课外练习题 1

1. $\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\gamma}$ 为三维列向量，已知三阶行列式 $|4\boldsymbol{\gamma}-\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}-2\boldsymbol{\gamma},2\boldsymbol{\alpha}|=40$，则行列式 $|\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\gamma}|=$ $\underline{-5}$.

2. 设 n 阶矩阵 A 的主对角线元素全为零，其余元素均为 1，则 $|\boldsymbol{A}|=$ $(-1)^{n-1}(n-1)$.

3. 已知三阶行列式 $|\boldsymbol{A}|$ 的第一行各元素及其余子式均为 1，则 $|\boldsymbol{A}|=$ ____1____.

4. 已知 $\boldsymbol{\alpha}=(1,2,3)^T$，$\boldsymbol{\beta}=(1,1/2,1/3)^T$，若 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\beta}^T$，

 则 $\boldsymbol{A}^{2006}=3^{2005}\begin{pmatrix}1 & 1/2 & 1/3\\ 2 & 1 & 2/3\\ 3 & 3/2 & 1\end{pmatrix}$.

5. 设 $\boldsymbol{A}=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3),\boldsymbol{B}=(\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_1,2\boldsymbol{\alpha}_2)$，其中 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 都是 3 维列向量，已知 $|\boldsymbol{A}|=2$，

则 $|\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}|=$ ______6______.

6. 已知 $|\boldsymbol{A}|=\begin{vmatrix}1 & 0 & 1 & 0\\ 1 & 1 & 0 & -1\\ 1 & 1 & -1 & 0\\ 2 & 2 & 3 & 4\end{vmatrix}$，设 $A_{4j}(j=1,2,3,4)$ 是 $|\boldsymbol{A}|$ 中元素 a_{4j} 的代数余子式，则

$A_{41}+A_{42}+A_{43}+A_{44}=$ ____-3____.

7. 设 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}3 & 0 & 0\\ 1 & 4 & 0\\ 0 & 0 & 3\end{pmatrix}$，则 $(\boldsymbol{A}-2\boldsymbol{E})^{-1}=$ $\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ -1/2 & 1/2 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$

8. 已知 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 均为 n 阶矩阵，则必有（ D ）.

（A）$(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})^2=\boldsymbol{A}^2+2\boldsymbol{AB}+\boldsymbol{B}^2$，

（B）$(\boldsymbol{AB})^T=\boldsymbol{A}^T\boldsymbol{B}^T$，

（C）$\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{O}$ 时，$\boldsymbol{A}=\boldsymbol{O}$ 或 $\boldsymbol{B}=\boldsymbol{O}$

(D) 行列式 $|\boldsymbol{A}+\boldsymbol{AB}|=0$ 的充分必要条件是 $|\boldsymbol{A}|=0$，或 $|\boldsymbol{E}+\boldsymbol{B}|=0$.

9. 以下结论正确的是（ C ）.

（A）若方阵 $\boldsymbol{A}$ 的行列式 $|\boldsymbol{A}|=0$，则 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{O}$

（B）若 $\boldsymbol{A}^2=\boldsymbol{O}$，则 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{O}$

（C）若 $\boldsymbol{A}$ 为对称矩阵，则 $\boldsymbol{A}^2$ 也是对称矩阵

（D）对 n 阶矩阵 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$，有 $(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{B})=\boldsymbol{A}^2-\boldsymbol{B}^2$

10．下列命题中正确的是（ D ）.

（A）若 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 可加，且 $|\boldsymbol{A}|>0,|\boldsymbol{B}|>0,$ 则 $|\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}|>0$

（B）若 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 可乘，则 $|\boldsymbol{AB}|=|\boldsymbol{A}||\boldsymbol{B}|$

（C）若 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 可乘，且 $\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{E}$，则 $\boldsymbol{A}^{-1}=\boldsymbol{B}$

（D）若 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 可乘，且 $|\boldsymbol{A}|>0,|\boldsymbol{B}|<0$，则 $|\boldsymbol{AB}|<0$

11．设 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 为 n 阶矩阵，下列结论正确的是（ D ）.

（A）$(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})^T=\boldsymbol{A}^T+\boldsymbol{B}^T$，并且 $(\boldsymbol{AB})^T=\boldsymbol{A}^T\boldsymbol{B}^T$

（B）当 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 均为可逆矩阵时，$(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})^{-1}=\boldsymbol{A}^{-1}+\boldsymbol{B}^{-1}$ 并且 $(\boldsymbol{AB})^{-1}=\boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{A}^{-1}$

（C）若 $\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{O}$，则 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{O}$ 或 $\boldsymbol{B}=\boldsymbol{O}$

（D）若 $\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{O}$，且 $\boldsymbol{A}$ 为可逆矩阵时，$\boldsymbol{B}=\boldsymbol{O}$

12．设 $\boldsymbol{A}$ 为 n 阶矩阵，满足 $\boldsymbol{A}^2+\boldsymbol{A}=\boldsymbol{O}$，则错误结论是（ C ）.

