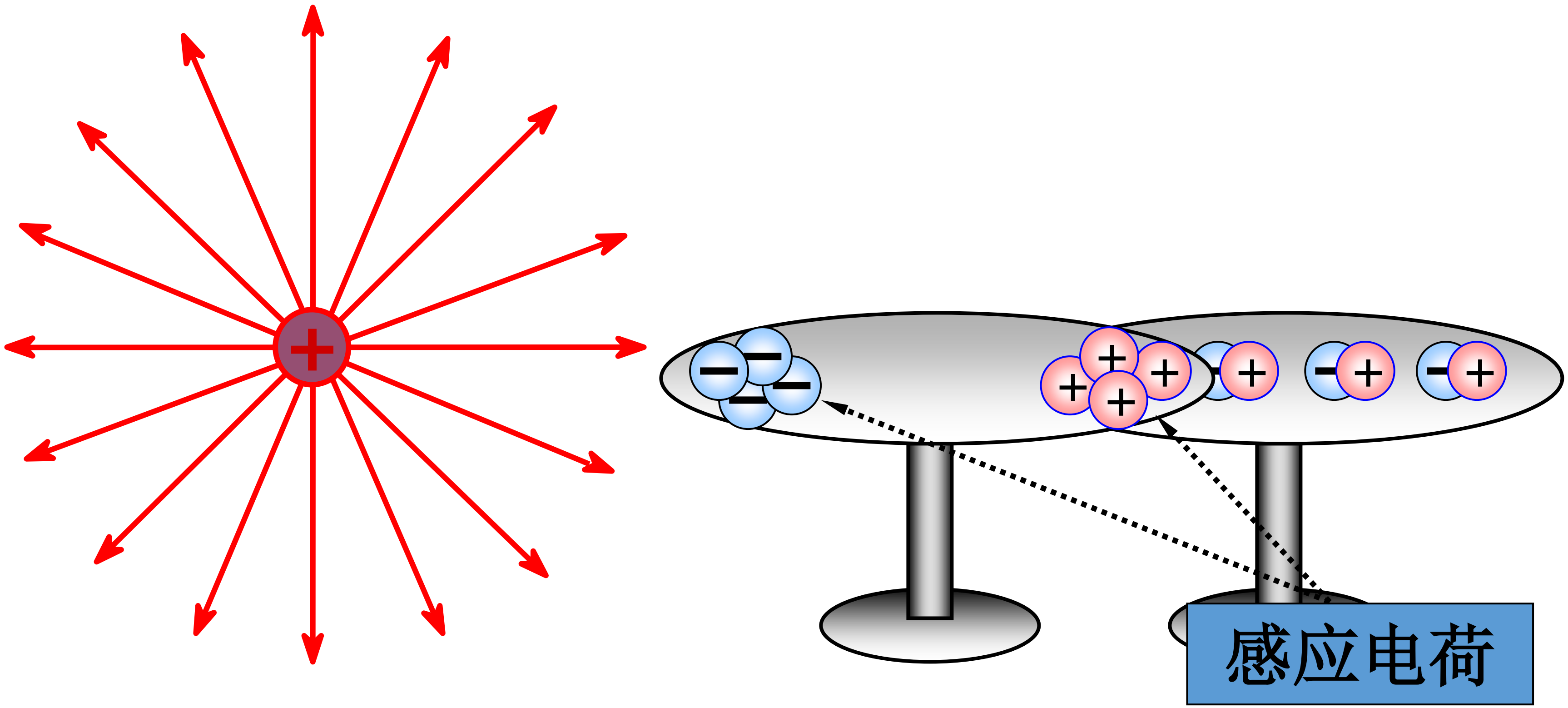
§7-6 静电场中的导体

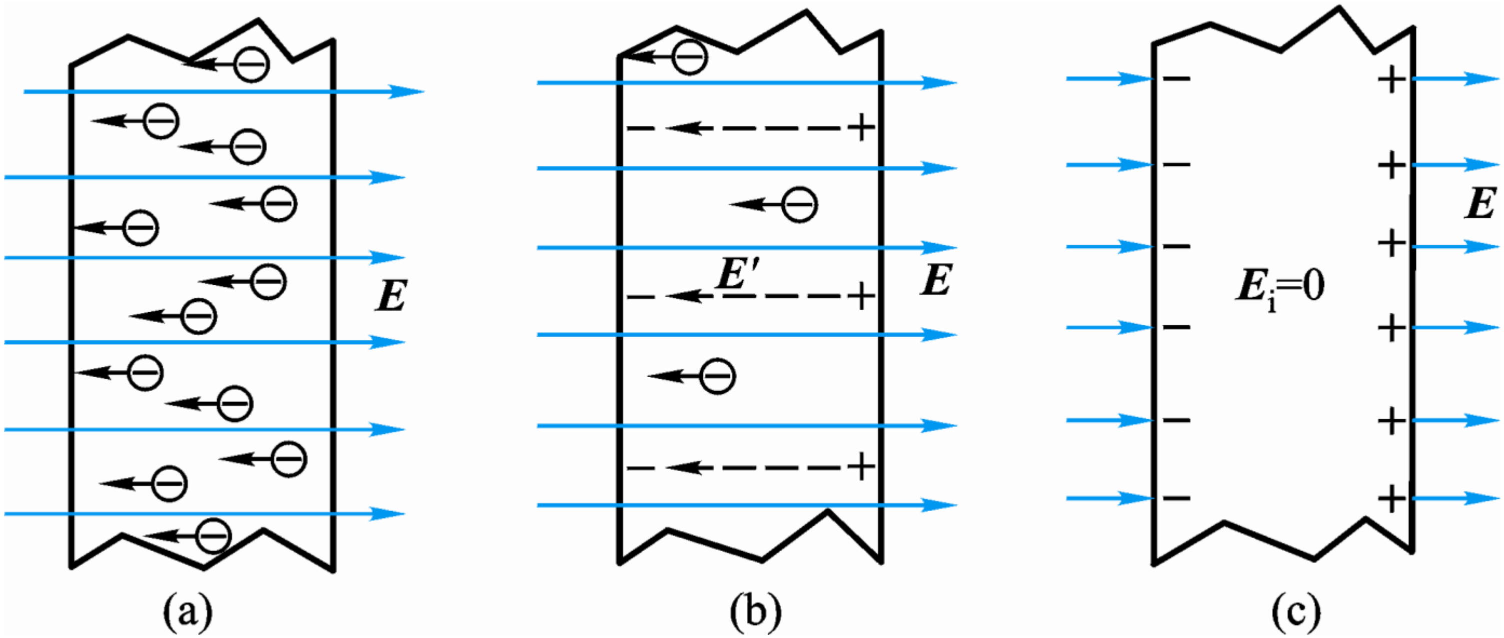
静电场中的导体

一、导体的静电平衡

静电感应：导体中自由电子在电场力的作用下作宏观定向运动，使电荷产生重新分布的现象。


感应电荷

导体达到静电平衡



$$\vec{E}=\vec{E}_0+\vec{E}'=0$$

导体内电场强度

外电场强度

感应电荷电场强度

静电平衡条件

（1）导体内任何一点处的电场强度为零；

（2）导体表面处的电场强度的方向，都与导体表面垂直.

