部分习题参考答案

习题 1-1

1．（1）$D=(1,2)\cup(2,+\infty)$；（2）$D=\left[-\frac{1}{3},1\right]$；　（3）$D=(-\infty,0)\cup(0,3]$；（4）$D=[-1,1)$．

2．（1）不是同一函数；　（2）是同一函数；　（3）不是同一函数．

3．（1）$f(x)=\mathrm{e}^{(x+1)^3}$；　　（2）$\varphi(x)=\dfrac{1+2\ln x}{2-3\ln x}$．

4．$f[g(x)]=\begin{cases}1, & x\in(-\sqrt{2},\sqrt{2}),\\ -2, & \text{其它},\end{cases}$ $g[f(x)]=\begin{cases}1, x>0,\\ -2, x\le 0.\end{cases}$

习题 1-2

1．提示：$|f(x)|\le\dfrac{1}{2}$．

2．提示：对于 $\forall M>0$，取 $x_0=-1+\mathrm{e}^{-2(M+1)}\in(-1,1]$．

3．（1）偶函数；（2）奇函数；（3）既不是奇函数也不是偶函数；（4）奇函数．

4．$\varphi(x)$ 单减；$\psi(x)$ 单增．

习题 1-3

2．（1）$f(x)=x^2+2$；（2）$f(x)=1-x^2+\dfrac{1-x^2}{x^2}$．

3．$a=-1,b=3$．

4．函数 $y=f_1(x)$ 的图形与函数 $y=f(x)$ 的图形关于 y 轴对称；函数 $y=f_2(x)$ 的图形与函数 $y=f(x)$ 的图形关于 x 轴对称；函数 $y=f_3(x)$ 的图形与函数 $y=f(x)$ 的图形关于原点对称．

习题 1-4

1．提示：利用几何算术平均值不等式.

习题 1-5

1． $r=\dfrac{1}{\cos\theta+\sin\theta}$； $\dfrac{\pi}{4}$； $\dfrac{2\pi}{3}$.

2． $r^2=2\cos 2\theta$； $\left[-\dfrac{\pi}{4},\dfrac{\pi}{4}\right]\cup\left[\dfrac{3\pi}{4},\dfrac{5\pi}{4}\right]$.

总复习题一

1． $[-\sqrt{2},\sqrt{2}]$.

2． $f^{-1}(x)=\pi-\arcsin x$.

3． C.

4．（1） $f(2)=2a$， $f(5)=5a$；（2） $a=0$.

7．令 $\varphi(x)=\dfrac{1}{2}[f(x)+f(-x)],\psi(x)=\dfrac{1}{2}[f(x)-f(-x)]$， $f(x)=\varphi(x)+\psi(x)$.

习题 2-1

1．（1）存在，且 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=0$；（2）存在，且 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=0$；（3） $\lim\limits_{n\to\infty}x_n$ 不存在；（4）存在，且 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=1$；（5） $\lim\limits_{n\to\infty}x_n$ 不存在.

4．反例： $x_n=(-1)^n$，则 $\lim\limits_{n\to\infty}|x_n|=1$，但 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n$ 不存在.

习题 2-2

2．（1）图略；（2） $f(2^-)=4,f(2^+)=4$；（3） $\lim\limits_{x\to 2}f(x)=4$.

习题 2-3

1.（1）正确. 因为若 $\lim\limits_{x\to x_0}[f(x)+g(x)]$ 存在，则 $\lim\limits_{x\to x_0}g(x)=\lim\limits_{x\to x_0}\{[f(x)+g(x)]-f(x)\}$ 存在，矛盾.

（2）不正确. 例如，极限 $\lim\limits_{x\to 0}\sin\dfrac{1}{x}$ 与 $\lim\limits_{x\to 0}\left(1-\sin\dfrac{1}{x}\right)$ 均不存在，但 $\lim\limits_{x\to 0}\left[\sin\dfrac{1}{x}+\left(1-\sin\dfrac{1}{x}\right)\right]=1$.

（3）不正确. 例如，$\lim\limits_{x\to 0}x=0$，$\lim\limits_{x\to 0}\sin\dfrac{1}{x}$ 不存在，但 $\lim\limits_{x\to 0}x\sin\dfrac{1}{x}=0$.

2.（1）原式 $=17$；（2）原式 $=\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{x-2}{x^2-x+4}=-\dfrac{2}{5}$；（3）原式 $=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^2-4x}{x(x^2+2)}=-2$；

（4）原式 $=\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{2}{x}\right)\cdot\lim\limits_{x\to\infty}\left(3-\dfrac{1}{x^2}\right)=3$.

3．不能断定一定有 $A>0$.

反例：$f(x)=\begin{cases}x^2, & x\neq 0,\\ 1, & x=0,\end{cases}$ 则 $f(x)>0$，但 $\lim\limits_{x\to 0}f(x)=0$.

习题 2-4

1．上述结论都不正确.

（1）例如 $f(x)=-\dfrac{1}{x^2}$，当 $x\to 0$ 时；

（2）例如 $f(x)=1+x^2$，当 $x\to 0$ 时；

（3）例如 $f(x)=-\dfrac{1}{x^2},g(x)=1+\dfrac{1}{x^2}$，当 $x\to 0$ 时均为无穷大，但 $\lim\limits_{x\to 0}[f(x)+g(x)]=1$；

（4）例如 $f(x)=x^2,g(x)=\dfrac{1}{x}$，当 $x\to 0$ 时 $g(x)$ 是无穷大，但 $\lim\limits_{x\to 0}f(x)g(x)=0$；

（5）当 $x\to 0$ 时，x^2+5x+2 与 x^2+8x+2 都不是无穷小.

2．当 $|x|>\sqrt[3]{1001}$ 时，有 $|f(x)|>10^3$.

3.（1）2;（2）∞;（3）3；（4）$\dfrac{1}{3}$.

6．（1） $a=3$；（2） $a=0$.

习题 2-5

1．（1） $\frac{3}{2}$；（2）1；（3）-1；（4）1；（5）$-\frac{1}{2}$；（6）e^{-3}；(7) e^{-2}；（8）e^{-1}；(9) e^{2}.

2． $a=\ln 3$.

3． 1.

4. 2 .

习题 2-6

1．（1）正确. 因为若 $f(x)$ 在区间 I 上连续，且 $f(x)+g(x)$ 在区间 I 上也连续，则 $g(x)=[f(x)+g(x)]-f(x)$ 在区间 I 上必然也连续.

（2）不正确. 反例如下：

$f(x)=\begin{cases}1, x\le 0,\\ -1, x>0,\end{cases}$ $g(x)=\begin{cases}-1, x\le 0,\\ 1, x>0,\end{cases}$ 则 $f(x), g(x)$ 在 $x=0$ 处不连续，但 $f(x)+g(x), f(x)g(x), \frac{f(x)}{g(x)}$ 均在 $x=0$ 处连续，又令 $h(x)=f(x)$，那么 $f(x)-h(x)$ 在 $x=0$ 处也连续.

