第五章　特征值与特征向量

§5.1　方阵的特征值与特征向量

§5.2　相似矩阵

§5.3　实对称矩阵的对角化

§5.1　方阵的特征值与特征向量

特征值和特征向量的定义:

定义：设A是n阶方阵，若存在数λ和非零向量x，使得

$$Ax = \lambda x \qquad (x \neq 0)$$

则称λ是A的一个特征值,

x为A的对应于特征值λ的特征向量.

注:（1）只有方阵才有特征值和特征向量;

（2）特征向量是非零列向量;

（3）方阵的对应于同一个特征值的特征向量不唯一;

（4）一个特征向量只能对应于一个特征值;

（5）对应于同一个特征值的若干个特征向量的线性组合仍是对应于该特征值的特征向量.

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix} = 3\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 6 \\ 6 \end{pmatrix} = 6\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

注： 如果n阶方阵A的各行元素之和为k，则数k一定是方阵A的一个特征值，且对应的特征向量为 $(1,1,\ldots,1)^T$.

特征方程

特征多项式 $$|A-\lambda E|=\begin{vmatrix} a_{11}-\lambda & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22}-\lambda & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn}-\lambda \end{vmatrix}=0$$

- 特征方程 $|A-\lambda E|=0$
- 特征多项式 $|A-\lambda E|$

特征值和特征向量的计算方法

（1）计算A的特征多项式 $f(\lambda)=|A-\lambda E|$;

（2）求出特征方程 $f(\lambda)=|A-\lambda E|=0$ 的全部根，即A的全部特征值（也称特征根）；

（3）对每个特征值 λ_i ，求解齐次线性方程组

$$(A-\lambda_i E)x=0$$

求出它的基础解系 $\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_s$ ，则非零组合

$$\xi=k_1\xi_1+k_2\xi_2+\cdots+k_s\xi_s,k_i \text{ 不全为0}$$

即为A对应于特征值 λ_i 的全部特征向量.

例: 求矩阵 $A=\begin{pmatrix} a_1 & b & d \\ 0 & a_2 & c \\ 0 & 0 & a_3 \end{pmatrix}$ 的特征值.

解: $f(\lambda)=|A-\lambda E|=\begin{vmatrix} a_1-\lambda & b & d \\ 0 & a_2-\lambda & c \\ 0 & 0 & a_3-\lambda \end{vmatrix}$

$$=(a_1-\lambda)(a_2-\lambda)(a_3-\lambda)$$

令 $f(\lambda)=0$，解得A的特征值为

$$\lambda_1=a_1,\lambda_2=a_2,\lambda_3=a_3.$$

注: 上（下）三角方阵（含对角矩阵）的特征值即为主对角线上的元素.

例: 求矩阵 $A=\begin{pmatrix}-1 & 1 & 0\\ -4 & 3 & 0\\ 1 & 0 & 2\end{pmatrix}$ 的特征值和特征向量.

解: 1、由矩阵 A 的特征方程，求出特征值.

$$|A-\lambda E|=\begin{vmatrix}-1-\lambda & 1 & 0\\ -4 & 3-\lambda & 0\\ 1 & 0 & 2-\lambda\end{vmatrix}=(2-\lambda)\begin{vmatrix}-1-\lambda & 1\\ -4 & 3-\lambda\end{vmatrix}$$

$$=(2-\lambda)(\lambda-1)^2=0$$

特征值为 $\lambda=2,1,1$

2、把每个特征值 λ 代入线性方程组 $(A-\lambda E)x=0$,

求出基础解系.

当 $\lambda=2$时，解线性方程组 $(A-2E)x=0$

$$A-2E=\begin{pmatrix}-3&1&0\\-4&1&0\\1&0&0\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&0\end{pmatrix}\quad\begin{cases}x_1=0\\x_2=0\end{cases}$$

得基础解系: $p_1=\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$ 对应的所有特征向量为: $kp_1\,(k\neq0)$

当 $\lambda = 1$ 时，解线性方程组 $(A - E)x = 0$

$$A - E = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 \\ -4 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{cases} x_1 + x_3 = 0 \\ x_2 + 2x_3 = 0 \end{cases}$$

得基础解系 $p_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$ 对应的所有特征向量为：$kp_2\,(k \neq 0)$

例: 求矩阵 $A=\begin{pmatrix}-2 & 1 & 1\\ 0 & 2 & 0\\ -4 & 1 & 3\end{pmatrix}$ 的特征值和特征向量.

解: $$\left|A-\lambda E\right|=\begin{vmatrix}-2-\lambda & 1 & 1\\ 0 & 2-\lambda & 0\\ -4 & 1 & 3-\lambda\end{vmatrix}=-(\lambda-2)^2(\lambda+1)$$

特征值为 $\lambda=-1,2,2$

当 $\lambda=-1$时，解线性方程组 $(A+E)x=0$

$$A+E=\begin{pmatrix}-1&1&1\\0&3&0\\-4&1&4\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&0&-1\\0&1&0\\0&0&0\end{pmatrix},\quad\begin{cases}x_1-x_3=0\\x_2=0\end{cases}$$

得基础解系：$p_1=\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}$ 对应的所有特征向量为：$kp_1\ (k\neq 0)$

当 $\lambda=2$时，解线性方程组 $(A-2E)x=0$

$$A-2E=\begin{pmatrix}-4&1&1\\0&0&0\\-4&1&1\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}-4&1&1\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix},\quad -4x_1+x_2+x_3=0$$

得基础解系：$p_2=\begin{pmatrix}0\\1\\-1\end{pmatrix}$ $p_3=\begin{pmatrix}1\\0\\4\end{pmatrix}$

对应的所有特征向量为: $k_2p_2+k_3p_3(k_2,k_3$不全为零$)$.