$\Updownarrow$

导体是等势体

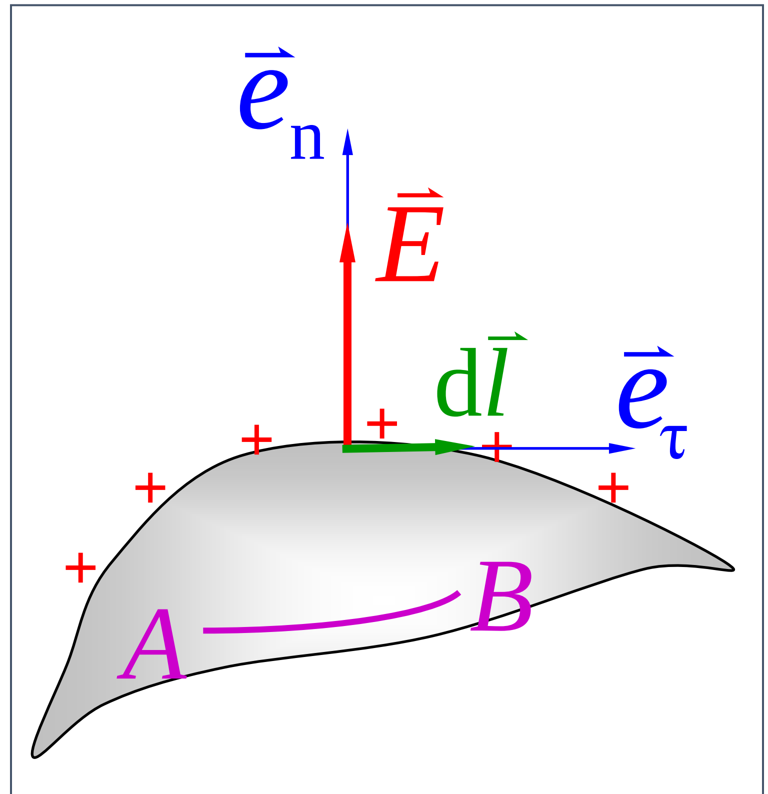
➢ 导体内部电势相等

$$U_{AB}=\int_{AB}\vec{E}\cdot \mathrm{d}\vec{l}=0$$

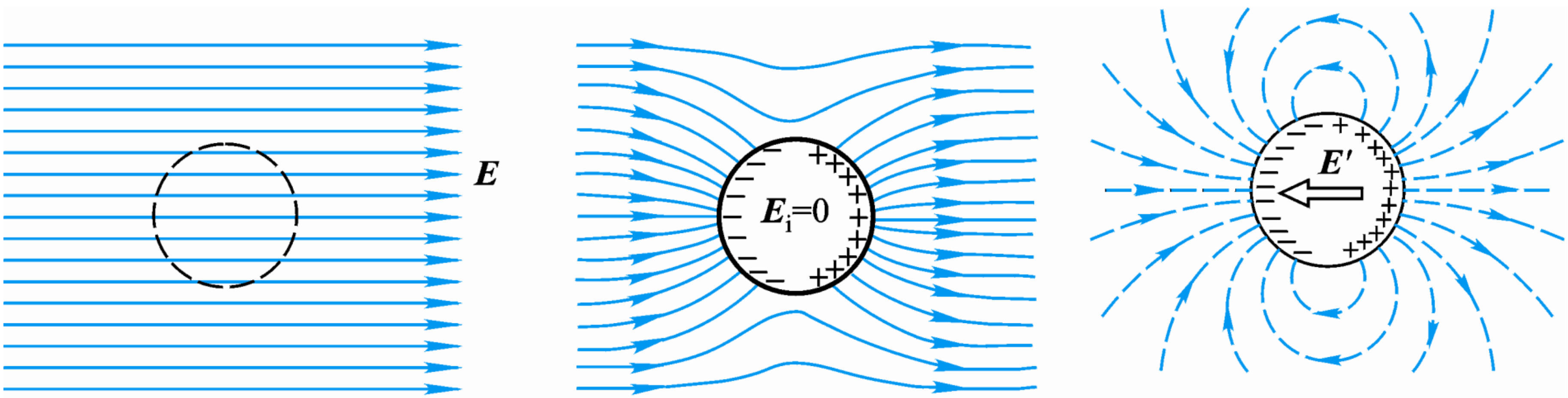
➢ 导体表面是等势面

$$\because -\Delta U=\vec{E}\cdot \mathrm{d}\vec{l}=0$$

$$\therefore \vec{E}\perp \mathrm{d}\vec{l}$$



感应电荷将影响外电场的分布



(a) 原匀强电场　(b) 球形导体放入后的电场　(c) 导体球感应电荷激发的电场

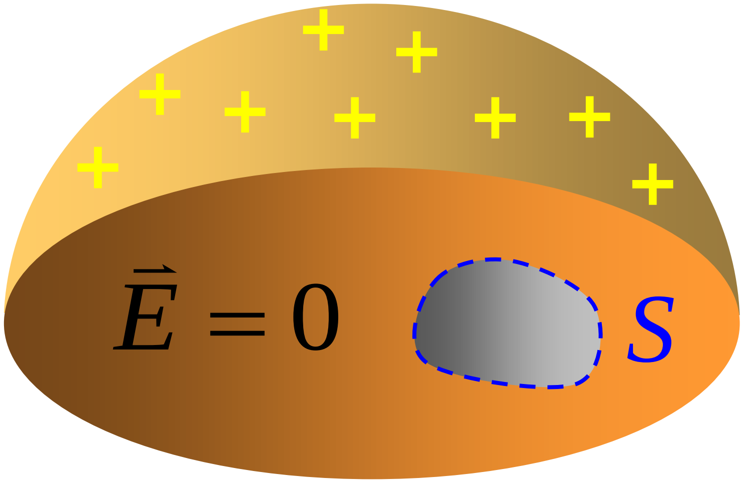
二、静电平衡时导体上电荷的分布

1. 实心导体

$$\because \vec{E}=0$$

$$\oiint_S \vec{E}\cdot \mathrm{d}\vec{S}=0=\frac{q}{\varepsilon_0}$$

$$\therefore q=0$$

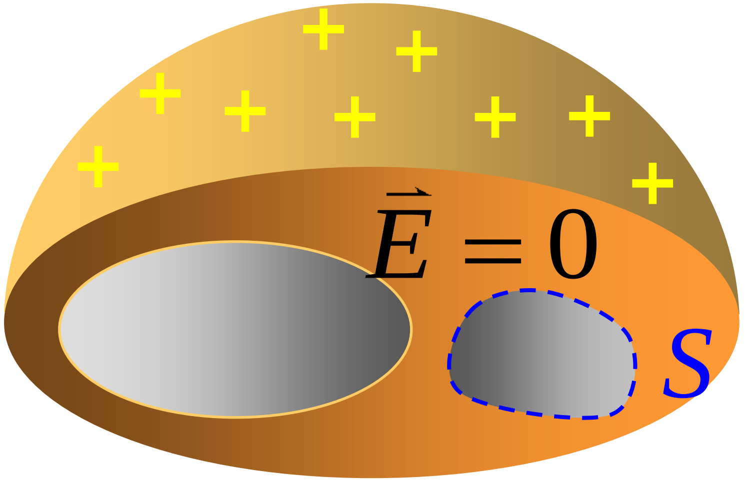


结论： 导体内部处处无净电荷

2. 有空腔导体

- 空腔内无电荷

$$\oiint_S \vec{E}\cdot d\vec{S}=0,\quad \sum q_i=0$$



电荷分布在表面上

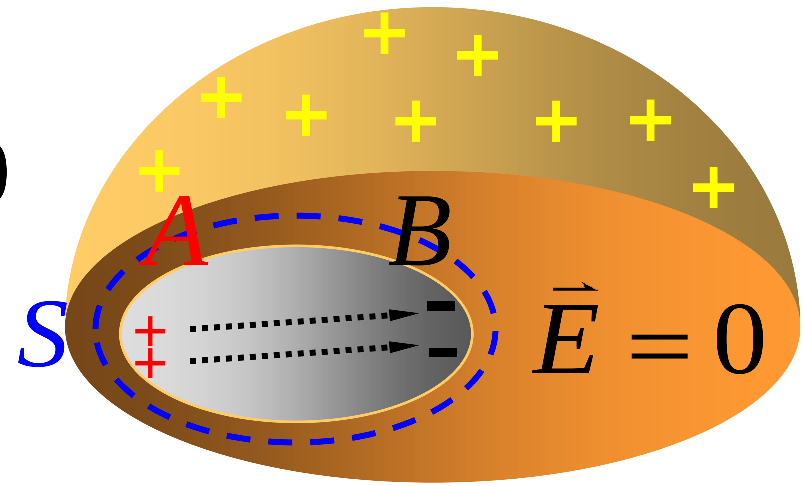
内表面上有电荷吗？

$$\oiint_S \vec{E}\cdot d\vec{S} = 0 = \frac{1}{\varepsilon_0}\sum q_i$$

若内表面带电

矛盾

$$U_{AB} = \int_{AB} \vec{E}\cdot \mathrm{d}\vec{l} \neq 0$$



导体是等势体

$$U_{AB} = \int_{AB} \vec{E}\cdot \mathrm{d}\vec{l} = 0$$ 所以内表面不带电

结论： 电荷分布在外表面上（内表面处处无净电荷）

- 空腔内有电荷

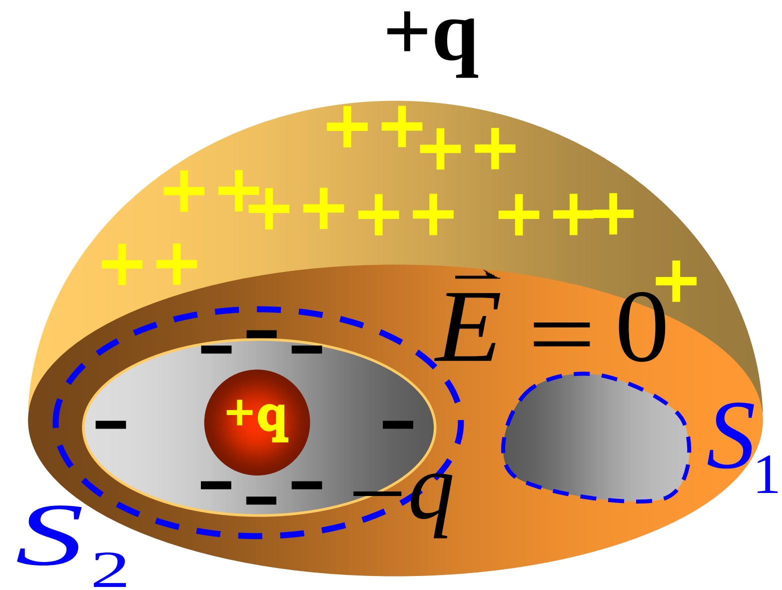
$$\oiint_{S_1} \vec{E}\cdot d\vec{S} = 0,\quad \sum q_i = 0$$

电荷分布在表面上

内表面上有电荷吗？

$$\oiint_{S_2} \vec{E}\cdot d\vec{S} = 0,\quad \sum q_i = 0$$

$$q_{内} = -q$$



结论：当空腔内有电荷 $+q$ 时,内表面因静电感应出现等值异号的电荷 $-q$，外表面有感应电荷 $+q$（电荷守恒）

3. 导体表面电场强度与电荷面密度的关系

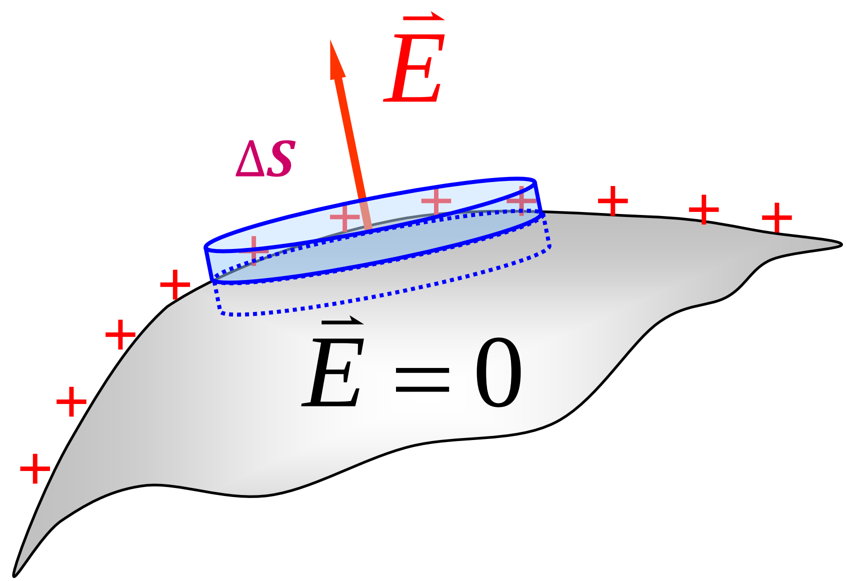
$$\oiint_S \vec{E} \cdot \mathrm{d}\vec{S} = \frac{\sigma \Delta S}{\varepsilon_0}$$