（3）不正确. 反例： $f(u)=1, \varphi(x)=\operatorname{sgn} x=\begin{cases}-1, x<0,\\ 0, x=0,\\ 1, x>0.\end{cases}$

（4）不正确. 反例： $f(x)=\begin{cases}-1, x\le 0,\\ 1, \quad x>0,\end{cases}$ $a=0$.

（5）不正确. 反例： $f(x)=\begin{cases}0, x<0,\\ 1, x\ge 0.\end{cases}$

（6）不正确. 反例： $f(x)=\frac{\sin x}{x}$ 在 $x=0$ 点分母为 0，但 $x=0$ 不是 $f(x)$ 的无穷间断点.

3．（1）$x=1$ 为可去间断点，补充定义 $f(1)=\frac{1}{2}$，则函数 $f(x)$ 在 $x=1$ 处连续，

$x=-3$ 为 $f(x)$ 的无穷间断点.

（2） $x=\pm 1$ 为 $f(x)$ 的跳跃间断点.

（3） $x=0$ 为 $f(x)$ 的跳跃间断点， $x=1$ 为 $f(x)$ 的无穷间断点.

（4） $x=0$ 为可去间断点，补充定义 $f(0)=1$，则函数 $f(x)$ 在 $x=0$ 处连续;

$x=k\pi, k=\pm 1,\pm 2,\cdots$ 为 $f(x)$ 的无穷间断点；

$x=k\pi+\frac{\pi}{2}, k=0,\pm 1,\pm 2,\cdots$ 为可去间断点，补充定义 $f\left(k\pi+\frac{\pi}{2}\right)=0$，

$k=0,\pm 1,\pm 2,\cdots$，则函数 $f(x)$ 在 $x=k\pi+\frac{\pi}{2}, k=0,\pm 1,\pm 2,\cdots$ 处连续.

4．$a=-2$．

5．（1） $\ln(1+\sqrt{3})$；（2） $-\frac{1}{2}$；（3） $-\frac{1}{4}$；（4） e^{x-1}；（5） e^{3}．

总复习题二

1．（1）必要，充分；（2）必要，充分；（3）充分必要.

2.（1）D；（2）D.

5．（1） e；（2） $\frac{n}{m}$；（3） $\frac{1}{8}$；（4） $-\frac{3}{2}$；（5） e^{a-b}．

6．1．

7．$a=1, b=2$．

8．$a=1, b=\frac{1}{2}$．

9.（1） 1；（2） $\frac{1}{2}$．

10．0．

11.$\sqrt{a}$．

12．$n=3$．

13．$f(x)=\begin{cases} x, & |x|>1, \\ -1, & -1\le x<1, \\ 0, & x=1, \end{cases}$ $x=1$ 是 $f(x)$ 的跳跃间断点.

14．$x=\frac{\pi}{4}$ 与 $x=\frac{3\pi}{4}$ 是 $f(x)$ 在区间 $(0,\pi)$ 内的间断点．$x=\frac{\pi}{4}$ 是 $f(x)$ 的无穷间断点，$x=\frac{3\pi}{4}$ 是 $f(x)$ 的可去间断点，补充定义 $f\left(\frac{3\pi}{4}\right)=1$，则 $f(x)$ 在 $x=\frac{3\pi}{4}$ 处连

续.

习题 3-1

1.（1）正确. 用$-\Delta x$代替Δx即可.

（2）不正确. 例如 $f(x)=|x|, x_0=0$，则 $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{f(\Delta x)-f(-\Delta x)}{2\Delta x}=0$ 存在，但 $f'(0)$ 不存在.

2.（1）$\dfrac{3}{2}f'(x_0)$；（2）$-\dfrac{1}{2}f'(x_0)$.

4. $f\left(\dfrac{1}{2}\right)=-1$， $f'\left(\dfrac{1}{2}\right)=6$.

5. 物体在时刻t温度的变化速度为$\lim\limits_{\Delta t\to 0}\dfrac{T(t+\Delta t)-T(t)}{\Delta t}=T'(t)$.

6. 结论不正确.

7. $y=\dfrac{\sqrt{3}}{2}x-\dfrac{2\sqrt{3}\pi}{3}-\dfrac{1}{2}$.

9.（1） $f'(a)=\lim\limits_{x\to a}\dfrac{(x-a)\varphi(x)}{x-a}=\varphi(a)$， 可导；

（2） $g'_-(a)=-\varphi(a), g'_+(a)==\varphi(a)$， 如 $g'(a)$ 存在，则必有 $\varphi(a)=0$， 相应的导数值为 $g'(a)=0$.

10.（1）不可导；（2）可导，且 $f'(0)=0$.

11. $a=\mathrm{e}, b=0$， $f'(x)=\begin{cases}\mathrm{e}^x, & x\le 1,\\ \mathrm{e}x, & x>1.\end{cases}$

习题 3-2

1.（1）正确；（2）不正确；（3）不正确；（4）不正确.

2.（1） $y'=3\cos x(1+\sin x)^2$；

（2） $y'=2\mathrm{e}^x\cos x$；

（3） $y=-\dfrac{1}{x^2}\sin\dfrac{2}{x}\mathrm{e}^{\sin^2\frac{1}{x}}$；

（4） $y' = \sec x$；

（5） $y' = \dfrac{\sqrt{1+\mathrm{e}^x}-1}{1+\mathrm{e}^x-\sqrt{1+\mathrm{e}^x}}$；

（6） $y' = 2\sqrt{a^2-x^2}$；

（7） $y' = \dfrac{1+2\sqrt{x}+4\sqrt{x^2+x\sqrt{x}}}{8\sqrt{x^2+x\sqrt{x}}\cdot\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}}$；

（8） $y' = \dfrac{-1}{1+x^2}$；

（9） $y' = 2\cos\ln x$；

（10） $y' = n\sin^{n-1}x\cos(n+1)x$．

3． $y' = \dfrac{f(x)f'(x)+g(x)g'(x)}{\sqrt{f^2(x)+g^2(x)}}$．

4． $y' = v(x)^{u(x)}\left[u'(x)\ln v(x)+\dfrac{u(x)v'(x)}{v(x)}\right]$． $(x^{\sin x})' = x^{\sin x}\left(\cos x\ln x+\dfrac{\sin x}{x}\right)$．

习题 3-3

1．（1） $f'''(11)=336$；（2） $y''=-\sec^2 x$；（3） $n=2$．

3．（1） $y''=\dfrac{\mathrm{e}^x(x^2-2x+2)}{x^3}$；（2） $y^{(4)}=-4\mathrm{e}^x\cos x$；

（3） $y^{(20)}=x^2\cos x+40x\sin x-380\cos x$；（4） $y^{(n)}=-2^{n-1}\cos\left(2x+\dfrac{n\pi}{2}\right)$．

3．（1） $y''=2f'(x^2)+4x^2f''(x^2)$；（2） $y''=\mathrm{e}^{-x}(x-2)f'(\mathrm{e}^{-x})+x\mathrm{e}^{-2x}f''(\mathrm{e}^{-x})$．

5．提示：用数学归纳法证明．

习题 3-4

1．（1） $y'=\dfrac{x+y-1}{y-x}$；（2） $y'\big|_{x=0}=\dfrac{1}{\mathrm{e}}-1$；

（3） $y''=\dfrac{1+y'^2}{x-y}=\dfrac{2(x^2+y^2)}{(x-y)^3}$；（4） $\left.\dfrac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}\right|_{x=0}=1$．

2．切线方程为 $y=\sqrt[3]{4}$，法线方程为 $x=\sqrt[3]{2}$.

