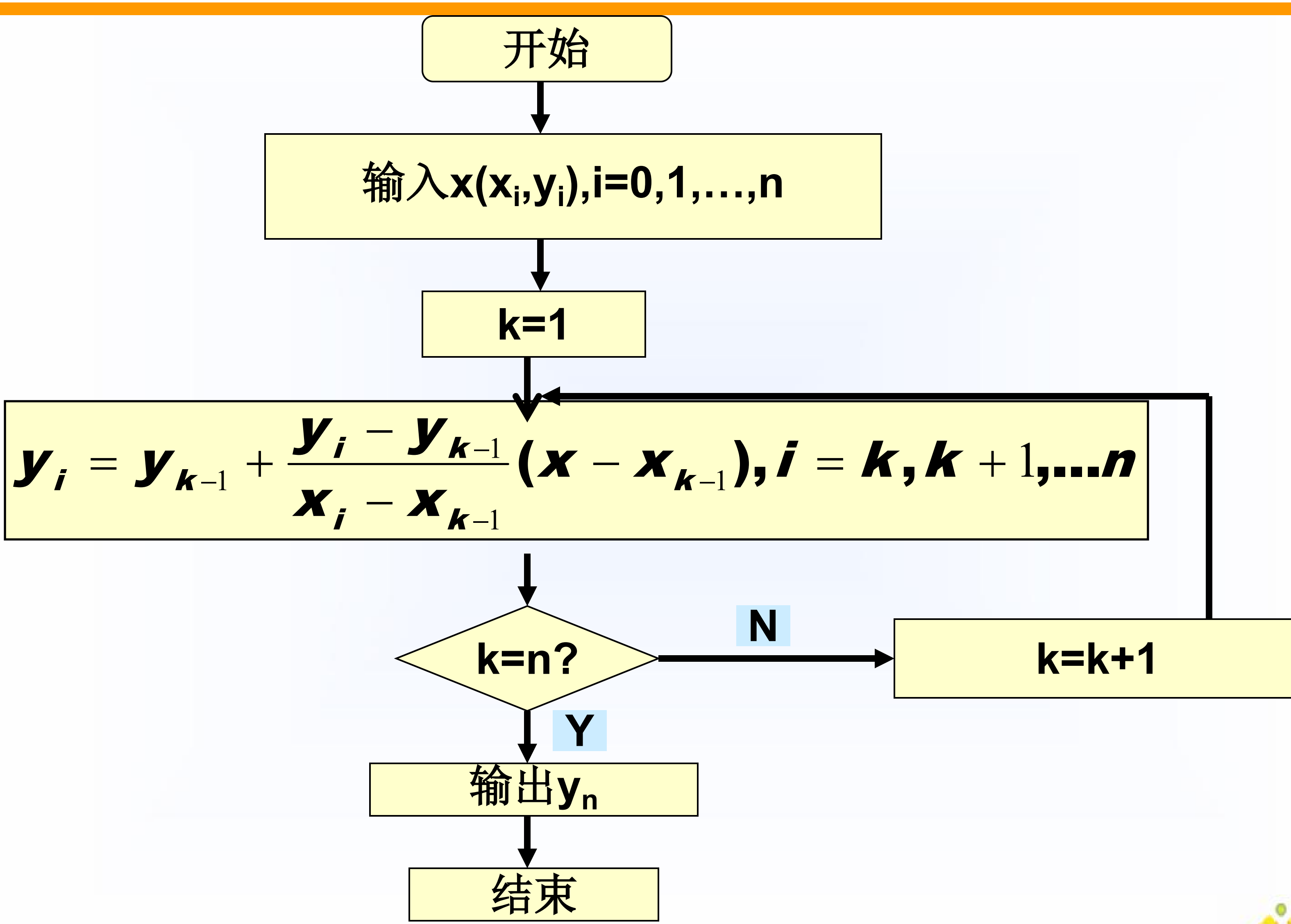
埃特金逐步插值法：
逐步提高次数
一个高次插值过程归结为线性插值的多次重复



埃特金算法的特点：

- 1、逐步提高次数
- 2、将一个高次插值过程归结为线性插值的多次重复
- 3、插值表中的每个数均可视为结果，且从这些数据的一致性即可判断插值结果的精度
- 4、可根据结果的精度判断是否增加插值节点

埃特金算法的流程：



开始
输入x(x_i,y_i),i=0,1,…,n
k=1
$y_i = y_{k-1} + \frac{y_i - y_{k-1}}{x_i - x_{k-1}}(x - x_{k-1}), i = k, k+1, \ldots n$
k=n?
N
k=k+1
Y
输出y_n
结束

例5：利用下表左部给出的数据求正弦积分$f(x) = -\int_x^{\infty} \frac{\sin t}{t} dt$在$x = 0.462$的值

x_i	$f(x_i)$	$f_1(x_i)$	$f_2(x_i)$	$f_3(x_i)$
0.3	0.29850			
0.4	0.39646	0.457915		
0.5	0.49311	0.456134	0.456537	
0.6	0.58813	0.454900	0.456484	0.456557
0.7	0.68122	0.453502	0.456432	0.456557

第 1 章　插值方法

1.4 埃特金算法

1.5 牛顿插值法

1.6 埃尔米特插值

1.5 牛顿插值公式

提出的原因：

1. 拉格朗日插值每增加一个新点都要重新计算插值公式。
2. 埃特金算法虽具有承袭性，但算法是递推型的，不便于进行理论上的分析
3. 牛顿公式具有承袭性并且理论推导严密

$$p_n = p_m + g(x)$$

1.5 牛顿插值公式

1、具有承袭性的插值公式

考察线性插值的插值公式：

$$p_1(x)=f(x_0)+\frac{f(x_1)-f(x_0)}{x_1-x_0}(x-x_0)$$

将$p_0(x)=f(x_0)$看作是零次插值多项式，则有

$p_1(x)=p_0(x)+c_1(x-x_0)$

其中，修正的系数$c_1=\dfrac{f(x_1)-f(x_0)}{x_1-x_0}$

进一步修正，令$p_2(x)=p_1(x)+c_2(x-x_0)(x-x_1)$,用$p_2(x_2)=f(x_2)$来确定$c_2$,

结果：$c_2=\dfrac{\dfrac{f(x_2)-f(x_0)}{x_2-x_0}-\dfrac{f(x_1)-f(x_0)}{x_1-x_0}}{x_2-x_1}$