注：若λ是A的k重特征值，则λ对应的线性无关的特征向量最少1个，最多k个.

性质： $f(\lambda)=|A-\lambda E|$

$$=\begin{vmatrix} a_{11}-\lambda & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22}-\lambda & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn}-\lambda \end{vmatrix}$$

$$=(-\lambda)^n+(a_{11}+a_{22}+\cdots+a_{nn})(-\lambda)^{n-1}+\cdots+|A|$$

设 $f(\lambda)=0$，它的n个根为 $\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n$，即$A$的$n$个特征值

则

$$\begin{cases} \lambda_1+\lambda_2+\cdots+\lambda_n=a_{11}+a_{22}+\cdots+a_{nn}=tr(A) \\ \lambda_1\lambda_2\cdots\lambda_n=|A| \end{cases}$$

性质： 若 λ 是A的特征值，即$Ax=\lambda x$ $(x\neq 0)$，则

矩阵	A	kA	A^m	$f(A)$	A^{-1}	A^*	A^T	$P^{-1}AP$
特征值	λ	$k\lambda$	λ^m	$f(\lambda)$	λ^{-1}	$\lambda^{-1}\lvert A\rvert$	λ	λ
特征向量	x	x	x	x	x	x	未必x	$P^{-1}x$

并且有

（1）方阵A可逆 $\Leftrightarrow$ A的特征值 λ 均非零;

（2）$f(A)=0 \Rightarrow f(\lambda)=0$

（3）$AB=kB$，$B\neq O$ $\Leftrightarrow$ B的列向量为$(A-kE)x=0$的解向量;

$\Leftrightarrow$ A有一个特征值为k;

$\Leftrightarrow$ B的非零列向量为A特征值k的特征向量.

例: 设A是三阶矩阵，特征值为2，3，3，则

$2A$的特征值为____________________

A^2的特征值为____________________

A^2-2A+E的特征值为________________

A^{-1}的特征值为____________________

A^{T}的特征值为____________________

A^*的特征值为____________________

$A_{11}+A_{22}+A_{33}=$_______.A_{ii}为$|A|$中a_{ii}的代数余子式

例：已知三阶方阵A满足

$$|A|=-6,\ |A-E|=0,\ AB=2B,\ B\neq O$$

求$|A^2-2A^*+E|$及其主对角元素的和.

定理: 设 $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_m$ 是方阵 A 的特征值， $p_1, p_2, \ldots, p_m$ 依次是与之对应的特征向量，如果$\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_m$ 各不相同，则 $p_1, p_2, \ldots, p_m$ 线性无关.

注1: 方阵属于不同特征值的特征向量线性无关

注2: λ_1对应线性无关的特征向量为 p_1, λ_2对应线性无关的特征向量为 p_2, p_3. 若λ_1, λ_2不相同，则 p_1, p_2, p_3 也线性无关.

证明： 设常数 $x_1, x_2, \cdots, x_m$ 使得

$$x_1 p_1 + x_2 p_2 + \cdots + x_m p_m = 0$$

则

$$A(x_1 p_1 + x_2 p_2 + \cdots + x_m p_m) = 0$$

$$\lambda_1 x_1 p_1 + \lambda_2 x_2 p_2 + \cdots + \lambda_m x_m p_m = 0$$

类推之，有

$$\lambda_1^k x_1 p_1 + \lambda_2^k x_2 p_2 + \cdots + \lambda_m^k x_m p_m = 0 \quad (k = 1, 2, \cdots, m-1)$$

把上述各式合写成矩阵形式，得

$$(x_1 p_1, x_2 p_2 \cdots, x_m p_m) \begin{pmatrix} 1 & \lambda_1 & \cdots & \lambda_1^{m-1} \\ 1 & \lambda_2 & \cdots & \lambda_2^{m-1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & \lambda_m & \cdots & \lambda_m^{m-1} \end{pmatrix} = 0$$

等号左边的矩阵当 λ_i 各不相同时是可逆的.

等号两边同时右乘它的逆矩阵，有

$$(x_1 p_1, x_2 p_2, \cdots, x_m p_m) = 0$$

即

$$x_j p_j = 0 \quad (j = 1, 2, \cdots, m)$$

又因为 p_j 为特征向量，$p_j \neq 0$，所以 x_j =0.

因此 $p_1, p_2, \cdots, p_m$ 线性无关.

例：设 λ_1,λ_2 是矩阵A的两个不同特征值，对应的特征向量依次为 p_1,p_2，证明:

（1）p_1-p_2 不是A的特征向量;

（2）p_1,p_1-p_2 线性无关.

例： 证明正交实矩阵A的特征值为1或-1.

证明： 设 p 是A的对应于特征值 λ 的特征向量，则

$$Ap = \lambda p, p^T A^T = \lambda p^T$$

将以上两式相乘，并由$A^TA=E$(因A为正交矩阵)，得

$$p^T A^T Ap = \lambda^2 p^T p, \quad p^T p = \lambda^2 p^T p$$

又 $p\neq 0$，故 $p^Tp>0$，于是 $\lambda^2=1$. 得证.