课外练习题 5

1．设矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}-1&1&0\\-4&a&0\\1&0&2\end{pmatrix}$ 与 $\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}2&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$ 相似，则 $a=$________.

2．已知三阶方阵 $\boldsymbol{A}$ 的特征值为 $1,-1,2$，则矩阵 $\boldsymbol{B}=2\boldsymbol{A}+\boldsymbol{E}$ 的特征值为______.

3．已知矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}x&1&2\\-10&6&7\\y&-2&-1\end{pmatrix}$ 的特征值 $\lambda_1=\lambda_2=1$，$\lambda_3=2$，则 $x=$___，$y=$____.

4．已知矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}0&0&1\\a&1&1\\1&0&0\end{pmatrix}$ 可对角化，则 $a=$___________.

5．设三阶矩阵 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 相似，且满足 $|\boldsymbol{A}-2\boldsymbol{E}|=0,|\boldsymbol{A}+2\boldsymbol{E}|=0,|2\boldsymbol{A}-\boldsymbol{E}|=0$，则 $|\boldsymbol{B}^{-1}-\boldsymbol{E}|=$_______.

6. 若 4 阶矩阵 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 相似，矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的特征值为 $\frac{1}{2},\frac{1}{3},\frac{1}{4},\frac{1}{5}$，则行列式 $|\boldsymbol{B}^{-1}-\boldsymbol{E}|=$ ________.

7.设矩阵 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 相似，其中 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&2&3\\-1&x&2\\0&0&1\end{pmatrix}$，已知矩阵 $\boldsymbol{B}$ 有特征值 1，2，3，则 $\boldsymbol{x}=$ __________.

8．设 $\boldsymbol{A}$ 为 2 阶矩阵，$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2$ 为线性无关的 2 维列向量，$\boldsymbol{A}\boldsymbol{\alpha}_1=\boldsymbol{0}$，$\boldsymbol{A}\boldsymbol{\alpha}_2=2\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2$，则 $\boldsymbol{A}$ 的非零特征值为__________.

9. $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&2&3\\1&2&3\\1&2&a\end{pmatrix}$，若 $\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$ 是 $\boldsymbol{A}$ 的一个特征向量，则 $a=$__________.

10. 若 3 维列向量 $\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}$ 满足 $\boldsymbol{\alpha}^T\boldsymbol{\beta}=2$，则 $\boldsymbol{\beta}\boldsymbol{\alpha}^T$ 的非零特征值为__________.

11. 设 $\lambda=2$ 是矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的特征值，$|\boldsymbol{A}|=4$，则矩阵 $\boldsymbol{A}^*+\boldsymbol{A}^2-3\boldsymbol{E}$ 的特征值（　　）.

（A）3　　（B）-3　　（C）$\frac{3}{2}$　　（D）$-\frac{3}{2}$

12.设 $\boldsymbol{A}$ 为 n 阶实对称矩阵，则（　　）.

（A）$\boldsymbol{A}$ 的 n 个特征向量两两正交

（B）$\boldsymbol{A}$ 的 n 个特征向量组成单位正交向量组

（C）若 $\boldsymbol{A}$ 的 k 重特征值为 λ_0，则有 $R(\boldsymbol{A}-\lambda_0\boldsymbol{E})=n-k$

（D）若 $\boldsymbol{A}$ 的 k 重特征值为 λ_0，则有 $R(\boldsymbol{A}-\lambda_0\boldsymbol{E})=k$

13．已知 $\boldsymbol{A}$ 为三阶实对称阵，且 $\boldsymbol{A}^2=\boldsymbol{A},\ R(\boldsymbol{A})=2$，则 $\boldsymbol{A}$ 的特征值为（　　）.

（A）0,0,0　　（B）0,0,1　　（C）0,1,1　　（D）1,1,1

14．设 n 阶方阵 $\boldsymbol{A}$ 满足 $\boldsymbol{A}^3=\boldsymbol{O}$，则（　　）.

（A）$\boldsymbol{A}=\boldsymbol{O}$　　（B）$\boldsymbol{A}$ 仅有一个特征值为零，其它 $n-1$ 个可能不为零

（C）$\boldsymbol{A}$ 的特征值全为零　　（D）$\boldsymbol{A}$ 有 n 个线性无关的特征向量

15．设 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&2&3\\2&2&3\\3&3&3\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}1&2&3\\0&2&3\\0&0&3\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{C}=\begin{pmatrix}1&2&3\\0&1&3\\0&0&1\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{D}=\begin{pmatrix}1&1&3\\0&0&-3\\0&0&1\end{pmatrix}$，则

$\boldsymbol{A},\boldsymbol{B},\boldsymbol{C},\boldsymbol{D}$ 中不能与对角阵相似的矩阵是（　　）.

（A）$\boldsymbol{A}$　　（B）$\boldsymbol{B}$　　（C）$\boldsymbol{C}$　　（D）$\boldsymbol{D}$

16．齐次线性方程组 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$ 和 $\boldsymbol{Bx}=\boldsymbol{0}$ 同解的充分必要条件为（　　）.

（A）$\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 等价　　（B）$\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 相似

（C）$\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 的列向量组等价　　（D）$\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 的行向量组等价

17．$\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 均为 3 阶实方阵，如果 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 相似，则下列说法错误的是（　　）.

（A）若 $\boldsymbol{A}$ 可对角化，　$\boldsymbol{B}$ 必可对角化　　（B）$\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 的特征值相同

（C）$\boldsymbol{A}$ 必可通过初等行变换变为 $\boldsymbol{B}$　　（D）$\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 的迹相同

18．设 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 都是 n 阶方阵，则下列结论正确的是（　　）.

