班级________________姓名________________ 学号________________

第一章 函数

1．设函数 $f(x)=\begin{cases}2+x, x\le 0,\\ 2^x, \quad x>0,\end{cases}$，求

（1） $f(-1)$， $f(0)$， $f(1)$；

（2） $\dfrac{f(\Delta x)-f(0)}{\Delta x}$， $\dfrac{f(-\Delta x)-f(0)}{\Delta x}$ （$\Delta x>0$）.

2．已知 $f\left(\dfrac{1}{x}\right)=x+\sqrt{1+x^2}$，求 $f(x)$.

3．设 $f(x)$ 在 $[-a,a]$ 上是奇函数，证明：若 $f(x)$ 在 $[0,a]$ 上递增，则 $f(x)$ 在 $[-a,0]$ 上也递增.

班级________________姓名________________ 学号________________

4．利用均值不等式证明：$\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^{n}<\left(1+\dfrac{1}{n+1}\right)^{n+1}$（$n=1,2,\cdots$）.

5．求证：$\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^{n}<3$（$n=1,2,\cdots$）.

班级________________姓名________________ 学号________________

第二章 极限与连续

习题 $2-1,2,3$　数列的极限 函数的极限 极限的性质

1．求下列极限：

(1) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(-2)^n+3^n}{(-2)^{n+1}+3^{n+1}}$；

(2) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1-\dfrac{1}{2^2}\right)\left(1-\dfrac{1}{3^2}\right)\cdots\left(1-\dfrac{1}{n^2}\right)$；

(3) $\lim\limits_{n\to\infty}\left[(1+r)(1+r^2)\cdots\left(1+r^{2^n}\right)\right]$　$(|r|<1)$；

(4) $\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt{x}\left(\sqrt{x+1}-\sqrt{x}\right)$；

班级________________姓名________________ 学号________________

(5) $\lim\limits_{x\to -1}\left(\dfrac{3}{x^3+1}-\dfrac{1}{x+1}\right)$.

2．求常数 a 和 b，使得 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{ax+b}-2}{x}=1$.

3．若 $f(x)=\dfrac{1+e^{\frac{1}{x}}}{1-e^{\frac{1}{x}}}$，求 $\lim\limits_{x\to 0^-}f(x)$，$\lim\limits_{x\to 0^+}f(x)$，$\lim\limits_{x\to 0}f(x)$.

班级________________姓名________________　学号________________

习题2－4　无穷小、无穷大

1．利用等价无穷小的代换求下列极限：

(1) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\tan(2x)\cdot\ln(1+x)}{\sin(3x)\cdot\arctan(2x)}$；

(2) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{2}-\sqrt{1+\cos x}}{\sin^2 x}$；

(3) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos(\sin x)}{x^2}$．

2．设 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{\ln(1+2x)}{x}, & x>0,\\ \dfrac{\sqrt{a+x}-\sqrt{a-x}}{x}, & -1\le x<0,\end{cases}$ 确定正数 a 的值，使得 $\lim\limits_{x\to 0}f(x)$ 存在.

班级________________姓名________________　学号________________

习题2－5　极限的存在准则

1．计算下列极限：

(1) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\tan x-\sin x}{x^3}$；

(2) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{\sin(x-2)}{x^2-4}$；

(3) $\lim\limits_{x\to \infty}\left(\dfrac{x-2}{x}\right)^x$；

(4) $\lim\limits_{x\to \infty}\left(\dfrac{x^2+1}{x^2-1}\right)^{x^2}$.

班级________________姓名________________ 学号________________

2．设 $x_1 = 10,\ x_{n+1} = \sqrt{6 + x_n}\ (n = 1,2,3,\cdots)$，试证数列 $\{x_n\}$ 的极限存在，并求此数列极限.

班级________________姓名________________ 学号________________

习题 2－6　连续函数及其性质

1．求函数 $f(x)=\dfrac{1}{1-e^{\frac{x}{1-x}}}$ 的间断点，并说明其类型.

2．设 $f(x)=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1-x^{2n}}{1+x^{2n}}x$，试求函数 $f(x)$ 的表达式，若有间断点，并说明其类型.

3．设 $f(x)=\begin{cases} x\cos\dfrac{1}{x}, & x>0, \\ a+x^2, & x\le 0, \end{cases}$ 要使 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内连续，确定常数 a .

班级________________姓名________________ 学号________________

4．讨论 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{\sin x}{x}, & x<0,\\ 1, & x=0,\\ \dfrac{2(\sqrt{1+x}-1)}{x}, & x>0\end{cases}$ 的连续性.

5．求下列极限：

(1) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1+\alpha x)}{x}$ (α 为非零常数)；

(2) $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{\sin x-\sin a}{x-a}$；

(3) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{\alpha x}-e^{\beta x}}{x}$（$\alpha,\beta$ 为常数，且 $\alpha\neq\beta$）.

6．设函数 $f(x)$ 在 $\left[0,2\pi\right]$ 上连续，且 $f(0)=f(2\pi)$，证明在 $\left[0,\pi\right]$ 上至少存在一点 ξ，使得 $f(\xi)=f(\xi+\pi)$.

班级＿＿＿＿＿＿＿＿姓名＿＿＿＿＿＿＿＿　学号＿＿＿＿＿＿＿＿

第三章　导数与微分

习题 3－1　导数的概念

1．求曲线 $y = x - \dfrac{1}{x}$ 在点 $\left(\dfrac{1}{2}, -\dfrac{3}{2}\right)$ 处的切线方程与法线方程.

2．若函数 $f(x)$ 可导，求 $\lim\limits_{n \to \infty} n\left[f(x+\dfrac{a}{n}) - f(x-\dfrac{b}{n}) \right]$ $(a, b \neq 0)$.

班级________________姓名________________ 学号________________

3．讨论函数 $f(x)=|\sin x|$ 在点 $x=0$ 处的连续性与可导性.

班级________________姓名________________　学号________________

习题3－2　求导的运算法则

1．求下列函数的导数：

(1) $y=\ln x-2\lg x+3\log_2 x$；

(2) $y=2^x(x\sin x+\cos x)$；

(3) $y=\dfrac{x-1}{x^2+1}$；

(4) $y=\dfrac{\sec x}{1+\tan x}$；

班级________________姓名________________　学号________________

(5) $y=\ln\sqrt{\dfrac{a-x}{a+x}}$；

(6) $y=e^{\sin^2\frac{1}{x}}$；

(7) $y=\dfrac{x}{2}\sqrt{x^2-a^2}-\dfrac{a^2}{2}\ln\left(x+\sqrt{x^2-a^2}\right)$；

(8) $y=\arctan\dfrac{x}{a+\sqrt{a^2-x^2}}$.

班级________________姓名________________　学号________________

2．设 $f(x)$ 可导，求函数 $y=\dfrac{x^2}{f(x)}$ 的导数.

3．设 $f(x)$ 满足 $f(x)+2f\left(\dfrac{1}{x}\right)=\dfrac{3}{x}$，求 $f'(x)$.

4．已知 $y=\sin(x^2)$，求 $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x},\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}\left(x^2\right)},\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}\left(x^3\right)}$.

班级________________姓名________________　学号________________

习题3－3　高阶导数

1．设 $y = \ln\sec x$，求 y'''．

2．设 $f(x) = g\left(\sqrt{x}\right)$，其中 g 是二阶可导函数，试求 $f''(x)$．

3．求下列函数的 n 阶导数 $y^{(n)}$：

(1) $y = \dfrac{1}{x^2 - 3x + 2}$；

(2) $y = \sin^2 x$．

班级________________姓名________________ 学号________________

习题3－4 隐函数与参变量函数的求导方法

1．求下列函数的导数$\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$：

(1)$xy = e^{x+y}$；　　　　(2)$x^{y} = y^{x}$.

2．证明：双曲线$xy = a^{2}$上任一点处的切线与两坐标轴围成的三角形的面积都等于$2a^{2}$.

3．设$y = 1 + xe^{y}$，求$\left.\dfrac{\mathrm{d}^{2}y}{\mathrm{d}x^{2}}\right|_{x=0}$.

班级________________姓名________________　学号________________

4. 设$\begin{cases} x = f'(t), \\ y = tf'(t) - f(t), \end{cases}$其中 $f(t)$ 二阶可导，且 $f''(t) \neq 0$，求$\dfrac{\mathrm{d}^2 y}{\mathrm{d}x^2}$.

