合 肥 工 业 大 学试 卷 参 考 答 案（A） 共 1 页第 1 页

2018～2019 学年第 一 学期 课程代码 1400071B 课程名称 线性代数 学分 2.5 课程性质：必修☑、选修☐、限修☐ 考试形式:开卷☐、闭卷☑

专业班级（教学班）________ 考试日期 2018.11.21 命题教师 集体 系（所或教研室）主任审批签名________

一、填空题（每小题 4 分，共 20 分）

1. 12； 2. $\begin{pmatrix} 2^n & 0 \\ 0 & 2^n \end{pmatrix}$； 3. 2； 4. 3； 5. $-\frac{\sqrt{2}}{2} < t < \frac{\sqrt{2}}{2}$.

二、选择题（每小题 4 分，共 20 分）

D C B C A

三、（本题满分 10 分）

解：由 $A(X+Y)B = 2E$，可知 $X+Y = 2A^{-1}B^{-1} = 2(BA)^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$，

又因为 $X^2 + XY = E$，所以 $X = (X+Y)^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$，

进而 $Y = (X+Y) - X = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{3}{2} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

四、（本题满分 10 分）

解法一：$|\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & -1 \\ 2 & -1 & -5 & \lambda \\ -1 & 1 & 4 & -1 \end{vmatrix} = 8 - 4\lambda$，

当 $\lambda = 2$ 时，向量组线性相关.

$$(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & -1 \\ 2 & -1 & -5 & 2 \\ -1 & 1 & 4 & -1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

故极大无关组为 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$，且 $\alpha_4 = 2\alpha_1 - 3\alpha_2 + \alpha_3$.

解法二：$(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & -1 \\ 2 & -1 & -5 & \lambda \\ -1 & 1 & 4 & -1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda-2 \end{pmatrix}$，

当 $\lambda = 2$ 时，$r(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4) = 3$，向量组线性相关.

故极大无关组为 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$，

进一步 $(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4) \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$，所以 $\alpha_4 = 2\alpha_1 - 3\alpha_2 + \alpha_3$.

【或者极大无关组为 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_4$， $\alpha_3 = -2\alpha_1 + 3\alpha_2 - \alpha_4$】

五、（本题满分 12 分）

解：$|A| = \begin{vmatrix} 2-\lambda & 2 & -2 \\ 2 & 5-\lambda & -4 \\ 2 & 4 & \lambda-5 \end{vmatrix} = (\lambda-1)^2(\lambda-10)$

① 当 $\lambda \neq 1$ 且 $\lambda \neq 10$ 时，$|A| \neq 0$，方程组有唯一解。

② 当 $\lambda = 1$ 时，$(A,b) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 & 1 \\ 2 & 4 & -4 & 2 \\ 2 & 4 & -4 & 2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$，$r(A) = (A,b) = 1 < 3$，所以方程组有无穷多解，$Ax = 0$ 的基础解系为 $\xi_1 = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \xi_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$，$Ax = b$ 的特解为 $\eta = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$，

所以通解为 $x = k_1\xi_1 + k_2\xi_2 + \eta$，$k_1,k_2$ 为任意实数.

③ 当 $\lambda = 10$ 时，$(A,b) = \begin{pmatrix} -8 & 2 & -2 & 1 \\ 2 & -5 & -4 & 2 \\ 2 & 4 & 5 & 11 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 2 & 4 & 5 & 11 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$，$r(A) \neq (A,b)$，所以方程组无解.

六、（本题满分 10 分）

解：设 $\lambda_2 = \lambda_3 = 1$ 对应的特征向量为 $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$，

由于 A 为实对称矩阵，所以不同特征值对应的特征向量正交，

故 $x_2 + x_3 = 0$，

取 $\alpha_2=\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}$，$\alpha_3=\begin{pmatrix}0\\1\\-1\end{pmatrix}$

从而 A 的特征值 $\lambda_1=-1,\lambda_2=\lambda_3=1$，对应的特征向量为 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$.

进一步令 $P=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)=\begin{pmatrix}0&1&0\\1&0&1\\1&0&-1\end{pmatrix}$，$\Lambda=\begin{pmatrix}-1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$，且 $P^{-1}=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}0&1&1\\2&0&0\\0&1&-1\end{pmatrix}$，

又 A 为实对称矩阵，所以 A 可对角化，即 $P^{-1}AP=\Lambda$，

所以 $A=P\Lambda P^{-1}=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&0&-1\\0&-1&0\end{pmatrix}$.

七、（本题满分 12 分）

解：$A=\begin{pmatrix}2&5&0\\5&2&0\\0&0&6\end{pmatrix}$，

$$|A-\lambda E|=\begin{vmatrix}2-\lambda&5&0\\5&2-\lambda&0\\0&0&6-\lambda\end{vmatrix}=(6-\lambda)(\lambda+3)(\lambda-7)=0,$$

解得特征值为 $\lambda_1=-3,\lambda_2=6,\lambda_3=7$.

$\lambda_1=-3$，$A+3E\sim\begin{pmatrix}1&1&0\\0&0&1\\0&0&0\end{pmatrix}$，基础解系为 $\xi_1=\begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix}$，单位化 $e_1=\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt2}\\\frac{-1}{\sqrt2}\\0\end{pmatrix}$，

$\lambda_2=6$，$A-6E\sim\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&0\end{pmatrix}$，基础解系为 $\xi_2=\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$，单位化 $e_2=\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$，

$\lambda_3=7$，$A-7E\sim\begin{pmatrix}1&-1&0\\0&0&1\\0&0&0\end{pmatrix}$，基础解系为 $\xi_2=\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}$，单位化 $e_3=\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt2}\\\frac{1}{\sqrt2}\\0\end{pmatrix}$，

取 $P=(e_1,e_2,e_3)=\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt2}&0&\frac{1}{\sqrt2}\\-\frac{1}{\sqrt2}&0&\frac{1}{\sqrt2}\\0&1&0\end{pmatrix}$，

令 $x=Py$，可化二次型为标准形 $f=-3y_1^2+6y_2^2+7y_3^2$.

八、（本题满分 6 分）

证法一：由题意可知，方程组的基础解系为 3 个线性无关的解.

因为 β_1,β_2,β_3 为 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 的线性组合，所以 β_1,β_2,β_3 为 3 个解.

又 $(\beta_1,\beta_2,\beta_3)=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)\begin{pmatrix}1&0&1\\1&1&0\\0&1&1\end{pmatrix}$，并且 $\begin{vmatrix}1&0&1\\1&1&0\\0&1&1\end{vmatrix}=2\neq0$

所以 β_1,β_2,β_3 线性无关，从而 β_1,β_2,β_3 为方程组的 3 个无关的解，

故 β_1,β_2,β_3 可作为该方程组的基础解系.

证法二：【线性无关的证明】$k_1\beta_1+k_2\beta_2+k_3\beta_3=0$，

即 $k_1(\alpha_1+\alpha_2)+k_2(\alpha_2+\alpha_3)+k_3(\alpha_1+\alpha_3)=0$，重组可得 $(k_1+k_3)\alpha_1+(k_1+k_2)\alpha_2+(k_2+k_3)\alpha_3=0$，

因为 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 线性无关，所以 $\begin{cases}k_1+k_3=0\\k_1+k_2=0\\k_2+k_3=0\end{cases}$，可解得 $k_1=k_2=k_3=0$，

从而 β_1,β_2,β_3 线性无关.