§2.6 矩阵的秩

一、矩阵的秩的概念

定义： 在 $m \times n$ 矩阵 A 中，任取 k 行 k 列$(k \le m, k \le n)$，位于这些行列交叉处的 k^2 个元素，不改变它们在 A 中所处的位置次序而得的 k 阶行列式，称为矩阵 A 的 **k 阶子式**.

显然，$m \times n$ 矩阵 A 的 k 阶子式共有 $C_m^k C_n^k$ 个.

概念辨析： k 阶子式、矩阵的子块、余子式、代数余子式

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \end{pmatrix}$$

与元素a_{12}相对应的余子式

$$M_{12} = \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix}$$

相应的代数余子式

$$A_{12} = (-1)^{1+2} M_{12} = -\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix}$$

矩阵 A 的一个 2 阶子式

$$\begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{22} & a_{23} \end{vmatrix}$$

矩阵 A 的一个 2 阶子块

$$\begin{pmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{22} & a_{23} \end{pmatrix}$$

定义： 设矩阵 A 中有一个不等于零的 r 阶子式 D，且所有 $r+1$ 阶子式（如果存在的话）全等于零，那么 D 称为矩阵 A 的**最高阶非零子式**，数 r 称为**矩阵 A 的秩**，记作 $R(A)$.

规定： 零矩阵的秩等于零.

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \end{pmatrix}$$

矩阵 A 的 2 阶子式

矩阵 A 的一个 3 阶子式

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}$$

如果矩阵 A 中所有 2 阶子式都等于零，那么这个 3 阶子式也等于零 .

- 根据行列式按行（列）展开法则可知，矩阵 A 中任何一个 $r+2$ 阶子式（如果存在的话）都可以用 $r+1$ 阶子式来表示.
- 如果矩阵 A 中所有 $r+1$ 阶子式都等于零，那么所有 $r+2$ 阶子式也都等于零.
- 事实上，所有高于 $r+1$ 阶的子式（如果存在的话）也都等于零.

因此矩阵 A 的秩就是 A 中非零子式的最高阶数.

矩阵 A 的秩就是 A 中非零子式的最高阶数.

显然，

- 若矩阵 A 中有某个 s 阶子式不等于零，则 $R(A) \geq s$；
  若矩阵 A 中所有 t 阶子式等于零，则 $R(A) < t$.
- 若 A 为 n 阶矩阵，则 A 的 n 阶子式只有一个，即$|A|$.
  当$|A|\neq 0$ 时， $R(A) = n$；
  可逆矩阵（非奇异矩阵）又称为满秩矩阵(非退化).
  当$|A| = 0$ 时， $R(A) < n$；
  不可逆矩阵（奇异矩阵）又称为降秩矩阵(退化).
- 若 A 为 $m \times n$ 矩阵，则 $0 \leq R(A) \leq \min\{m, n\}$.
- $R(A^{\mathrm{T}}) = R(A)$.

合肥工業大學 HEFEI UNIVERSITY OF TECHNOLOGY

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \end{pmatrix} \qquad A^T=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & a_{31} \\ a_{12} & a_{22} & a_{32} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \\ a_{14} & a_{24} & a_{34} \end{pmatrix}$$

矩阵 A 的一个 2 阶子式　　　　矩阵 A^{T} 的一个 2 阶子式

$$D = \quad = \quad D^T =$$

因为行列式与其转置行列式相等，所以A^{T} 的子式与 A 的子式对应相等，从而 $R(A^{\mathrm{T}}) = R(A)$.

例： 求矩阵 A 和 B 的秩，其中

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & -5 \\ 4 & 7 & 1 \end{pmatrix} \qquad B=\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & 3 & -2 \\ 0 & 3 & 1 & -2 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

解： 在 A 中，2 阶子式 $\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} \neq 0.$

A 的 3 阶子式只有一个，即$|A|$，而且$|A|=0$，因此 $R(A)=2$.

