§2.5　矩阵的初等变换

一、矩阵的初等变换

引例：求解线性方程组

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 - x_3 + x_4 = 2, & ① \\ x_1 + x_2 - 2x_3 + x_4 = 4, & ② \\ 4x_1 - 6x_2 + 2x_3 - 2x_4 = 4, & ③ \\ 3x_1 + 6x_2 - 9x_3 + 7x_4 = 9. & ④ \end{cases}$$

$$\begin{cases} \boxed{2}x_1 - x_2 - x_3 + x_4 = 2, & ① \\ x_1 + x_2 - 2x_3 + x_4 = 4, & ② \\ 4x_1 - 6x_2 + 2x_3 - 2x_4 = 4, & ③ \\ 3x_1 + 6x_2 - 9x_3 + 7x_4 = 9. & ④ \end{cases}$$

$$\xrightarrow[③ \div 2]{① \leftrightarrow ②}$$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - 2x_3 + x_4 = 4, & ① \\ 2x_1 - x_2 - x_3 + x_4 = 2, & ② \\ 2x_1 - 3x_2 + x_3 - x_4 = 2, & ③ \\ 3x_1 + 6x_2 - 9x_3 + 7x_4 = 9. & ④ \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - 2x_3 + x_4 = 4, & \text{①} \\ 2x_1 - x_2 - x_3 + x_4 = 2, & \text{②} \\ 2x_1 - 3x_2 + x_3 - x_4 = 2, & \text{③} \\ 3x_1 + 6x_2 - 9x_3 + 7x_4 = 9. & \text{④} \end{cases}$$

$$\xrightarrow[\substack{\text{③} - 2\times\text{①} \\ \text{④} - 3\times\text{①}}]{\text{②} - \text{③}}$$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - 2x_3 + x_4 = 4, & \text{①} \\ 2x_2 - 2x_3 + 2x_4 = 0, & \text{②} \\ -5x_2 + 5x_3 - 3x_4 = -6, & \text{③} \\ 3x_2 - 3x_3 + 4x_4 = -3. & \text{④} \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - 2x_3 + x_4 = 4, & ① \\ 2x_2 - 2x_3 + 2x_4 = 0, & ② \\ -5x_2 + 5x_3 - 3x_4 = -6, & ③ \\ 3x_2 - 3x_3 + 4x_4 = -3. & ④ \end{cases}$$

$$\xrightarrow[\substack{③ + 5 \times ② \\ ④ - 3 \times ②}]{② \div 2}$$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - 2x_3 + x_4 = 4, & ① \\ x_2 - x_3 + x_4 = 0, & ② \\ 2x_4 = -6, & ③ \\ x_4 = -3. & ④ \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - 2x_3 + x_4 = 4, & ① \\ x_2 - x_3 + x_4 = 0, & ② \\ 2x_4 = -6, & ③ \\ x_4 = -3. & ④ \end{cases}$$

$$\xrightarrow[④-2\times③]{③\leftrightarrow④}$$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - 2x_3 + x_4 = 4, & ① \\ x_2 - x_3 + x_4 = 0, & ② \\ x_4 = -3, & ③ \\ 0 = 0. & ④ \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - 2x_3 + x_4 = 4, \\ x_2 - x_3 + x_4 = 0, \\ x_4 = -3, \end{cases}$$

取 x_3 为自由变量，则 $\begin{cases} x_1 = x_3 + 4, \\ x_2 = x_3 + 3, \\ x_4 = -3. \end{cases}$

令 $x_3 = c$，则

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c+4 \\ c+3 \\ c \\ -3 \end{pmatrix}$$

三种变换:

✓交换方程的次序，记作 $ⓘ \leftrightarrow ⓙ$ ；

✓以非零常数 k 乘某个方程，记作 $ⓘ \times k$ ；

✓一个方程加上另一个方程的 k 倍，记作 $ⓘ + k\,ⓙ$.

