7-5-2 根据场强与电势梯度的关系分析下列问题.(1)在电势不变的空间,电场强度是否为零?(2)在电势为零处,场强是否一定为零?(3)场强为零处,电势是否一定为零?(4)在均匀电场中,各点的电势梯度是否相等?各点的电势是否相等.

答:由场强与电势梯度的关系 $\boldsymbol{E} = -\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}n}\boldsymbol{e}_n = -\mathrm{gard}\ V$ 可知:

(1)由于空间中电势恒定不变,其梯度等于零,所以电场强度为零.例如一个带电的金属球,其电势是一常数,恒定不变,而球内各点的电场强度为零.

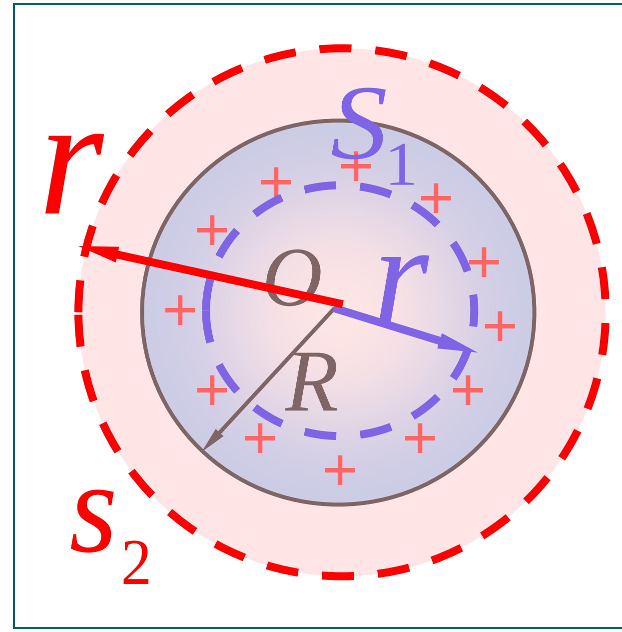
(2)已知某点电势为零,还不能说该点的电场强度为零.因为决定电场强度的是该点附近的电势分布,而不是该点的电势值.例如电偶极子中垂线上各点的电势均为零,但电场强度都不为零.

(3)不一定,如果该点附近的电势没有变化是一常数值,那么电势梯度为零,电场强度必定为零,而电势仍可以是一相对零电势点很高的值.例如一个带电的金属球,其内部各点的电场强度均为零,但各点的电势可以是一不为零的常数值.

(4)在均匀电场中,各点的电场强度值相等,电势梯度为一常数,但在不同的方向上,电势变化率是不一样的,在沿电场方向电势空间变化率为最大,也就是说在这个方向上的电势在作最大的线性增加;而在垂直于电场线方向上电势空间变化率最小为零,在这个方向上各点的电势相等.例如平行板电容器内的电场是一均匀电场,各点的电场强度大小相等,在垂直平行板方向上各点的电势随距离线性增加,而在平行于平行板方向上各点的电势有相同的大小,但不同的平行面上有不同的电势值.

例：均匀带电球壳的电场强度

一半径为R，均匀带电 Q 的薄球壳．求球壳内外任意点的电场强度.



解（1） $0 < r < R$

$$\oiint_{S_1} \vec{E} \cdot d\vec{S} = 0$$

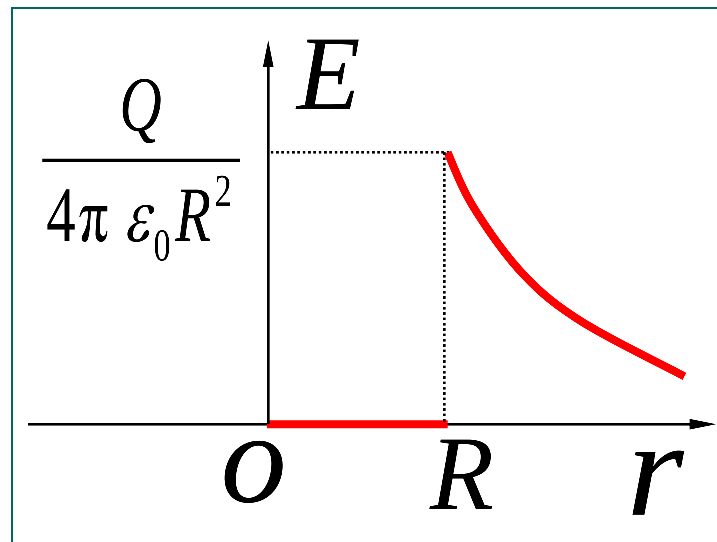
$$\boxed{\vec{E} = 0}$$

（2） $r > R$

$$\oiint_{S_2} \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{Q}{\varepsilon_0}$$

$$4\pi r^2 E = \frac{Q}{\varepsilon_0}$$

$$\boxed{E = \frac{Q}{4\pi \varepsilon_0 r^2}}$$

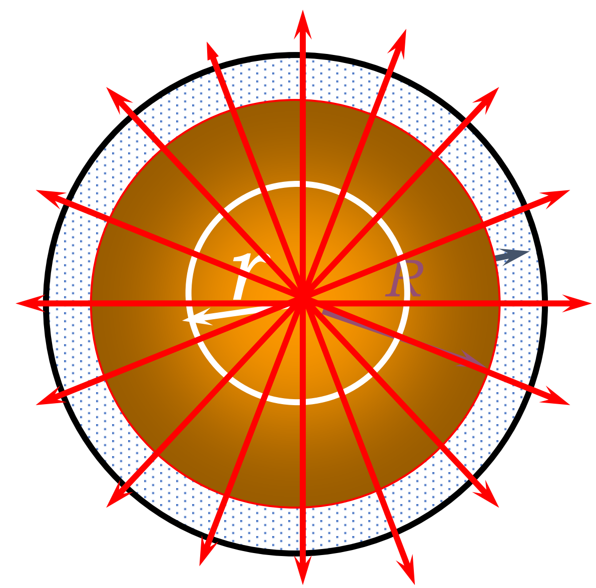


例：均匀带电球体的电场。球半径为R，球的介电常数为 ε_0，总电量为 Q 。

解： 电场分布也应有球对称性，方向沿径向。

作同心且半径为r的高斯面

$$\oiint_S \vec{E}\cdot d\vec{S} = E\cdot 4\pi r^2 = \frac{\sum q}{\varepsilon_0}$$



