§3.5　标准正交向量组

一、向量的内积

定义： 设有n 维实向量$\alpha=\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}$，$\beta=\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$，

称

$$[\alpha,\beta]=a_1b_1+a_2b_2+\cdots+a_nb_n$$

为向量α，β 的内积.

注:

- 内积是两个向量之间的一种运算，其结果是一个实数.
- 内积可用矩阵乘法表示：当 α，β都是列向量时，

$$[\alpha,\beta]=a_1b_1+a_2b_2+\cdots+a_nb_n=\alpha^T\beta=\beta^T\alpha$$

内积具有下列性质（其中α,β,γ为 n 维实向量,λ为实数）

- 对称性:

$$[\alpha,\beta]=[\beta,\alpha]$$

- 线性性质:

$$[\lambda\alpha,\beta]=\lambda[\alpha,\beta]$$

$$[\alpha+\beta,\gamma]=[\alpha,\gamma]+[\beta,\gamma]$$

- 当 $\alpha=0$（零向量）时，$[\alpha,\alpha]=0$

当 $\alpha\neq 0$（零向量）时，$[\alpha,\alpha]>0$

- 施瓦兹（Schwarz）不等式

$$[\alpha,\beta]^2\leq[\alpha,\alpha][\beta,\beta]$$

定义(向量的长度)：设$\alpha=(a_1,a_2,\ldots,a_n)^T$，称

$$\|\alpha\|=\sqrt{[\alpha,\alpha]}=\sqrt{a_1^2+a_2^2+\cdots+a_n^2}\geq 0$$

为n维向量α的长度（或范数）；

当$\|\alpha\|=1$时，称α为单位向量.

① 非负性 $\|\alpha\|\geq 0$. 当且仅当$\alpha=0$时，$\|\alpha\|=0$；

② 齐次性 $\|\lambda\alpha\|=|\lambda|\|\alpha\|$；

③ 三角不等式 $\|\alpha+\beta\|\leq\|\alpha\|+\|\beta\|$.

定义(向量的夹角)： 当$\alpha \neq 0, \beta \neq 0$时，称

$$\theta = \arccos \frac{[\alpha, \beta]}{\sqrt{[\alpha, \alpha][\beta, \beta]}} = \arccos \frac{[\alpha, \beta]}{\|\alpha\| \cdot \|\beta\|}$$

为n维向量α，β的**夹角**.

例：设 $\alpha=(1,2,1)^T, \beta=(2,1,1)^T$，求

(1) $[\alpha+\beta, \alpha-\beta]$;

(2) $\|3\alpha+2\beta\|$;

(3) $3\alpha, 2\beta$ 的夹角.

二、正交向量组

定义： 若 $[\alpha,\beta]=0$，称 $\alpha,\ \beta$ 正交.

定义： 两两正交的非零向量组成的向量组称为正交向量组.

定理: 若 n 维向量 $a_1, a_2, \dots, a_r$ 是一组两两正交的非零向量，则 $a_1, a_2, \dots, a_r$ 线性无关. (正交向量组为线性无关的向量组)

证明: 设 $k_1a_1 + k_2a_2 + \dots + k_r a_r = 0$（零向量），那么

$$0 = [a_1, 0] = [a_1, k_1a_1 + k_2a_2 + \dots + k_r a_r]$$

$$= k_1 [a_1, a_1] + k_2 [a_1, a_2] + \dots + k_r [a_1, a_r]$$

$$= k_1 [a_1, a_1] + 0 + \dots + 0$$

$$= k_1 \|a_1\|^2$$

从而 $k_1 = 0$.

同理可证，$k_2 = k_3 = \dots = k_r = 0$.

综上所述， $a_1, a_2, \dots, a_r$ 线性无关.