记$c_0=f(x_0)$,于是有：

$$p_2(x)=c_0+c_1(x-x_0)+c_2(x-x_0)(x-x_1)$$

$$=f(x_0)+\frac{f(x_1)-f(x_0)}{x_1-x_0}(x-x_0)+$$

$$\frac{\dfrac{f(x_2)-f(x_0)}{x_2-x_0}-\dfrac{f(x_1)-f(x_0)}{x_1-x_0}}{x_2-x_1}(x-x_0)(x-x_1)$$

以上表明：为了建立具有承袭性的插值公式，需要引进差商并研究其性质。

2、差商定义及性质

1.差商定义 $$f[x_i,x_j]=\frac{f(x_j)-f(x_i)}{x_j-x_i},\ i\neq j$$

称为 $f(x)$ 在 x_i,x_j 两点处的一阶差商.

$$f[x_0,x_1,x_2]=\frac{f[x_1,x_2]-f[x_0,x_1]}{x_2-x_0}$$

为二阶差商.

$$f[x_0,x_1,\cdots,x_{n-1},x_n]=\frac{f[x_1,x_2,\cdots,x_n]-f[x_0,x_1,\cdots,x_{n-1}]}{x_n-x_0}$$

为n阶差商.

特点：具有鲜明的承袭性

补充定义：$f(x_i)$为零阶差商

2、差商定义及性质

差商表

由差商定义可知：高阶差商是两个低一阶差商的差商

x_i	$f[x_i]$	$f[x_i,x_{i+1}]$	$f[x_i,x_{i+1},x_{i+2}]$	$f[x_i,x_{i+1},x_{i+2}]$
x_0	$f(x_0)$			
x_1	$f(x_1)$	$f[x_0,x_1]$		
x_2	$f(x_2)$	$f[x_1,x_2]$	$f[x_0,x_1,x_2]$	
x_3	$f(x_3)$	$f[x_2,x_3]$	$f[x_1,x_2,x_3]$	$f[x_0,x_1,x_2,x_3]$
…	…		…	

$$\frac{f[x_1,x_2]-f[x_0,x_1]}{x_2-x_0}$$

x_n $f(x_n)$ $f[x_{n-1},x_n]$ $f[x_{n-2},x_{n-1},x_n]$ $f[x_1,\dots,x_{n-1}]$ $f[x_0,\dots,x_n]$

将差商用离散的函数值来表示：

$$f(x_0,x_1)=\frac{f(x_1)-f(x_0)}{x_1-x_0}=\frac{f(x_0)}{x_0-x_1}+\frac{f(x_1)}{x_1-x_0}$$

$$f(x_0,x_1,x_2)=\frac{f(x_1,x_2)-f(x_0,x_1)}{x_2-x_0}$$

$$=\frac{1}{x_2-x_0}\left[\left(\frac{f(x_1)}{x_1-x_2}+\frac{f(x_2)}{x_2-x_1}\right)-\left(\frac{f(x_0)}{x_0-x_1}+\frac{f(x_1)}{x_1-x_0}\right)\right]$$

$$=\frac{f(x_0)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)}+\frac{f(x_1)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)}+\frac{f(x_2)}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)}$$

$$f(x_0,x_1,\dots,x_n)=\sum_{k=0}^{n}\frac{f(x_k)}{\prod\limits_{\substack{j=0\\ j\neq k}}^{n}(x_k-x_j)}$$

调换两个节点，不影响差商的值

即：差商具有对称性

差商的性质

(1) k阶差商 $f[x_0,x_1,\cdots x_n]$ 是函数值 $f(x_0),f(x_1)\cdots f(x_n)$ 的线性组合.

注:由性质看到,差商关于定义它的结点是对称的,即k阶差商 $f[x_0,x_1,\cdots x_n]$ 可以随意改变结点次序,而差商值不变.

$$f[x_0,x_1,x_2]=f[x_1,x_2,x_0]=f[x_0,x_2,x_1]=\cdots$$

这个性质可用数学归纳法证明（用Lagrange插值多项式比较最高项系数来得到）

(2) 若$f(x)$在[a,b]内存在n阶导数,且结点$x_0, x_1, \cdots x_n \in [a,b]$ 则n阶差商与导数关系

$$f[x_0, x_1 \cdots x_n] = \frac{f^{(n)}(\xi)}{n!}, \quad \xi \in [a,b]$$

(3)若 $f(x)$ 是一个m次代数多项式,则

$$f[x_0, x_1 \cdots x_n, x] = \begin{cases} m-n-1 \text{ 次多项式，} & n < m-1, \\ a_m, & n = m-1 \\ 0, & n > m-1 \end{cases}$$

其中 a_m 为 $f(x)$ 的首项系数

（4）若 $f(x)$是n次多项式, $f[x, x_0, x_1, \ldots, x_n]$ 恒为0

二、Newton插值公式

由差商定义

$$\forall x \in [a,b]$$

$$f(x) = f(x_0) + f[x, x_0](x - x_0)$$

$$f[x_0, x] = f[x_1, x_0] + f[x_0, x_1, x](x - x_1)$$

$$f[x_0, x_1, x] = f[x_0, x_1, x_2] + f[x_0, x_1, x_2, x](x - x_2)$$

……

$$f[x_0, \cdots, x_{n-1}, x] = f[x_0, x_1, \cdots x_n] + f[x_0, x_1, \cdots x_n, x](x - x_n)$$

