§5.3 实对称阵的对角化

定理： 实对称阵的特征值为**实数**.

证明： 设 λ 是实对称矩阵A的特征值，x是对应的特征向量，

则有 $Ax=\lambda x, A\bar{x}=\bar{\lambda}\bar{x}, \bar{\lambda}\bar{x}^T x=(A\bar{x})^T x=\bar{x}^T(Ax)=\lambda\bar{x}^T x,$

由此可得 $\bar{\lambda}=\lambda$.

定理： 设 λ_1,λ_2 是实对称矩阵A的两个特征值，p_1, p_2 是对应的特征向量，若 $\lambda_1 \neq \lambda_2$ ，则 p_1, p_2 **正交**.

（实对称矩阵对应不同特征值的特征向量必正交）

证明： $\lambda_1 p_1^T p_2=(Ap_1)^T p_2=p_1^T(Ap_2)=\lambda_2 p_1^T p_2,$

$\lambda_1 \neq \lambda_2 \Rightarrow p_1^T p_2=0.$

定理：设A为n阶实对称阵，则必有n阶正交阵P，使得

$$P^{-1}AP = P^{T}AP = \Lambda = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n \end{pmatrix}$$

其中 $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n$ 是实对称矩阵A的特征值.

上述定理表明n阶实对称阵一定有n个线性无关的特征向量.

推论: 设 λ 是实对称矩阵A的k重特征值，则矩阵A对应于特征值 λ 必有k个线性无关的特征向量.

证明: 由于矩阵A与对角矩阵 $\Lambda=diag(\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n)$ 相似，从而 $A-\lambda E$ 与 $\Lambda-\lambda E=diag(\lambda_1-\lambda,\lambda_2-\lambda,\cdots,\lambda_n-\lambda)$相似

当 λ 是A的k重特征值时，$\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n$ 这n个特征值中有k个等于λ，有n-k个不等于λ，从而对角阵$\Lambda-\lambda E$ 的对角元恰有k个等于0，于是 $R(\Lambda-\lambda E)=n-k$，而

$$R(A-\lambda E)=R(\Lambda-\lambda E)$$

故 $R(A-\lambda E)=n-k.$

实对称矩阵对角化的方法与步骤（一定要掌握）

（1）求出A的特征值与特征值对应的线性无关的特征向量;

（2）如果特征值是单根，对应线性无关的特征向量只有一个，将其单位化; 如果特征值是二（多）重根，对应线性无关的特征向量有二（多）个，则先用施密特正交化方法，将其正交化，然后单位化;

（3）将这些正交单位向量构成正交矩阵P(注意对角阵的主对角线上元素（即A的特征值）的排列次序与正交阵的列向量的排列次序对应).

注意：正交阵P不唯一.

例：设 $A=\begin{pmatrix}4&2&2\\2&4&2\\2&2&4\end{pmatrix}$，求正交阵$P$，使得$P^{-1}AP$为对角阵.

解：$|A-\lambda E|=\begin{vmatrix}4-\lambda&2&2\\2&4-\lambda&2\\2&2&4-\lambda\end{vmatrix}=-(\lambda-2)^2(\lambda-8)$，令

$$-(\lambda-2)^2(\lambda-8)=0$$

得A的特征值为 $\lambda_1=8,\lambda_2=\lambda_3=2.$

当$\lambda_1=8$ 时，方程组 $(A-8E)x=0$ 的基础解系为 $\xi_1=(1,1,1)^T$

当$\lambda_2=\lambda_3=2$时，方程组$(A-2E)x=0$ 的基础解系为

$$\xi_2=(-1,1,0)^T,\xi_3=(-1,0,1)^T$$

将 $\xi_1=(1,1,1)^T$ 单位化得 $p_1=(\frac{1}{\sqrt{3}},\frac{1}{\sqrt{3}},\frac{1}{\sqrt{3}})^T$

将 $\xi_2=(-1,1,0)^T,\xi_3=(-1,0,1)^T$ 正交化，得

$$\eta_2=(-1,1,0)^T,\eta_3=(1,1,-2)^T$$

然后将 $\eta_2=(-1,1,0)^T,\eta_3=(1,1,-2)^T$ 单位化，得

$$p_2=(-\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{1}{\sqrt{2}},0)^T,p_3=(\frac{1}{\sqrt{6}},\frac{1}{\sqrt{6}},\frac{-2}{\sqrt{6}})^T$$

故正交阵 $P=\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{-1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}}\\ \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}}\\ \frac{1}{\sqrt{3}} & 0 & \frac{-2}{\sqrt{3}}\end{pmatrix}$，使得 $P^{-1}AP=\begin{pmatrix}8 & & \\ & 2 & \\ & & 2\end{pmatrix}$.

例： 已知$A=\begin{pmatrix}2&0&0\\0&0&1\\0&1&x\end{pmatrix}$与$B=\begin{pmatrix}2&0&0\\0&y&0\\0&0&-1\end{pmatrix}$相似，求

（1）x与y的值；（2）求一个满足$P^{-1}AP=B$的正交阵P.

简解： (1) 由于A与B相似，所以$\begin{cases}tr(A)=tr(B)\\|A|=|B|\end{cases}$,

即 $\begin{cases}2+x=1+y\\-2=-2y\end{cases}$，解得$\begin{cases}x=0\\y=1\end{cases}$.

(2) 方法与步骤同上例，参考答案 $P=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&\frac{1}{\sqrt{2}}&\frac{1}{\sqrt{2}}\\0&\frac{1}{\sqrt{2}}&\frac{-1}{\sqrt{2}}\end{pmatrix}$

例： 设3阶实对称矩阵A的特征值为6，3，3，且与特征值6对应的特征向量为$\alpha_1=(1,1,1)^T$，求A.

