



计算机与信息学院  
人工智能学院

程序设计艺术与方法学

第三讲 计算几何



合肥工业大学计算机与信息学院 2020-09




计算机与信息学院  
人工智能学院

第三讲 计算几何

3.1 线段的性质

3.2 点集的性质

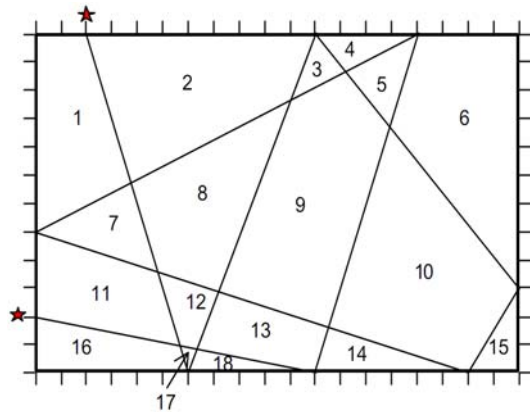


2

## 题目：地主分田

地主有块矩形土地，计划分给几个孩子，他在农场地图上划上一些直线，这些直线总是从矩形边界上的某一点到另一边界上的点，一条直线的终点是下一条直线的起点。不会有三线共点。他划分完后想数一下分出多少块土地，但这个地主老眼昏花，容易数错，因而向你求助。

线段个数 $L \leq 1000$ ，请你编程求解



3

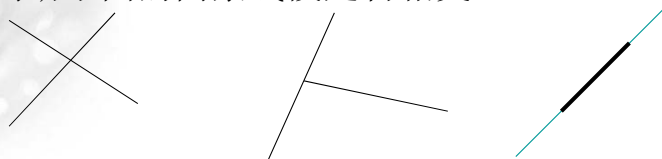
- ✦ 线段是几何中除去点后最基本的几何元素
- ✦ 是解决几何问题用到的最常用的几何元素
- ✦ 拟解决的两个问题：

#### ➤ 1 方向性问题

给出两个有公共起点的向量 $p_0p_1$ 和 $p_0p_2$ ，判断以 $p_0$ 为中心，从 $p_0p_1$ 转到到 $p_0p_2$ 是顺时针方向还是逆时针方向

#### ➤ 2 两个线段是否相交

判断平面的两条线段是否相交



4

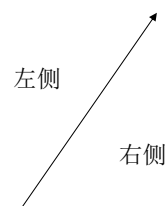
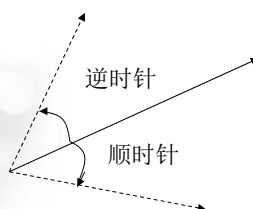
## 解析几何解法

- ⊕ 两点式直线方程:  $ax + by + c = 0$
- ⊕ 解方程:
  - 无解则表示平行
  - 无穷多解表示共线
  - 唯一解, 再判断交点是否在两个线段内部
- ⊕ 缺点:
  - 浮点误差, 用到浮点除法
  - 计算复杂

5

## 计算几何解法

- ⊕ 有向线段:
- ⊕ 侧、左侧、右侧:
- ⊕ 逆时针、顺时针:



6

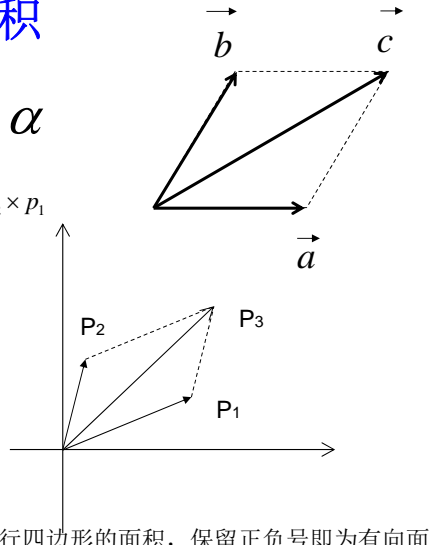
### 3.1 线段的性质

#### 叉积

$$|\vec{a} \times \vec{b}| = |\vec{a}| |\vec{b}| \sin \alpha$$

$$p_1 \times p_2 = \det \begin{pmatrix} x_1 & x_2 \\ y_1 & y_2 \end{pmatrix} = x_1 y_2 - x_2 y_1 = -p_2 \times p_1$$