把以上各式由后向前代入,可得

$$f(x)$$

$$= \underbrace{f(x_0) + f[x_0, x_1](x - x_0) + f[x_0, x_1, x_2](x - x_0)(x - x_1) + \ldots + f[x_0, x_1, \ldots, x_n](x - x_0)(x - x_1)\ldots(x - x_{n-1})}_{N_n(x)}$$

$$+ \underbrace{f[x_0, x_1, \ldots, x_n, x](x - x_0)(x - x_1)\ldots(x - x_n)}_{R_n(x)}$$

$$N_n(x)=f(x_0)+f[x_0,x_1](x-x_0)+\cdots+f[x_0,x_1,\cdots x_n](x-x_0)\cdots(x-x_{n-1})$$

$$R_n(x)=f(x)-P_n(x)=f[x_0,x_1,\cdots,x_n,x](x-x_0)\cdots(x-x_n)$$

其中$N_n(x)$称为<u>牛顿插值多项式</u>

$R_n(x)$称为<u>牛顿插值余项</u>

如当n=1时,

$f(x) = f(x_0) + (x- x_0)f[x_1,x_0] + (x- x_0)(x-x_1)\ f[x_1,x_0,x]$

$N_n(x)= f(x_0) + (x- x_0)f[x_1,x_0]$

$$= y_0 + \frac{y_0 - y_1}{x_0 - x_1}(x - x_0)$$

$$N_n(x)=f(x_0)+(x-x_0)f[x_1,x_0]+(x-x_0)(x-x_1)f[x_2,x_1,x_0]$$

$$+\ldots+(x-x_0)(x-x_1)\ldots(x-x_{n-1})f[x_n,x_{n-1},\ldots,x_0]$$

x_i	$f[x_i]$	$f[x_i,x_{i+1}]$	$f[x_i,x_{i+1},x_{i+2}]$	$f[x_i,x_{i+1},x_{i+2}]$
x_0	$f(x_0)$			
x_1	$f(x_1)$	$f[x_0,x_1]$		
x_2	$f(x_2)$	$f[x_1,x_2]$	$f[x_0,x_1,x_2]$	
x_3	$f(x_3)$	$f[x_2,x_3]$	$f[x_1,x_2,x_3]$	$f[x_0,x_1,x_2,x_3]$
…	…		…	…

例:已知

x	1	2	3	4
y	0	-5	-6	3

求满足以上插值条件的牛顿型插值多项式。

解:

x_i	$f(x_i)$	一阶差商	二阶差商	三阶差商
1	0			
2	-5	-5		
3	-6	-1	2	
4	3	9	5	1

由上述差商表对角线上取得的值

$$f(x_0)=0, \qquad f[x_0,x_1]=-5,$$

$$f[x_0,x_1,x_2]=2, \quad f[x_0,x_1,x_2,x_3]=1,$$

则牛顿三次插值多项式为

$$N(x) = 0 - 5(x-1) + 2(x-1)(x-2)$$

$$+(x-1)(x-2)(x-3)$$

$$= x^3 - 4x^2 + 3$$

练习：已知函数y=f(x)的数据如下表

i	0	1	2	3
X_i	0	1	2	3
$y_i=f(x_i)$	1	3	9	27

试用Newton插值公式作一个三次多项式$N_3(x)$，利用$N_3(x)$计算 $\sqrt{3}$

解：利用Newton插值公式：

$$N_3(x) = f(x_0) + f[x_0,x_1](x-x_0) + f[x_0,x_1,x_2](x-x_0)(x-x_1)$$
$$+ f[x_0,x_1,x_2,x_3](x-x_0)(x-x_1)(x-x2)$$

k	x_k	$f(x_k)$	差商		
			$f[x_k,x_{k+1}]$	$f[x_k,x_{k+1},x_{k+2}]$	$f[x_k,x_{k+1},x_{k+2}, x_{k+3}]$
0	0	1			
1	1	3	2		
2	2	9	6	2	
3	3	27	18	6	4/3

$$p_3(x) = N_3(x) = 1 + 2x + 2x(x-1) + \frac{4}{3}x(x-1)(x-2)$$
$$= \frac{4}{3}x^3 - 2x^2 + \frac{8}{3}x + 1$$

由差商表知：$f(x) = 3^x$，而$\sqrt{3} = 3^{\frac{1}{2}}$，令$x = \frac{1}{2}$，即得

$$\sqrt{3} \approx p_3(\frac{1}{2}) = \frac{4}{3} \times (\frac{1}{2})^3 - 2 \times (\frac{1}{2})^2 + \frac{8}{3} \times \frac{1}{2} + 1 = 2$$

定理4：

在节点 $x_0, x_1, \ldots, x_n$ 所界定的范围 Δ：$[\min\limits_{0\le i\le n} x_i, \max\limits_{0\le i\le n} x_i]$ 内存在一点ξ，使成立：

$$f(x_0, x_1, \ldots, x_n) = \frac{f^{(n)}(\xi)}{n!}$$

证： 因为：

$$R(x_n) = f(x_0, x_1, \ldots, x_{n-1}, x_n)(x_n - x_0)(x_n - x_1)\ldots(x_n - x_{n-1})$$

由拉格朗日余项定理知：必有 $\xi \in [\min\limits_{0\le i\le n} x_i, \max\limits_{0\le i\le n} x_i]$

使得：
$$f(x_n) - p_{n-1}(x_n) = \frac{f^{(n)}(\xi)}{n!}\prod_{k=0}^{n-1}(x_n - x_k)$$

所以
$$f(x_0, x_1, \ldots, x_{n-1}, x_n)(x_n - x_0)(x_n - x_1)\ldots(x_n - x_{n-1}) = \frac{f^{(n)}(\xi)}{n!}\prod_{k=0}^{n-1}(x_n - x_k)$$

故：
$$f(x_0, x_1, \ldots, x_n) = \frac{f^{(n)}(\xi)}{n!}$$

例： 设 $f(x)=x^7+5x^3+1$,求差商 $f[2^0,2^1],f[2^0,2^1,2^2]$

$f(2^0,2^1,\cdots,2^7),f(2^0,2^1,\cdots,2^7,2^8)$

解： f(1)=7，f(2)=169，f(4)=16705

$$f(2^0,2^1)=\frac{f(2)-f(1)}{2-1}=169-7=162$$

$$f(2^1,2^2)=\frac{f(4)-f(2)}{4-2}=\frac{16705-169}{2}=8268$$

$$f(2^0,2^1,2^2)=\frac{f(2^1,2^2)-f(2^0,2^1)}{2^2-2^0}=\frac{8268-162}{4-1}=2702$$

$$f(2^0,2^1,2^2,\cdots,2^7)=\frac{f^{(7)}(\xi)}{7!}=\frac{7!}{7!}=1$$

$$f(2^0,2^1,2^2,\cdots,2^8)=\frac{f^{(8)}(\xi)}{8!}=\frac{0}{8!}=0$$

三.拉格朗日插值与牛顿插值的比较

(1) $L_n(x)$ 与 $N_n(x)$均是*n*次多项式,且均满足插值条件:

$$L_n(x_k)=N_n(x_k)=f(x_k),\ \ k=0,1,\cdots,n$$

由插值多项式的唯一性, $L_n(x)\equiv N_n(x)$,因而,两个公式的余项是相等的,即

$$f[x_0,x_1,\cdots,x_n,x]\omega_n(x)=\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}\omega_n(x)$$