$$E = \frac{\sum q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}$$

$$E=\frac{\sum q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}$$

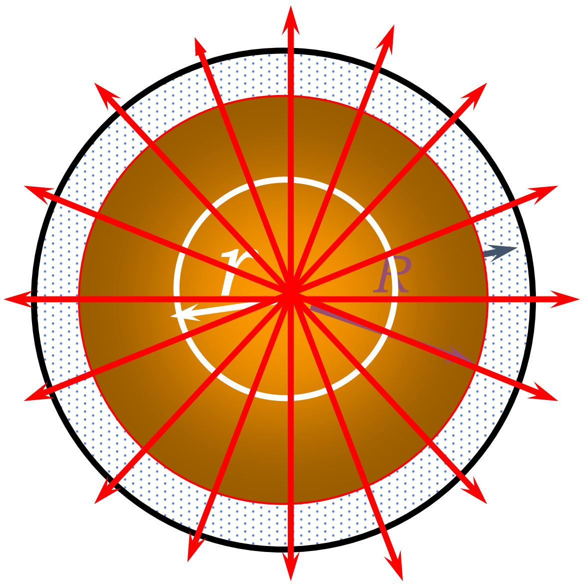
$$\rho=\frac{Q}{\frac{4}{3}\pi R^3}$$

r<R 时，高斯面内电荷

$$\sum q=\int \rho dV=\rho\cdot\frac{4}{3}\pi r^3$$

$$E=\frac{\rho}{3\varepsilon_0}r=\frac{Qr}{4\pi\varepsilon_0 R^3}$$

r>R 时，高斯面内电荷

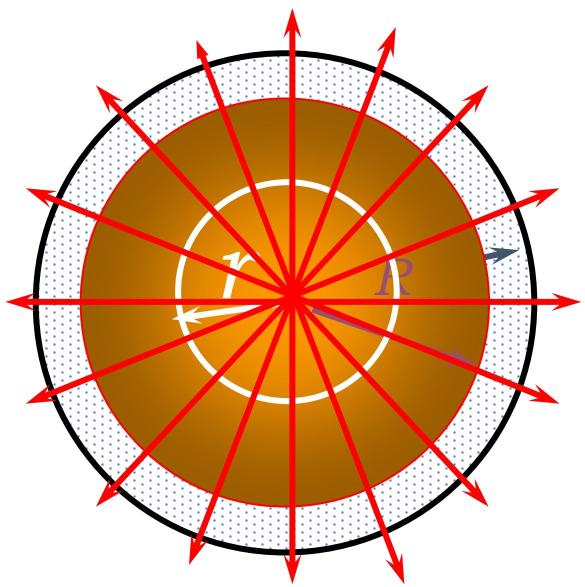


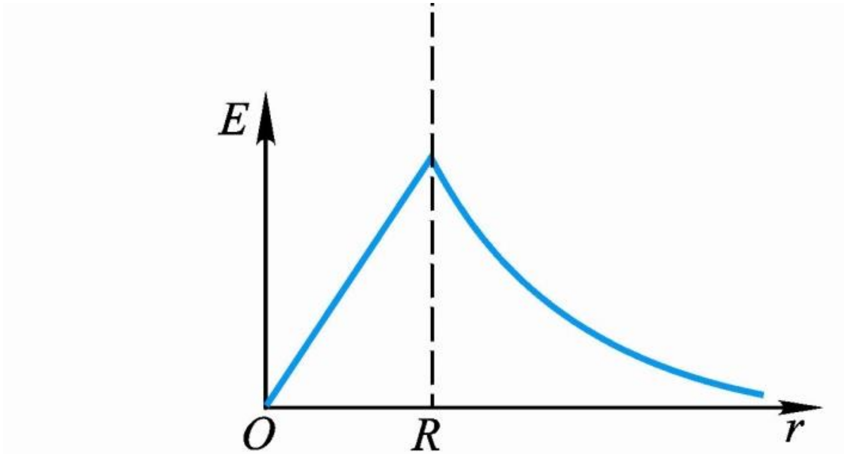
$$\sum q=\rho\cdot\frac{4}{3}\pi R^3$$

$$E=\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}$$

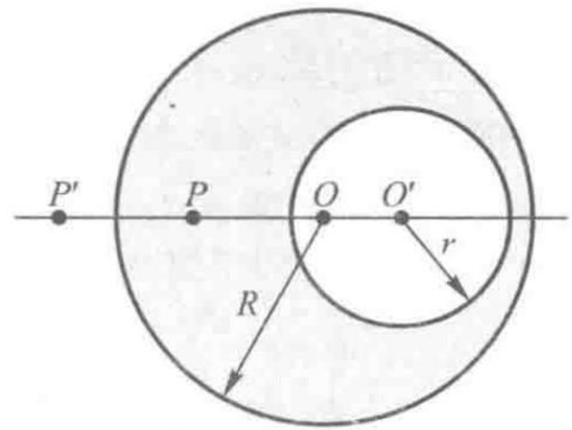
均匀带电球体的电场分布

$$E=\begin{cases}\dfrac{Qr}{4\pi\varepsilon_0 R^3} & r<R\\[2ex] \dfrac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r^2} & r>R\end{cases}$$





7-22. 在半径为 a，电荷体密度为 ρ 的均匀带电球内，挖去一个半径为 b 的小球，$OO'=c$，如习题 7-22 图所示。试求：O、O'、P、P'各点的电场强度。O、O'、P、P'在一条直线上。



习题 7-22 图

分析：将挖去小球的空腔看作是在原来均匀带电 ρ 的球内，填进一个均匀带 $-\rho$ 的小球构成的。根据电场强度的叠加原理可知，各点的电场强度为带 ρ 的大球和带 $-\rho$ 的小球各自在这些点激发的电场强度的矢量和。

解：设大、小带电球体的电场强度分别为 $\boldsymbol{E}_1$ 和 $\boldsymbol{E}_2$，则空间各点处的合场强为

$$\boldsymbol{E}=\boldsymbol{E}_1+\boldsymbol{E}_2$$

分别对大球和小球运用高斯定理，可以得到 $\boldsymbol{E}_1$ 和 $\boldsymbol{E}_2$ 分别为

$$\boldsymbol{E}_1=\begin{cases}\dfrac{\rho r}{3\varepsilon_0}\boldsymbol{e}_r & r<a\\[2ex] \dfrac{\rho a^3}{3\varepsilon_0 r^2}\boldsymbol{e}_r & r>a\end{cases},\quad \boldsymbol{E}_2=\begin{cases}-\dfrac{\rho r'}{3\varepsilon_0}\boldsymbol{e}_r' & r'<b\\[2ex] -\dfrac{\rho b^3}{3\varepsilon_0 r'^2}\boldsymbol{e}_r' & r'>b\end{cases}$$

式中 $\boldsymbol{e}_r$ 为由 O 点发出径矢 $\boldsymbol{r}$ 的单位矢量，$\boldsymbol{e}_r'$ 为由 O' 点发出径矢 $\boldsymbol{r}'$ 的单位矢量。

在 O 点，$r=0$，$\boldsymbol{r}'=c\boldsymbol{e}_r'=-c\boldsymbol{e}_r$。$\boldsymbol{E}_1=0$，所以，$O$ 点的电场强度为

$$\boldsymbol{E}_O=\boldsymbol{E}_{2O}=-\frac{\rho c}{3\varepsilon_0}\boldsymbol{e}_r'=\frac{\rho c}{3\varepsilon_0}\boldsymbol{e}_r$$

在 O' 点，$r'=0$，$\boldsymbol{r}=c\boldsymbol{e}_r$。$\boldsymbol{E}_2=0$，所以，$O'$ 点的电场强度为

$$\boldsymbol{E}_{O'}=\boldsymbol{E}_{1O'}=\frac{\rho c}{3\varepsilon_0}\boldsymbol{e}_r=\boldsymbol{E}_O$$

在空腔内部 O、O' 点的电场强度相同，且为一常矢量。用同样的方法，可以求得空腔内任意点的电场强度均为上式，这表明空腔内是一个均匀电场。

P 点位于大球内小球外，且位于 $O'O$ 的连线上，有 $\boldsymbol{e}_r'=\boldsymbol{e}_r$，可得电场强度为

$$\boldsymbol{E}_P=\boldsymbol{E}_{1P}+\boldsymbol{E}_{2P}=\frac{\rho r_P}{3\varepsilon_0}\boldsymbol{e}_r-\frac{\rho b^3}{3\varepsilon_0 r_P'^2}\boldsymbol{e}_r'=\frac{\rho}{3\varepsilon_0}\left(r_P-\frac{b^3}{r_P'^2}\right)\boldsymbol{e}_r$$

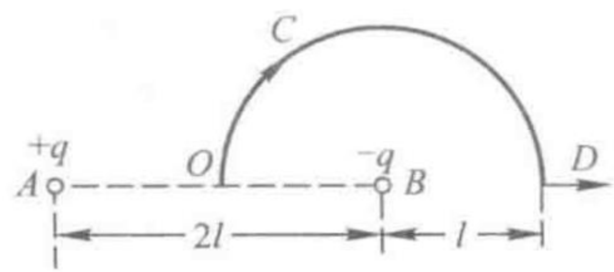
式中 $r_P'=r_P+c$。

P' 点位于两个球外，同样位于 $O'O$ 的连线上，也有 $\boldsymbol{e}_r'=\boldsymbol{e}_r$，所以，电场强度为

$$\boldsymbol{E}_{P'}=\boldsymbol{E}_{1P'}+\boldsymbol{E}_{2P'}=\frac{\rho a^3}{3\varepsilon_0 r^2}\boldsymbol{e}_r-\frac{\rho b^3}{3\varepsilon_0 r'^2}\boldsymbol{e}_r'=\frac{\rho}{3\varepsilon_0}\left(\frac{a^3}{r_{P'}^2}-\frac{b^3}{r'^2_{P'}}\right)\boldsymbol{e}_r$$

式中 $r_{P'}'=r_{P'}+c$。

7-34. 如习题 7-34 图所示，$AB=2l$，OCD 是以 B 为中心、l 为半径的半圆，A 点处有正电荷 $+q$，B 点处有负电荷 $-q$，求：(1) 把单位正电荷从 O 点沿 OCD 移到 D 点，电场力对它做了多少功？(2) 把单位正电荷从 D 点沿 AB 的延长线移到无穷远处，电场力对它做了多少功？