两个有公共起点的向量的叉积，  
如果为正则由转到逆时针方向，  
如果为负则为顺时针方向。  
特别的如果为零，则两向量共线，  
可以进一步去判断共向的还是反向的



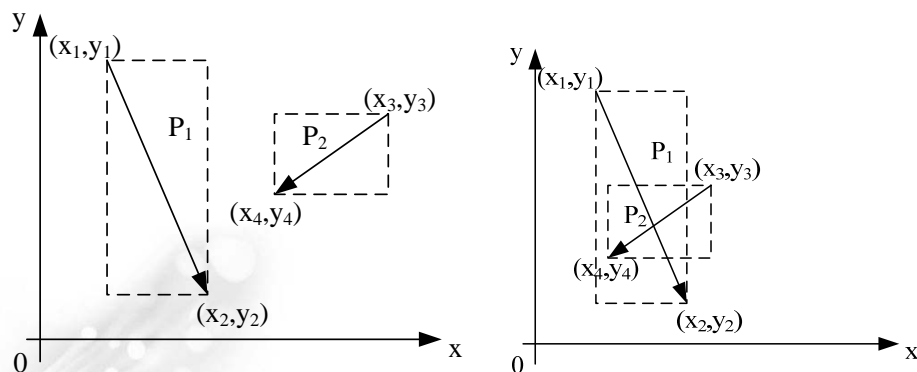
**叉积和有向面积：**叉积的绝对值等于平行四边形的面积，保留正负号即为有向面积，按逆时针为正，反之为负

7

### 3.1 线段的性质

#### 线段是否相交

⊕ **快速排斥试验：**



8

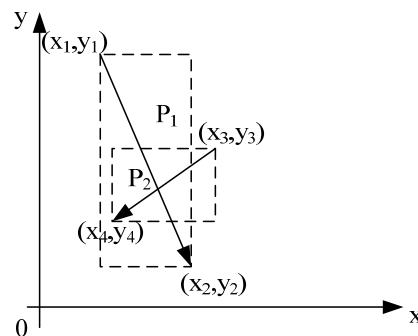
## 线段是否相交

- ✦ 快速排斥试验：
- ✦ 对于第一个线段 $P_1$ 
  - 左下角的点为： $(\min(x_1, x_2), \min(y_1, y_2))$ ；
  - 右上角的点为： $(\max(x_1, x_2), \max(y_1, y_2))$ ；
- ✦ 对于第二个线段 $P_2$ 
  - 左下角的点为： $(\min(x_3, x_4), \min(y_3, y_4))$ ；
  - 右上角的点为： $(\max(x_3, x_4), \max(y_3, y_4))$ ；

9

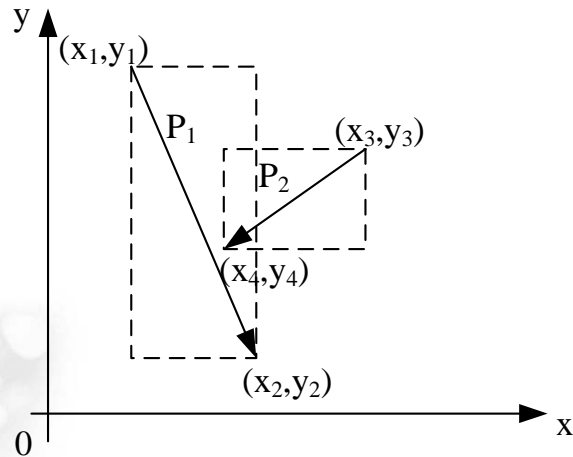
## 线段是否相交

- ✦ 快速排斥试验：
- ✦  $P_1$  右上角的x坐标大于等于 $P_2$  左下角的x坐标并且 $P_1$  左下角的x坐标小于等于 $P_2$  右上角的x坐标；  
 $(\min(x_1, x_2) \leq \max(x_3, x_4)) \ \&\& \ (\min(x_3, x_4) \leq \max(x_1, x_2))$
- ✦  $P_1$  右上角的y坐标大于等于 $P_2$  左下角的y坐标并且 $P_1$  左下角的y坐标小于等于 $P_2$  右上角的y坐标；  
 $(\min(y_1, y_2) \leq \max(y_3, y_4)) \ \&\& \ (\min(y_3, y_4) \leq \max(y_1, y_2))$