例： 求矩阵 A 和 B 的秩，其中

$$A=\begin{pmatrix}1&2&3\\2&3&-5\\4&7&1\end{pmatrix}\qquad B=\begin{pmatrix}2&-1&0&3&-2\\0&3&1&-2&5\\0&0&0&4&-3\\0&0&0&0&0\end{pmatrix}$$

解（续）： B 是一个行阶梯形矩阵，其非零行有 3 行，因此其 4 阶子式全为零.

以非零行的第一个非零元为对角元的 3 阶子式

$$\begin{vmatrix}2&-1&3\\0&3&-2\\0&0&4\end{vmatrix}=24\neq 0，因此 R(B)=3.$$

还存在其它3 阶非零子式吗？

例：求矩阵 A 和 B 的秩，其中

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & -5 \\ 4 & 7 & 1 \end{pmatrix} \qquad B=\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & 3 & -2 \\ 0 & 3 & 1 & -2 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

解（续）：B 还有其它 3 阶非零子式，例如

$$\begin{vmatrix} 2 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 4 \end{vmatrix}=8 \qquad \begin{vmatrix} 2 & -1 & -2 \\ 0 & 3 & 5 \\ 0 & 0 & -3 \end{vmatrix}=-18 \qquad \begin{vmatrix} 2 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & -3 \end{vmatrix}=-6$$

结论：行阶梯形矩阵的秩就等于非零行的行数.

二、矩阵秩的计算

例： 求矩阵 A 的秩，其中 $A=\begin{pmatrix} 3 & 2 & 0 & 5 & 0 \\ 3 & -2 & 3 & 6 & -1 \\ 2 & 0 & 1 & 5 & -3 \\ 1 & 6 & -4 & -1 & 4 \end{pmatrix}$.

分析： 在 A 中，2 阶子式 $\begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 6 \end{vmatrix}=12\neq 0$.

A 的 3 阶子式共有 $C_4^3C_5^3=40$ (个)，

要从40个子式中找出一个非零子式是比较麻烦的.

一般的矩阵，当行数和列数较高时，按定义求秩是很麻烦的．

行阶梯形矩阵的秩就等于非零行的行数.

一个自然的想法是用初等变换将一般的矩阵化为行阶梯形矩阵.

两个等价的矩阵的秩是否相等?

定理： 若 $A \sim B$，则 $R(A) = R(B)$.

证明思路:

1. 证明 A 经过一次初等行变换变为 B，则 $R(A) \le R(B)$.
2. B 也可经由一次初等行变换变为 A，则 $R(B) \le R(A)$，于是 $R(A) = R(B)$.
3. 经过一次初等行变换的矩阵的秩不变，经过有限次初等行变换的矩阵的秩仍然不变.
4. 设 A 经过初等列变换变为 B，则 A^{T} 经过初等行变换变为 B^{T}，从而 $R(A^{\mathrm{T}}) = R(B^{\mathrm{T}})$.

又 $R(A) = R(A^{\mathrm{T}})$，$R(B) = R(B^{\mathrm{T}})$，因此 $R(A) = R(B)$.

定理：若 $A \sim B$，则 $R(A) = R(B)$.

应用：根据这一定理，为求矩阵的秩，只要用初等行变换把矩阵化成行阶梯形矩阵，行阶梯形矩阵中非零行的行数就是该矩阵的秩.

例：求矩阵 $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 0 & 5 & 0 \\ 3 & -2 & 3 & 6 & -1 \\ 2 & 0 & 1 & 5 & -3 \\ 1 & 6 & -4 & -1 & 4 \end{pmatrix}$ 的秩，并求 A 的一个最高阶非零子式.

解： 第一步先用初等行变换把矩阵化成行阶梯形矩阵.

$$A=\begin{pmatrix}3&2&0&5&0\\3&-2&3&6&-1\\2&0&1&5&-3\\1&6&-4&-1&4\end{pmatrix}\overset{r}{\sim}\begin{pmatrix}1&6&-4&-1&4\\0&-4&3&1&-1\\0&0&0&4&-8\\0&0&0&0&0\end{pmatrix}$$

行阶梯形矩阵有 3 个非零行，故 $R(A)=3$.

