课外练习题 6

1. 当常数 t 满足__________时，二次型 $f(x_1,x_2,x_3)=x_1^2+5x_2^2+4x_3^2+4x_1x_2-2tx_2x_3$ 正定.

2. 若 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1 & 1 & 0\\ 1 & k^2+1 & 0\\ 0 & 0 & k+1\end{pmatrix}$ 是正定矩阵，则 k 应满足______________.

3. 已知二次型 $f(x_1,x_2,x_3)=2x_1^2+ax_2^2+5x_3^2+4x_1x_2-4x_1x_3-8x_2x_3$ 的秩为 2，则 $a=$_____.

4. 已知二次型 $f(x_1,x_2,x_3)=(x_1+ax_2)^2+(x_2-ax_3)^2+(x_1+x_3)^2$ 正定，则常数 a 的取值范围为______________.

5. 设二次型 $f\left(x_1,x_2,x_3\right)=x_1^2+2x_2^2+(1-k)x_3^2+2kx_1x_2+2x_1x_3$ 是正定的，则 k 应满足的条件是________.

6. 如果二次型 $f(x_1,x_2,x_3)=x_1^2+ax_2^2+x_3^2+2bx_1x_2+2x_1x_3+2x_2x_3$ 经过正交变换 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{P}\boldsymbol{y}$ 化为标准形 $f=y_2^2+4y_3^2$，则（　　）.

（A）$a=3,b=-1$　　（B）$a=-3,b=-1$

（C）$a=3,b=1$　　（D）$a=-3,b=1$

7. $\boldsymbol{A}$ 为 n 阶实对称矩阵，则 $\boldsymbol{A}$ 是正定矩阵的充要条件是（　　）.

（A）二次型 $\boldsymbol{x}^T\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}$ 的负惯性指数为零　　（B）存在 n 阶矩阵 $\boldsymbol{C}$，使得 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{C}^T\boldsymbol{C}$

（C）$\boldsymbol{A}$ 没有负特征值　　（D）$\boldsymbol{A}$ 与单位矩阵合同

8. 设二次型 $f(x_1,x_2,x_3)=(x_1+x_2)^2+(x_2-x_3)^2+(x_3+x_1)^2$，则下列结论正确的是（　　）.

（A）f 是正定的　（B）f 的秩是 2　（C）f 的秩是 3　（D）f 的特征值是1,1,1

9. $\boldsymbol{A}$ 是 n 阶实对称矩阵，则 $\boldsymbol{A}$ 为正定的充要条件是（　　）.

（A）$|\boldsymbol{A}|>0$　　（B）存在 n 维列向量 $\boldsymbol{\alpha}\neq\boldsymbol{0}$ 使 $\boldsymbol{\alpha}^T\boldsymbol{A}\boldsymbol{\alpha}>0$

（C）存在 n 阶可逆阵 $\boldsymbol{C}$ 使 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{C}^T\boldsymbol{C}$　　（D）对元素全不为零的向量 $\boldsymbol{x}$，总有 $\boldsymbol{x}^T\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}>0$

10. 实二次型 $f(x_1,x_2,x_3)=ax_1^2+bx_2^2+ax_3^2+2cx_1x_3$ 是正定的充要条件是，实数 a,b,c 满足条件（　　）.

（A）$a>0,b>0,c>0$　　（B）$a>c,b>0$

（C）$|a|>|c|,b>0$　　（D）$a>|c|,b>0$

11．设 $\boldsymbol{A}$ 是一个 n 阶矩阵，交换 $\boldsymbol{A}$ 的第 i 列和第 j 列后，再交换第 i 行和第 j 行得矩阵 $\boldsymbol{B}$，则 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 之间关系是（　　　）.

（A）等价但不相似　　　　（B）相似但不合同

（C）相似，合同但不等价　　　　（D）等价，相似，合同

12． $\boldsymbol{A}$ 为实对称矩阵，则下列成立的是（　　　）.

