

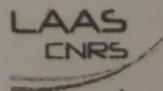
# OUTILS FONDAMENTAUX POUR LA ROBOTIQUE

---

Viviane CADENAT.  
Enseignant-chercheur à l'UPS.  
LAAS-CNRS, équipe Robotique, Action, Perception.

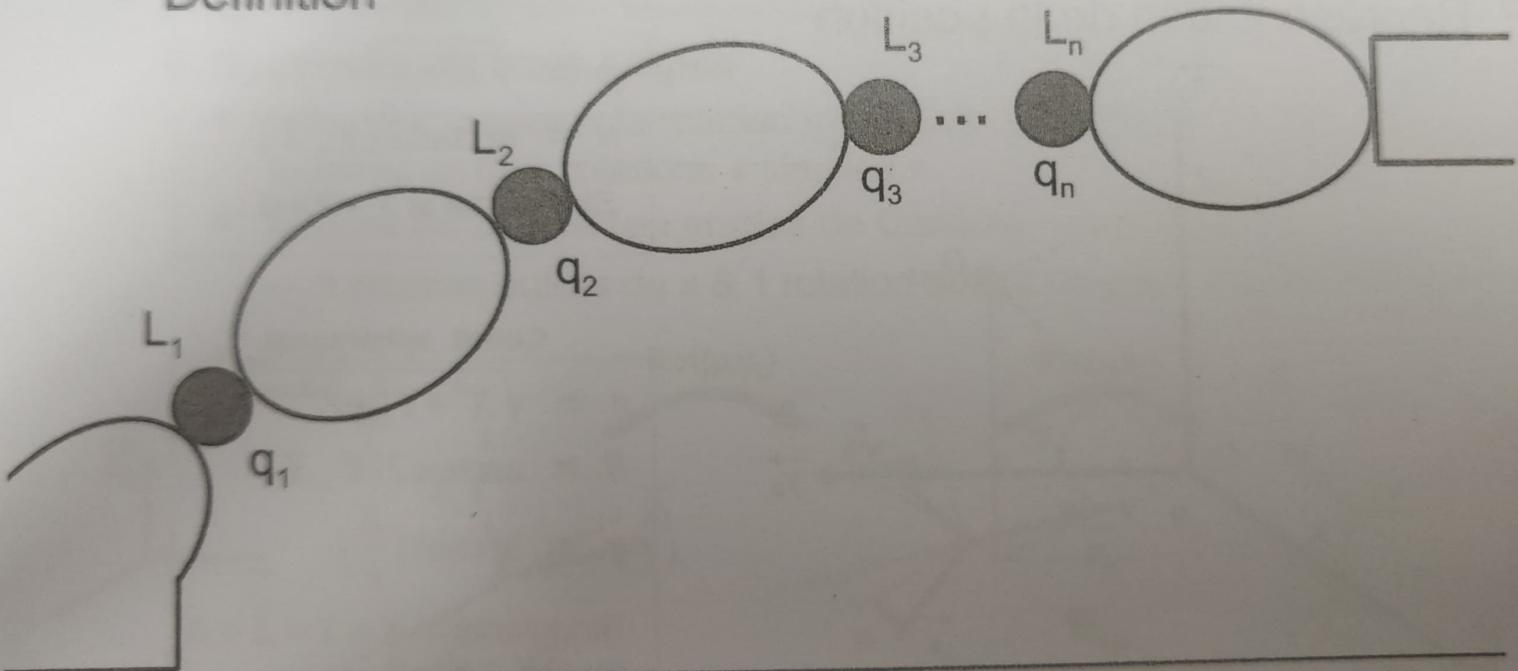