（A）$\boldsymbol{A}+2\boldsymbol{E}$ 可逆　（B）$\boldsymbol{A}-\boldsymbol{E}$ 可逆　（C）$\boldsymbol{A}+\boldsymbol{E}$ 可逆　（D）$\boldsymbol{A}-2\boldsymbol{E}$ 可逆

13.（10 分）计算行列式 $D=\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & a_4+x \\ a_1 & a_2 & a_3+x & a_4 \\ a_1 & a_2+x & a_3 & a_4 \\ a_1+x & a_2 & a_3 & a_4 \end{vmatrix}$.

解:

$$D=\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & a_4+x \\ a_1 & a_2 & a_3+x & a_4 \\ a_1 & a_2+x & a_3 & a_4 \\ a_1+x & a_2 & a_3 & a_4 \end{vmatrix}=(a_1+a_2+a_3+a_4)x\begin{vmatrix} 1 & a_2 & a_3 & a_4+x \\ 1 & a_2 & a_3+x & a_4 \\ 1 & a_2+x & a_3 & a_4 \\ 1 & a_2 & a_3 & a_4 \end{vmatrix}$$

$$=[(a_1+a_2+a_3+a_4+x]\begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & x \\ 0 & 0 & x & 0 \\ 0 & x & 0 & 0 \\ 1 & a_2 & a_3 & a_4 \end{vmatrix}=(a_1+a_2+a_3+a_4+x)x^3.$$

14.（10 分）设矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$，$\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix} 1 & -2 & 4 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ 且 $\boldsymbol{B}(2\boldsymbol{X}-\boldsymbol{A})=\boldsymbol{X}$，求矩阵 $\boldsymbol{X}$.

解： $(2\boldsymbol{B}-\boldsymbol{E})\boldsymbol{X}=\boldsymbol{BA}$，因为 $2\boldsymbol{B}-\boldsymbol{E}$ 可逆，

所以 $\boldsymbol{X}=(2\boldsymbol{B}-\boldsymbol{E})^{-1}\boldsymbol{BA}=\begin{pmatrix} 1 & -4 & 8 \\ 0 & 1 & -4 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 4 & 11 \\ 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

15.（10 分）已知 $\boldsymbol{A}$ 、 $\boldsymbol{B}$ 为 **3** 阶矩阵，且满足 $2\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{B}=\boldsymbol{B}-4\boldsymbol{E}$ ，其中 $\boldsymbol{E}$ 是 **3** 阶单位矩阵.

(1)证明：矩阵 $\boldsymbol{A}-2\boldsymbol{E}$ 可逆，且 $(\boldsymbol{A}-2\boldsymbol{E})^{-1}=\frac{1}{8}(\boldsymbol{B}-4\boldsymbol{E})$； (2)若 $\boldsymbol{B}=\begin{bmatrix}1&-2&0\\1&2&0\\0&0&2\end{bmatrix}$，求矩阵 $\boldsymbol{A}$.

解:（1）由 $2\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{B}=\boldsymbol{B}-4\boldsymbol{E}$ 左乘 $\boldsymbol{A}$，知 $\boldsymbol{AB}-2\boldsymbol{B}-4\boldsymbol{A}=\boldsymbol{O}$.

从而 $(\boldsymbol{A}-2\boldsymbol{E})(\boldsymbol{B}-4\boldsymbol{E})=8\boldsymbol{E}$ 或 $(\boldsymbol{A}-2\boldsymbol{E})\cdot\frac{1}{8}(\boldsymbol{B}-4\boldsymbol{E})=\boldsymbol{E}$.

故 $\boldsymbol{A}-2\boldsymbol{E}$ 可逆，且 $(\boldsymbol{A}-2\boldsymbol{E})^{-1}=\frac{1}{8}(\boldsymbol{B}-4\boldsymbol{E})$.

（2）由（1）知 $\boldsymbol{A}=2\boldsymbol{E}+8(\boldsymbol{B}-4\boldsymbol{E})^{-1}$.而

$$(\boldsymbol{B}-4\boldsymbol{E})^{-1}=\begin{bmatrix}-3&-2&0\\1&-2&0\\0&0&-2\end{bmatrix}^{-1}=\begin{bmatrix}-\frac{1}{4}&\frac{1}{4}&0\\-\frac{1}{8}&-\frac{3}{8}&0\\0&0&-\frac{1}{2}\end{bmatrix}，故\ \boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}0&2&0\\-1&-1&0\\0&0&-2\end{bmatrix}.$$

16.（10 分）设 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}3&1&1&1\\1&3&1&1\\1&1&3&1\\1&1&1&3\end{pmatrix}$，求 $\left(\boldsymbol{A}^*\right)^{-1}$.