其逆变换是:

$ⓘ \leftrightarrow ⓙ$ ⇒ $ⓘ \leftrightarrow ⓙ$

$ⓘ \times k$ ⇒ $ⓘ \div k$

$ⓘ + k\,ⓙ$ ⇒ $ⓘ - k\,ⓙ$

结论:

1. 由于对原线性方程组施行的变换是可逆变换，因此变换前后的方程组同解.
2. 在上述变换过程中，实际上只对方程组的系数和常数进行运算，未知数并未参与运算.

定义： 下列三种变换称为矩阵的**初等行变换**：

✓对调两行，记作 $r_i \leftrightarrow r_j$；

✓以非零常数 k 乘某一行的所有元素，记作 $r_i \times k$；

✓某一行加上另一行的 k 倍，记作 $r_i + kr_j$.

其逆变换是：

$$r_i \leftrightarrow r_j \quad \Rightarrow \quad r_i \leftrightarrow r_j;$$

$$r_i \times k \quad \Rightarrow \quad r_i \div k;$$

$$r_i + kr_j \quad \Rightarrow \quad r_i - kr_j.$$

$$\text{初等变换}\begin{cases}\text{初等行变换}\\ \text{初等列变换}\end{cases}$$

把定义中的“行”换成“列”，就得到矩阵的**初等列变换**的定义．矩阵的初等行变换与初等列变换统称为**初等变换**.

二、矩阵之间的等价关系

行等价，记作 $A\overset{r}{\sim}B$

$$A \xrightarrow[\text{有限次初等列变换}]{\text{有限次初等行变换}} B$$

列等价，记作 $A\overset{c}{\sim}B$

$$A \underset{}{\overset{\text{有限次初等变换}}{\rightleftarrows}} B$$

矩阵 A 与矩阵 B 等价，记作 $A \sim B$

矩阵之间的等价关系具有下列性质：

反身性　$A \sim A$;

对称性　若 $A \sim B$，则 $B \sim A$;

传递性　若 $A \sim B$, $B \sim C$，则 $A \sim C$.

三、行阶梯形矩阵、行最简形矩阵与标准形

定义 若矩阵A中零行出现在非零行下方（如果有零行），且A的每个非零行的第一个非零元只出现在上一行第一个非零元的右边，则称A为行阶梯形矩阵，简称阶梯矩阵.

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = B_4$$

行阶梯形矩阵:

1. 可画出一条阶梯线，线的下方全为零;
2. 每个台阶只有一行;
3. 阶梯线的竖线后面是非零行的第一个非零元素.

$$\underset{r_2 - r_3}{\overset{r_1 - r_2}{\sim}}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = B_5$$

行最简形矩阵:

4. 非零行的第一个非零元为1;
5. 这些非零元所在的列的其它元素都为零.

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = B_5$$

$$\xrightarrow[\substack{c_4+c_1+c_2 \\ c_5-4c_1-3c_2+3c_3}]{c_3 \leftrightarrow c_4}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = F$$

行最简形矩阵:

4. 非零行的第一个非零元为1;

5. 这些非零元所在的列的其它元素都为零.

