合 肥 工 业 大 学 试 卷（A）

2019～2020 学年第 一 学期 课程代码 1400071B 课程名称 线性代数 学分 2.5 课程性质:必修☑、选修☐、限修☐ 考试形式:开卷☐、闭卷☑

专业班级（教学班）________ 考试日期 2019 年 12 月 1 日 19:00-21:00 命题教师 集体 系（所或教研室）主任审批签名________

一、填空题（每小题 4 分，共 20 分）

1. 设 $\boldsymbol{A}$ 为 3 阶方阵，$|\boldsymbol{A}|=-\dfrac{1}{3}$，则 $\left|(4\boldsymbol{A})^{-1}+3\boldsymbol{A}^*\right|=$________.

2. 已知 4 阶行列式第三行元素依次为 $-1,0,2,4$，第四行元素对应的代数余子式依次为 $5,10,\boldsymbol{a},4$，则 $a=$________.

3. 设 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&2&-2\\4&t&3\\3&-1&1\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{B}$ 为三阶非零矩阵，且 $\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{O}$，则 $t=$________.

4. 设 $\boldsymbol{A}$ 为 2 阶矩阵，$\vec{\boldsymbol{\alpha}}_1,\vec{\boldsymbol{\alpha}}_2$ 为线性无关的 2 维列向量，$\boldsymbol{A}\vec{\boldsymbol{\alpha}}_1=\vec{\boldsymbol{0}},\boldsymbol{A}\vec{\boldsymbol{\alpha}}_2=2\vec{\boldsymbol{\alpha}}_1+\vec{\boldsymbol{\alpha}}_2$，则 $\boldsymbol{A}$ 的非零特征值为________.

5. 若二次型 $f=2x_1^2+tx_2^2+t^2x_3^2+2x_1x_3$ 是正定的，则 t 的取值范围是________.

二、选择题（每小题 4 分，共 20 分）

1. 设 $\boldsymbol{A}$ 为 $m\times n$ 矩阵，$\boldsymbol{B}$ 为 $n\times m$ 矩阵，则（ ）.

   (A) 当 $m>n$ 时，必有 $|\boldsymbol{AB}|=0$　　(B) 当 $m>n$ 时，必有 $|\boldsymbol{AB}|\neq 0$

   (C) 当 $n>m$ 时，必有 $|\boldsymbol{AB}|=0$　　(D) 当 $n>m$ 时，必有 $|\boldsymbol{AB}|\neq 0$

2. 设 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 为 n 阶矩阵，且 $(\boldsymbol{AB})^2=\boldsymbol{E}$，则下列命题正确的是（ ）.

   (A) $\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{E}$　(B) $\boldsymbol{AB}=-\boldsymbol{E}$　(C) $\boldsymbol{A}^2\boldsymbol{B}^2=\boldsymbol{E}$　(D) $(\boldsymbol{BA})^2=\boldsymbol{E}$

3. 设 n 阶矩阵 $\boldsymbol{A}=(\vec{\boldsymbol{\alpha}}_1,\ \vec{\boldsymbol{\alpha}}_2,\cdots,\ \vec{\boldsymbol{\alpha}}_n),\ \boldsymbol{B}=(\vec{\boldsymbol{\beta}}_1,\ \vec{\boldsymbol{\beta}}_2,\cdots,\ \vec{\boldsymbol{\beta}}_n),\ \boldsymbol{AB}=(\vec{\boldsymbol{\gamma}}_1,\ \vec{\boldsymbol{\gamma}}_2,\cdots,\ \vec{\boldsymbol{\gamma}}_n)$，记向量组

   Ⅰ：$\vec{\boldsymbol{\alpha}}_1,\ \vec{\boldsymbol{\alpha}}_2,\cdots,\ \vec{\boldsymbol{\alpha}}_n$；Ⅱ：$\vec{\boldsymbol{\beta}}_1,\ \vec{\boldsymbol{\beta}}_2,\cdots,\ \vec{\boldsymbol{\beta}}_n$；Ⅲ：$\vec{\boldsymbol{\gamma}}_1,\ \vec{\boldsymbol{\gamma}}_2,\cdots,\ \vec{\boldsymbol{\gamma}}_n$.