解: $|\boldsymbol{A}|=\begin{vmatrix}3&1&1&1\\1&3&1&1\\1&1&3&1\\1&1&1&3\end{vmatrix}=\cdots=48\Rightarrow\left(\boldsymbol{A}^*\right)^{-1}=\frac{\boldsymbol{A}}{|\boldsymbol{A}|}=\frac{\boldsymbol{A}}{48}$.

17.（10 分）已知 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&0&0\\1&1&0\\1&1&1\end{pmatrix}$， $\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}0&1&1\\1&0&1\\1&1&0\end{pmatrix}$ 且 $\boldsymbol{X}(\boldsymbol{E}-\boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{A})^T\boldsymbol{B}^T=\boldsymbol{E}$，求 $\boldsymbol{X}$.

解: $\boldsymbol{X}(\boldsymbol{E}-\boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{A})^T\boldsymbol{B}^T=\boldsymbol{E}\Rightarrow\boldsymbol{X}[\boldsymbol{B}(\boldsymbol{E}-\boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{A})]^T=\boldsymbol{E}\Rightarrow\boldsymbol{X}(\boldsymbol{B}-\boldsymbol{A})^T=\boldsymbol{E}$

$$\because\left|(\boldsymbol{B}-\boldsymbol{A})^T\right|=\begin{vmatrix}-1&0&0\\1&-1&0\\1&1&-1\end{vmatrix}=-1\neq0，\ \therefore\boldsymbol{X}=[(\boldsymbol{B}-\boldsymbol{A})^T]^{-1}=-\begin{pmatrix}1&0&0\\1&1&0\\2&1&1\end{pmatrix}.$$

18.（8 分）计算行列式 $\begin{vmatrix}1&1&1&1\\a&b&c&d\\a^2&b^2&c^2&d^2+1\\a^3&b^3&c^3&d^3\end{vmatrix}$.

解： $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1+0 \\ a & b & c & d+0 \\ a^2 & b^2 & c^2 & d^2+1 \\ a^3 & b^3 & c^3 & d^3+0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ a & b & c & d \\ a^2 & b^2 & c^2 & d^2 \\ a^3 & b^3 & c^3 & d^3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ a & b & c & 0 \\ a^2 & b^2 & c^2 & 1 \\ a^3 & b^3 & c^3 & 0 \end{vmatrix} \stackrel{\Delta}{=} \mathrm{I}+\mathrm{II}$

其中：$\mathrm{I}=(d-a)(d-b)(d-c)(c-a)(c-b)(b-a)$，

$$\mathrm{II}=-\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & b-a & c-a \\ 0 & b^3-a^3 & c^3-a^3 \end{vmatrix} = -(b-a)(c-a)\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ b^2+ab+a^2 & c^2+ac+a^2 \end{vmatrix}$$

$$=-(c-a)(c-b)(b-a)(a+b+c)$$

原式=$(c-a)(c-b)(b-a)[(d-a)(d-b)(d-c)-(a+b+c)]$

19.（10 分）已知 $\boldsymbol{AP}=\boldsymbol{PB}$，其中 $\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$，$\boldsymbol{P}=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$，求 $\boldsymbol{A}$ 及 $\boldsymbol{A}^5$.

解： $\boldsymbol{P}^{-1}=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & 0 \\ -4 & 1 & 1 \end{pmatrix}$，$\boldsymbol{A}=\boldsymbol{PBP}^{-1}=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \\ 6 & -1 & -1 \end{pmatrix}$，

$$\boldsymbol{A}^5=\boldsymbol{PB}^5\boldsymbol{P}^{-1}=\boldsymbol{PBP}^{-1}=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \\ 6 & -1 & -1 \end{pmatrix}.$$

20.（10 分）设 4 阶矩阵 $\boldsymbol{A}$ 和 $\boldsymbol{B}$ 满足 $\boldsymbol{A}^*\boldsymbol{B}=\boldsymbol{A}^{-1}+\boldsymbol{B}$，其中 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$，$\boldsymbol{A}^*$ 为 $\boldsymbol{A}$ 的伴随矩阵，求矩阵 $\boldsymbol{B}$.

解： 左乘 $\boldsymbol{A}$ 得 $\boldsymbol{AA}^*\boldsymbol{B}=\boldsymbol{E}+\boldsymbol{AB}$，即 $\left(|\boldsymbol{A}|\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}\right)\boldsymbol{B}=\boldsymbol{E}$，

$$\because |\boldsymbol{A}|=2，\therefore \boldsymbol{B}=|2\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}|^{-1}=\begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}^{-1}=\begin{pmatrix} 1/3 & -2/3 & 0 & 0 \\ -1/3 & -1/3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1/3 & 1/3 \\ 0 & 0 & -1/6 & 1/3 \end{pmatrix}$$