合 肥 工 业 大 学 试 卷（A）

共 1 页第 1 页

2017～2018 学年第 一 学期　课程代码 1400071B　课程名称 线性代数　学分 2.5　课程性质:必修☑、选修☐、限修☐　考试形式:开卷☐、闭卷☑

专业班级（教学班）__________　考试日期 2017 年 11 月 17 日　命题教师 集体　系（所或教研室）主任审批签名__________

一、填空题（每小题 4 分，共 20 分）

1. 已知 $\begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & a & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & a \end{vmatrix} = -1$，则 $a=$________.

2. 已知矩阵 $A=\begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 4 & 2 & a+1 \\ 2 & 1 & 1 \end{bmatrix}$ 且 $R(A)=2$，则 $a\neq$________.

3. 设矩阵 A 与 B 相似，其中 $B=\begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 0 & 3 & 6 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix}$，则 $|A+E|=$________.

4. 设矩阵 A 与 B 相似，其中 $A=\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & x & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$，已知矩阵 B 有特征值 1，2，3，则 $x=$________.

5. 已知二次型 $f=tx_1^2+2x_1x_3+tx_2^2-2x_2x_3+x_3^2$ 正定，则 t 的取植范围是________.

二、选择题（每小题 4 分，共 20 分）

1. 设 A,B 均为 n 阶矩阵，下列关系一定成立的是（　　）.
（A）$(AB)^2=A^2B^2$　　（B）$|AB|=|BA|$
（C）$|A+B|=|A|+|B|$　　（D）$(AB)^T=A^TB^T$

2. 设 A 为 n 阶矩阵，且 $|A|=0$，则（　　）.
（A）A 的列秩等于零
（B）A 的秩为零
（C）A 中任一列向量可由其他列向量线性表示
（D）A 中必有一列向量可由其他列向量线性表示

3. 设 A 为 n 阶实对称矩阵，则（　　）.
（A）A 的 n 个特征向量两两正交
（B）A 的 n 个特征向量组成单位正交向量组
（C）若 A 的 k 重特征值为 λ_0，则有 $R(A-\lambda_0E)=n-k$
（D）若 A 的 k 重特征值为 λ_0，则有 $R(A-\lambda_0E)=k$

4. A 为 n 阶实对称矩阵，则 A 是正定矩阵的充要条件是（　　）.
（A）二次型 $\vec{x}^TA\vec{x}$ 的负惯性指数为零　　（B）存在 n 阶矩阵 C，使得 $A=C^TC$
（C）A 没有负特征值　　（D）A 与单位矩阵合同

5. 如果二次型 $f(x_1,x_2,x_3)=x_1^2+ax_2^2+x_3^2+2bx_1x_2+2x_1x_3+2x_2x_3$ 经过正交变换 $\vec{x}=P\vec{y}$ 化为标准形 $f=y_2^2+4y_3^2$，则（　　）.
（A）$a=3,\ b=-1$　（B）$a=-3,\ b=-1$　（C）$a=3,\ b=1$　（D）$a=-3,\ b=1$

三、（8 分）设向量组 $\vec{\alpha}_1=(1,-1,2,4)^T$, $\vec{\alpha}_2=(0,3,1,2)^T$, $\vec{\alpha}_3=(3,0,7,14)^T$, $\vec{\alpha}_4=(1,-2,2,0)^T$，求此向量组的一个极大线性无关组，并将其余向量用这个极大线性无关组线性表示.

四、（12 分）λ 取何值时，线性方程组

$$\begin{cases} \lambda x_1+x_2+x_3=\lambda-3, \\ x_1+\lambda x_2+x_3=-2, \\ x_1+x_2+\lambda x_3=-2 \end{cases}$$

无解、有唯一解、有无穷多解？当方程组有无穷多解时，求其通解.

五、（8 分）如果向量 $\vec{\alpha}=(1,k)^T$ 是矩阵 $A=\begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 5 & -1 \end{bmatrix}$ 的逆矩阵 A^{-1} 的特征向量，求常数 k 的值.

六、（12 分）设三阶对称阵 A 的特征值为 $\lambda_1=6,\ \lambda_2=\lambda_3=3$．若与特征值 $\lambda_1=6$ 对应的特征向量为 $\vec{p}_1=(1,1,1)^T$，求 A.

七、（15 分）设实对称矩阵 $A=\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$.

（1）分别写出以 A，A^{-1} 为系数矩阵的二次型；
（2）求一个正交变换 $\vec{x}=P\vec{y}$ 将二次型 $f(x_1,x_2,x_3)=\vec{x}^TA\vec{x}$ 化为标准形.

八、（5 分）设 λ_1,λ_2 是 n 阶矩阵 A 的两个不同特征值，对应的特征向量分别为 $\vec{\alpha}_1,\vec{\alpha}_2$．试证 $c_1\vec{\alpha}_1+c_2\vec{\alpha}_2$（$c_1,c_2$ 为非零常数）不是 A 的特征向量.