5．设$\begin{cases} x = \ln\sqrt{1+t^2}, \\ y = \arctan t, \end{cases}$求$\dfrac{\mathrm{d}^2 y}{\mathrm{d}x^2}$.

6．求曲线$\begin{cases} x + t(1-t) = 0, \\ te^y + y + 1 = 0 \end{cases}$在对应于$t = 0$的点处的切线方程.

班级________________姓名________________ 学号________________

第四章 导数的应用

习题 4－1 微分中值定理

1．证明：$\arctan x + \operatorname{arc}\cot x = \dfrac{\pi}{2}$.

2．设函数 $f(x)$ 在 $\left[a,b\right]$ 上连续，在 $\left(a,b\right)$ 内可导．证明：至少存在一点 $\xi \in \left(a,b\right)$ ，使得

$$\frac{bf(b)-af(a)}{b-a} = f(\xi)+\xi f'(\xi) .$$

3．若 $f(x)$ 在 $\left[a,b\right]$ 上二阶可导，且 $f(x_1) = f(x_2) = f(x_3)$ ，其中 $a < x_1 < x_2 < x_3 < b$ ，证明：在 (a,b) 内至少存在一点 c ，使得 $f''(c) = 0$.

班级＿＿＿＿＿＿＿＿姓名＿＿＿＿＿＿＿＿　学号＿＿＿＿＿＿＿＿

习题4－2　洛必达（L′Hospital）法则

1．求下列极限：

(1) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x-\sin x}{x^3}$；

(2) $\lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{x^2+\ln x}{x\ln x}$；

(3) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1}{x^2}-\dfrac{1}{x\tan x}\right)$；

(4) $\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{\ln(\tan ax)}{\ln(\tan bx)}\quad (a>0, b>0)$；

班级________________姓名________________ 学号________________

(5) $\lim\limits_{x\to\infty} x\left(a^{\frac{1}{x}}-b^{\frac{1}{x}}\right) \quad (a>0,\ b>0)$；

(6) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{a^x+b^x}{2}\right)^{\frac{2}{x}}\ (a>0, b>0)$.

2．若 $f(0)=0$， $f'(x)$ 在点 $x=0$ 的某邻域内连续，且 $f'(0)\neq 0$，试求 $\lim\limits_{x\to 0^+} x^{f(x)}$.

班级________________姓名________________　学号________________

习题4－3　Taylor 中值定理

1．写出 $f(x)=x^2\ln x$ 在 $x_0=1$ 处的四阶泰勒展开式.

2．写出 $f(x)=xe^{-x}$ 的 n 阶麦克劳林公式.

班级________________姓名________________　学号________________

习题4－4　函数的单调性与极值

1．求函数$\varphi(x)=x^{x}(1-x)^{(1-x)}$在$0<x<1$内的极值．

2．求函数$f(x)=(x-5)\cdot\sqrt[3]{x^{2}}$在$[-1,4]$上的最大值和最小值．

班级________________姓名________________　学号________________

3．在抛物线 $y=1-x^2\left(0<x<1\right)$ 上找一点 $M(\xi,\eta)$，过 M 作抛物线的切线，使由此切线与两坐标轴围成的图形面积最小.

4．在半径为 R 的球内作一内接圆锥体，要使锥体体积最大，问其高、底半径应是多少？

班级________________姓名________________ 学号________________

习题 4－5 函数的凹凸性与曲线的拐点

讨论曲线 $y = x + \dfrac{x}{x^2 - 1}$ 的凹凸性及拐点.

习题 4－6 曲线整体形状的研究

描绘函数 $y = \dfrac{2x^2}{(1-x)^2}$ 的图形.

班级________________姓名________________　学号________________

习题4－7　导数在不等式证明中的应用

1．证明：当$0 < x < \dfrac{\pi}{2}$时，有$\sin x + \tan x > 2x$．

2．设$a > b > 0$，$n > 1$，证明：$nb^{n-1}(a-b) < a^n - b^n < na^{n-1}(a-b)$．

3．证明：当$x \geq 0$时，$nx^{n-1} - (n-1)x^n \leq 1$（正整数$n > 1$）．

班级________________姓名________________ 学号________________

第五章 不定积分与定积分

习题5－1 定积分的概念与性质

1．利用定积分的几何意义（面积）计算下列定积分：

(1)$\int_0^2 x\,\mathrm{d}x$；

(2)$\int_0^1 \sqrt{1-x^2}\,\mathrm{d}x$.

2．比较定积分$\int_1^2 \ln x\,\mathrm{d}x$与$\int_1^2 (\ln x)^2\,\mathrm{d}x$的大小.

3．设 $f(x)$ 为连续函数，且 $f(x)=x+2\int_0^2 f(x)\,\mathrm{d}x$，求 $f(x)$.

班级________________姓名________________ 学号________________

习题 5－2 微积分基本公式

1．求函数 $\Phi(x)=\int_0^x xe^{-x}\,\mathrm{d}x$ 的极值.

2. 求下列极限：

(1) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\int_0^x \cos t^2\,\mathrm{d}t}{x}$；

(2) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\int_{\cos x}^1 e^{-t^2}\,\mathrm{d}t}{x^2}$.

3. 设 $f(x)=\begin{cases} x^2, & 0\le x<1, \\ 1, & 1\le x\le 2, \end{cases}$ 求函数 $\Phi(x)=\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t$ 在 $[0,2]$ 上的表达式，并讨论 $\Phi(x)$ 在 $(0,2)$ 内的连续性.

班级________________姓名________________ 学号________________

4．计算下列定积分：

(1)$\int_{1}^{3}\sqrt{x^2-4x+4}\,\mathrm{d}x$；

(2)$\int_{0}^{\pi}\sqrt{\sin x-\sin^3 x}\,\mathrm{d}x$；

(3)$\int_{-2}^{4}e^{|x|}\,\mathrm{d}x$；

(4) 设 $f(x)=\dfrac{3x-1}{x^2+1}$，计算 $\int_{0}^{2}\dfrac{f'(x)}{1+f^2(x)}\,\mathrm{d}x$.

班级________________姓名________________　学号________________

习题5－3　不定积分的概念与性质

求下列不定积分：

1. $\int \tan^2 x \, \mathrm{d}x$.

2. $\int \dfrac{2x^4}{1+x^2} \, \mathrm{d}x$.

3. $\int \dfrac{1}{\sin^2 x \cdot \cos^2 x} \, \mathrm{d}x$.

4. $\int \dfrac{1-\cos x}{1-\cos 2x} \, \mathrm{d}x$.

班级________________姓名________________ 学号________________

习题5－4 换元积分法

1．求下列不定积分：

(1) $\int xe^{-x^2}\,\mathrm{d}x$；

(2) $\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x(4-x)}}$；

(3) $\int \frac{\mathrm{d}x}{x\sqrt{1+\ln x}}$；

(4) $\int \frac{x^3}{\sqrt{1+x^2}}\,\mathrm{d}x$；

班级________________姓名________________ 学号________________

(5) $\int \frac{\tan x}{\sqrt{\cos x}}\,\mathrm{d}x$；

(6) $\int \frac{1}{1+e^x}\,\mathrm{d}x$；

(7) $\int \frac{1}{x^2}\sin\frac{1}{x}\,\mathrm{d}x$；

(8) $\int \frac{\mathrm{d}x}{e^x+e^{-x}}$；

班级________________姓名________________ 学号________________

(9) $\int \frac{\mathrm{d}x}{(2-x)\sqrt{1-x}}$；

(10) $\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{\left(a^2-x^2\right)^3}}$；

(11) $\int \sqrt{e^x-1}\,\mathrm{d}x$；

班级________________姓名________________　学号________________

(12) $\int \frac{\mathrm{d}x}{x\sqrt{x^2-1}}$.

(13) $\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{1+x-x^2}}$.

2. 求$\int_1^4 f(x-2)\,\mathrm{d}x$，其中 $f(x)=\begin{cases} xe^{-x^2}, & x \ge 0, \\ \dfrac{1}{1+\cos x}, & -1<x<0. \end{cases}$

班级________________姓名________________ 学号________________

3．证明：$\int_0^{\pi} \sin^n x \, \mathrm{d}x = 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x \, \mathrm{d}x$.