10

#### 线段是否相交



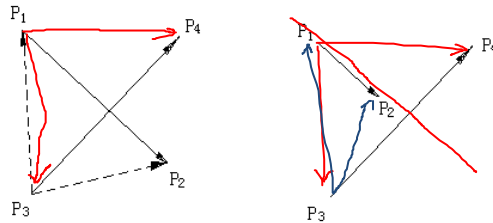
11

#### 线段是否相交

- ✦ **跨立：** 如果一条线段的一个端点在这条直线的一侧，另一个端点在这条直线的另一侧，我们就说这条线段跨立在这条直线上；
- ✦ 如果两条线段互相跨立，它们一定是相交的；
- ✦ 线段相交满足且只需满足如下两个条件就可以了：
  1. 两条线段相互跨立；
  2. 一条线段的一个端点在另一条线段上（针对边值情况）。

12

### 3.1 线段的性质



- 线段向量 $P_1P_2$ 是跨立在 $P_3P_4$ 上的
- 取端点 $P_3$ 为虚线所示向量的起点， $P_1$ 和 $P_2$ 为终点，则向量组 $P_3P_1$ 、 $P_3P_4$ 和向量组 $P_3P_2$ 、 $P_3P_4$ 的叉积符号是相反的
- 同样可以判断出 $P_3P_4$ 是跨立在 $P_1P_2$ 上的

一些说明：特殊情况可以用点积辅助判断，叉积说明左右情况，点积说明前后情况，参见《算法艺术与信息学竞赛》

13

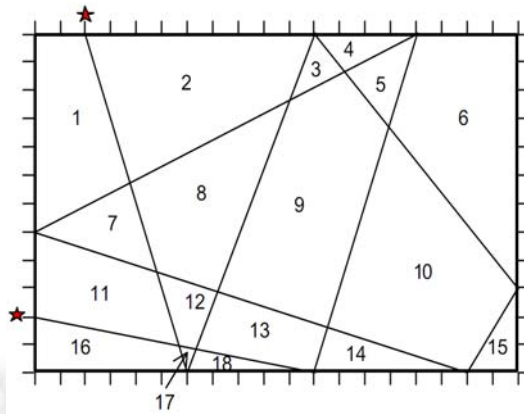
### 3.1 线段相交总结

	通过快速排斥实验	未通过快速排斥实验
未通过跨立实验		
通过跨立实验		

14

### 3.1 线段的性质

#### 题目：地主分田



**输入：**第1行输入地图的宽度 $w$ 和高度 $h$  ( $1 \leq w, h \leq 1000$ )，第2行输入线段 $L$  ( $1 \leq L \leq 1000$ )。以下 $L+1$ 行每行一个坐标 $(X_i, Y_i)$ ，庄主画的线段为 $(X_i, Y_i) (X_{i+1}, Y_{i+1})$ ， $i=1, 2, \dots, L$ 。 $(X_i, Y_i)$ 必定在矩形的边界上。  
**输出：**一个整数，为划分出的土地块数。

15

### 3.1 线段的性质

#### 解题思路

- A) 增加一条线，则增加一块地
- B) 增加一个点，则增加一块地

因而需要求取所有交点个数（不在边界上的）

两线跨立成立

16



### 3.1 线段的性质

#### 题目：机器蛇

在未来的某次战争中，我军计划了一次军事行动，目的是劫持敌人的航母。计划中要将数百条机器蛇投放到航母的各个角落里。由于航母内部舱室、管线错综复杂，且大部分由金属构成，因此屏蔽效应十分强烈，况且还要考虑敌人的大强度电子干扰，如何保持机器蛇间的联系，成了一大难题。每条机器蛇的战斗位置由作战计划部门制定，将会及时通知你。每条机器蛇上都带有接收、发射系统，可以同时与多条机器蛇通讯。由于整个系统承载的数据量庞大，需要一个固定的通讯网络。情报部门提供了极其详尽的敌方航母图纸，使你对什么地方有屏蔽了如指掌。