习题 7-34 图

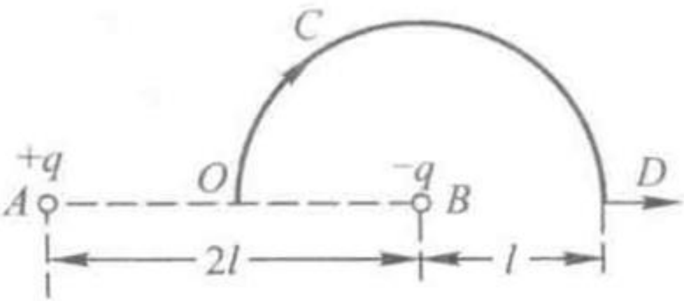
解 1：静电场力做功与路径无关，由电势差求解。

(1) $V_O=0, V_D=\dfrac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left(\dfrac{q}{3l}-\dfrac{q}{l}\right)=-\dfrac{q}{6\pi\varepsilon_0 l}, A_{OD}=q_0(V_O-V_D)=\dfrac{q}{6\pi\varepsilon_0 l}$

(2) $V_\infty=0, A_{D\infty}=q_0(V_D-V_\infty)=-\dfrac{q}{6\pi\varepsilon_0 l}$

解 2：利用功的定义求解。沿 AB 的延长线取坐标轴 Ox，原点在 O 点。

(1) 把单位正电荷 q_0 从 O 点沿 OCD 移到 D 点，$-q$ 的场强 $\boldsymbol{E}_{-q}$ 处处垂直于 q_0 的位移，电场力做功 A_{-q} 为零。所以，电场力做功为



（1）取O点为坐标原点，OD为X轴正方向，静电力做功与积分路径无关，做功可从O沿X方向积分到D点，$-q$电荷产生的电场与OCD处处垂直做功为0

$$A_{OD}=A_{-q}+A_{+q}=0+\int_0^{2l}\boldsymbol{F}_q\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{r}=\frac{q_0q}{4\pi\varepsilon_0}\int_0^{2l}\frac{\mathrm{d}x}{(x+l)^2}=\frac{q}{6\pi\varepsilon_0 l}$$

（2）取O点为坐标原点，OD为X轴正方向，单位正电荷到$-q$（B点）距离为x-l，单位正电荷到q （A点）距离为x+l

$$A_{D\infty}=\int_{2l}^{\infty}\boldsymbol{F}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{r}=\frac{q_0q}{4\pi\varepsilon_0}\int_{2l}^{\infty}\left(\frac{1}{(x+l)^2}-\frac{1}{(x-l)^2}\right)\mathrm{d}x=-\frac{q}{6\pi\varepsilon_0 l}$$

7-44. 一半径为 R 的金属球，原来不带电，将它放在点电荷 $+q$ 的电场中，球心与点电荷间距离为 $r(r>R)$。求金属球上感应电荷在球心处的电场强度和金属球的电势。若将金属球接地，求其上的电荷量。

分析：不带电的金属球处于点电荷 $+q$ 的电场中，将感应出等量异号的电荷，分布于导体球的外表面。静电平衡时，所有电荷的电场强度叠加的结果，使得导体球内的电场强度为零，成为等势体。

解：(1) 设所有电荷在球心处激发的合场强为 $\boldsymbol{E}_0$，其中点电荷 $+q$ 在球心处的电场强度为 $\boldsymbol{E}_q$，感应电荷的电场强度为 $\boldsymbol{E}$。静电平衡时，导体内部 O 点处的合场强为零，有

$$\boldsymbol{E}_0=\boldsymbol{E}_q+\boldsymbol{E}'=0$$

所以，金属球上感应电荷在球心处的电场强度为

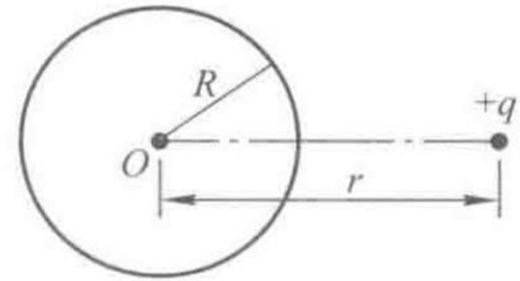
$$\boldsymbol{E}'=-\boldsymbol{E}_q=-\frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\boldsymbol{e}_r$$

式中 $\boldsymbol{e}_r$ 为 $+q$ 指向 O 的单位矢量，球心处的 $\boldsymbol{E}$ 与 $\boldsymbol{E}_q$ 大小相等方向相反。

设所有电荷在球心 O 点处电势的代数和为 V_0，其中 $+q$ 在球心处的电势为 V_q，感应电荷的电势为 V'。等量异号的感应电荷分布于球面，它们在球心处的电势为

设所有电荷在球心 O 点处电势的代数和为 V_0，其中$+q$ 在球心处的电势为 V_q，感应电荷的电势为 V'。等量异号的感应电荷分布于球面，它们在球心处的电势为

$$V' = \int_q \frac{\mathrm{d}q}{4\pi\varepsilon_0 R} = 0$$



故有
$$V_0 = V_q + V' = V_q = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r}$$

就是点电荷$+q$ 在球心处的电势，也是金属球的电势。

解图 7-44

（2）若将金属球接地，金属球与地球间将有电荷转移并重新分布。设金属球与地球达静电平衡状态时，带电为 q'，与地球等电势，$V_0'=0$，有

$$V_0' = V_q + V_q' = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r} + \frac{q'}{4\pi\varepsilon_0 R} = 0$$

得
$$q' = -\frac{R}{r}q$$

7-66. 一平行板空气电容器，每块极板的面积 $S=3\times10^{-2}\ m^2$，极板间的距离 $d_1=3\times10^{-3}\ m$，在平行板之间有一个厚度为 $d_2=1\times10^{-3}\ m$，与地绝缘的平行铜板，当电容器充电到电势差为 300 V 后与电源断开，再把铜板从电容器中抽出。问：(1) 电容器内电场强度是否变化？(2) 抽出铜板外界需做功多少？

解：(1) 抽出铜板前，电容器内电场强度为

$$E=\frac{U_1}{d_1-d_2}=\frac{300}{(3-1)\times10^{-3}}\ V/m=1.5\times10^5\ V/m$$

由高斯定理可知，该电场强度为

$$E=\frac{\sigma}{\varepsilon_0}=\frac{q}{\varepsilon_0 S}$$

式中 q 为极板上的电荷量。由于电容器充电后与电源断开，因而将铜板抽出后，q 将保持不变，场强 E 也不变，但极板间的电势差变为

$$U_2=Ed_1=\frac{U_1}{d_1-d_2}d_1=450\ V$$

(2) 在抽出平行铜板的过程中，外界将克服铜板上感应电荷与极板电荷间的引力做功，并转化为极板间电场能量的增量。所以，有

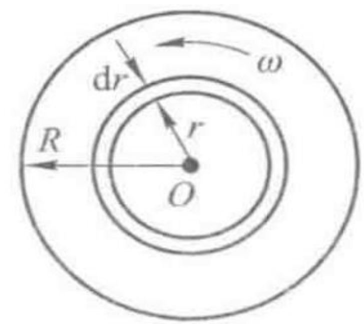
$$A=\Delta W=W_2-W_1=\frac{1}{2}\varepsilon_0E^2\Delta V=\frac{1}{2}\varepsilon_0E^2Sd_2=2.99\times10^{-6}\ J$$

式中 ΔV 为电场空间体积的增量。

8-19. 一个塑料圆盘，半径为 R，电荷 q 均匀分布于表面，圆盘绕通过圆心垂直于盘面的轴转动，角速度为 ω。求圆盘中心处的磁感应强度。

解：如解图 8-19 所示，在圆盘上取半径为 r 宽为 $\mathrm{d}r$ 的细圆环，环上的电荷量为

$$\mathrm{d}q=\sigma 2\pi r\mathrm{d}r=\frac{q}{\pi R^2}2\pi r\mathrm{d}r=\frac{2q}{R^2}r\mathrm{d}r$$



解图 8-19

设想一垂直于盘面、沿半径设置的固定面，在圆盘转动的一个周期 T 内，宽为 $\mathrm{d}r$ 的细圆环上的电量 $\mathrm{d}q$ 全部垂直通过了该固定面。根据电流定义，这个电流微元为

$$\mathrm{d}I=\frac{\mathrm{d}q}{T}=\frac{\mathrm{d}q}{2\pi}\omega=\frac{q\omega}{\pi R^2}r\mathrm{d}r$$

