2020～2021 学年第二学期《线性代数》试卷（A）答案

一、填空题（每小题 4 分，共 20 分）

1、<u>4</u>；　2、<u>1</u>；　3、<u>3</u>；　4、<u>3</u>；　5、<u>t>2</u>.

二、选择题（每小题 4 分，共 20 分）

1、A；　2、C；　3、D；　4、C；　5、B.

三、(**12分**) 已知四阶行列式 $D=\begin{vmatrix}1&1&1&1\\1&2&3&4\\1&4&9&16\\1&8&27&64\end{vmatrix}$，求 $M_{11}+M_{21}+M_{31}+M_{41}$.

其中 M_{ij} 为 D 的(i,j) 位置元素的余子式.

解: $M_{11}+M_{21}+M_{31}+M_{41}$

$=A_{11}-A_{21}+A_{31}-A_{41}$

$$=\begin{vmatrix}1&1&1&1\\-1&2&3&4\\(-1)^2&2^2&3^2&4^2\\(-1)^3&2^3&3^3&4^3\end{vmatrix}$$

$=(2+1)(3+1)(4+1)(3-2)(4-2)(4-3)$

$=120$

四、(**12分**) n 阶实方阵 $\boldsymbol{A}$ 满足 $\boldsymbol{A}^2+2\boldsymbol{A}-3\boldsymbol{E}=\boldsymbol{O}$.

(1) 证明 $\boldsymbol{A}+2\boldsymbol{E}$ 可逆，并求其逆.

(2) 当 $\boldsymbol{A}\neq\boldsymbol{E}$ 时，判断 $\boldsymbol{A}+3\boldsymbol{E}$ 是否可逆，并给出理由.

(1)证明: 由 $\boldsymbol{A}^2+2\boldsymbol{A}-3\boldsymbol{E}=\boldsymbol{O}$, 可知 $(\boldsymbol{A}+2\boldsymbol{E})\dfrac{\boldsymbol{A}}{3}=\boldsymbol{E}$,

从而 $\boldsymbol{A}+2\boldsymbol{E}$ 可逆，并且 $(\boldsymbol{A}+2\boldsymbol{E})^{-1}=\dfrac{\boldsymbol{A}}{3}$.

(2)解: 由 $\boldsymbol{A}^2+2\boldsymbol{A}-3\boldsymbol{E}=0$, 可知 $(\boldsymbol{A}+3\boldsymbol{E})(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{E})=\boldsymbol{O}$,

从而 $R(\boldsymbol{A}+3\boldsymbol{E})+R(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{E})\le n$

由于 $\boldsymbol{A}\neq\boldsymbol{E}$, 从而 $\boldsymbol{A}-\boldsymbol{E}\neq\boldsymbol{O}$, $R(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{E})\ge 1$

由此可知 $R(\boldsymbol{A}+3\boldsymbol{E})\le n-1$,

从而 $\boldsymbol{A}+3\boldsymbol{E}$ 不可逆.

五、(**10分**) 求向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1=\begin{pmatrix}-5\\1\\1\end{pmatrix}$, $\boldsymbol{\alpha}_2=\begin{pmatrix}2\\-4\\2\end{pmatrix}$, $\boldsymbol{\alpha}_3=\begin{pmatrix}3\\3\\-3\end{pmatrix}$ 的一个极大线性无关组，并将其余向量用该极大无关组线性表示。

解: $(\boldsymbol{\alpha}_1\ \boldsymbol{\alpha}_2\ \boldsymbol{\alpha}_3)=\begin{pmatrix}-5&2&3\\1&-4&3\\1&2&-3\end{pmatrix}$

$\xrightarrow{\text{行初等变换}}\begin{pmatrix}1&0&-1\\0&1&-1\\0&0&0\end{pmatrix}$

极大无关组可取 $\boldsymbol{\alpha}_1$, $\boldsymbol{\alpha}_2$, 此时 $\boldsymbol{\alpha}_3=-\boldsymbol{\alpha}_1-\boldsymbol{\alpha}_2$