（A）如行列式 $|\boldsymbol{A}|>0$，则 $\boldsymbol{A}$ 正定

（B）如 $\boldsymbol{A}$ 的主对角线元素全为正，则 $\boldsymbol{A}$ 正定

（C）如 $\boldsymbol{A}^{-1}$ 存在且正定，则 $\boldsymbol{A}$ 正交

（D）如 $\boldsymbol{P}^T\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}$ 正定，其中 $\boldsymbol{P}$ 为可逆矩阵，则 $\boldsymbol{A}$ 正定

13.（15 分）求正交变换 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{P}\boldsymbol{y}$，将二次型

$$f(x_1,x_2,x_3)=x_1^2+x_2^2+x_3^2+4x_1x_2+4x_2x_3+4x_1x_3$$

化为标准形，其中 $\boldsymbol{x}=(x_1,x_2,x_3)^{\mathrm{T}},\boldsymbol{y}=(y_1,y_2,y_3)^{\mathrm{T}}$.

14.（6 分）设 $\boldsymbol{A}$ 是 n 阶方阵，矩阵 $\boldsymbol{B}=(\boldsymbol{\alpha}_1\ \ \boldsymbol{\alpha}_2\ \ \boldsymbol{\alpha}_3)$，其中 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 是 n 维列向量，$\boldsymbol{\alpha}_1\neq\boldsymbol{0}$，且满足 $\boldsymbol{A}(\boldsymbol{\alpha}_1\ \ \boldsymbol{\alpha}_2\ \ \boldsymbol{\alpha}_3)=(\boldsymbol{\alpha}_1\quad \boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2\quad \boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_3)$，证明：（1）齐次线性方程组 $\boldsymbol{B}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ 仅有零解；（2） $\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{B}$ 是正定矩阵，其中 $\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}$ 是 $\boldsymbol{B}$ 的转置矩阵.

15. （16 分）设有二次型 $f(x_1,x_2,x_3)=4{x_2}^2-3{x_3}^2+2ax_1x_2-4x_1x_3+8x_2x_3$（其中 a 为整数），通过正交变换化为标准形 $f={y_1}^2+6{y_2}^2+b{y_3}^2$，（1）求常数 a,b；（2）求化二次型为标准形的正交变换.

16.（14 分）已知二次型 $f(x_1,x_2,x_3)=ax_1^2-2x_1x_2+2x_1x_3+2x_2x_3$ 经过正交变换 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{P}\boldsymbol{y}$ 后化为 $f=-2y_1^2+y_2^2+y_3^2$，其中 $\boldsymbol{x}=(x_1,x_2,x_3)^T$， $\boldsymbol{y}=(y_1,y_2,y_3)^T$. 求（1）常数 a；（2）正交矩阵 $\boldsymbol{P}$.

17.（16 分）设矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}2&-1&0\\-1&a&0\\0&0&2\end{pmatrix}$ 与 $\boldsymbol{\varLambda}=\begin{pmatrix}1&&\\&2&\\&&b\end{pmatrix}$ 相似.（1）确定 a,b 的值；（2）求正交矩阵 $\boldsymbol{Q}$，使得 $\boldsymbol{Q}^T\boldsymbol{A}\boldsymbol{Q}=\boldsymbol{\varLambda}$；（3）判定二次型 $f=\boldsymbol{x}^T\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}$ 的正定性，并指出方程

$\boldsymbol{x}^T\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=1$表示何种二次曲面.

18.（16 分）已知二次型 $f(x_1,x_2,x_3)=x_1^2+2x_2^2+ax_3^2-4x_1x_2-4x_2x_3$ 通过正交变换可化为标准形 $f(\boldsymbol{Y})=2y_1^2+5y_2^2+by_3^2$，求参数$a$、$b$及所用的正交矩阵，并判定二次型的正定性.

19. 设$\boldsymbol{A}$为n阶正定矩阵，$\boldsymbol{B}$为n阶实反对称矩阵，证明$\boldsymbol{A}-\boldsymbol{B}^2$为正定矩阵.

20.（6 分）设$\boldsymbol{A}$是n阶正定矩阵，$\boldsymbol{E}$是n阶单位矩阵，证明：$|\boldsymbol{E}+\boldsymbol{A}|>1$.