则可知n 阶差商与导数的关系如下：

$$f[x_0,x_1,\cdots,x_n]=\frac{f^{(n)}(\xi)}{n!},\quad \xi\in[a,b]$$

（2）当插值多项式从 $n-1$ 次增加到n 次时，拉格朗日型插值必须重新计算所有的插值基函数；而对于牛顿型插值，只需用表格再计算一个n 阶差商，然后加上一项即可。

（3）牛顿型插值余项公式对是由离散点给出或导数不存在时均适用。

4、差分形式的插值公式(差分与等距结点插值)

在实际应用Newton插值多项式时，经常遇到插值节点是等距的，即n+1个插值节点：$x_i = x_0 + ih\ (i = 1,2, \ldots ,n)$

这里间距 h 为定数，称为**步长**，于是在差商中，分母部分将变得简单，计算量主要集中在分子（两节点处函数值的差）。

定义： 设函数f(x)在等距节点 $x_i = x_0 + ih\ (i = 1,2, \ldots ,n)$

上的值为：$f(x_i) = y_i\ (i = 1,2, \ldots ,n)$

则称：$\Delta y_i = y_{i+1} - y_i$ 为 f(x)在 $x = x_i$ 处一阶差分

称：$\Delta^2 y_i = \Delta y_{i+1} - \Delta y_i$ 为 f(x)在 $x = x_i$ 处二阶差分

称：$\Delta^n y_i = \Delta^{n-1} y_{i+1} - \Delta^{n-1} y_i$ 为 f(x)在 $x = x_i$ 处n 阶差分

依据所给数据 y_i 可以逐步求出它的各阶差分，而生成如下形式的**差分表**：

x_i	y_i	一阶差分	二阶差分	三阶差分	$\cdots$
x_0	y_0				
x_1	y_1	Δy_0			
x_2	y_2	Δy_1	$\Delta^2 y_0$		
x_3	y_3	Δy_2	$\Delta^2 y_1$	$\Delta^3 y_0$	
$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$

例：给定 $f(x)=\cos x$ 的函数表如下：

k	0	1	2	3	4	5	6
x_k	0	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6
$f(x_k)$	1	0.995	0.98007	0.95534	0.92106	0.87758	0.82534

0	1			
0.1	0.995	$\Delta y_0=-0.005$		
0.2	0.98007	$\Delta y_1=-0.01493$	$\Delta^2 y_0=-0.00993$	
0.3	0.95534	$\Delta y_2=-0.02473$	$\Delta^2 y_1=-0.0098$	$\Delta^3 y_0=0.00013$
0.4	0.92106	$\Delta y_3=-0.03428$	$\Delta^2 y_2=-0.00955$	$\Delta^3 y_1=0.00025$
0.5	0.87758	$\Delta y_4=-0.04348$	$\Delta^2 y_3=-0.0092$	$\Delta^3 y_2=0.00035$
0.6	0.82534	$\Delta y_5=-0.05224$	$\Delta^2 y_4=-0.00876$	$\Delta^3 y_3=0.00044$

在节点等距的情况下，差商可用差分来表示。

设步长 $h = x_{i+1} - x_i$

有 $f(x_i, x_{i+1}) = \dfrac{f(x_{i+1}) - f(x_i)}{x_{i+1} - x_i} = \dfrac{1}{h}\Delta y_i$

$$f(x_i, x_{i+1}, x_{i+2}) = \frac{f(x_{i+1}, x_{i+2}) - f(x_i, x_{i+1})}{x_{i+2} - x_i}$$

$$= \frac{1}{2h^2}(\Delta y_{i+1} - \Delta y_i) = \frac{1}{2h^2}\Delta^2 y_i$$

$$f(x_i, x_{i+1}, \cdots, x_{i+k}) = \frac{1}{k!\,h^k}\Delta^k y_i$$

这样，对于等距节点的情况，将牛顿插值公式中的差商换成相应的差分。

令： $x = x_0 + th$

则： $x - x_k = (t - k)h \quad k = 0,1,2, \ldots ,n$

于是，牛顿插值公式中的一般项

$$f(x_0, x_1, \ldots, x_k)\prod_{j=0}^{k-1}(x - x_j) = \frac{\Delta^k y_0}{k!\,h^k} t(t-1)(t-2)\ldots(t-k+1)h^k$$

$$= \frac{\Delta^k y_0}{k!}\prod_{j=0}^{k-1}(t-j)$$

则 $$p_n(x_0 + th) = y_0 + \sum_{k=1}^{n}\frac{\Delta^k y_0}{k!}\prod_{j=0}^{k-1}(t-j)$$

称此公式为函数插值的**有限差分公式**

例： 已知函数 y=sin x 的如下函数值表，利用插值法计算 Sin(0.42351) 的近似值。

x	0.4	0.5	0.6
Sin x	0.38942	0.47943	0.56464

解： 因为节点是等距分布的，可以使用牛顿插值公式

取 $x_0 = 0.4, h = 0.1, t = \dfrac{x - x_0}{h} = \dfrac{0.42351 - 0.4}{0.1} = 0.2351$

建立如下差分表

x	Sin(x)	一阶差分	二阶差分
0.4	0.38942		
0.5	0.47943	0.09001	
0.6	0.56464	0.08521	-0.00480

利用插值公式

$$p_2(x_0+th)=f(x_0)+\frac{\Delta f(x_0)}{1!}+\frac{\Delta^2 f(x_0)}{2!}t(t-1)$$

有：

$$\sin(0.42351)\approx p_2(0.42351)$$

$$=0.38942+0.09001\times 0.2351-\frac{0.00480}{2}\times 0.2351\times(0.2351-1)$$

$$=0.41101$$

差分的性质

(1) 各阶差分均可用函数值表示.

(2) 可用各阶差分表示函数值.

