15/11/22

Commande Optimale
TP 1

Valeur de référence $\theta_r(t) = \theta_0$

CdC : - atteindre la consigne en 8s max
- sans oscillations
- erreur de position nulle

position angulaire $\theta_m(t)$ et vitesse angulaire $\Omega_m(t) = \dot{\theta}(t)$

$k_m = 9$, $T_m = 0{,}3$, $k_g = 0{,}105$ V/tr, $k_s = k_e = 10$ V/tr

2. Modélisation et analyse du système en boucle fermée

1. Fonction de transfert $\theta_s = \dfrac{k_e k_m}{9(1+T_m p)p} \theta_r$.

L'entrée est $\theta_r = u$

$$\Leftrightarrow 9\theta_s(1+T_m p)p = k_e k_m \theta_r$$

$$\Leftrightarrow 9p\theta_s + 9T_m p^2 \theta_s = k_m k_e \theta_r$$

$\mathcal{L}^{-1}$

$$\Leftrightarrow 9\dot{\theta}_s + 9T_m \ddot{\theta}_s = k_m k_e \theta_r$$

$$\Leftrightarrow \ddot{\theta}_s = (k_m k_e \theta_r - 9\dot{\theta}_s) / 9T_m$$

On choisit comme variable d'état $X = \begin{bmatrix} \theta_s \\ \dot{\theta}_s \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$

d'où $\dot{X} = \begin{bmatrix} \dot{\theta}_s \\ \ddot{\theta}_s \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_2 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix}$

$$\dot{X} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -\frac{1}{T_m} \end{bmatrix} X + \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{k_m k_e}{9T_m} \end{bmatrix} u$$

$y = [1 \quad 0] X + [0] u$

(Os)

Valeurs propres en 0 et -3,33 => simplement stable

Co et Ob de rang plein donc observable et commandable d'après le critère de Kalman.

3. Développement d'une régulation basée sur une commande LQ :

3.1. Premier Essai :

Minimiser $J = \frac{1}{2} \int_0^{+\infty} x^t(t)x(t) + 100u^2(t)\, dt$

1. $Q = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ $\quad R = 1$ $\quad P = 0$ parce que cas d'un horizon infini

2. Sous la contrainte du système $\begin{cases} \dot{x} = Ax + Bu \\ y = Cx \end{cases}$

On résout l'équation de Riccati telle que

$\begin{cases} u^*_t = -L_t x_t = -R^{-1}B^T P_t x_t \\ L_t = R^{-1}BP \end{cases}$

P solution de $A^TP + PA - PBR^{-1}B^TP + Q = 0$

Le gain de commande pour le retour d'état est

$K = [0,707 \quad 0,0481]$

3. $\dot{x} = Ax + Bu^*$

$= Ax - R^{-1}BPx$

$= (A - R^{-1}BP)x = (A - BP)x$

15/11/22

Commande Optimale
TP1 (suite)

Les valeurs propres sont $\begin{cases} -0{,}8250 \\ -5{,}7143 \end{cases}$

Oui, $Re(\mathrm{vp}) < 0 \Rightarrow$ stable asymptotiquement

- Lecture de la marge de module sur Nyquist -

4. $\begin{cases} \text{Marge de gain } G_m = +\infty \\ \text{Marge de phase } \varphi_m = 11{,}4074° \text{ à } 18{,}0850 \text{ rad/s} \end{cases}$

5. $t_r = 4{,}1539$ s
$t_m = 7{,}5463$
Pas de dépassement
Pas d'oscillations
Peak à 14,1226 donc erreur de position de 14,1226.