3．（1） $y'=\dfrac{1-\dfrac{1}{1+t^2}}{\dfrac{2t}{1+t^2}}=\dfrac{t}{2}, y''=\dfrac{\dfrac{1}{2}}{\dfrac{2t}{1+t^2}}=\dfrac{1+t^2}{4t}$；

（2） $y'=\dfrac{-\sin t}{3t^2}, y''=\dfrac{2\sin t-t\cos t}{9t^5}$；

（3） $y'=t, y''=\dfrac{1}{f''(t)}$；

（4） $y'=\dfrac{\sin t+t\cos t}{\cos t-t\sin t}, y''=\dfrac{2+t^2}{(\cos t-t\sin t)^3}$.

4．所求切线方程为 $y=-\dfrac{4}{3}x+\dfrac{4}{3}$，法线方程为 $y=\dfrac{3}{4}x+\dfrac{1}{2}$.

5．所求切线方程为 $y=x+\mathrm{e}^{\pi}$.

习题 3-5

1. 当 $\Delta x=1$ 时，$\Delta y=5, \mathrm{d}\,y=4$；当 $\Delta x=0.1$ 时，$\Delta y=0.41, \mathrm{d}\,y=0.4$；当 $\Delta x=0.01$ 时，$\Delta y=0.0401, \mathrm{d}\,y=0.04$.

2．（1） $\mathrm{d}\left(\dfrac{1}{2}x^2+C\right)=x\,\mathrm{d}\,x$；　　（2） $\mathrm{d}(\sin x+C)=\cos x\,\mathrm{d}\,x$；

（3） $\mathrm{d}(\ln|1+x|+C)=\dfrac{1}{1+x}\mathrm{d}\,x$；　　（4） $\mathrm{d}(-\mathrm{e}^{-x}-\cot x+C)=(\mathrm{e}^{-x}+\csc^2 x)\,\mathrm{d}\,x$.

3．（1） $\mathrm{d}\,y=(2x\sin 2x+2x^2\cos 2x)\,\mathrm{d}\,x$；

（2） $\mathrm{d}\,y=\dfrac{1}{a^2-x^2}\mathrm{d}\,x$；

（3） $\mathrm{d}\,y=\arcsin\dfrac{x}{2}\mathrm{d}\,x$；

（4） $\mathrm{d}\,y=\mathrm{e}^{-x}[\sin(3-x)-\cos(3-x)]\,\mathrm{d}\,x$.

4．（1）令 $f(x)=10x^{\frac{1}{3}}, \sqrt[3]{997}=f(0.997)\approx f(1)+f'(1)\times(-0.003)=9.99$；

（2）令 $f(x)=\arctan x, \arctan 1.05=f(1.05)\approx f(1)+f'(1)\times 0.05\approx 0.810398$；

（3）令 $f(x)=\ln(1+x), \ln 1.01=f(0.01)\approx f(1)+f'(0)\times 0.01\approx 0.01$.

5．$V=\dfrac{4\pi(D+h)^3}{3}-\dfrac{4\pi D^3}{3}\approx 4\pi^2 h$．

总复习题三

1．（1） $f'(x_0)=0$；（2） $f'(x_0)\neq 0$；（3） $f'(x_0)=1$．

2． C．因为$\lim\limits_{x\to 0}\left[\dfrac{f(x)-f(0)}{x}-2\dfrac{f(x^2)-f(0)}{x^2}\right]=-f'(0)$．

3．（1）不正确. 例如令 $f(x)=x$，则$\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=\infty$，但$\lim\limits_{x\to\infty}f'(x)=1$．

（2）不正确．例如令 $f(x)=\sqrt[3]{x},x_0=0$，则 $\lim\limits_{x\to 0}f'(x)=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}=\infty$，但 $\lim\limits_{x\to 0}f(x)=0$．

4．（1） $\lim\limits_{x\to 0}f(x)=\lim\limits_{x\to 0}x^2\sin\dfrac{1}{x}=0=f(0)$， $f(x)$在$x=0$处连续；

（2） $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)-f(0)}{x}=\lim\limits_{x\to 0}x\sin\dfrac{1}{x}=0, f'(0)=0$， $f(x)$在$x=0$处可导；

（3） $x\neq 0$时， $f'(x)=2x\sin\dfrac{1}{x}-\cos\dfrac{1}{x}$， $\lim\limits_{x\to 0}f'(x)=\lim\limits_{x\to 0}\left(2x\sin\dfrac{1}{x}-\cos\dfrac{1}{x}\right)$不存在，因而$f'(x)$在$x=0$处不连续.

5．当$|x|<2$时，$F'(x)=4x(2-x^2)$，当$|x|>2$时，$F'(x)=0$；$F'(2)$、$F'(-2)$均不存在.

6． $a=f(x_0),b=f'(x_0),c=\dfrac{1}{2}f''(x_0)$．

7． $\sqrt{2}$．

8．所求切线方程为$y=2(x+1)$．

9．（1）若$f(x_0)\neq 0$，在点x_0处$|f(x)|$可导；

（2）若$f(x_0)=0$，且$f'(x_0)=0$，在点x_0处$|f(x)|$可导；

（3） $f(x_0)=0$，且$f'(x_0)\neq 0$，在点x_0处$|f(x)|$不可导.

10． $y'=\sin x\ln\tan x$．

11．$\mathrm{d}\,y=-\dfrac{\tan y+y\sin(xy)}{x[\sin(xy)+\sec^2 y]}\mathrm{d}\,x$.

12．$y''=2\sec^2[f(x^2)]f'(x^2)+8x^2\sec^2[f(x^2)]\tan[f(x^2)][f'(x^2)]^2+4x^2\sec^2$ $[f(x^2)]\quad f''(x^2)$.

13．$y''=\dfrac{f''(y)-[1-f'(y)]^2}{x^2[1-f'(y)]^3}$.

14．$\left.\dfrac{\mathrm{d}^2 y}{\mathrm{d}\,x^2}\right|_{t=0}=\dfrac{\mathrm{e}(2\mathrm{e}-3)}{4}$.

15．$y^{(4)}=-\dfrac{15x+120}{16(1+x)^4\sqrt{1+x}}$.

17．$a=\dfrac{1}{2\mathrm{e}}$，所求切线方程为 $y=\dfrac{1}{\sqrt{\mathrm{e}}}x-\dfrac{1}{2}$.

习题 4-1

1．（1）不正确．例如令 $f(x)=\begin{cases}0, 0\le x<\dfrac{1}{2},\\ 1, \dfrac{1}{2}\le x<1,\\ 0,\quad x=1,\end{cases}$ 则 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上有间断点，且在 (a,b) 内有不可导点，但 $\forall\xi\in\left(0,\dfrac{1}{2}\right)$ 或 $\forall\xi\in\left(\dfrac{1}{2},1\right)$，则有 $f'(\xi)=\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}$ 成立.