第二步求 A 的最高阶非零子式. 选取行阶梯形矩阵中非零行的第一个非零元所在的列，与之对应的是选取矩阵 A 的第一、二、四列.

$$A_0=\begin{pmatrix}3&2&5\\3&-2&6\\2&0&5\\1&6&-1\end{pmatrix}\overset{r}{\sim}\begin{pmatrix}1&6&-1\\0&-4&1\\0&0&4\\0&0&0\end{pmatrix}=B_0$$

$$A_0=\begin{pmatrix}3&2&5\\3&-2&6\\2&0&5\\1&6&-1\end{pmatrix}\overset{r}{\sim}\begin{pmatrix}1&6&-1\\0&-4&1\\0&0&4\\0&0&0\end{pmatrix}=B_0$$

$R(A_0)=3$，计算 A_0 的前 3 行构成的子式

$$\begin{vmatrix}3&2&5\\3&-2&6\\2&0&5\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}3&2&5\\6&0&11\\2&0&5\end{vmatrix}=-2\begin{vmatrix}6&11\\2&5\end{vmatrix}=-16\neq 0$$

因此这就是 A 的一个最高阶非零子式.

例：设 $A=\begin{pmatrix}1 & -2 & 2 & -1\\ 2 & -4 & 8 & 0\\ -2 & 4 & -2 & 3\\ 3 & -6 & 0 & -6\end{pmatrix}$，$b=\begin{pmatrix}1\\2\\3\\4\end{pmatrix}$，求矩阵 A 及矩阵 $B=(A,b)$ 的秩.

分析：对 B 作初等行变换变为行阶梯形矩阵，设 B 的行阶梯形矩阵为 $\tilde{B}=(\tilde{A},\tilde{b})$，则 $\tilde{A}$ 就是 A 的行阶梯形矩阵，因此可从中同时看出 $R(A)$ 及 $R(B)$.

解：
$$B=\begin{pmatrix}1 & -2 & 2 & -1 & 1\\ 2 & -4 & 8 & 0 & 2\\ -2 & 4 & -2 & 3 & 3\\ 3 & -6 & 0 & -6 & 4\end{pmatrix}\overset{r}{\sim}\begin{pmatrix}1 & -2 & 2 & -1 & 1\\ 0 & 0 & 2 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$$

$R(A)=2$
$R(B)=3$

矩阵的秩的性质

① 若 A 为 $m\times n$ 矩阵，则 $0\le R(A)\le \min\{m, n\}$.

② $R(A^T) = R(A) = R(-A)$.

③ 若 $A\sim B$，则 $R(A) = R(B)$.

④ 若 P、Q 可逆，则 $R(PAQ) = R(A)$.

⑤ $\max\{R(A), R(B)\}\le R(A, B)\le R(A) + R(B)$.

特别地，当 $B = b$ 为非零列向量时，有

$$R(A)\le R(A, b)\le R(A) + 1 .$$

⑥ $R(A + B)\le R(A) + R(B)$.

⑦ $R(AB)\le \min\{R(A), R(B)\}$.

矩阵的秩的性质(续)

⑧ 若 $A_{m\times n}B_{n\times l}=O$，则 $R(A)+R(B)\le n$.

⑨ 分块对角阵 $R\begin{pmatrix} A & O \\ O & B \end{pmatrix}=R(A)+R(B)$

⑩ 分块上三角阵 $R\begin{pmatrix} A & C \\ O & B \end{pmatrix}\ge R(A)+R(B)$

例 已知$Q=\begin{pmatrix}1&2&3\\2&4&t\\3&6&9\end{pmatrix}$，$P$为 **3** 阶非零矩阵，且满足$PQ=O$，则 **( )**