4．计算下列定积分：

(1)$\int_1^4 \frac{1}{1+\sqrt{x}} \, \mathrm{d}x$;

(2)$\int_1^{\sqrt{3}} \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{\left(1+x^2\right)^3}}$;

班级________________姓名________________ 学号________________

习题5－5 分部积分法

1．求下列不定积分：

(1) $\int \dfrac{\ln x}{\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x$；

(2) $\int x f''(x)\,\mathrm{d}x$（其中 $f(x)$ 二阶可导）；

(3) $\int x \cdot \arctan x\,\mathrm{d}x$；

(4) $\int \dfrac{x}{1+\cos 2x}\,\mathrm{d}x$；

班级________________姓名________________　学号________________

(5) $\int \ln\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)\mathrm{d}x$.

2．计算下列定积分：

(1)$\int_0^1 x^3 e^{x^2}\ \mathrm{d}x$ ；

(2)$\int_0^1 \arctan x\ \mathrm{d}x$ ；

(3)$\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{x\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}}\ \mathrm{d}x$.

班级________________姓名________________ 学号________________

3．设 $\dfrac{\sin x}{x}$ 是 $f(x)$ 的一个原函数，计算 $\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} x\, f'(x)\, \mathrm{d}x$.

4．若 $f(x)$ 为连续的偶函数，证明 $\int_{0}^{x} f(t)\, \mathrm{d}t$ 为奇函数.

班级________________姓名________________ 学号________________

习题5－6 有理函数的积分及应用

求下列不定积分：

1. $\int \frac{x^3}{1+x^2}\,\mathrm{d}x$.

2. $\int \frac{x-2}{x^2-2x+5}\,\mathrm{d}x$.

3. $\int \frac{1}{1+\sin x}\,\mathrm{d}x$.

4. $\int \frac{1}{\cos^4 x}\,\mathrm{d}x$.

班级________________姓名________________　学号________________

习题5－7　广义积分

计算下列广义积分：

1.$\int_{1}^{+\infty} \frac{\ln x}{x^2}\,\mathrm{d}x$.

2.$\int_{0}^{+\infty} xe^{-x}\,\mathrm{d}x$.

3.$\int_{1}^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{x\left(1+x^2\right)}$.

4.$\int_{\frac{1}{2}}^{1} \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x-x^2}}$.

班级________________姓名________________ 学号________________

第六章 定积分的应用

1．假设曲线 $y=1-x^2\ (0\le x\le 1)$，x 轴，y 轴所围区域被曲线 $y=ax^2\ (a>0)$ 分成面积相等的两部分，求 a 的值.

2．求双纽线 $r^2=\cos 2\theta$ 围成平面图形的面积.

3．求圆 $x^2+(y-2)^2=1$ 围成的区域绕 x 轴旋转而成的旋转体的体积.

班级________________姓名________________ 学号________________

4．圆柱形水桶高10米，底面半径为3米，桶内盛满了水，问要把桶内的水全部抽完需做多少功？（取重力加速度$g=10$）

5．一底为b，高为h的对称抛物线拱形闸门，其底平行于水面，距水面为h（即顶与水面齐）。闸门垂直放在水中，求闸门所受的压力。若底与高之和为常数，即$b+h=l$（为常数），问高和底各为多少时，闸所受的压力最大？

班级_________________姓名_________________ 学号_________________

第七章　常微分方程

习题7－2　一阶微分方程的常见类型及解法

1．解下列微分方程的通解：

（1）$2xy^2\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}-x^3\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=2y^3$；

（2）$(y+x^2e^{-x})\mathrm{d}x-x\mathrm{d}y=0$.

2．若连续函数 $f(x)$ 满足 $f(x)=\int_0^{2x} f\left(\frac{t}{2}\right)\mathrm{d}t+\ln 2$，求 $f(x)$.

3．设曲线 L 位于 xOy 平面的第一象限内，L 上任意一点 M 处的切线与 y 轴总相交，交点记为 A，已知 $\left|\overline{MA}\right|=\left|\overline{OA}\right|$，且 L 过点 $\left(\frac{3}{2},\frac{3}{2}\right)$，求 L 的方程.

班级________________姓名________________ 学号________________

习题7－3 二阶线性微分方程理论及解法

设函数 $f(x)$ 二阶可导，$f'(x)$ 是 $f'(x)+2f(x)+e^x$ 的一个原函数，且 $f(0)=0$，$f'(0)=1$，求 $f(x)$．

班级________________姓名________________ 学号________________

习题 7－4 其它若干类型的高阶微分方程及解法

1．求解下列初值问题：$\begin{cases}\left(1+x^{2}\right)y''=2xy', \\ y\big|_{x=0}=1,\ y'\big|_{x=0}=3.\end{cases}$

2．求微分方程 $yy''=2y'^{2}$ 的通解．

班级________________姓名________________ 学号________________

第八章 向量与空间解析几何

习题8−1 向量及其线性运算

1．已知两点 $B\left(2,2,\sqrt{2}\right)$ 和 $A\left(1,3,0\right)$．求

（1）$\overline{AB}$ 的模；（2）与 $\overline{AB}$ 平行的单位向量；（3）$\overline{AB}$ 的方向角.

2．已知向量 $\overline{\alpha}$ 的两个方向余弦为 $\cos\alpha=\dfrac{2}{7}$，$\cos\beta=\dfrac{3}{7}$，且 $\overline{\alpha}$ 与 z 轴的方向角为钝角，求 $\cos\gamma$.

3．已知 $\overrightarrow{\alpha}=x\vec{i}+5\vec{j}-\vec{k}$，$\overrightarrow{\beta}=3\vec{i}+\vec{j}+z\vec{k}$，且 $\overrightarrow{\alpha}\parallel\overrightarrow{\beta}$，求 x,z .

班级________________姓名________________ 学号________________

习题8－2 向量的乘积

1．设$\vec{a}=3\vec{i}-\vec{j}-2\vec{k}$，$\vec{b}=\vec{i}+2\vec{j}-\vec{k}$，求

（1）$\vec{a}\cdot\vec{b}$及$\vec{a}\times\vec{b}$；

（2）$(-2\vec{a})\cdot(3\vec{b})$及$\vec{a}\times 2\vec{b}$；

（3）$\vec{a}$与$\vec{b}$夹角的余弦；

（4）以$\vec{a}$，$\vec{b}$为邻边的平行四边形面积；

（5）既垂直于$\vec{a}$又垂直于$\vec{b}$的一个向量；

（6）$\vec{a}\cdot(\vec{b}\times\vec{a})$．

2．设$\vec{a},\vec{b},\vec{c}$均为单位向量，且满足$\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}=\vec{0}$，求$\vec{a}\cdot\vec{b}+\vec{b}\cdot\vec{c}+\vec{c}\cdot\vec{a}$．

班级________________姓名________________ 学号________________

习题8－3 空间曲面

1．求以点$A(3,2,1)$为球心，且与平面$x+2y-3z=18$相切的球面方程.

2．一平面过原点且平行于向量$\vec{\alpha}=\vec{i}+2\vec{k}$和$\vec{b}=3\vec{i}-\vec{j}+\vec{k}$，求此平面方程.

3．已知曲线$\begin{cases} y^2=2z, \\ x=0, \end{cases}$求此曲线分别绕$y$轴、$z$轴旋转而成的旋转曲面方程.

班级________________姓名________________ 学号________________

4．求平面 $2x-2y+z+5=0$ 与各坐标面间夹角的余弦.

5．一平面过两点 $P_1(1,1,1)$ 和 $P_2(0,1,-1)$ 且垂直于平面 $x+y+z=0$，求它的方程.

班级________________姓名________________　学号________________

习题8－4　空间曲线

1．求过点 $(1,1,1)$ 且平行于直线 $\begin{cases} x-4z=3, \\ 2x-y-5z=1 \end{cases}$ 的直线方程.

2．求直线 $\dfrac{x-1}{1}=\dfrac{y}{1}=\dfrac{z-1}{-1}$ 在平面 $x-y+2z-1=0$ 上的投影直线方程.