Master Automatique et Robotique – Université P. Sabatier



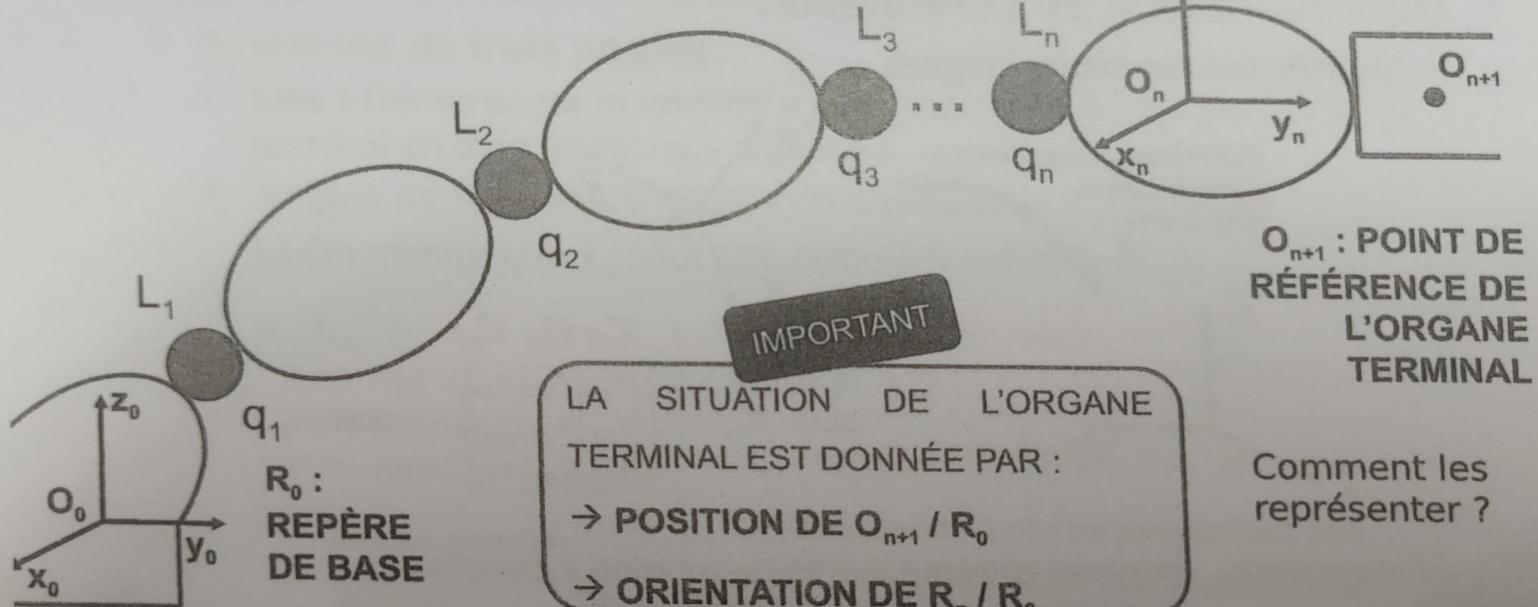
# Représentation de la situation de l'organe terminal

## ■ Définition



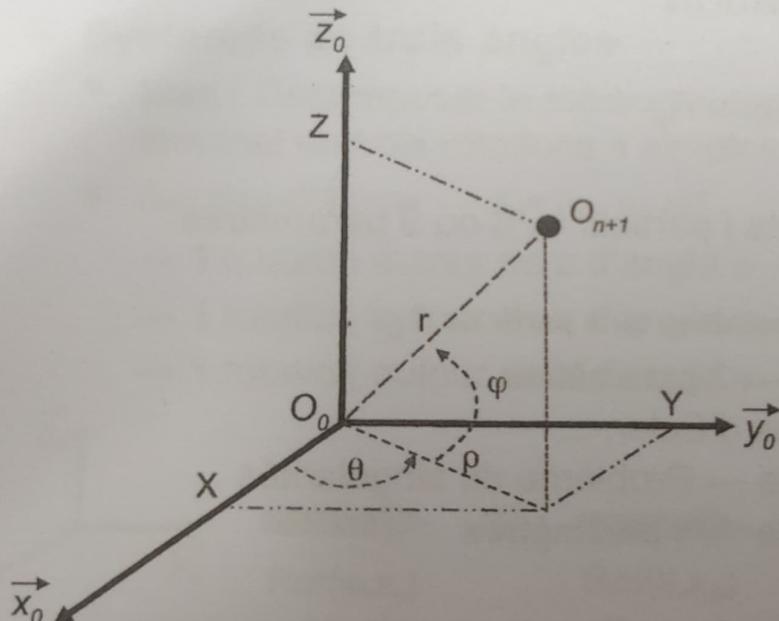
# Représentation de la situation de l'organe terminal