(A) $t=6$时，P的秩必为 **1**

(B) $t=6$时，P的秩必为 **2**

(C) $t\neq 6$时，P的秩必为 **1**

(D) $t\neq 6$时，P的秩必为 **2**

例 设A是$m\times n$矩阵，B是$n\times m$矩阵，则 **(　　)**

(A) 当$m>n$时，必有行列式$|AB|\neq 0$

(B) 当$m>n$时，必有行列式$|AB|=0$

(C) 当$n>m$时，必有行列式$|AB|\neq 0$

(D) 当$n>m$时，必有行列式$|AB|=0$

例 设

$$A=\begin{pmatrix} a_1b_1 & a_1b_2 & \cdots & a_1b_n \\ a_2b_1 & a_2b_2 & \cdots & a_2b_n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_nb_1 & a_nb_2 & \cdots & a_nb_n \end{pmatrix},$$

其中$a_i \neq 0, b_i \neq 0, i=1,2,\cdots,n$,则矩阵$A$的秩

$R(A)=$ ________.

例： 设

$$A=\begin{pmatrix}1 & 2 & -1 & 1\\ 3 & 2 & \lambda & -1\\ 5 & 6 & 3 & \mu\end{pmatrix}$$

已知 $R(A)=2$，求 λ 与 μ 的值.

解：

$$A\to\begin{pmatrix}1 & 2 & -1 & 1\\ 0 & -4 & \lambda+3 & -4\\ 0 & -4 & 8 & \mu-5\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1 & 2 & -1 & 1\\ 0 & -4 & \lambda+3 & -4\\ 0 & 0 & 5-\lambda & \mu-1\end{pmatrix}$$

因 $R(A)=2$，故

$$\begin{cases}5-\lambda=0\\ \mu-1=0\end{cases} \quad 即 \quad \begin{cases}\lambda=5\\ \mu=1\end{cases}$$

例： 求 n ($n \geq 2$)阶矩阵A的秩， 其中

$$A = \begin{pmatrix} a & b & \cdots & b \\ b & a & \cdots & b \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b & b & \cdots & a \end{pmatrix}$$

解:

$$A=\begin{pmatrix} a & b & \cdots & b \\ b & a & \cdots & b \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b & b & \cdots & a \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} a+(n-1)b & a+(n-1)b & \cdots & a+(n-1)b \\ b & a & \cdots & b \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b & b & \cdots & a \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{a+(n-1)b\neq 0} \begin{pmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ b & a & \cdots & b \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b & b & \cdots & a \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 0 & a-b & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a-b \end{pmatrix}$$

(1) 当 $a+(n-1)b\neq 0, a\neq b$ 时，$R(A)=n$

(2) 当 $a+(n-1)b\neq 0, a=b$ 时，$R(A)=1$

(3) 当 $a+(n-1)b=0, a\neq b$ 时，

$$A=\begin{pmatrix} a & b & \cdots & b \\ b & a & \cdots & b \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b & b & \cdots & a \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 \\ b & a & \cdots & b \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b & b & \cdots & a \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 \\ b & a-b & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b & 0 & \cdots & a-b \end{pmatrix}$$

$$\to \begin{pmatrix} 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & \cdots & 1 & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

故 $R(A)=n-1$

(4) 当 $a+(n-1)b=0, a=b$ 时，即 $a=b=0$,

$$R(A)=0.$$

例：设 A 为 n 阶矩阵，证明 $R(A+E)+R(A-E)\geq n$.

证明：因为 $(A+E)+(E-A)=2E$，

由性质“$R(A+B)\leq R(A)+R(B)$”有

$$R(A+E)+R(E-A)\geq R(2E)=n\ .$$

又因为$R(E-A)=R(A-E)$，所以

$$R(A+E)+R(A-E)\geq n\ .$$

例： 若 $A_{m\times n}B_{n\times l}=C$，且 $R(A)=n$，则$R(B)=R(C)$.

解： 因为 $R(A)=n$， 所以 A 的行最简形矩阵为 $\begin{pmatrix} E_n \\ O \end{pmatrix}_{m\times n}$，

设 m 阶可逆矩阵 P，满足 $PA=\begin{pmatrix} E_n \\ O \end{pmatrix}_{m\times n}$.

于是 $PC=PAB=\begin{pmatrix} E_n \\ O \end{pmatrix}B=\begin{pmatrix} B \\ O \end{pmatrix}$

因为 $R(C)=R(PC)$，而 $R(B)=R\begin{pmatrix} B \\ O \end{pmatrix}$，故$R(B)=R(C)$.