班级________________姓名________________　学号________________

3．一直线 L 过点 $A(1,2,1)$，与直线 $\frac{x}{2}=\frac{y}{1}=\frac{z}{-1}$ 相交，且垂直于直线 $\frac{x-1}{3}=\frac{y}{2}=\frac{z+1}{1}$，求直线 L 的方程．

4．求曲面 $x^2+y^2+z^2=2$ 和 $z=x^2+y^2$ 的交线在 xOy 面上投影柱面和投影曲线的方程，并作图．

班级________________姓名________________ 学号________________

第九章 多元函数微分学

习题9－2 二元函数的极限与连续性

1．求下列函数的极限：

（1）$\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\dfrac{x+y}{\sqrt{x+y+1}-1}$；（2）$\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to a}}(1+x)^{\frac{1}{\tan(xy)}}(a\neq 0)$．

2．验证下列极限不存在：

（1）$\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\dfrac{x^2y}{x^4+y^2}$．（2）$\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\dfrac{x^2+y^2}{x^2y^2+(2x+y)^2}$．

3．下列函数在何处间断：

（1）$z=\dfrac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}$；（2）$z=\dfrac{1}{y^2-2x}$．

班级________________姓名________________　学号________________

习题 9－3,4　偏导数与全微分

1．求下列函数的偏导数：

（1） $z = x + y - \sqrt{x^2 + y^2}$；　　（2） $u = \arctan(x-y)^z$．

2．已知 $f(x,y) = y^2 + (x-2)\arccos\sqrt{\dfrac{y}{x}}$，求 $f_y(2,y)$．

3．设 $z = y^{\ln x}$，求 z''_{xx}, z''_{xy}.

班级________________姓名________________ 学号________________

4．验证函数 $z=xy+xe^{\frac{y}{x}}$ 满足方程 $x\frac{\partial z}{\partial x}+y\frac{\partial z}{\partial y}=xy+z$.

5．求下列函数的全微分：

（1） $z=\arctan\frac{x+y}{x-y}$ ；

（2） $u=\ln\left(x^2-y^2+e^z\right)$.

班级________________姓名________________ 学号________________

习题9－5 多元复合函数的求导法则

1. 设 $z=\sin(2u+3v)$，$u=xy$，$v=x^2+y^2$，求 $\frac{\partial z}{\partial x},\frac{\partial z}{\partial y}$.

2. 设 $u=x^kF\left(\frac{z}{x},\frac{y}{x}\right)$，$k$ 为常数，F 具有一阶连续的偏导数，证明：

$$x\frac{\partial u}{\partial x}+y\frac{\partial u}{\partial y}+z\frac{\partial u}{\partial z}=ku\ .$$

3. 设 $z=f\left(xy,\frac{x}{y}\right)+g\left(\frac{y}{x}\right)$,其中 f 具有二阶连续偏导数, g 具有二阶连续导数,求 $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$.

4．设 $z=\dfrac{y}{f\left(x^2-y^2\right)}$，其中 f 可微，求 $\dfrac{1}{x}z'_x+\dfrac{1}{y}z'_y$.

5．设变换 $\begin{cases}u=x-2y,\\ v=x+ay\end{cases}$ 可把方程 $6\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}-\dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2}=0$ 简化为 $\dfrac{\partial^2 z}{\partial u\partial v}=0$，其中 z 的二阶偏导连续，求常数 a .

班级＿＿＿＿＿＿＿＿＿姓名＿＿＿＿＿＿＿＿＿ 学号＿＿＿＿＿＿＿＿＿

习题 9－6 隐函数的微分法

1．设 z 是由方程 $x+y-z=e^z$ 所确定的 x 与 y 的隐函数，求 $\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}$.

2．设 F 是任意可微函数，证明：由方程 $ax+by+cz=F\left(x^2+y^2+z^2\right)$ 所确定的隐函数满足等式 $(cy-bz)\frac{\partial z}{\partial x}+(az-cx)\frac{\partial z}{\partial y}=bx-ay$.

3．设 $z=\varphi(u,v)$，φ 具有一阶连续的偏导数，且 u,v 是由方程组 $\begin{cases} x=e^u\cos v, \\ y=e^u\sin v \end{cases}$ 确定的 x,y 的函数，求 $\frac{\partial z}{\partial x}$.

班级________________姓名________________ 学号________________

4．设$\begin{cases} u = u(x, y), \\ v = v(x, y) \end{cases}$是由方程组$\begin{cases} u^2 - v + x = 0, \\ u + v^2 - y = 0 \end{cases}$确定的$x, y$的隐函数，求$\dfrac{\partial u}{\partial x}, \dfrac{\partial v}{\partial y}$.

5．设$y = g(x, z)$，而z是由方程$f(x - z, xy) = 0$确定的x, y的函数，其中g, f一阶偏导连续，$f_1' - x f_2' g_2' \neq 0$，求$\dfrac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x}$.

班级________________姓名________________　学号________________

习题9－7　方向导数和梯度

1．求 $z = xe^{xy}$ 在 $M_0(-2,0)$ 点沿 M_0 到 $M_1(-1,3)$ 方向的方向导数．

2．设 $z = f(x,y)$ 在点 $P_0(2,0)$ 可微，且在该点处指向 $P_1(2,-2)$ 的方向导数为 1，指向原点的方向导数为 -3，求指向 $P_2(4,2)$ 的方向导数．

3. 求函数 $f(x,y) = e^{\frac{y}{x}}$ 在 $M_0(1,2)$ 处的梯度．

4．设 $u(x,y,z) = \dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} + \dfrac{z^2}{c^2}$，问 $u(x,y,z)$ 在点 (x,y,z) 处朝何方向的方向导数最大？并求该方向的方向导数．

班级________________姓名________________ 学号________________

习题9－9 多元函数的极值

1．求函数 $z=e^{2x}(x+y^2+2y)$ 的极值.

2．求函数 $z=xy(4-x-y)$ 在 $x=0$，$y=0$ 及 $x+y=6$ 围成的区域上的最大值及最小值.

3．从斜边长为 l 的直角三角形中求有最大周长的直角三角形.

班级________________姓名________________ 学号________________

4．作一个长方体的箱子，其容积为$9/2m^3$．箱子的盖及侧面造价均为每平方米8元，箱底造价均为每平方米1元，试求造价最低的箱子尺寸.

5. 抛物面$z=x^2+y^2$被平面$x+y+z=1$截成一椭圆,求原点到这椭圆的最长及最短距离.

班级________________姓名________________ 学号________________

习题9－10 多元函数微分学的几何应用

1．求曲线$\begin{cases}2x^2+3y^2+4z^2=18,\\ x+2y-4z=1\end{cases}$在点$(1,2,1)$处的切线及法平面方程.

2．在曲面$z=xy$上求一点，使该点处的法线垂直于平面$x+3y+z=0$，并写出这法线的方程.

班级________________姓名________________　学号________________

3．证明：曲面 $xyz=a^3(a>0)$ 上任一点的切平面与三个坐标轴所围成的四面体的体积为一个定值.

4. 设直线 $l:\begin{cases}x+y+b=0,\\x+ay-z-3=0\end{cases}$ 在平面 π 上，而平面 π 与曲面 $z=x^2+y^2$ 相切于点 $(1,-2,5)$，求 a,b 的值.

班级________________姓名________________ 学号________________

第十章 重积分

习题10－2(1) 利用直角坐标系计算二重积分

1．计算下列二重积分：

（1）$\iint\limits_{D} \sin(x+y)\,\mathrm{d}\sigma$，$D$ 是由 $y=0$，$y=x$ 及 $x=\pi$ 围成的三角形区域；

（2）$\iint\limits_{D} \dfrac{y}{x^2+y^2}\,\mathrm{d}\sigma$，$D$ 是由 $y^2=x$，$y=x$ 及 $y=\sqrt{3}$ 围成的区域；

（3）$\iint\limits_{D} \left|\cos(x+y)\right|\,\mathrm{d}\sigma$，$D$ 是由 $x=0$，$x=\dfrac{\pi}{2}$ 及 $y=0$，$y=\dfrac{\pi}{2}$ 围成的正方形区域.

班级________________姓名________________ 学号________________

2．计算下列二重积分，必要时交换积分次序：

（1）$\int_{0}^{2\pi} \mathrm{d}y \int_{y}^{\sqrt{2\pi y}} \frac{\sin x}{x} \mathrm{d}x$；

（2）$\int_{0}^{a} \mathrm{d}x \int_{x}^{a} e^{y^2} \mathrm{d}y$.

3．交换下列积分次序：

（1）$\int_{1}^{e} \mathrm{d}x \int_{0}^{\ln x} f(x,y) \mathrm{d}y$；

（2）$\int_{-6}^{2} \mathrm{d}x \int_{\frac{x^2}{4}-1}^{2-x} f(x,y) \mathrm{d}y$.

班级________________姓名________________ 学号________________

习题10－2(2) 利用极坐标系计算二重积分

1．利用极坐标系计算下列二重积分：

（1）$\iint\limits_D \frac{xy}{x^2+y^2}\,\mathrm{d}\sigma$，$D$：$y \ge x$，$1 \le x^2+y^2 \le 2$；

（2）$\iint\limits_D |xy|\,\mathrm{d}\sigma$，$D$：$x^2+y^2 \le 2x$．

2．求由曲面 $z=2-x^2$，$z=x^2+2y^2$ 所围成的立体的体积.

