2016～2017 学年第二学期《线性代数》试卷（A）参考答案

一、填空题（每小题 4 分，共 20 分）

1、$\underline{-3}$； 2、$\underline{1}$； 3、$\underline{-3}$； 4、$\underline{\lambda \neq 1}$； 5、$\underline{>2}$.

二、选择题（每小题 4 分，共 20 分）

1、B； 2、C； 3、B； 4、D； 5、A.

三、（10 分）

解 $$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&0&3&-1\\2&1&7&0\\-1&2&-1&5\\3&-1&8&-5\end{pmatrix}\xrightarrow[r_4-3r_1]{\substack{r_2-2r_1\\r_3+r_1}}\begin{pmatrix}1&0&3&-1\\0&1&1&2\\0&2&2&4\\0&-1&-1&-2\end{pmatrix}\xrightarrow[r_4+r_2]{r_3-2r_2}\begin{pmatrix}1&0&3&-1\\0&1&1&2\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{pmatrix}.$$

则 $R(\boldsymbol{A})=2$，从而 $R\{\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4\}=2$， $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2$ 为该向量组的一个极大线性无关组，并且

$\boldsymbol{\alpha}_3=3\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2$，$\boldsymbol{\alpha}_4=-\boldsymbol{\alpha}_1+2\boldsymbol{\alpha}_2$.

四、（10 分）

解 将 $\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{B}\boldsymbol{A}=6\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}\boldsymbol{A}$ 两边左乘 $\boldsymbol{A}$，右乘 $\boldsymbol{A}^{-1}$ 得 $\boldsymbol{B}=6\boldsymbol{A}+\boldsymbol{A}\boldsymbol{B}$，即 $(\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})\boldsymbol{B}=6\boldsymbol{A}$，则

$$\boldsymbol{B}=6(\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})^{-1}\boldsymbol{A}=6\begin{pmatrix}\frac{2}{3}&&\\&3&\\&&\frac{6}{7}\end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix}\frac{1}{3}&&\\&\frac{1}{4}&\\&&\frac{1}{7}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3&&\\&2&\\&&1\end{pmatrix}.$$

五、（14 分）

解 （法 1）$\begin{vmatrix}1&1&0\\1&0&-1\\1&a&1\end{vmatrix}=a-2.$

当 $a\neq 2$ 时，该方程组有唯一解；

当 $a=2$ 时，$\overline{\boldsymbol{A}}=\begin{pmatrix}1&1&0&1\\1&0&-1&1\\1&2&1&b\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&1&0&1\\0&-1&-1&0\\0&1&1&b-1\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&0&-1&1\\0&1&1&0\\0&0&0&b-1\end{pmatrix}$，

则当 $a=2$，$b\neq 1$ 时 $R(\boldsymbol{A})=2\neq R(\overline{\boldsymbol{A}})=3$，方程组无解；

当 $a=2$，$b=1$ 时，$\overline{\boldsymbol{A}}\to\begin{pmatrix}1&0&-1&1\\0&1&1&0\\0&0&0&0\end{pmatrix}$，则 $R(\boldsymbol{A})=R(\overline{\boldsymbol{A}})=2<3$，该方程组有无穷多解，且其同解

方程组为 $\begin{cases}x_1=1+x_3\\x_2=-x_3\end{cases}$，其导出组 $\begin{cases}x_1=x_3\\x_2=-x_3\end{cases}$ 的一个基础解系为 $\begin{pmatrix}1\\-1\\1\end{pmatrix}$，于是原方程组的通解为

$\boldsymbol{x}=\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}+k\begin{pmatrix}1\\-1\\1\end{pmatrix}$，$k$ 为任意常数.

（法 2）$\overline{\boldsymbol{A}}=\begin{pmatrix}1&1&0&1\\1&0&-1&1\\1&a&1&b\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&1&0&1\\0&-1&-1&0\\0&a-1&1&b-1\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&0&-1&1\\0&1&1&0\\0&0&2-a&b-1\end{pmatrix}$，则

当 $a\neq 2$ 时，该方程组有唯一解；

当 $a=2$，$b\neq 1$ 时，$R(\boldsymbol{A})=2\neq R(\overline{\boldsymbol{A}})=3$，方程组无解；

当 $a=2$，$b=1$ 时，$R(\boldsymbol{A})=R(\overline{\boldsymbol{A}})=2<3$，该方程组有无穷多解，后同法 1.

