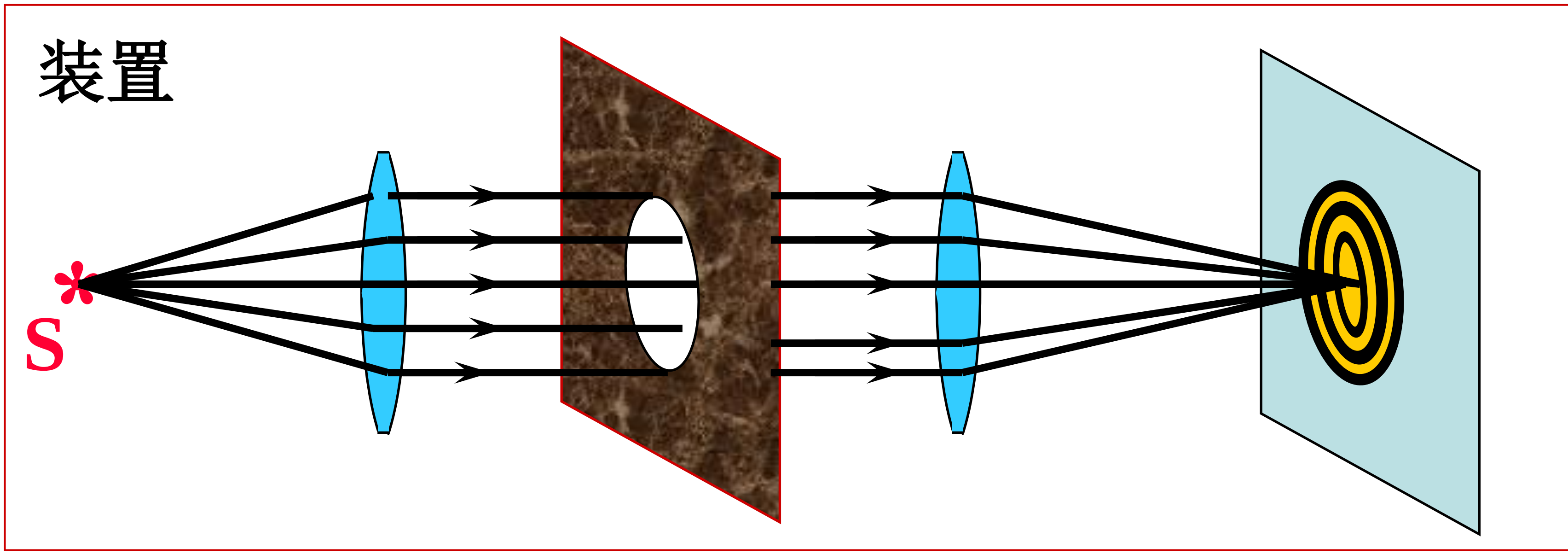
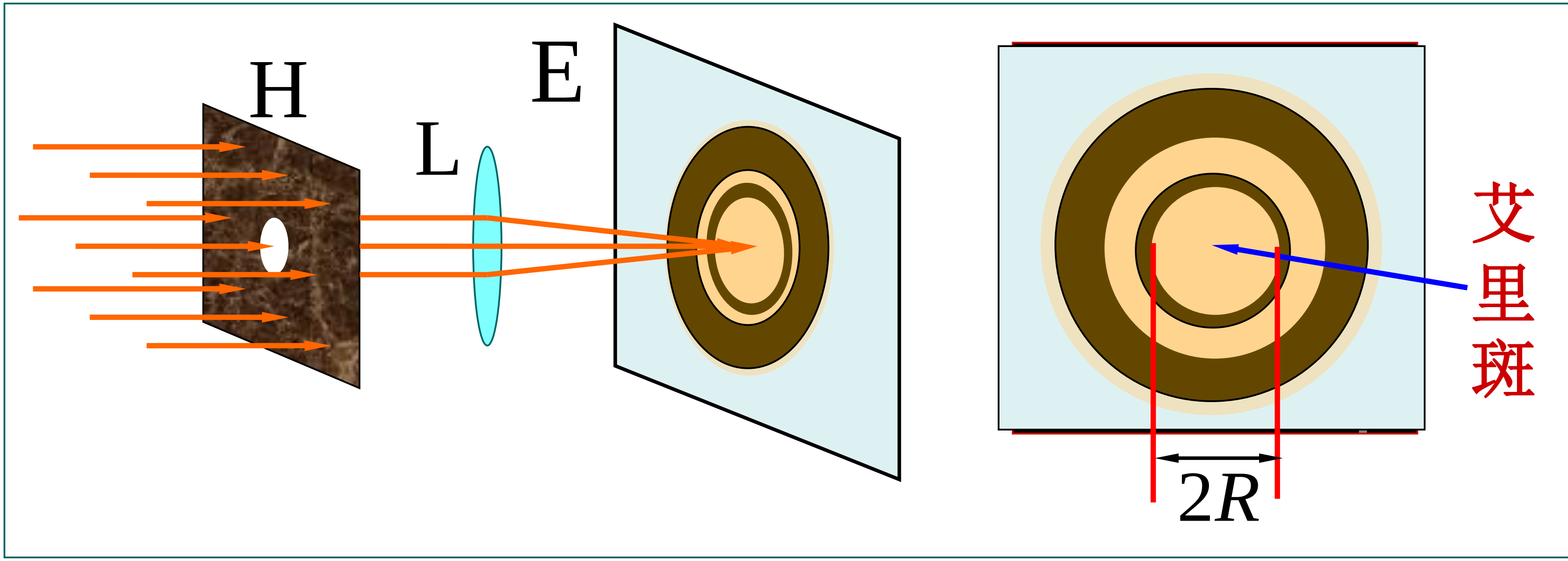
§ 12-9 圆孔的夫琅禾费衍射 光学仪器的分辨本领