六、(**10分**) 解线性方程组 $\begin{cases}x_1+x_2+x_3+x_4=0\\x_1+2x_2+3x_3+3x_4=1\\3x_1+2x_2+x_3+x_4=-1\end{cases}$

解: 记 $(\boldsymbol{A}\ \boldsymbol{b})$ 为该线性方程组的增广矩阵,

则 $(\boldsymbol{A}\ \boldsymbol{b})\xrightarrow{\text{若干初等行变换}}\begin{pmatrix}1&0&-1&-1&-1\\0&1&2&2&1\\0&0&0&0&0\end{pmatrix}$

等价于解方程组 $\begin{cases}x_1-x_3-x_4=-1\\x_2+2x_3+2x_4=1\end{cases}$

取 x_3、x_4 为自由变元, 求得一个特解为 $\boldsymbol{\alpha}_1=(-1\ \ 1\ \ 0\ \ 0)^T$,

$\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$ 的一组基础解系为 $\boldsymbol{\beta}_1=(1\ \ -2\ \ 1\ \ 0)^T$, $\boldsymbol{\beta}_2=(1\ \ -2\ \ 0\ \ 1)^T$.

此时通解可取为 $\boldsymbol{\alpha}_1+k_1\boldsymbol{\beta}_1+k_2\boldsymbol{\beta}_2$, k_1, $k_2\in\mathbb{R}$.

七、(**12分**) 已知二次型 $x_1{}^2+ax_2{}^2+x_3{}^2+2x_1x_2+2x_1x_3+2x_2x_3$ 可以经过正交变换 $\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}=\boldsymbol{P}\begin{pmatrix}y_1\\y_2\\y_3\end{pmatrix}$ 变为 $y_1{}^2+4y_2{}^2$. 求 a 的值以及正交矩阵 $\boldsymbol{P}$.

解: 由条件可知二次型的矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&1&1\\1&a&1\\1&1&1\end{pmatrix}$ 与 $\begin{pmatrix}1&0&0\\0&4&0\\0&0&0\end{pmatrix}$ 相似,

从而可知 A 的特征值为1，4，0，

并且两者的迹相等,

由此可得$a+2=5\Longrightarrow a=3$.

对特征值 1，可求得 A 的一个特征向量为$\begin{pmatrix}1\\-1\\1\end{pmatrix}$

对特征值 4，可求得 A 的一个特征向量为$\begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix}$

对特征值 0，可求得 A 的一个特征向量为$\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix}$

单位化，可得 $P=\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{2}}\\ -\frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{2}{\sqrt{6}} & 0\\ \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & -\frac{1}{\sqrt{2}}\end{pmatrix}$

八、(4分) $\boldsymbol{A}$ 是一个 2×3 的实矩阵，$R(\boldsymbol{A})=2$， $\boldsymbol{A}^T$ 的列向量组记为 $\boldsymbol{\alpha}_1$, $\boldsymbol{\alpha}_2$.
记实向量 $\boldsymbol{\beta}$ 为 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$ 的一个非零解, 证明: 向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1$, $\boldsymbol{\alpha}_2$, $\boldsymbol{\beta}$ 线性无关.

证明：反证法，假设 $\boldsymbol{\alpha}_1$, $\boldsymbol{\alpha}_2$, $\boldsymbol{\beta}$ 线性相关，
则存在不全为零的 k_1, k_2, k_3 使得 $k_1\boldsymbol{\alpha}_1+k_2\boldsymbol{\alpha}_2+k_3\boldsymbol{\beta}=\boldsymbol{0}$……… (*).
由于 $R(A)=2$, 可知 $\boldsymbol{\alpha}_1$, $\boldsymbol{\alpha}_2$ 线性无关,
从而 $k_3\neq0$.
在 (*) 两端同时左乘 $\boldsymbol{\beta}^T$, 以及 $\boldsymbol{\beta}^T\boldsymbol{\alpha}_i=0$, $i=1$, 2
可知 $k_3\boldsymbol{\beta}^T\boldsymbol{\beta}=0$, 由 $\boldsymbol{\beta}$ 为非零实向量可得 $k_3=0$, 矛盾.