σ 为表面电荷面密度

$$E \ \Delta S = \frac{\sigma \Delta S}{\varepsilon_0}$$

$$\boxed{E = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}}$$

作钱币形高斯面

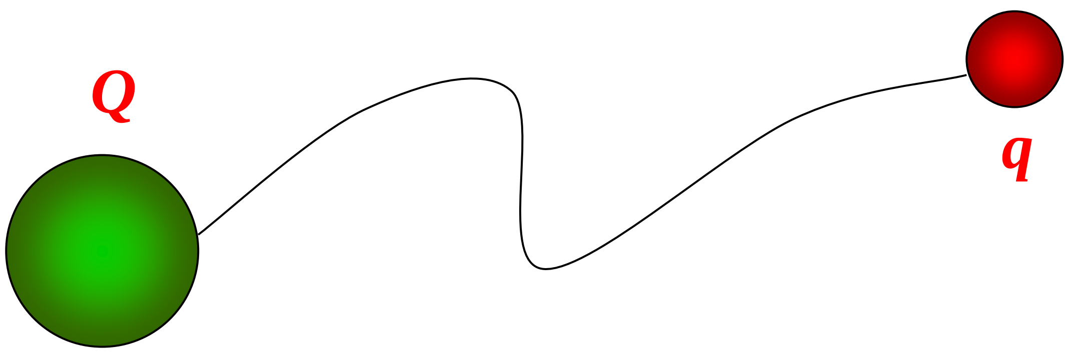


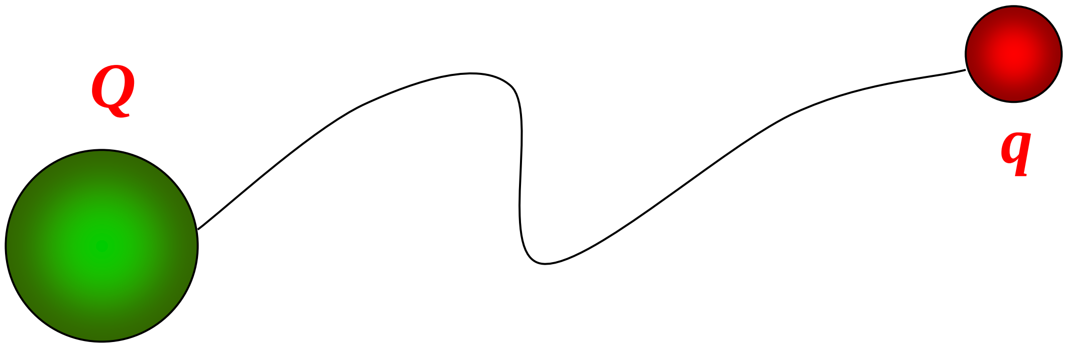
表面电场强度的大小与该表面电荷面密度成正比

4. 孤立导体表面电荷分布

表面曲率越大，面电荷密度越大。

例题：两个半径分别为R和r 的球形导体（R>r），用一根很长的细导线连接起来（如图），使这个导体组带电，电势为V，求两球表面电荷面密度与曲率的关系。





解: 细线使两导体球所组成的整体作为一个孤立导体系，在静电平衡时为等电势体。设两个球相距很远，每个球面上的电荷分布在另一球所激发的电场可忽略。因此，每个球又可近似的看作为孤立导体，两球表面上的电荷分布各自又都是均匀的。设大球所带电荷量为Q，小球所带电荷量为q，则两球的电势为

$$V=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q}{R}=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{r} \Rightarrow \frac{Q}{q}=\frac{R}{r}$$

大球所带电量Q比小球所带电量 q 多。

然而两球的电荷密度分别为

$$\sigma_R=\frac{Q}{4\pi R^2},\qquad \sigma_r=\frac{q}{4\pi r^2}$$

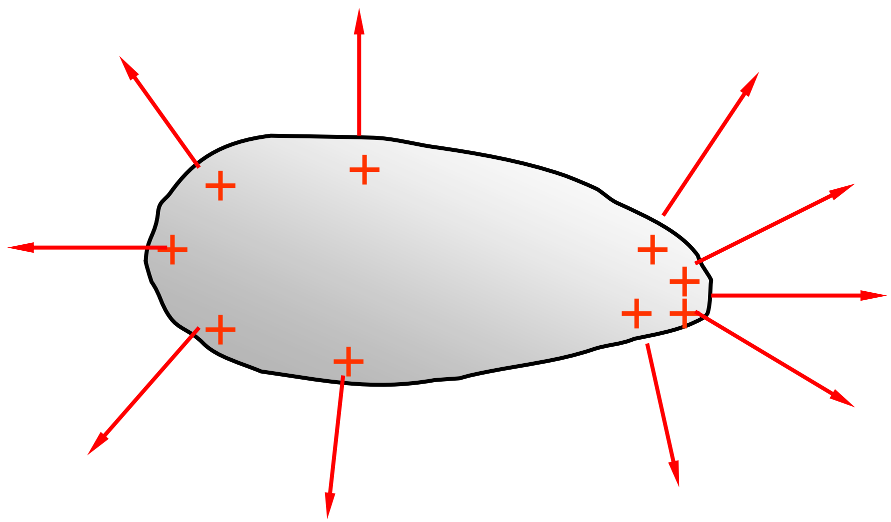
$$\therefore\quad \frac{\sigma_R}{\sigma_r}=\frac{Qr^2}{qR^2}=\frac{r}{R}$$

电荷面密度和半径成反比。即曲率半径愈小（或曲率愈大），电荷面密度愈大。

注意： 导体表面电荷分布与导体形状以及周围环境有关，以上结论只适用于孤立凸导体。

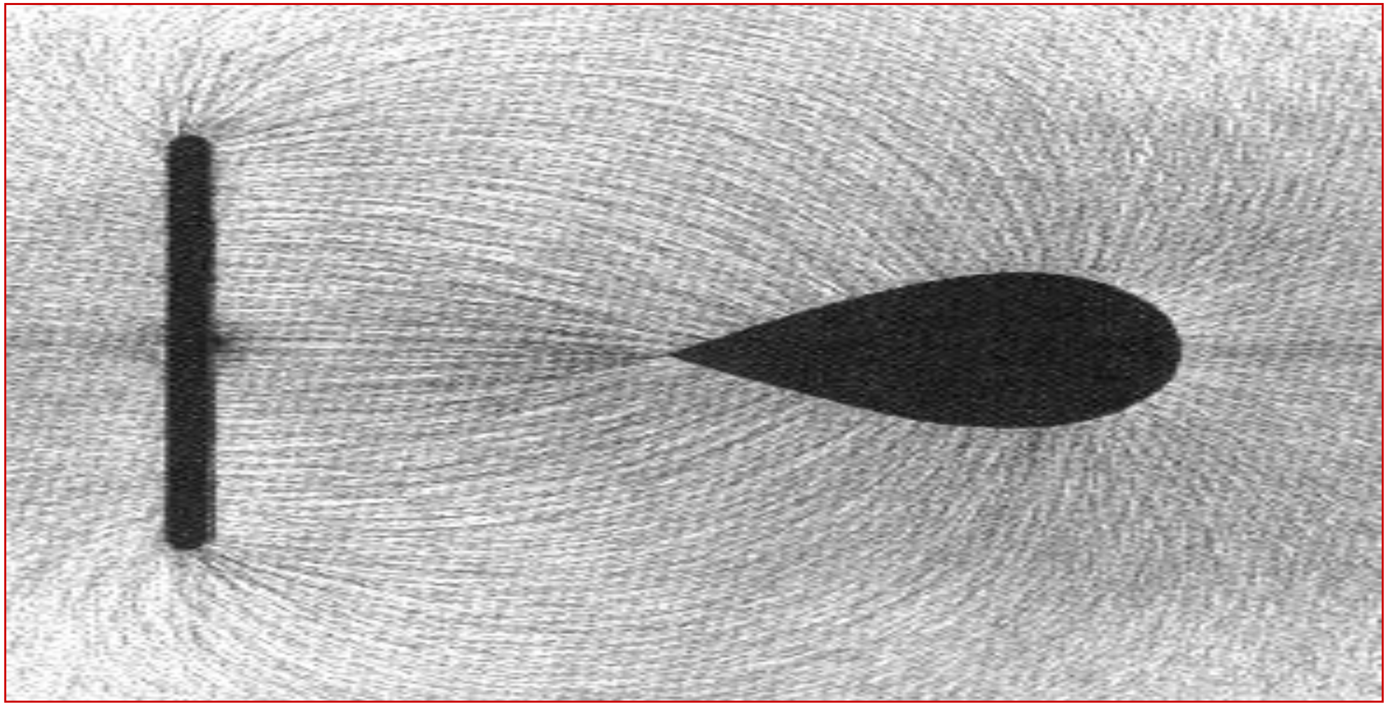
- 尖端放电现象

$$\sigma\downarrow, E\downarrow;\quad \sigma\uparrow E\uparrow$$

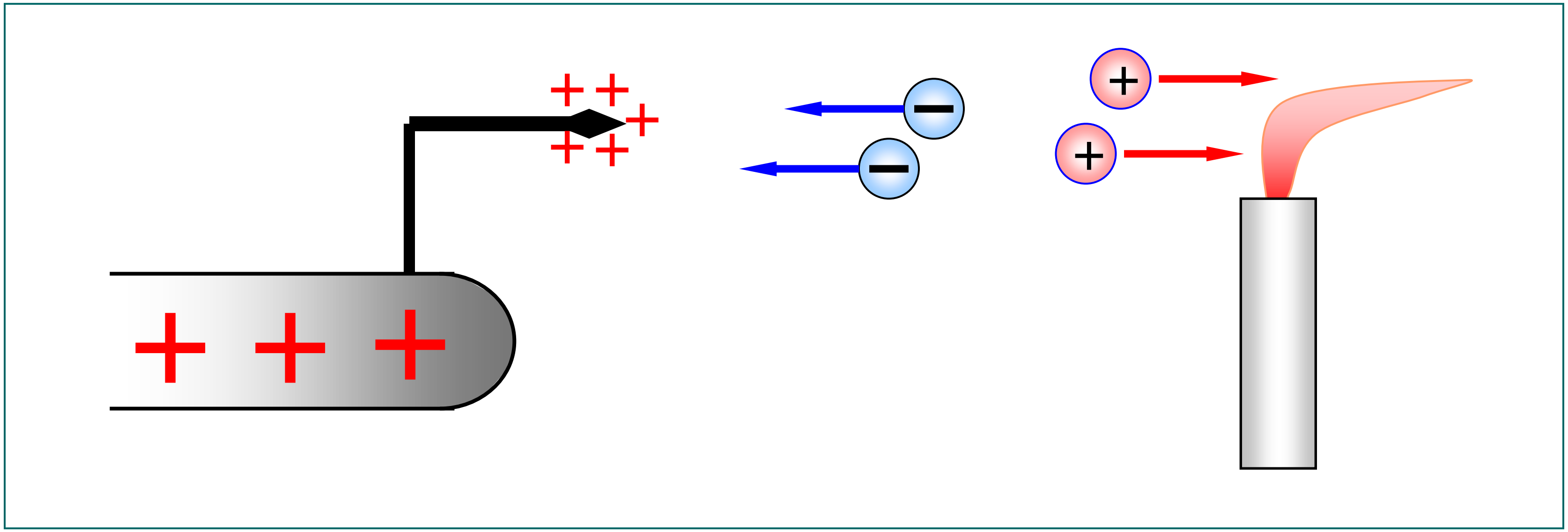


$$E=\frac{\sigma}{\varepsilon_0}$$

带电导体尖端附近的电场特别大，可使尖端附近的空气发生电离而产生放电现象，即尖端放电。



例：电风实验



尖端放电现象的利与弊：尖端放电现象的利用

小结:

静电平衡条件:

电场
- 导体内部场强处处为零
- 表面场强垂直于导体表面

电势
- 导体为一等势体
- 导体表面是一个等势面

推论：

- 导体内部无电荷，电荷分布在外表面上（内表面无电荷）；当空腔内有电荷 $+q$ 时, 内表面因静电感应出现等值异号的电荷 $-q$ ，外表面有感应电荷 $+q$（电荷守恒）；

- 孤立导体电荷面密度和半径成反比，即曲率半径愈小（或曲率愈大），电荷面密度愈大;

- 表面电场强度的大小与该表面电荷面密度成正比。

思考题

（1）设带电导体表面某点电荷密度为σ，外侧附近场强 $E=\sigma/\varepsilon_0$，现将另一带电体移近，该点场强是否变化？公式 $E=\sigma/\varepsilon_0$ 是否仍成立？