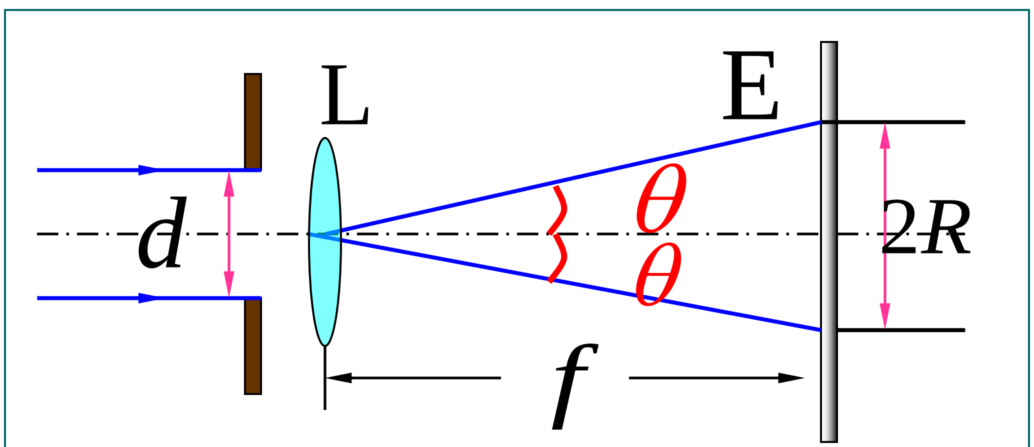
圆孔的夫琅禾费衍射 光学仪器分辨本领

一 圆孔的夫琅禾费衍射



圆孔衍射



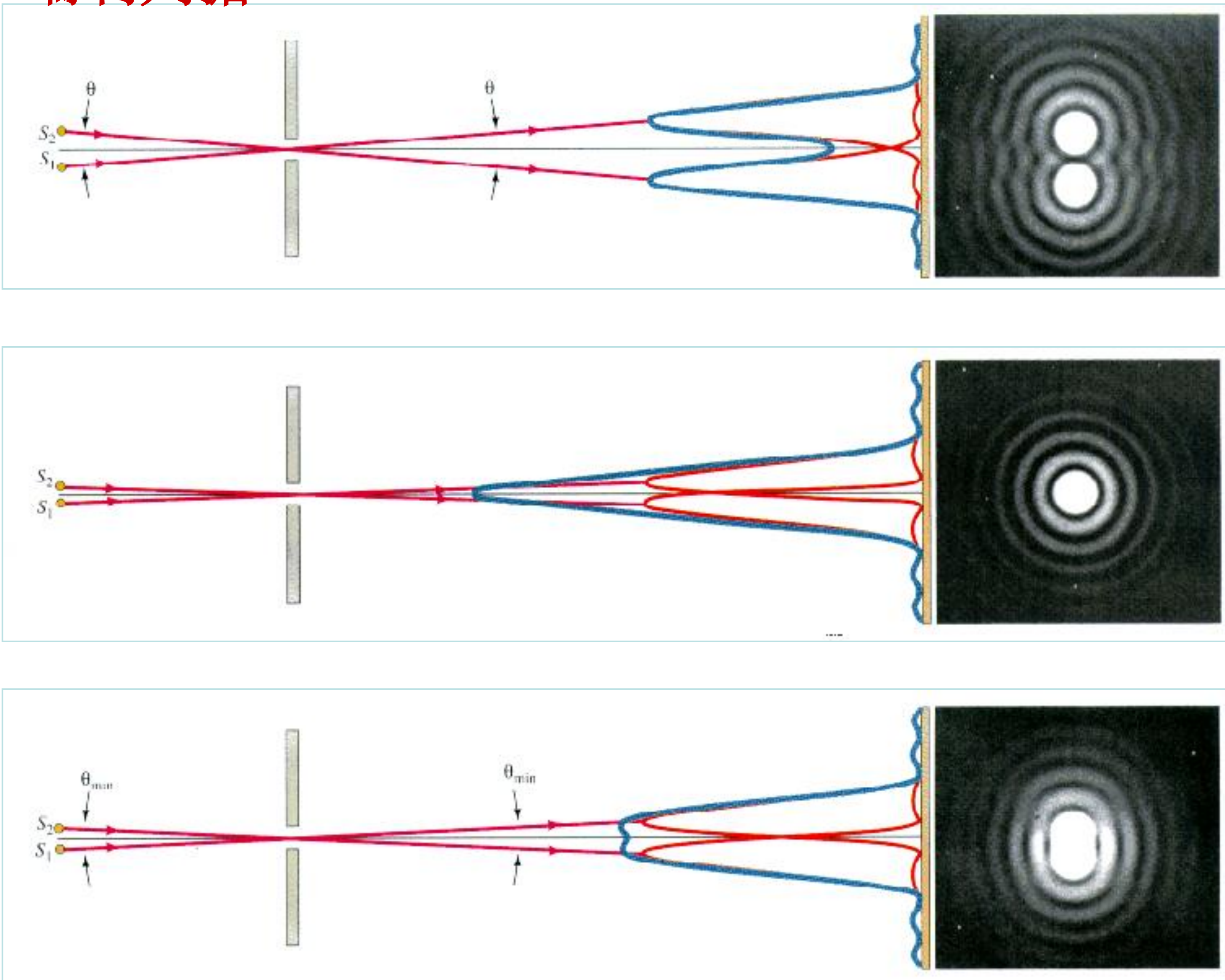


R：艾里斑半径

$$\boldsymbol{\theta \approx \sin\theta = 1.22\frac{\lambda}{d}}$$

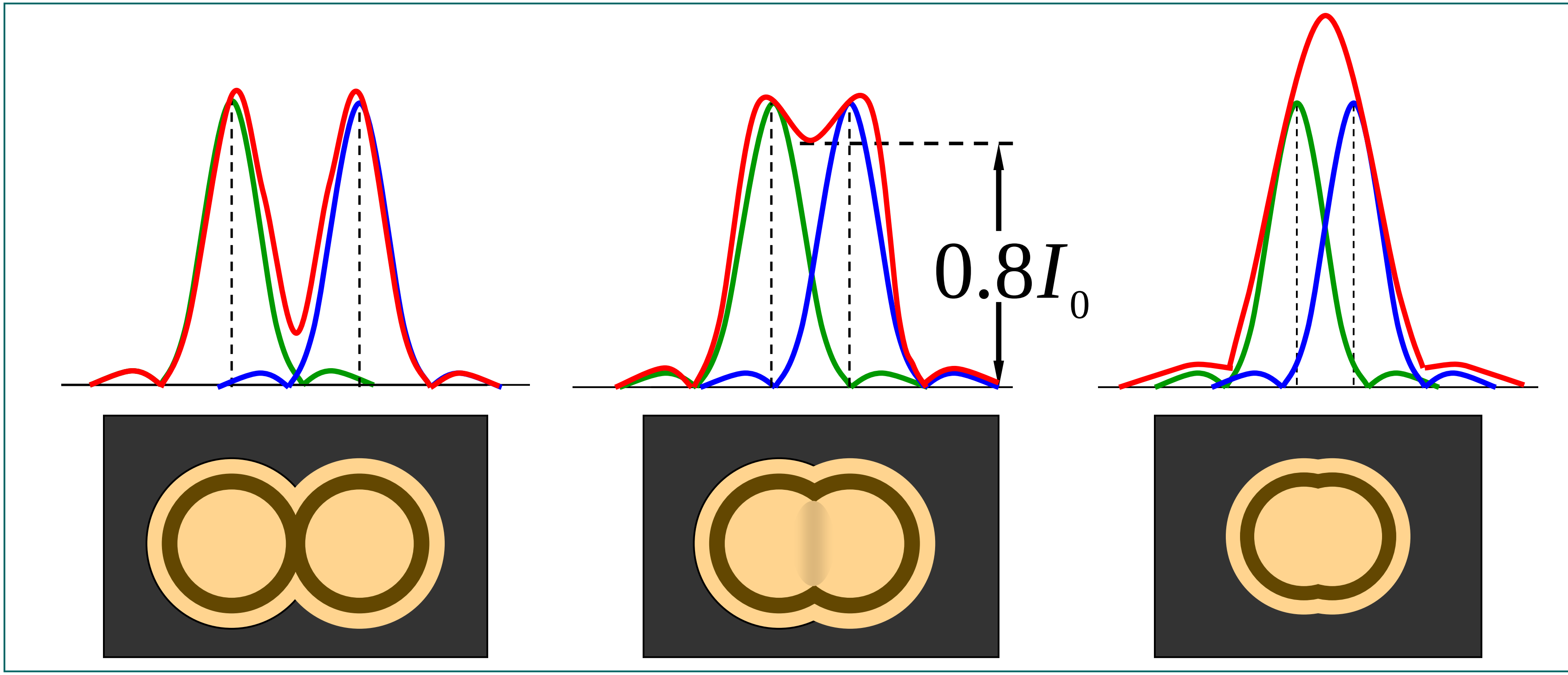
$$R = f\tan\theta \approx 1.22\frac{\lambda}{d}f$$

二　瑞利判据



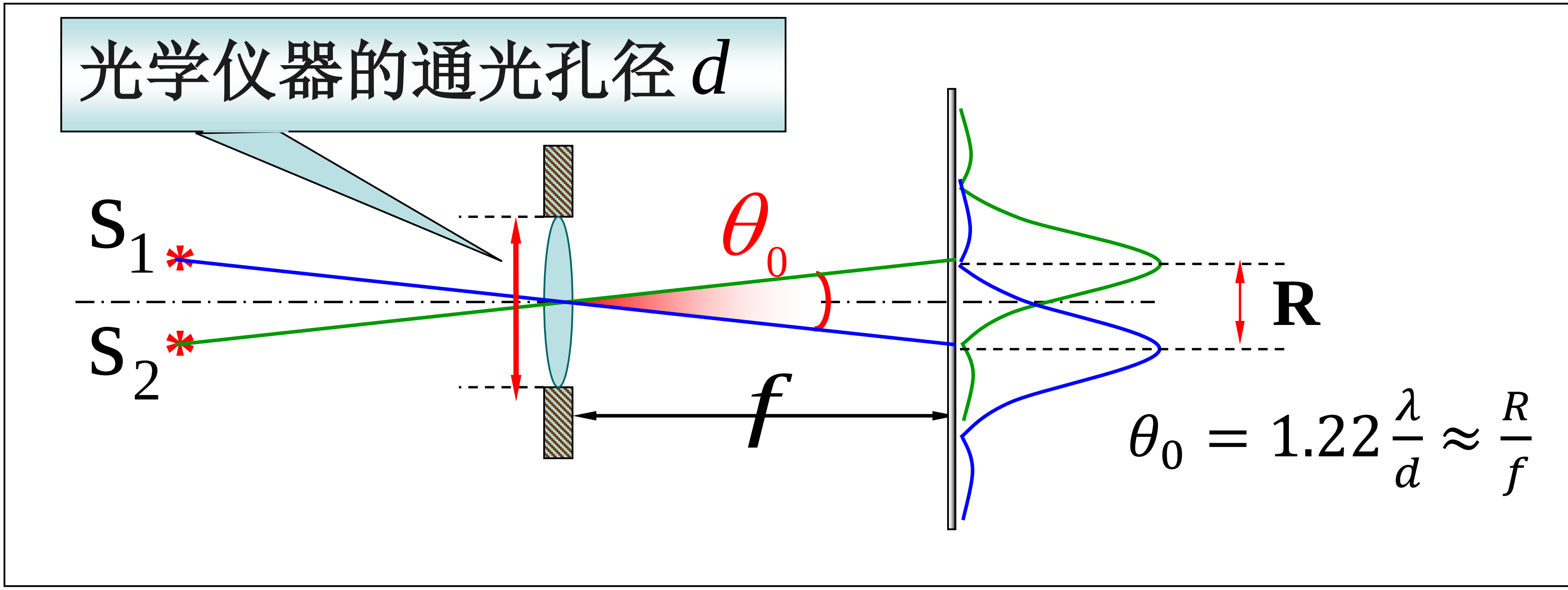
返回 退出

瑞利判据



对于两个强度相等的不相干的点光源（物点），一个点光源的衍射图样的**中央最亮处**刚好和另一点光源衍射图样的**第一暗处**相**重合**，这时两个点光源（或物点）恰为这一光学仪器所分辨.

三　光学仪器的分辨本领 （两光点刚好能分辨）



最小分辨角 $\theta_0 = 1.22\dfrac{\lambda}{d}$

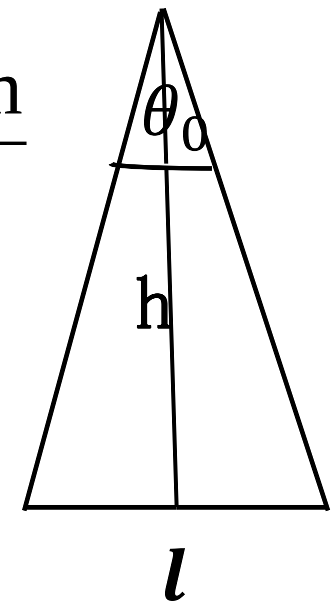
光学仪器分辨率 $= \dfrac{1}{\theta_0} = \dfrac{d}{1.22\lambda} \propto d, \dfrac{1}{\lambda}$

在通常的明亮环境中，人眼瞳孔的直径约为**3 mm**，人眼最敏感的波长为550nm, 航天员在太空中能否看见长城（飞船距离地面最近高度约为200km）

人眼的最小分辨角

$$\theta_0 = 1.22\frac{\lambda}{d} = \frac{1.22\times 5.5\times 10^{-7}\,\mathrm{m}}{3\times 10^{-3}\,\mathrm{m}}$$

$$= 2.2\times 10^{-4}\,\mathrm{rad}$$



人离长城距离为h，则

$$\boldsymbol{l} = 2\boldsymbol{h}\tan\frac{\boldsymbol{\theta_0}}{2} \approx \boldsymbol{h\theta_0 2\times 10^{5}\times 2.2\times 10^{-4} = 44\mathrm{m}}$$

例：设人眼在正常照度下的瞳孔直径约为3mm，而在可见光中，人眼最敏感的波长为550nm，问：

（1）人眼的最小分辨角有多大？

（2）若物体放在距人眼25cm（明视距离）处，则两物点间距为多大时才能被分辨？

解（1）

$$\theta_0 = 1.22\frac{\lambda}{d} = \frac{1.22\times5.5\times10^{-7}\,\mathrm{m}}{3\times10^{-3}\,\mathrm{m}}$$

$$= 2.2\times10^{-4}\,\mathrm{rad}$$

（2）

$$R = l\theta_0 = 25\mathrm{cm}\times2.2\times10^{-4}$$

$$= 0.0055\mathrm{cm} = 0.055\mathrm{mm}$$

例： 在通常的明亮环境中，人眼瞳孔的直径约为 3 mm，问人眼的最小分辨角是多大？如果纱窗上两根细丝之间的距离 l =2.0mm，问离纱窗多远处人眼恰能分辨清楚两根细丝？

解： 以视觉感受最灵敏的黄绿光来讨论，

其波长λ=550nm，人眼最小分辨角

$$\theta_R = 1.22\frac{\lambda}{d} = 2.2\times10^{-4}\,\mathrm{rad}$$

设人离纱窗距离为S，则 $\theta \approx \dfrac{l}{s}$

恰能分辨 $\theta = \theta_R \Rightarrow s = \dfrac{l}{\theta_R} = 9.1m$

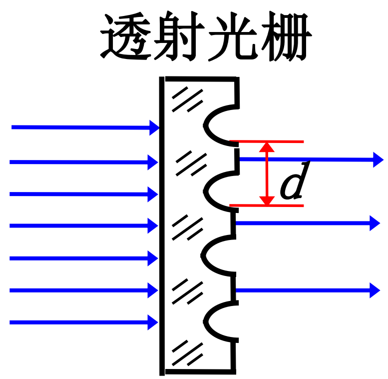
§ 12-10 光栅衍射

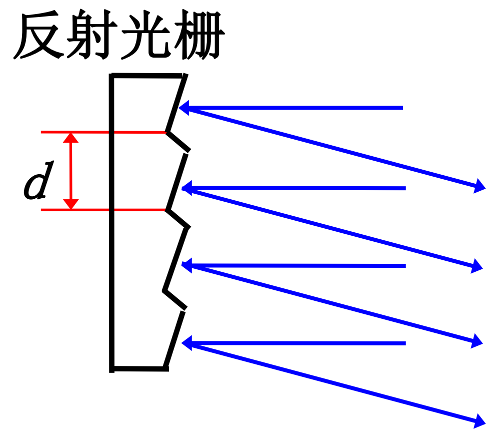
光栅衍射

一　光栅

大量等宽度、等间距的平行狭缝(或反射面)构成的光学元件。

种类:





光栅常数

a是透光（或反光）部分的宽度

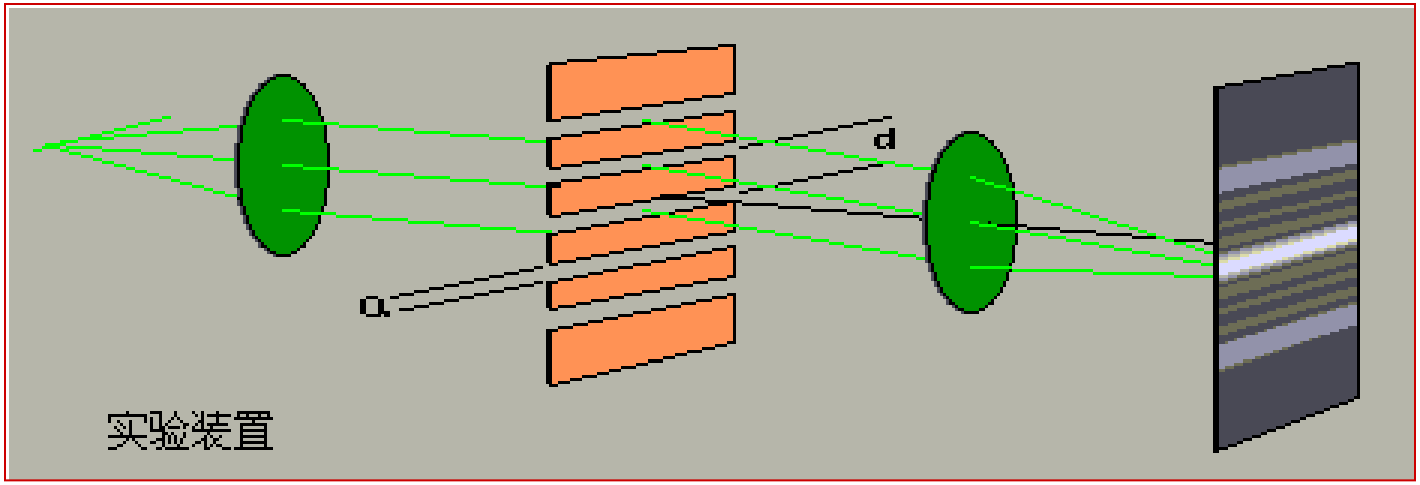
b是不透光(或不反光)部分的宽度

$$\boxed{d = a + b}$$

— 光栅常量

二　光栅衍射

装置

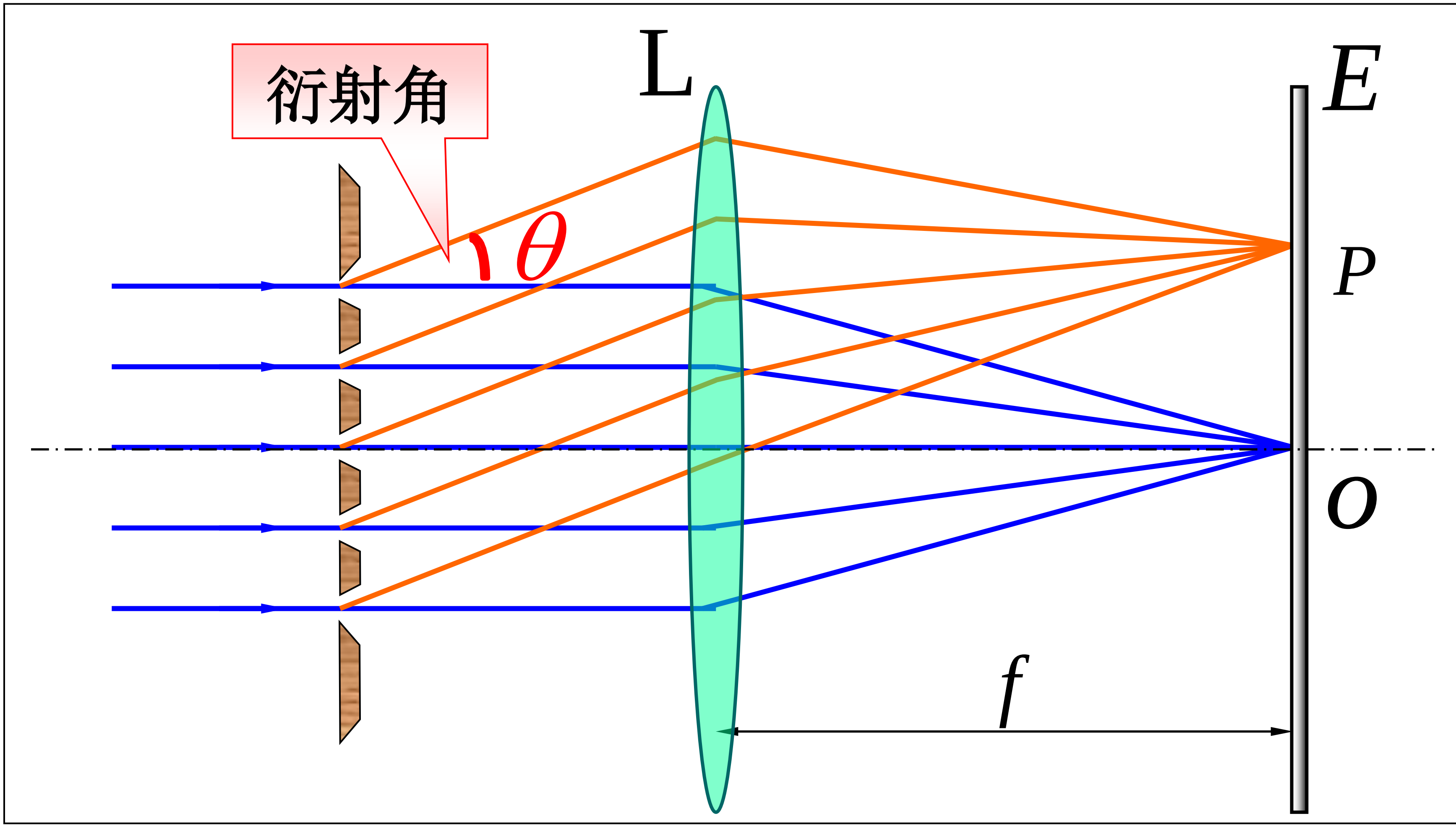


思路：

①先不计缝宽，将每缝光强各集中于一线光源讨论N个几何线光源的干涉；

② 计及缝宽：加上N个单缝衍射的影响。

光栅衍射



光栅衍射条纹的形成

光栅的衍射条纹是衍射和干涉的总效果

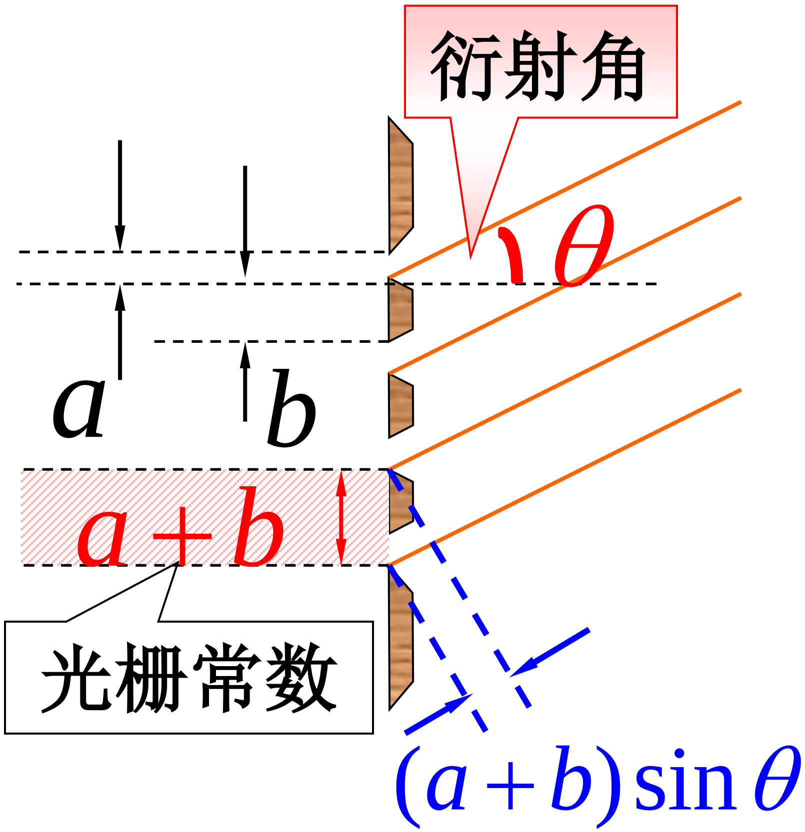
相邻两缝间的光程差：

$$\Delta=(a+b)\sin\theta$$

明纹位置

$$(a+b)\sin\theta=\pm k\lambda$$

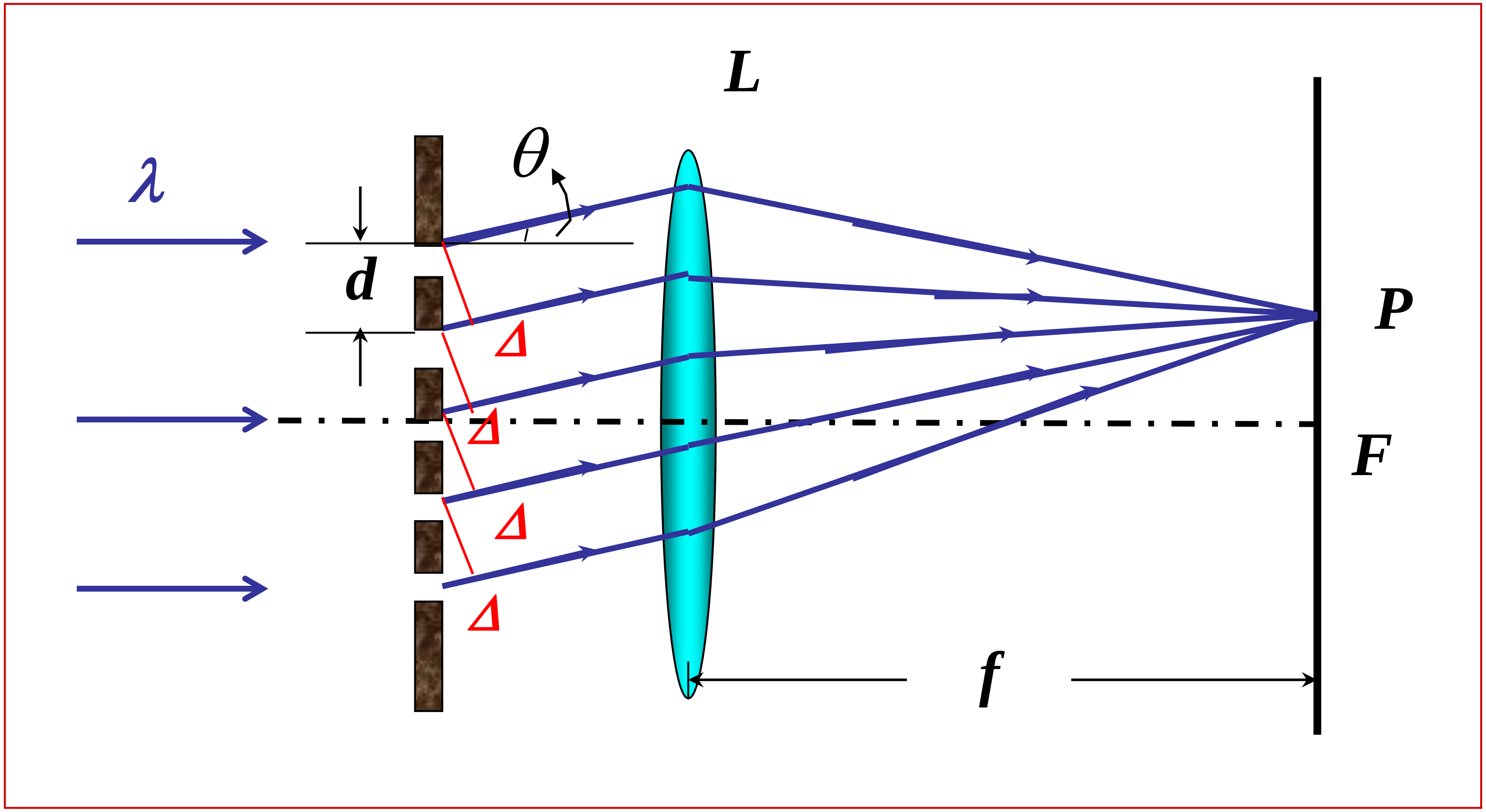
$$(k=0,1,2,\cdots)$$



$$\left(\begin{array}{ll} a: & \text{透光部分的宽度} \\ b: & \text{不透光部分的宽度} \end{array}\right)$$

