线性代数

主　编　　唐　烁　　朱士信
副主编　　钱泽平　　时　军

合肥工业大学

第一章　行列式

行列式是非常重要的一个数学工具，不仅在代数领域，而且在其他诸多学科都有着极其重要的作用．本章从引入行列式的实际背景入手，介绍了行列式的递归性定义，探讨了它的一系列性质，给出了计算行列式的若干方法和应用实例，最后还介绍用 Matlab 来计算行列式和行列式概念产生、发展的历史背景．

§ 1.1　行列式的概念

微视频 1-1 行列式的概念
PPT课件 1-1 行列式的概念

1.　行列式的引入

我们知道，下列二元一次线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = b_2 \end{cases}, \tag{1.1}$$

当 $a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} \neq 0$ 时，通过消元法可求得该方程组唯一的解．其解为

$$x_1 = \frac{b_1a_{22} - b_2a_{12}}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}},\quad x_2 = \frac{b_2a_{11} - b_1a_{21}}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}}. \tag{1.2}$$

为了记忆方便，引入记号

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21},$$

这样求解公式 (1.2) 可以写成下列形式

$$x_1 = \frac{\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}},\quad x_2 = \frac{\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}}.$$

由此可见，采用记号后，方程组 (1.1) 求解公式记起来就简单了．为此有下列定义：

定义1.1　已知实数 a, b, c, d，将 a, b, c, d 排成两行两列，记为

$$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc,$$

称$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}$为二阶行列式，$a$，$b$，$c$，$d$为行列式的元素.

由定义可以看出，二阶行列式为一个算式，它是a、d所在的对角线（称为行列式的主对角线）上的元素的乘积ad与b、c所在的对角线（称为行列式的次对角线）上的元素的乘积bc之差.

我们再来解三元一次线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = b_2 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 = b_3 \end{cases}, \tag{1.3}$$

当$a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{13}a_{22}a_{31} \neq 0$时，用消元法解得

$$\begin{cases} x_1 = \dfrac{b_1a_{22}a_{33} + b_3a_{12}a_{23} + b_2a_{13}a_{32} - b_1a_{23}a_{32} - b_2a_{12}a_{33} - b_3a_{13}a_{22}}{a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{13}a_{22}a_{31}} \\ x_2 = \dfrac{a_{11}b_2a_{33} + a_{23}b_1a_{31} + a_{13}b_3a_{21} - a_{11}b_3a_{23} - a_{21}b_1a_{33} - a_{13}b_2a_{31}}{a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{13}a_{22}a_{31}} \\ x_3 = \dfrac{a_{11}a_{22}b_3 + a_{12}a_{31}b_2 + a_{21}a_{32}b_1 - a_{11}a_{32}b_2 - a_{12}a_{21}b_3 - a_{22}a_{31}b_1}{a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{13}a_{22}a_{31}} \end{cases}. \tag{1.4}$$

如果采用记号

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{13}a_{22}a_{31},$$

则上述三元一次线性方程组的解可表示为

$$x_1 = \frac{D_1}{D},\ x_2 = \frac{D_2}{D},\ x_3 = \frac{D_3}{D},$$

其中

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{13}a_{22}a_{31},$$

$$D_1 = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & a_{13} \\ b_2 & a_{22} & a_{23} \\ b_3 & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = b_1a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}b_3 + a_{13}b_2a_{32} - b_1a_{23}a_{32} - a_{12}b_2a_{33} - a_{13}a_{22}b_3,$$

$$D_2=\begin{vmatrix}a_{11} & b_1 & a_{13}\\ a_{21} & b_2 & a_{23}\\ a_{31} & b_3 & a_{33}\end{vmatrix}=a_{11}b_2a_{33}+b_1a_{23}a_{31}+a_{13}a_{21}b_3-a_{11}a_{23}b_3-b_1a_{21}a_{33}-a_{13}b_2a_{31},$$

$$D_3=\begin{vmatrix}a_{11} & a_{12} & b_1\\ a_{21} & a_{22} & b_2\\ a_{31} & a_{32} & b_3\end{vmatrix}=a_{11}a_{22}b_3+a_{12}b_2a_{31}+b_1a_{21}a_{32}-a_{11}b_2a_{32}-a_{12}a_{21}b_3-b_1a_{22}a_{31}.$$

由数的运算规律，我们进一步发现：

$$\begin{aligned}D=\begin{vmatrix}a_{11} & a_{12} & a_{13}\\ a_{21} & a_{22} & a_{23}\\ a_{31} & a_{32} & a_{33}\end{vmatrix}&=a_{11}a_{22}a_{33}+a_{12}a_{23}a_{31}+a_{13}a_{21}a_{32}-a_{11}a_{23}a_{32}-a_{12}a_{21}a_{33}-a_{13}a_{22}a_{31}\\ &=a_{11}(a_{22}a_{33}-a_{23}a_{32})-a_{12}(a_{21}a_{33}-a_{23}a_{31})+a_{13}(a_{21}a_{32}-a_{22}a_{31})\\ &=a_{11}\cdot\begin{vmatrix}a_{22} & a_{23}\\ a_{32} & a_{33}\end{vmatrix}-a_{12}\cdot\begin{vmatrix}a_{21} & a_{23}\\ a_{31} & a_{33}\end{vmatrix}+a_{13}\cdot\begin{vmatrix}a_{21} & a_{22}\\ a_{31} & a_{32}\end{vmatrix}\end{aligned}$$

称$\begin{vmatrix}a_{11} & a_{12} & a_{13}\\ a_{21} & a_{22} & a_{23}\\ a_{31} & a_{32} & a_{33}\end{vmatrix}$为三阶行列式，$\begin{vmatrix}a_{22} & a_{23}\\ a_{32} & a_{33}\end{vmatrix}$是三阶行列式$D$划去元素$a_{11}$所在行及所在列的元素后，余下的元素按原来的位置次序所构成的二阶行列式，称它为元素a_{11}的余子式，记为M_{11}，即$M_{11}=\begin{vmatrix}a_{22} & a_{23}\\ a_{32} & a_{33}\end{vmatrix}$，类似有，$M_{12}=\begin{vmatrix}a_{21} & a_{23}\\ a_{31} & a_{33}\end{vmatrix}$，$M_{13}=\begin{vmatrix}a_{21} & a_{22}\\ a_{31} & a_{32}\end{vmatrix}$.

采用这样的记号后，

$$D=\begin{vmatrix}a_{11} & a_{12} & a_{13}\\ a_{21} & a_{22} & a_{23}\\ a_{31} & a_{32} & a_{33}\end{vmatrix}=a_{11}M_{11}-a_{12}M_{12}+a_{13}M_{13}.$$

我们再记$(-1)^{i+j}M_{ij}$为A_{ij}，并称$A_{ij}=(-1)^{i+j}M_{ij}\ (i，j=1,2,3)$为元素$a_{ij}$的代数余子式．从而$D=\begin{vmatrix}a_{11} & a_{12} & a_{13}\\ a_{21} & a_{22} & a_{23}\\ a_{31} & a_{32} & a_{33}\end{vmatrix}=a_{11}A_{11}+a_{12}A_{12}+a_{13}A_{13}.$

从上面的演算可以看出，三阶行列式的计算可以转化为二阶行列式来计算．

2. n阶行列式的定义

由前面二阶行列式、三阶行列式及其关系，我们可以利用递推的方法给出n阶行列式的定义．

定义1.2 由 n^2 个数 a_{ij} $(i，j=1, 2, \cdots, n)$ 排成 n 行 n 列的 n 阶行列式

$$D_n=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

概念解析：行列式的概念

是一个算式，也可简记为 $D=\left|a_{ij}\right|_{n\times n}$.