圆电流微元 $\mathrm{d}I$ 在盘心的磁感应强度为

$$\mathrm{d}B=\frac{\mu_0\mathrm{d}I}{2r}=\frac{\mu_0 q\omega}{2\pi R^2}\mathrm{d}r$$

积分得到整个圆盘转动时，在盘心的磁感应强度为

$$B=\int\mathrm{d}B=\int_0^R\frac{\mu_0 q\omega}{2\pi R^2}\mathrm{d}r=\frac{\mu_0 q\omega}{2\pi R}$$

$\boldsymbol{B}$ 的方向沿轴线，在解图 8-19 中垂直纸面向上。

例：无限长载流圆柱体的磁场

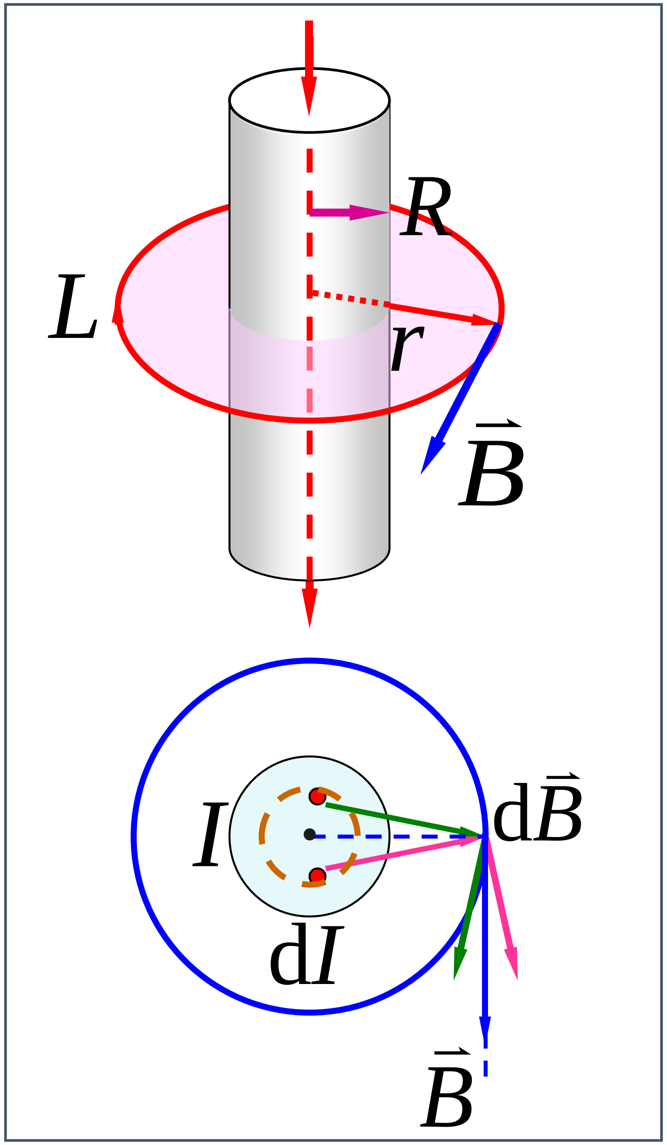
解 1）对称性分析 2）选取回路

$$r > R \qquad \oint_l \vec{B}\cdot d\vec{l} = \mu_0 I$$

$$2\pi\, rB = \mu_0 I \qquad B = \frac{\mu_0 I}{2\pi\, r}$$

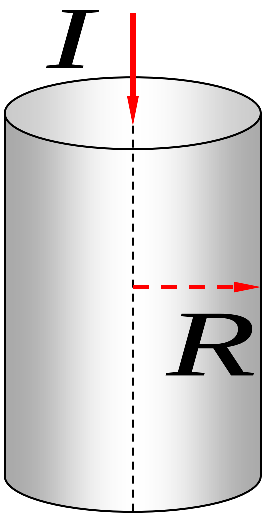
$$0 < r < R \qquad \oint_l \vec{B}\cdot d\vec{l} = \mu_0 \frac{\pi r^2}{\pi R^2} I$$

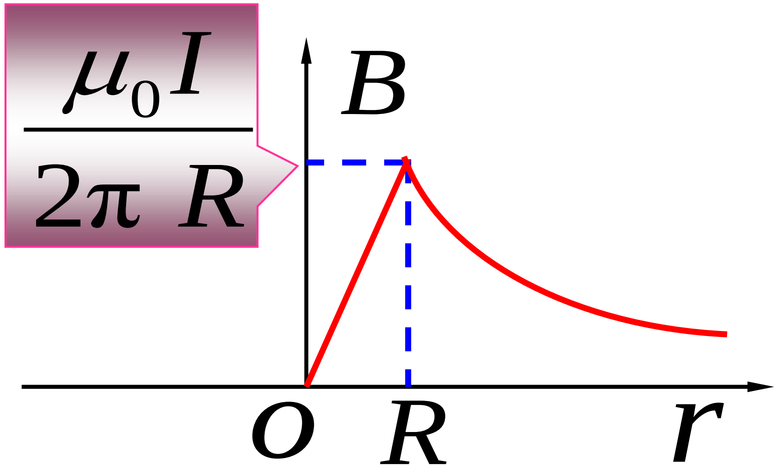
$$2\pi\, rB = \frac{\mu_0 r^2}{R^2} I \qquad B = \frac{\mu_0 I r}{2\pi\, R^2}$$



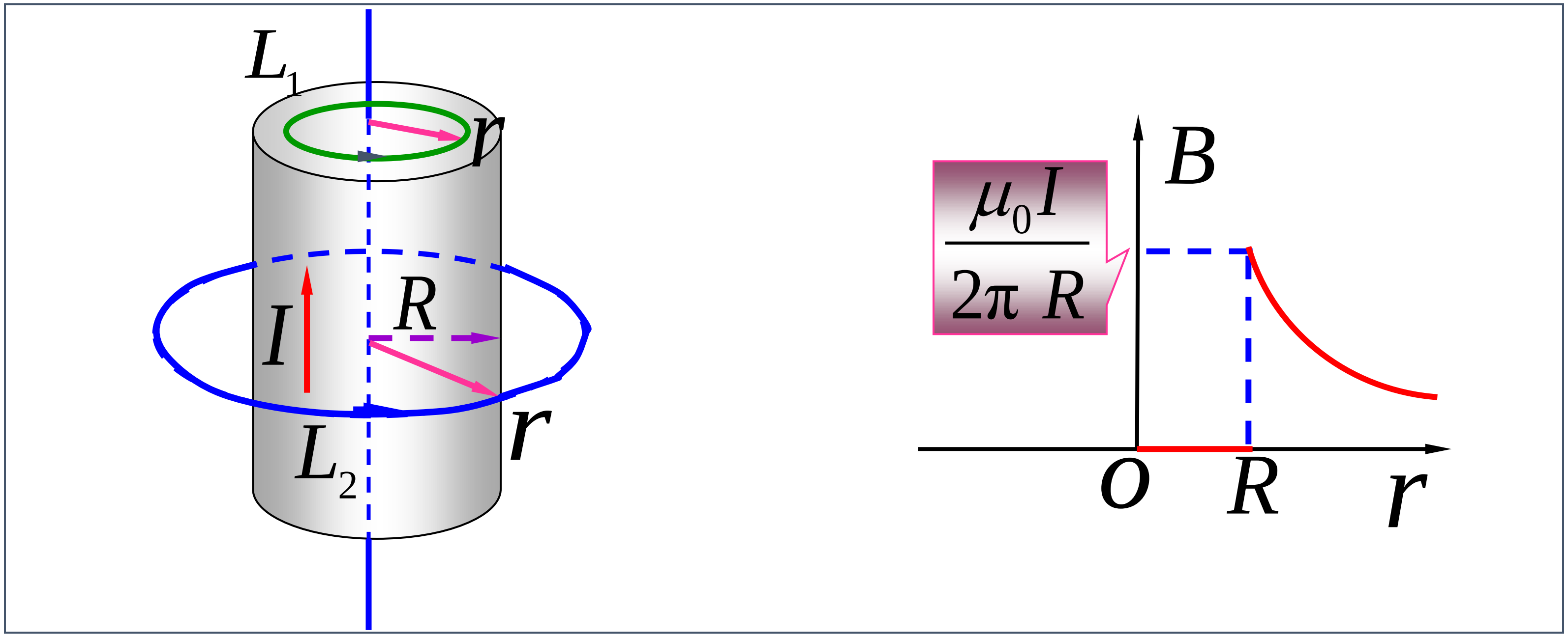
$\vec{B}$ 的方向与 I 成右螺旋

$$\begin{cases} 0 < r < R, & B = \dfrac{\mu_0 I r}{2\pi R^2} \\ r > R, & B = \dfrac{\mu_0 I}{2\pi r} \end{cases}$$