例：若 $A_{m\times n}B_{n\times l}=C$，且 $R(A)=n$，则$R(B) = R(C)$.

附注：

- 当一个矩阵的秩等于它的列数时，这样的矩阵称为列满秩矩阵.
- 特别地，当一个矩阵为方阵时，列满秩矩阵就成为满秩矩阵，也就是可逆矩阵.

  因此，本例的结论当 A 为为方阵时，就是性质④ .
- 本题中，当 $C=O$，这时结论为：

  设 $AB=O$，若 A 为列满秩矩阵，则 $B = O$.

例: 设$A_{4\times 3}$，且 $R(A)=2$，而 $B=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 3 \end{pmatrix}$，

则 $R(AB)=$ ________.

解 由于$|B|=10\neq 0$，所以 B 可逆，故 $R(AB)=R(A)=2$.

例 设A为n阶方阵($n>1$)，A^*为A的伴随矩阵，证明

$$R(A^*)=\begin{cases} n, & R(A)=n; \\ 1, & R(A)=n-1; \\ 0, & R(A)<n-1. \end{cases}$$

证 **(1)** 当$R(A)=n$时，有$|A|\neq 0$.而

$$|A^*|=|A|^{n-1}\neq 0,$$

故$R(A^*)=n$.

(2) 当$R(A)=n-1$时，$|A|=0$.由$A^*A=|A|E=O$,有$R(A^*)+R(A)\leq n$,从而$R(A^*)\leq 1$;又$R(A)=n-1$,则A中至少有一个$n-1$阶子式不为 **0**，故

$$A^*\neq O, R(A^*)\geq 1$$

因此，$R(A^*)=1$.

(3) 当$R(A)<n-1$时，A中所有$n-1$阶子式全为 **0**，从而$A^*=O$，所以$R(A^*)=0$.

例 设 3 阶矩阵 $A=\begin{pmatrix} a & b & b \\ b & a & b \\ b & b & a \end{pmatrix}$，若 A 的伴随矩阵的秩等于 1，则必有（　）

(A) $a=b$ 或 $a+2b=0$

(B) $a=b$ 或 $a+2b\neq 0$

(C) $a\neq b$ 且 $a+2b=0$

(D) $a\neq b$ 且 $a+2b\neq 0$

一、注意事项：

(1) $AB \neq BA$;

(2) $(A \pm B)^2 \neq A^2 \pm 2AB + B^2$;

(3) $(A+B)(A-B) \neq A^2 - B^2$;

(4) $(AB)^k \neq A^k B^k$;

(5) $AB = O$时，不一定有$A = O$或$B = O$;

(6) $A^2 = E$时，不一定有$A = \pm E$;

(7) $AB = AC$和$A \neq O$时，不一定有$B = C$.

二、可逆矩阵（A 为 n 阶矩阵）

A可逆
（存在B，$AB=BA=E$）

存在B，使$AB=E$，
此时，$A^{-1}=B$

行列式
$|A|\neq 0$，$A^{-1}=\dfrac{1}{|A|}A^*$

$A\xrightarrow{行}E$，$(A, E)\xrightarrow{行}(E, A^{-1})$
$AX=B$ 的解$X=A^{-1}B$
$(A, B)\xrightarrow{行}(E, X)$

初等矩阵
$A=P_1\cdots P_s$，
其中P_i为初等矩阵，
$A^{-1}=P_s^{-1}\cdots P_1^{-1}$

等价
A与E 等价

存在C，使$CA=E$
此时，$A^{-1}=C$

满秩
$\mathrm{r}(A)=n$

$A\xrightarrow{列}E$，$\begin{pmatrix}A\\E\end{pmatrix}\xrightarrow{列}\begin{pmatrix}E\\A^{-1}\end{pmatrix}$
$XA=B$ 的解$X=BA^{-1}$
$\begin{pmatrix}A\\B\end{pmatrix}\xrightarrow{列}\begin{pmatrix}E\\X\end{pmatrix}$