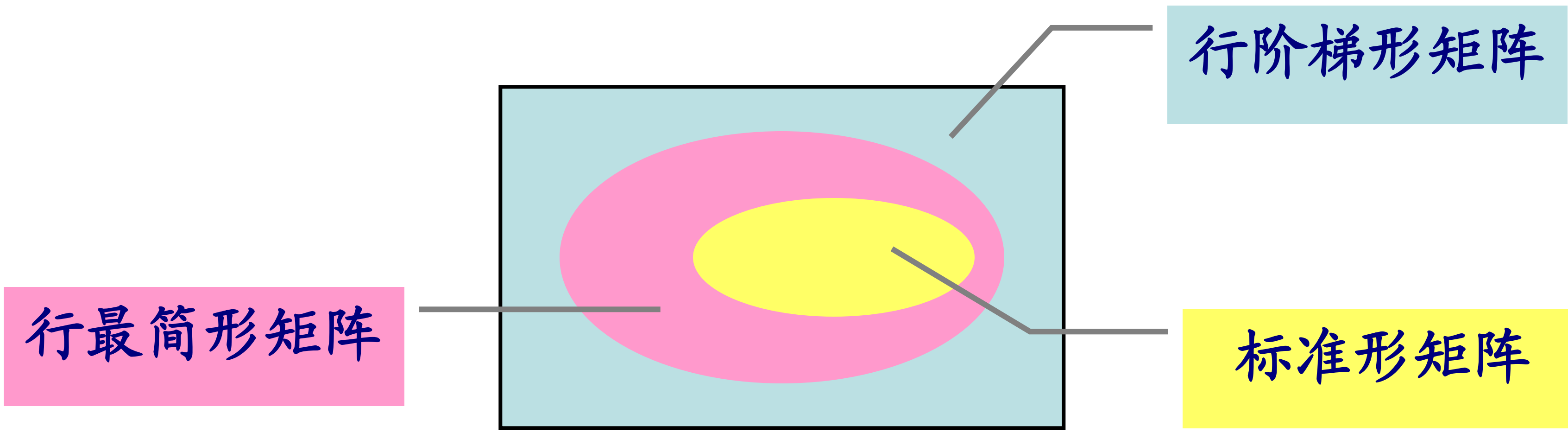
标准形矩阵:

6. 左上角是一个单位矩阵，其它元素全为零.

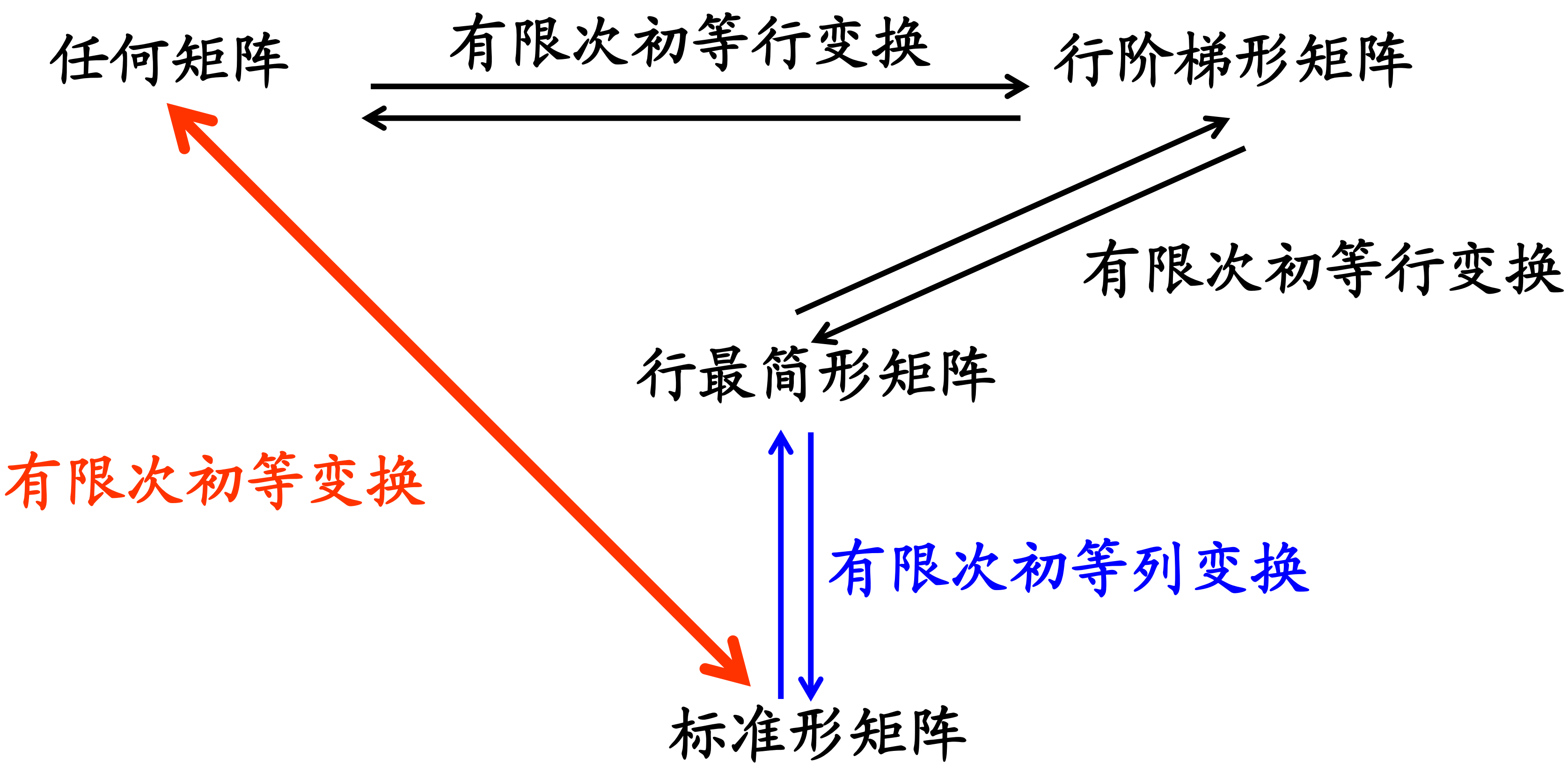
$$F=\begin{pmatrix} E_r & O \\ O & O \end{pmatrix}_{m\times n}$$