答： 导体表面 σ 变化，外侧附近场强 $\boldsymbol{E}$ 变化，

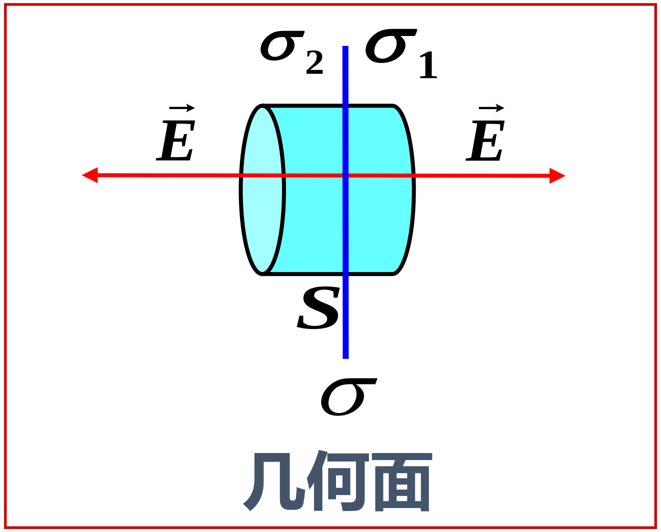
而 $E=\sigma/\varepsilon_0$ 仍然成立。

（2）无限大带电平面： $E=\sigma/2\varepsilon_0$

带电导体表面附近： $E=\sigma/\varepsilon_0$

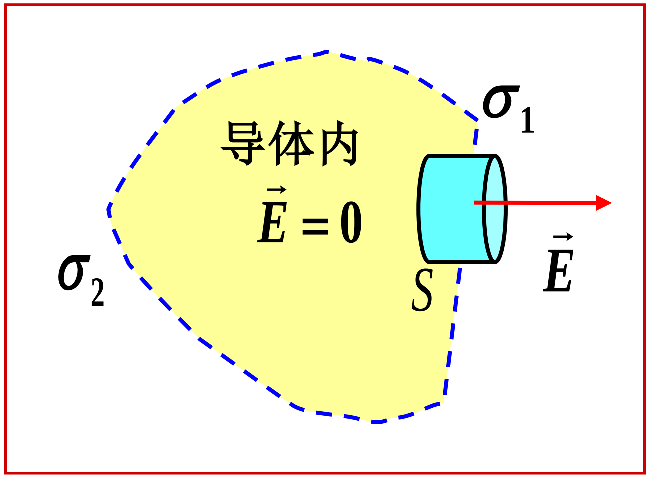
是否矛盾？

$$\oiint_s \vec{E}\cdot d\vec{S} = 2E\Delta S = \frac{\sigma\Delta S}{\varepsilon_0}$$



如果计及带电面的厚度

式中 $\sigma = \sigma_1 + \sigma_2 = 2\sigma_1$



$$\oiint_s \vec{E}\cdot d\vec{S} = E\Delta S = \frac{\sigma_1\Delta S}{\varepsilon_0}$$

不矛盾！

四、 有导体存在时的 $\vec{E}$, U 分布求解思路：

静电平衡条件

电荷守恒定律

→ 导体上的电荷分布

→ 计算 $\vec{E}$, U 分布（ 方法同前 ）

例： 内外半径分别为 R_2和R_1 的金属球壳，在球壳内放一半径为 R_3 的同心金属球，若使球壳和金属球均带有 q 的正电荷，**问：** 两球体上的电荷如何分布？球心的电势为多少？

解： 根据静电平衡的条件求电荷分布

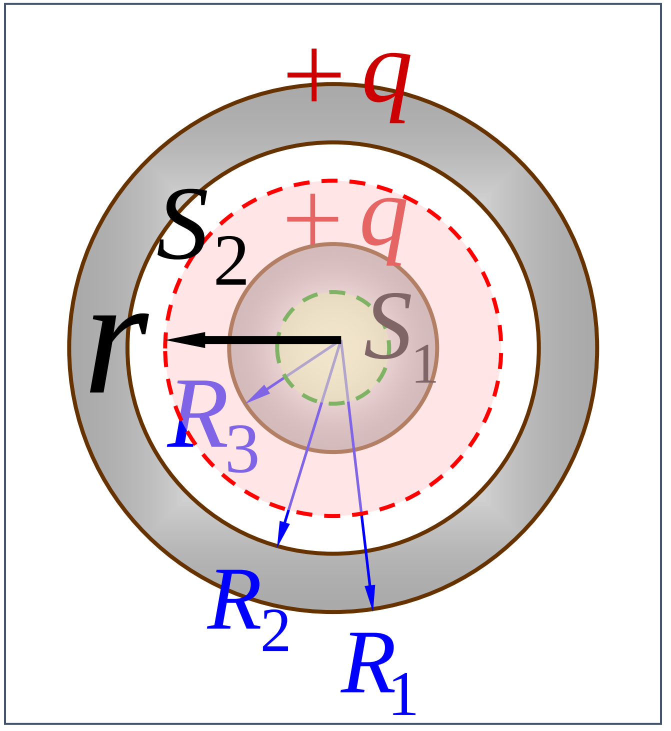
作球形高斯面 S_1

$$E_1 = 0 \quad (r < R_3)$$

作球形高斯面 S_2

$$R_3 < r < R_2, \quad \oiint_{S_2} \vec{E}_2 \cdot \mathrm{d}\vec{S} = \frac{q}{\varepsilon_0}$$

$$E_2 = \frac{q}{4\pi\,\varepsilon_0 r^2}$$



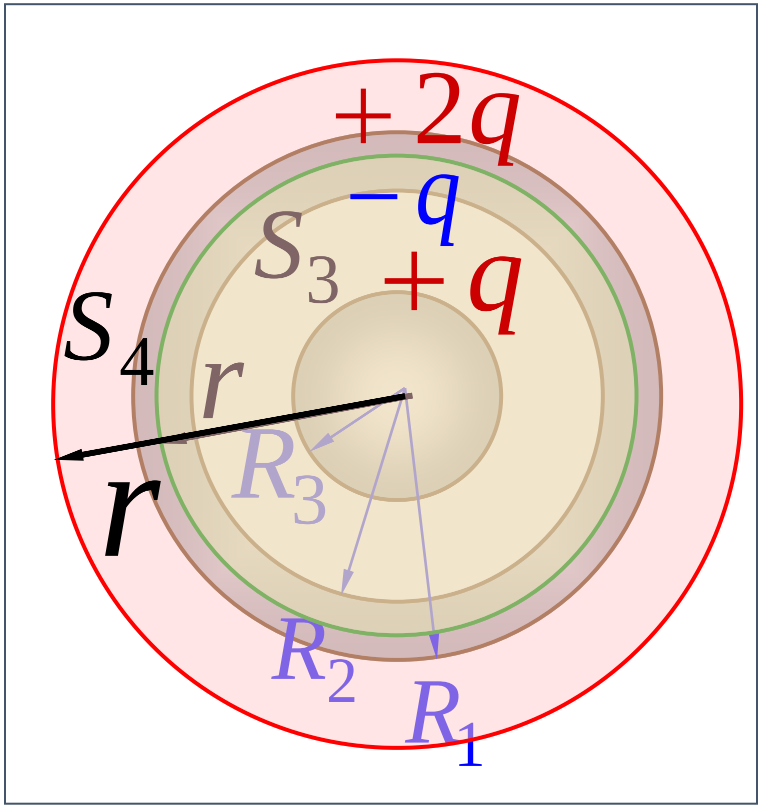
根据静电平衡条件

$$\oiint_{S_3} \vec{E}_3 \cdot \mathrm{d}\vec{S} = \sum_i q_i \Big/ \varepsilon_0 = 0$$

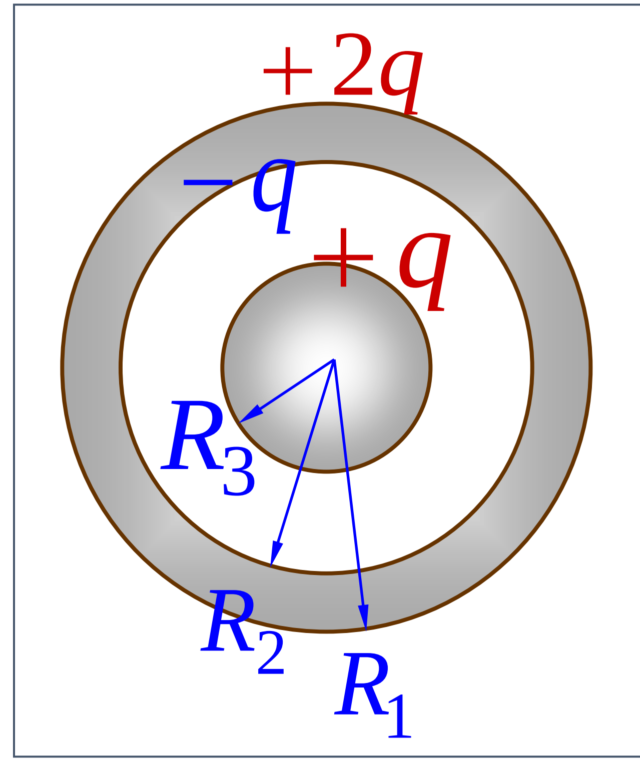
$$E_3 = 0 \quad (R_1 < r < R_2)$$

$$\oiint_{S_4} \vec{E}_4 \cdot \mathrm{d}\vec{S} = \sum_i q_i \Big/ \varepsilon_0 = 2q / \varepsilon_0$$

$$E_4 = \frac{2q}{4\pi\,\varepsilon_0 r^2} \quad (R_1 < r)$$



$$E = \begin{cases} 0 & (r < R_3) \\ \dfrac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^2} & (R_3 < r < R_2) \\ 0 & (R_1 < r < R_2) \\ \dfrac{2q}{4\pi\varepsilon_0 r^2} & (R_1 < r) \end{cases}$$