   如果向量组Ⅲ线性相关，则（ ）.

   (A) 向量组Ⅰ线性相关　　(B) 向量组Ⅱ线性相关

   (C) 向量组Ⅰ与Ⅱ都线性相关　　(D) 向量组Ⅰ与Ⅱ中至少有一个线性相关

4. 设 $\boldsymbol{A}$ 为 $m\times n$ 矩阵，则下述命题正确的是（ ）.

   (A) 若 $\boldsymbol{A}\vec{\boldsymbol{x}}=\vec{\boldsymbol{0}}$ 只有零解，则 $\boldsymbol{A}\vec{\boldsymbol{x}}=\vec{\boldsymbol{b}}$ 有唯一解

   (B) $\boldsymbol{A}\vec{\boldsymbol{x}}=\vec{\boldsymbol{0}}$ 有非零解的充要条件是 $|\boldsymbol{A}|=0$

   (C) $\boldsymbol{A}\vec{\boldsymbol{x}}=\vec{\boldsymbol{b}}$ 有唯一解的充要条件是 $R(\boldsymbol{A})=n$

   (D) 若 $\boldsymbol{A}\vec{\boldsymbol{x}}=\vec{\boldsymbol{b}}$ 有两个不同的解，则 $\boldsymbol{A}\vec{\boldsymbol{x}}=\vec{\boldsymbol{0}}$ 有非零解

5. 下列矩阵中，不能相似对角化的矩阵是（ ）.

   (A) $\begin{pmatrix}1&1&1\\0&3&3\\0&0&2\end{pmatrix}$　(B) $\begin{pmatrix}1&2&1\\2&0&2\\1&2&1\end{pmatrix}$　(C) $\begin{pmatrix}1&0&0\\1&1&0\\0&0&-1\end{pmatrix}$　(D) $\begin{pmatrix}1&1&0\\4&1&0\\0&0&-1\end{pmatrix}$

三、（8 分）计算行列式 $D_4=\begin{vmatrix}1+a_1&1&1&1\\1&1+a_2&1&1\\1&1&1+a_3&1\\1&1&1&1+a_4\end{vmatrix}$，$a_1a_2a_3a_4\neq 0$.

四、（10 分）设 $\boldsymbol{P}=\begin{pmatrix}1&2\\0&1\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{\Lambda}=\begin{pmatrix}1&0\\0&2\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{AP}=\boldsymbol{P\Lambda}$，求 $\boldsymbol{A}^n$.

五、（12 分）设向量组：$\vec{\boldsymbol{\alpha}}_1=(1,2,1,0)^T$，$\vec{\boldsymbol{\alpha}}_2=(4,5,0,5)^T$，$\vec{\boldsymbol{\alpha}}_3=(1,-1,-3,5)^T$，$\vec{\boldsymbol{\alpha}}_4=(0,3,1,1)^T$，求此向量组的秩及一个极大线性无关组，并将其余向量用这个极大线性无关组线性表示.

六、（12 分）设 $\begin{cases}(2-\lambda)x_1+2x_2-2x_3=1,\\2x_1+(5-\lambda)x_2-4x_3=2,\\-2x_1-4x_2+(5-\lambda)x_3=-\lambda-1,\end{cases}$ 问 λ 取何值时，此方程组：

（1）有唯一解？（2）无解？（3）有无穷多解？

七、（14 分）已知二次型 $f(x_1,x_2,x_3)=2x_1^2+3x_2^2+3x_3^2+4ax_2x_3\,(a>0)$ 通过正交变换 $\vec{\boldsymbol{x}}=\boldsymbol{P}\vec{\boldsymbol{y}}$ 化为标准形 $f=5y_1^2+2y_2^2+y_3^2$，求（1）常数 a 的值；（2）正交变换 $\vec{\boldsymbol{x}}=\boldsymbol{P}\vec{\boldsymbol{y}}$.

八、（4 分）设 $\boldsymbol{A}$ 是 $m\times n$ 矩阵，证明：$R(\boldsymbol{A}^T\boldsymbol{A})=R(\boldsymbol{A})$.