三、施密特正交单位化

定义： 设n维向量 $e_1, e_2, \ldots, e_r$ 是向量空间 V 中的一组基，如果它们两两正交且都是单位向量，称其为V的一组标准正交基(或规范正交基).

$$e_1=\begin{pmatrix}1/\sqrt{2}\\1/\sqrt{2}\\0\\0\end{pmatrix}, e_2=\begin{pmatrix}1/\sqrt{2}\\-1/\sqrt{2}\\0\\0\end{pmatrix}, e_3=\begin{pmatrix}0\\0\\1/\sqrt{2}\\1/\sqrt{2}\end{pmatrix}, e_4=\begin{pmatrix}0\\0\\1/\sqrt{2}\\-1/\sqrt{2}\end{pmatrix}$$

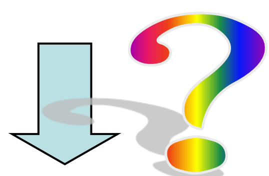
是 R^4 的一组规范正交基.

★ 如果$e_1, e_2, \ldots, e_r$为V的一组标准正交基，则V中任意一个向量可唯一表示为

$$\alpha = [\alpha, e_1]e_1 + [\alpha, e_2]e_2 + \cdots + [\alpha, e_r]e_r$$

即向量在标准正交基下的坐标就是相应的内积.

★ 问题：向量空间 V 中的一组基$\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_r$



向量空间 V 中的一组标准正交基$e_1, e_2, \ldots, e_r$

第一步：正交化——施密特（Schimidt）正交化过程

设 $\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_r$ 是向量空间V 中的一组基，取

$$\beta_1=\alpha_1;$$

$$\beta_2=\alpha_2-\frac{[\beta_1,\alpha_2]}{[\beta_1,\beta_1]}\beta_1;$$

……

$$\beta_r=\alpha_r-\frac{[\beta_1,\alpha_r]}{[\beta_1,\beta_1]}\beta_1-\frac{[\beta_2,\alpha_r]}{[\beta_2,\beta_2]}\beta_2-\cdots-\frac{[\beta_{r-1},\alpha_r]}{[\beta_{r-1},\beta_{r-1}]}\beta_{r-1}.$$

容易验证$\beta_1,\beta_2,\ldots,\beta_r$两两正交，且与 $\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_r$ 等价，即为向量空间 V 中的一组正交基.

第二步：单位化

再将$\beta_1,\beta_2,\ldots,\beta_r$单位化，令

$$e_1=\frac{\beta_1}{\|\beta_1\|},\ e_2=\frac{\beta_2}{\|\beta_2\|},\cdots,\ e_r=\frac{\beta_r}{\|\beta_r\|}$$

因为

$$[e_1,e_1]=\left[\frac{\beta_1}{\|\beta_1\|},\frac{\beta_1}{\|\beta_1\|}\right]=\frac{[\beta_1,\beta_1]}{\|\beta_1\|^2}=\frac{\|\beta_1\|^2}{\|\beta_1\|^2}=1$$