六、（8 分）

证 （1）由 $[\boldsymbol{p}_2,\boldsymbol{p}_3]=0$ 得 $a=0$；

（2）此时 $\boldsymbol{p}_2=\begin{pmatrix}0\\-1\\1\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{p}_3=\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}$. 设 $\lambda_1=0$ 所对应的特征向量为 $\boldsymbol{p}_1=\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}$，根据 $[\boldsymbol{p}_1,\boldsymbol{p}_2]=0$ 及

$[\boldsymbol{p}_1,\boldsymbol{p}_3]=0$ 得方程组为 $\begin{cases}-x_2+x_3=0\\x_2+x_3=0\end{cases}$，可取 $\boldsymbol{p}_1=\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}$. 令

$$\boldsymbol{P}=(\boldsymbol{p}_1,\boldsymbol{p}_2,\boldsymbol{p}_3)=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&-1&1\\0&1&1\end{pmatrix},$$

则有 $P^{-1}AP=\Lambda=\begin{pmatrix}0&&\\&1&\\&&-1\end{pmatrix}$，从而

$$A=P\begin{pmatrix}0&&\\&1&\\&&-1\end{pmatrix}P^{-1}=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&-1&1\\0&1&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&&\\&1&\\&&-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0&0\\0&-\frac{1}{2}&\frac{1}{2}\\0&\frac{1}{2}&\frac{1}{2}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&-1\\0&-1&0\end{pmatrix}.$$

$$A^{100}=P\Lambda^{100}P^{-1}=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&-1&1\\0&1&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&&\\&1&\\&&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0&0\\0&-\frac{1}{2}&\frac{1}{2}\\0&\frac{1}{2}&\frac{1}{2}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}.$$

七、（14 分）

解 （1）二次型 f 的矩阵为 $A=\begin{pmatrix}1-a&1+a&0\\1+a&1-a&0\\0&0&2\end{pmatrix}$，因为 $R(A)=2$，则 $|A|=0$，解得 $a=0$.

（2）A 的特征多项式为

$$|A-\lambda E|=\begin{vmatrix}1-\lambda&1&0\\1&1-\lambda&0\\0&0&2-\lambda\end{vmatrix}=-\lambda(\lambda-2)^2,$$

故 A 的特征值是 $\lambda_1=\lambda_2=2,\lambda_3=0$.

当 $\lambda_1=\lambda_2=2$ 时，解齐次线性方程组 $(A-2E)x=0$，由 $A-2E=\begin{pmatrix}-1&1&0\\1&-1&0\\0&0&0\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&-1&0\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}$,

得基础解系 $\xi_1=\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix},\ \xi_2=\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$. 因为 ξ_1 与 ξ_2 已正交，故只需将 ξ_1 单位化，得 $p_1=\frac{\xi_1}{\|\xi_1\|}=\begin{pmatrix}1/\sqrt{2}\\1/\sqrt{2}\\0\end{pmatrix}$.

当 $\lambda_3=0$ 时，解齐次线性方程组 $(A-0\cdot E)x=0$，由

$$A=\begin{pmatrix}1&1&0\\1&1&0\\0&0&2\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&1&0\\0&0&2\\0&0&0\end{pmatrix},$$

得基础解系 $\xi_3=\begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix}$. 单位化得 $p_3=\begin{pmatrix}-1/\sqrt{2}\\1/\sqrt{2}\\0\end{pmatrix}$. 所求正交变换为

$$\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1/\sqrt{2}&0&-1/\sqrt{2}\\1/\sqrt{2}&0&1/\sqrt{2}\\0&1&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}y_1\\y_2\\y_3\end{pmatrix},$$

并将二次型 f 化为标准形 $f=2y_1^2+2y_2^2$.

显然方程 $f(x_1,x_2,x_3)=1$ 表示圆柱面.

八、（4 分）

证 显然 $E-A^{-1}$ 为实对称矩阵. 又设 λ 为 A 的任一特征值，由于 A 及 $A-E$ 正定，则它们的特征值均大于 0，即 $\lambda>1$，从而 $E-A^{-1}$ 的任一特征值 $1-\frac{1}{\lambda}>0$，因此 $E-A^{-1}$ 是正定的.