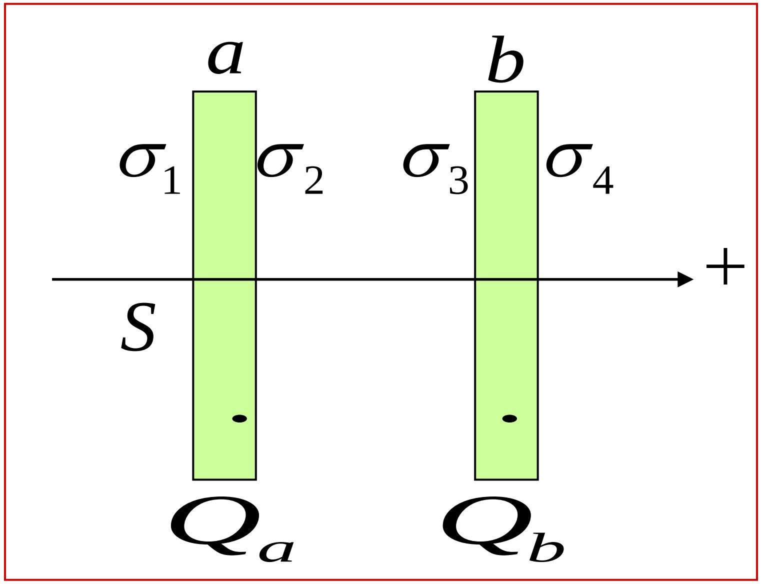
$$V_O = \int_0^{\infty} \vec{E} \cdot \mathrm{d}\vec{l}$$

$$= \cancel{\int_0^{R_3} \vec{E}_1 \cdot \mathrm{d}\vec{l}} + \int_{R_3}^{R_2} \vec{E}_2 \cdot \mathrm{d}\vec{l} + \cancel{\int_{R_2}^{R_1} \vec{E}_3 \cdot \mathrm{d}\vec{l}} + \int_{R_1}^{\infty} \vec{E}_4 \cdot \mathrm{d}\vec{l}$$

$$\boxed{V_O = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{R_3} - \frac{1}{R_2} + \frac{2}{R_1}\right)}$$

又例：相距很近的平行导体板 a,b，分别带电 Q_a, Q_b 求电荷分布。

解：设平板面积为 S



由电荷守恒：

$$\sigma_1 S + \sigma_2 S = Q_a \quad (1)$$

$$\sigma_3 S + \sigma_4 S = Q_b \quad (2)$$

由静电平衡条件：

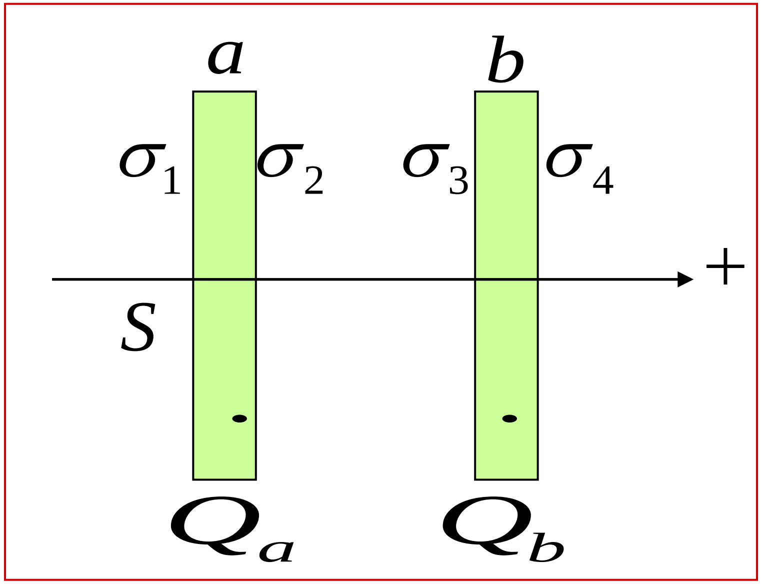
$$E_{a内} = \frac{\sigma_1}{2\varepsilon_0} - \frac{\sigma_2}{2\varepsilon_0} - \frac{\sigma_3}{2\varepsilon_0} - \frac{\sigma_4}{2\varepsilon_0} = 0 \quad (3)$$

$$E_{b内} = \frac{\sigma_1}{2\varepsilon_0} + \frac{\sigma_2}{2\varepsilon_0} + \frac{\sigma_3}{2\varepsilon_0} - \frac{\sigma_4}{2\varepsilon_0} = 0 \quad (4)$$

由(1)、(2)、(3)、(4)解得：

$$\sigma_1 = \sigma_4 = \frac{Q_a + Q_b}{2S}$$

$$\sigma_2 = -\sigma_3 = \frac{Q_a - Q_b}{2S}$$

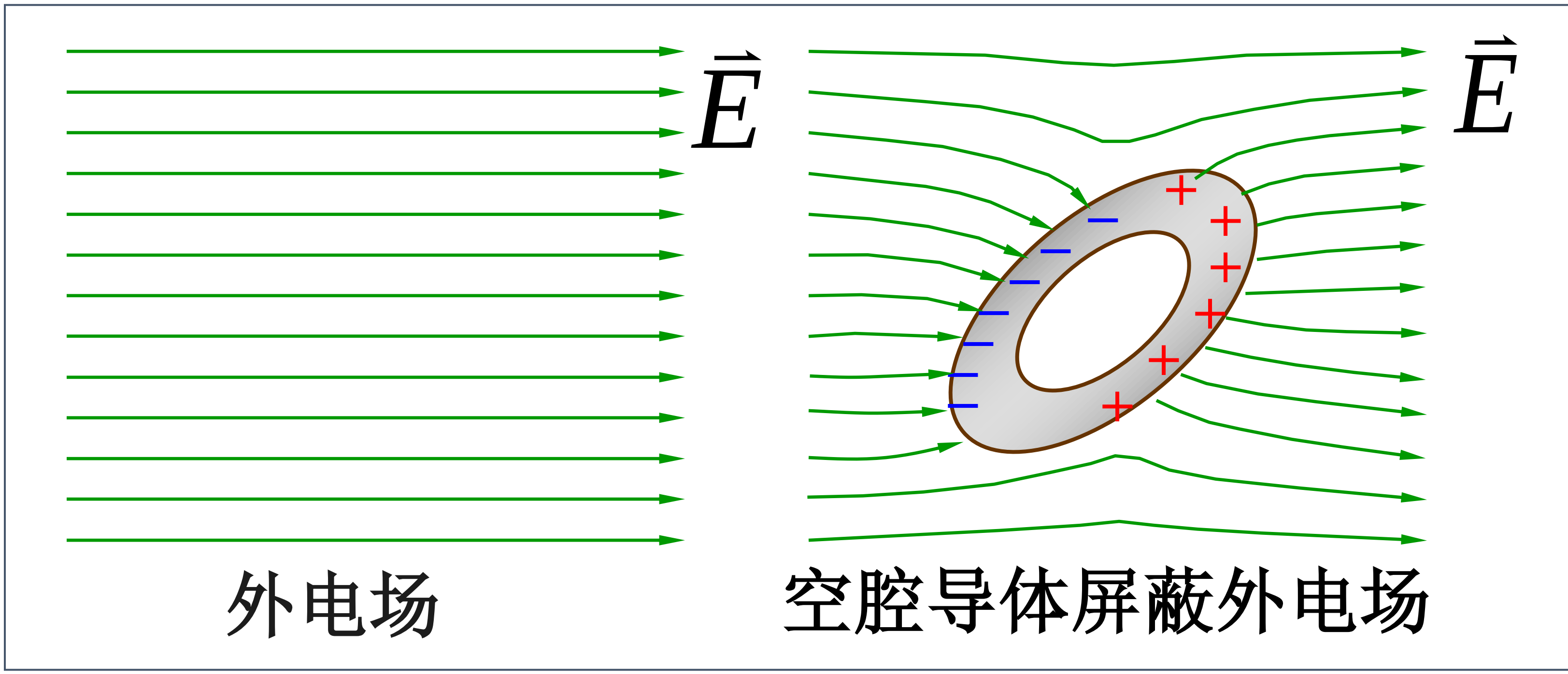


即：相背面 σ 相等同号，

相对面 σ 相等异号。

三、 静电屏蔽

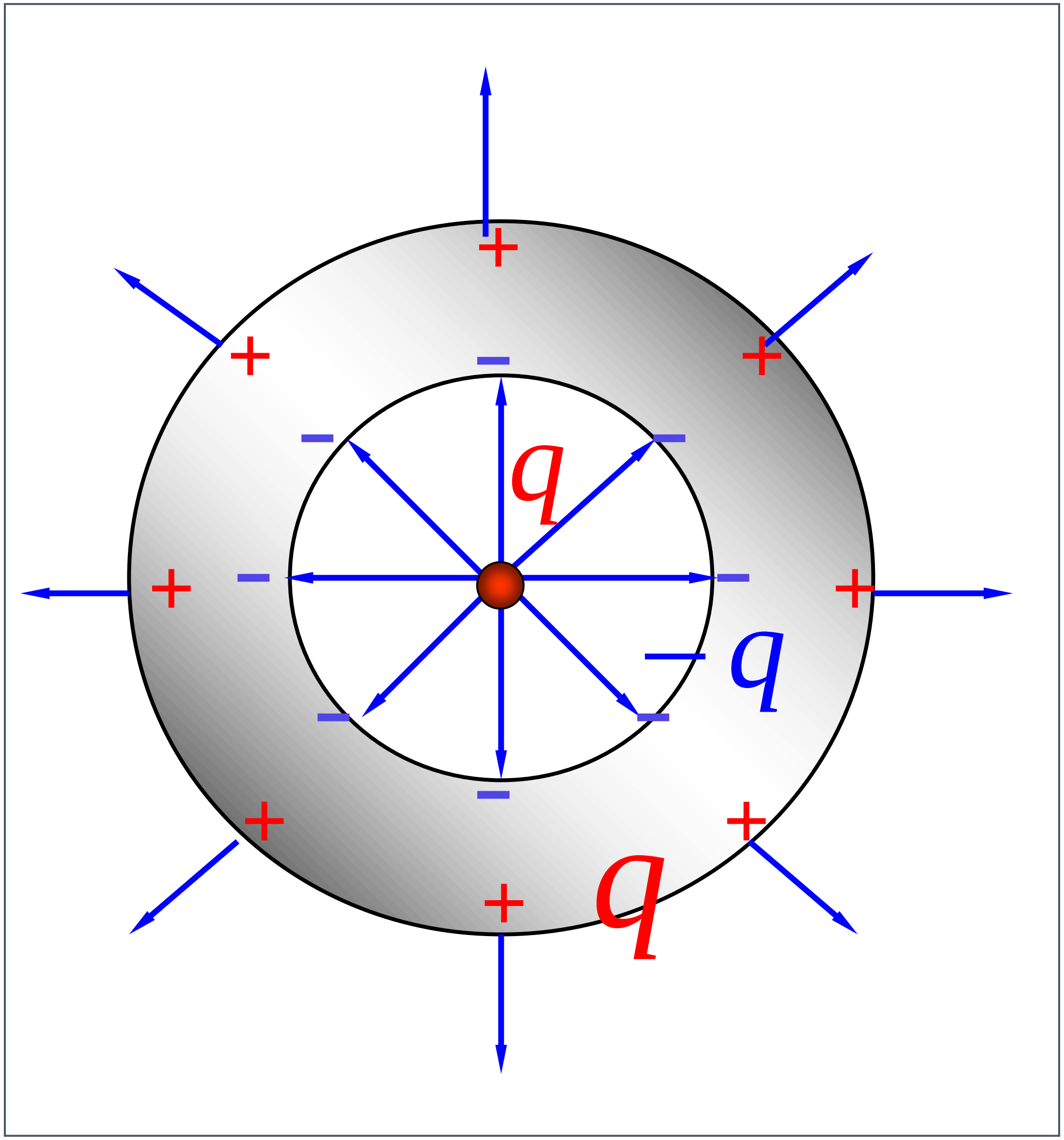
1. 屏蔽外电场



空腔导体可以屏蔽外电场, 使空腔内物体不受外电场影响. 这时, 整个空腔导体和腔内的电势也必处处相等.