$$\|e_1\|=\sqrt{[e_1,e_1]}=1$$

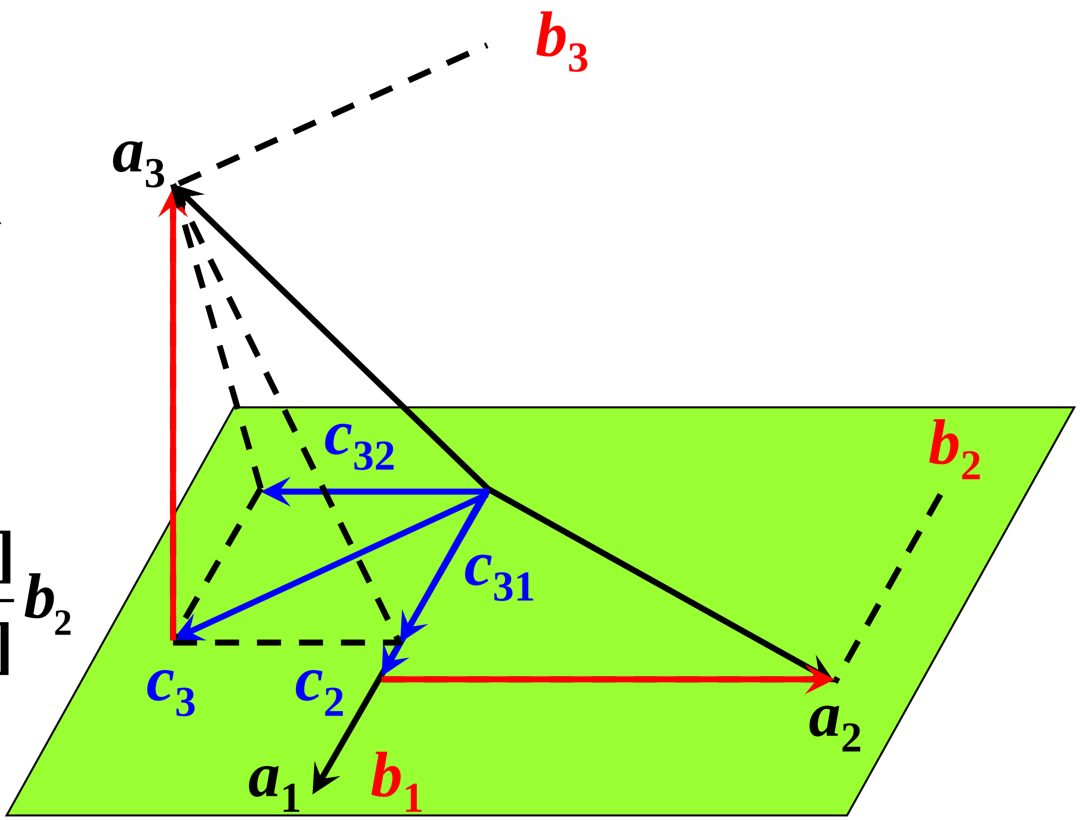
从而 $e_1, e_2, \ldots, e_r$ 是向量空间 V 中的一组标准正交基.

施密特正交单位化的几何意义

$$b_1 = a_1$$

$$b_2 = a_2 - c_2 = a_2 - \frac{[b_1, a_2]}{[b_1, b_1]} b_1$$

$$\begin{aligned} b_3 &= a_3 - c_3 \\ &= a_3 - c_{31} - c_{32} \\ &= a_3 - \frac{[b_1, a_3]}{[b_1, b_1]} b_1 - \frac{[b_2, a_3]}{[b_2, b_2]} b_2 \end{aligned}$$



例：用施密特正交单位化方法，将

$$\alpha_1=\begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix},\ \alpha_2=\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix},\ \alpha_3=\begin{pmatrix}1\\-1\\1\end{pmatrix}$$

正交单位化.

解：正交化

$$\beta_1=\alpha_1=\begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix};$$

$$\beta_2=\alpha_2-\frac{[\beta_1,\alpha_2]}{[\beta_1,\beta_1]}\beta_1=\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}-\frac{1}{2}\begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1/2\\1/2\\1\end{pmatrix};$$

$$\beta_3=\alpha_3-\frac{[\beta_1,\alpha_3]}{[\beta_1,\beta_1]}\beta_1-\frac{[\beta_2,\alpha_3]}{[\beta_2,\beta_2]}\beta_2=\begin{pmatrix}1\\-1\\1\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix}-\frac{2}{3}\begin{pmatrix}1/2\\1/2\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1/3\\-1/3\\1/3\end{pmatrix};$$

再将 β_1,β_2,β_3 单位化，得

$$e_1=\frac{\beta_1}{\|\beta_1\|}=\begin{pmatrix}1/\sqrt{2}\\-1/\sqrt{2}\\0\end{pmatrix},e_2=\frac{\beta_2}{\|\beta_2\|}=\begin{pmatrix}1/\sqrt{6}\\1/\sqrt{6}\\2/\sqrt{6}\end{pmatrix},e_3=\frac{\beta_3}{\|\beta_3\|}=\begin{pmatrix}-1/\sqrt{3}\\-1/\sqrt{3}\\1/\sqrt{3}\end{pmatrix}$$

e_1,e_2,e_3 即为所求.