标准形矩阵由 m、n、r 三个参数完全确定，其中 r 就是行阶梯形矩阵中非零行的行数.

三者之间的包含关系



结论


任何矩阵
有限次初等行变换
行阶梯形矩阵
有限次初等行变换
行最简形矩阵
有限次初等变换
有限次初等列变换
标准形矩阵

对任意一个矩阵

1. 其行阶梯形矩阵是否唯一?
2. 其行最简形矩阵是否唯一?
3. 其标准形矩阵是否唯一?

例 设

$$A=\begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -2 & 1 \\ 4 & -6 & 2 & -2 \end{pmatrix}$$

利用初等变换将A化为标准形.

解

$$A \overset{r_1 \leftrightarrow r_2}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 & 1 \\ 2 & -1 & -1 & -1 \\ 4 & -6 & 2 & -2 \end{pmatrix} \underset{r_3 - 4r_1}{\overset{r_2 - 2r_1}{\sim}} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & -3 & 3 & -3 \\ 0 & -10 & 10 & -6 \end{pmatrix}$$

$$\underset{r_3 + 10r_2}{\overset{-\frac{1}{3}r_2}{\sim}} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} \overset{\frac{1}{4}r_3}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\underset{r_2 - r_3}{\overset{r_1 - r_2}{\sim}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \underset{\substack{c_4 + c_1 \\ c_4 + c_2}}{\overset{c_3 \leftrightarrow c_4}{\sim}} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right)$$

四、初等矩阵

定义：由单位矩阵 E 经过一次初等变换得到的矩阵称为**初等矩阵**.

三种初等变换对应着三种初等矩阵.

(1) 对调单位阵的两行（列）；

(2) 以常数 $k \neq 0$ 乘单位阵的某一行（列）；

(3) 以 k 乘单位阵的某一行（列）加到另一行（列）.