2. 屏蔽腔内电场

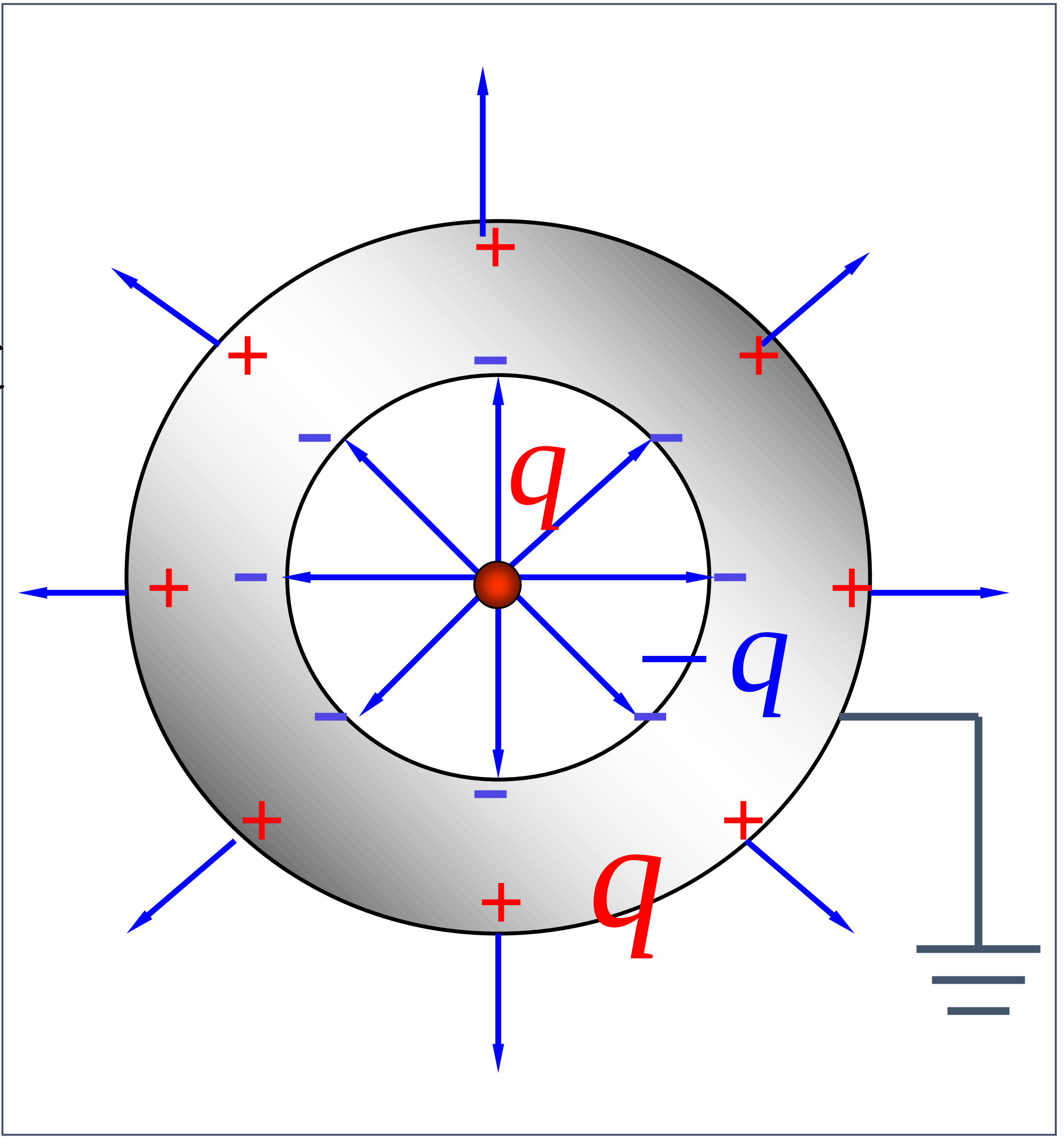
不接地空腔导体内的电荷通过空腔导体的静电感应对空腔外部空间产生影响，但与电荷在空腔导体内的位置无关。



静电场的唯一性定理：边界条件给定，导体带电量或电势已知，电场唯一确定

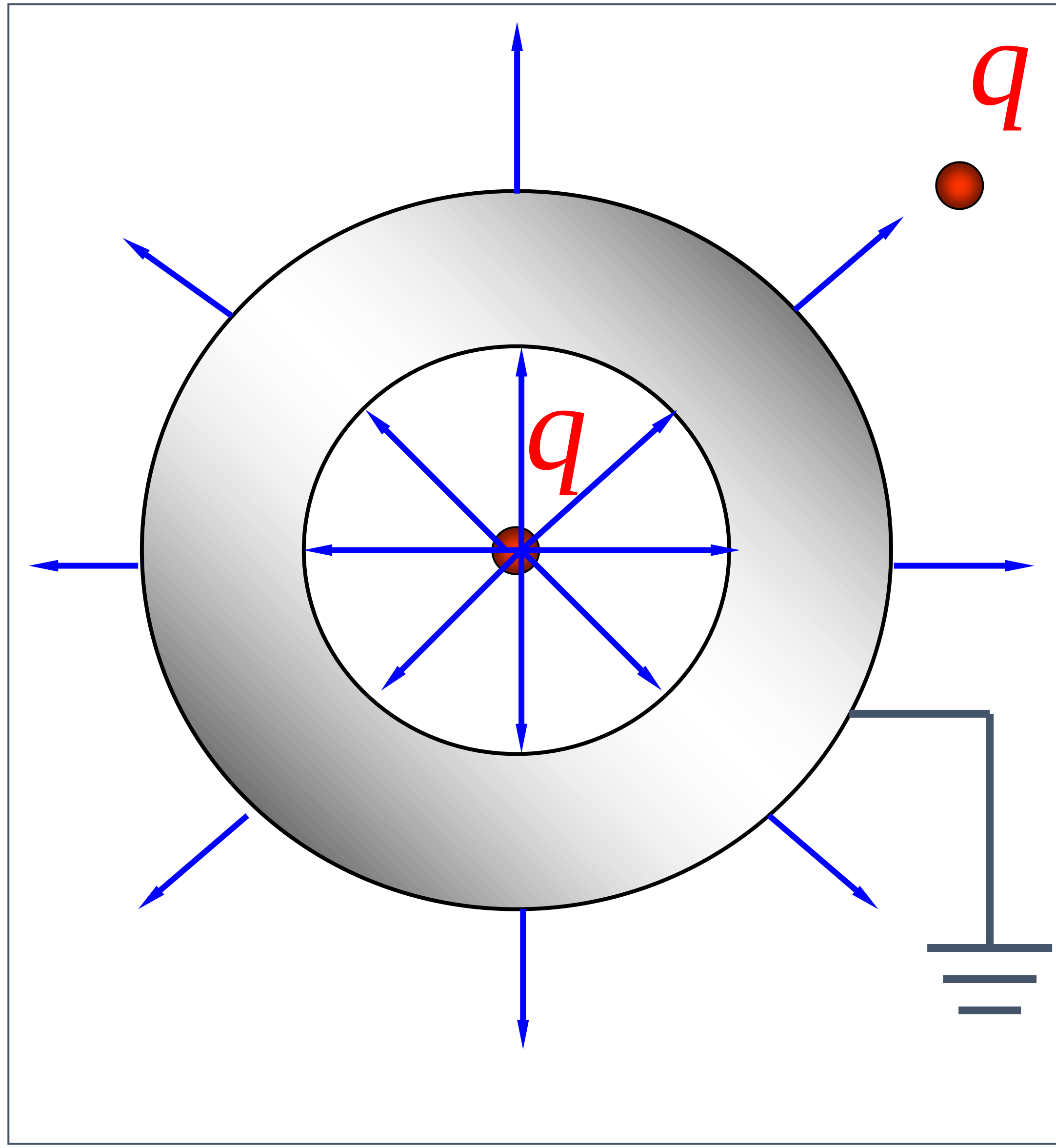
接地空腔导体将使外部空间不受空腔内的电场影响

接地导体电势为零



3. 屏蔽腔内外电场

接地空腔导体将使外部空间与空腔内的电场互不影响



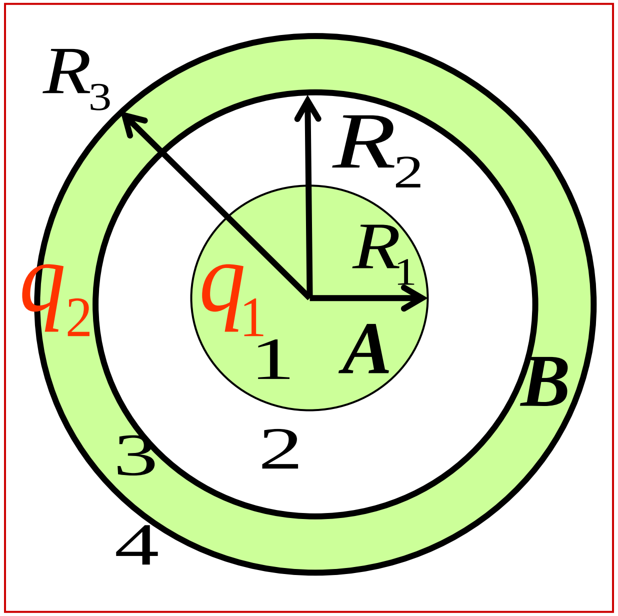
例：若导体球A 带电q_1, 导体球壳B 带电q_2，

求：

(1) 图中1，2，3，4 各区域的E和U分布，并画出$E\sim r$和$U\sim r$曲线.