请你设计一个程序，根据以上信息构造通讯网络，要求信息可以在任意两条机器蛇间传递，同时为了避免干扰，通讯网络的总长度要尽可能的短。

17

### 3.1 线段的性质

#### 题目：机器蛇

**【输入】** 第一行是一个整数 $n$  ( $n \leq 200$ ) 表示参战的机器蛇总数。以下 $n$ 行，每行两个整数 $x_i, y_i$ ，为第 $i$ 支机器蛇的战斗位置。接下来一行是一个整数 $m$

( $m \leq 100$ ) 表示航母内部可能产生屏蔽的位置。最后 $m$ 行，每行四个整数 $a_i, b_i, c_i, d_i$ ，表示线段 $(a_i, b_i)-(c_i, d_i)$ 处可能有屏蔽，也就是说通讯网络不能跨越这条线段。

**【输出】** 输出数据应仅包括一个实数，表示建立的通讯网的最短长度，保留3位小数。如果不能成功建立通讯网，请输出-1.000。

18



## 解题思路

题目中要求信息可以在任意两条机器蛇间传递，通信网络的总长度要尽可能的短，显然这是一个求图的最小生成树问题。但问题的关键是构图，因为如果以机器蛇为顶点，以通信线路为边，则每一条边都不能与任一条屏蔽线相交。



19



## 其他和线段相关的计算

- 计算两条相交线段的交点
- 判断任意一组线段中是否存在相交的情况
- 计算线段的中垂线方程
- 计算凸多边形的重心位置和面积
- 寻找最近点对
- .....



20



### 3.1 线段的性质

### 3.2 点集的性质



### 题目：地主圈地

地主有一片不规则的树林，经常遭到一些小动物的破坏，于是地主就想给这片树林围一圈篱笆墙以保护他的树林，但这个地主比较吝啬，想用最短的篱笆墙围起这片树林，聪明的你给他计算一下最短的篱笆墙的长度吧。

点的个数 $n \leq 10000$ ，请你编程求解

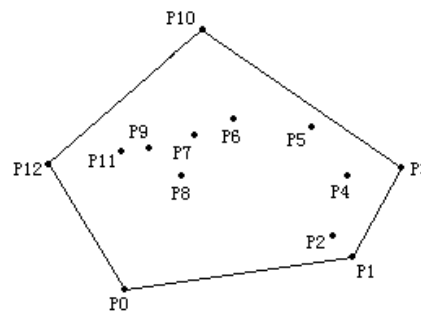


### 凸包

❖凸包是一组点集中的子集，这一子集形成的凸多边形可以将点集中所有的点都围住，并且这一凸多边形的面积是最小的。

如图所示：凸包为点P10、P3、P1、P0和P12

$CH(Q) = \{P10, P3, P1, P0, P12\}$



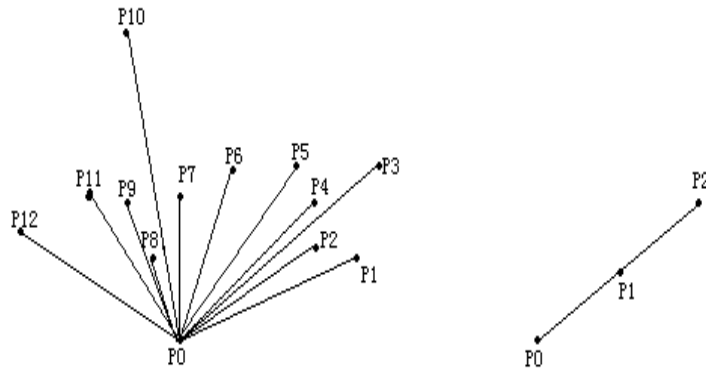
23

### 寻找凸包的方法

- 首先，找出点集中最下方的点，如果这样的点不止一个，就选用最左边的点（如P0）
- 显然，点（P0）是凸包子集中的一个点
- 设想在P0处拴了一根皮筋，放在和P0成水平位置的右侧
- 将皮筋，沿逆时针方向转动，首先会碰到P1
- 以P1为中心，做和P0一样的事，将碰到P3
- 一直这样做下去，直到再一次遇到P0，凸包就被找出来了