(1) 对调单位阵的第 i, j 行（列），记作 $E(i, j)$.

$$E_5 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \underset{\sim}{\xrightarrow{r_3 \leftrightarrow r_5}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$ 记作 $E(3, 5)$

$$\|$$

$$E_5 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \underset{\sim}{\xrightarrow{c_3 \leftrightarrow c_5}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

(2) 以常数 $k\neq 0$ 乘单位阵第 i 行（列），记作 $E(i(k))$.

$$E_5=\begin{pmatrix}1&0&0&0&0\\0&1&0&0&0\\0&0&1&0&0\\0&0&0&1&0\\0&0&0&0&1\end{pmatrix}\xrightarrow{r_3\times k}\begin{pmatrix}1&0&0&0&0\\0&1&0&0&0\\0&0&k&0&0\\0&0&0&1&0\\0&0&0&0&1\end{pmatrix}$$ 记作 $E(3(k))$

$$\|$$

$$E_5=\begin{pmatrix}1&0&0&0&0\\0&1&0&0&0\\0&0&1&0&0\\0&0&0&1&0\\0&0&0&0&1\end{pmatrix}\xrightarrow{c_3\times k}\begin{pmatrix}1&0&0&0&0\\0&1&0&0&0\\0&0&k&0&0\\0&0&0&1&0\\0&0&0&0&1\end{pmatrix}$$

(3) 以 k 乘单位阵第 j 行加到第 i 行，记作 $E(i, j(k))$.

$$E_5 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{r_3 + r_5 \times k} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & k \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

两种理解！

记作 $E(3, 5(k))$

以 k 乘单位阵第 i 列加到第 j 列.

$$E_5 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{c_5 + c_3 \times k} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & k \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A_{3\times 4}=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \end{pmatrix} \qquad E_3(2,3)=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$E_3(2,3)A_{3\times 4}=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \end{pmatrix}$$

$$A_{3\times 4}=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \end{pmatrix} \qquad E_4(2,3)=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A_{3\times 4}E_4(2,3)=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{13} & a_{12} & a_{14} \\ a_{21} & a_{23} & a_{22} & a_{24} \\ a_{31} & a_{33} & a_{23} & a_{34} \end{pmatrix}$$

结论

$E_m(i,j)A_{m\times n}$ 把矩阵A的第 i 行与第 j 行对调，即 $r_i \leftrightarrow r_j$.

$A_{m\times n}E_n(i,j)$ 把矩阵A的第 i 列与第 j 列对调，即 $c_i \leftrightarrow c_j$.

$E_m(i(k))A_{m\times n}$ 以非零常数 k 乘矩阵A的第 i 行，即 $r_i \times k$.

$A_{m\times n}E_n(i(k))$ 以非零常数 k 乘矩阵A的第 i 列，即 $c_i \times k$.

$E_m(i,j(k))A_{m\times n}$ 把矩阵A第 j 行的 k 倍加到第 i 行，即 $r_i + kr_j$.

$A_{m\times n}E_n(i,j(k))$ 把矩阵A第 i 列的 k 倍加到第 j 列，即 $c_j + kc_i$.

口诀：左行右列.

性质1 设A是一个 $m\times n$ 矩阵，

✓对 A 施行一次初等行变换，相当于在 A 的左边乘以相应的 m 阶初等矩阵；

✓对 A 施行一次初等列变换，相当于在 A 的右边乘以相应的 n 阶初等矩阵.

$$A=\begin{pmatrix}1&2&3\\4&5&6\end{pmatrix}\xrightarrow{r_1\leftrightarrow r_2}B=\begin{pmatrix}4&5&6\\1&2&3\end{pmatrix}\xrightarrow{c_1+2c_3}C=\begin{pmatrix}16&5&6\\7&2&3\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}A\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\2&0&1\end{pmatrix}=C$$

例 设

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}, B=\begin{pmatrix} a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{31}+a_{21} & a_{32}+a_{22} & a_{33}+a_{23} \end{pmatrix}$$

$$P_1=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad P_2=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$，则必有（ ）

(A) $AP_1P_2=B$ (B) $AP_2P_1=B$

(C) $P_1P_2A=B$ (D) $P_2P_1A=B$

例 设矩阵

$$A=\begin{pmatrix}1&2&3\\4&5&6\\7&8&9\end{pmatrix},\quad P=\begin{pmatrix}0&0&1\\0&1&0\\1&0&0\end{pmatrix},\quad Q=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&0&1\\0&1&0\end{pmatrix},$$

则 $P^{2000}AQ^{2001}=$ ____.

