课外练习题 3

1. 已知向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1=\begin{pmatrix}2\\a\\-1\end{pmatrix},\boldsymbol{\alpha}_2=\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix},\boldsymbol{\alpha}_3=\begin{pmatrix}1\\-1\\3\end{pmatrix}$ 线性相关，则 $a=$ __1/3__ .

2. 设向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1=(a,0,1),\boldsymbol{\alpha}_2=(b,1,0),\boldsymbol{\alpha}_3=(0,a,b)$ 线性无关，则 a,b 必满足关系式

   $ab\neq 0$.

3. 设向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性无关，$\boldsymbol{\alpha}_1+2\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_2-\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2+t\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性相关，则 $t=$ __1__.

4. 向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1=(1,2,3,4)^T$，$\boldsymbol{\alpha}_2=(1,3,4,5)^T$，$\boldsymbol{\alpha}_3=(2,4,6,8)^T$，$\boldsymbol{\alpha}_4=(2,6,7,7)^T$ 的一个极大无关组为 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_4$.（或 $\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4$）

5. 若矩阵 $\boldsymbol{A}=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4)$ 经初等行变换变为 $\begin{pmatrix}1&0&1&0\\0&1&-1&0\\0&0&0&1\\0&0&0&0\end{pmatrix}$，那么向量组

   $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4$ 的一个极大无关组为 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_4$，其余向量由此极大无关组线性表示的关系式为 $\boldsymbol{\alpha}_3=\boldsymbol{\alpha}_1-\boldsymbol{\alpha}_2$.

6. 向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性无关，则向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_1-\boldsymbol{\alpha}_3$ 的秩为 __3__.

7. 设 3×2 矩阵 $\boldsymbol{A}=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2),\boldsymbol{B}=(\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2)$，其中 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2$ 是 3 维列向量，若 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2$ 线性无关，则 $\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2$ 线性无关的充要条件是（ C ）.

   （A）$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2$ 能由 $\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2$ 线性表示　　（B）$\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2$ 能由 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2$ 线性表示

   （C）矩阵 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 等价　　（D）向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2$ 与 $\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2$ 等价

8. 已知向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4$ 是线性无关向量组，则下列向量组中仍为线性无关向量组的是（ D ）.

   （A）$\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_3+\boldsymbol{\alpha}_4,\boldsymbol{\alpha}_4+\boldsymbol{\alpha}_1$　　（B）$\boldsymbol{\alpha}_1-\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_2-\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_3-\boldsymbol{\alpha}_4,\boldsymbol{\alpha}_4-\boldsymbol{\alpha}_1$

   （C）$\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_3-\boldsymbol{\alpha}_4,\boldsymbol{\alpha}_4-\boldsymbol{\alpha}_1$　　（D）$\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_3+\boldsymbol{\alpha}_4,\boldsymbol{\alpha}_4-\boldsymbol{\alpha}_1$

10. 设向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性无关，向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\beta}$ 线性相关，则（ B ）.

（A）$\boldsymbol{\beta}$ 可由 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性表示，$\boldsymbol{\alpha}_3$ 可由 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\beta}$ 线性表示

（B）$\boldsymbol{\beta}$ 可由 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性表示，$\boldsymbol{\alpha}_3$ 不可由 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\beta}$ 线性表示

（C）$\boldsymbol{\beta}$ 不可由 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性表示，$\boldsymbol{\alpha}_3$ 可由 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\beta}$ 线性表示

（D）$\boldsymbol{\beta}$ 不可由 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性表示，$\boldsymbol{\alpha}_3$ 不可由 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\beta}$ 线性表示

11. 设向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性无关，向量 $\boldsymbol{\beta}_1$ 能由 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性表示，向量 $\boldsymbol{\beta}_2$ 不能由 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性表示，则必有（ C ）.