24

### 寻找凸包的方法



——找到 $P_0$ 点之后，以 $P_0$ 为每个矢量的起点，其它的点为矢量的终点，来比较任意两个矢量的转角，就可以对余下的点进行按极角排序

——先看向量 $P_0P_1$ 和 $P_0P_2$ ，由于从 $P_0P_1$ 转向 $P_0P_2$ 为逆时针，于是认为点 $P_1$ 大于点 $P_2$

——对于右图中的特殊情况，比较的结果应该是 $P_2$ 大于 $P_1$

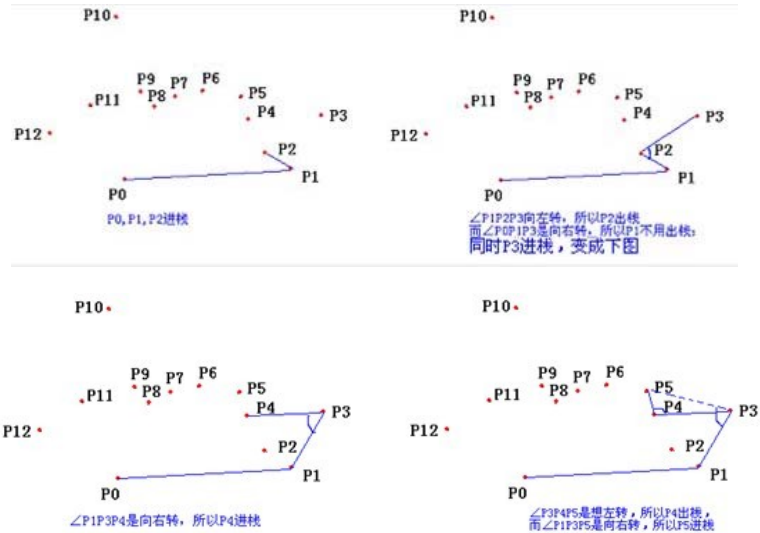
25

### Graham扫描法

- ✦ 令 $p_0$ 为 $Q$ 中 $Y-X$ 坐标排序下最小的点
- ✦ 设 $\langle p_1, p_2, \dots, p_m \rangle$ 为对其余点按以 $p_0$ 为中心的极角逆时针排序所得的点集（如果有多个点有相同的极角，除了距 $p_0$ 最远的点外全部移除）
- ✦ 压 $p_0$ 进栈 $S$
- ✦ 压 $p_1$ 进栈 $S$
- ✦ 压 $p_2$ 进栈 $S$
- ✦ for  $i \leftarrow 3$  to  $m$
- ✦ do while （由 $S$ 的栈顶元素的下一个元素、 $S$ 的栈顶元素以及 $p_i$ 构成的折线段不拐向左侧）
  - 对 $S$ 弹栈
  - 压 $p_i$ 进栈 $S$
- return  $S$ ;
- ✦ 效率提高到 $O(n \log n)$