例：无限长载流圆柱面的磁场

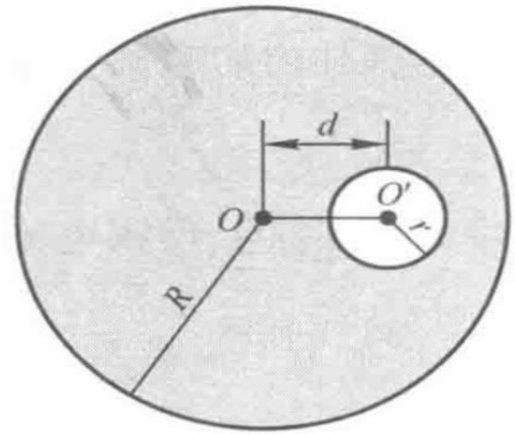


解

$$0<r<R,\ \oint_l \vec{B}\cdot d\vec{l}=0 \qquad B=0$$

$$r>R,\ \oint_l \vec{B}\cdot d\vec{l}=\mu_0 I \qquad B=\frac{\mu_0 I}{2\pi r}$$

8-26. 在半径为 R 的无限长金属圆柱体内部挖去一半径为 r 的无限长圆柱体，两柱体的轴线平行，相距为 d，如习题 8-26 图所示。今有电流沿空心柱体的轴线方向流动，电流 I 均匀分布在空心柱体的截面上。(1) 分别求圆柱轴线上和空心部分轴线上的磁感应强度的大小；(2) 当 $R=1.0\ \mathrm{cm}$，$r=0.5\ \mathrm{mm}$，$d=5.0\ \mathrm{mm}$ 和 $I=31\ \mathrm{A}$ 时，计算上述两处磁感应强度的值。



习题 8-26 图

分析：利用“补偿法”和磁感应强度的叠加原理求解。设想空心柱体由半径为 R 的电流均匀分布于圆截面的圆柱和半径为 r 的通有等值反向电流的圆柱构成。各处的磁感应强度，为两个反向电流磁感应强度的矢量和。这两个无限长圆柱电流的磁感应强度都具有各自的轴对称分布，可由安培环路定理求得。

解:设半径为 R 的圆柱截面上均匀分布的电流为 I_1,半径为 r 的圆柱截面上均匀分布有与 I_1流向相反的电流 I_2,有

$$I_1=\frac{IR^2}{R^2-r^2},\quad I_2=\frac{Ir^2}{R^2-r^2}$$

设 I_1和 I_2在场点的磁感应强度分别为 $\boldsymbol{B}_1$和 $\boldsymbol{B}_2$,有

$$\boldsymbol{B}=\boldsymbol{B}_1+\boldsymbol{B}_2$$

(1) 圆柱轴线 O 点的磁感应强度 B_O:对半径为 R 的圆柱电流 I_1而言,O 点在轴线上,故有 $B_1=0$;对半径为 r 的圆柱电流 I_2而言,O 点在圆柱外。以 O'为圆心,以 d 为半径在截面内作安培环路,有

$$\oint_L \boldsymbol{B}_2\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l}=B_2\cdot 2\pi d=\mu_0 I_2$$

得

$$B_2=\frac{\mu_0 Ir^2}{2\pi d(R^2-r^2)}$$

所以,圆柱轴线 O 点的磁感应强度 $\boldsymbol{B}_O=\boldsymbol{B}_2$,其方向垂直于 d,与 I_2呈右手螺旋关系。

空心部分轴线 O' 点的磁感应强度 $B_{O'}$：O' 点处于圆柱电流 I_2 的轴线上，故有 $B_2=0$；对半径为 R 的圆柱电流 I_1，O' 点处于圆柱内部。以 O 为圆心，以 d 为半径在截面内作安培环路，有

$$\oint_L \boldsymbol{B}_1 \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l}=B_1 \cdot 2\pi d=\mu_0 I_1'$$

式中

$$I_1'=\frac{I_1 d^2}{R^2}=\frac{Id^2}{R^2-r^2}$$

是环路所围电流，得

$$B_1=\frac{\mu_0 Id}{2\pi(R^2-r^2)}$$

所以，空心部分轴线 O' 点的磁感应强度 $\boldsymbol{B}_{O'}=\boldsymbol{B}_1$，其方向垂直于 d，与 I_1 呈右手螺旋关系。

（2）代入数据，可得

$$B_O=3.11\times10^{-6}\ \mathrm{T},\quad B_{O'}=3.11\times10^{-4}\ \mathrm{T}$$

8-47. 一螺线管长为 30 cm,直径为 15 mm,由绝缘的细导线密绕而成,每厘米绕有 100 匝,当导线中通以 2.0 A 的电流后,把这螺线管放到 $B=4.0$ T 的均匀磁场中。求:(1) 螺线管的磁矩;(2) 螺线管所受力矩的最大值。

解:(1) 载流螺线管的磁矩为

$$m=NIS=30\times100\times2\times\pi\left(\frac{15\times10^{-3}}{2}\right)^2=1.06\ \mathrm{A\cdot m^2}$$

(2) 螺线管所受力矩最大值为

$$M_{\max}=mB\sin\frac{\pi}{2}=4.2\ \mathrm{N\cdot m}$$

9-6-1 什么叫做位移电流？什么叫做全电流？位移电流和传导电流有什么不同？

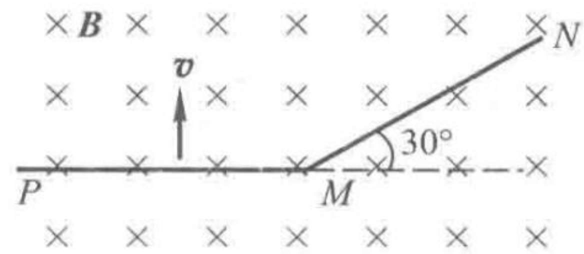
答：麦克斯韦总结了从库仑到安培和法拉第等人的电磁理论成就，并在此基础上指出，“不但变化的磁场可以激发电场，而且变化的电场也可以激发磁场”，麦克斯韦把电场的变化率看作是一种电流，称为是位移电流．位移电流的大小等于电位移通量对时间的变化率，即 $I_d=\frac{d\Psi_D}{dt}$．位移电流的这个表式可以从电容器

位移电流与电荷的定向运动所引起的传导电流不同，这里并没有电荷的宏观运动，也没有传导电流的热损耗，它之所以称为电流，是因为在激发磁场方面与通常的传导电流是等效的，而在其他方面存在根本的区别．由于在激发磁场方面的等效性，可以把传导电流 I 和位移电流 I_d 之和 $I_t=I+I_d$ 叫做全电流．这样，安培环路定理就扩展为全电流的表示，

$$\oint \boldsymbol{H}\cdot d\boldsymbol{l}=\sum(I+I_d)$$

在电容器充放电时，导线中的传导电流和电容器内的位移电流保证了全电流的连续性．

9-5. PM 和 MN 两段导线，其长均为 10 cm，在 M 处相接成 30°角，若使导线在均匀磁场中以速度 $v=15$ m/s 运动，方向如习题 9-5 图所示，磁场方向垂直纸面向内，磁感应强度为 $B=25\times10^{-2}$ T，问 P、N 两端之间的电势差为多少？哪一端电势高？



习题 9-5 图

解：取电动势的假定方向沿导线 $P\to M\to N$。对整段导线，有

$$\mathscr{E}_{PN}=\mathscr{E}_{PM}+\mathscr{E}_{MN}$$

其中

$$\mathscr{E}_{PM}=(\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{B})\cdot\boldsymbol{l}_{PM}=vBl_{PM}\cos\pi=-vBl_{PM}$$

$$\mathscr{E}_{MN}=(\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{B})\cdot\boldsymbol{l}_{MN}=vBl_{MN}\cos 150^\circ=-vBl_{MN}\cos 30^\circ$$