（A）$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\beta}_1$ 线性无关　　（B）$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\beta}_1$ 线性相关

（C）$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\beta}_2$ 线性无关　　（D）$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\beta}_2$ 线性相关

12. n 维向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m\ (3\le m\le n)$ 线性无关的充要条件是（ C ）.

（A）$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m$ 中任意两个向量均线性无关

（B）向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m$ 的秩小于 m

（C）$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m$ 中任意一个向量均不能由其余 $m-1$ 个向量线性表示

（D）方程组 $\boldsymbol{x}_1\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{x}_2\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+\boldsymbol{x}_m\boldsymbol{\alpha}_m=\mathbf{0}$ 有非零解

13. 向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s$ 线性无关的充分必要条件是(C)

（A）$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s$ 均不为零向量.

（B）$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s$ 中任意两个向量的分量不成比例.

（C）$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s$ 中任意一个向量均不能由其余各向量线性表示

（D）$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s$ 中有一部分向量线性无关

14. 设 $\boldsymbol{\alpha}_1=\begin{pmatrix}0\\0\\c_1\end{pmatrix},\boldsymbol{\alpha}_2=\begin{pmatrix}0\\1\\c_2\end{pmatrix},\boldsymbol{\alpha}_3=\begin{pmatrix}1\\-1\\c_3\end{pmatrix},\boldsymbol{\alpha}_4=\begin{pmatrix}-1\\1\\c_4\end{pmatrix}$，其中 c_1,c_2,c_3,c_4 为任意常数，则下列向量组线性相关的为（ C ）

（A）$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$　（B）$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_4$　（C）$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4$　（D）$\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4$

15. 设 $\boldsymbol{A}$ 为 3×4 矩阵，且 $R(\boldsymbol{A})=3$，则 $\boldsymbol{A}$ 的（ B ）

（A）行向量组线性相关，列向量组线性无关

（B）行向量组线性无关，列向量组线性相关

（C）行、列向量组均线性相关

（D）行、列向量组均线性无关

16. 设n阶矩阵$\boldsymbol{A}=\left(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n\right)$，$\boldsymbol{B}=\left(\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_n\right)$，$\boldsymbol{AB}=\left(\boldsymbol{\gamma}_1,\boldsymbol{\gamma}_2,\cdots,\boldsymbol{\gamma}_n\right)$.记向量组

$\mathrm{I}:\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n$；$\mathrm{II}:\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_n$；$\mathrm{III}:\boldsymbol{\gamma}_1,\boldsymbol{\gamma}_2,\cdots,\boldsymbol{\gamma}_n$，如果向量组 III 线性相关，则（ D ）

（A）向量组 I 线性相关　　（B）向量组 II 线性相关

（C）向量组 I 与 II 都线性相关　　（D）向量组 I 与 II 中至少有一个线性相关

17. 设向量组 I：$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_r$可由向量组 II：$\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_s$线性表出. 下列命题正确的是（ B ）.

（A） 若$r\le s$，则向量组 I 线性无关　　（B） 若$r>s$，则向量组 I 线性相关

（C） 若$r\le s$，则向量组 II 线性无关　　（D） 若$r>s$，则向量组 II 线性相关

18. 设有向量组$\boldsymbol{\alpha}_1=(1,-1,2,4)^T$，$\boldsymbol{\alpha}_2=(0,3,1,2)^T$，$\boldsymbol{\alpha}_3=(3,0,7,14)^T$，$\boldsymbol{\alpha}_4=(1,-2,2,0)^T$，则该向量组的极大线性无关组是(B).

（A）$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2$　（B）$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_4$　（C） $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$　（D）$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4$

19. 设$\boldsymbol{A}$是$m\times n$矩阵，$\boldsymbol{C}$是n阶可逆矩阵，矩阵$\boldsymbol{A}$的秩为$\boldsymbol{r}$，矩阵$\boldsymbol{B}=\boldsymbol{AC}$的秩为$\boldsymbol{r}_1$，则 (C).