（2）正确．因为可导一定连续，因而函数 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上满足拉格朗日中值定理的条件.

（3）不正确．例如令 $f(x)=x$，$[a,b]=[0,1]$，则对 $\forall\xi\in(0,1)$ 均有 $f'(\xi)=\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}$ 成立.

（4）正确.

2．$\xi=\dfrac{\pi}{2}$.

4．因为 $f(0)=f(1)=f(2)=f(3)=0$，由罗尔定理可知方程 $f'(x)=0$ 分别在

区间 $(0,1),(1,2),(2,3)$ 内至少有一个根，由于方程 $f'(x)=0$ 最多只有三个不同的根，故方程 $f'(x)=0$ 的三个不同根分别位于区间 $(0,1),(1,2),(2,3)$ 内.

习题 4-2

1.（1）不正确. 只有当极限是"$\frac{0}{0}$"或"$\frac{\infty}{\infty}$"型时，该结论才能成立.

（2）不正确. 例如 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^2\sin\frac{1}{x}}{\sin x}$ 就不能用洛必达法则来计算.

（3）不正确.例如极限 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^2\sin\frac{1}{x}}{\sin x}=0$，但 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\left(x^2\sin\frac{1}{x}\right)'}{(\sin x)'}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2x\sin\frac{1}{x}-\cos\frac{1}{x}}{\cos x}$ 不存在.

2.（1）3；（2）$\dfrac{9}{4}$；（3）1；（4）$-\dfrac{1}{3}$；（5）$\dfrac{1}{2}$；（6）0；（7）$-\dfrac{\mathrm{e}}{2}$；（8）$+\infty$；（9）1；（10）$\sqrt{ab}$.

3. 因为 $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x+\cos x}{x}=\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{x}\cos x\right)=1$，但 $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{(x+\cos x)'}{(x)'}=\lim\limits_{x\to\infty}(1-\sin x)$ 不存在，故不能用洛必达法则.

5.（1）$a=f'(0)$；

（2）当 $x\neq 0$ 时，$g'(x)=\dfrac{xf'(x)-f(x)}{x^2}$，　$g'(0)=\dfrac{1}{2}f''(0)$；

（3）$g'(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内连续.

习题 4-3

1.（1）正确. 因为它在 x_0 处的 n 阶泰勒多项式的 $(x-x_0)^k$ 项系数为 $a_k=\dfrac{1}{k!}f^{(k)}(x_0)$，取值惟一.

(2)不正确. 例如 $f(x)=\begin{cases}\mathrm{e}^{-\frac{1}{x^2}}, x\neq 0,\\ 0,\quad x=0,\end{cases}$ 则 $f^{(k)}(0)=0,k=1,2,\cdots$，因而在 $x=0$ 点处，对于任意正整数 n，它的 n 阶泰勒多项式恒为零，即不论阶数 n 如何提高，都不能减小误差.

（3）正确. 因为若 $f(x)$ 为奇函数，且 $f^{(2k)}(x)(k=1,2,\cdots)$ 存在，则 $f^{(2k)}(x)$ 必然也为奇函数，所以有 $f^{(2k)}(0)=0(k=1,2,\cdots)$，即它的麦克劳林多项式中只含有 x 的奇数次项，同理可得偶函数的麦克劳林多项式中只含有 x 的偶数次项.

2． $2x^3+5x^2-4x+1=4+12(x-1)+(x-1)^2+2(x-1)^3$.

3．$(1+x)\ln(1+x)=x+\dfrac{1}{2}x^2-\dfrac{1}{6}x^3-\dfrac{1}{6(1+\xi)^3}x^4, x\in(-1,+\infty)$，$\xi$ 为介于 0 到 x 之间的某个点.

4． $\tan x=x+\dfrac{1}{3}x^3+o(x^3), x\in\left(-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2}\right)$.

5． $\cos x=\dfrac{\sqrt{2}}{2}-\dfrac{\sqrt{2}}{2}\left(x-\dfrac{\pi}{4}\right)-\dfrac{\sqrt{2}}{4}\left(x-\dfrac{\pi}{4}\right)^2+\dfrac{\sqrt{2}}{12}\left(x-\dfrac{\pi}{4}\right)^3+o\left[\left(x-\dfrac{\pi}{4}\right)^3\right],\quad x\in(-\infty,+\infty)$.

6．（1）$-\dfrac{1}{12}$；（2）$\dfrac{\ln^2 a-\ln^2 b}{2}$.

习题 4-4

1．（1）否. 例如 $f(x)=x^3,-1<x<1$.

（2）否. 例如 $f(x)=x^2,-1<x<1$.

（3）否. 例如 $f(x)=x^2,-1<x<1$.

（4）否. 例如 $f(x)=\begin{cases}x+1,-2\le x<0,\\ x,\quad 0\le x\le 2,\end{cases}$ 那么函数 $f(x)$ 在定义域内既不是单调的，也没有极值点.

（5）否. 例如 $f(x)=|x|, x_0=0$.（6）否. 例如 $f(x)=|x|, x_0=0$.

（7）否. 例如 $f(x)=x^2, g(x)=\begin{cases}-\dfrac{1}{2}x^2, x\le 0,\\ -2x^2, x>0,\end{cases}$ $x_0=0$.

（8）否. 例如令 $f(x)=\begin{cases}-\sin x, & -\pi\le x<0,\\ x+2, & 0\in[0,1)\cup(1,2],\\ 2, & x=1\end{cases}$ 则 $x=-\dfrac{\pi}{2}$ 是函数的极大值

点，$x=1$是函数的极小值点，但$f\left(-\dfrac{\pi}{2}\right)=1<f(1)=2$.

（9）否.例如$f(x)=x,x\in[0,1]$，则$x=1$是$f(x)$的取得最大值的点，但不是极大值点.

（10）是.（11）是. 函数$y=f(x)$与函数$y=-f(-x)$的图形关于原点对称.

（12）否. 因为最大（小）值可能在原点区间端点取得.

2.（1）$n+1$；（2）$(-\infty,-1]$和$[1,+\infty)$；（3）$(0,\dfrac{1}{\sqrt{2}}]$；（4）$f'(x_0),f''(x_0)\ge 0$；（5）$\dfrac{5}{4},\sqrt{2}-1$.

3.（1）D. 记$\varphi(x)=f(x)g(x)$，由题设有$\varphi'(x_0)=0,\varphi''(x_0)<0$，因而应选D.

（2）B. 由$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{1-\cos x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{\frac{1}{2}x^2}=1$知，$f(0)=0,f'(0)=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)-f(0)}{x}=0$，且$\exists\delta>0$，当$0<|x|<\delta$时有$\dfrac{f(x)}{x^2}>0,f(x)>0=f(0)$，答案为B.