初等变换 $\longleftrightarrow$ 初等矩阵

初等变换的逆变换 $\longleftrightarrow$?

因为“对于n阶方阵A、B，如果$AB=E$，那么A、B都是可逆矩阵，并且它们互为逆矩阵”，

$$E_5=\begin{pmatrix}1&0&0&0&0\\0&1&0&0&0\\0&0&1&0&0\\0&0&0&1&0\\0&0&0&0&1\end{pmatrix}\xrightarrow{r_3\leftrightarrow r_5}\begin{pmatrix}1&0&0&0&0\\0&1&0&0&0\\0&0&0&0&1\\0&0&0&1&0\\0&0&1&0&0\end{pmatrix}\xrightarrow{r_3\leftrightarrow r_5}\begin{pmatrix}1&0&0&0&0\\0&1&0&0&0\\0&0&1&0&0\\0&0&0&1&0\\0&0&0&0&1\end{pmatrix}$$

$E_5(3,5)E_5$

$E_5(3,5)E_5(3,5)E_5$
$=E_5$

所以 $E_5(3,5)^{-1}=E_5(3,5)$.

一般地，$E(i,j)^{-1}=E(i,j)$.

因为“对于n阶方阵A、B，如果$AB=E$，那么A、B都是可逆矩阵，并且它们互为逆矩阵”，

$$E_5=\begin{pmatrix}1&0&0&0&0\\0&1&0&0&0\\0&0&1&0&0\\0&0&0&1&0\\0&0&0&0&1\end{pmatrix}\xrightarrow{r_3\times k}\begin{pmatrix}1&0&0&0&0\\0&1&0&0&0\\0&0&k&0&0\\0&0&0&1&0\\0&0&0&0&1\end{pmatrix}\xrightarrow{r_3\div k}\begin{pmatrix}1&0&0&0&0\\0&1&0&0&0\\0&0&1&0&0\\0&0&0&1&0\\0&0&0&0&1\end{pmatrix}$$

$$E_5(3(k))E_5 \qquad E_5\left(3\left(\frac{1}{k}\right)\right)E_5(3(k))E_5$$

$$=E_5$$

所以 $E_5(3(k))^{-1}=E_5\left(3\left(\dfrac{1}{k}\right)\right)$.

一般地，$E(i(k))^{-1}=E\left(i\left(\dfrac{1}{k}\right)\right)$.

因为“对于n阶方阵A、B，如果$AB=E$，那么A、B都是可逆矩阵，并且它们互为逆矩阵”，

$$E_5=\begin{pmatrix}1&0&0&0&0\\0&1&0&0&0\\0&0&1&0&0\\0&0&0&1&0\\0&0&0&0&1\end{pmatrix}\xrightarrow{c_5+c_3\times k}\begin{pmatrix}1&0&0&0&0\\0&1&0&0&0\\0&0&1&0&k\\0&0&0&1&0\\0&0&0&0&1\end{pmatrix}\xrightarrow{c_5+c_3\times(-k)}\begin{pmatrix}1&0&0&0&0\\0&1&0&0&0\\0&0&1&0&0\\0&0&0&1&0\\0&0&0&0&1\end{pmatrix}$$

$$E_5E_5(3,5(k)) \qquad E_5E_5(3,5(k))E_5(3,5(-k))$$

$$=E_5$$

所以 $E_5(3,5(k))^{-1}=E_5(3,5(-k))$.

