合　肥　工　业　大　学　试　卷（A）

2018～2019 学年第 二 学期　　课程代码 1400071B　　课程名称 线性代数　学分 2.5　课程性质：必修☑、选修☐、限修☐　考试形式：开卷☐、闭卷☑

专业班级（教学班）＿＿＿＿＿　　考试日期 2019 年 5 月 7 日 8:00-10:00　　命题教师 集体　　系（所或教研室）主任审批签名＿＿＿＿＿＿

一、填空题（每小题 4 分，共 20 分）

1. 设矩阵 $A=\begin{pmatrix}-1 & -1 & 2\\ -1 & 2 & 0\\ 0 & 1 & 1\end{pmatrix}$，则 $\left\| A \right| A \right| =$ ＿＿＿＿＿＿.

2. 设方阵 A 满足 $A^2+2A-3E=O$，则 $(A+4E)^{-1}==$ ＿＿＿＿＿＿ .

3. 设矩阵 $A=\begin{pmatrix}0 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$，则 A^3 的秩为 $=$ ＿＿＿＿＿＿ .

4. 设 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 是四元非齐次线性方程组 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$ 的三个解向量，且秩 $r(A)=3$，$\alpha_1=(1,2,3,4)^T$，$\alpha_2+\alpha_3=(0,1,2,3)^T$，则非齐次线性方程组 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$ 的通解 $x==$ ＿＿＿＿＿＿ .

5. 二次型 $a(x_1^{\ 2}+x_2^{\ 2}+x_3^{\ 2})+4x_1x_2+4x_1x_3+4x_2x_3$ 经过正交变换后化为 $6y_1^{\ 2}$，则 $a==$ ＿＿＿＿＿＿.

二、选择题（每小题 4 分，共 20 分）

1. 设 $\boldsymbol{A}$ 和 $\boldsymbol{B}$ 均为 $n\times n$ 矩阵，则必有（　　）

(A) $(A+B)^2=A^2+2AB+B^2$　　(B) $A^2-B^2=(A-B)(A+B)$

(C) $(AB)^2=A^2B^2$　　(D) $|AB|=|BA|$

2. 设有向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1=(1,-1,2,4)$，$\boldsymbol{\alpha}_2=(0,3,1,2)$，$\boldsymbol{\alpha}_3=(3,0,7,14)$，$\boldsymbol{\alpha}_4=(1,-2,2,0)$，$\boldsymbol{\alpha}_5=(2,1,5,10)$，则该向量组的极大线性无关组是（　　）

(A) $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$　　(B) $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_4$　　(C) $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_5$　　(D) $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_4,\boldsymbol{\alpha}_5$

3. 已知 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 是齐次线性方程组 $Ax=0$ 的一组基础解系，下列结论正确的是（　　）

(A) $\alpha_1-\alpha_2,\alpha_2-\alpha_3,\alpha_3-\alpha_1$ 也是 $Ax=0$ 的一组基础解系

(B) ξ_1,ξ_2,ξ_3 与 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 等秩，则 ξ_1,ξ_2,ξ_3 也是 $Ax=0$ 的一组基础解系

(C) $\eta_1,\eta_2,\eta_3,\eta_4$ 与 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 等价，则 $\eta_1,\eta_2,\eta_3,\eta_4$ 也是 $Ax=0$ 的一组基础解系

(D) ξ_1,ξ_2,ξ_3 与 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 等价，则 ξ_1,ξ_2,ξ_3 也是 $Ax=0$ 的一组基础解系

4. 设 n 阶矩阵 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 等价，则必有（　　）

(A) 当 $|\boldsymbol{A}|=\boldsymbol{a}(\boldsymbol{a}\neq 0)$ 时，$|\boldsymbol{B}|=\boldsymbol{a}$　　(B) 当 $|\boldsymbol{A}|=\boldsymbol{a}(\boldsymbol{a}\neq \boldsymbol{0})$ 时，$|\boldsymbol{B}|=-\boldsymbol{a}$

(C) 当 $|\boldsymbol{A}|\neq \boldsymbol{0}$ 时，$|\boldsymbol{B}|=\boldsymbol{0}$　　(D) 当 $|\boldsymbol{A}|=\boldsymbol{0}$ 时，$|\boldsymbol{B}|=\boldsymbol{0}$

5. 设 $\boldsymbol{A}$ 为 n 阶可逆矩阵，λ 是 $\boldsymbol{A}$ 的一个特征值，则 $\boldsymbol{A}$ 的伴随矩阵 $\boldsymbol{A}^*$ 的特征值之一是（　　）

(A) $\lambda^{-1}|\boldsymbol{A}|$　　(B) $\lambda^{-1}|\boldsymbol{A}|^n$　　(C) $\lambda|\boldsymbol{A}|$　　(D) $\lambda|\boldsymbol{A}|^n$

三、（8 分）求行列式 $\begin{vmatrix}\lambda & -1 & 0 & 0\\ 0 & \lambda & -1 & 0\\ 0 & 0 & \lambda & -1\\ 4 & 3 & 2 & \lambda+1\end{vmatrix}$.

四、（**10** 分）已知 $A=\begin{pmatrix}1 & 1 & -1\\ 0 & 1 & 1\\ 0 & 0 & -1\end{pmatrix}$，且 $\boldsymbol{A}^2-\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{E}$，其中 $\boldsymbol{E}$ 是三阶单位矩阵，求矩阵 $\boldsymbol{B}$.

五、（**12** 分）　a,b 取何值时，非齐次线性方程组 $\begin{cases}x_1+x_2+x_3+x_4=1\\ x_2-x_3+2x_4=1\\ 2x_1+3x_2+(a+2)x_3+4x_4=b+3\\ 3x_1+5x_2+x_3+(a+8)x_4=5\end{cases}$

（1）有唯一解；（2）无解；（3）有无穷多个解？

六、（**14** 分）判断 $A=\begin{pmatrix}1 & 1 & 1\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$ 是否可对角化，若能对角化，求一个可逆矩阵 P 使得 $P^{-1}AP=\Lambda$（Λ 为对角阵）.

七、（**10** 分）已知向量 α_1,α_2 线性无关，$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 线性相关，证明：α_3 可由 α_1,α_2 线性表示且表示式惟一.

八、（6 分）设 $\boldsymbol{A}$ 为 m 阶实对称正定矩阵，$\boldsymbol{B}$ 为 $m\times n$ 实矩阵，$\boldsymbol{B}^T$ 为 $\boldsymbol{B}$ 的转置矩阵，试证：$\boldsymbol{B}^T\boldsymbol{AB}$ 为正定矩阵的充分必要条件是 $\boldsymbol{B}$ 的秩 $r(B)=n$.