因 $l_{PM}=l_{MN}$，所以

$$\mathscr{E}_{PN}=\mathscr{E}_{PM}+\mathscr{E}_{MN}=-vBl_{PM}(1+\cos 30^\circ)=-7.0\times10^{-3}\ \text{V}$$

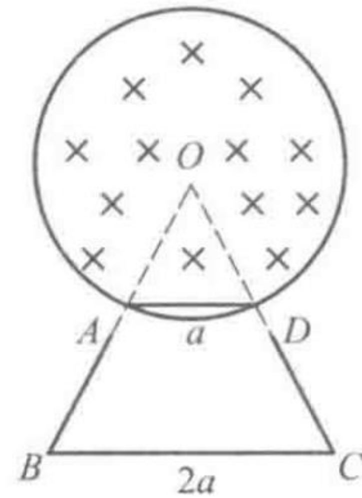
式中负号表明，导线上的动生电动势方向与假设方向相反，沿 $N\to M\to P$。

P、N 两端间的电势差为

$$U_{PN}=V_P-V_N=-\mathscr{E}_{PN}=7.0\times10^{-3}\ \text{V}$$

运动导线上 P 端的电势高。

9-16. 在半径为 a 的无限长圆柱空间内，均匀磁场随时间增大，即 $\frac{\mathrm{d}B}{\mathrm{d}t}>0$。一等腰梯形线框 $ABCD$，上底长为 a，下底长为 $2a$，放置如习题 9-16 图所示。试求线框各边上的感应电动势以及整个线框中的感应电动势。



习题 9-16 图

解 1: 根据电磁感应定律，匀强磁场变化时，有

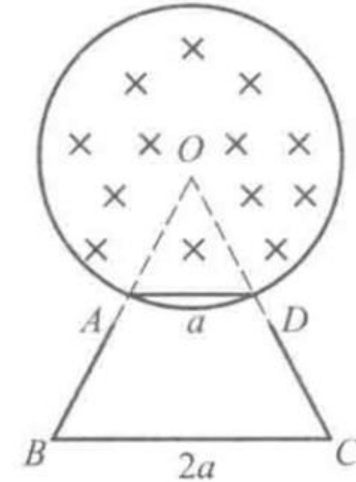
$$\oint_L \boldsymbol{E} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l} = -\int_S \frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S} = -\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{B}}{\mathrm{d}t} \cdot \boldsymbol{S}$$

式中 $\boldsymbol{E}$ 为感生电场，以同心圆方式分布在圆柱形磁场的内、外区域。$\boldsymbol{S}$ 为任意回路 L 所围磁场的有向面积。

取逆时针绕向的三角形回路 $OADO$，有

$$\mathscr{E}_1 = -\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{B}}{\mathrm{d}t} \cdot \boldsymbol{S}_{OAD} = \mathscr{E}_{OA} + \mathscr{E}_{AD} + \mathscr{E}_{DO}$$

回路的 OA 和 DO 边处处与 $\boldsymbol{E}$ 垂直，即



$$\mathscr{E}_{OA}=\mathscr{E}_{DO}=0$$

故有
$$\mathscr{E}_{AD}=\mathscr{E}_1=-\frac{\mathrm{d}B}{\mathrm{d}t}S_{OAD}\cos\ \pi=\frac{\mathrm{d}B}{\mathrm{d}t}S_{OAD}=\frac{\sqrt{3}}{4}a^2\ \frac{\mathrm{d}B}{\mathrm{d}t}$$

$\mathscr{E}_{AD}$由 A 指向 D。

线框边 AB 和 CD 同样因处处与 $\boldsymbol{E}$ 垂直，有

$$\mathscr{E}_{AB}=\mathscr{E}_{CD}=0$$

同理，再取逆时针绕向的三角形回路 $OBCO$，有

$$\mathscr{E}_2=-\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{B}}{\mathrm{d}t}\cdot\boldsymbol{S}_{OBC}=\mathscr{E}_{OB}+\mathscr{E}_{BC}+\mathscr{E}_{CO}=\mathscr{E}_{BC}$$

式中$\mathscr{E}_{OB}=\mathscr{E}_{OA}+\mathscr{E}_{AB}=0$，$\mathscr{E}_{CO}=\mathscr{E}_{CD}+\mathscr{E}_{DO}=0$，$S_{OBC}$为回路所围磁场的扇形面积。由此可得

$$\mathscr{E}_{BC}=\mathscr{E}_2=-\frac{\mathrm{d}B}{\mathrm{d}t}S_{OBC}\cos\ \pi=\frac{\pi a^2}{6}\frac{\mathrm{d}B}{\mathrm{d}t}$$

$\mathscr{E}_{BC}$由 B 指向 C。

整个线框中的感应电动势为

$$\mathscr{E}=\mathscr{E}_{BC}-\mathscr{E}_{AD}=\left(\frac{\pi}{6}-\frac{\sqrt{3}}{4}\right)a^2\ \frac{\mathrm{d}B}{\mathrm{d}t}$$

$\mathscr{E}>0$，线框中电动势为逆时针绕向。

例9-4　半径为R 的无限长螺线管内部的磁场B随时间作线性变化（dB/dt =常量）。 求管内外的感生电场。

解：　根据对称性取顺时针方向同心圆为回路

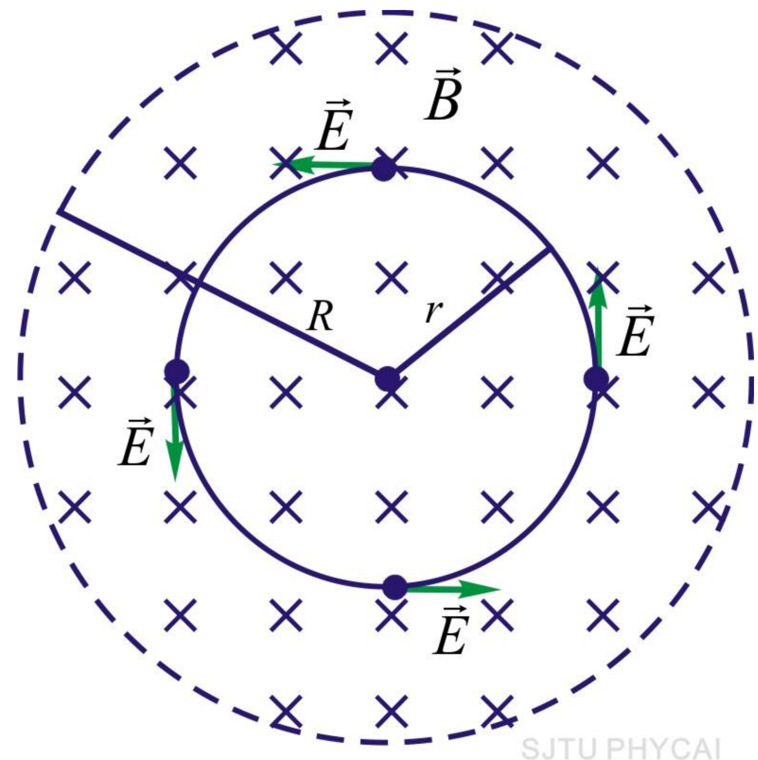
$r < R$ 时：

$$\Phi = BS = B\pi r^2$$

$$\varepsilon_i = -\frac{d\Phi}{dt} = \oint_L \vec{E}_i \cdot d\vec{l}$$

$$-\left(\pi r^2\right)\frac{dB}{dt} = E_i \cdot 2\pi r$$

$$\Rightarrow \quad E_i = -\frac{r}{2}\frac{dB}{dt}$$



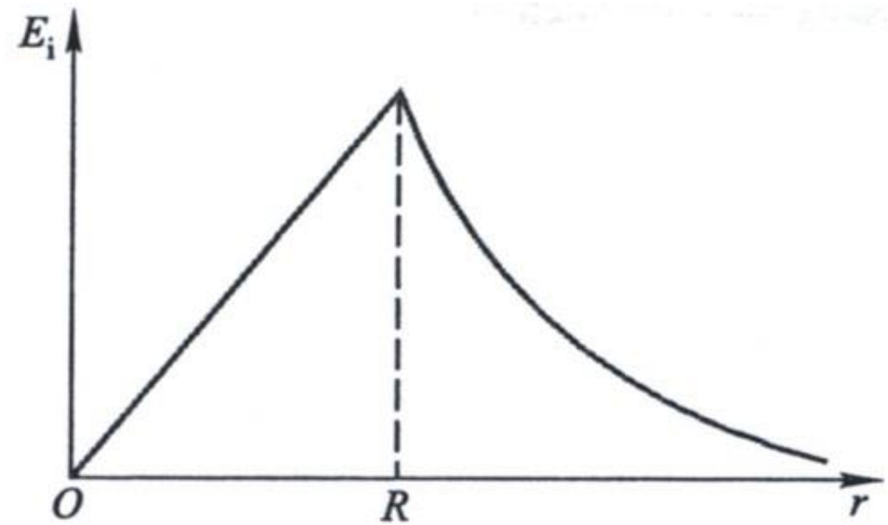
负号表示感生电场为逆时针方向（$\frac{dB}{dt} > 0$）（如图）

$r \geq R$ 时：

$$\Phi = B \cdot \pi R^2$$

$$\varepsilon_{\mathrm{i}} = -\frac{\mathrm{d}\Phi}{\mathrm{d}t} = \oint_L \vec{E}_{\mathrm{i}} \cdot \mathrm{d}\vec{l}$$