4.（1）单增区间为$\left[0,\dfrac{\pi}{6}\right]$和$\left[\dfrac{5\pi}{6},2\pi\right]$，单减区间为$\left[\dfrac{\pi}{6},\dfrac{5\pi}{6}\right]$；

（2）单增区间为$[-\sqrt{\ln 2},0]$及$[\sqrt{\ln 2},+\infty)$，单减区间为$(-\infty,-\sqrt{\ln 2}]$与$[0,\sqrt{\ln 2}]$；

（3）单增区间为$\left(-\infty,\dfrac{2a}{3}\right]$和$[a,+\infty)$，单减区间为$\left[\dfrac{2a}{3},a\right]$.

7.（1）点$x_1=\dfrac{2\pi}{3}$与$x_3=\dfrac{4\pi}{3}$均为函数$y=\cos x+\dfrac{1}{2}\cos 2x$的极小值点，且取极小值为$y\left(\dfrac{2\pi}{3}\right)=y\left(\dfrac{4\pi}{3}\right)=-\dfrac{3}{4}$，而$x_2=\pi$为它的极大值点，且取极大值为$y(\pi)=-\dfrac{1}{2}$.

（2）$x_1=-1$是函数y的极大值点，且有极大值为$y(-1)=-2e^{\frac{\pi}{4}}$，$x_2=0$是函数$y$的极小值点，且有极小值为$y(0)=-e^{\frac{\pi}{2}}$.

8．$a=0,b=-3$. $x=-1$为极大值点，且有极大值为$f(-1)=2$，$x=1$为极小值

点，且有极小值为 $f(-1)=-2$.

9．若 n 为偶数，函数 $f(x)$ 无极值点；若 n 为奇数，$x=0$ 为函数的极大值点，且有极大值为 $f(0)=1$.（1） $y_{\max}=116, y_{\min}=-5$；（2） $y_{\max}=132, y_{\min}=0$.

11．所求的点为 $\left(\pm\frac{1}{\sqrt{3}},\frac{3}{4}\right)$.

12．所求直线方程为 $y=-\frac{y_0}{x_0}x+2y_0$.

13． $\varphi=\frac{2\sqrt{6}\pi}{3}$.

14． $r:h=1:2$.

习题 4-5

1．全部不正确.

（1）反例：对于函数 $f(x)=|x(x-1)|$，点 $(0,0)$ 是曲线 $y=f(x)$ 的拐点，同时 $x=0$ 也是函数 $f(x)$ 的极小值点；

（2）反例：令 $f(x)=|x(x-1)|$，则点 $(0,0)$ 是曲线 $y=f(x)$ 的拐点，但 $f''(0)$ 不存在；

（3）只有对区间 $[a,b]$ 内任意不同的两点 x_1,x_2，均有 $\forall\lambda\in(0,1),\ \lambda f(x_1)+(1-\lambda)f(x_2)>f[\lambda x_1+(1-\lambda)x_2]$ 成立，则曲线 $y=f(x)$ 才能在 $[a,b]$ 上是凹的；

（4） λ 应该在区间 $(0,1)$ 内取值.

2.（1）填“$<$”;（2）填“$(-\infty,-2]$”与“$(-2,-2\mathrm{e}^{-2})$”;（3）填“直线”.

3.（1）凸区间是 $(-\infty,-6]$ 和 $[0,6]$，凹区间是 $[-6,0]$ 和 $[6,+\infty)$；拐点是 $\left(-6,-\frac{9}{2}\right),(0,0)$ 和 $\left(6,\frac{9}{2}\right)$；

（2）凸区间 $(0,\mathrm{e}^{-\frac{3}{2}}]$，凹区间 $[\mathrm{e}^{-\frac{3}{2}},+\infty)$，拐点是 $(\mathrm{e}^{-\frac{3}{2}},-\frac{3}{2}\mathrm{e}^{-3})$；

（3）凹区间是 $[0,+\infty)$，无拐点；

（4）凹区间是$\left[2k\pi-\frac{\pi}{2},2k\pi+\frac{\pi}{2}\right]$，凸是区间$\left[2k\pi+\frac{\pi}{2},2k\pi+\frac{3\pi}{2}\right]$. 拐点为$\left(2k\pi-\frac{\pi}{2},2k\pi-\frac{\pi}{2}\right)$及$\left(2k\pi+\frac{\pi}{2},2k\pi+\frac{\pi}{2}\right)$，其中$k=0,\pm1,\pm2,\ \cdots$.

4. $a=1,b=-3,c=0,d=3$.

5. $k=\pm\frac{\sqrt{2}}{8}$.

习题 4-6

1.（1）是.　　　　（2）是.

（3）否. 因为有可能$\lim\limits_{x\to a^+}f(x)=\infty$或者$\lim\limits_{x\to b^-}f(x)=\infty$，这样$x=a$或者$x=b$就是它的垂直渐近线.

（4）否. 只有在该点是函数的无穷间断点时，相应的才会有垂直渐近线.

2. D.

3. $x=-1$和$x=2$均为它的垂直渐近线，$y=x+1$是它的斜渐近线.

习题 4-7

1. 令$f(x)=\arctan x+\frac{1}{x},x>0,$利用单调性证明.

2. 令$f(x)=\frac{\ln x}{x},x\in[\mathrm{e},+\infty),$利用单调性证明.

3. 令$f(x)=x^2$，对函数$f(x)$在区间$[a,b]$上应用拉格朗日中值定理可证.

4. 令$f(x)=1+x\ln(x+\sqrt{1+x^2})-\sqrt{1+x^2},$利用最值证明.

5. 令$f(x)=\frac{1}{p}x^p+\frac{1}{q}-x,x\in(0,+\infty),$利用最值证明.

6. 对$f(x)=\mathrm{e}^x,g(x)=\sin x$在区间$[a,b]$上应用柯西中值定理可证.

7. 由泰勒中值定理可证.

8. 令$f(x)=\sin x,$利用凹凸性可证.

习题 4-8

2．两船之间距离增加的速度为$v = 50\,\text{km/h}$．

3．$-\dfrac{16}{25}$ cm/min，负号表示与漏斗中表面下降的速度方向相反.

总复习题四

10．（1）$\mathrm{e}^{-\frac{4}{\pi}}$；（2）2；（3）$\dfrac{1}{6}$；（4）$\dfrac{1}{6}$.

11．$p = 3, C = -\dfrac{4}{3}$.

12．$a = \dfrac{1}{6}, b = \dfrac{1}{8}$.

13．A.

14．D.

15．C.

16．$a = 2$，$x = \dfrac{\pi}{3}$是函数$f(x)$的极大值点，且取极大值为$f\left(\dfrac{\pi}{3}\right) = \sqrt{3}$.

17．$f(x) = -x^3 + 3x^2 + 2$.

18．a可以取的最大值为e.

19．（1）$\max\limits_{0 \le x \le 1} f_n(x) = \left(\dfrac{n}{n+1}\right)^{n+1}$；（2）$\mathrm{e}^{-1}$.

21．$P\left(\dfrac{a}{\sqrt{2}}, \dfrac{b}{\sqrt{2}}\right)$，面积最小值为$A_{\min} = ab$.

22．函数$y = y(x)$有惟一的驻点$x = 1$，$x = 1$为函数$y = y(x)$的极小值点.

23．$a = \dfrac{3}{2}, b = -\dfrac{1}{2}$.