当 $n=1$ 时，规定 $D_1=a_{11}$；

当 $n\geq 2$ 时，$D_n=a_{11}A_{11}+a_{12}A_{12}+\cdots+a_{1n}A_{1n}=\sum\limits_{i=1}^{n}a_{1i}A_{1i}$，

其中 $A_{ij}=(-1)^{i+j}M_{ij}$ 称为元素 a_{ij} 的代数余子式，M_{ij} 是在 n 阶行列式 D_n 中划去元素 a_{ij} 所在的第 i 行和第 j 列元素，余下的元素按原来的位置次序所构成的 $n-1$ 阶行列式，称为元素 a_{ij} 的余子式，即

概念解析：代数余子式的概念

$$M_{ij}=\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1,j-1} & a_{1,j+1} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i-1,1} & \cdots & a_{i-1,j-1} & a_{i-1,j+1} & \cdots & a_{i-1,n} \\ a_{i+1,1} & \cdots & a_{i+1,j-1} & a_{i+1,j+1} & \cdots & a_{i+1,n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{n,j-1} & a_{n,j+1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

例1 计算行列式 $D=\begin{vmatrix} 2 & -1 & 3 \\ -1 & 2 & 1 \\ 4 & 1 & 2 \end{vmatrix}$.

解 $D=2\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix}-(-1)\begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 4 & 2 \end{vmatrix}+3\begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 4 & 1 \end{vmatrix}$

$=2\times(4-1)+(-2-4)+3(-1-6)=-27$.

例2 若行列式的元素满足：当 $i<j$ 时，$a_{ij}=0$，则称其为下三角行列式．计算 n 阶下三角行列式

$$D_n=\begin{vmatrix} a_{11} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

解 $$D_n=\begin{vmatrix} a_{11} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}=a_{11}\begin{vmatrix} a_{22} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{32} & a_{33} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n2} & a_{n3} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

$$=a_{11}a_{22}\begin{vmatrix} a_{33} & \cdots & 0 \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n3} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}=\cdots=a_{11}a_{22}\cdots a_{n-2,n-2}\begin{vmatrix} a_{n-1,n-1} & 0 \\ a_{n,n-1} & a_{nn} \end{vmatrix}=a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}.$$

例3 计算 $$D_n=\begin{vmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & a_{1n} \\ 0 & 0 & \cdots & a_{2,n-1} & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & a_{n-1,2} & \cdots & a_{n-1,n-1} & a_{n-1,n} \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{n,n-1} & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

解 $$D_n=(-1)^{1+n}a_{1n}\begin{vmatrix} 0 & \cdots & 0 & a_{2,n-1} \\ 0 & \cdots & a_{3,n-2} & a_{3,n-1} \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{n,n-2} & a_{n,n-1} \end{vmatrix}$$

$$=(-1)^{1+n}a_{1n}(-1)^{1+(n-1)}a_{2,n-1}\begin{vmatrix} 0 & \cdots & 0 & a_{3,n-2} \\ 0 & \cdots & a_{4,n-3} & a_{4,n-2} \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{n,n-3} & a_{n,n-2} \end{vmatrix}$$

$$=(-1)^{(n+1)+n+(n-1)}a_{1n}a_{2,n-1}a_{3,n-2}\begin{vmatrix} 0 & \cdots & 0 & a_{4,n-3} \\ 0 & \cdots & a_{5,n-4} & a_{5,n-3} \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{n,n-4} & a_{n,n-3} \end{vmatrix}$$

$$=(-1)^{(n+1)+n+\cdots+3+2}a_{1n}a_{2,n-1}\cdots a_{n1}$$

$$=(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}a_{1n}a_{2,n-1}a_{3,n-2}\cdots a_{n1}.$$

微视频：行列式性质
PPT 课件:行列式的性质

§1.2　行列式的性质

为了进一步简化n阶行列式的计算，以下研究行列式的性质.

定义1.3　将n阶行列式D的第i（$i=1,\cdots,n$）行（或列）元素作为新行列式的第i列（或行）元素，则所得的新行列式称为D的转置行列式，记为D^T．即若

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}，则 D^T=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{n1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{n2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

以下不加证明地给出行列式的性质.

性质1.1　行列式与它的转置行列式相等，即$D=D^T$.

此性质说明行列式的行与列具有同等的地位，因而行列式的性质凡是对行成立的，对列也同样成立；反之亦然.

例 1　若行列式的元素满足：当$i>j$时有$a_{ij}=0$，则称其为上三角行列式．计算n阶上三角行列式

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

解　将n阶上三角行列式进行转置，由性质 1.1 知

$$D=D^T=\begin{vmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

而D^T是下三角行列式，由§1.1 中例 2 知

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}=a_{11}a_{22}\cdot\cdots\cdot a_{nn}.$$

特别地，若当$i\neq j$时有$a_{ij}=0$，则称此行列式为n阶对角行列式，即有

$$\begin{vmatrix} a_{11} & & & \\ & a_{22} & & \\ & & \ddots & \\ & & & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}\cdots\cdots a_{nn}.$$

性质1.2 互换行列式任意两行（或列）元素，行列式变号．

如（$i \neq j$）

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{j1} & a_{j2} & \cdots & a_{jn} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{j1} & a_{j2} & \cdots & a_{jn} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

推论1.1 如果行列式D中有两行（或列）元素相同，则$D=0$．

如 $\begin{vmatrix} 1 & 0 & -3 \\ 2 & 4 & 0 \\ 1 & 0 & -3 \end{vmatrix} = 0$，$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 2 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & -3 \end{vmatrix} = 0$．

性质1.3 行列式的某一行（或列）的所有元素都乘以同一数k，等于用数k乘此行列式，即

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ ka_{i1} & ka_{i2} & \cdots & ka_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = k\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

推论1.2 行列式中某一行（或列）元素的公因子可以提到行列式符号的外面．

推论1.3 如果行列式D中有一行（或列）元素全为零，则$D=0$．

推论1.4 如果行列式D中有两行（或列）元素对应成比例，则$D=0$．

性质1.4 如果行列式的某一行（或列）元素都是两项的和，则可以把该行列式拆成两个行列式之和．

如

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1}+b_{i1} & a_{i2}+b_{i2} & \cdots & a_{in}+b_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_{i1} & b_{i2} & \cdots & b_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

性质1.5 把行列式某一行（或列）元素都乘以同一个数k后，加到另一行（或列）对应元素上去，则行列式值不变.

如

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{j1} & a_{j2} & \cdots & a_{jn} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1}+ka_{j1} & a_{i2}+ka_{j2} & \cdots & a_{in}+ka_{jn} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{j1} & a_{j2} & \cdots & a_{jn} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

以数k乘行列式的第j行再加到第i行上，记作$r_i + kr_j$，以数k乘行列式的第j列再加到第i列上，记作$c_i + kc_j$.