$$-\pi R^2 \frac{\mathrm{d}B}{\mathrm{d}t} = E_{\mathrm{i}} 2\pi r$$



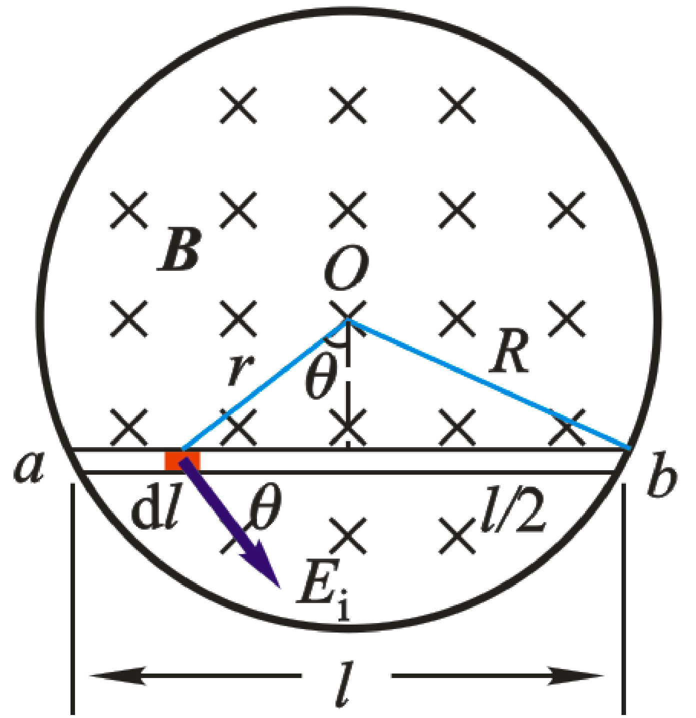
$$\Longrightarrow \quad E_{\mathrm{i}} = -\frac{R^2}{2r}\frac{\mathrm{d}B}{\mathrm{d}t}$$

感应电场分布为 $$E_{\mathrm{i}} = \begin{cases} -\dfrac{r}{2}\dfrac{\mathrm{d}B}{\mathrm{d}t} & r < R \\ -\dfrac{R^2}{2r}\dfrac{\mathrm{d}B}{\mathrm{d}t} & r \geq R \end{cases}$$

例9-5　半径为R 的圆柱形体积内充满磁感应强度$B(t)$的均匀磁场，有一长为 L 的金属棒放在其中，设$\mathrm{d}B/\mathrm{d}t$ 已知，求棒两端的感生电动势。

解：　利用前面的结果

$$E_{\mathrm{i}} = -\frac{r}{2}\frac{\mathrm{d}B}{\mathrm{d}t}$$



金属棒两端的感生电动势

$$\varepsilon_{ab} = \int_a^b \vec{E}_{\mathrm{i}} \cdot \mathrm{d}\vec{l} = \int_a^b E_{\mathrm{i}} \cos\theta \, \mathrm{d}l$$

代入

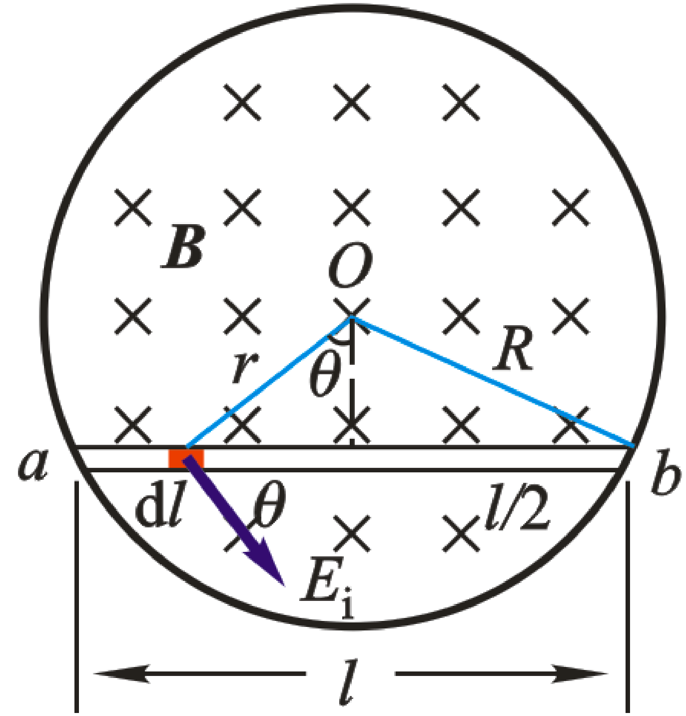
$$\cos\theta = \frac{\sqrt{R^2-(L/2)^2}}{r}$$

解得

$$\varepsilon_{ab} = \int_a^b \frac{1}{2} r \frac{\mathrm{d}B}{\mathrm{d}t} \frac{\sqrt{R^2-L^2/4}}{r} \mathrm{d}l$$

$$= \frac{L}{2}\sqrt{R^2-\left(\frac{L}{2}\right)^2}\frac{\mathrm{d}B}{\mathrm{d}t}$$

方向： $a \to b$



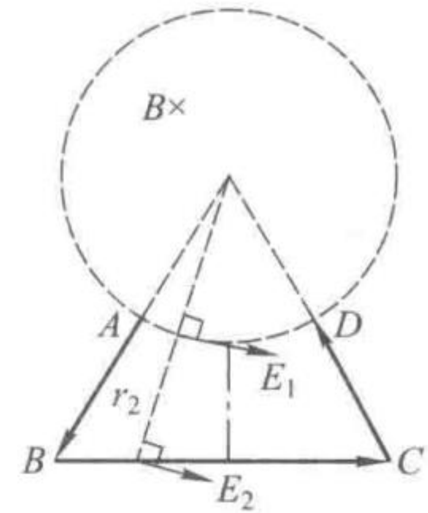
解 2: 整个线框中的感应电动势也可由 $\mathscr{E}=\oint_L \boldsymbol{E}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l}$ 求解。

如解图 9-16 所示，取 L 为逆时针绕向。注意到 AB 和 CD 边处处与 $\boldsymbol{E}$ 垂直，故有

$$\mathscr{E}=\oint_L \boldsymbol{E}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l}=\int_{BC}\boldsymbol{E}_2\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l}+\int_{DA}\boldsymbol{E}_1\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l}$$

式中 $\boldsymbol{E}_1$ 和 $\boldsymbol{E}_2$ 分别为圆柱区域内、外的感生电场强度，均与圆柱径向相垂直，

$$E_1=\frac{r_1}{2}\frac{\mathrm{d}B}{\mathrm{d}t},\quad (r_1<a);\quad E_2=\frac{a^2}{2r_2}\frac{\mathrm{d}B}{\mathrm{d}t},\quad (r_2>a)$$