24．（1）$x = \dfrac{5}{2}(4 - t)$时，商家利润最大；（2）$t = 2$时，政府所获得的利润最大.

29．a, b满足条件：$b \ln a \le \dfrac{1}{\mathrm{e}}$时，该方程有实根.

习题 5-1

1．$\mathrm{e} - 1$.

2．$\dfrac{\pi}{16}$.

4．（1）$\int_0^1 \ln(1+x)\,\mathrm{d}x > \int_0^1 \ln(1+x^2)\,\mathrm{d}x$； $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \mathrm{e}^x \cos x\,\mathrm{d}x > \int_0^{\pi} \mathrm{e}^x \cos x\,\mathrm{d}x$．

5．$\dfrac{2(\mathrm{e}-1)}{\mathrm{e}} \le \int_{\mathrm{e}}^{\mathrm{e}^2} \dfrac{\ln x}{x}\,\mathrm{d}x \le \mathrm{e}-1$．

6．提示：（1）用反证法；（2）分 $g(x)\equiv 0$ 和 $g(x)\not\equiv 0$ 两种情况讨论，并利用连续函数的介值定理证明.

习题 5-2

1．（1） $f'(x)=\dfrac{x}{\sqrt{1+x^3}}$；　　（2） $f'(x)=2x\mathrm{e}^{-x^4}-\mathrm{e}^{-x^2}$；

（3） $f'(x)=-\sin x\cos(\pi\cos^2 x)-\cos x\cos(\pi\sin^2 x)$；

（4） $f'(x)=\cos x^2\sin(1+\int_1^x \cos t^2\,\mathrm{d}t)$．

2． $y'(0)=-1$．

3．（1）1；　　（2）$\sqrt{2}$；　　（3）0．

4．（1）$\dfrac{2}{\pi}$；　　（2）$\dfrac{1}{1+p}$．

5．提示：构造 $\varphi(t)=\int_a^b [f(x)+tg(x)]^2\,\mathrm{d}x$，且 $\varphi(t)\ge 0$．

6．（1）$\dfrac{\pi}{3}$；　　（2）2；　　（3）$6+\mathrm{e}$．

7．$F(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{2}(x^2-1), & x\in[-1,0],\\ \sin x-\dfrac{1}{2}, & x\in(0,1],\end{cases}$ $F(x)$ 在 $[-1,1]$ 上处处连续，在 $[-1,0)\cup(0,1]$ 上处处可导.

习题 5-3

1．$\int(2x^{\frac{3}{2}}+3x^{\frac{5}{6}})\,\mathrm{d}x=\dfrac{4}{5}x^{\frac{5}{2}}+\dfrac{18}{11}x^{\frac{11}{6}}+C$．

2．$2\arctan x-\arcsin x+C$．

3．$\ln|x|+2\arctan x+C$．

4．$\dfrac{3^x\mathrm{e}^{3x}}{3+\ln 3}-\mathrm{e}^x+C$．

5．$4\tan x-\cot x-9x+C$．

6．$-3\cot x-x+C$．

7．$\sin x-\cos x+C$．

8．$\dfrac{1}{2}\int\sin x\,\mathrm{d}x=-\dfrac{1}{2}\cos x+C$．

9．$\cos x-\cot x+C$．

10．$\dfrac{1}{2}\tan x+\dfrac{1}{2}x+C$．

11. $3e^t-\dfrac{3}{4}t^{\frac{4}{3}}+C$.

12. $\theta-\cos\theta+C$.

习题 5-4

1.（1）$-\dfrac{1}{3}\ln|4-3x|+C$；（2）$\sqrt{1+x^2}+C$；（3）$-\dfrac{1}{3}e^{-3x}+C$；

（4）$\dfrac{1}{2\sqrt{a}}\arctan\dfrac{\sqrt{a}x}{2}+C$；（5）$\dfrac{1}{\omega}\sin(\omega t+\varphi)+C$；（6）$\dfrac{1}{9}\ln(3x^3+4)+C$；

（7）$\dfrac{1}{4\sqrt{3}}\ln\left|\dfrac{\sqrt{3}x-2}{\sqrt{3}x+2}\right|+C$；（8）$-e^{\frac{1}{x}}+C$；（9）$-\arctan(\cos^2 x)+C$；

（10）$\ln|\sin 2x|+C$；（11）$\dfrac{1}{2}\sin x-\dfrac{1}{10}\sin 5x+C$；（12）$e^{\arctan x}+C$；

（13）$-\dfrac{1}{3}(1+\cos^2 x)^{\frac{3}{2}}+C$；（14）$-\ln\left|\cos\sqrt{2x+1}\right|+C$；（15）$\dfrac{1}{6}\sin^6 x-\dfrac{1}{8}\sin^8 x+C$；

（16）$\dfrac{1}{4}\tan\left(\dfrac{\pi}{2}+2x^2\right)+C$；（17）$-\dfrac{1}{2(x\ln x)^2}+C$；（18）$-\dfrac{1}{2}(\ln\cos x)^2+C$.

2.（1）$\sqrt{x^2-4}-2\arccos\dfrac{2}{x}+C$；（2）$\dfrac{3}{2}(x+1)^{\frac{2}{3}}-3(x+1)^{\frac{1}{3}}+3\ln\left|1+(x+1)^{\frac{1}{3}}\right|+C$；

（3）$\dfrac{a^2}{2}\arcsin\dfrac{x}{a}-\dfrac{1}{2}x\sqrt{a^2-x^2}+C$；（4）$\ln(x+1+\sqrt{x^2+2x+5})+C$；

（5）$\dfrac{1}{54}\arccos\dfrac{3}{x}+\dfrac{\sqrt{x^2-9}}{18x^2}+C$；（6）$\dfrac{1}{2}\arctan\dfrac{2x}{\sqrt{1+x^2}}+C$；

（7）$\dfrac{2}{3}(1+\ln x)^{\frac{3}{2}}-2(1+\ln x)^{\frac{1}{2}}+C$；（8）$2\ln(\sqrt{1+e^x}-1)-x+C$.

3.（1）0；（2）$\dfrac{6}{25}$；（3）2；（4）$\dfrac{2}{5}$；（5）1；（6）1.

4.（1）$\dfrac{4\sqrt{2}-5}{3}a^3$；（2）$\sqrt{2}-\dfrac{2\sqrt{3}}{3}$；（3）$2-\dfrac{\pi}{2}$；（4）$\dfrac{4}{3}$.

5.（1）0；（2）$2-\sqrt{3}$.

7. 提示:（1）利用变换 $x=\dfrac{\pi}{2}-t$；（2）利用变换 $x=\pi-t$，$\dfrac{\pi}{\sqrt{2}}\ln(\sqrt{2}+1)$.