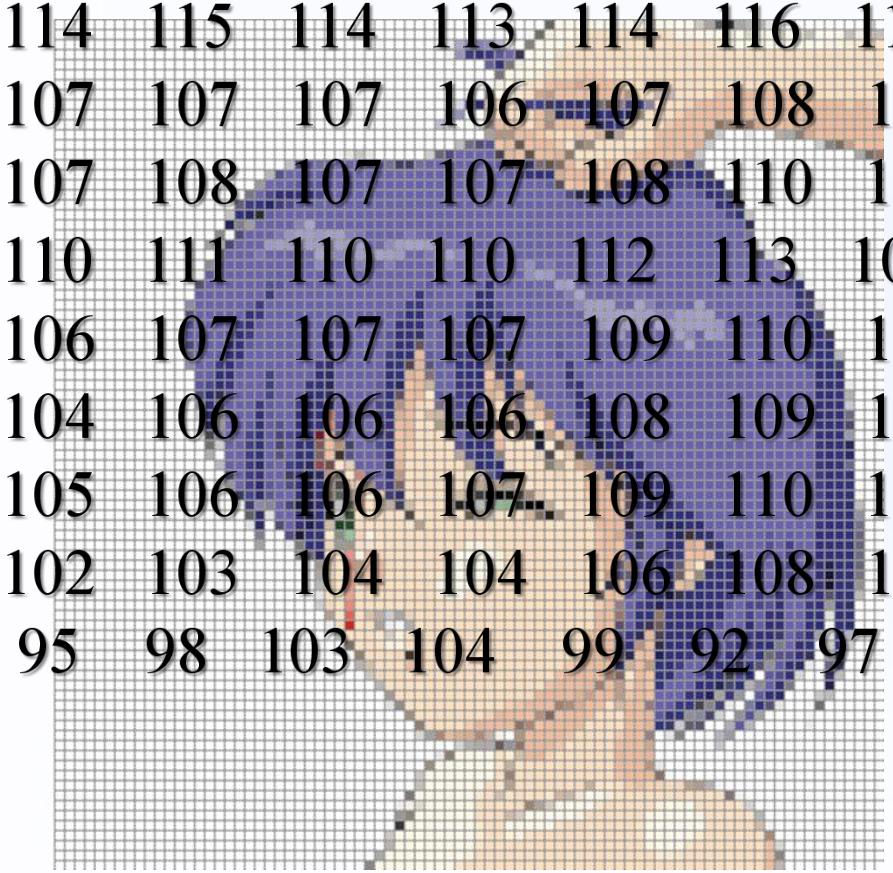
(3) 在等距结点情形有n阶差分与导数的关系:

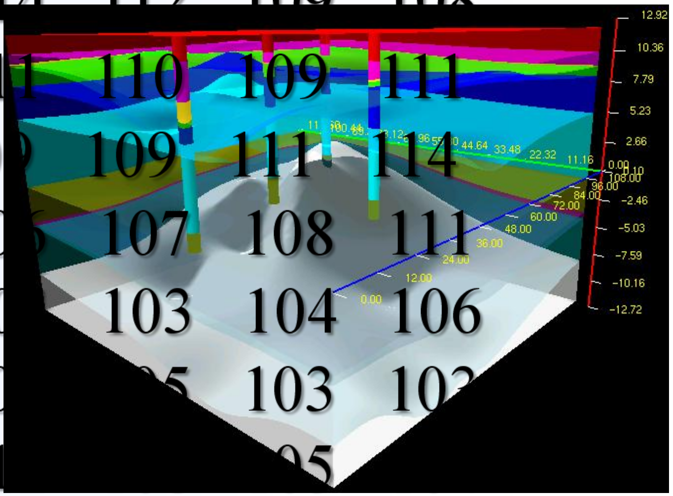
$$f^{(n)}(\xi) = \frac{\Delta^n f(x_k)}{h^n}, \quad \xi \in [x_k, x_{k+n}]$$

(4)若 $f(x)$ 是一个m次代数多项式,则

$$\Delta^k f = \begin{cases} m-k \text{ 次多项式}, & k < m, \\ \text{常数}, & k = m, \\ 0, & k > m, \end{cases}$$

实际应用例子：图像、图像缩放、重建





114 115 114 113 114 116 117 114 109 107
107 107 107 106 107 108 114 112 109 108
107 108 107 107 108 110 111 110 109 111
110 111 110 110 112 113 10[illegible] 109 111 114
106 107 107 107 109 110 10[illegible] 107 108 111
104 106 106 106 108 109 10[illegible] 103 104 106
105 106 106 107 109 110 10[illegible] [illegible]5 103 10[illegible]
102 103 104 104 106 108 11[illegible] [illegible] [illegible]05
95 98 103 104 99 92 97 96 95 96 97

第 1 章　插值方法

1.4 埃特金算法
1.5 牛顿插值法
1.6 埃尔米特插值

1.6 埃尔米特（Hermite）插值

在某些问题中，为了保证插值函数能更好地密合原来的函数，不但要求“过点”，即两者在节点上具有相同的函数值，而且要求“相切”，即在节点上还具有相同的导数值，这类插值称之为切触插值，或称为埃尔米特（Hermite）插值，这是泰勒插值和拉格朗日插值的综合和推广。

一、回忆

1、泰勒插值，特点：多项式；插值条件：

$$p_n^{(i)}(x_i) = y_i^{(i)}$$

2、拉格朗日插值，特点：多项式；插值条件：

$$p_n(x_i) = y_i$$

二、Hermite插值

1、二次插值

可能有的插值条件

条件1:

$$p_2(x_0) = y_0, p_2'(x_0) = y_0', p_2(x_1) = y_1$$

条件2:

$$p_2(x_0)=y_0, p_2'(x_1)=y_1', p_2(x_1)=y_1$$

2、问题5：求作二次多项式，满足

$$p_2(x_0)=y_0, p_2'(x_0)=y_0', p_2(x_1)=y_1$$

设用这一插值函数 $p_2(x)$ 逼近某个取值为 $f(x_0)=y_0$ $f'(x_0)=y_0', f(x_1)=y_1$ 的函数 $f(x)$，那么，从图形上看，曲线 $y=p_2(x)$ 与 $y=f(x)$ 不但有两个交点 (x_0,y_0)，(x_1,y_1)，而且在点(x_0,y_0)处两者还相切。

3、问题5的求解

法1：基于承袭性方法

条件为

$$p_2(x_0)=y_0, p_2'(x_0)=y_0', p_2(x_1)=y_1$$

如何确定c?