性质1.6 行列式等于它的任一行（或列）的各元素与其对应的代数余子式乘积之和．即

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{i1}A_{i1} + a_{i2}A_{i2} + \cdots + a_{in}A_{in}$$

$$= a_{1j}A_{1j} + a_{2j}A_{2j} + \cdots + a_{nj}A_{nj},$$

i，$j = 1, 2, \cdots, n$.

推论1.5 行列式D中某一行（或列）的元素与另一行（或列）对应元素的代数余子式乘积之和为零.

将性质1.6与推论 1.5 合起来写就是

$$a_{i1}A_{k1} + a_{i2}A_{k2} + \cdots + a_{in}A_{kn} = \begin{cases} D & i = k \\ 0 & i \neq k \end{cases},$$

（或 $a_{1j}A_{1s}+a_{2j}A_{2s}+\cdots+a_{nj}A_{ns}=\begin{cases}D & j=s\\ 0 & j\neq s\end{cases}$.）

行列式典型例题分析

例 2 计算 $D=\begin{vmatrix}1&2&-3&4\\2&3&-4&7\\-1&-2&5&-8\\1&3&-5&10\end{vmatrix}$.

解 $D\overset{r_2+(-2)r_1}{=}\begin{vmatrix}1&2&-3&4\\0&-1&2&-1\\-1&-2&5&-8\\1&3&-5&10\end{vmatrix}\overset{\substack{r_3+r_1\\r_4+(-1)r_1}}{=}\begin{vmatrix}1&2&-3&4\\0&-1&2&-1\\0&0&2&-4\\0&1&-2&6\end{vmatrix}$

$$\overset{r_4+r_2}{=}\begin{vmatrix}1&2&-3&4\\0&-1&2&-1\\0&0&2&-4\\0&0&0&5\end{vmatrix}=-10.$$

例 3 已知 $\begin{vmatrix}a_1&b_1&c_1\\a_2&b_2&c_2\\a_3&b_3&c_3\end{vmatrix}=a$，$\begin{vmatrix}a_1'&c_1&b_1\\a_2'&c_2&b_2\\a_3'&c_3&b_3\end{vmatrix}=b$，计算

$$D=\begin{vmatrix}a_1+2a_1'&a_2+2a_2'&a_3+2a_3'\\b_1&b_2&b_3\\c_1+3b_1&c_2+3b_2&c_3+3b_3\end{vmatrix}.$$

解 由行列式的性质，可得

$$D=\begin{vmatrix}a_1+2a_1'&a_2+2a_2'&a_3+2a_3'\\b_1&b_2&b_3\\c_1&c_2&c_3\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}a_1+2a_1'&a_2+2a_2'&a_3+2a_3'\\b_1&b_2&b_3\\3b_1&3b_2&3b_3\end{vmatrix}$$

$$=\begin{vmatrix}a_1+2a_1'&a_2+2a_2'&a_3+2a_3'\\b_1&b_2&b_3\\c_1&c_2&c_3\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}a_1&a_2&a_3\\b_1&b_2&b_3\\c_1&c_2&c_3\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}2a_1'&2a_2'&2a_3'\\b_1&b_2&b_3\\c_1&c_2&c_3\end{vmatrix}$$

$$=\begin{vmatrix}a_1&b_1&c_1\\a_2&b_2&c_2\\a_3&b_3&c_3\end{vmatrix}-2\begin{vmatrix}a_1'&c_1&b_1\\a_2'&c_2&b_2\\a_3'&c_3&b_3\end{vmatrix}=a-2b.$$

例 4 已知 $D=\begin{vmatrix}1&3&0&1\\3&0&1&4\\1&1&2&1\\0&1&1&0\end{vmatrix}$，计算：（1）$A_{31}+A_{32}+A_{33}+A_{34}$；（2）$M_{31}+M_{32}+M_{33}$

$+M_{34}$.

解 （1）$A_{31}+A_{32}+A_{33}+A_{34}=\begin{vmatrix}1&3&0&1\\3&0&1&4\\1&1&1&1\\0&1&1&0\end{vmatrix}=-3$；

（2）$M_{31}+M_{32}+M_{33}+M_{34}=A_{31}-A_{32}+A_{33}-A_{34}=\begin{vmatrix}1&3&0&1\\3&0&1&4\\1&-1&1&-1\\0&1&1&0\end{vmatrix}=-25$.

例5 设

$$D=\begin{vmatrix}a_{11}&\cdots&a_{1k}&&&\\\vdots&&\vdots&&0&\\a_{k1}&\cdots&a_{kk}&&&\\c_{11}&\cdots&c_{1k}&b_{11}&\cdots&b_{1n}\\\vdots&&\vdots&\vdots&&\vdots\\c_{n1}&\cdots&c_{nk}&b_{n1}&\cdots&b_{nn}\end{vmatrix},\quad D_1=\begin{vmatrix}a_{11}&\cdots&a_{1k}\\\vdots&&\vdots\\a_{k1}&\cdots&a_{kk}\end{vmatrix},\quad D_2=\begin{vmatrix}b_{11}&\cdots&b_{1n}\\\vdots&&\vdots\\b_{n1}&\cdots&b_{nn}\end{vmatrix},$$

证明：$D=D_1D_2$.

证 对 D_1 利用行列式性质 1.5，可以把 D_1 化为下三角行列式，设为

$$D_1=\begin{vmatrix}p_{11}&&0\\\vdots&\ddots&\\p_{k1}&\cdots&p_{kk}\end{vmatrix}=p_{11}\cdots p_{kk};$$

同样，对 D_2 利用行列式性质 1.5，把 D_2 化为下三角行列式，设为

$$D_2=\begin{vmatrix}q_{11}&&0\\\vdots&\ddots&\\q_{n1}&\cdots&q_{nn}\end{vmatrix}=q_{11}\cdots q_{nn};$$

于是

$$D=\begin{vmatrix}p_{11}&&&&&\\\vdots&\ddots&&&0&\\p_{k1}&\cdots&p_{kk}&&&\\c_{11}&\cdots&c_{1k}&q_{11}&&\\\vdots&&\vdots&\vdots&\ddots&\\c_{n1}&\cdots&c_{nk}&q_{n1}&\cdots&q_{nn}\end{vmatrix}=\left(p_{11}\cdots p_{kk}\right)\left(q_{11}\cdots q_{nn}\right)=D_1D_2.$$

例 6　证明 n 阶 **Vandermonde**（范德蒙德）行列式

$$D_n=\begin{vmatrix}1&1&1&\cdots&1\\x_1&x_2&x_3&\cdots&x_n\\x_1^2&x_2^2&x_3^2&\cdots&x_n^2\\\vdots&\vdots&\vdots&&\vdots\\x_1^{n-1}&x_2^{n-1}&x_3^{n-1}&\cdots&x_n^{n-1}\end{vmatrix}=\prod_{1\le j<i\le n}\left(x_i-x_j\right).$$