光栅常数：$10^{-5}\sim10^{-6}\,\mathrm{m}$

N 缝干涉光强分布



明纹主极大条件 $\boxed{d\sin\theta = \pm k\lambda \qquad (k = 0, 1, 2, \cdots)}$

——光栅方程

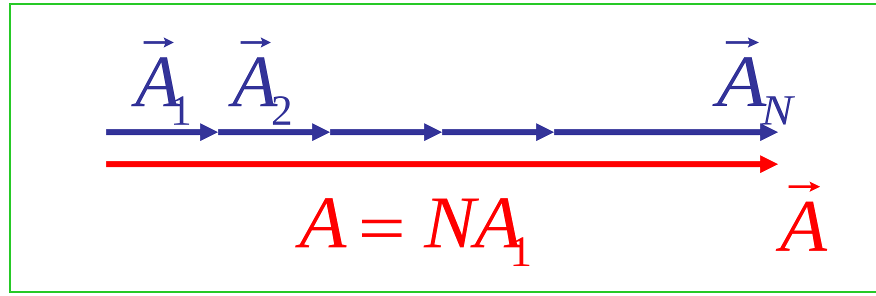
相邻两缝间的相位差：$\delta = 2\pi\dfrac{\Delta}{\lambda} = \dfrac{2\pi}{\lambda}\cdot \boldsymbol{d}\sin\boldsymbol{\theta}$

条纹特点（半定量讨论）

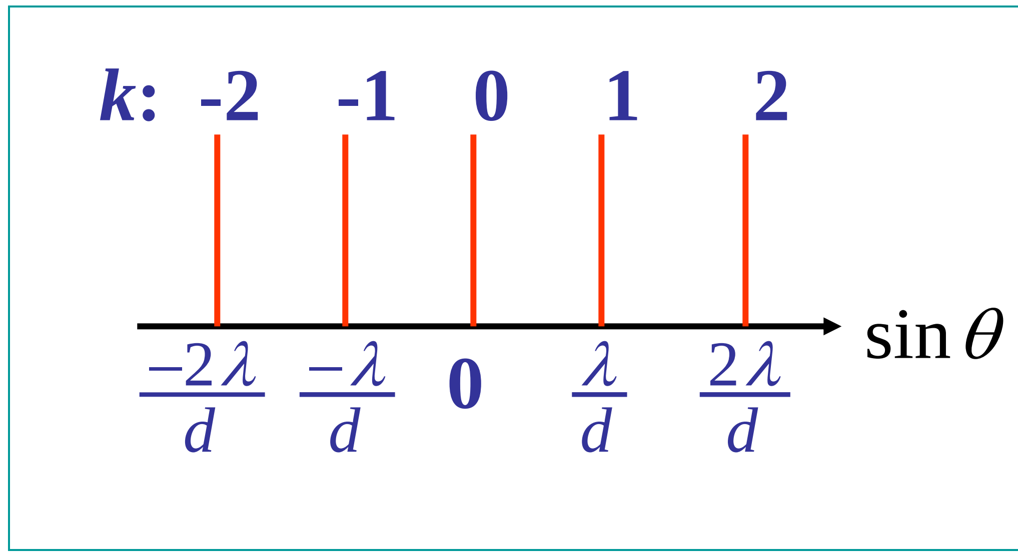
明纹中心（主明纹、主极大）条件

$$\varDelta = d\sin\theta = k\lambda$$

$$(k = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots)$$



位置： $\sin\theta = k\dfrac{\lambda}{d}$



亮度： $I = N^2 I_1$

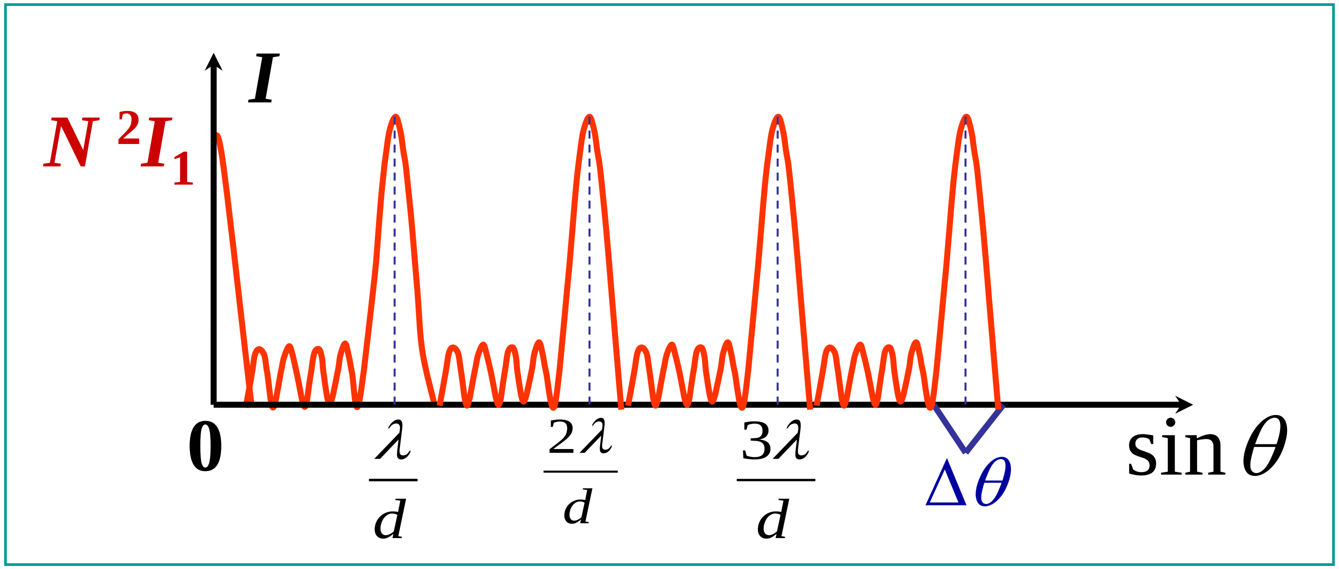
最高级次：

$$|\sin\theta| < 1$$

$$k_{\mathrm{m}} < \frac{d}{\lambda} \qquad (\text{例：} \frac{d}{\lambda} = 4\cdot 2, k_{\mathrm{m}} = 4; \frac{d}{\lambda} = 4, k_{\mathrm{m}} = 3)$$