$$p_2(x)=p_1(x)+c(x-x_0)(x-x_1)$$

线性Lagrange插值多项式

$$=y_0+\frac{y_1-y_0}{x_1-x_0}(x-x_0)$$

$$+\frac{1}{x_1-x_0}\left(\frac{y_1-y_0}{x_1-x_0}-y_0'\right)(x-x_0)(x-x_1)$$

法2：用基函数方法，取下列插值函数

$$p_2(x) = y_0\varphi_0(x) + y_1\varphi_1(x) + y'_0\,\phi_0(x)$$

其中$\varphi_0(x),\varphi_1(x),\phi_0(x)$是二次函数，满足下列条件：

$$\begin{cases} \varphi_0(0)=1, \varphi_0(1) \ = \varphi_0'(0)=0 \\ \varphi_1(1)=1, \varphi_1(0) \ = \varphi_1'(1)=0 \\ \phi_0'(0)=1, \phi_0(0) \ = \phi_0(1)=0 \end{cases}$$

两点三次Hermite插值

如果插值节点为0，1的基函数为：

$$\begin{cases} \varphi_0(x) = 1 - x^2 \\ \varphi_1(x) = 2x - x^2 \\ \phi_1(x) = x(1-x) \end{cases}$$

类似地, 有任意点时的插值公式，其中如果插值节点为 x_0, x_1 的基函数为：

$$p_2(x) = y_0\varphi_0\left(\frac{x-x_0}{h}\right) + y_1\varphi_1\left(\frac{x-x_0}{h}\right) + hy'_0\,\phi_0\left(\frac{x-x_0}{h}\right)$$

