

计算方法

第5章 线性方程组的解法



胡 敏

合肥工业大学 计算机与信息学院

jsjxhumin@hfut.edu.cn

第 5 章 线性方程组的解法

5.1 迭代公式的建立

5.2 向量和矩阵的范数

5.3 迭代过程的收敛性



5.2 向量和矩阵的范数

■ 1 向量的范数

为了研究迭代过程的收敛性，需要对向量的“大小”引进某种度量。我们知道，向量的长度可以用来度量其大小，对于 $\vec{x} = [x_1, \dots, x_n]^T \in R^n$ ，其长度记作 $\|x\|_2$

$$\|x\|_2 = \sqrt{\sum_{i=1}^n x_i^2} = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2}$$

借助于长度可以刻画向量序列的收敛性，设向量序列

$\mathcal{X}^{(k)} = \{x_1^{(k)}, x_2^{(k)}, \dots, x_n^{(k)}\}^T$ 和 $\mathcal{X}^* = (x_1^*, x_2^*, \dots, x_n^*)^T$ ，则

$\lim_{k \rightarrow \infty} \mathcal{X}^k = \mathcal{X}^*$ 即 $\lim_{k \rightarrow \infty} x_i^k = x_i^* \quad (i=1, 2, \dots, n)$ 的充要条件是

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \|\mathcal{X}^k - \mathcal{X}^*\|_2 = 0$$



5.2 向量和矩阵的范数

除了长度以外，还有什么度量可用来刻画向量序列的收敛性？这些度量应当具备哪些基本属性？

任给向量 $\vec{x} = [x_1, \dots, x_n]^T \in R^n$ ，其范数记为 $\|\vec{x}\|$ ，且满足下列三个条件：

1. $\|\vec{x}\| \geq 0$ ，且 $\|\vec{x}\| = 0$ 当且仅当 $\vec{x} = 0$ ；（正定性positivity）
2. $\|\lambda \vec{x}\| = |\lambda| \|\vec{x}\|$ ， λ 为任意实数；（齐次性homogeneity）
3. $\|\vec{x} + \vec{y}\| \leq \|\vec{x}\| + \|\vec{y}\|$ ，对任意的 $\vec{x}, \vec{y} \in R^n$ ，（三角不等式，triangle inequality）

向量范数是一种度量，用来衡量一个向量的长度或它到原点（即零向量）的距离。



常用范数: $\vec{x} = [x_1, \dots, x_n]^T \in R^n$

(1) 1—范数: $\|\vec{x}\|_1 = \sum_{i=1}^n |x_i|$

(2) 2—范数 (长度): $\|\vec{x}\|_2 = \sqrt{\sum_{i=1}^n |x_i|^2}$

(3) ∞ —范数: $\|\vec{x}\|_\infty = \max_{1 \leq i \leq n} |x_i|$

(4) p—范数: $\|\vec{x}\|_p = \sqrt[p]{\sum_{i=1}^n |x_i|^p}$

注: 前三种范数都是p—范数的特殊情况。

$$\lim_{p \rightarrow \infty} \|\vec{x}\|_p = \max_{1 \leq i \leq n} |x_i|$$



定理1 对于任意 $\vec{x} = [x_1, \dots, x_n]^T \in R^n$

$$\lim_{p \rightarrow \infty} \|\vec{x}\|_p = \|\vec{x}\|_\infty$$

$$\|\vec{x}\|_p = \sqrt[p]{\sum_{i=1}^n |x_i|^p}$$

证明

$$\|\vec{x}\|_\infty = \max_{1 \leq i \leq n} |x_i|$$

因为

$$(\max_{1 \leq i \leq n} |x_i|^p)^{1/p} \leq (\sum_{i=1}^n |x_i|^p)^{1/p} \leq (n \max_{1 \leq i \leq n} |x_i|^p)^{1/p}$$

所以

$$\lim_{p \rightarrow \infty} \|\vec{x}\|_p = |x_k| = \max_i |x_i| = \|\vec{x}\|_\infty$$



范数等价性

按照不同方式规定的范数，其值一般不相同，但在各种范数下考虑向量序列的收敛性时，却表现出明显的一致性，即向量范数的等价性。

对于两个向量范数 $\|\cdot\|_p$ 与 $\|\cdot\|_q$ ，如果存在常数 c_1 和 c_2
($0 < c_1 \leq c_2$) 使得 $c_1\|x\|_p \leq \|x\|_q \leq c_2\|x\|_p$