3．求 $\iint\limits_D xy\sqrt{1-x^2-y^2}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$，$D$ 是由 $x^2+y^2 \le 1$，$x \ge 0$ 及 $y \ge 0$ 围成的区域;

班级________________姓名________________ 学号________________

习题10－3 三重积分的计算

1．计算下列三重积分：

（1）$\iiint\limits_{\Omega} yz\,\mathrm{d}v$，其中$\Omega$是由$z=0, z=x, x=1$及抛物柱面$y^2=x$所围成的闭区域；

（2）$\iiint\limits_{\Omega} \sqrt{x^2+y^2+z^2}\,\mathrm{d}v$，其中$\Omega$是由曲面$x^2+y^2+z^2=z$所围成的立体区域；

（3）$\iiint\limits_{\Omega} z\,\mathrm{d}v$，其中$\Omega$是由球面$z=\sqrt{4-x^2-y^2}$与抛物面$z=\frac{1}{3}\left(x^2+y^2\right)$所围成的立体区域．

2．求曲面$x^2+y^2=2ax$，$z=\alpha x$，$z=\beta x$（$\alpha>\beta>0$，$a>0$）所围成的立体体积．

班级________________姓名________________ 学号________________

习题10－4 重积分的应用

1. 求由曲面 $z=\sqrt{2-x^2-y^2}$， $z=x^2+y^2$ 所围成的立体的表面积.

2．设物体占有的空间区域为球面 $x^2+y^2+z^2=1$ 及三个坐标面在第一卦限内的部分，点 (x,y,z) 处的体密度为 $\rho(x,y,z)=xyz$，求物体的质量.

3．在某一生产过程中，要在半径为 R 半圆形均匀薄板的直径边上接一个边长与此直径等长的相同材料的均匀矩形薄板，使整个平板的重心落在圆心上，试求此矩形另一边的长度．

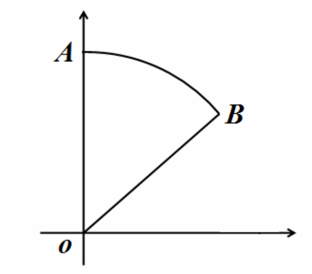
4．求由 $y^2=\dfrac{9}{2}x$ 和 $x=2$ 围成的均匀薄片对 x 轴及 y 轴的转动惯量（设面密度为 ρ ）．

班级________________姓名________________学号________________

第十一章 曲线积分

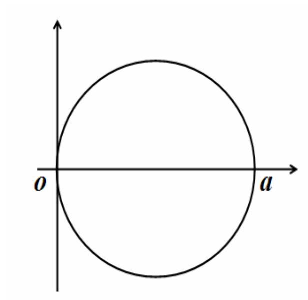
习题11-1 对弧长的曲线积分

1．计算$\oint_L \cos\sqrt{x^2+y^2}\,\mathrm{d}s$，其中$L$为圆周$x^2+y^2=a^2$，直线$y=x$及$y$轴在第一象限内围成的图形的边界.



2．求$\int_L \sqrt{2y}\,\mathrm{d}s$，其中$L$是摆线$x=a(t-\sin t)$，$y=a(1-\cos t)$的一拱$(0\le t\le 2\pi)$.

3．计算$\oint_L \sqrt{x^2+y^2}\,\mathrm{d}s$，其中$L$为曲线$x^2+y^2=ax$.



班级________________姓名________________ 学号________________

习题11－2 对坐标的曲线积分

1．计算下列对坐标的曲线积分：

（1）$\int_L (2a-y)\,\mathrm{d}x + x\,\mathrm{d}y$，$L$ 为摆线 $x=a(t-\sin t)$，$y=a(1-\cos t)$ 上从点 $(0,0)$ 到点 $(2\pi a,0)$ 的一拱；

（2）$\int_L (x^2+y^2)\,\mathrm{d}x + (x^2-y)\,\mathrm{d}y$，其中 L 是曲线 $y=|x|$ 上从点 $(-1,1)$ 到点 $(2,2)$ 的一段．

（3）$\int_{\overset{\frown}{ABC}} x\,\mathrm{d}y - y\,\mathrm{d}x$，其中 $A(-1,0),B(0,1),C(1,0)$，$\overset{\frown}{AB}$ 为 $x^2+y^2=1$ 的上半圆弧段，而 $\overset{\frown}{BC}$ 为 $y=1-x^2$ 上的弧段．

班级________________姓名________________ 学号________________

2. 在 $x = a\cos t, y = b\sin t$ 上每一点 M 有作用力 $\boldsymbol{F}$，其大小等于该点到椭圆中心的距离，而方向朝着椭圆中心。

(1) 试计算质点 P 沿椭圆位于第一象限的弧从点 $A(a,0)$ 移到点 $B(0,b)$ 时力 $\boldsymbol{F}$ 所做的功；

(2) 求点 P 按正向走遍全部椭圆时力 $\boldsymbol{F}$ 所做的功。

3. 计算 $\int_{\Gamma} y\,\mathrm{d}x + z\,\mathrm{d}y + x\,\mathrm{d}z$，其中 Γ 为螺线 $x = a\cos t, y = a\sin t, z = bt$，从 $t = 0$ 到 $t = 2\pi$ 的一段.

班级________________姓名________________ 学号________________

习题11－3 格林公式

1．利用格林公式计算下列曲线的积分

（1）$\oint_L e^x(1-\cos y)\,\mathrm{d}x+e^x(1+\sin y)\,\mathrm{d}y$，其中 L 是区域 D：$0\le y\le \sin x$，$0\le x\le \pi$ 的正向边界曲线.

2）$\int_L \dfrac{y^2}{\sqrt{R^2+x^2}}\,\mathrm{d}x+\left[4x+2y\ln\left(x+\sqrt{R^2+x^2}\right)\right]\mathrm{d}y$，其中 L 是从点 $(R,0)$ 到 $(-R,0)$ 的上半圆周：$y=\sqrt{R^2-x^2}$.

（3）$\int_L (e^x\sin y-my)\,\mathrm{d}x+(e^x\cos y-mx)\,\mathrm{d}y$，其中 L 为由点 $A(a,0)$ 到 $O(0,0)$ 的任一有向曲线.

班级________________姓名________________ 学号________________

2. 计算$\oint_L \dfrac{(x-y)\,\mathrm{d}x+(x+y)\,\mathrm{d}y}{x^2+y^2}$，其中$L$是平面上任意一条不经过原点的正向简单封闭曲线.

班级________________姓名________________　学号________________

习题11－4　平面曲线积分与路径无关的条件

1．计算$\int_L \frac{-y}{x^2+y^2}\,\mathrm{d}x+\frac{x}{x^2+y^2}\,\mathrm{d}y$，其中$L$为自点$A(-1,0)$沿$y=x^2-1$至点$B(2,3)$的曲线弧．

2．选择常数a,b，使$\left(2ax^3y^3-3y^2+5\right)\mathrm{d}x+\left(3x^4y^2-2bxy-4\right)\mathrm{d}y$是某二元函数$u(x,y)$的全微分，并求$u(x,y)$．

班级________________姓名________________ 学号________________

3．已知积分 $\int_L \left[y-5ye^{-2x}f(x) \right] \mathrm{d}x+e^{-2x}f(x)\,\mathrm{d}y$ 与路径无关，且 $f(0)=\dfrac{6}{5}$，求 $f(x)$，

并计算 $\int_L \left[y-5ye^{-2x}f(x) \right] \mathrm{d}x+e^{-2x}f(x)\,\mathrm{d}y$，其中 L 为从 $(1,0)$ 到 $(2,3)$ 的弧段.

4．判别下列方程中哪些是全微分方程，并求全微分方程的通解.

（1）$(x\cos y+\cos x)y'-y\sin x+\sin y=0$；

（2）$(x^2+y^2)dx+xydy=0$.

班级________________姓名________________ 学号__________________

习题11－5 曲线积分的应用

1．求曲线 $x=e^{-t}\cos t, y=e^{-t}\sin t, z=e^{-t}$（$0<t<+\infty$）的长度.

2．求质量均匀心脏线 $r=a(1+\cos\theta)\ (0\le\theta\le 2\pi)$ 的质心.

