2017～2018 学年第二学期《线性代数》试卷（A）参考答案

一、填空题（每小题 4 分，共 20 分）

1、$\underline{18}$；2、$\underline{\begin{pmatrix}1&3&2\\4&6&5\\7&9&8\end{pmatrix}}$；3、$\underline{6}$；4、$\underline{-1}$；5、$\underline{\boldsymbol{x}=c\begin{pmatrix}0\\5\\2\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}}$（$c$ 为任意常数）.

二、选择题（每小题 4 分，共 20 分）

1、C；　2、C；　3、B；　4、D；　5、B.

三、（8 分）设 $\boldsymbol{E}$ 为3阶单位阵，$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}-2&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$，求满足 $\boldsymbol{A}^*\boldsymbol{BA}=2\boldsymbol{BA}-4\boldsymbol{E}$ 的矩阵 $\boldsymbol{B}$.

解：在等式 $A^*BA=2BA-4E$ 左乘 A,右乘 A^{-1} 得：$|A|B=2AB-4E$，而 $|A|=-2$,

$B=-AB+2E\Rightarrow(E+A)B=2E$，从而

$$B=2(E+A)^{-1}=2\begin{pmatrix}-1&0&0\\0&2&0\\0&0&2\end{pmatrix}^{-1}=\begin{pmatrix}-2&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}.$$

四、（**12** 分）设向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1=\begin{pmatrix}1+x\\1\\1\\1\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{\alpha}_2=\begin{pmatrix}2\\2+x\\2\\2\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{\alpha}_3=\begin{pmatrix}3\\3\\3+x\\3\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{\alpha}_4=\begin{pmatrix}4\\4\\4\\4+x\end{pmatrix}$，其中 $x\neq0$，且矩阵 $\boldsymbol{A}=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4)$，(1)求行列式 $|\boldsymbol{A}|$；(2) x 为何值时，$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4$ 线性相关？(3)当 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4$ 线性相关时，求其一个极大线性无关组，并将其余向量用该极大无关组线性表示.

解：（1）
$$|\boldsymbol{A}|=\begin{vmatrix}1+x&2&3&4\\1&2+x&3&4\\1&2&3+x&4\\1&2&3&4+x\end{vmatrix}\overset{c_1+c_i}{\underset{i=2,3,4}{=}}(10+x)\begin{vmatrix}1&2&3&4\\1&2+x&3&4\\1&2&3+x&4\\1&2&3&4+x\end{vmatrix}$$

$$\overset{c_i-ic_1}{\underset{i=2,3,4}{=}}(10+x)\begin{vmatrix}1&0&0&0\\1&x&0&0\\1&0&x&0\\1&0&0&x\end{vmatrix}=(10+x)x^3,$$

∴（2）当 $x=-10$ 时，$|\boldsymbol{A}|=0$，即 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4$ 线性相关；

（3）当 $a=-10$ 时，注意到 $|\boldsymbol{A}|=0$，而代数余子式

$$A_{44}=\begin{vmatrix}1+x&2&3\\1&2+x&3\\1&2&3+x\end{vmatrix}=(6+x)x^2\neq0,$$

且 $\boldsymbol{\alpha_1}+\boldsymbol{\alpha_2}+\boldsymbol{\alpha_3}+\boldsymbol{\alpha_4}=\boldsymbol{0}$，故 $R(\boldsymbol{A})=3$，$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 就是一个最大无关组，且 $\boldsymbol{\alpha}_4=-\boldsymbol{\alpha}_1-\boldsymbol{\alpha}_2-\boldsymbol{\alpha}_3$.（也可初等行变换求得）.

五、（**12** 分）设方程组 $\begin{cases}x_1+x_2+x_3=1,\\x_1+kx_2+x_3=k,\\x_1+x_2+k^2x_3=k,\end{cases}$（1）$k$ 取何值时，方程组无解、有唯一解、有无穷多解？

（2）当方程组有无穷多解时，求出其通解.

解法 1　对方程组的增广矩阵作初等行变换：

$$B=(A\,|\,b)=\left(\begin{array}{ccc|c}1&1&1&1\\1&k&1&k\\1&1&k^2&k\end{array}\right)\to\left(\begin{array}{ccc|c}1&1&1&1\\0&k-1&0&k-1\\0&0&k^2-1&k-1\end{array}\right)$$

（1）当 $k=-1$ 时，$R(A)=2\neq R(B)=3$，方程组无解；

当 $k\neq1$ 且 $k\neq-1$ 时，$R(A)=R(B)=3$，方程组有唯一解；

当 $k=1$ 时，有 $B\to\left(\begin{array}{ccc|c}1&1&1&1\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{array}\right)$，即 $R(A)=R(B)=1<3$，故方程组有无穷多组解.

（2）当 $k=1$ 时，方程组有无穷多组解，此时原方程组的同解方程组为　$x_1=1-x_2-x_3$，

其导出组 $x_1=-x_2-x_3$ 的一个基础解系为

$$\xi_1=\begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix},\quad\xi_2=\begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix}$$

于是原方程组的通解为

$$x=\boldsymbol{\eta}^*+c_1\xi_1+c_2\xi_2=\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}+c_1\begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix}+c_2\begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix}$$，其中 c_1,c_2 为任意常数.