一般地，$E(i,j(k))^{-1}=E(i,j(-k))$

初等变换 $\longleftrightarrow$ 初等矩阵

初等变换的逆变换 $\longleftrightarrow$ 初等矩阵的逆矩阵

初等矩阵的逆矩阵是:

$$E(i,j)^{-1}=E(i,j);$$

$$E(i(k))^{-1}=E\left(i\left(\frac{1}{k}\right)\right);$$

$$E(i,j(k))^{-1}=E(i,j(-k)).$$

初等矩阵的行列式

(1) $\quad |E(i,j)| = -1$

(2) $\quad |E(i(k))| = k, \left| E\left(i\left(\frac{1}{k}\right)\right) \right| = \frac{1}{k}$

(3) $\quad |E(i,j(k))| = |E(i,j(-k))| = 1$

例 设A是$n(n\geq 2)$阶可逆矩阵,交换A的第一行与第二行得矩阵B，A^*,B^*分别为A,B的伴随矩阵，则（　）

(A) 交换A^*的第一列与第二列得B^*

(B) 交换A^*的第一行与第二行得B^*

(C) 交换A^*的第一列与第二列得$-B^*$

(D) 交换A^*的第一行与第二行得$-B^*$

例：设n阶矩阵A可逆，将A的第 i 行与第 j 行交换后得到矩阵B.

(1) 证明矩阵B可逆;

(2) 求 AB^{-1}.

推论1 $A \sim B$ 的充要条件是存在有限个初等矩阵 $P_1, P_2, \ldots, P_l$，使得 $A = P_1 \cdots P_s B P_{s+1} \cdots P_l$

推论2 方阵 A 可逆的充要条件是 A 可以表示成有限个初等矩阵的乘积。

这表明，可逆矩阵的标准形矩阵是单位阵．其实，可逆矩阵的行最简形矩阵也是单位阵.

推论3 方阵 A 与 B 等价的充要条件是存在可逆矩阵 P 及 Q，使得 $PAQ = B$.

五、初等变换的应用：求逆矩阵

当$|A| \neq 0$时，由 $A = P_1 P_2 \cdots P_l$，有

$$P_l^{-1} P_{l-1}^{-1} \cdots P_1^{-1} A = E,$$

$$P_l^{-1} P_{l-1}^{-1} \cdots P_1^{-1} A A^{-1} = P_l^{-1} P_{l-1}^{-1} \cdots P_1^{-1} E = A^{-1}$$

$$\therefore \quad P_l^{-1} P_{l-1}^{-1} \cdots P_1^{-1} \begin{pmatrix} A & E \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} P_l^{-1} P_{l-1}^{-1} \cdots P_1^{-1} A & P_l^{-1} P_{l-1}^{-1} \cdots P_1^{-1} E \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} E & A^{-1} \end{pmatrix}$$

即对 $n \times 2n$ 矩阵 $(A \;\; E)$ 施行初等行变换，

当把 A 变成 E 时，原来的 E 就变成 A^{-1}.

例 设 $A=\begin{pmatrix}1&2&3\\2&2&1\\3&4&3\end{pmatrix}$,求 A^{-1}.

解 $$(A \vdots E)=\left(\begin{array}{ccc:ccc}1&2&3&1&0&0\\2&2&1&0&1&0\\3&4&3&0&0&1\end{array}\right)$$

$$\underset{r_3-3r_1}{\overset{r_2-2r_1}{\sim}}\left(\begin{array}{ccc:ccc}1&2&3&1&0&0\\0&-2&-5&-2&1&0\\0&-2&-6&-3&0&1\end{array}\right)\underset{r_3-r_2}{\overset{r_1+r_2}{\sim}}$$

$$\underset{r_3 - r_2}{\overset{r_1 + r_2}{\sim}} \left(\begin{array}{ccc:ccc} 1 & 0 & -2 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & -5 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -1 & -1 & 1 \end{array}\right) \underset{r_2 - 5r_3}{\overset{r_1 - 2r_3}{\sim}}$$

$$\underset{r_2 - 5r_3}{\overset{r_1 - 2r_3}{\sim}} \left(\begin{array}{ccc:ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 3 & -2 \\ 0 & -2 & 0 & 3 & 6 & -5 \\ 0 & 0 & -1 & -1 & -1 & 1 \end{array}\right) \underset{r_3 \div (-1)}{\overset{r_2 \div (-2)}{\sim}}$$

$$\underset{r_3 \div (-1)}{\overset{r_2 \div (-2)}{\sim}} \left(\begin{array}{ccc:ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 3 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{3}{2} & -3 & \frac{5}{2} \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & -1 \end{array}\right)$$

利用初等行变换求逆阵的方法，还可用于求矩阵$A^{-1}B$.