习题 5-5

1.（1）$\dfrac{1}{4}x^2-\dfrac{1}{4}x\sin 2x-\dfrac{1}{8}\cos 2x+C$；（2）$-(x^2+2x+2)e^{-x}+C$；

（3）$2\sqrt{x}(\ln x-2)+C$；（4）$x(\arcsin x)^2+2\sqrt{1-x^2}\arcsin x-2x+C$；

（5）$x\ln(x+\sqrt{1+x^2})-\sqrt{1+x^2}+C$；（6）$\dfrac{1}{2}x[\sin(\ln x)-\cos(\ln x)]+C$；

（7）$6(\mathrm{e}^2-1)$；（8）$2-\dfrac{2}{\mathrm{e}}$；（9）$\dfrac{2n}{2n+1}\cdot\dfrac{2n-2}{2n-1}\cdot\cdots\cdot\dfrac{2}{3}$；（10）$\dfrac{\sqrt{2}}{2}+\dfrac{1}{2}\ln(\sqrt{2}+1)$.

2. $(x^2-4x+6)\mathrm{e}^x+C$.

3. $I_n=\mathrm{e}-nI_{n-1}$，$9\mathrm{e}-24$.

习题 5-6

1. $\dfrac{1}{2}\ln|x+1|+\dfrac{1}{2}\arctan x-\dfrac{1}{4}\ln(x^2+1)+C$.

2. $\ln|x+1|-\dfrac{1}{2}\ln(x^2-x+1)+\sqrt{3}\arctan\dfrac{2x-1}{\sqrt{3}}+C$.

3. $x^2-\dfrac{1}{3x}-\dfrac{1}{3\sqrt{3}}\arctan\dfrac{x}{\sqrt{3}}+C$.

4. $\dfrac{1}{x+1}+\dfrac{1}{2}\ln|x^2-1|+C$.

5. $-\dfrac{2}{1+\tan\dfrac{x}{2}}+C$.

6. $\dfrac{1}{\sqrt{5}}\arctan\left[\dfrac{1}{\sqrt{5}}\left(2\tan\dfrac{x}{2}+1\right)\right]+C$.

7. $\dfrac{1}{2}\ln\left|\tan\dfrac{x}{2}\right|-\dfrac{1}{4}\tan^2\dfrac{x}{2}+C$.

8. $\ln|\tan x|+\dfrac{1}{2}\tan^2 x+C$.

9. $-\dfrac{1}{1+\tan x}+C$.

10. $\ln|\sin x+\cos x|+C$.

11. $\dfrac{1}{7(x+1)^7}+\dfrac{1}{4(x+1)^8}-\dfrac{1}{9(x+1)^9}+C$.

12. $\dfrac{1}{4}x^4-\dfrac{1}{4}\ln(x^8+2x^4+2)+C$.

13. $x-4\sqrt{x+1}+4\ln(\sqrt{x+1}+1)+C$.

14. $\ln\left|\dfrac{1-\sqrt{1-x^2}}{x}\right|+2\arctan\sqrt{\dfrac{1-x}{1+x}}+C$.

15. $2\sqrt{x}-3\sqrt[3]{x}+6\sqrt[6]{x}-6\ln(1+\sqrt[6]{x})+C$.

16. $-\dfrac{3}{2}\sqrt[3]{\dfrac{x+1}{x-1}}+C$.

习题 5-7

1. 说法不对. 正确的说法是积分$\int_{-\infty}^{+\infty}\sin x\,\mathrm{d}x$是发散的.

2.（1）$\frac{1}{2}$；（2）$\frac{\pi^2}{16}$；（3）$\frac{\pi}{3}$；（4）$\ln 2$；（5）$\frac{2}{3}$；（6）$\frac{28}{3}$；（7）-2；（8）-6.

3．当$k>1$时，该积分收敛；当$k\le 1$时，该积分发散；当$k=1-\frac{1}{\ln\ln 2}$时，该积分取得最小值，且有$I_{\min}=\frac{-\ln\ln 2}{(\ln 2)^{\frac{-1}{\ln\ln 2}}}$.

4. $n!$.

总复习题五

1.（1）$(\arcsin\sqrt{x})^2+C$；（2）$\ln|x+\cos x|+C$；（3）$\frac{1}{12}$；（4）e^x+6x；

（5）$\frac{\pi}{3}$；（6）$\frac{(\sqrt{3}+1)\pi}{12}$.

2.（1）C;（2）D；（3）B；（4）A；（5）D；（6）B；（7）A;（8）C.

3.（1）$2(x-2)\sqrt{e^x-1}+4\arctan\sqrt{e^x-1}+C$；（2）$-\cot x-\arctan x+C$；

（3）$x\arcsin\sqrt{x}-\frac{1}{2}\arcsin\sqrt{x}+\frac{1}{2}\sqrt{x(1-x)}+C$；

（4）$x\ln^2(x+\sqrt{1+x^2})-2\sqrt{1+x^2}\ln(x+\sqrt{1+x^2})+2x+C$；

（5）$\arctan(e^x-e^{-x})+C$；（6）$\frac{1}{2}(\arcsin x)^2+x\sqrt{1-x^2}\arcsin x-\frac{1}{2}x^2+C$；

（7）$-\cos x\ln(\tan x)+\ln|\csc x-\cot x|+C$；

（8）$2\ln(1+\sqrt{2})-\sqrt{2}$；（9）$2-\frac{6}{e^2}$；（10）$\frac{\pi}{4e^2}$.

4．$\alpha=1,\beta=1$.

5．提示：利用零点定理和单调性.

6．$-2\sqrt{1-x}\arcsin\sqrt{x}+2\sqrt{x}+C$.

7．$\frac{x\cos x-\sin x}{x^2}+C$.

8．$2\sqrt{2}$.

9．提示：（1）令$F(x)=f(x)-x$；（2）令$G(x)=e^{-x}[f(x)-x]$，并利用罗尔中值定理.

10．提示：先证明当$x\in[0,1]$时，$1-x\le f(x)\le 1+x$；当$x\in[1,2]$时，$x-1\le f(x)\le 3-x$.

11．e^{-1}.

12．$\left[0,\ln(1+e)-\frac{e}{e+1}\right]$.

习题 6-2

1．（1）$e-\dfrac{5}{2}$；（2）$\dfrac{4\pi}{3}$；（3）$\sqrt{2}(e^{\pi}-1)$；（4）$\dfrac{1}{2\sqrt{2}}$．

2．$\dfrac{32}{15}$．

3．$\dfrac{16p^2}{3}$．

4．$\dfrac{3\pi a^2}{8}$．

5．$\dfrac{(5\pi-8)a^2}{4}$．

6．$\dfrac{\pi}{6}+\dfrac{1-\sqrt{3}}{2}$．

7．$\dfrac{11}{15}\sqrt{2}\pi a^3$．

8．$\dfrac{5\pi a^3}{2}$．

9．$\dfrac{4\sqrt{3}}{3}R^3$．

10．4．

11．$1+\dfrac{1}{2}\ln\dfrac{3}{2}$．

12．$\ln\dfrac{\pi}{2}$．

13．$\dfrac{\sqrt{2}}{2}$；$\sqrt{2}$．

习题 6-3

1．$\dfrac{3456k}{7}$．

2．$1875\pi\rho g$．

3．$\dfrac{\rho g a h^2}{3}$．

4．$\left\{\dfrac{-2km\rho l}{a\sqrt{4a^2+l^2}},0\right\}$．

总复习题六

1．（1）1；（2）$\dfrac{4\pi}{3}$；（3）$6a$．

2．（1）A；（2）D；（3）B；（4）B；（5）A．

3．（1）$t=\dfrac{1}{2}$；（3）$t=1$．

4．（1）$\theta=\dfrac{x_0\mathrm{e}^{x_0}-\mathrm{e}^{x_0}+1}{x_0(\mathrm{e}^{x_0}-1)}$；（2）$\dfrac{1}{2}$．