班级________________姓名________________　学号__________________

第十二章　曲面积分

习题12－1　对面积的曲面积分

1．计算$\oiint\limits_{\Sigma}(x^2+y^2)\,\mathrm{d}S$，其中$\Sigma$为锥面$z=\sqrt{x^2+y^2}$及$z=1$所围成区域的整个边界曲面.

2．求$\iint\limits_{\Sigma}\dfrac{e^z}{\sqrt{x^2+y^2}}\,\mathrm{d}S$，其中$\Sigma$为圆锥面$z=\sqrt{x^2+y^2}$介于$z=1$及$z=2$之间的部分.

班级________________姓名________________ 学号__________________

习题12－2 对坐标的曲面积分

1．计算$\iint\limits_{\Sigma}\left(x^2+y^2\right)\mathrm{d}z\mathrm{d}x+z\mathrm{d}x\mathrm{d}y$，其中$\Sigma$为锥面$z=\sqrt{x^2+y^2}$被平面$z=1$截下部分的下侧.

2．试把对坐标的曲面积分$\iint\limits_{\Sigma}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z+y\mathrm{d}z\mathrm{d}x+z\mathrm{d}x\mathrm{d}y$化为对面积的曲面积分形式，然后再计算它的值。其中$\Sigma$为$z=\sqrt{x^2+y^2}$介于$z=1$及$z=2$之间部分的外侧.

班级________________姓名________________ 学号__________________

习题12－3 高斯公式、斯托克斯公式及其应用

1. $\oiint\limits_{\Sigma} 4zx\mathrm{d}y\mathrm{d}z-2z\mathrm{d}z\mathrm{d}x+(1-z^2)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$，其中$\Sigma$为平面$z=2$与曲面$z=\dfrac{x^2+y^2}{2}$所围成的立体的外侧表面；

2. $\iint\limits_{\Sigma} xz\mathrm{d}y\mathrm{d}z+yz\mathrm{d}z\mathrm{d}x+x^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y$，其中$\Sigma$为上半球面$z=\sqrt{a^2-x^2-y^2}$的内侧；

3．设数量函数$u=u(x,y,z)$具有二阶连续偏导数，试求：

（1）$\mathrm{grad}u$；　（2）$\mathrm{div}(\mathrm{grad}u)$；　（3）$\mathrm{rot}(\mathrm{grad}u)$.

4. $\iint\limits_{\Sigma} \dfrac{xz^2\mathrm{d}y\mathrm{d}z + \left(x^2 y - z^3\right)\mathrm{d}z\mathrm{d}x + \left(2xy + y^2 z\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y}{x^2 + y^2 + z^2}$，其中$\Sigma$为上半球面 $z = \sqrt{a^2 - x^2 - y^2}$ 的外侧.

5．利用斯托克斯公式计算$\oint_{\Gamma} y\mathrm{d}x + z\mathrm{d}y + x\mathrm{d}z$，其中$\Gamma$是球面$x^2 + y^2 + z^2 = a^2$与平面$x + y + z = 0$的交线，且从$z$轴正向看$\Gamma$沿逆时针方向绕行.

班级________________姓名________________ 学号__________________

第十三章 无穷级数

习题13−1 常数项级数的概念及其性质

1．判断下列级数的敛散性：

（1）$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{n^3+3^n}{n^3\cdot 3^n}$；（2）$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{(3n-1)(3n+2)}$；（3）$\sum\limits_{n=3}^{\infty}n\tan\dfrac{\pi}{n}$.

.

2．设级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$收敛，且$\lim\limits_{n\to\infty}na_n=0$，证明级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}(n+1)\left(a_{n+1}-a_n\right)$收敛.

班级____________________姓名____________________学号____________________

习题13－2　正项级数及其审敛法

1．利用比较法判断下列级数的敛散性：

（1）$\sum_{n=1}^{\infty}\left(1-\cos\frac{2}{n}\right)$；

（2）$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt[3]{(n+1)n^3}}$．

2．利用比值法或根值法判断下列级数的敛散性：

（1）$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^n}{(2n)!}$，并求极限$\lim_{n\to\infty}\frac{n^n}{(2n)!}$；

（2）$\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{(\ln n)^n}$．

班级________________姓名________________ 学号__________________

习题13－3 绝对收敛及条件收敛

判别下列级数是绝对收敛、条件收敛还是发散：

1．$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{\sqrt[3]{n}}$．

2．$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{\frac{n(n+1)}{2}}\frac{\sin\frac{n\pi}{3}-1}{n^2}$．

3．$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{2^n\cdot n!}{n^n}$．

4．$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos n\pi}{\sqrt{n(n+1)}}$．

班级＿＿＿＿＿＿＿＿姓名＿＿＿＿＿＿＿＿　学号＿＿＿＿＿＿＿＿＿

习题13－4　幂级数

1．求下列幂级数的收敛域：

（1）$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(x-2)^n}{n\cdot 5^n}$；

（2）$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\sqrt{n+1}-\sqrt{n}\right)2^n x^{2n}$.

班级________________姓名________________ 学号__________________

2．求下列幂级数在其收敛域内的和函数：

（1）$\sum_{n=1}^{\infty} 2nx^{2n-1}$；

（2）$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1}$，并求级数$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{\sqrt{3}}{(2n+1)\cdot 3^{n+1}}$的和.

班级__________________姓名__________________ 学号____________________

习题13－5 函数的幂级数展开式

1．将函数 $f(x)=\frac{1}{4}\ln\frac{1+x}{1-x}+\frac{1}{2}\arctan x-x$ 展开成 x 的幂级数.

2．将函数 $f(x)=\frac{1}{x^2+4x+3}$ 展开成 $x-1$ 的幂级数.

班级__________________姓名__________________ 学号____________________

习题13－7 傅立叶级数

1．设 $f(x)$ 是周期为 2π 的周期函数，且 $f(x)=\begin{cases}0, & 0\le x\le\pi,\\ x, & -\pi<x<0.\end{cases}$ 将 $f(x)$ 展开成傅立叶级数，并画出 $f(x)$ 与和函数 $S(x)$ 的图形，指出其异同点.

班级________________姓名________________ 学号_________________

2．将函数 $f(x)=|x|+2$ 在 $[-\pi,\pi]$ 上展开成傅立叶级数.

3．将函数 $f(x)=x-1\ \ (0\le x\le 2)$ 展开成以 4 为周期的余弦级数.

班级＿＿＿＿＿＿＿＿姓名＿＿＿＿＿＿＿＿ 学号＿＿＿＿＿＿＿＿

参考答案

习题1

1．（1）1，2，2；（2）$\dfrac{2^{\Delta x}-2}{\Delta x}$，$-1$．　2．$\dfrac{1}{x}+\dfrac{\sqrt{1+x^2}}{|x|}$．

习题 $2-1,2,3$

1．$(1)\dfrac{1}{3}$；$(2)\dfrac{1}{2}$；$(3)\dfrac{1}{1-r}$；$(4)\dfrac{1}{2}$；$(5)1$．　2．$a=4$，$b=4$．

3．1，-1，不存在．

习题 $2-4$

1．$(1)\dfrac{1}{3}$；$(2)\dfrac{\sqrt{2}}{8}$；$(3)\dfrac{1}{2}$．　2．$\dfrac{1}{4}$．

习题 $2-5$

1．$(1)\dfrac{1}{2}$；$(2)\dfrac{1}{4}$；$(3)e^{-2}$；$(4)e^{2}$．　2．3．

习题 $2-6$

1．$x=1$ 是跳跃间断点；$x=0$ 是无穷间断点．

2．$f(x)=\begin{cases} x, & |x|<1, \\ 0, & |x|=1, \\ -x, & |x|>1, \end{cases}$ $x=\pm 1$ 是跳跃间断点．3．0．

4．$f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上连续．

5．$(1)\alpha$；$(2)\cos a$；$(3)\alpha-\beta$．

习题 $3-1$

1．切线方程：$5x-y-4=0$；法线方程：$x+5y+7=0$．　2．$(a+b)f'(x)$．

3．连续，不可导．

习题 $3-2$

班级________________姓名________________　学号________________

1．(1)$\frac{1}{x}-\frac{2}{x\ln 10}+\frac{3}{x\ln 2}$；　(2)$2^x\ln 2(x\sin x+\cos x)+2^x x\cos x$；

(3)$\frac{1+2x-x^2}{(x^2+1)^2}$；　(4)$\frac{\sec x(\tan x-1)}{(1+\tan x)^2}$或$\frac{\sin x-\cos x}{1+\sin 2x}$；　(5)$\frac{a}{x^2-a^2}$；