则称范数 $\|\cdot\|_p$ 与 $\|\cdot\|_q$ 等价

定理2 任意两个p-范数等价。

向量范数的等价性表明：按不同向量范数定义的向量的收敛性具有一致性。



定理3 在空间 \mathbf{R}^n 中，向量序列 $\{\mathbf{x}^{(k)}\}$ 收敛于向量 \mathbf{x} 的充要条件是对 \mathbf{x} 的任意范数 $\|\cdot\|$ ，有：

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \|\mathbf{x}^{(k)} - \mathbf{x}^*\|_p \rightarrow 0$$



2.矩阵范数

矩阵范数：设A是 $n \times n$ 阶矩阵， $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$
 $X \in \mathbb{R}^n$ ， $\|X\|$ 为 \mathbb{R}^n 中的某范数，称

$$\|A\| = \max_{\substack{X \in \mathbb{R}^n \\ \|X\| \neq 0}} \frac{\|AX\|}{\|X\|} = \max_{\|X\|=1, X \in \mathbb{R}^n} \|AX\|$$

为矩阵A的从属于该向量范数的范数，或称为矩阵A的范数，记为 $\|A\|$ 。



矩阵范数的性质：

(1) 对任意 $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$, 有 $\|A\| \geq 0$, 当且仅当 $A=0$ 时,

$$\|A\|=0.$$

正定性

(2) $\|\lambda A\| = |\lambda| \|A\|$ (λ 为任意实数)

齐次性

(3) 对于任意 $A, B \in \mathbb{R}^{n \times n}$, 恒有

$$\|A+B\| \leq \|A\| + \|B\|.$$

三角不等式

(4) 对于矩阵 $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $X \in \mathbb{R}^n$, 恒有:

$$\|AX\| \leq \|A\| \cdot \|X\|.$$

相容性

(5) 对于任意 $A, B \in \mathbb{R}^{n \times n}$ 恒有 $\|AB\| \leq \|A\| \cdot \|B\|$

证明略



根据常用的向量1-范数，2-范数及 ∞ -范数得到相应的矩阵算子范数

$$\|A\|_1 = \max_{1 \leq j \leq n} \sum_{i=1}^m |a_{ij}|$$

列范数

$$\|A\|_2 = \left[\lambda_{\max}(A^T A) \right]^{\frac{1}{2}}$$

2-范数

谱范数

$$\|A\|_{\infty} = \max_{1 \leq i \leq m} \sum_{j=1}^n |a_{ij}|$$

行范数

$$F\text{-范数: } \|A\|_F = \left(\sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^n a_{ij}^2 \right)^{\frac{1}{2}}$$

谱范数使用起来不方便，但它却有一些特殊的性质，在理论推导中非常重要。

5.3 迭代法的收敛性

线性方程组迭代法收敛条件

定理4 设 G 的某种范数满足 $\|G\| < 1$ ，则 $x^{(k+1)} = Gx^{(k)} + d$ 存在唯一解 $x^* = Gx^* + d$ ，且对任意初值 $x^{(0)}$ ，迭代序列

$$x^{(k+1)} = Gx^{(k)} + d$$

收敛于 x^* 。

定理6 若 A 按行严格对角占优 $(|a_{ii}| > \sum_{j=1, j \neq i}^n |a_{ij}|)$ ，则解 $Ax=b$ 的 Jacobi 迭代和 Gauss-Seidel 迭代均收敛。



迭代法收敛的判别条件

例2 设 $AX = b$ 的系数矩阵

$$A = \begin{bmatrix} 10 & -2 & -1 \\ -2 & 10 & -1 \\ -1 & -2 & 5 \end{bmatrix}$$

判断解 $AX = b$ 的 J 法和 $G-S$ 法的收敛性。



迭代法收敛的判别条件

解： 因为 $|a_{11}| = 10 > |-2| + |-1|$, $|a_{22}| = 10 > |-2| + |-1|$,
 $|a_{33}| = 15 > |-1| + |-2|$

即 A 是严格对角占优矩阵， 故 J 法和 $G-S$ 法收敛。