（A）若 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 相似，则 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 有相同的特征值和特征向量

（B）若 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 相似，则 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 都相似于同一个对角阵

（C）若 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 相似，则 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 等价

（D）若 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 等价，则 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 相似

19. 设 3 阶方阵 $\boldsymbol{A}$ 有 3 个线性无关的特征向量，$\lambda=3$ 是 $\boldsymbol{A}$ 的二重特征值，则 $R(\boldsymbol{A}-3\boldsymbol{E})=$

（　　）.

（A）1　　　　　　（B）2　　　　　　（C）3　　　　　　（D）无法确定

20．设 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 为 n 阶矩阵，且 $\boldsymbol{A}$ 相似于 $\boldsymbol{B}$，则（　　）.

（A）$\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 有相同的特征值　　　　（B）$\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 相似于同一个对角矩阵

（C）存在正交矩阵 $\boldsymbol{P}$，使 $\boldsymbol{P}^T\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}=\boldsymbol{B}$　　（D）存在可逆矩阵 $\boldsymbol{P}$，使 $\boldsymbol{P}^T\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}=\boldsymbol{B}$

21．n 阶矩阵 $\boldsymbol{A}$ 与对角阵相似的充要条件是（　　）.

（A）$\boldsymbol{A}$ 可逆

（B）$\boldsymbol{A}$ 的 n 个特征值无零特征值

（C）$\boldsymbol{A}$ 的 n 个特征值互不相同

（D）对应 $\boldsymbol{A}$ 的每一个 k 重特征根 λ，$\boldsymbol{A}$ 一定有 k 个线性无关的特征向量

22．设 $\boldsymbol{A}$ 为 n 阶矩阵，$\boldsymbol{P}$ 为 n 阶可逆矩阵，n 维列向量 $\boldsymbol{\alpha}$ 是矩阵 $\boldsymbol{A}$ 属于特征值 λ 的特征向量，那么在下列矩阵中① $\boldsymbol{A}^2$；② $\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}$；③ $\boldsymbol{A}^T$；④ $\boldsymbol{E}-\dfrac{1}{2}\boldsymbol{A}$，$\boldsymbol{\alpha}$ 肯定是其特征值向量的矩阵共有（　　）.

（A）1 个　　　　（B）2 个　　　　（C）3 个　　　　（D）4 个

23．设 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 均为 n 阶方阵，且 $\boldsymbol{A}$ 相似于 $\boldsymbol{B}$，则下面说法中正确的是（　　）.

（A）$\boldsymbol{A}-\lambda\boldsymbol{E}=\boldsymbol{B}-\lambda\boldsymbol{E}$　　　　（B）存在 n 阶可逆方阵 $\boldsymbol{P}$，使 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}=\boldsymbol{P}\boldsymbol{B}$

（C）$\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 与同一对角阵相似　　　　（D）存在 n 阶可逆方阵 $\boldsymbol{Q}$，使 $\boldsymbol{Q}^T\boldsymbol{A}\boldsymbol{Q}=\boldsymbol{B}$

24. 如果向量 $\boldsymbol{\alpha}=(1,k)^T$ 是矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}3 & 1\\ 5 & -1\end{pmatrix}$ 的逆矩阵 $\boldsymbol{A}^{-1}$ 的特征向量，求常数 k 的值.

25.（10 分）设 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1 & -1 & 1\\ 2 & 4 & -2\\ -3 & -3 & a\end{pmatrix},\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}2 & 0 & 0\\ 0 & 2 & 0\\ 0 & 0 & b\end{pmatrix}$，且 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 相似，求 a,b，并求可逆矩阵 $\boldsymbol{P}$，使 $\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}=\boldsymbol{B}$.

26.（10 分）(1) 设 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1 & 1 & 1 & 1\\ 1 & 2 & 3 & a\\ 1 & 4 & 9 & a^2\\ 1 & 8 & 27 & a^3\end{pmatrix}$，若存在 4 阶非零矩阵 $\boldsymbol{B}$，使 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{B}=\boldsymbol{O}$，问：① $\boldsymbol{B}$ 是否可逆？② a 可能取哪些值？(2) 已知 3 阶矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的特征值为 $1,2,-3$，求 $\left|\boldsymbol{A}^*+2\boldsymbol{E}\right|$.

27.（12 分）矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 2 & 2 & 0\\ 1 & 1 & 3\end{pmatrix}$ 可否相似对角化？若能相似对角化，则求可逆矩阵 $\boldsymbol{P}$，使得 $\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}$ 为对角矩阵.

28.（12 分）已知三阶实对称矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的特征值为 $\lambda_1=2$，$\lambda_2=\lambda_3=1$，且对应于 $\lambda_2=\lambda_3=1$ 的特征向量为 $\boldsymbol{\alpha}_2=\begin{pmatrix}1\\ 1\\ 0\end{pmatrix},\boldsymbol{\alpha}_3=\begin{pmatrix}2\\ 2\\ -1\end{pmatrix}$.（1）求 $\boldsymbol{A}$ 的对应于 $\lambda_1=2$ 的特征向量；（2）求 $\boldsymbol{A}$.

29.（6 分）设 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 为 n 阶非零矩阵，且 $\boldsymbol{A}^2+\boldsymbol{A}=\boldsymbol{O},\boldsymbol{B}^2+\boldsymbol{B}=\boldsymbol{O}$.（1）证明 $\lambda=-1$ 必是 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 的特征值；（2）若 $\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{BA}=\boldsymbol{O}$，$\boldsymbol{\xi}_1,\boldsymbol{\xi}_2$ 分别是 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 对应于特征值 $\lambda=-1$ 的特征向量，证明 $\boldsymbol{\xi}_1,\boldsymbol{\xi}_2$ 线性无关.