不计缝宽，*N*个几何线光源干涉的结果：

暗区（*N*-1条暗纹，*N*-2条次级大）背景上出现细窄明亮的主明纹

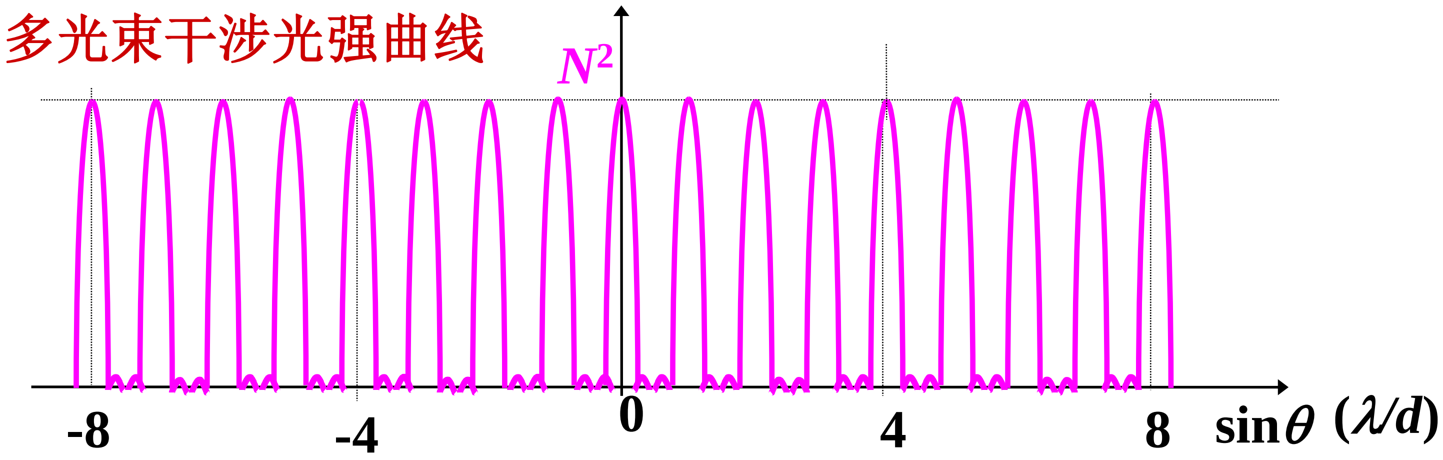


光栅公式：$d\sin\theta = k\lambda \quad (k = 0, \pm1, \pm2, \cdots)$

亮度：$I = N^2 I_1$

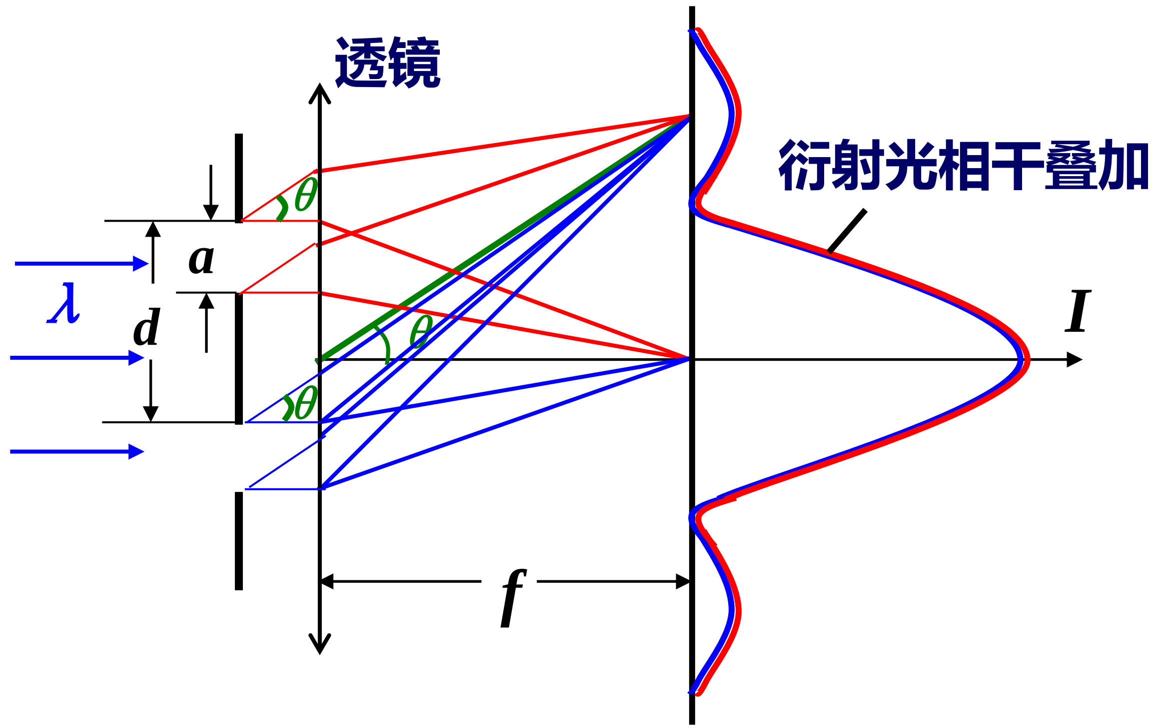
不考虑衍射时，多缝干涉的光强分布图：

$$N = 4 \quad , \quad d = 4a$$



分析 N个单缝衍射的影响

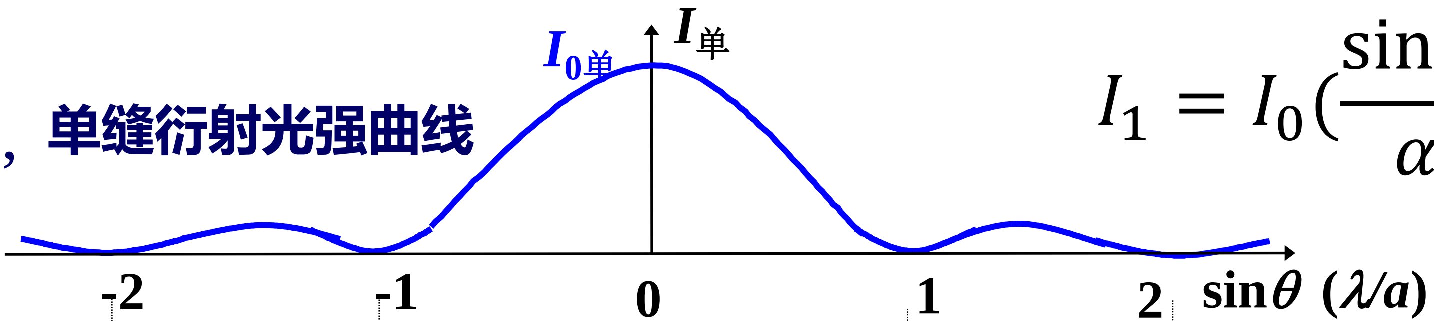
N 个单缝衍射的影响彼此是否一致？



每条缝的单缝衍射条纹彼此重合

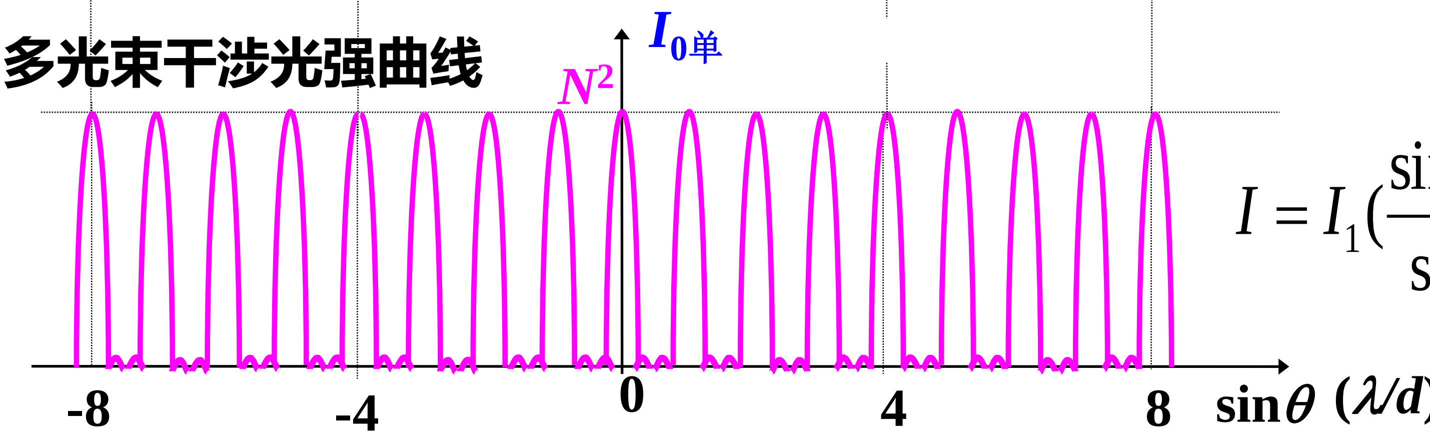
$N = 4$ ，单缝衍射光强曲线

$d = 4a$



$$I_1 = I_0\left(\frac{\sin\alpha}{\alpha}\right)^2$$

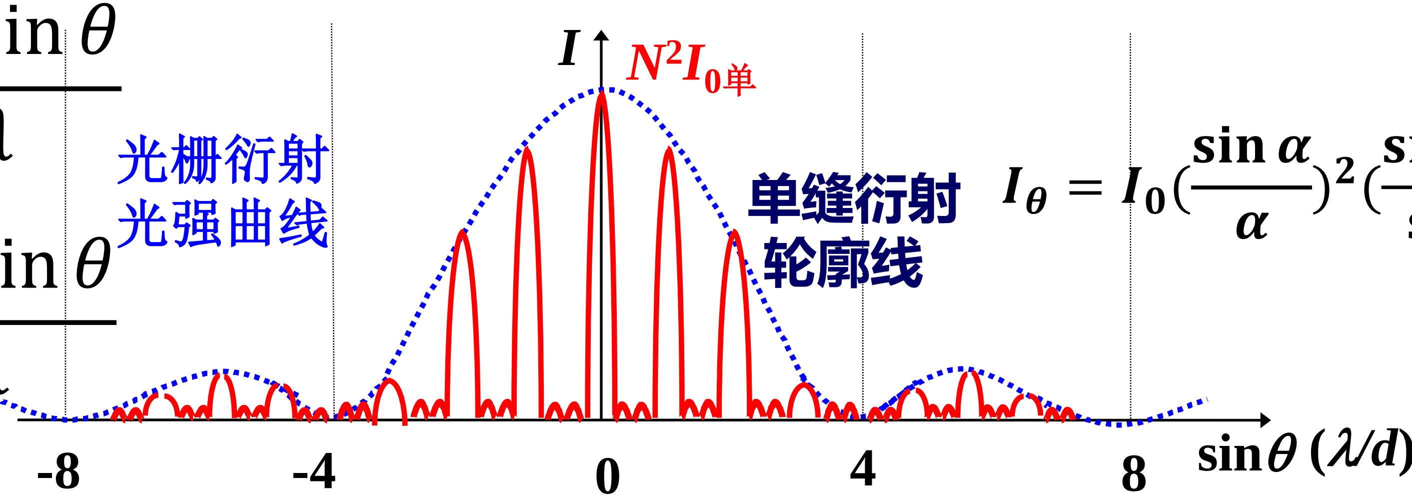
多光束干涉光强曲线



$$I = I_1\left(\frac{\sin N\beta}{\sin\beta}\right)^2$$

$$\beta = \frac{\pi d\sin\theta}{\lambda}$$

$$\alpha = \frac{\pi a\sin\theta}{\lambda}$$

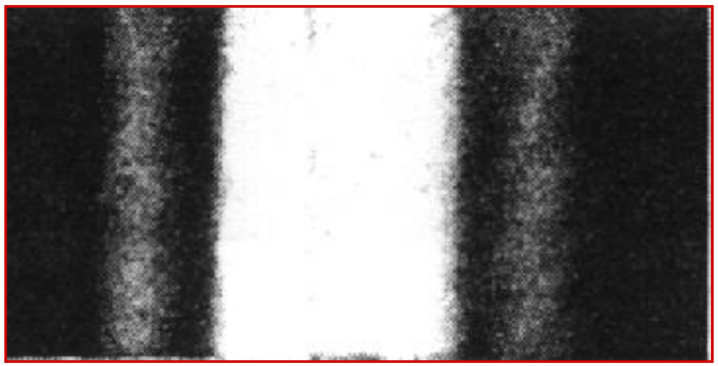


$$I_\theta = I_0\left(\frac{\sin\alpha}{\alpha}\right)^2\left(\frac{\sin N\beta}{\sin\beta}\right)^2$$

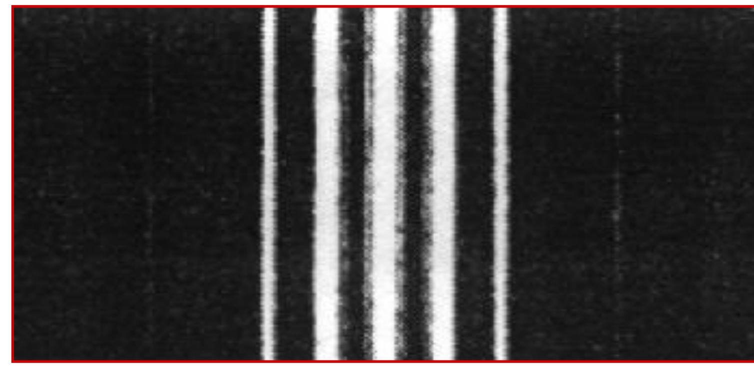
返回 退出

光栅中狭缝条数越多明纹越亮

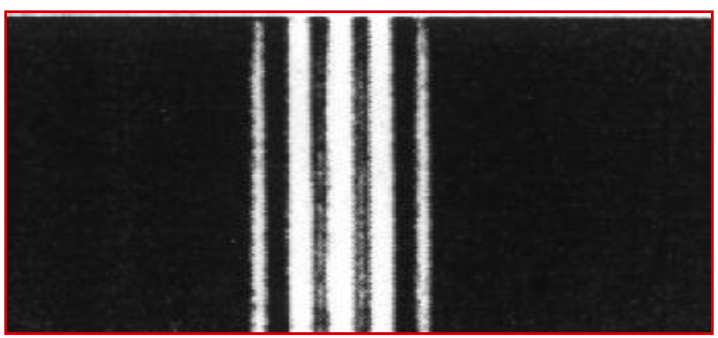
亮纹的光强 $I = N^2 I_0$ （N：狭缝数，I_0：单缝光强）



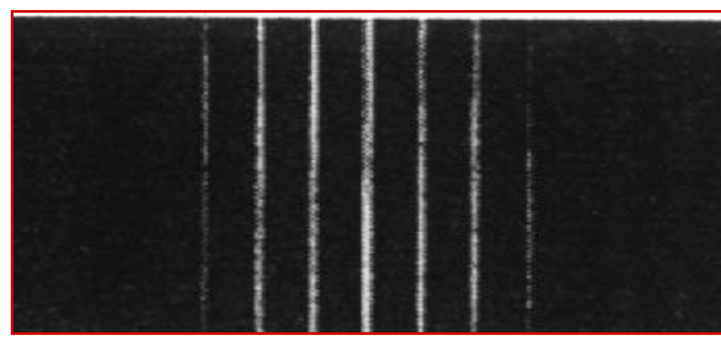
1 条 缝



5 条 缝



3 条 缝



20 条 缝

缺级条件：

光栅主明纹：
$$d\sin\boldsymbol{\theta} = (a+b)\sin\boldsymbol{\theta} = k\lambda$$
$$(k = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots)$$

单缝暗纹：$a\sin\boldsymbol{\theta} = k'\lambda \quad (k' = \pm 1, \pm 2, \cdots)$

若同时满足，则第 **k** 级主明纹消失。

即：当 $\dfrac{d}{a} = \dfrac{a+b}{a} = \dfrac{k}{k'}$ **(为整数比)**

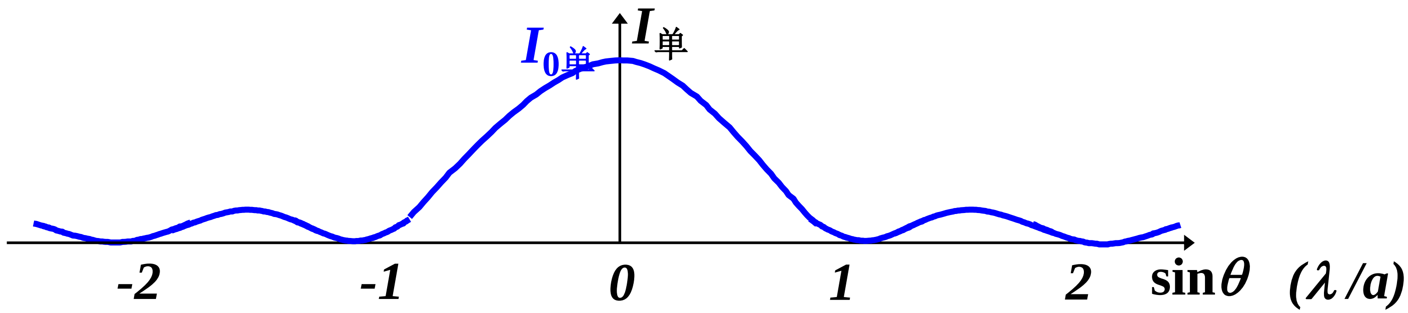
缺级： $k = \dfrac{d}{a}\cdot k' \quad (k' = \pm 1, \pm 2, \cdots)$