概念解析：
范德蒙德行列式

证

$$D_n\overset{r_i-x_1r_{i-1}}{\underset{i=n,\,n-1,\,\cdots,\,3,\,2}{=}}\begin{vmatrix}1&1&1&\cdots&1\\0&x_2-x_1&x_3-x_1&\cdots&x_n-x_1\\0&x_2\left(x_2-x_1\right)&x_3\left(x_3-x_1\right)&\cdots&x_n\left(x_n-x_1\right)\\\vdots&\vdots&\vdots&&\vdots\\0&x_2^{n-2}\left(x_2-x_1\right)&x_3^{n-2}\left(x_3-x_1\right)&\cdots&x_n^{n-2}\left(x_n-x_1\right)\end{vmatrix}$$

$$=\left(x_2-x_1\right)\left(x_3-x_1\right)\cdots\left(x_n-x_1\right)D_{n-1}$$

$$=[\left(x_2-x_1\right)\cdots\left(x_n-x_1\right)][\left(x_3-x_2\right)\cdots\left(x_n-x_2\right)]D_{n-2}$$

$$=\cdots$$

$$=[\left(x_2-x_1\right)\cdots\left(x_n-x_1\right)][\left(x_3-x_2\right)\cdots\left(x_n-x_2\right)]\cdots[\left(x_{n-1}-x_{n-2}\right)\left(x_n-x_{n-2}\right)D_2$$

$$=[\left(x_2-x_1\right)\cdots\left(x_n-x_1\right)][\left(x_3-x_2\right)\cdots\left(x_n-x_2\right)]\cdots[\left(x_{n-1}-x_{n-2}\right)\left(x_n-x_{n-2}\right)\begin{vmatrix}1&1\\x_{n-1}&x_n\end{vmatrix}$$

$$=[\left(x_2-x_1\right)\cdots\left(x_n-x_1\right)][\left(x_3-x_2\right)\cdots\left(x_n-x_2\right)]\cdots[\left(x_{n-1}-x_{n-2}\right)\left(x_n-x_{n-2}\right)\left(x_n-x_{n-1}\right)$$

$$=\prod_{1\le j<i\le n}\left(x_i-x_j\right).$$

例 7　计算 $D_{2n}=\begin{vmatrix}a&&&&&b\\&\ddots&&&\unicode{x22F0}&\\&&a&b&&\\&&c&d&&\\&\unicode{x22F0}&&&\ddots&\\c&&&&&d\end{vmatrix}$.

解　将 D_{2n} 按第一行展开得

$$D_{2n}=a\begin{vmatrix}a & & 0 & & b & 0\\ & \ddots & & \iddots & & \\ 0 & & a & b & & 0 & \vdots\\ & & c & d & & \\ & \iddots & & & \ddots & \\ c & & 0 & & d & 0\\ 0 & & \cdots & & 0 & d\end{vmatrix}+b(-1)^{2n+1}\begin{vmatrix}0 & a & & 0 & & b\\ & & \ddots & & \iddots & \\ \vdots & 0 & & a \quad b & & 0\\ & & & c \quad d & & \\ & & \iddots & & \ddots & \\ 0 & c & & \cdots & & d\\ c & 0 & & \cdots & & 0\end{vmatrix}$$

$$=adD_{2(n-1)}-bc(-1)^{(2n-1)+1}D_{2(n-1)}=(ad-bc)D_{2(n-1)}$$

$$=(ad-bc)^2D_{2(n-2)}=\cdots=(ad-bc)^{n-1}D_2$$

$$=(ad-bc)^{n-1}\begin{vmatrix}a & b\\ c & d\end{vmatrix}=(ad-bc)^n.$$

例8 计算 $D_n=\begin{vmatrix}x_1-m & x_2 & x_3 & \cdots & x_n\\ x_1 & x_2-m & x_3 & \cdots & x_n\\ x_1 & x_2 & x_3-m & \cdots & x_n\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ x_1 & x_2 & x_3 & \cdots & x_n-m\end{vmatrix}$.

解 将 D_n 中第 $2,3,\cdots,n$ 列元素都加到第 1 列对应的元素上，再提出公因子得

$$D_n=\begin{vmatrix}-m+\sum_{i=1}^n x_i & x_2 & \cdots & x_n\\ -m+\sum_{i=1}^n x_i & x_2-m & \cdots & x_n\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ -m+\sum_{i=1}^n x_i & x_2 & \cdots & x_n-m\end{vmatrix}=(-m+\sum_{i=1}^n x_i)\begin{vmatrix}1 & x_2 & \cdots & x_n\\ 1 & x_2-m & \cdots & x_n\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ 1 & x_2 & \cdots & x_n-m\end{vmatrix}$$

$$=(-m+\sum_{i=1}^n x_i)\begin{vmatrix}1 & x_2 & \cdots & x_n\\ 0 & -m & \cdots & 0\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ 0 & 0 & \cdots & -m\end{vmatrix}=(-m+\sum_{i=1}^n x_i)(-m)^{n-1}.$$

例 9 若行列式 $D=\left|a_{ij}\right|_{n\times n}$ 的元素满足 $a_{ij}=-a_{ji}\left(i，j=1,2,\cdots,n\right)$，则称 D 为反对称行列式．证明奇数阶反对称行列式的值为零．

证 由题设条件 $a_{ij}=-a_{ji}\left(i，j=1,2,\cdots,n\right)$ 知，$a_{ii}=-a_{ii}$ ，从而 $a_{ii}=0$，$i=1,2,\cdots,n$，故

$$D=\begin{vmatrix} 0 & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ -a_{12} & 0 & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ -a_{1n} & -a_{2n} & \cdots & 0 \end{vmatrix},$$

将 D 的每一行提取公因子 (-1) 得

$$D=(-1)^n\begin{vmatrix} 0 & -a_{12} & \cdots & -a_{1n} \\ a_{12} & 0 & \cdots & -a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & 0 \end{vmatrix}=(-1)^n D^T=(-1)^n D,$$

方法总结：具体行列式计算的若干方法

由 n 是奇数得 $D=-D$，故 $D=0$.

§1.3 克莱姆（Cramer）法则

微视频：克莱姆法则
PPT 课件：克莱姆法则

从前面的学习我们了解到，行列式是在解线性方程组的时候，为方便人们记忆而引入的；同时随着学习的深入，我们可以看到行列式是一种非常好的工具，理论上有着重要的作用.

我们已经知道，通过解二元、三元线性方程组引进二阶、三阶行列式，这样对于二元、三元线性方程组，在方程组有唯一解时，其解可以通过行列式表示，那么对 n 个变量 n 个方程的线性方程组，其解是否仍然能用行列式表示？如果能表示，那是否有规律可循呢？克莱姆（Cramer）法则给予了肯定的回答.

定理 1.1 若线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_n=b_1 \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots+a_{2n}x_n=b_2 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{n1}x_1+a_{n2}x_2+\cdots+a_{nn}x_n=b_n \end{cases} \tag{1.5}$$

的系数行列式

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \neq 0,$$

则方程组（1.5）有解且唯一，其解可表示为

$$x_1=\frac{D_1}{D}, x_2=\frac{D_2}{D}, \cdots, x_n=\frac{D_n}{D}. \tag{1.6}$$

其中D_j是把D中第j列换成常数项$b_1, b_2, \cdots, b_n$所得行列式，即

$$D_j=\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1,j-1} & b_1 & a_{1,j+1} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & \cdots & a_{2,j-1} & b_2 & a_{2,j+1} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{n,j-1} & b_n & a_{n,j+1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \quad (j=1,2,\cdots,n).$$

证明 首先证明（1.6）是方程组（1.5）的解.