(6)$-\frac{1}{x^2}\sin\frac{2}{x}e^{\sin^2\frac{1}{x}}$；(7)$\sqrt{x^2-a^2}$；(8)$\frac{1}{2\sqrt{a^2-x^2}}$．

2．$\frac{2xf(x)-x^2f'(x)}{[f(x)]^2}$；　3．$f'(x)=2+\frac{1}{x^2}$．

4．$2x\cos(x^2)$，$\cos(x^2)$，$\frac{2\cos(x^2)}{3x}$．

习题3－3

1．$y'''=2\sec^2 x\cdot\tan x$．　2．$\frac{\sqrt{x}g''(\sqrt{x})-g'(\sqrt{x})}{4x\sqrt{x}}$．

3．(1)$(-1)^n n![\frac{1}{(x-2)^{n+1}}-\frac{1}{(x-1)^{n+1}}]$；

(2)$2^{n-1}\sin(2x+\frac{n-1}{2}\pi)$ 或$-2^{n-1}\cos(2x+\frac{n}{2}\pi)$．

习题3－4

1．(1)$\frac{y(1-x)}{x(y-1)}$；(2)$\frac{xy\ln y-y^2}{xy\ln x-x^2}$．　3．$2e^2$．

4．$\frac{1}{f''(t)}$．　5．$-\frac{1+t^2}{t^3}$．　5．$x-ey-e=0$．

习题4－2

1．(1)$\frac{1}{6}$；(2)∞；(3)$\frac{1}{3}$；(4)1；(5)$\ln a-\ln b$；(6)ab．　2．1．

习题4－3

1．$(x-1)+\frac{3}{2!}(x-1)^2+\frac{2}{3!}(x-1)^3-\frac{2}{4!}(x-1)^4+R_4(x)$．

2. $x-x^2+\frac{x^3}{2!}+\cdots+(-1)^{n+1}\frac{x^n}{(n-1)!}+o(x^n)$.

习题4－4

1. 极小值 $\varphi(\frac{1}{2})=\frac{1}{2}$.　2. $0;-6$.　3. $\left(\frac{1}{\sqrt{3}},\frac{2}{3}\right)$.　4. $h=\frac{4}{3}R$，$r=\frac{2\sqrt{2}}{3}R$.

习题4－5

在 $(-\infty,-1)\bigcup(0,1)$ 凸，在 $(-1,0)\bigcup(1,+\infty)$ 凹；$(0,0)$ 为拐点.

习题5－1

1. (1)2；(2) $\frac{\pi}{4}$.　2. $\int_1^2 \ln x dx>\int_1^2(\ln x)^2 dx$.

3. $f(x)=x-\frac{4}{3}$.

习题5－2

1. 极小值 $\Phi(0)=0$.　2. (1)1；(2) $\frac{1}{2e}$.

3. $\Phi(x)=\begin{cases} x, & x<0, \\ \sin x, & 0\le x\le\frac{\pi}{2}, \\ 1+x-\frac{\pi}{2}, & x>\frac{\pi}{2}. \end{cases}$ 连续　4. (1)1；(2) $\frac{4}{3}$；(3) e^2+e^4-2；(4) $\frac{\pi}{2}$.

习题5－3

1. $\tan x-x+C$.　2. $2(\frac{x^3}{3}-x+\arctan x+C)$.

3. $\tan x-\cot x+C$ 或 $-2\cot x+C$.　4. $\frac{1}{2}\tan\frac{x}{2}+C$ 或 $\frac{1}{2}(\csc x-\cot x)+C$.

习题5－4

班级________________姓名________________ 学号________________

1． (1) $-\frac{1}{2}e^{-x^2}+C$ (2) $\arcsin\frac{x-2}{2}+C$ 或 $2\arcsin\frac{\sqrt{x}}{2}+C$； (3) $2\sqrt{1+\ln x}+C$；

(4) $\frac{1}{3}(\sqrt{1+x^2})^3-\sqrt{1+x^2}+C$； (5) $\frac{2}{\sqrt{\cos x}}+C$ ； (6) $x-\ln(e^x+1)+C$；

(7) $\cos\frac{1}{x}+C$； (8) $\arctan e^x+C$； (9) $-2\arctan\sqrt{1-x}+C$；

(10) $\frac{1}{a^2}\cdot\frac{x}{\sqrt{a^2-x^2}}+C$； (11) $2\sqrt{e^x-1}-2arctan\sqrt{e^x-1}+C$； (12) $\arccos\frac{1}{x}+C$.

(13) $\arcsin\frac{2x-1}{\sqrt{5}}+C$ 2． $\tan\frac{1}{2}-\frac{1}{2}e^{-4}+\frac{1}{2}$. 4. (1) $2+2\ln 2-2\ln 3$； (2) $\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{\sqrt{2}}{2}$

习题 5－5

1． (1) $2\sqrt{x}\ln x-4\sqrt{x}+C$； (2) $xf'(x)-f(x)+C$；

(3) $\frac{1}{2}(x^2\arctan x-x+\arctan x)+C$； (4) $\frac{1}{2}(x\tan x+\ln|\cos x|)+C$；

(5) $x\ln(x+\sqrt{1+x^2})-\sqrt{1+x^2}+C$.

2． (1) $\frac{1}{2}$； (2) $\frac{\pi}{4}-\frac{1}{2}\ln 2$； (3) $\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{12}\pi$. 3． $\frac{4}{\pi}-1$.

习题 5－6

1. $\frac{1}{2}x^2-\frac{1}{2}\ln(x^2+1)+C$. 2. $\frac{1}{2}\ln(x^2-2x+5)-\frac{1}{2}\arctan\frac{x-1}{2}+C$.

3. $\tan x-\sec x+C$. 4. $\frac{1}{3}\tan^3 x+\tan x+C$.

习题 5－7

1. 1． 2． 1 3. $\frac{1}{2}\ln 2$. 4. $\frac{\pi}{2}$.

习题 6

1． $a=3$. 2． 1. 3． $4\pi^2$. 4． 1.413×10^8 焦耳. 5． $h=\frac{2l}{3}$， $b=\frac{l}{3}$.

习题 7－2

班级________________姓名________________　学号________________

1．（1）$y=Ce^{\frac{y^2}{x^2}}$；　（2）$y=x\left(-e^{-x}+C\right)$.

2．$f(x)=e^{2x}\ln 2$．　3．$x\left(\dfrac{y^2}{x^2}+1\right)=3$ 或 $y=\sqrt{3x-x^2}$，$(0<x<3)$

习题 $7-3$

$f(x)=-\dfrac{1}{6}e^{-x}+\dfrac{2}{3}e^{2x}-\dfrac{1}{2}e^{x}$．

习题 $7-4$

1．$y=x^3+3x+1$．　2．$y=-\dfrac{1}{C_1x+C_2}$．

习题 $8-1$

1．（1）2；　（2）$\pm\left\{\dfrac{1}{2},-\dfrac{1}{2},\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right\}$；（3）$\alpha=\dfrac{\pi}{6}$；$\beta=\dfrac{2\pi}{3}$；$\gamma=\dfrac{\pi}{4}$．

2．$-\dfrac{6}{7}$．　3．$x=15, z=-\dfrac{1}{5}$．

习题 $8-2$

1．（1）3，$5\vec{i}+\vec{j}+7\vec{k}$；　（2）$-18$，$10\vec{i}+2\vec{j}+14\vec{k}$；　（3）$\dfrac{\sqrt{21}}{14}$；

（4）$5\sqrt{3}$；　（5）$5\vec{i}+\vec{j}+7\vec{k}$；　（6）0．　2．$-\dfrac{3}{2}$．

习题 $8-3$

1．$(x-3)^2+(y-2)^2+(z-1)^2=14$．2．$2x+5y-z=0$．

3．$y^2=2\sqrt{x^2+z^2}$ 或 $y^4=4(x^2+z^2)$，$x^2+y^2=2z$．

4. $\dfrac{1}{3},\dfrac{2}{3},\dfrac{2}{3}$．　5．$2x-y-z=0$．

习题 $8-4$

班级________________姓名________________ 学号________________

1． $\frac{x-1}{4}=\frac{y-1}{3}=\frac{z-1}{1}$,或$\begin{cases} x-4z+3=0, \\ 2x-y-5z+4=0. \end{cases}$