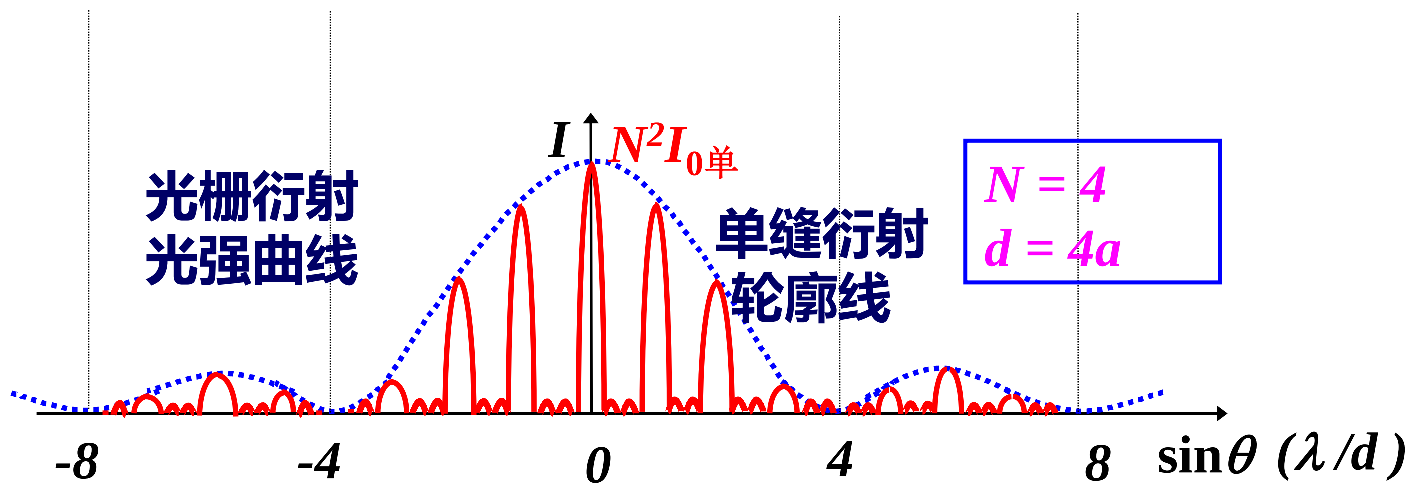
返回 退出

缺级

$\dfrac{b}{a}$ 为整数比时，明纹会出现缺级

$N = 4$，
$d = 4a$ 的单缝衍射和光栅衍射的光强分布曲线



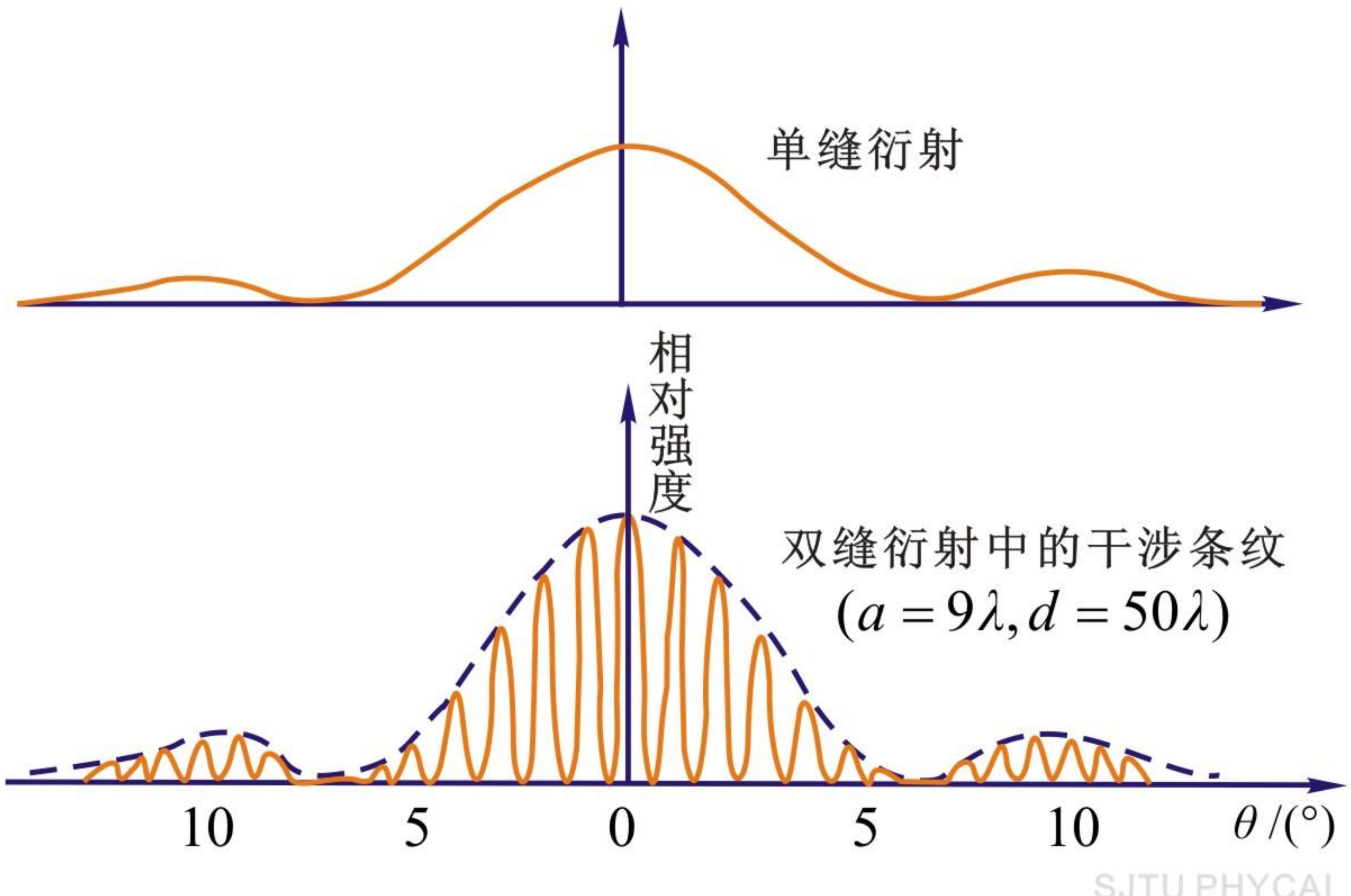


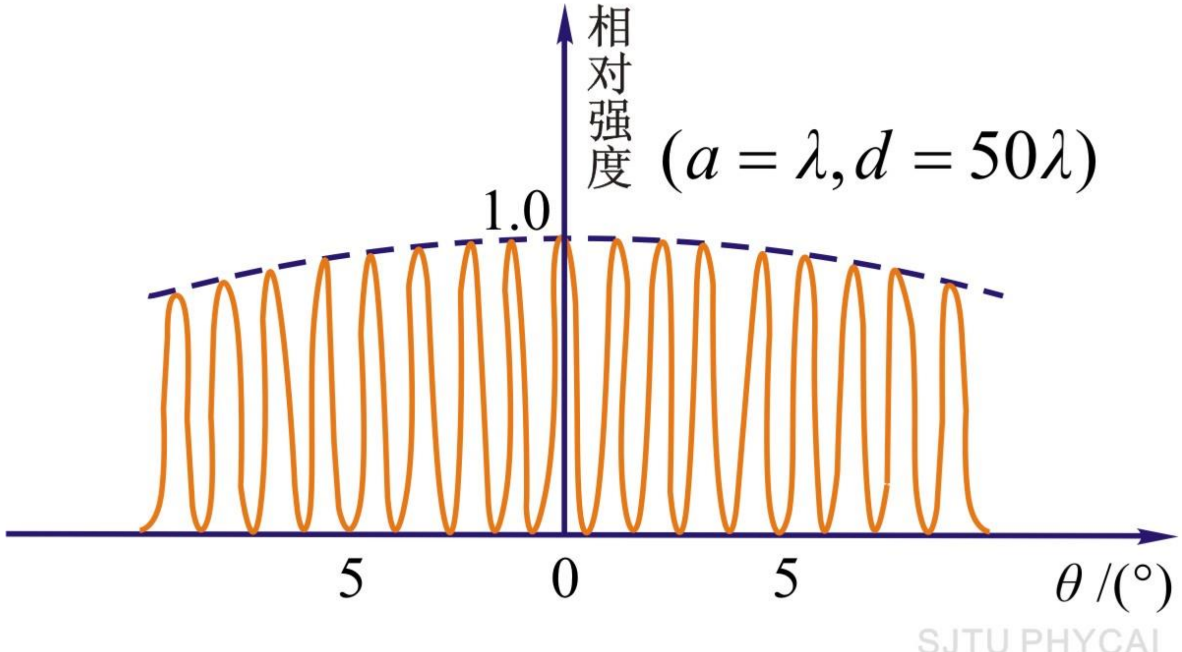
主极大缺±4, ±8…级

返回 退出

干涉和衍射的区别和联系

双缝干涉的光强分布受到单缝衍射光强分布的调制——双缝衍射





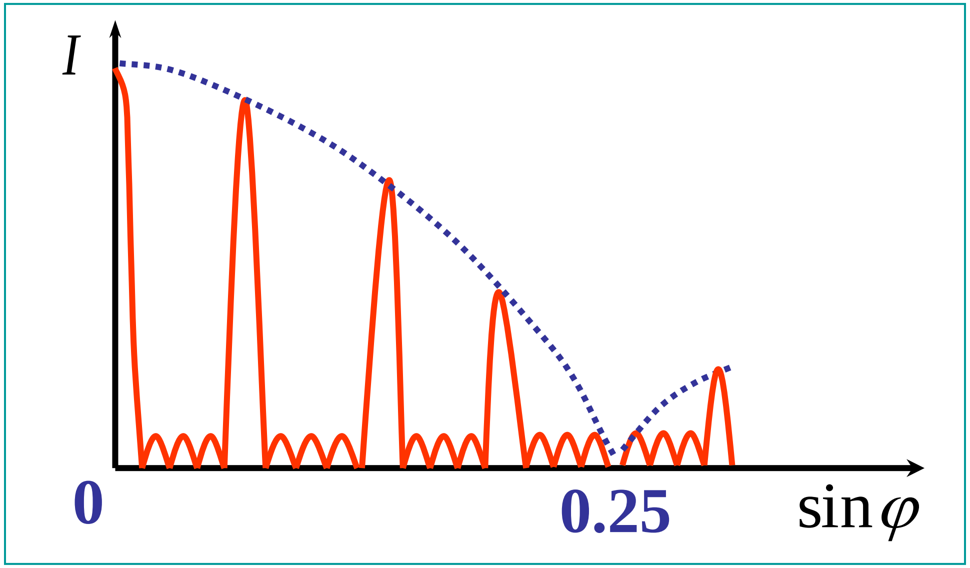
光栅缝宽越小，衍射对干涉条纹的调制越弱，此时光栅衍射可称为多光束干涉

从光波相干叠加来看，干涉和衍射无本质区别。

通常有限光束的相干叠加称干涉，无限子波的相干叠加称衍射。

例： 入射光λ=500nm, 由图中衍射光强分布确定

(1) 缝数N=? (2) 缝宽a =? (3)光栅常数d =a+b=?