将$x_j=\dfrac{D_j}{D}(j=1,2,\cdots,n)$代入第$k(k=1,2,\cdots,n)$个方程的左边，得

$$a_{k1}\frac{D_1}{D}+a_{k2}\frac{D_2}{D}+\cdots+a_{kn}\frac{D_n}{D}=\frac{1}{D}(a_{k1}D_1+a_{k2}D_2+\cdots+a_{kn}D_n).$$

由于

$$D_j=b_1A_{1j}+b_2A_{2j}+\cdots+b_nA_{nj}, \qquad (j=1,2,\cdots,n)$$

故有

第$k(k=1,2,\cdots,n)$个方程的左边

$$=\frac{1}{D}[a_{k1}(b_1A_{11}+b_2A_{21}+\cdots+b_nA_{n1})+a_{k2}(b_1A_{12}+b_2A_{22}+\cdots+b_nA_{n2})$$

$$+\cdots+a_{kn}(b_1A_{1n}+b_2A_{2n}+\cdots+b_nA_{nn})]$$

$$=\frac{1}{D}[b_1(a_{k1}A_{11}+a_{k2}A_{12}+\cdots+a_{kn}A_{1n})+b_2(a_{k1}A_{21}+a_{k2}A_{22}+\cdots+a_{kn}A_{2n})$$

$$+\cdots+b_n(a_{k1}A_{n1}+a_{k2}A_{n2}+\cdots+a_{kn}A_{nn})],$$

根据行列式性质 1.6 和推论 1.5，上式中只有b_k的系数是D，而其它$b_s(s\neq k)$的系数全为零，故

第$k(k=1,2,\cdots,n)$个方程的左边

$$=\frac{1}{D}(b_1\cdot 0+\cdots+b_{k-1}\cdot 0+b_k\cdot D+b_{k+1}\cdot 0+\cdots+b_n\cdot 0)=\frac{1}{D}\cdot b_k\cdot D=b_k,$$

这说明$x_j=\dfrac{D_j}{D}(j=1,2,\cdots,n)$是方程组（1.5）的解.

其次，设$x_1=c_1,x_2=c_2,\cdots,x_n=c_n$是方程组（1.5）的任意一个解.那么将$x_j=c_j(j=1,2,\cdots,n)$代入（1.5）后，得

$$\begin{cases} a_{11}c_1+a_{12}c_2+\cdots+a_{1n}c_n=b_1 \\ a_{21}c_1+a_{22}c_2+\cdots+a_{2n}c_n=b_2 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{n1}c_1+a_{n2}c_2+\cdots+a_{nn}c_n=b_n \end{cases} \tag{1.7}$$

用系数行列式的第j列元素的代数余子式$A_{1j},A_{2j},\cdots A_{nj}$依次乘以（1.7）中$n$个等式，得

$$\begin{cases} a_{11}A_{1j}c_1+a_{12}A_{1j}c_2+\cdots+a_{1n}A_{1j}c_n=b_1A_{1j}, \\ a_{21}A_{2j}c_1+a_{22}A_{2j}c_2+\cdots+a_{2n}A_{2j}c_n=b_2A_{2j}, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{n1}A_{nj}c_1+a_{n2}A_{nj}c_2+\cdots+a_{nn}A_{nj}c_n=b_nA_{nj}. \end{cases}$$

将此n个等式相加，得

$$\begin{aligned}&(a_{11}A_{1j}+a_{21}A_{2j}+\cdots+a_{n1}A_{nj})c_1+(a_{12}A_{1j}+a_{22}A_{2j}+\cdots+a_{n2}A_{nj})c_2\\&+\cdots+(a_{1n}A_{1j}+a_{2n}A_{2j}+\cdots+a_{nn}A_{nj})c_n=b_1A_{1j}+b_2A_{2j}+\cdots+b_nA_{nj}\end{aligned}.$$

将D_j按第j列展开得：$b_1A_{1j}+b_2A_{2j}+\cdots+b_nA_{nj}=D_j$.

故

$$\begin{aligned}&(a_{11}A_{1j}+a_{21}A_{2j}+\cdots+a_{n1}A_{nj})c_1+(a_{12}A_{1j}+a_{22}A_{2j}+\cdots+a_{n2}A_{nj})c_2\\&+\cdots+(a_{1n}A_{1j}+a_{2n}A_{2j}+\cdots+a_{nn}A_{nj})c_n=D_j.\end{aligned}$$

又根据性质 1.6 及推论 1.5 得

$$0\cdot c_1+\cdots+0\cdot c_{j-1}+D\cdot c_j+0\cdot c_{j+1}+\cdots+0\cdot c_n=D_j.$$

即$D\cdot c_j=D_j$，也即$c_j=\dfrac{D_j}{D}$.

这就是说，若$(c_1,c_2,\cdots,c_n)$是方程组（1.5）的任意一个解，则必有$c_j=\dfrac{D_j}{D}(j=1,2,\cdots,n)$.故方程组有唯一解.

例 1 问a,b满足什么条件，方程组

$$\begin{cases} ax_1+bx_2+bx_3=1, \\ bx_1+ax_2+bx_3=1, \\ bx_1+bx_2+ax_3=-2. \end{cases}$$

有唯一解，并求出唯一解.

解　方程组的系数行列式为

$$D=\begin{vmatrix} a & b & b \\ b & a & b \\ b & b & a \end{vmatrix}=(a+2b)(a-b)^2.$$

由 Cramer 法则知，当 $(a+2b)(a-b)^2 \neq 0$ 时，方程组有唯一解.此时

$$D_1=\begin{vmatrix} 1 & b & b \\ 1 & a & b \\ -2 & b & a \end{vmatrix}=(a-b)(a+2b),\ D_2=\begin{vmatrix} a & 1 & b \\ b & 1 & b \\ b & -2 & a \end{vmatrix}=(a-b)(a+2b),$$

$$D_3=\begin{vmatrix} a & b & 1 \\ b & a & 1 \\ b & b & -2 \end{vmatrix}=-2(a-b)(a+2b),$$

从而唯一解为 $x_1=\dfrac{1}{a-b}, x_2=\dfrac{1}{a-b}, x_3=\dfrac{-2}{a-b}$.

§1.4　应用实例

1. 利用行列式进行分解因式

例1　分解因式　$a^2c+ab^2+bc^2-ac^2-b^2c-a^2b$.

解　原式$=(bc^2-b^2c)-(ac^2-a^2c)+(ab^2-a^2b)$

$$=\begin{vmatrix} b & b^2 \\ c & c^2 \end{vmatrix}-\begin{vmatrix} a & a^2 \\ c & c^2 \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} a & a^2 \\ b & b^2 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} 1 & a & a^2 \\ 1 & b & b^2 \\ 1 & c & c^2 \end{vmatrix}$$

$$=\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ a^2 & b^2 & c^2 \end{vmatrix}=(b-a)(c-a)(c-b).$$

所以

$$a^2c+ab^2+bc^2-ac^2-b^2c-a^2b=(b-a)(c-a)(c-b).$$

当然本题利用行列式来进行因式分解并不是一种简单的方法，只是提供解决问题的另外

一种思路.