（A）$\boldsymbol{r}>\boldsymbol{r}_1$.　（B） $\boldsymbol{r}<\boldsymbol{r}_1$.　（C） $\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}_1$.　（D）$\boldsymbol{r}$与$\boldsymbol{r}_1$的关系依$\boldsymbol{C}$而定

20. 设向量组$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s$的秩为$r$，则（ D ）.

（A）必有$r<s$

（B）向量组中任意个数小于r的部分组必线性无关

（C）向量组中任意r个向量必线性无关

（D）若$r<s$，则向量组中任意$r+1$个向量必线性相关

21. 设$\boldsymbol{A}$为$m\times n$矩阵，$\boldsymbol{B}$为$n\times k$矩阵，$\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{O},\boldsymbol{B}\ne\boldsymbol{O}$，则下列命题中正确的是（ A ）.

（A） $\boldsymbol{A}$的列向量组线性相关　　（B） $\boldsymbol{A}$的行向量组线性相关

（C） $\boldsymbol{A}$的列向量组线性无关　　（D） $\boldsymbol{A}$的行向量组线性无关

22.（6 分）设$\boldsymbol{A}$是$n\times m$矩阵，$\boldsymbol{B}$是$m\times n$矩阵，其中$n<m$.若$\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{E}$，证明$\boldsymbol{B}$的列向量组线性无关.

证明： 因$R\left(\boldsymbol{B}\right)\ge R\left(\boldsymbol{E}\right)=n$，又$R\left(\boldsymbol{B}\right)\le n$，故$R\left(\boldsymbol{B}\right)=n$，从而$\boldsymbol{B}$的列向量组线性无关.

23.（8 分）已知向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4$ 线性相关，$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}$ 线性无关，讨论 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_5-\boldsymbol{\alpha}_4$ 的线性相关性.

解： $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_5$ 线性无关 $\Rightarrow \boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性无关，又 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4$ 线性相关，故 $\boldsymbol{\alpha}_4$ 可由 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 唯一线性表示，即 $\boldsymbol{\alpha}_4=\lambda_1\boldsymbol{\alpha}_1+\lambda_2\boldsymbol{\alpha}_2+\lambda_3\boldsymbol{\alpha}_3$（$\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3$ 为常数）.

（法 1）设有一组常数 k_1,k_2,k_3,k_4，使 $k_1\boldsymbol{\alpha}_1+k_2\boldsymbol{\alpha}_2+k_3\boldsymbol{\alpha}_3+k_4(\boldsymbol{\alpha}_5-\boldsymbol{\alpha}_4)=\mathbf{0}$，即

$$(k_1-\lambda_1k_4)\boldsymbol{\alpha}_1+(k_2-\lambda_2k_4)\boldsymbol{\alpha}_2+(k_3-\lambda_3k_4)\boldsymbol{\alpha}_3+k_4\boldsymbol{\alpha}_5=\mathbf{0},$$

又 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_5$ 线性无关，则有

$$\begin{cases}k_1-\lambda_1k_4=0\\k_2-\lambda_2k_4=0\\k_3-\lambda_3k_4=0\\k_4=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}k_1=0\\k_2=0\\k_3=0\\k_4=0\end{cases}\Rightarrow \boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_5-\boldsymbol{\alpha}_4 \text{线性无关.}$$

（法 2）$(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_5-\boldsymbol{\alpha}_4)\xrightarrow{c_4+\lambda_1c_1+\lambda_2c_2+\lambda_3c_3}(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_5)$

则 $R(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_5-\boldsymbol{\alpha}_4)=R(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_5)=4$，故 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_5-\boldsymbol{\alpha}_4$ 线性无关.

（法 3）$(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_5-\boldsymbol{\alpha}_4)=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_5)\begin{pmatrix}1&0&0&-\lambda_1\\0&1&0&-\lambda_2\\0&0&1&-\lambda_3\\0&0&0&1\end{pmatrix}=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_5)C$

而 $|\boldsymbol{C}|=1\neq 0$，所以 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_5-\boldsymbol{\alpha}_4$ 线性无关.