(2) 若将球与球壳用导线连接，情况如何？

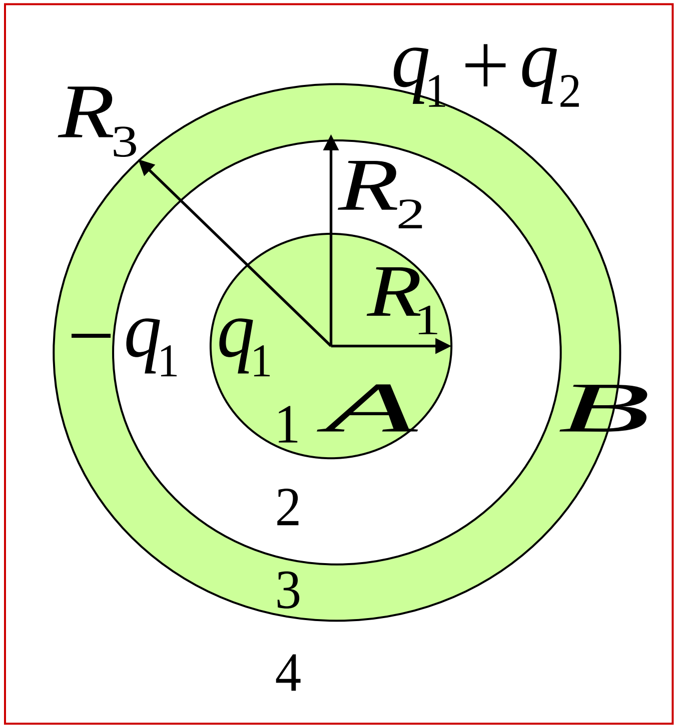
(3) 若将外球壳接地，情况如何？



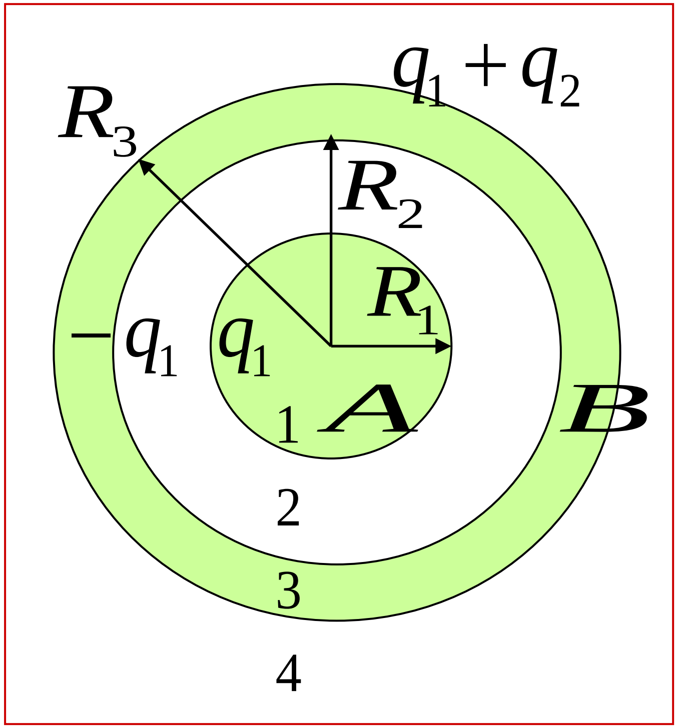
解：(1)

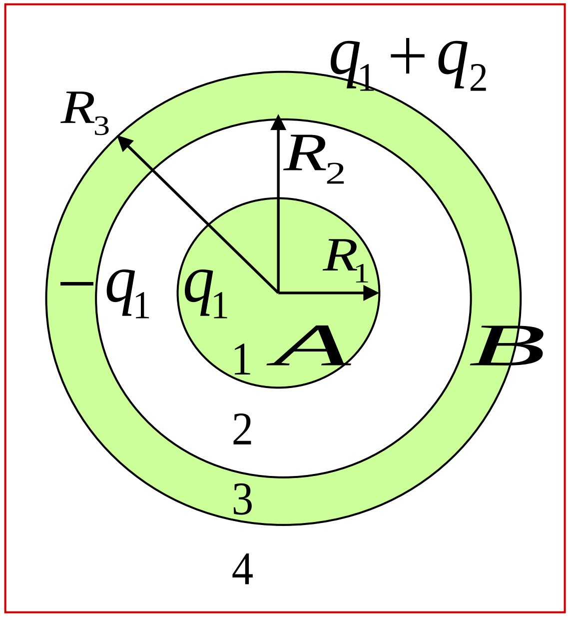
$$q_A = q_1, \quad q_{b内} = -q_1, \quad q_{B外} = q_1 + q_2$$

$$E_{1234} = \begin{cases} 0 \\ \dfrac{q_1}{4\pi\varepsilon_0 r^2} \\ 0 \\ \dfrac{q_1 + q_2}{4\pi\varepsilon_0 r^2} \end{cases}$$

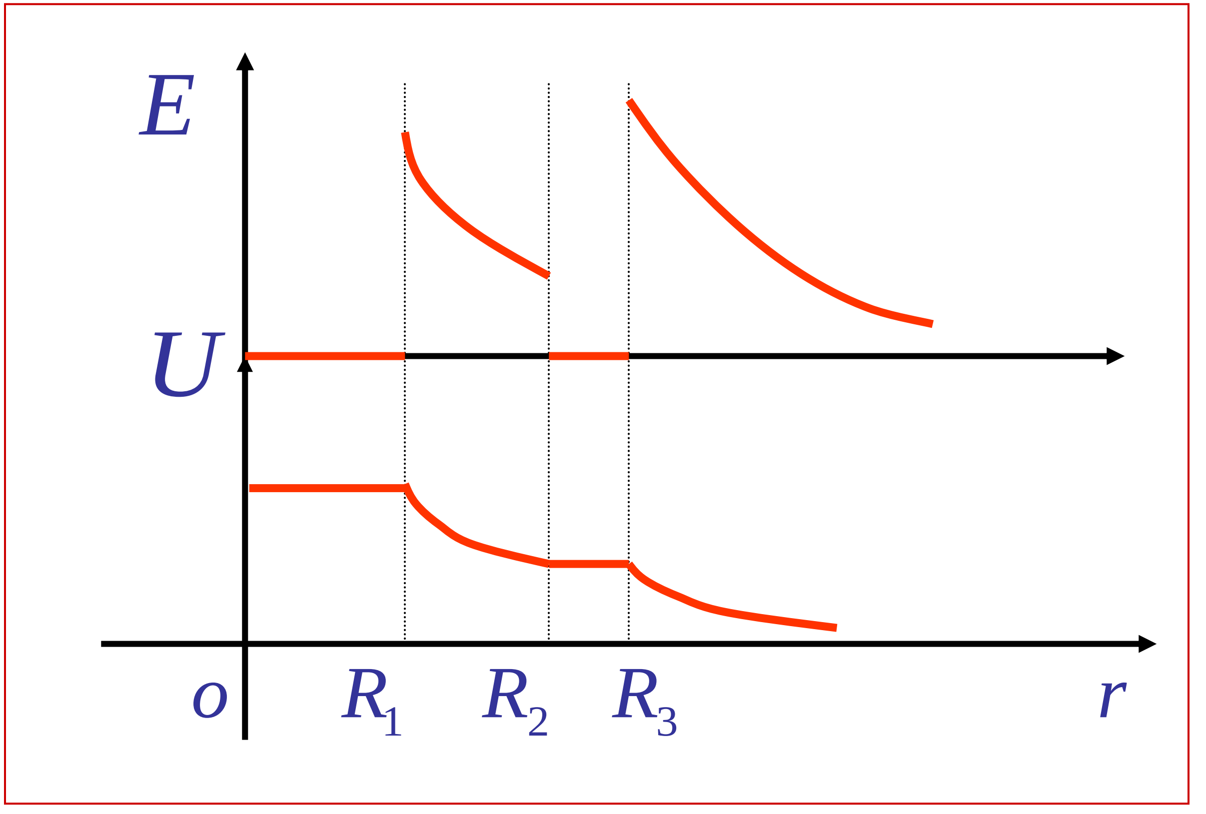


$$U_{1234}=\begin{cases}\dfrac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left(\dfrac{q_1}{R_1}-\dfrac{q_1}{R_2}+\dfrac{q_1+q_2}{R_3}\right)\\ \dfrac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left(\dfrac{q_1}{r}-\dfrac{q_1}{R_2}+\dfrac{q_1+q_2}{R_3}\right)\\ \dfrac{1}{4\pi\varepsilon_0}\dfrac{q_1+q_2}{R_3}\\ \dfrac{1}{4\pi\varepsilon_0}\dfrac{q_1+q_2}{r}\end{cases}$$





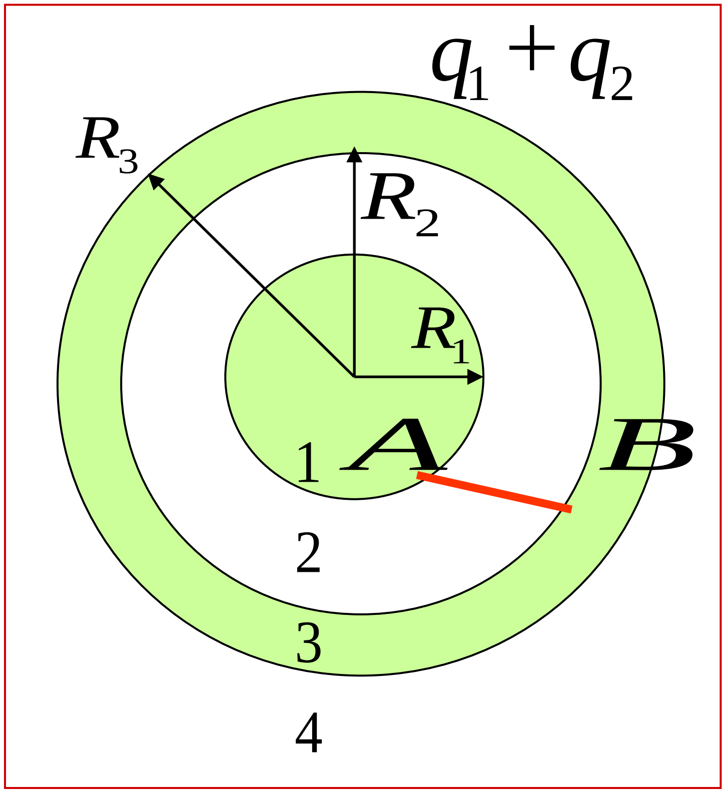
$q_1 + q_2$
R_3
R_2
R_1
$-q_1$
q_1
1
A
B
2
3
4



