合 肥 工 业 大 学 试 卷（A）答案

2014～2015 学年第 一 学期 课程代码________ 课程名称 概率论与数理统计 学分 3.5 课程性质:必修 考试形式: 闭卷

专业班级（教学班）__________________ 考试日期 2015.1.7 命题教师________ 系（所或教研室）主任审批签名__________

一

1. $P(A\bar{B})=P(A\cup B)-P(B)=0.3$；

2. $a=1, P\{X\ge 3\}=1-P\{X=1\}-P\{X=2\}=\frac{1}{4}$;

3. $p=P\{X>4\}=e^{-4}$；

4. $D(X-2Y+4)=D(X)+4D(Y)=6$;

5. $(\bar{x}\pm\frac{s}{\sqrt{16}}t_{0.025}(15))=(3.4\pm 0.2664)=(3.1336,3.6664)$。

二

1.C；2.A；3.D；4.B；5.C。

三

解：（1）设 A_0：A一次也没有发生，A_1：A发生一次，A_2：A至少发生两次，则 A_0，A_1，A_2 是一个完备事件组，由全概率公式有

$$P(B)=\sum_{i=0}^{2}P(A_i)P(B\mid A_i)=\frac{1}{16}\times 0+4\times\frac{1}{16}\times 0.6+(1-\frac{1}{16}-4\times\frac{1}{16})\times 1=\frac{67}{80};$$

（2）$P(A_1\mid B)=\dfrac{P(A_1)P(B\mid A_1)}{P(B)}=\dfrac{\frac{3}{20}}{\frac{67}{80}}=\dfrac{12}{67}.$

四

解：（1）由 $\int_{-\infty}^{+\infty}f(x)dx=1\Rightarrow\int_{-1}^{1}k(1+x)dx=\frac{k}{2}(1+x)^2\Big|_{-1}^{1}=2k=1, k=\frac{1}{2}$;

（2）$F(x)=\int_{-\infty}^{x}f(t)dt=\begin{cases}0, & x<-1,\\ \frac{1}{4}(1+x)^2, & -1\le x\le 1,\\ 1, & x>1\end{cases}$

（3）$P\{-2\le X<\frac{1}{2}\}=F(\frac{1}{2})-F(-2)=\frac{3}{16}$;

或 $P\{-2\le X<\frac{1}{2}\}=F(\frac{1}{2})-F(-2)=\frac{9}{16}--0=\frac{9}{16}$；

（4）$F_Y(y)=P\{Y\le y\}=P\{Y\le y\}=P\{2X^2+1\le y\}$,

当 $y\le 1$时，$F_Y(y)=0$，

当$1<y<3$时，$F_Y(y)=P\{-\sqrt{\frac{y-1}{2}}<X<\sqrt{\frac{y-1}{2}}\}=\frac{1}{2}\int_{-\sqrt{\frac{y-1}{2}}}^{\sqrt{\frac{y-1}{2}}}(1+x)dx=\sqrt{\frac{y-1}{2}}$,

当 $y\ge 3$ 时 $F_Y(y)=1$,

所以 $f_Y(y)=F_Y'(y)=\begin{cases}\dfrac{\sqrt{2}}{4\sqrt{y-1}}, & 1<y<3,\\ 0, & 其他.\end{cases}$

五

解：（1）$f_X(x)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)dy=\begin{cases}0, & x\le 0,\\ \int_x^{+\infty}xe^{-y}dy, & x>0,\end{cases}=\begin{cases}0, & x\le 0,\\ xe^{-x}, & x>0,\end{cases}$

$f_Y(x)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)dx=\begin{cases}0, & y\le 0,\\ \int_0^y xe^{-y}dx, & y>0,\end{cases}=\begin{cases}0, & y\le 0,\\ \frac{1}{2}y^2e^{-y}, & y>0\end{cases}$；

（2）由于当 $x>0,y>0$ 时 $f_X(x)f_Y(y)=\frac{1}{2}xy^2e^{-(x+y)}\ne f(x,y)$，所以 X 与 Y 不独立；

（3）$P\{X+Y\le 2\}=\iint\limits_{x+y\le 2}f(x,y)dxdy=\int_0^1dx\int_x^{2-x}xe^{-y}dy=\int_0^1x(e^{-x}-e^{x-2})dx$

$=-x(e^{-x}+e^{x-2})\Big|_0^1+\int_0^1(e^{-x}+e^{x-2})dx=1-\frac{2}{e}-\frac{1}{e^2}$.