24.（12 分）设向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1=\begin{pmatrix}2\\1\\2\\1\end{pmatrix},\boldsymbol{\alpha}_2=\begin{pmatrix}-1\\1\\0\\2\end{pmatrix},\boldsymbol{\alpha}_3=\begin{pmatrix}-1\\-2\\-2\\-3\end{pmatrix},\boldsymbol{\alpha}_4=\begin{pmatrix}1\\1\\3\\3\end{pmatrix},\boldsymbol{\alpha}_5=\begin{pmatrix}2\\4\\-1\\1\end{pmatrix}$，求 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4,\boldsymbol{\alpha}_5$ 的一个极大线性无关组，并将其余向量用该极大无关组线性表示.

解： $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}2&-1&-1&1&2\\1&1&-2&1&4\\2&0&-2&3&-1\\1&2&-3&3&1\end{pmatrix}\overset{行}{\sim}\begin{pmatrix}1&1&-2&1&4\\0&1&-1&1&0\\0&0&0&1&-3\\0&0&0&0&0\end{pmatrix}$，故 $\boldsymbol{R}(\boldsymbol{A})=3$，$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_4$ 就是一个

极大无关组，又 $\boldsymbol{A}\overset{行}{\sim}\begin{pmatrix}1&0&-1&0&4\\0&1&-1&0&3\\0&0&0&1&-3\\0&0&0&0&0\end{pmatrix}$，所以 $\boldsymbol{\alpha}_3=-\boldsymbol{\alpha}_1-\boldsymbol{\alpha}_2$，$\boldsymbol{\alpha}_5=4\boldsymbol{\alpha}_1+3\boldsymbol{\alpha}_2-3\boldsymbol{\alpha}_4$.

25.（10 分）设向量组：

$$\boldsymbol{\alpha}_1=(1,1,2,-1)^T,\ \boldsymbol{\alpha}_2=(1,2,-1,1)^T,\ \boldsymbol{\alpha}_3=(2,3,-5,4)^T,\ \boldsymbol{\alpha}_4=(1,-1,\lambda,-1)^T.$$

当参数 λ 取何值时线性相关，相关时求其极大线性无关组，并将其余向量用该极大无关组线性表示.

解：（法 1）$\left|\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4\right|=\begin{vmatrix}1&1&2&1\\1&2&3&-1\\2&-1&-5&\lambda\\-1&1&4&-1\end{vmatrix}=8-4\lambda$，当 $\lambda=2$ 时向量组线性相关.

$$\left(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4\right)=\begin{pmatrix}1&1&2&1\\1&2&3&-1\\2&-1&-5&2\\-1&1&4&-1\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&0&0&2\\0&1&0&-3\\0&0&1&1\\0&0&0&0\end{pmatrix},$$

故极大无关组为 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$，且 $\boldsymbol{\alpha}_4=2\boldsymbol{\alpha}_1-3\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_3$.

（法 2）$\left(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4\right)=\begin{pmatrix}1&1&2&1\\1&2&3&-1\\2&-1&-5&\lambda\\-1&1&4&-1\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&1&2&1\\0&1&1&-2\\0&0&1&1\\0&0&0&\lambda-2\end{pmatrix}$,

当 $\lambda=2$ 时 $R\left(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4\right)=3$，向量组线性相关，故极大无关组为 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$.

进一步 $\left(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4\right)\to\begin{pmatrix}1&0&0&2\\0&1&0&-3\\0&0&1&1\\0&0&0&0\end{pmatrix}$,所以 $\boldsymbol{\alpha}_4=2\boldsymbol{\alpha}_1-3\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_3$.

（或者极大无关组为 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_4$，且 $\boldsymbol{\alpha}_3=-2\boldsymbol{\alpha}_1+3\boldsymbol{\alpha}_2-\boldsymbol{\alpha}_4$.）