6. $t_r = 4{,}1539$s
$t_m = 7{,}5463$
Pas de dépassement
Pas d'oscillations
Peak à 0,9986 donc erreur de position de 0,0014

3.2. Choix des paramètres du coût J :

Nouveau coût $J = \frac{1}{2} \int_0^{+\infty} x^T(t)\, Q\, x(t) + r u^2(t)\, dt$

1.
R ↑ alors u ↓
Essai 1 $Q = \begin{bmatrix} 1/2 & 0 \\ 0 & 1/2 \end{bmatrix}$

21/11/2022

Diminuer les coefficients de Q augmente le gain de la boucle
Essai 2 : $Q = \begin{bmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 5 \end{bmatrix}$
Augmenter Q diminue le t_r et le gain statique

Au dessus de 1, on diminue le gain statique de la BF
la diminution semble linéaire [1 ; gain statique [
≈ 14

On constate que l'évolution est logarithmique on a une valeur finale de 3,5 par 20
0,45 par 1000

$$\underset{(1\times2)}{\begin{bmatrix}\theta & \dot\theta\end{bmatrix}} \underset{(2\times2)}{\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}} \underset{(2\times1)}{\begin{bmatrix}\theta\\ \dot\theta\end{bmatrix}}$$

$$= \underset{1\times2}{\begin{bmatrix}\theta & \dot\theta\end{bmatrix}} \underset{2\times1}{\begin{bmatrix}\theta\\ \dot\theta\end{bmatrix}} = \theta^2 + \dot\theta^2$$

$$x^T \begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{bmatrix} x$$

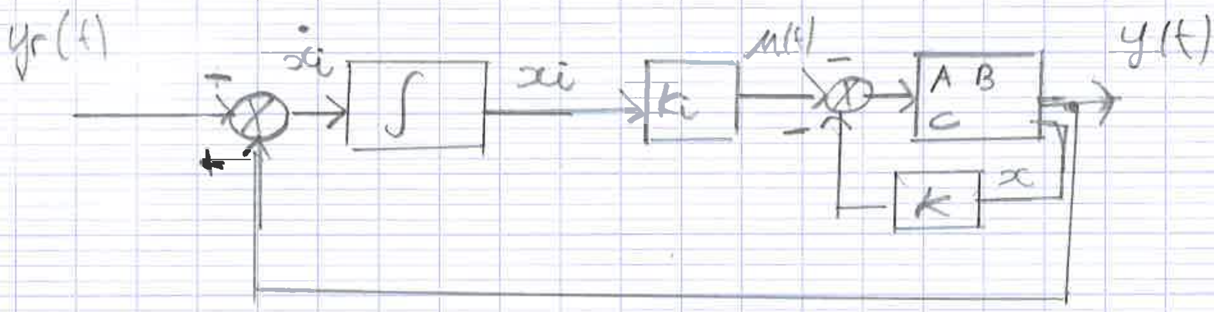
2. ↑ R permet d'éviter la saturation
Q règle le gain statique et le temps de réponse

Relever la marge de Module sur le Nyquist et voir si elle a été modifiée (on s'est rapproché du point critique)
le système 3 en BF est stable asymptotiquement

4. Extension du modèle et commande LQ :

$$u(t) = -Kx(t) - k_i x_i(t)$$
$$\dot x_i(t) = y(t) - y_r(t)$$

1. $\dot X = AX + BU$
$= AX + B(-Kx - k_i x_i) = Ax + B(-Kx - k_i \int y - y_r \, dt)$



$\dot{x}_i(t) = y(t) - y_r(t) \iff y(t) = \dot{x}_i(t) + y_r(t)$

$\begin{bmatrix} \dot{x}(t) \\ \dot{x}_i(t) \end{bmatrix} = A_i \begin{bmatrix} \theta \\ \dot{\theta} \\ \varepsilon_i \end{bmatrix} + B_i y_r(t)$

$\varepsilon = x_i$

$\varepsilon = x_i$

$y(t) = [0\ 0\ 1] \begin{bmatrix} \theta \\ \dot{\theta} \\ \varepsilon \end{bmatrix}$

$X = \begin{bmatrix} \theta \\ \dot{\theta} \\ \varepsilon \end{bmatrix}$