六

解：（1）$U\sim\begin{pmatrix}0 & 1\\ \frac{1}{6} & \frac{5}{6}\end{pmatrix}, V\sim\begin{pmatrix}-1 & 1\\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2}\end{pmatrix}$；

（2）$P\{U=0,V=-1\}=P\{X=-1\}=\frac{1}{6}, P\{U=0,V=1\}=0$，

$P\{U=1,V=-1\}=P\{X=0\}=\frac{1}{3}, P\{U=1,V=1\}=P\{X=1\}=\frac{1}{2}$；

或

U \ V	-1	1
0	$\frac{1}{6}$	0
1	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{2}$

（3） $\operatorname{Cov}(U,V)=E(UV)-(EU)(EV)=\dfrac{1}{6}, DU=\dfrac{5}{36}, DV=1, \rho_{UV}=\dfrac{1}{\sqrt{5}}$，

$\rho_{UV}\neq 0$，因此U与V不是不相关的.

七

解：（1）求θ的矩估计，

$$\mu=E(X)=\int_0^{+\infty}x\frac{x}{\theta^2}e^{-\frac{x^2}{2\theta^2}}dx=-\int_0^{+\infty}xd(e^{-\frac{x^2}{2\theta^2}})=-xe^{-\frac{x^2}{2\theta^2}}\Big|_0^{+\infty}+\int_0^{+\infty}e^{-\frac{x^2}{2\theta^2}}dx$$

$$\overset{x=\sqrt{2}\theta t}{=\!=\!=}\sqrt{2}\theta\int_0^{+\infty}e^{-t^2}dt=\sqrt{\frac{\pi}{2}}\theta,$$

令 $\mu=\bar{X}$, $\sqrt{\dfrac{\pi}{2}}\theta=\bar{X}$ 所以θ的矩估计 $\hat{\theta}=\sqrt{\dfrac{2}{\pi}}\bar{X}$；

（2）θ的极大似然估计，

$$L=\prod_{i=1}^{n}\frac{x_i}{\theta^2}e^{-\frac{x_i^2}{2\theta^2}}=\frac{x_1x_2\cdots x_n}{\theta^{2n}}e^{-\frac{1}{2\theta^2}\sum_{i=1}^{n}x_i^2}, \quad \ln L=\ln(x_1x_2\cdots x_n)-2n\ln\theta-\frac{1}{2\theta^2}\sum_{i=1}^{n}X_i^2,$$

$$\frac{d\ln L}{d\theta}=-\frac{2n}{\theta}+\frac{1}{\theta^3}\sum_{i=1}^{n}X_i^2=0,\quad \frac{1}{\theta^2}\sum_{i=1}^{n}X_i^2=2n,$$ 所以θ的极大似然估计为： $\hat{\theta}_L=\sqrt{\dfrac{1}{2n}\sum_{i=1}^{n}X_i^2}$；

（3） $E(\hat{\theta}_L^2)=\dfrac{1}{2n}\sum_{i=1}^{n}E(X_i^2)=\dfrac{1}{2}E(X^2)$，而 $E(X^2)=\int_0^{+\infty}x^2\dfrac{x}{\theta^2}e^{-\frac{x^2}{2\theta^2}}dx\overset{t=\frac{x^2}{2\theta^2}}{=\!=\!=}2\theta^2\int_0^{+\infty}te^{-t}\,dt=2\theta^2$，

因此 $E(\hat{\theta}_L^2)=\theta^2$，即 $\hat{\theta}_L^2$ 是 θ^2 的无偏估计.

八

解：由题设 $\bar{X}+X_{10}\sim N(0,\dfrac{10}{9}\sigma^2)$，且 $\bar{X}+X_{10}$ 与 S^2, X_{11} 相互独立，$\dfrac{3}{\sigma\sqrt{10}}(\bar{X}+X_{10})\sim N(0,1)$，

$\dfrac{8S^2}{\sigma^2}\sim\chi^2(8), \dfrac{1}{\sigma^2}X_{11}^2\sim\chi^2(1)$，$\dfrac{8S^2}{\sigma^2}$ 与 $\dfrac{1}{\sigma^2}X_{11}^2$ 相互独立，因此 $\dfrac{8S^2}{\sigma^2}+\dfrac{1}{\sigma^2}X_{11}^2\sim\chi^2(9)$，由$t-$分布的构

造可知 $\dfrac{\frac{3}{\sigma\sqrt{10}}(\bar{X}-X_{10})}{\sqrt{\left(\frac{8S^2}{\sigma^2}+\frac{1}{\sigma^2}X_{11}^2\right)\Big/9}}=\dfrac{9}{\sqrt{10}}\times\dfrac{\bar{X}-X_{10}}{\sqrt{8S^2+X_{11}^2}}\sim t(9), C=\dfrac{9}{\sqrt{10}}$.