2.“杨辉三角形”中的行列式问题

考察下面的行列式

$$D=\begin{vmatrix}1&1&1&1\\1&2&3&4\\1&3&6&10\\1&4&10&20\end{vmatrix},$$

不难发现

$$1=1,\quad \begin{vmatrix}1&1\\1&2\end{vmatrix}=1,\ \begin{vmatrix}1&1&1\\1&2&3\\1&3&6\end{vmatrix}=1,\ \begin{vmatrix}1&1&1&1\\1&2&3&4\\1&3&6&10\\1&4&10&20\end{vmatrix}=1.$$

这一现象并非偶然，经观察，发现这些行列式的元素从某一角度看构成“杨辉三角形”的一部分，现表示如下：

$$\begin{array}{ccccccccccccccc}
&&&&&&&1&&&&&&&\\
&&&&&&1&&1&&&&&&\\
&&&&&1&&2&&1&&&&&\\
&&&&1&&3&&3&&1&&&&\\
&&&1&&4&&6&&4&&1&&&\\
&&1&&5&&10&&10&&5&&1&&\\
&1&&6&&15&&20&&15&&6&&1&\\
1&&7&&21&&35&&35&&21&&7&&1\\
\cdots&\cdots&\cdots&\cdots&\cdots&\cdots&\cdots&\cdots&\cdots&\cdots&\cdots&\cdots&\cdots&\cdots&\cdots
\end{array}$$

规定 $C_0^0=1$，上面的三角形可写成下面的形式

$$\begin{array}{ccccccccc}
&&&&C_0^0&&&&\\
&&&C_1^0&&C_1^1&&&\\
&&C_2^0&&C_2^1&&C_2^2&&\\
&C_3^0&&C_3^1&&C_3^2&&C_3^3&\\
C_4^0&&C_4^1&&C_4^2&&C_4^3&&C_4^4
\end{array}$$

$$\cdots\quad\cdots\quad\cdots\quad\cdots\quad\cdots\quad\cdots\quad\cdots\quad\cdots\quad\cdots$$

$$C_{n-1}^{0}\qquad C_{n-1}^{1}\quad\cdots\quad\cdots\quad\cdots\quad\cdots\quad\cdots\quad C_{n-1}^{n-2}\qquad C_{n-1}^{n-1}$$

$$C_{n}^{0}\qquad C_{n}^{1}\quad\cdots\quad\cdots\quad\cdots\quad C_{n}^{r}\quad\cdots\quad\cdots\quad\ldots\quad C_{n}^{n-1}\qquad C_{n}^{n}$$

于是，猜想有如下命题

$$D_n=\begin{vmatrix} C_0^0 & C_1^1 & C_2^2 & \cdots & C_{n-2}^{n-2} & C_{n-1}^{n-1} \\ C_1^0 & C_2^1 & C_3^2 & \cdots & C_{n-1}^{n-2} & C_n^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ C_{n-2}^0 & C_{n-1}^1 & C_n^2 & \cdots & C_{2n-4}^{n-2} & C_{2n-3}^{n-1} \\ C_{n-1}^0 & C_n^1 & C_{n+1}^2 & \cdots & C_{2n-3}^{n-2} & C_{2n-2}^{n-1} \end{vmatrix}=1.$$

下面证明这个猜想是正确的.

用数学归纳法来证明.

（1）$D_1=C_0^0=1$，命题成立；

（2）假设 $D_k=1$，即

$$D_k=\begin{vmatrix} C_0^0 & C_1^1 & C_2^2 & \cdots & C_{k-2}^{k-2} & C_{k-1}^{k-1} \\ C_1^0 & C_2^1 & C_3^2 & \cdots & C_{k-1}^{k-2} & C_k^{k-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ C_{k-2}^0 & C_{k-1}^1 & C_k^2 & \cdots & C_{2k-4}^{k-2} & C_{2k-3}^{k-1} \\ C_{k-1}^0 & C_k^1 & C_{k+1}^2 & \cdots & C_{2k-3}^{k-2} & C_{2k-2}^{k-1} \end{vmatrix}=1.$$

对于

$$D_{k+1}=\begin{vmatrix} C_0^0 & C_1^1 & \cdots & C_{k-2}^{k-2} & C_{k-1}^{k-1} & C_k^k \\ C_1^0 & C_2^1 & \cdots & C_{k-1}^{k-2} & C_k^{k-1} & C_{k+1}^k \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots \\ C_{k-2}^0 & C_{k-1}^1 & \cdots & C_{2k-4}^{k-2} & C_{2k-3}^{k-1} & C_{2k-2}^k \\ C_{k-1}^0 & C_k^1 & \cdots & C_{2k-3}^{k-2} & C_{2k-2}^{k-1} & C_{2k-1}^k \\ C_k^0 & C_{k+1}^1 & \cdots & C_{2k-2}^{k-2} & C_{2k-1}^{k-1} & C_{2k}^k \end{vmatrix},$$

从最后一行起，每一行减去相邻的上一行，并根据组合数的性质 $C_{n+1}^m-C_n^m=C_n^{m-1}$，得

$$D_{k+1}=\begin{vmatrix} 1 & C_1^1 & C_2^2 & \cdots & C_{k-1}^{k-1} & C_k^k \\ 0 & C_1^0 & C_2^1 & \cdots & C_{k-1}^{k-2} & C_k^{k-1} \\ 0 & C_2^0 & C_3^1 & \cdots & C_k^{k-2} & C_{k+1}^{k-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & C_{k-1}^0 & C_k^1 & \cdots & C_{2k-3}^{k-2} & C_{2k-2}^{k-1} \\ 0 & C_k^0 & C_{k+1}^1 & \cdots & C_{2k-2}^{k-2} & C_{2k-1}^{k-1} \end{vmatrix},$$

按照第 1 列展开 D_{k+1}，得

$$D_{k+1}=\begin{vmatrix} C_1^0 & C_2^1 & \cdots & C_{k-1}^{k-2} & C_k^{k-1} \\ C_2^0 & C_3^1 & \cdots & C_k^{k-2} & C_{k+1}^{k-1} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ C_{k-1}^0 & C_k^1 & \cdots & C_{2k-3}^{k-2} & C_{2k-2}^{k-1} \\ C_k^0 & C_{k+1}^1 & \cdots & C_{2k-2}^{k-2} & C_{2k-1}^{k-1} \end{vmatrix},$$

从最后一列起，每一列减去它相邻的前 1 列，并根据组合数的性质 $C_{n+1}^m - C_n^{m-1} = C_n^m$，得

$$D_{k+1}=\begin{vmatrix} C_1^0 & C_1^1 & \cdots & C_{k-2}^{k-2} & C_{k-1}^{k-1} \\ C_2^0 & C_2^1 & \cdots & C_{k-1}^{k-2} & C_k^{k-1} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ C_{k-1}^0 & C_{k-1}^1 & \cdots & C_{2k-4}^{k-2} & C_{2k-3}^{k-1} \\ C_k^0 & C_k^1 & \cdots & C_{2k-3}^{k-2} & C_{2k-2}^{k-1} \end{vmatrix}=D_k=1,$$

由数学归纳法原理知，$D_n=1$.