解： (1) $N = 5$

(2) $a\sin\varphi = k'\lambda$

$k' = 1 \quad \sin\varphi = 0\cdot 25$

$$a = \frac{5000}{0\cdot 25} = 2\times10^4\ \text{Å}$$

(3) $d\sin\varphi = k\lambda \qquad k = 4 \qquad \sin\varphi = 0\cdot 25$

$$d = \frac{4\times 5000}{0\cdot 25} = 8\times10^4\ \text{Å}$$

或由缺级 $\dfrac{d}{a} = 4 \qquad d = 4a = 8\times10^4\ \text{Å}$

例12-13 用每毫米500条栅纹的光栅，观察钠光谱线（λ=590 nm）问：（1）光线垂直入射；（2）光线以入射角30° 入射时，最多能看到几级条纹？

解： （1） $(a+b)\sin\varphi = k\lambda$

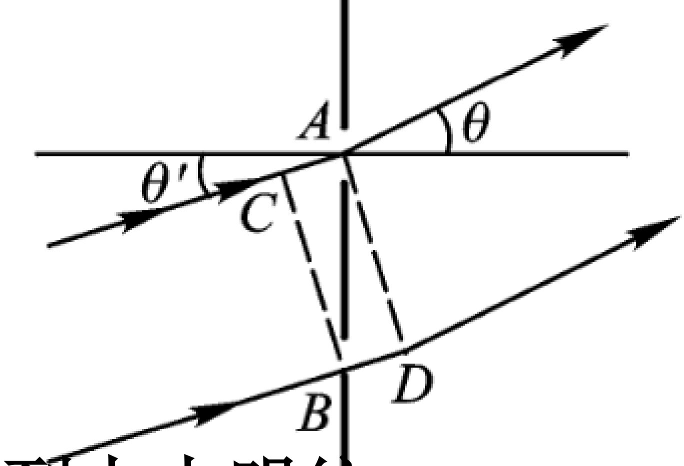
$$k = \frac{a+b}{\lambda}\sin\varphi \qquad -\frac{\pi}{2} < \varphi < \frac{\pi}{2} \qquad |\sin\varphi| < 1$$

$$a+b = \frac{1\times 10^{-3}}{500} = 2\times 10^{-6}\,\mathrm{m}$$

$$-\frac{a+b}{\lambda} < k < \frac{a+b}{\lambda} \qquad \frac{a+b}{\lambda} = \frac{2\times 10^{-6}}{5900\times 10^{-10}} \approx 3.39$$

最多能看到 k =3,2,1,0,-1,-2,-3 级条纹。

（2）$(a+b)\sin\theta-(a+b)\sin\theta'=k\lambda$



$$k=\frac{(a+b)(\sin\theta-\sin\theta')}{\lambda}$$

$k=0,\theta'=\theta=30^{\circ}$, 沿入射方向得到中央明纹

$$<\frac{2\times10^{-6}\times(\sin 90^{\circ}-\sin 30^{\circ})}{5900\times10^{-10}}\approx1.7$$

上侧最大：$k=1$

$$k=\frac{(a+b)(\sin\theta-\sin\theta')}{\lambda}$$

$$>\frac{2\times10^{-6}\times(\sin(-90^{\circ})-\sin 30^{\circ})}{5900\times10^{-10}}\approx-5.09$$

下侧最大：k = -5

最多能看到 k =-5,-4,-3,-2,-1,0, 1 级条纹。

例12-14 N根天线沿一水平直线等距离排列组成天线列阵，每根天线发射同一波长λ的球面波，从第1根天线到第N根天线，相位依次落后$\pi/2$，天线间距$\lambda/2$，求在什么方向上，天线阵列的电磁波最强。

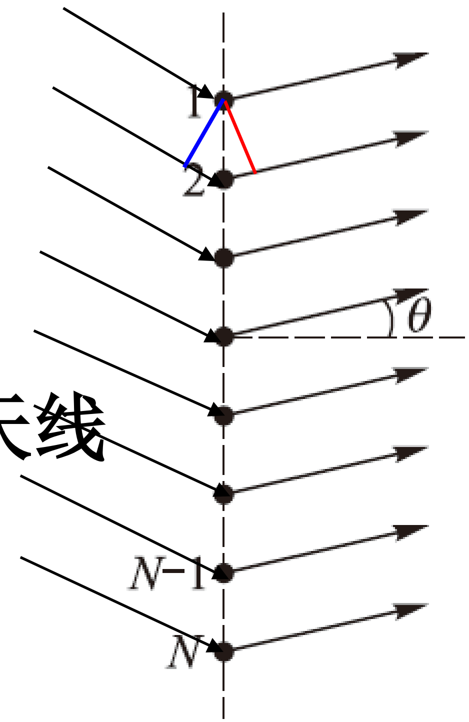
解：

将每根天线发射的球面波，视为子波

阵列可视为光栅

相邻天线的相位差，等效的波程差为

$$\Delta\varphi = \frac{\pi}{2} = \frac{2\pi}{\lambda}\delta' \Rightarrow \delta' = \frac{\lambda}{4}$$



两根相邻天线在θ方向的波程差为（以天线转到法线顺时针为正）

$$\delta = d\sin\theta + \delta'$$

干涉主极大满足

$$\frac{\lambda}{2}\sin\theta + \frac{\lambda}{4} = \pm k\lambda \Rightarrow \theta = \arcsin(\pm 2k - \frac{1}{2})$$

零级主极大的方向，即电磁波最强方向

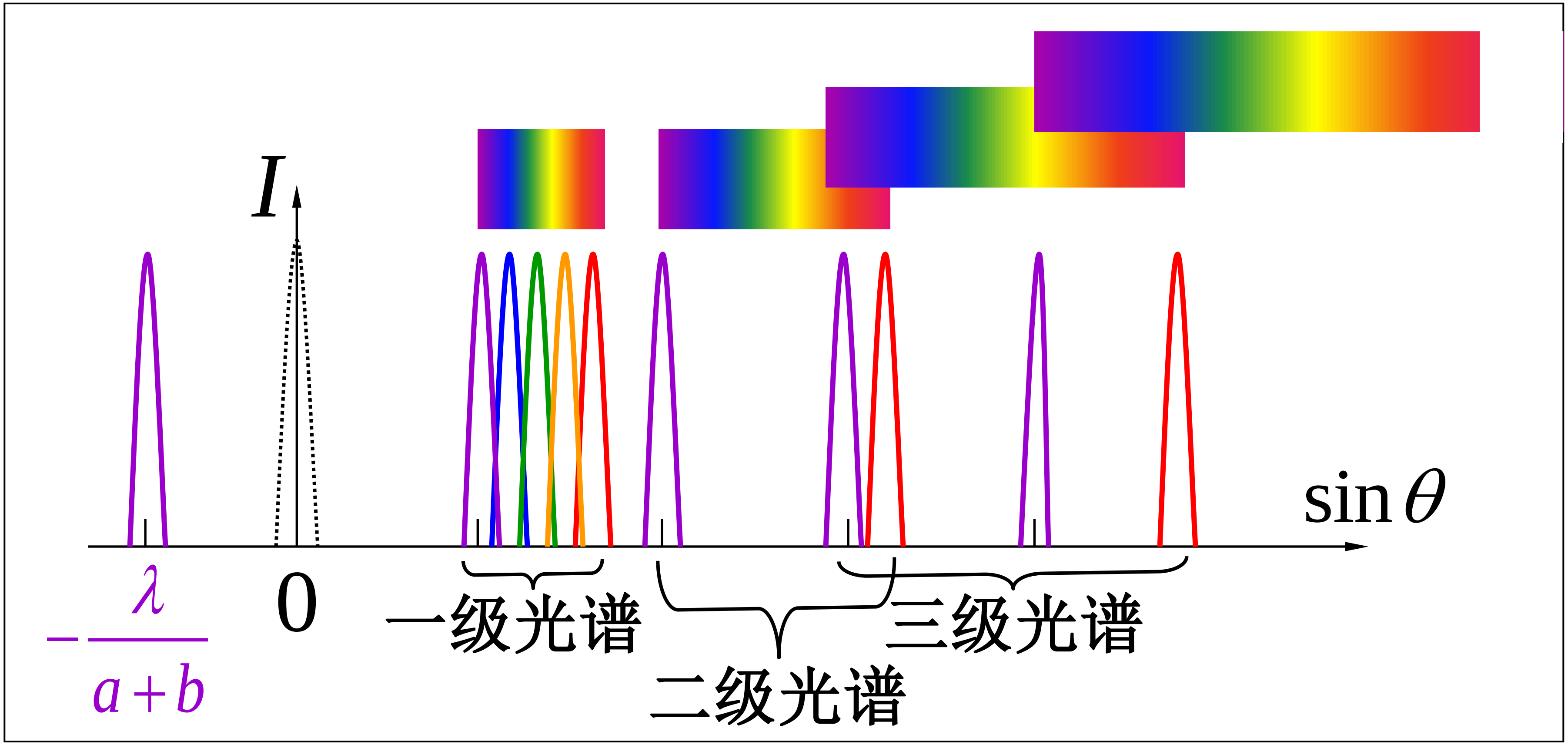
$K = 0$时，　　$\theta = -30^\circ$

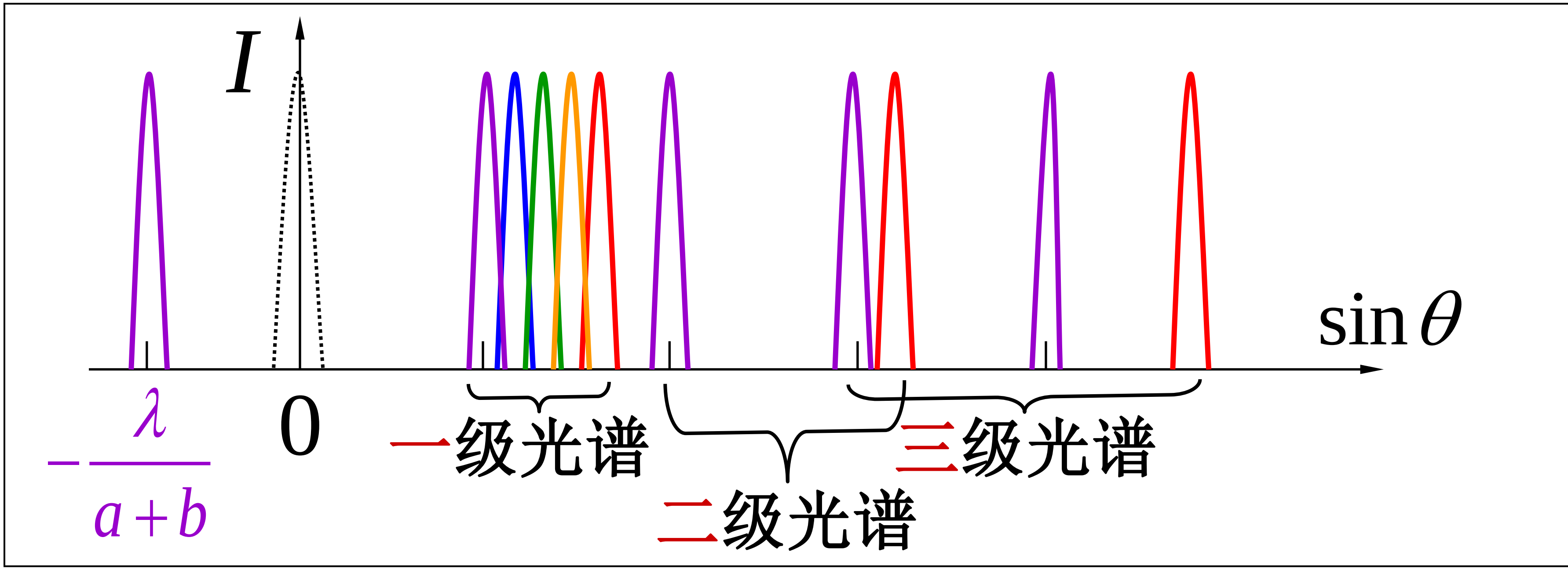
三　衍射光谱

◆ 衍射光谱

$$(a+b)\sin\theta = \pm k\lambda \qquad (k=0,1,2,\cdots)$$

入射光为白光时，λ不同，θ_k不同，按波长分开形成光谱.





例如　二级光谱重叠部分光谱范围

$$\begin{cases}(a+b)\sin\theta = 3\lambda_{紫} \\ (a+b)\sin\theta = 2\lambda\end{cases}$$

$$\lambda = 400 \sim 760\text{nm}$$

$$\lambda = \frac{3}{2}\lambda_{紫} = 600\text{nm}$$

二级光谱重叠部分:

$600 \sim 760\text{nm}$

◀ ▶ 返回 退出

例： 一平行衍射光栅，每厘米刻1000条刻痕，用可见光垂直入射，缝后透镜焦距f = 100cm。

(1) 求光栅衍射第一级完整可见光谱所占宽度。

(2) 证明第二、三级光谱重叠。

(3) 用红光$\lambda = 7000\,\mathring{A}$入射，$b = 3a$，最多看到主明纹条数?