当$|A|\neq 0$时，由 $A=P_1P_2\cdots P_l$，有

$$P_l^{-1}P_{l-1}^{-1}\cdots P_1^{-1}A=E,$$

$$P_l^{-1}P_{l-1}^{-1}\cdots P_1^{-1}AA^{-1}=P_l^{-1}P_{l-1}^{-1}\cdots P_1^{-1}E=A^{-1}$$

$$P_l^{-1}P_{l-1}^{-1}\cdots P_1^{-1}EB=A^{-1}B$$

即对 $n\times 2n$ 矩阵 $(A\ \ B)$ 施行初等行变换，当把 A 变成 E 时，原来的 B 就变成 $A^{-1}B$.

$$\because \quad A^{-1}(A \mid B) = (E \mid A^{-1}B)$$

即

$$(A \mid B) \xrightarrow{\text{初等行变换}} \left(E \quad \boxed{A^{-1}B}\right)$$

例 求矩阵 X,使 $AX=B$，其中

$$A=\begin{pmatrix}1&2&3\\2&2&1\\3&4&3\end{pmatrix},\quad B=\begin{pmatrix}2&5\\3&1\\4&3\end{pmatrix}.$$

解 若 A 可逆，则 $X=A^{-1}B$.

$$(A \mid B)=\begin{pmatrix}1&2&3&2&5\\2&2&1&3&1\\3&4&3&4&3\end{pmatrix}$$

$$\underset{r_3-3r_1}{\overset{r_2-2r_1}{\sim}}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 2 & 5 \\ 0 & -2 & -5 & -1 & -9 \\ 0 & -2 & -6 & -2 & -12 \end{pmatrix}$$

$$\underset{r_3-r_2}{\overset{r_1+r_2}{\sim}}\begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 & 1 & -4 \\ 0 & -2 & -5 & -1 & -9 \\ 0 & 0 & -1 & -1 & -3 \end{pmatrix}$$

$$\underset{r_2-5r_3}{\overset{r_1-2r_3}{\sim}}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 3 & 2 \\ 0 & -2 & 0 & 4 & 6 \\ 0 & 0 & -1 & -1 & -3 \end{pmatrix}$$

$$\underset{r_2-5r_3}{\overset{r_1-2r_3}{\sim}}\begin{pmatrix}1 & 0 & 0 & 3 & 2\\ 0 & -2 & 0 & 4 & 6\\ 0 & 0 & -1 & -1 & -3\end{pmatrix}$$

$$\underset{r_3\div(-1)}{\overset{r_2\div(-2)}{\sim}}\begin{pmatrix}1 & 0 & 0 & 3 & 2\\ 0 & 1 & 0 & -2 & -3\\ 0 & 0 & 1 & 1 & 3\end{pmatrix},$$

$$\therefore \qquad X=\begin{pmatrix}3 & 2\\ -2 & -3\\ 1 & 3\end{pmatrix}.$$

练习： 求矩阵X，使得 $AX = A + X$，其中

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

如果要求$Y=CA^{-1}$,则可对矩阵$\begin{pmatrix} A \\ C \end{pmatrix}$作初等列变换，

$$\begin{pmatrix} A \\ C \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{列变换}} \begin{pmatrix} E \\ \boxed{CA^{-1}} \end{pmatrix},$$ 即可得 $Y=CA^{-1}$.

也可改为对(A^T,C^T)作初等行变换，

$$(A^T,C^T) \xrightarrow{\text{行变换}} (E,\boxed{(A^T)^{-1}C^T}),$$

即可得$Y^T=(A^T)^{-1}C^T=(A^{-1})^TC^T=(CA^{-1})^T$