5．$a=-\dfrac{5}{4},b=\dfrac{3}{2},c=0$．

6．（1）$\dfrac{\pi\xi^2}{1+\xi^2}$；（2）$a=1$．

7．$2\sqrt{5}+\ln(2+\sqrt{5})$．

8．（1）$\dfrac{9\pi}{4}(\mathrm{m}^3)$；（2）$\dfrac{27\times10^3}{8}\pi g(\mathrm{J})$．

9．$\theta=\arccos\dfrac{1}{\sqrt{3}}$．

习题 7-1

1．（1）二阶；（2）一阶；（3）三阶；（4）二阶．

2．（1）是通解；（2）是特解；（3）是通解；（4）若$a=1$，则函数为方程的通解，若$a\neq1$，则函数不是方程的解．

3．（1）$C_1=0,C_2=1$，所求函数是$y=x\mathrm{e}^{2x}$；（2）$C_2=\dfrac{\pi}{2},C_1=1,$所求函数是$y=\sin\left(x-\dfrac{\pi}{2}\right)$，即为$y=-\cos x$．

4．$y''+y'-2y=0$．

习题 7-2

1．（1）$y=\mathrm{e}^{Cx}$；（2）$\sin x\sin y=C$；（3）$\arcsin y=\arcsin x+C$，即$y=\sin(\arcsin x+C)$；

（4）$(\mathrm{e}^x+1)(\mathrm{e}^y-1)=C$；（5）$\sin\dfrac{y}{x}=Cx$；（6）$y=Cx^2-x$；（7）$x^2-y^2=Cy$；

（8）$y=C(1+x)^2+\dfrac{2}{3}(1+x)^{\frac{7}{2}}$；（9）$y=x^4+Cx^2$；（10）$x=\ln y\ln\ln y+C\ln y$；

（11）$\dfrac{1}{y^2}=(C+2x)\mathrm{e}^{-x^2}$；（12）$(y-2x)^3=C(y-x-1)^2$．

2.（1） $y=\sqrt{1+2\ln\frac{1+e^x}{1+e}}$；（2） $y=\arctan\frac{1}{\tan x}$；（3） $y=\sqrt{2x^2(\ln x+1)}$；

（4） $(x^2+y^2)e^{\arctan\frac{y}{x}}=2e^{\frac{\pi}{4}}$；　（5） $y=-\frac{\cos x}{x}$；（6） $y=\frac{1-5e^{\cos x}}{\sin x}$．

3． $f(x)=\frac{1}{2}(\sin x+\cos x-e^{-x})$．

4． $y=\frac{2}{x}$．

5． $x=\frac{Nx_0e^{Nkt}}{N-x_0+x_0e^{Nkt}}$．

6． $v(60)=\sqrt{72500}\ \mathrm{cm/s}$．

7.（1） $y=\tan(x+C)-x$；（2） $\frac{1}{x}=2-y^2+Ce^{-\frac{y^2}{2}}$；（3） $2x^2y^2\ln y-2xy-1=Cx^2y^2$；（4） $y^2=1+2x+Ce^{2x}$．

习题 7-3

2． $(1-x)y''+xy'-y=x(\sin x+\cos x)-2\sin x$．

3.（1） $y=C_1e^{-5x}+C_2e^x$；（2） $y=e^{2x}(C_1\cos 3x+C_2\sin 3x)$；（3） $y=(C_1+C_2x)e^{5x}$；

（4） $y=(C_1+C_2x)\cos x+(C_3+C_4x)\sin x$．

4.（1） $y=(2+x)e^{-\frac{1}{2}x}$；（2） $y=\frac{1}{5}e^{4x}-\frac{1}{5}e^{-x}$；（3） $y=\sin \pi x$．

5.（1） $y=C_1e^x+C_2e^{2x}+e^{4x}$；（2） $y(x)=(C_1+C_2x+x^2+x^3)e^{3x}$；

（3） $y=C_1+C_2e^{3x}-x^3-3x^2-7x$；

（4） $y=C_1e^x\cos 3x+C_2e^x\sin 3x+\left(\frac{5}{29}\cos 2x-\frac{2}{29}\sin 2x\right)e^x$；

（5） $y=C_1e^x\cos x+C_2e^x\sin x+e^x\sin x$；

（6） $Y(x)=C_1+C_2e^{-x}+x(x^2-3x-6)-xe^{-x}$．

6．（1） $y=\sin x+\sin 2x-\cos x$；（2） $y=\left(x^2-\frac{1}{2}x+\frac{3}{8}\right)e^{2x}-\frac{3}{8}e^{-2x}$．

7． $f(x)=\left(\frac{3}{4}+\frac{1}{2}x\right)e^x+\frac{1}{4}e^{-x}$．

8． $\frac{m^2 g}{k^2}(e^{-\frac{kt_0}{m}}-1)+\frac{mgt_0}{k}$．

习题 7-4

1．（1） $y=C_1x^2+C_2x+C_3+\cos x+e^x$；（2） $y=\frac{1}{2}\ln^2 x+C_1\ln x+C_2$；（3） $y=C_1 e^{C_2 e^x}$．

2．（1）$y=\frac{1}{6}x^3-\frac{3}{4}x^2+\frac{1}{2}x+\frac{1}{2}x^2\ln x+\frac{13}{12}$；（2）$y=\frac{(x+1)^3}{12}-\frac{2}{3}$；（3）$y=\frac{1}{1-x}$．

3． $y=\left(C_1+\frac{3}{7}\ln x\right)x+C_2\frac{1}{x^2}+\frac{1}{10}x^3$．

4． $y=(1+x)e^{-2x}, z=(2+x)e^{-2x}$．

总复习题七

1.（1）$y=(C+x)\cos x$；（2）$y=2\sqrt{1+x^2}$；（3）$f(x)=2e^{2x}-e^x$；（4）$e^{\arcsin\frac{y}{x}}=Cx$；（5） $y=(C_1+x)e^{-x}+C_2e^{4x}$．

2．（1）D；（2）C；（3）A；（4）D.

3． $y=e^x(1-e^{e^{-x}-\frac{1}{2}})$．

4． $y=\frac{1}{x}+\frac{3x^2}{C-x^3}(C=3C')$．

5． $f(x)=\frac{2e^x}{3-e^{2x}}$．

6． $f(x)=3\ln x+2$．

7． $y(x)=e^x$．

8．$y=\dfrac{C_1\cos 2x+C_2\sin 2x+\dfrac{1}{5}\mathrm{e}^x}{\cos x}$.

9．6 h．

10．$t=\sqrt{\dfrac{6}{g}}\ln(6+\sqrt{35})$.