3. 用行列式表示几何图形的面积与体积

3.1 用行列式表示三角形的面积

如图 1.1 所示，在平行四边形 $ABCD$ 中，设三个顶点的坐标分别是 $A(x_1, y_1)$，$B(x_2, y_2)$，$D(x_3, y_3)$，

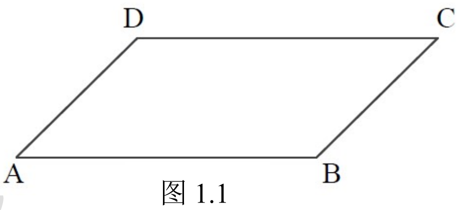

图 1.1

则

$$S_{\square}=\left|\overrightarrow{AB}\right|\left|\overrightarrow{AD}\right|\sin\angle BAD=\left|\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AD}\right|,$$

而

$$\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AD}=\begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ x_2-x_1 & y_2-y_1 & 0 \\ x_3-x_1 & y_3-y_1 & 0 \end{vmatrix}=\boldsymbol{k}\begin{vmatrix} x_2-x_1 & y_2-y_1 \\ x_3-x_1 & y_3-y_1 \end{vmatrix}$$

所以

$$S_{\square}=|\boldsymbol{k}|\left|\begin{vmatrix} x_2-x_1 & y_2-y_1 \\ x_3-x_1 & y_3-y_1 \end{vmatrix}\right|=\left|\begin{vmatrix} x_2-x_1 & y_2-y_1 \\ x_3-x_1 & y_3-y_1 \end{vmatrix}\right|$$

$$=\left|\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2-x_1 & y_2-y_1 & 0 \\ x_3-x_1 & y_3-y_1 & 0 \end{vmatrix}\right| \overset{r_2+r_1}{\underset{r_3+r_1}{=}} \left|\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix}\right|.$$

则以 A，B，D 为顶点构成的三角形面积为

$$S_{\Delta ABD}=\frac{1}{2}\left|\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix}\right|.$$

3.2 用行列式表示平行六面体体积

如图 1.2 所示，设平行六面体的三条棱分别为 OA，OB，OC，$\overrightarrow{OA}=(a_1,b_1,c_1)$，$\overrightarrow{OB}=(a_2,b_2,c_2)$，$\overrightarrow{OC}=(a_3,b_3,c_3)$，则六面体体积为

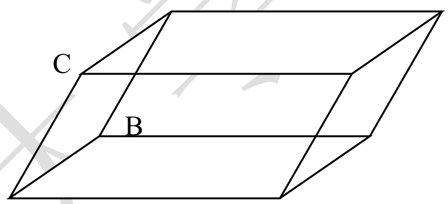

图 1.2

$$V=\left|\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}\right|.$$

事实上，设 S 是以 OA，OB 为边构成的平行四边形的面积，h 为此六面体的高，α 为 OA 与 OB 的夹角，θ 为向量 $\overrightarrow{OA}\times\overrightarrow{OB}$ 与向量 $\overrightarrow{OC}$ 的夹角，则

$$V=S\cdot h=\left|\overrightarrow{OA}\right|\left|\overrightarrow{OB}\right|\sin\alpha\left|\left|\overrightarrow{OC}\right|\cos\theta\right|=\left|\overrightarrow{OA}\times\overrightarrow{OB}\right|\left|\left|\overrightarrow{OC}\right|\cos\theta\right|=\left|\left(\overrightarrow{OA}\times\overrightarrow{OB}\right)\cdot\overrightarrow{OC}\right|$$

$$=\left|\left(\begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_2 & c_2 \end{vmatrix},\begin{vmatrix} c_1 & a_1 \\ c_2 & a_2 \end{vmatrix},\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}\right)\cdot(a_3,b_3,c_3)\right|$$

$$=\left|a_3\begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_2 & c_2 \end{vmatrix}+b_3\begin{vmatrix} c_1 & a_1 \\ c_2 & a_2 \end{vmatrix}+c_3\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}\right|$$

$$=\left|\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}\right|.$$

3.3 用行列式表示四面体体积

在四面体 $O-ABC$ 中，设 $\overrightarrow{OA}=(a_1,b_1,c_1)$，$\overrightarrow{OB}=(a_2,b_2,c_2)$，$\overrightarrow{OC}=(a_3,b_3,c_3)$，则以该四面体的三条棱 OA，OB，OC 为边能生成平行六面体，如图 1.3 所示.

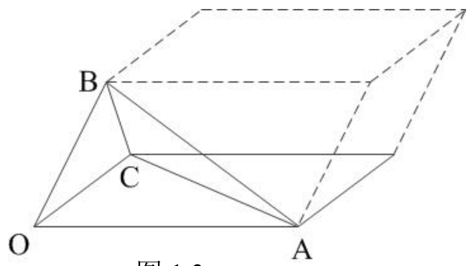

图 1.3

易得出四面体体积为：

$$V_{O-ABC}=\frac{1}{6}\left|\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}\right|.$$

§1.5 用 Matlab 计算行列式

数学软件处理的基本单位是“矩阵”（Matrix）（第二章将学习），Matlab 是英文“Matrix Laboratory”的缩写.

在实际应用中，当计算元素的数值比较大，且阶数比较多时，用 Matlab 处理起来非常简单. 方法如下：

计算行列式

$$\begin{vmatrix} 3 & -2 & 0 & 5 \\ 1 & 4 & -2 & 3 \\ 7 & -1 & 5 & 4 \\ 0 & 5 & 8 & 6 \end{vmatrix}.$$

首先给矩阵 A 赋值，命令是：

```
>> A=[3,-2,0,5;1,4,-2,3;7,-1,5,4;0,5,8,6]↙
A =
     3    -2     0     5
     1     4    -2     3
     7    -1     5     4
     0     5     8     6
```

然后计算行列式 det(A)，命令是：

```
>>det(A) ↙
```

ans=

1658.

背景资料　-------　行列式

线性代数(linear algebra)是代数学的一个分支，它以研究向量空间与线性映射为对象；由于法国数学家费马(Fermat,1601—1665)和笛卡儿(Descartes,1596—1665)的工作，线性代数基本上出现于 17 世纪．“代数”这一词在我国出现较晚，在清代时才传入中国，当时被人们译成“阿尔热巴拉”，直到 1859 年，清代著名的数学家、翻译家李善兰（1811—1882）才将它翻译成为“代数学”，一直沿用至今．

历史上线性代数的第一个问题是关于解线性方程组的问题，最初的线性方程组问题大都是来源于生活实践，正是实际应用问题刺激了线性代数这一学科的诞生与发展．

行列式(determinant)出现于线性方程组的求解，它最早是一种速记的表达式，现在已经是数学中一种非常有用的工具．而行列式的概念最早则是由日本数学家关孝和(Seki Takakazu,1642—1708）在 1683 年提出来的，他在一部叫做《解伏题之法》的著作（意思是“解行列式问题的方法”）里，对行列式的概念和展开已经有了清楚的叙述，欧洲第一个提出行列式概念的是德国数学家、微积分学奠基人之一莱布尼兹(G.W.Leibnitz,1646—1716),时间是在 1693 年 4 月,他在写给法国数学家洛必达 (L′Hospital,1661—1704)的一封信中使用并给出了行列式，同时给出方程组的系数行列式为零的条件．