E
U
o
R_1
R_2
R_3
r

(2)若将球与球壳用导线连接，情况如何？

$$q_A = q_{B内} = 0 \quad ; \quad q_{B外} = q_1 + q_2$$



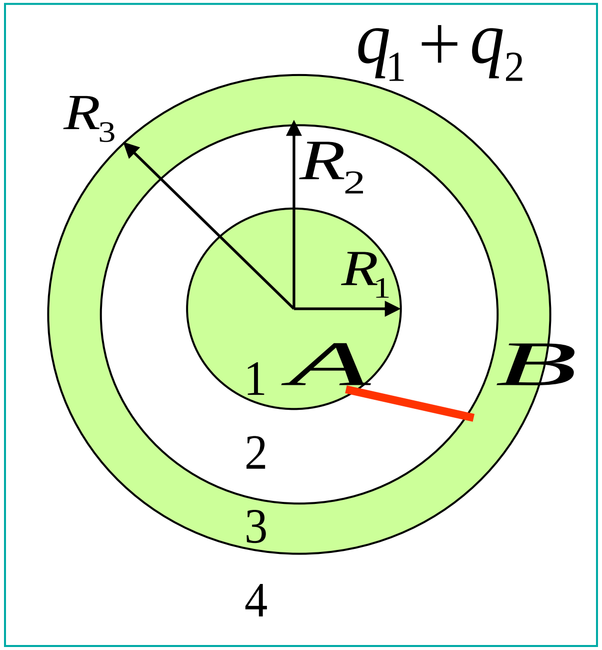
$$E_1 = E_2 = E_3 = 0$$

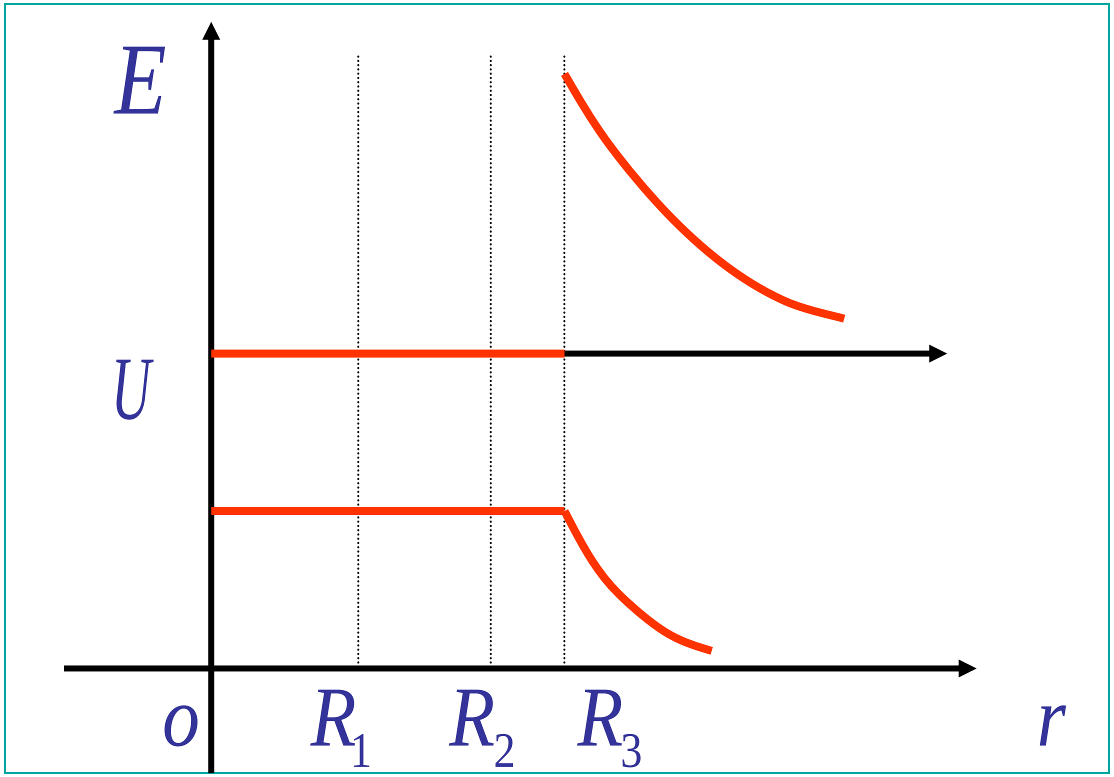
$$E_4 = \frac{q_1 + q_2}{4\pi\varepsilon_0 r^2}$$

$$U_1 = U_2 = U_3 = \frac{q_1 + q_2}{4\pi\varepsilon_0 R_3}$$

$$U_4 = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_1 + q_2}{r}$$

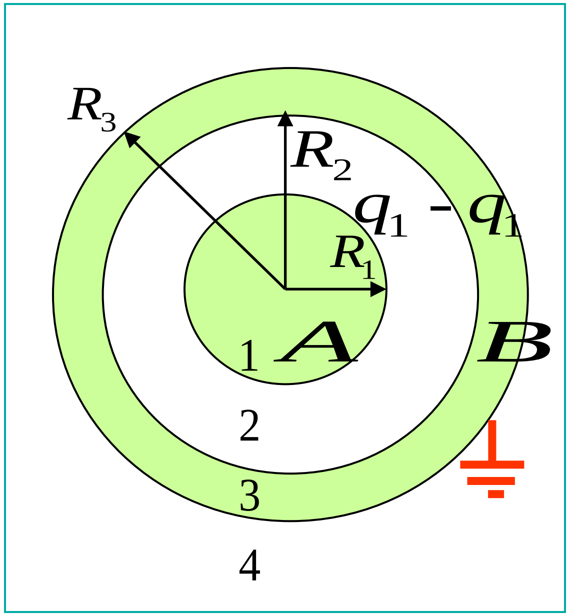
$E-r$ ， $U-r$ 曲线





(3)若将外球壳接地，情况如何？

$$U_{外壳} = \frac{q_{外壳}}{4\pi\varepsilon_0 R_3} = 0$$



$$q_A = q_1 \qquad q_{B内} = -q_1 \qquad q_{B外} = 0$$

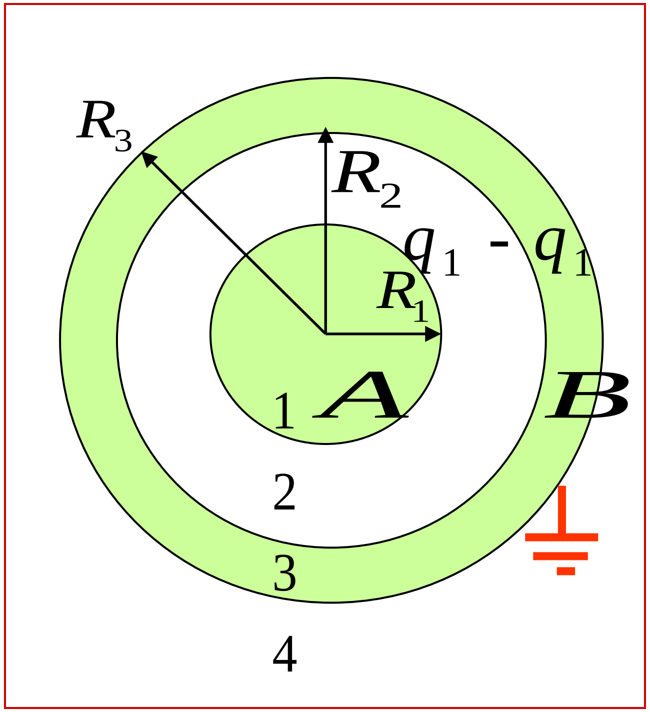
$$E_1 = 0 \qquad E_2 = \frac{q_1}{4\pi\varepsilon_0 r^2}$$

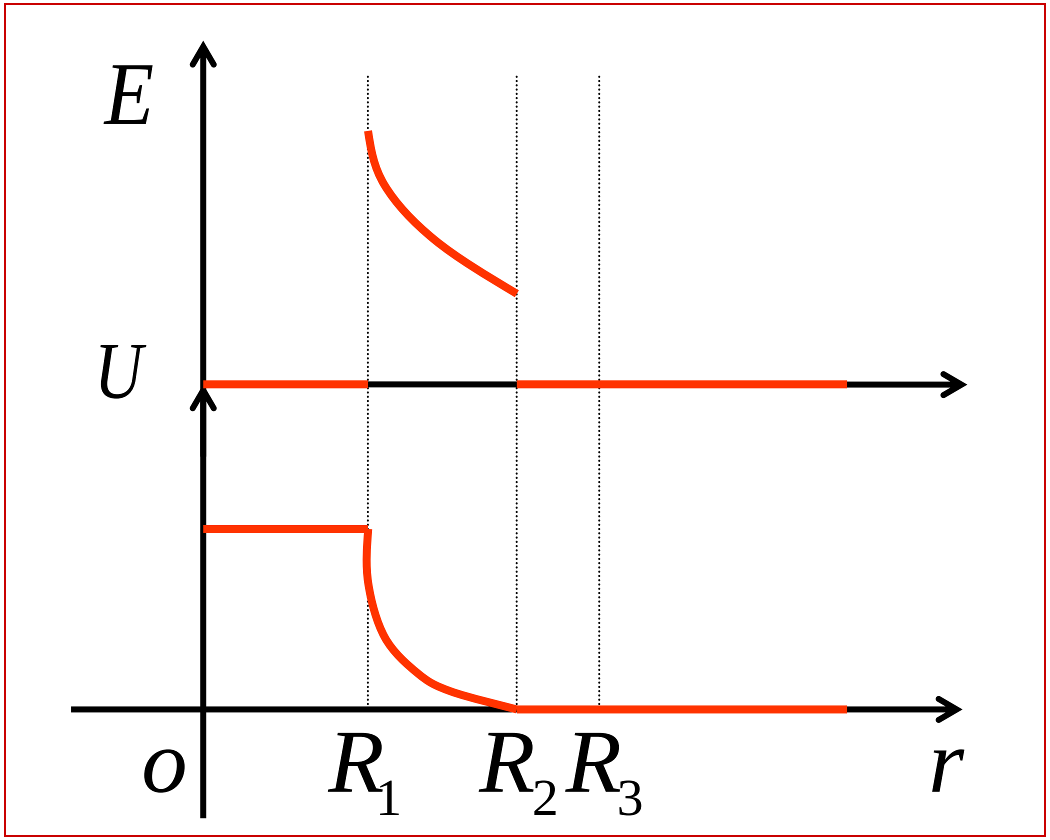
$$E_3 = E_4 = 0$$

$$U_1 = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{q_1}{R_1} - \frac{q_1}{R_2}\right) \qquad U_2 = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{q_1}{r} - \frac{q_1}{R_2}\right)$$

$$U_3 = 0 \qquad U_4 = 0$$

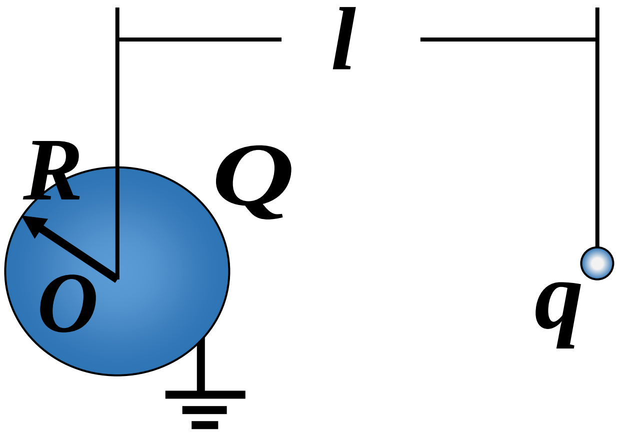
$E-r$, $U-r$ 曲线





例7-21 接地导体球附近有一点电荷，如图所示，求导体上感应电荷的电荷量。

解： 接地 即 $V=0$



设：感应电荷量为Q，

由于导体是个等势体

球心的电势为0，则

$$\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 R}+\frac{q}{4\pi\varepsilon_0 l}=0$$

$$Q=-\frac{R}{l}q$$