解： 由于属于实对称矩阵不同特征值的特征向量一定正交，所以属于特征值3的特征向量$(x_1,x_2,x_3)^T$必与$\alpha_1=(1,1,1)^T$正交，故

$$x_1+x_2+x_3=0,$$

取其基础解系为$\alpha_2=(-1,1,0)^T,\alpha_3=(1,1,-2)^T$.

由于$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$为正交向量组，所以可直接单位化，

$$\xi_1=\left(\frac{1}{\sqrt{3}},\frac{1}{\sqrt{3}},\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^T,\xi_2=\left(-\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{1}{\sqrt{2}},0\right)^T,\xi_3=\left(\frac{1}{\sqrt{6}},\frac{1}{\sqrt{6}},-\frac{2}{\sqrt{6}}\right)^T,$$

因此正交矩阵 $P=\begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{-1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & 0 & \frac{-2}{\sqrt{6}} \end{pmatrix}$.

$$A=P\begin{pmatrix} 6 & & \\ & 3 & \\ & & 3 \end{pmatrix}P^{-1}=P\begin{pmatrix} 6 & & \\ & 3 & \\ & & 3 \end{pmatrix}P^{T}$$

$$=\begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{-1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & 0 & \frac{-2}{\sqrt{6}} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 6 & & \\ & 3 & \\ & & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{-1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{-2}{\sqrt{6}} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 4 & 1 & 1 \\ 1 & 4 & 1 \\ 1 & 1 & 4 \end{pmatrix}.$$

例：设 $A=\begin{pmatrix}2&-1\\-1&2\end{pmatrix}$，求 A^n .

分析:

- 数学归纳法

$$A^2=\begin{pmatrix}2&-1\\-1&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2&-1\\-1&2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}5&-4\\-4&5\end{pmatrix}=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}1+3^2&1-3^2\\1-3^2&1+3^2\end{pmatrix}$$

$$A^3=A^2A=\begin{pmatrix}5&-4\\-4&5\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2&-1\\-1&2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}14&-13\\-13&14\end{pmatrix}=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}1+3^3&1-3^3\\1-3^3&1+3^3\end{pmatrix}$$

$$A^n=A^{n-1}A=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}1+3^{n-1}&1-3^{n-1}\\1-3^{n-1}&1+3^{n-1}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2&-1\\-1&2\end{pmatrix}=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}1+3^n&1-3^n\\1-3^n&1+3^n\end{pmatrix}$$

例4: 设$A=\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$，求 A^n .

分析:

- 数学归纳法
- 因为 A 是对称阵，所以 A 可以对角化.

$$|A-\lambda E|=\begin{vmatrix} 2-\lambda & -1 \\ -1 & 2-\lambda \end{vmatrix}=(2-\lambda)^2+1=(\lambda-1)(\lambda-3)=0$$

求得 A 的特征值 $\lambda_1=1$，$\lambda_2=3$.

$$\Lambda=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \qquad \Lambda^n=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3^n \end{pmatrix}$$

下面求满足 $P^{-1}AP=\Lambda$ 的正交矩阵 P.

当 $\lambda_1 = 1$ 时， 解方程组 $(A-E)x = 0$.

$$A-E=\begin{pmatrix}1 & -1\\ -1 & 1\end{pmatrix}\overset{r}{\sim}\begin{pmatrix}1 & -1\\ 0 & 0\end{pmatrix},\ \text{得基础解系}\ \xi_1=\begin{pmatrix}1\\ 1\end{pmatrix},\ p_1=\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}}\\ \frac{1}{\sqrt{2}}\end{pmatrix}.$$

当 $\lambda_2 = 3$ 时， 解方程组 $(A-3E)x = 0$.

$$A-3E=\begin{pmatrix}-1 & -1\\ -1 & -1\end{pmatrix}\overset{r}{\sim}\begin{pmatrix}1 & 1\\ 0 & 0\end{pmatrix},\ \text{得基础解系}\ \xi_2=\begin{pmatrix}1\\ -1\end{pmatrix},\ p_2=\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}}\\ \frac{-1}{\sqrt{2}}\end{pmatrix}.$$

$$\text{若}\ P=(p_1,p_2)=\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}}\\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{-1}{\sqrt{2}}\end{pmatrix},\ \text{则}\ P^{-1}AP=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 3\end{pmatrix}.$$

于是 $P^{-1}AP=\begin{pmatrix}1&0\\0&3\end{pmatrix}=\Lambda$，即 $A=P\Lambda P^{-1}$

$$A^n=(P\Lambda P^{-1})^n=P\Lambda^nP^{-1}=P\Lambda^nP^{\mathrm{T}}$$

$$=\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}}&\frac{1}{\sqrt{2}}\\\frac{1}{\sqrt{2}}&\frac{-1}{\sqrt{2}}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0\\0&3\end{pmatrix}^n\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}}&\frac{1}{\sqrt{2}}\\\frac{1}{\sqrt{2}}&\frac{-1}{\sqrt{2}}\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}}&\frac{1}{\sqrt{2}}\\\frac{1}{\sqrt{2}}&\frac{-1}{\sqrt{2}}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0\\0&3^n\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}}&\frac{1}{\sqrt{2}}\\\frac{1}{\sqrt{2}}&\frac{-1}{\sqrt{2}}\end{pmatrix}=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}1+3^n&1-3^n\\1-3^n&1+3^n\end{pmatrix}$$