解图 9-16

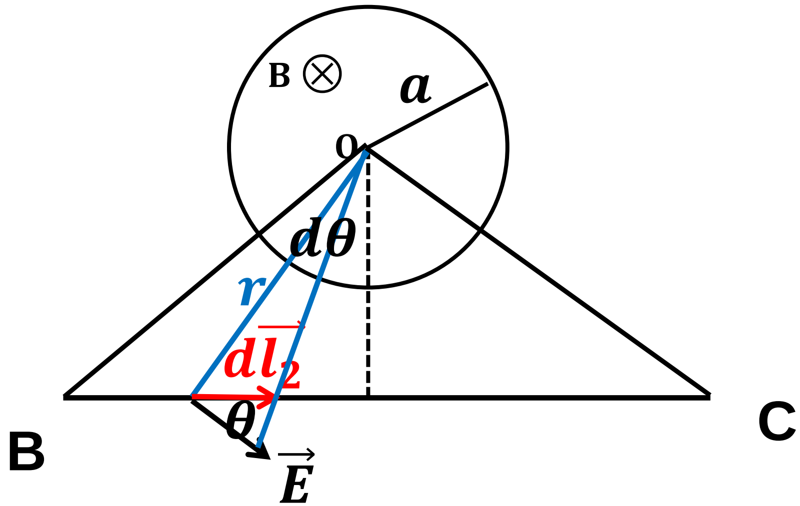
所以 $\mathscr{E}=\int_{BC}\frac{a^2}{2r_2}\frac{\mathrm{d}B}{\mathrm{d}t}\cos\theta \mathrm{d}l_2+\int_{DA}\frac{r_1}{2}\frac{\mathrm{d}B}{\mathrm{d}t}\cos(\pi-\theta)\mathrm{d}l_1$

将几何关系 $\cos\theta \mathrm{d}l_2=r_2\mathrm{d}\theta$ 和 $r_1\cos\theta=h_1=\frac{a}{2}\sqrt{3}$ 代入上式，得

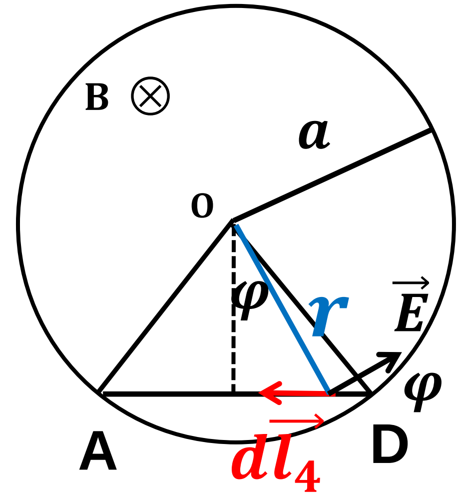
$$\mathscr{E}=\frac{a^2}{2}\frac{\mathrm{d}B}{\mathrm{d}t}\int_{-\pi/6}^{\pi/6}\mathrm{d}\theta-\frac{a}{4}\sqrt{3}\frac{\mathrm{d}B}{\mathrm{d}t}\int_0^a \mathrm{d}l_1=\left(\frac{\pi}{6}-\frac{\sqrt{3}}{4}\right)a^2\frac{\mathrm{d}B}{\mathrm{d}t}$$

取逆时针绕行回路ABCDA

BC 方向中一段



DA方向 中一段



$$dl_2 \cos\theta = r d\theta$$

$$r dl_4 \cos(\pi - \varphi) = -\frac{\sqrt{3}a}{2} dl_4$$

12-14. 一平面单色光波垂直照射在厚度均匀的薄油膜上，油膜覆盖在玻璃板上，所用单色光的波长可以连续变化，观察到 500 nm 与 700 nm 这两个波长的光在反射中消失。油的折射率为 1.30，玻璃的折射率为 1.50，试求油膜的最小厚度。

分析：在油膜上、下表面的反射光都发生 π 的相位突变。

解： 设油膜和玻璃板都处在空气中，薄油膜的厚度为 e，空气的折射率为 n_1，油膜和玻璃的折射率分别为 n_2 和 n_3。$\lambda_1=500$ nm，$\lambda_2=700$ nm。反射光干涉极小时的光程差满足条件

$$2en_2=(2k_1+1)\frac{\lambda_1}{2},\quad 2en_2=(2k_2+1)\frac{\lambda_2}{2}$$

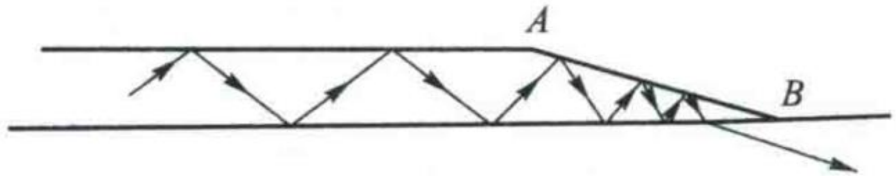
可解得
$$5k_1=7k_2+1$$

上式成立的最小级次为 $k_1=3$，$k_2=2$，所以

$$e=\frac{(2k_1+1)\lambda_1}{4n_2}=\frac{(2\times3+1)\times500}{4\times1.30}\ \text{nm}=673\ \text{nm}$$

12–21 集成光学中的劈形薄膜耦合器如图所示，它由沉积在玻璃衬底上的 Ta_2O_5 薄膜构成，劈形端从 A 到 B 厚度逐渐减小到零. 能量由薄膜耦合到衬底中. 为测定薄膜的厚度，用波长为 632.8 μm 的氦氖激光垂直照射，观察到劈形端共出现 11 条暗纹，且 A 处对应一条暗纹. 已知 Ta_2O_5 对 632.8 ~~μm~~ 激光的折射率为 2.21，求薄膜的厚度.

nm



习题 12–21 图

解：由暗纹条件

$$\delta = 2ne + \lambda/2$$
$$= (2k+1)\lambda/2 \quad (k=0,1,2\ldots)$$

知，第11条暗纹对应于k=10，代入上式得

$$e = k\lambda/2n$$

所以SiO_2薄膜的厚度为1.43 μm。

12-34. 波长 600 nm 的单色光垂直入射在一光栅上。第二级明条纹出现在 $\sin\theta=0.20$ 处，第四级缺级。试问:(1) 光栅上相邻两缝的间距 $(a+b)$ 有多大? (2) 光栅上狭缝可能的最小宽度 a 有多大? (3) 按上述选定的 a、b 值,试问在光屏上可能观察到的全部明条纹数是多少?

分析:光栅的多光束干涉主极大光强受单缝衍射光强的调制。干涉主极大位置由光栅方程决定,主极大与单缝衍射极小在位置上重合时,该级干涉主极大缺级,联立方程求解。

解: (1) 由光栅方程

$$(a+b)\sin\theta=k\lambda$$

和 $k=2$ 时

$$\sin\theta=0.20$$

得光栅常量

$$a+b=\frac{k\lambda}{\sin\theta}=\frac{2\times600\times10^{-9}}{0.20}\ \mathrm{m}=6\times10^{-6}\ \mathrm{m}$$

(2) 由

$$(a+b)\sin\theta=k\lambda \quad 和 \quad a\sin\theta=k'\lambda$$

因第四级缺级,有

$$\frac{a+b}{a}=\frac{k}{k'}=\frac{4}{1}=\frac{8}{2}=\cdots$$

得

$$a=\frac{a+b}{4}=\frac{6\times10^{-6}}{4}\ \mathrm{m}=1.5\times10^{-6}\ \mathrm{m}$$

(3) 在光栅方程中，令 $\sin\theta=1$，可解得 $k=10$，其中 $k=\pm4,\pm8$ 缺级，$k=\pm10$ 的主极大在 $\theta=\pm\frac{\pi}{2}$ 处，实际不可见。所以，在光屏上可观察到的全部明条纹的级次为 $k=0,\pm1,\pm2,\pm3,\pm5,\pm6,\pm7,\pm9$，共 15 条。

12-46. 使自然光通过两个偏振化方向成 60°角的偏振片，透射光强为 I_1。今在这两个偏振片之间再插入另一偏振片，它的偏振化方向与前两个偏振片均成 30°角，则透射光强为多少？

解： 设强度为 I_0 的自然光，依次通过偏振片 A、B、C。A、C 间的夹角为 $\theta_1=60°$，A、B 与 B、C 间的夹角均为 $\theta_2=30°$。自然光入射于起偏器 A 后的透射光为线偏振光，即

$$I_A=\frac{1}{2}I_0$$

插入 B 前，透过 C 的光强为

$$I_1=I_A\cos^2\theta_1=\frac{I_0}{2}\cos^2 60°=\frac{1}{8}I_0$$

插入 B 后，设透过 B 和 C 的光强为分别为 I_B 和 I_2，有

$$I_B=I_A\cos^2\theta_2=\frac{I_0}{2}\cos^2 30°=\frac{3}{8}I_0$$

$$I_2=I_B\cos^2\theta_2=\frac{3}{8}I_0\cos^2 30°$$

解得

$$I_2=\frac{9}{32}I_0=\frac{9}{32}\times 8I_1=2.25I_1$$