解：(1) $d = a + b = 10^{-5}\,\text{m}$ $\quad d\sin\varphi = k\lambda$

$$k = 1: \quad \lambda_1 = 4\times10^{-7}\,\text{m} \qquad \sin\varphi_1 = \frac{\lambda_1}{d} = 0\cdot04$$

$$\lambda_2 = 7\times10^{-7}\,\text{m} \qquad \sin\varphi_2 = \frac{\lambda_2}{d} = 0\cdot07$$

$$\Delta x = f(\mathrm{tg}\varphi_2 - \mathrm{tg}\varphi_1) \approx f(\sin\varphi_2 - \sin\varphi_1) = 3(\text{cm})$$

(2) 红光 $k=2$ $\sin\varphi=\dfrac{2\lambda_1}{d}=0.14$

紫光 $k=3$ $\sin\varphi'=\dfrac{3\lambda_2}{d}=0.12<0.14$

所以 二、三级光谱重叠

(3) $k_m<\dfrac{d}{\lambda}=14.2$ $k_{max}=14$

缺级 $d=a+b=4a$

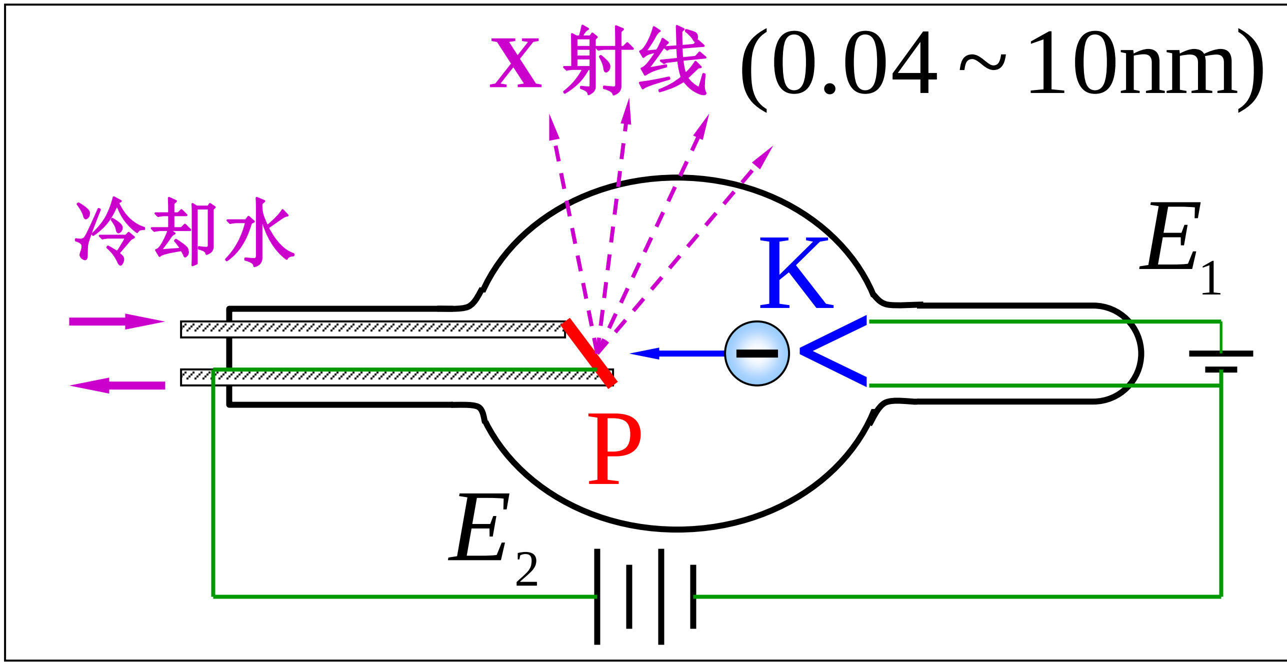
$$\left.\begin{aligned} d\sin\varphi&=k\lambda \\ a\sin\varphi&=k'\lambda \end{aligned}\right\} \qquad \begin{aligned} &k=4k' \\ &k'=\pm1,\pm2,\pm3 \end{aligned}$$

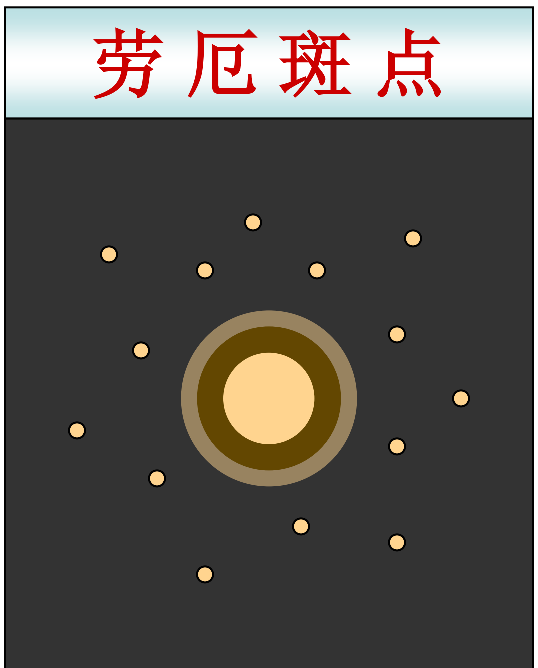
第 12、8、4、-4、-8、-12 级主明纹缺级

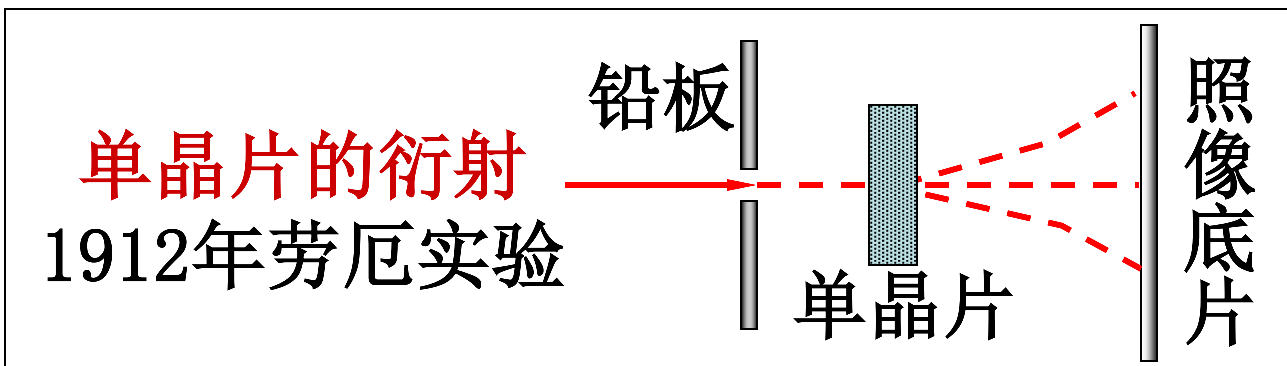
最多可见主明纹 $2\times14+1-6=23$条

* § 12-11 X射线的衍射

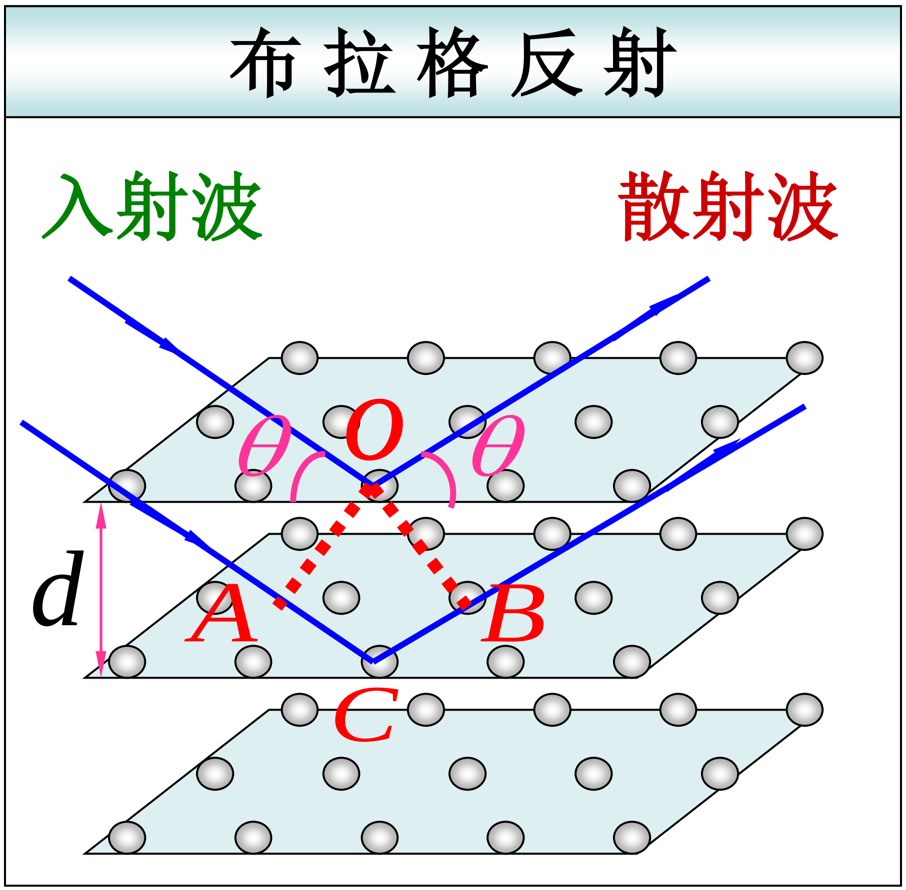
1895年伦琴发现，受高速电子撞击的金属会发射一种穿透性很强的射线称 X 射线。







1913年英国布拉格父子提出了一种解释X射线衍射的方法，给出了定量结果，并于1915年荣获物理学诺贝尔奖.



晶面间距 d　　掠射角 θ

$$\Delta = AC + CB$$

$$= 2d\sin\theta$$

相邻两个晶面反射的两X射线干涉加强的条件

布拉格公式

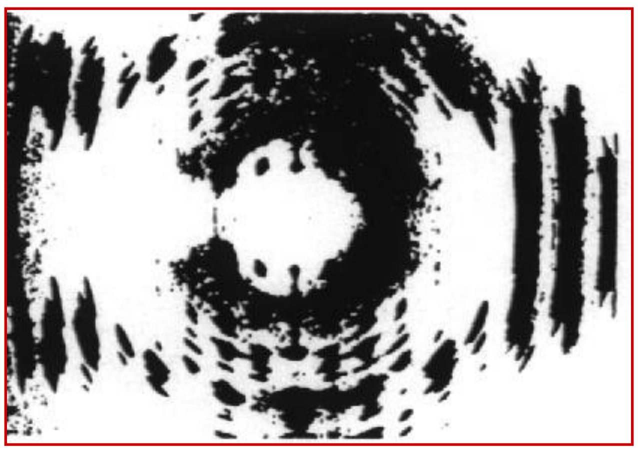
$$\boxed{2d\sin\theta = k\lambda}$$

$$k = 0,1,2,\cdots$$

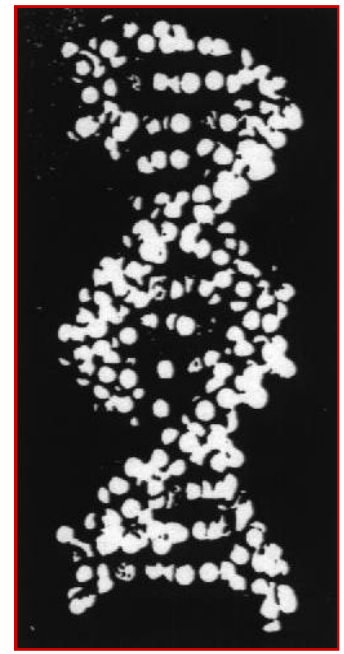
返回　退出

布拉格公式 $\boxed{2d\sin\theta = k\lambda}$ $k = 0,1,2,\cdots$

用途 测量射线的波长研究X射线谱，进而研究原子结构；研究晶体的结构，进一步研究材料性能. 例如对大分子 DNA 晶体的成千张的X射线衍射照片的分析，显示出DNA分子的双螺旋结构.



DNA 晶体的X衍射照片



DNA 分子的双螺旋结构