解法 2　（克莱姆法则）系数行列式

$$D=\begin{vmatrix}1&1&1\\1&k&1\\1&1&k^2\end{vmatrix}=(k+1)(k-1)^2$$

（1）当 $k\neq1$ 且 $k\neq-1$，由克莱姆法则方程组有惟一解；

当 $k=-1$ 时，

$$B=(A\,|\,b)=\left(\begin{array}{ccc|c}1&1&1&1\\1&-1&1&-1\\1&1&1&-1\end{array}\right)\to\left(\begin{array}{ccc|c}1&1&1&1\\0&-2&0&-2\\0&0&0&-2\end{array}\right)$$

则 $R(A)=2\ne R(B)=3$，方程组无解；

当 $k=1$ 时，

$$B=(A\,|\,b)=\left(\begin{array}{ccc|c}1&1&1&1\\1&1&1&1\\1&1&1&1\end{array}\right)\to\left(\begin{array}{ccc|c}1&1&1&1\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{array}\right)$$

即 $R(A)=R(B)=1<3$，故方程组有无穷多组解.

（2）以下同**解法 1**.

六、（**12** 分）已知三阶实对称阵 $\boldsymbol{A}$ 的特征值为 $\lambda_1=2,\lambda_2=\lambda_3=1$，且对应于 $\lambda_2=\lambda_3=1$ 的特征向量为

$\boldsymbol{\alpha}_2=\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix},\boldsymbol{\alpha}_3=\begin{pmatrix}2\\2\\-1\end{pmatrix}$.（1）求 $\boldsymbol{A}$ 的对应于 $\lambda_1=2$ 的特征向量；（2）求 $\boldsymbol{A}$.

解：（1）设 $\lambda_1=2$ 的特征向量为 $\alpha_1=(x_1,x_2,x_3)^T$，因为实对称矩阵对应于不同特征值的特征向量正交，所以 $\begin{cases}x_1+x_2=0,\\2x_1+2x_2-x_3=0.\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x_1+x_2=0,\\x_3=0.\end{cases}$ 取其一解 $\alpha_1=(-1,\,1,\,0)^T$ 即可.

（2）构造矩阵 $P=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)=\begin{pmatrix}-1&1&2\\1&1&2\\0&0&-1\end{pmatrix}$，有 $P^{-1}=\begin{pmatrix}-1/2&1/2&0\\1/2&1/2&2\\0&0&-1\end{pmatrix}$，从而

$$P^{-1}AP=\Lambda=\begin{pmatrix}2&&\\&1&\\&&1\end{pmatrix}\Rightarrow A=P\Lambda P^{-1}=\begin{pmatrix}3/2&-1/2&0\\-1/2&3/2&0\\0&0&1\end{pmatrix}.$$

七、（**12** 分）求一个正交变换 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{Py}$，将二次型 $f(x_1,x_2,x_3)=2x_1x_2+2x_1x_3+2x_2x_3$ 化为标准形.

解：二次型 f 所对应的矩阵为 $A=\begin{pmatrix}0&1&1\\1&0&1\\1&1&0\end{pmatrix}$，特征方程 $|A-\lambda E|=(2-\lambda)(\lambda+1)^2=0$ 的根为

$\lambda_1=2$，$\lambda_2=\lambda_3=-1$.

当 $\lambda_1=2$ 时，由 $(A-2E)x=0$，$A-2E\sim\begin{pmatrix}1&0&-1\\0&1&-1\\0&0&0\end{pmatrix}$ 得基础解系 $\xi_1=\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$，

单位化得 $p_1=\dfrac{1}{\sqrt3}\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$；

当 $\lambda_2=\lambda_3=-1$ 时，由 $(A+E)x=0$，$A+E\sim\begin{pmatrix}1&1&1\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}$ 得基础解系

$\xi_2=\begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix}$，$\xi_3=\begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix}$，先正交再单位化得 $p_2=\dfrac{1}{\sqrt2}\begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix}$，$p_3=\dfrac{1}{\sqrt6}\begin{pmatrix}1\\1\\-2\end{pmatrix}$；

所以所求正交矩阵 $P=(p_1,p_2,p_3)=\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt3}&-\frac{1}{\sqrt2}&\frac{1}{\sqrt6}\\\frac{1}{\sqrt3}&\frac{1}{\sqrt2}&\frac{1}{\sqrt6}\\\frac{1}{\sqrt3}&0&-\frac{2}{\sqrt6}\end{pmatrix}$，正交变换 $x=Py$ 将二次型化为标准形

$f=2{y_1}^2-{y_2}^2-{y_3}^2$.

八、（**4** 分）设 $\boldsymbol{A}$ 是 $n\times m$ 矩阵，$\boldsymbol{B}$ 是 $m\times n$ 矩阵其中 $n<m$，$\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{E}_n$，证明：矩阵 $\boldsymbol{B}$ 的列向量组线性无关.

证法 1（矩阵秩）

只需证 $R(\boldsymbol{B}_{m\times n})=n$. $\because\ \boldsymbol{AB}=\boldsymbol{E}_n$，$\therefore\ n=R(\boldsymbol{E}_n)=R(\boldsymbol{AB})\le R(\boldsymbol{B}_{m\times n})\le n$，即 $R(\boldsymbol{B}_{m\times n})=n$，从而矩阵 $\boldsymbol{B}$ 的列向量组线性无关.

证法 2（方程组）只需证 $\boldsymbol{Bx}=\boldsymbol{0}$ 只有零解.

考虑两方程组

$$\boldsymbol{Bx}=\boldsymbol{0} \qquad ①$$

$$\boldsymbol{ABx}=\boldsymbol{0}\text{，即 }\boldsymbol{Ex}=\boldsymbol{0}. \qquad ②$$

显然，①的解一定是②的解.

由克莱姆法则或线性齐次方程组解的判定定理可知：②只有零解，又①的解均是②的解，故①只有零解，即 $\boldsymbol{B}$ 的列向量组线性无关.