四、正交矩阵

定义：如果 n 阶矩阵 A 满足 $A^{\mathrm{T}}A = E$，即 $A^{-1} = A^{\mathrm{T}}$，

则称矩阵 A 为正交矩阵，简称正交阵.

$$A^TA=\begin{pmatrix}a_1^T\\a_2^T\\\vdots\\a_n^T\end{pmatrix}(a_1,a_2,\cdots,a_n)=\begin{pmatrix}a_1^Ta_1 & a_1^Ta_2 & \cdots & a_1^Ta_n\\a_2^Ta_1 & a_2^Ta_2 & \cdots & a_2^Ta_n\\\vdots & \vdots & & \vdots\\a_n^Ta_1 & a_n^Ta_2 & \cdots & a_n^Ta_n\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 0 & \cdots & 0\\0 & 1 & \cdots & 0\\\vdots & \vdots & & \vdots\\0 & 0 & \cdots & 1\end{pmatrix}$$

于是 $$[a_i,a_j]=a_i^Ta_j=\begin{cases}1, & i=j\\0, & i\neq j\end{cases}\quad(i,j=1,2,\cdots,n)$$

从而可得

- 方阵A为正交阵的充分必要条件是A的列向量都是单位向量，且两两正交．即A的列向量组构成R^n的标准正交基.

定义： 如果 n 阶矩阵A 满足 $A^{\mathrm{T}}A=E$，即 $A^{-1}=A^{\mathrm{T}}$，

则称矩阵A 为正交矩阵，简称正交阵.

- 方阵A 为正交阵的充分必要条件是 A 的列向量都是单位向量，且两两正交. 即 A 的列向量组构成R^n 的标准正交基.

因为$A^{\mathrm{T}}A=E$ 与$AA^{\mathrm{T}}=E$ 等价，所以

$$AA^T=\begin{pmatrix} b_1^T \\ b_2^T \\ \vdots \\ b_n^T \end{pmatrix}(b_1,b_2,\cdots,b_n)=\begin{pmatrix} b_1^Tb_1 & b_1^Tb_2 & \cdots & b_1^Tb_n \\ b_2^Tb_1 & b_2^Tb_2 & \cdots & b_2^Tb_n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_n^Tb_1 & b_n^Tb_2 & \cdots & b_n^Tb_n \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}$$

$$[b_i,b_j]=b_i^Tb_j=\begin{cases} 1, & i=j \\ 0, & i\neq j \end{cases}\quad (i,j=1,2,\cdots,n)$$

定义：如果 n 阶矩阵 A 满足 $A^{T}A=E$，即 $A^{-1}=A^{T}$，则称矩阵 A 为正交矩阵，简称正交阵.

- 方阵 A 为正交阵的充分必要条件是 A 的列向量都是单位向量，且两两正交. 即 A 的列向量组构成 R^{n} 的标准正交基.
- 方阵 A 为正交阵的充分必要条件是 A 的行向量都是单位向量，且两两正交. 即 A 的行向量组构成 R^{n} 的标准正交基.

例：正交矩阵 $P=\begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} & 0 & 0 \\ 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \\ 0 & 0 & 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2} \end{pmatrix}$

R^4 的一组规范正交基

$$e_1=\begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, e_2=\begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} \\ -1/\sqrt{2} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, e_3=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} \end{pmatrix}, e_4=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1/\sqrt{2} \\ -1/\sqrt{2} \end{pmatrix}$$

正交矩阵具有下列性质:

- ✓ 若 A 是正交阵，则$|A| = 1$ 或 -1.
- ✓ 若 A 是正交阵，则 A^T 是正交阵.
- ✓ 若 A 是正交阵，则 A^{-1} 是正交阵.
- ✓ 若 A 是正交阵，则 A^* 是正交阵.
- ✓ 若 A 和B是n阶正交阵，则 AB 是正交阵.

例: 设方阵A满足关系式 $A^2+6A+8E=O$ 且$A^T=A$.

证明$A+3E$为正交阵.

证明:

$$(A+3E)^T(A+3E)$$

$$=(A^T+3E)(A+3E)$$

$$=A^TA+3A^T+3A+9E\ \ (A^T=A)$$

$$=A^2+6A+9E\ (A^2+6A+8E=O)$$

$$=E$$

定义：若P是正交矩阵，则称线性变换 $y=Px$ 为正交变换.

设 $y=Px$ 为正交变换，则有

$$\|y\| = \sqrt{y^T y} = \sqrt{x^T P^T P x} = \sqrt{x^T x} = \|x\|,$$

即经正交变换向量的长度保持不变.