2018～201 9 学年第二学期《线性代数》试卷（A）评分细则

一、填空题（每小题 4 分，共 20 分）

1. 625　　2. $\dfrac{2E-A}{5}$　　3. **1**　　4. $(1,2,3,4)^T+c(2,3,4,5)$　　5. **2**

二、选择题（每小题 4 分，共 20 分）

1. (D)　　2. (B)　　3. (D)　　4. (D)　　5. (A)

三、（8 分）解：$D=(\lambda+1)\begin{vmatrix}\lambda & -1 & 0\\ 0 & \lambda & -1\\ 0 & 0 & \lambda\end{vmatrix}+(-1)\cdot(-1)^7\begin{vmatrix}\lambda & -1 & 0\\ 0 & \lambda & -1\\ 4 & 3 & 2\end{vmatrix}$

$$=(\lambda+1)\cdot\lambda^3+2\lambda^2+4+3\lambda$$

$$=\lambda^4+\lambda^3+2\lambda^2+3\lambda+4$$

四、（**10 分**） 解：由已知有 $\boldsymbol{A}^2-\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{E}$．因为 $|\boldsymbol{A}|=-1$，知 $\boldsymbol{A}$ 可逆，于是 $\boldsymbol{B}=\boldsymbol{A}-\boldsymbol{A}^{-1}$

又 $A^{-1}=\begin{pmatrix}1 & 1 & -1\\ 0 & 1 & 1\\ 0 & 0 & -1\end{pmatrix}^{-1}=\begin{pmatrix}1 & -1 & -2\\ 0 & 1 & 1\\ 0 & 0 & -1\end{pmatrix}$，从而 $B=\begin{pmatrix}1 & 1 & -1\\ 0 & 1 & 1\\ 0 & 0 & -1\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}1 & -1 & -2\\ 0 & 1 & 1\\ 0 & 0 & -1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0 & 2 & 1\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$．

五、（**12 分**）解：用初等行变换把增广矩阵化为行阶梯形矩阵，

$(A\,|\,b)=\begin{pmatrix}1 & 1 & 1 & 1 & 1\\ 0 & 1 & -1 & 2 & 1\\ 2 & 3 & a+2 & 4 & b+3\\ 3 & 5 & 1 & a+8 & 5\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1 & 1 & 1 & 1 & 1\\ 0 & 1 & -1 & 2 & 1\\ 0 & 0 & a+1 & 0 & b\\ 0 & 0 & 0 & a+1 & 0\end{pmatrix}$，由此可知：

（1）当 $a\neq-1$ 时，$r(A)=r(A\,|\,b)=4$，方程组有唯一解；

（2）当 $a=-1,\ b\neq0$ 时，$r(A)=2,\ r(A\,|\,b)=3$，方程组无解；

（3）当 $a=-1,\ b=0$ 时，$r(A)=r(A\,|\,b)=2$，方程组有无穷多个解.

六、（**14 分**）**解**：（1） A 的特征值为 $\lambda_1=1,\ \lambda_2=\lambda_3=0$；

当 $\lambda_1=1$ 时，$r(A-E)=r\begin{pmatrix}0 & 1 & 1\\ 0 & -1 & 0\\ 0 & 0 & -1\end{pmatrix}=2=3-1$，

当 $\lambda_2=\lambda_3=0$ 时，$r(A)=r\begin{pmatrix}1 & 1 & 1\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}=1=3-2$， 由定理可知， A 可对角化.

(2) 当 $\lambda_1=1$ 时，$A-E=\begin{pmatrix}0 & 1 & 1\\ 0 & -1 & 0\\ 0 & 0 & -1\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$，得 $(A-E)x=0$ 的基础解系，

即线性无关的特征向量 $\alpha_1=(1,0,0)^T$．

当 $\lambda_2=\lambda_3=0$ 时，$A=\begin{pmatrix}1 & 1 & 1\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$， 得 $Ax=0$ 的基础解系，即线性无关的特征向量

$\alpha_2=(-1,1,0)^T$， $\alpha_3=(-1,0,1)^T$．

令 $P=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)=\begin{pmatrix}1 & -1 & -1\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$，则有 $P^{-1}AP=\Lambda=\begin{pmatrix}1 & & \\ & 0 & \\ & & 0\end{pmatrix}$.

七、（**10 分**）证： 因为 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 线性相关，故存在不同时为零的数 k_1,k_2,k_3 使得

$$k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+k_3\alpha_3=0\,.$$

若 $k_3=0$，则因为 α_1,α_2 线性无关，可推出 $k_1=k_2=0$ 矛盾，故 $k_3\neq0$，从而 $\alpha_3=-\dfrac{1}{k_3}(k_1\alpha_1+k_2\alpha_2)$，

即 α_3 由 α_1,α_2 线性表示.

若 $\alpha_3=\lambda_1\alpha_1+\lambda_2\alpha_2$， $\alpha_3=\lambda_1'\alpha_1+\lambda_2'\alpha_2$，两式相减得　$0=(\lambda_1-\lambda_1')\alpha_1+(\lambda_2-\lambda_2')\alpha_2$，

因为 α_1,α_2 线性无关，故 $\lambda_1=\lambda_1',\lambda_2=\lambda_2'$．从而 α_3 由 α_1,α_2 线性表示且表示式唯一.

八、（6 分）证： 必要性：设 $\boldsymbol{B}^T\boldsymbol{AB}$ 为正定矩阵，由定义，$\forall\boldsymbol{x}\neq\boldsymbol{0}$，恒有 $\boldsymbol{x}^T(\boldsymbol{B}^T\boldsymbol{AB})\boldsymbol{x}>0$

即 $\forall\boldsymbol{x}\neq\boldsymbol{0}$，恒有 $(\boldsymbol{Bx})^T\boldsymbol{A}(\boldsymbol{Bx})>0$．即 $\forall\boldsymbol{x}\neq\boldsymbol{0}$，恒有 $\boldsymbol{Bx}\neq\boldsymbol{0}$．因此，齐次线性方程组 $\boldsymbol{Bx}=\boldsymbol{0}$ 只有零解，从而 $r\,(\boldsymbol{B})=n$

充分性：因 $(\boldsymbol{B}^T\boldsymbol{AB})^T=\boldsymbol{B}^T\boldsymbol{A}^T(\boldsymbol{B}^T)^T=\boldsymbol{B}^T\boldsymbol{AB}$，

知 $\boldsymbol{B}^T\boldsymbol{AB}$ 为实对称矩阵，若 $r\,(\boldsymbol{B})=n$，则齐次方程组 $\boldsymbol{Bx}=\boldsymbol{0}$ 只有零解，即对 $\forall\boldsymbol{x}\neq\boldsymbol{0}$ 必有 $\boldsymbol{Bx}\neq\boldsymbol{0}$．又 $\boldsymbol{A}$ 为正定矩阵，所以对于 $Bx\neq0$，恒有 $(\boldsymbol{Bx})^T\boldsymbol{A}(\boldsymbol{Bx})>0$，即当 $\boldsymbol{x}\neq\boldsymbol{0}$ 时， $\boldsymbol{x}^T(\boldsymbol{B}^T\boldsymbol{AB})\boldsymbol{x}>0$，故 $\boldsymbol{B}^T\boldsymbol{AB}$ 为正定矩阵.