2． $\begin{cases} x-3y-2z+1=0 \\ x-y+2z-1=0 \end{cases}$,或$\frac{x-2}{4}=\frac{y-1}{2}=\frac{z}{-1}$．

3． $\frac{x-1}{-3}=\frac{y-2}{2}=\frac{z-1}{5}$,或$\begin{cases} x-y+z=0, \\ 3x+2y+z-8=0. \end{cases}$ 4． $x^2+y^2=1$，$\begin{cases} x^2+y^2=1, \\ z=0. \end{cases}$．

习题9－2

1．（1）2； （2）$e^{\frac{1}{a}}$． 3．（1）$(0,0)$； （2）$\left\{(x,y)\middle| y^2=2x\right\}$．

习题9－3,4

1．（1）$\frac{\partial z}{\partial x}=1-\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}$， $\frac{\partial z}{\partial y}=1-\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}$；

（2）$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{z(x-y)^{z-1}}{1+(x-y)^{2z}}$， $\frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{z(x-y)^{z-1}}{1+(x-y)^{2z}}$， $\frac{\partial u}{\partial z}=\frac{\ln|x-y|\cdot(x-y)^z}{1+(x-y)^{2z}}$．

2． $f_y(2,y)=2y$． 3． $z''_{xx}=y^{\ln x}\ln y\cdot\frac{1}{x^2}\left(\ln y-1\right)$, $z''_{xy}=\frac{1}{x}y^{\ln x-1}\left(\ln x\ln y+1\right)$．

5．（1）$dz=\frac{-ydx+xdy}{x^2+y^2}$； （2）$du=\frac{2xdx-2ydy+e^z dz}{x^2-y^2+e^z}$ ．

习题9－5

1． $\frac{\partial z}{\partial x}=2(y+3x)\cos(2u+3v)$， $\frac{\partial z}{\partial y}=2(x+3y)\cos(2u+3v)$．

3． $y^2 f''_{11}+2f''_{12}+\frac{1}{y^2}f''_{22}+\frac{2y}{x^3}g'+\frac{y^2}{x^4}g''$． 4． $\frac{1}{yf}$． 5. 3

习题9－6

1． $\frac{-e^z}{(e^z+1)^3}$． 3． $\frac{\partial z}{\partial x}=e^{-u}(\varphi_u\cos v-\varphi_v\sin v)$．

4． $\frac{\partial u}{\partial x}=-\frac{2v}{4uv+1}$， $\frac{\partial u}{\partial y}=\frac{2u}{4uv+1}$． 5． $\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x}=\frac{f_1'+yf_2'+xf_2'g_1'}{f_1'-xf_2'g_2'}$．

班级________________ 姓名________________ 学号________________

习题 $9-7$

1．$\frac{13}{\sqrt{10}}$． 2．$\sqrt{2}$． 3．$\left\{-2e^2, e^2\right\}$． 4．梯度方向，$2\sqrt{\frac{x^2}{a^4}+\frac{y^2}{b^4}+\frac{z^2}{c^4}}$．

习题 $9-9$

1．极小值 $z\left(\frac{1}{2},-1\right)=-\frac{e}{2}$． 2．最大值为 $f(\frac{4}{3},\frac{4}{3})=\frac{64}{27}$，最小值为 $f(3,3)=-18$．

3．两边长为$\frac{l}{\sqrt{2}},\frac{l}{\sqrt{2}}$时周长最大． 4．长，宽，高分别为$2,2,\frac{9}{8}$． 5．$d=\sqrt{9\pm 5\sqrt{3}}$．

习题 $9-10$

1．切线方程为：$\frac{x-1}{16}=\frac{y-2}{-6}=\frac{z-1}{1}$，法平面方程为$16x-6y+z=5$．

2．$\frac{x+3}{1}=\frac{y+1}{3}=\frac{z-3}{1}$． 4. $a=-5,\ b=-2.$

习题 $10-2(1)$

1（1）0； （2）$\frac{\sqrt{3}}{12}\pi-\frac{1}{2}\ln 2$； （3）$\pi-2$． 2．（1）$1$； （2）$\frac{1}{2}(e^{a^2}-1)$．

3．（1）$\int_0^1 dy\int_{e^y}^{e} f(x,y)dx$； （2） $\int_{-1}^{0} dy\int_{-2\sqrt{y+1}}^{2\sqrt{y+1}} f(x,y)dx+\int_0^8 dy\int_{-2\sqrt{y+1}}^{2-y} f(x,y)dx$．

习题 $10-2(2)$

1．（1）0； （2）$\frac{4}{3}$． 2．π． 3．$\frac{1}{15}$．

习题 $10-3$

1．（1）0； （2）$\frac{\pi}{10}$； （3）$\frac{13\pi}{4}$． 2．$\pi a^3(\alpha-\beta)$．

习题 $10-4$

1．$2(2-\sqrt{2})\pi+\frac{\pi}{6}(5\sqrt{5}-1)$． 2．$\frac{1}{48}$． 3．$\frac{\sqrt{6}}{3}R$ 4. $I_x=\frac{72}{5}\rho$，$I_y=\frac{96}{7}\rho$．

班级________________姓名________________ 学号________________

习题11－1

1．$2\sin a+\frac{\pi}{4}a\cos a$．　2．$4\pi a^{\frac{3}{2}}$．　3．$2a^2$．

习题11－2

1．（1）$-2\pi a^2$；　（2）$\frac{41}{6}$．　（3）$-\frac{\pi}{2}-\frac{4}{3}$．　2．$\frac{a^2-b^2}{2}$，$0$．　3．$-\pi a^2$．

习题11－3

1．（1）$\frac{1}{2}(e^{\pi}+1)$；　（2）$2\pi R^2$；　（3）0．

2．当L不包含原点时，为0；当L包含原点时，为2π．

习题11－4

1．$\pi+\arctan\frac{3}{2}$．　2. $a=2,b=3$．　$u(x,y)=x^4y^3-3y^2x+5x-4y+C$

3．$f(x)=\frac{1}{5}e^{2x}+e^{-3x}$，$3(\frac{1}{5}+e^{-10})$．

4．是，$x\sin y+y\cos x=C$；不是.

习题11－5

1．$\sqrt{3}$．　2．$(\frac{4}{5}a,0)$．

习题12－1

1．$\frac{1+\sqrt{2}}{2}\pi$．　2．$2\sqrt{2}\pi(e^2-e)$．

习题12－2

1．$-\frac{2}{3}\pi$．　2．0．

习题12－3

1．$\frac{32\pi}{3}$；　2. $-\frac{3\pi a^4}{4}$；

3. $\mathrm{grad}u=\{u_x,u_y,u_z\}$；（2）$\mathrm{div}(\mathrm{grad}u)=u_{xx}+u_{yy}+u_{zz}$；（3）$\mathrm{rot}(\mathrm{grad}u)=\{0,0,0\}$

4. $\dfrac{2\pi a^3}{5}$.　　5. $-\sqrt{3}\pi a^2$.

习题13－1

1.（1）收敛；　（2）收敛；　（3）发散.

习题13－2

1.（1）收敛；　（2）收敛.　2.（1）收敛，0；　（2）收敛.

习题13－3

1．条件收敛.　2．绝对收敛.　3．绝对收敛.　4．条件收敛.

习题13－4

1.（1）$5,[-3,7)$；　（2）$\dfrac{\sqrt{2}}{2},(-\dfrac{\sqrt{2}}{2},\dfrac{\sqrt{2}}{2})$.

2.（1）$\dfrac{2x}{(1-x^2)^2}$，$(-1<x<1)$；　（2）$\arctan x-x$，$(-1\le x\le 1)$，$\dfrac{\pi}{6}-\dfrac{\sqrt{3}}{3}$.

习题13－5

1. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{4n+1}x^{4n+1}$.　　2. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\left(\dfrac{1}{2^{n+2}}-\dfrac{1}{2^{2n+3}}\right)(x-1)^n$　　$(-1<x<3)$.

习题13－7

1. $-\dfrac{\pi}{4}+\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left[\dfrac{1-(-1)^n}{\pi n^2}\cos nx+\dfrac{(-1)^{n+1}}{n}\sin nx\right]$

2. $\dfrac{\pi+4}{2}-\dfrac{2}{\pi}\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left[\dfrac{1}{(2n-1)^2}\cos(2n-1)x\right]$　　$(-\pi\le x\le\pi)$.

3. $-\dfrac{8}{\pi^2}\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{(2n-1)^2}\cos\dfrac{(2n-1)\pi x}{2}$　$(0\le x\le 2)$.