注意：通过如下变换可得到上述插值公式。

$$[x_0, x_1] \xrightarrow{\text{变换}} [0,1]$$

$$t = \frac{x-x_0}{h}, h = x_1 - x_0$$

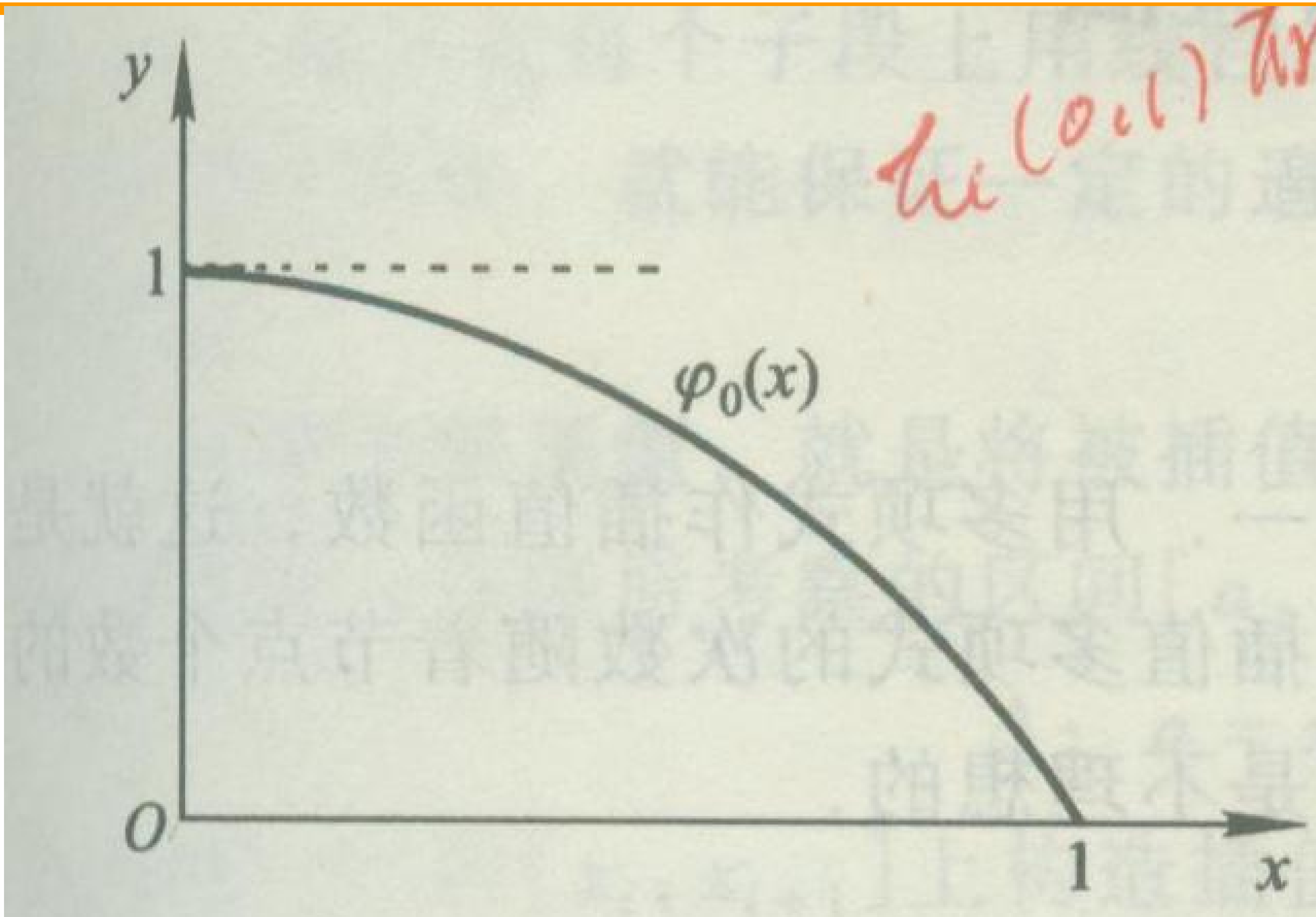
问题：如何画出这些基函数的图形？

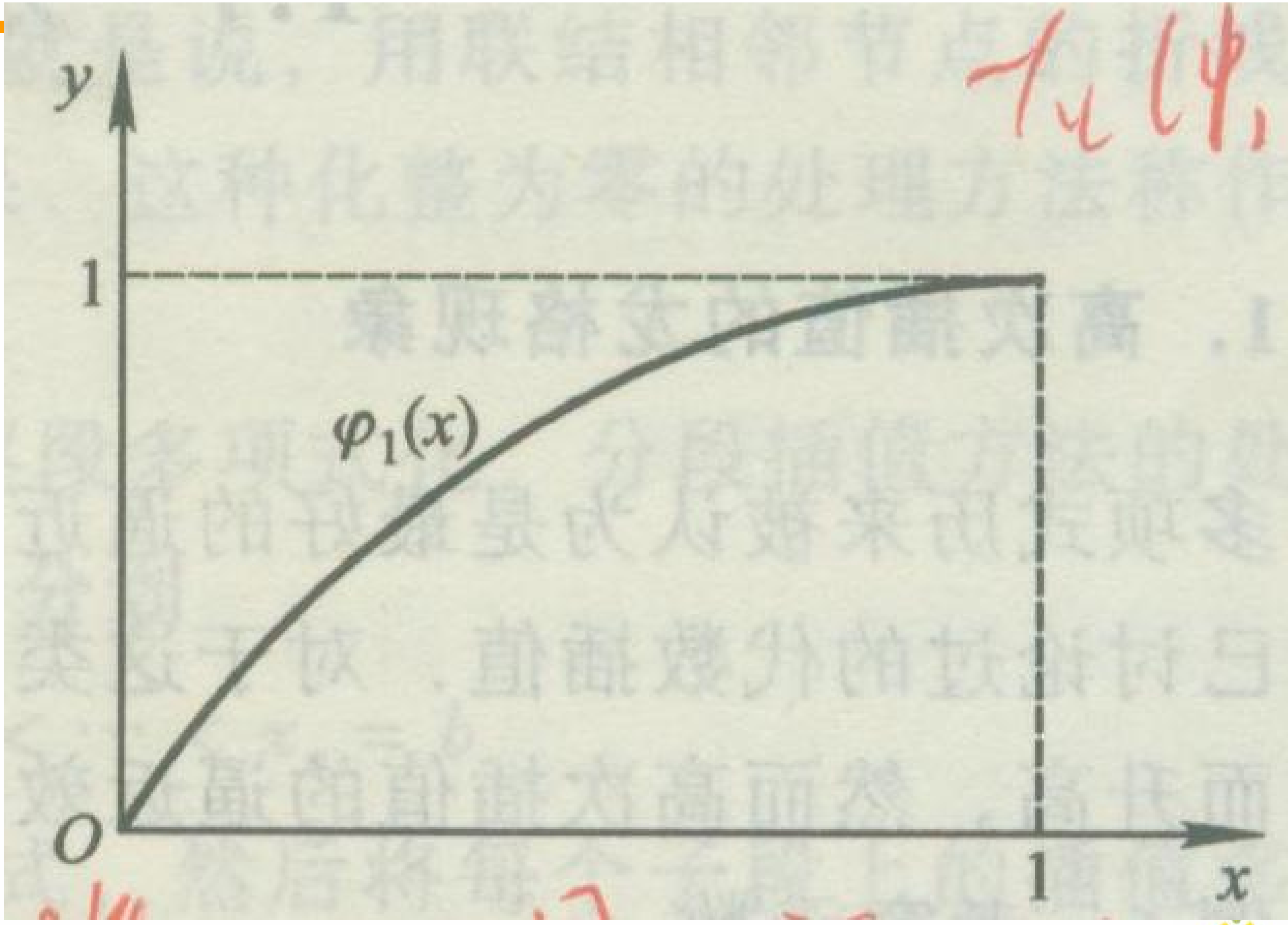
抓住在节点“过点”和”相切”的特点!