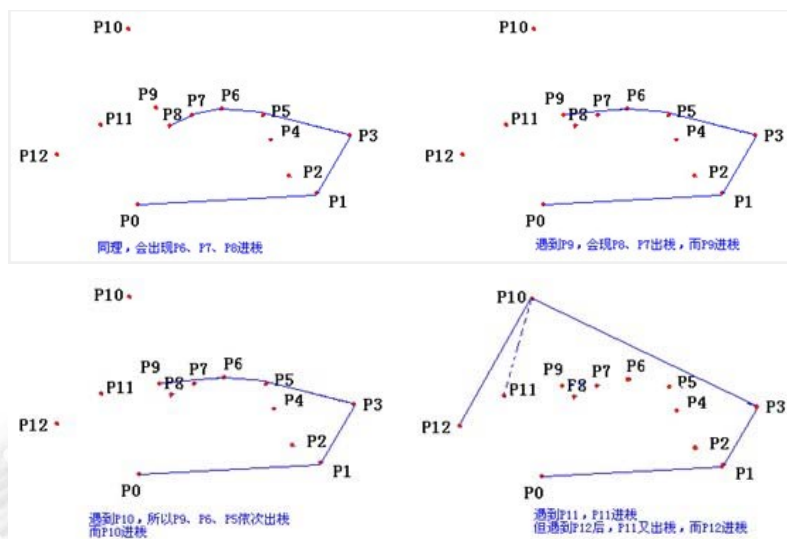
26

### Graham扫描法



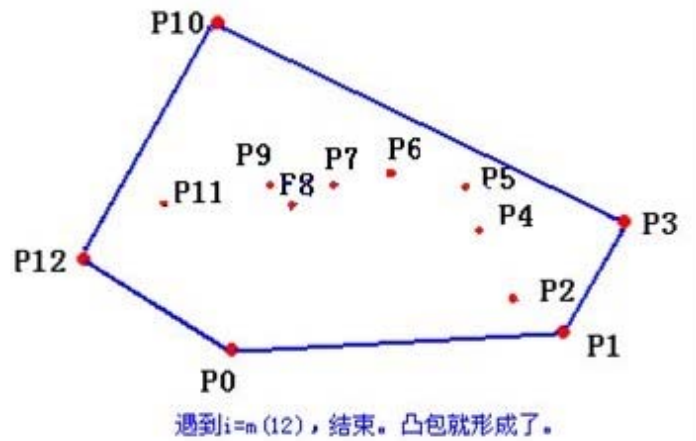
27

### Graham扫描法



28

## Graham扫描法



29

## 巨人和魔鬼(例2)

$n$ 个巨人正与 $n$ 个鬼进行战斗，每个巨人的武器是一个质子炮，它可以把一串质子流射中鬼而把鬼消灭。质子流沿直线行进，在击中鬼时就终止。巨人决定采取下述策略。他们寻找鬼配对，以形成 $n$ 个巨人—鬼对。然后每个巨人同时向他选取的鬼射出一串质子流。我们知道，让质子流互相交叉是很危险的。因此巨人选择的配对方式应该使质子流都不会交叉。假定每个巨人和每个鬼的位置都是平面上的一个固定点，并且没有三个位置共线，求一种配对方案。

30

### 巨人和魔鬼

输入：第一行为 $n$ ，接下来的 $n$ 行为巨人信息，其中第 $i+1$ 行为巨人 $i$ 的坐标 $(x_i, y_i)$ 。最后 $n$ 行为魔鬼信息，其中第 $n+i+1$ 行为魔鬼 $i$ 的坐标 $(x_i, y_i)$ 。

输出： $n$ 行，其中第 $i$ 行的格式为“ $x_i, y_i \ x_i', y_i'$ ”表示 $(x_i, y_i)$ 位置的巨人和 $(x_i', y_i')$ 位置的魔鬼配对。

31

### 解题思路：分治+递归

我们设 $P_1..P_n$ 为巨人的固定点； $P_{n+1}..P_{2n}$ 为鬼的固定点。我们采取分治策略寻找序列 $[P_p..P_r]$ 中的配对方案(初始时 $[P_p..P_r]$ 为 $[P_1..P_{2n}]$ ):

在 $[P_p..P_r]$ 中找出一个最低位置(Y坐标值最小)的一个点 $P_0$ ,如果这样的点有多个,则选取最左边的点为 $P_0$ ,  **$P_0$ 与 $P_p$ 交换**。然后将其余点 $[P_{p+1}..P_r]$ 按相对 $P_p$ 的极角递增的顺序排列。显然 $P_p$ 与其余点 $P_{p+1}..P_r$ 之间的任何线段是不会交叉的。我们从 $P_p$ 开始寻找一个巨人和鬼成对的最小子区间 $[P_p..P_i](p \leq i \leq r)$ 。若该子区间仅剩一个元素,配对结束;否则巨人(鬼) $P_p$ 与鬼(巨人) $P_i$ 配对。这样使得尚未配对的巨人和鬼分布在两个子区间 $[P_{p+1}..P_{i-1}]$ ,  $[P_{i+1}..P_r]$ 。继续按上述分治策略分别递归求解 $[P_{p+1}..P_{i-1}]$ 和 $[P_{i+1}..P_r]$ 。

32



## 解题思路：分治+递归