1750 年，瑞士数学家克莱姆(G.Cramer,1704—1752)在其著作《线性代数分析导引》中，对行列式的定义和展开法则给出了比较完整、明确的阐述，并给出了由系数行列式来确定线性方程组解的重要基本公式（即人们熟悉的克莱姆法则）．1764 年，法国数学家贝祖(Etienne Bezout,1730—1783)将确定行列式每一项符号的方法进行了系统化．对含 n 个未知量、n 个方程的齐次线性方程组，他证明了系数行列式等于零是这方程组有非零解的条件．

总之，在很长一段时间内，行列式知识作为解线性方程组的一种工具被使用，并没有人意识到它可以独立于线性方程组之外，单独形成一门理论加以研究．在行列式的发展史上，第一个对行列式理论做出连贯的逻辑的阐述，即把行列式理论与线性方程组求解相分离的人，是法国数学家范德蒙(A.T.Vandermonde,1735—1796)，时间是 1772 年，他给出了用二阶子式和它们的余子式来展开行列式的法则．就对行列式本身进行研究这一点而言，他是行列式理论的奠基人．同一年，法国数学家拉普拉斯(Laplace, Pierre-Simon,1749—1827)在《对积分和世界体系的探讨》中，证明了范德蒙的一些规则，并推广了他的展开行列式的方法，用 r 阶子式及其余子式来展开行列式，这个方法现在仍然以他的名字命名．

1815 年，法国数学家柯西(A.L.Cauchy,1789—1857)首先提出行列式这个名称，他在一篇论文中给出了行列式的第一个系统的、几乎是近代的处理，其中主要结果之一是行列式的乘法公式．另外，他第一个把行列式的元素排成方阵，采用双重足标标记法；改进并证明了拉普拉斯的行列式展开定理．1841 年，英国数学家凯莱(A.Cayley,1821—1895)首先创用了行列式记号｜　｜．

继柯西之后，在行列式理论方面最多产的人就是德国数学家雅可比(Carl Gustav Jacobi,1804—1851)，他引进了函数行列式，即“雅可比行列式”，指出函数行列式在多重积分的变量替换中的作用，给出了函数行列式的导数公式．1841 年，雅可比的著名论文《论行列式的形成和性质》标志着行列式系统理论的建成．由于行列式在数学分析、几何学、线性方程组理论、二次型理论等多方面的应用，促使行列式理论自身在 19 世纪也得到了很大发展．整个 19 世纪都有行列式的新结果．

自测题一

习题一

习题一解答

一、选择题

综合与提高题

1．若行列式$\begin{vmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 1 & x & -2 \\ 3 & -1 & 2 \end{vmatrix}=0$，则$x=$（ ）．

(A) -2　　(B) 2　　(C) -1　　(D) 1.

2．设A_{ij}是行列式$|A|$中元素$a_{ij}\ (i,j=1,2,\cdots,n)$的代数余子式，当$i\neq j$时下列各式中错误的是（ ）．

(A) $|A|=a_{i1}A_{j1}+a_{i2}A_{j2}+\cdots+a_{in}A_{jn}$　　(B) $|A|=a_{i1}A_{i1}+a_{i2}A_{i2}+\cdots+a_{in}A_{in}$

(C) $|A|=a_{1j}A_{1j}+a_{2j}A_{2j}+\cdots+a_{nj}A_{nj}$　　(D) $0=a_{i1}A_{j1}+a_{i2}A_{j2}+\cdots+a_{in}A_{jn}$.

3．设行列式$D=\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$，则$\begin{vmatrix} c_1 & b_1+2c_1 & a_1+2b_1+3c_1 \\ c_2 & b_2+2c_2 & a_2+2b_2+3c_2 \\ c_3 & b_3+2c_3 & a_3+2b_3+3c_3 \end{vmatrix}=$（ ）．

(A) $-D$　　(B) D　　(C) $-2D$　　(D) $2D$.

4．四阶行列式$\begin{vmatrix} a_1 & 0 & 0 & b_1 \\ 0 & a_2 & b_2 & 0 \\ 0 & b_3 & a_3 & 0 \\ b_4 & 0 & 0 & a_4 \end{vmatrix}$的值等于（ ）．

(A) $a_1a_2a_3a_4-b_1b_2b_3b_4$　　(B) $a_1a_2a_3a_4+b_1b_2b_3b_4$

$(C)\ (a_1a_2-b_1b_2)(a_3a_4-b_3b_4)$　　$(D)\ (a_2a_3-b_2b_3)(a_1a_4-b_1b_4)$.

5．设

$$f(x)=\begin{vmatrix} x-2 & x-1 & x-2 & x-3 \\ 2x-2 & 2x-1 & 2x-2 & 2x-3 \\ 3x-3 & 3x-2 & 4x-5 & 3x-5 \\ 4x & 4x-3 & 5x-7 & 4x-3 \end{vmatrix},$$

则方程 $f(x)=0$ 的根的个数为（ ）.

(A) 1　　(B) 2　　(C) 3　　(D) 4.

二、填空题

1. $\begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 & x-1 \\ 1 & -1 & x+1 & -1 \\ 1 & x-1 & 1 & -1 \\ x+1 & -1 & 1 & -1 \end{vmatrix}=$____.

2. $\begin{vmatrix} 1-a & a & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1-a & a & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1-a & a & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1-a & a \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1-a \end{vmatrix}=$____.

三、计算证明题

1．证明

$$\begin{vmatrix} a_1+b_1 & b_1+c_1 & c_1+a_1 \\ a_2+b_2 & b_2+c_2 & c_2+a_2 \\ a_3+b_3 & b_3+c_3 & c_3+a_3 \end{vmatrix}=2\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}.$$

2．计算 $D_{n+1}=\begin{vmatrix} a_0 & b_1 & b_2 & \cdots & b_n \\ c_1 & a_1 & 0 & \cdots & 0 \\ c_2 & 0 & a_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ c_n & 0 & 0 & \cdots & a_n \end{vmatrix}$，$a_i \neq 0$，$i=1,2,\cdots,n$.

3．设行列式

$$D=\begin{vmatrix} 3 & 0 & 4 & 0 \\ 2 & 2 & 2 & 2 \\ 0 & -7 & 0 & 0 \\ 5 & 3 & -2 & 2 \end{vmatrix},$$

求 D 的第四行各元素的余子式之和.

4．计算行列式

$$D_{n+1}=\begin{vmatrix} a_0 & -1 & 0 & \cdots & 0 \\ a_1 & x & -1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n-1} & 0 & 0 & \cdots & -1 \\ a_n & 0 & 0 & \cdots & x \end{vmatrix}.$$

5．证明

$$D_n=\begin{vmatrix} \cos\alpha & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 1 & 2\cos\alpha & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2\cos\alpha & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 2\cos\alpha \end{vmatrix}=\cos n\alpha .$$

6．计算 $n+1$ 阶行列式

$$D_{n+1}=\begin{vmatrix} -a_1 & a_1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & -a_2 & a_2 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -a_3 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & -a_n & a_n \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \end{vmatrix}.$$

7．计算 $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \\ x_1^2 & x_2^2 & x_3^2 & x_4^2 \\ x_1^4 & x_2^4 & x_3^4 & x_4^4 \end{vmatrix}$.

8．计算三对角行列式 $D_n=\begin{vmatrix} 2 & 1 & & & & \\ 1 & 2 & 1 & & & \\ & 1 & 2 & 1 & & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & & 1 & 2 & 1 \\ & & & & 1 & 2 \end{vmatrix}$.