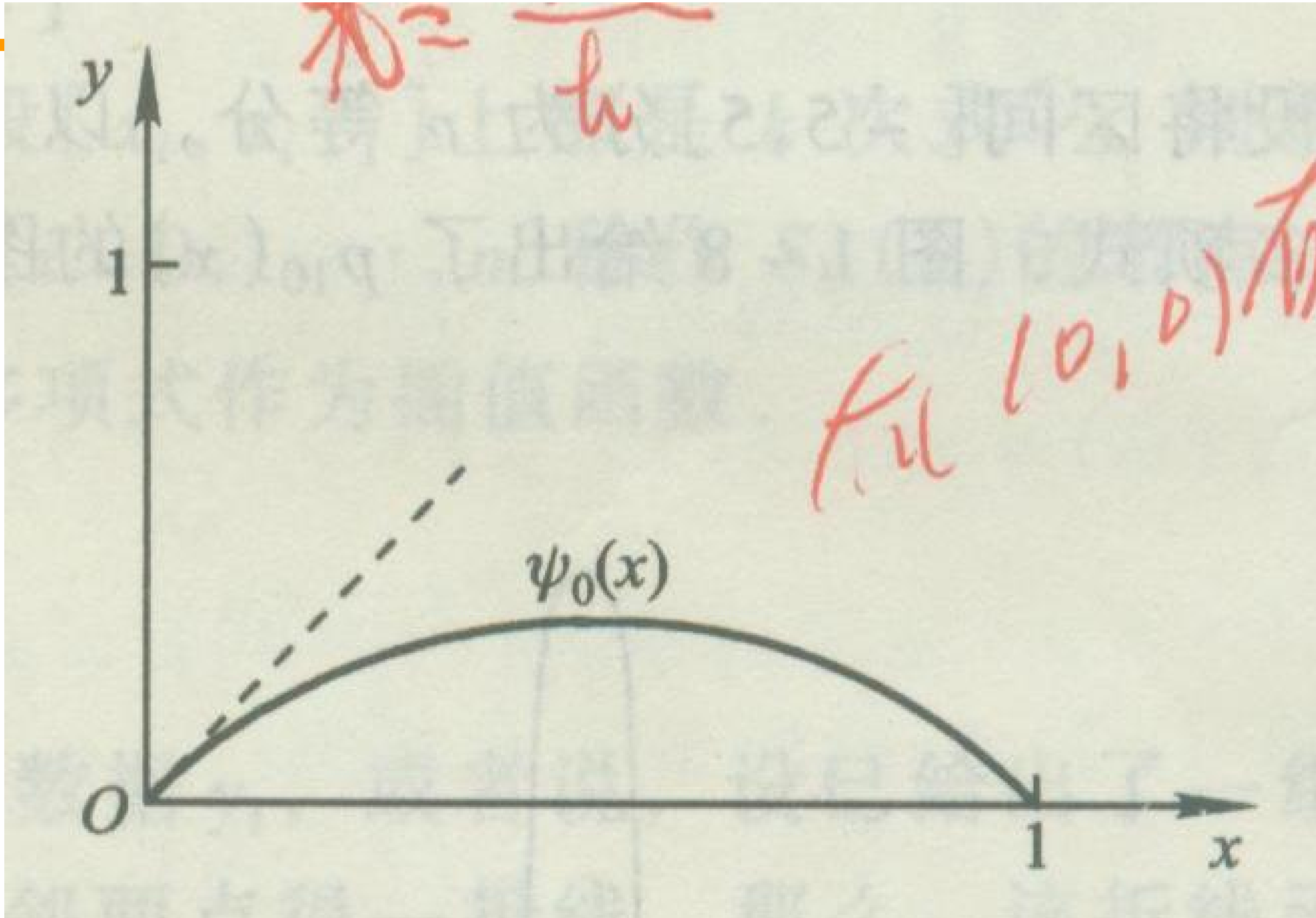
要求：

节点处函数值相等

节点处导数值相等


y
1
$\varphi_0(x)$
O
1
x


y
1
$\varphi_1(x)$
O
1
x


y
1
$\psi_0(x)$
O
1
x

4、高次插值

仿照上述类似地求其插值多项式！

问题6：求作三次式 $p_3(x)$满足插值条件

$$p_3(x_0)=y_0 \qquad p_3(x_1)=y_1$$

$$p_3'(x_0)=y_0' \qquad p_3'(x_1)=y_1'$$

$p_3(x)$应用四个插值基函数表示　记$h=x_1-x_0$

设$p_3(x)$的插值基函数为　$\varphi_i(x),\psi_i(x),i=0,1$

$$p_3(x)=y_0\varphi_0(\frac{x-x_0}{h})+y_1\varphi_1(\frac{x-x_0}{h})+hy_0'\psi_0(\frac{x-x_0}{h})+hy_1'\psi_1(\frac{x-x_0}{h}) \tag{28}$$

希望插值系数与Lagrange插值一样简单

其中 $\varphi_0(x), \varphi_1(x), \psi_0(x), \psi_1(x)$ 均为代数多项式，且

$$\begin{cases}\partial\varphi_0(x)\le 3\\ \varphi_0(x_0)=1\\ \varphi_0(x_1)=0\\ \varphi_0'(x_0)=0\\ \varphi_0'(x_1)=0\end{cases},\quad \begin{cases}\partial\varphi_1(x)\le 3\\ \varphi_1(x_0)=0\\ \varphi_1(x_1)=1\\ \varphi_1'(x_0)=0\\ \varphi_1'(x_1)=0\end{cases},\quad \begin{cases}\partial\psi_0(x)\le 3\\ \psi_0(x_0)=0\\ \psi_0(x_1)=0\\ \psi_0'(x_0)=1\\ \psi_0'(x_1)=0\end{cases},\quad \begin{cases}\partial\psi_1(x)\le 3\\ \psi_1(x_0)=0\\ \psi_1(x_1)=0\\ \psi_1'(x_0)=0\\ \psi_1'(x_1)=1\end{cases}$$

可知 x_1是$\varphi_0(x)$的二重零点,即可假设

$$\varphi_0(x) = (x - x_1)^2(ax + b)$$

由 $\varphi_0(x_0)=1 \qquad \varphi_0'(x_0)=0$

可得 $a=-\dfrac{2}{(x_0-x_1)^3}$ $b=\dfrac{1}{(x_0-x_1)^2}+\dfrac{2x_0}{(x_0-x_1)^3}$

$$\varphi_0(x)=(x-x_1)^2(ax+b)$$

$$=(x-x_1)^2\left(-\frac{2x}{(x_0-x_1)^3}+\frac{1}{(x_0-x_1)^2}+\frac{2x_0}{(x_0-x_1)^3}\right)$$

$$=\frac{(x-x_1)^2}{(x_0-x_1)^2}\left(1+\frac{2x_0}{x_0-x_1}-\frac{2x}{x_0-x_1}\right)$$

Lagrange
插值基函数

$$=\left(1+2\frac{x-x_0}{x_1-x_0}\right)\left(\frac{x-x_1}{x_0-x_1}\right)^2=(1+2l_1(x))\cdot l_0^2(x)$$

即 $$\varphi_0(x) = (1+2l_1(x))\cdot l_0^2(x) = \left(1+2\frac{x-x_0}{x_1-x_0}\right)\left(\frac{x-x_1}{x_0-x_1}\right)^2$$

类似可得

$$\varphi_1(x) = (1+2l_0(x))\cdot l_1^2(x) = \left(1+2\frac{x-x_1}{x_0-x_1}\right)\left(\frac{x-x_0}{x_1-x_0}\right)^2$$

$$\psi_0(x) = (x-x_0)\cdot l_0^2(x) = (x-x_0)\left(\frac{x-x_1}{x_0-x_1}\right)^2$$

$$\psi_1(x) = (x-x_1)\cdot l_1^2(x) = (x-x_1)\left(\frac{x-x_0}{x_1-x_0}\right)^2$$

如果插值节点为0，1的基函数为：

$$\varphi_0(x)=\left(1+2\frac{x-x_0}{x_1-x_0}\right)\left(\frac{x-x_1}{x_0-x_1}\right)^2=(x-1)^2(2x+1)$$

$$\varphi_1(x)=\left(1+2\frac{x-x_1}{x_0-x_1}\right)\left(\frac{x-x_0}{x_1-x_0}\right)^2=x^2(-2x+3)$$

$$\psi_0(x)=(x-x_0)\left(\frac{x-x_1}{x_0-x_1}\right)^2=x(x-1)^2$$

$$\psi_1(x)=(x-x_1)\left(\frac{x-x_0}{x_1-x_0}\right)^2=x^2(x-x_1) \qquad (29)$$

5、Hermite插值余项

$$f(x)-p_2(x)=\frac{f'''(\xi_1)}{3!}(x-x_0)^2(x-x_1)$$

$$f(x)-p_3(x)=\frac{f^{(4)}(\xi_2)}{4!}(x-x_0)^2(x-x_1)^2$$

(30)

小 结

- 在节点一定的条件下，可以多种构造插值条件；
- 埃尔米特插值具有少节点得到高次插值多项式的特点；
- 插值多项式灵活多样；
- 构造插值多项式的过程：注意算法的承袭性，并使用Lagrange插值多项式和待定系数。

练习：P56　22