## ■ Définition



# Représentation de la situation de l'organe terminal

## ■ Représentation de la position



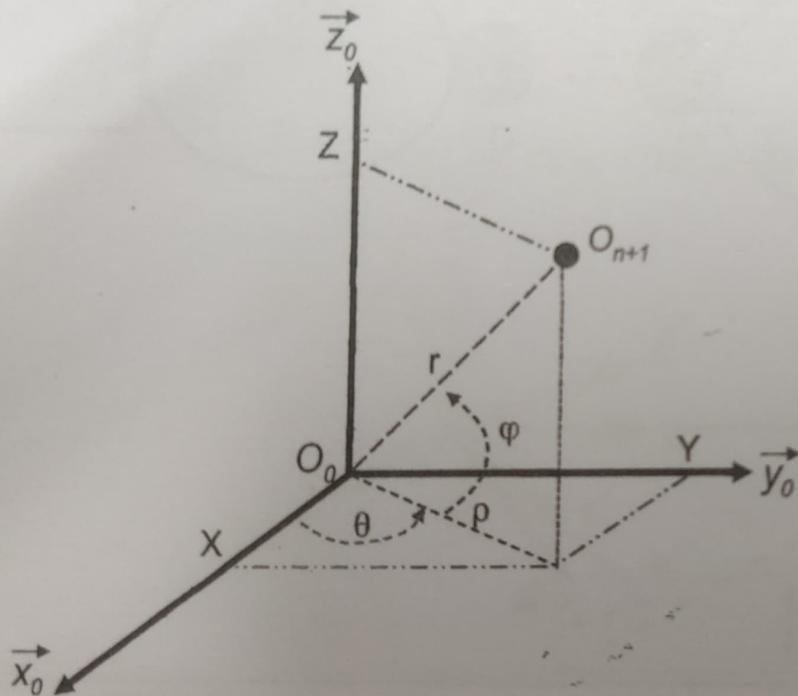
IMPORTANT

- Coordonnées cartésiennes  
→  $x_p = (X \ Y \ Z)^T$
- Coordonnées cylindriques  
→  $x_p = (\rho \ \theta \ Z)^T$
- Coordonnées sphériques  
→  $x_p = (r \ \theta \ \varphi)^T$

ON DÉDUIT LES COORDONNÉES CYLINDRIQUES ET SPHÉRIQUES DES COORDONNÉES CARTÉSIENNES.

# Représentation de la situation de l'organe terminal

## ■ Représentation de la position



Coord. cylindriques

$$\rho = \sqrt{X^2 + Y^2}$$

$$\theta = \arctan 2(Y, X)$$

Singularité si  $X = Y = 0$

Coord. sphériques

$$r = \sqrt{X^2 + Y^2 + Z^2}$$

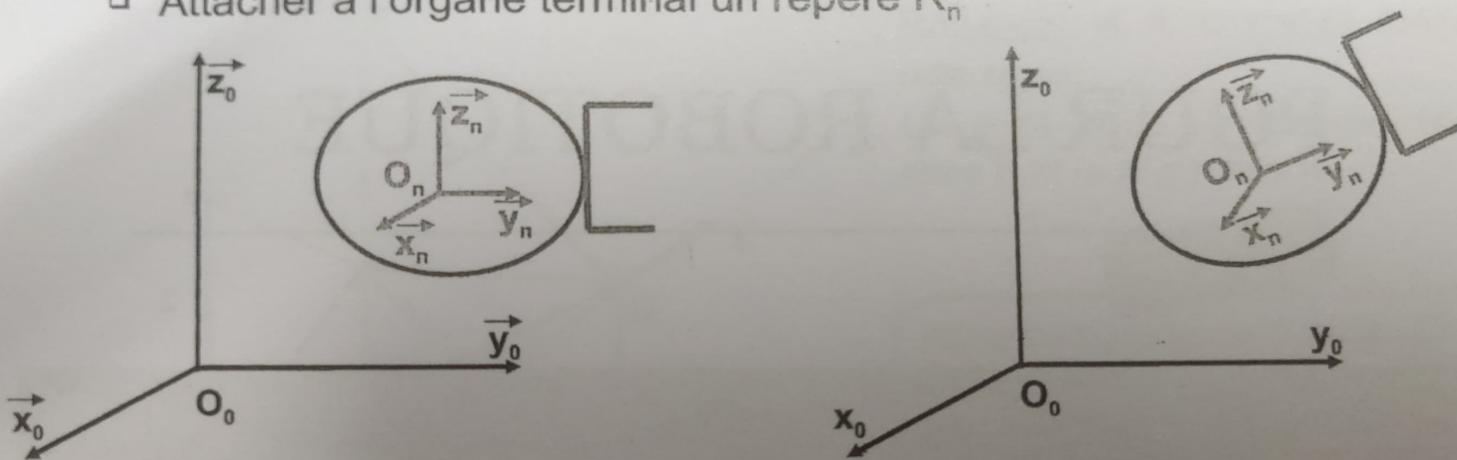
$$\theta = \arctan 2(Y, X)$$

$$\varphi = \arcsin\left(\frac{Z}{r}\right)$$

Singularité si  $X = Y = Z = 0$   
ou si  $X = Y = 0$

# Représentation de la situation de l'organe terminal

- Représentation de l'orientation
  - Attacher à l'organe terminal un repère  $R_n$



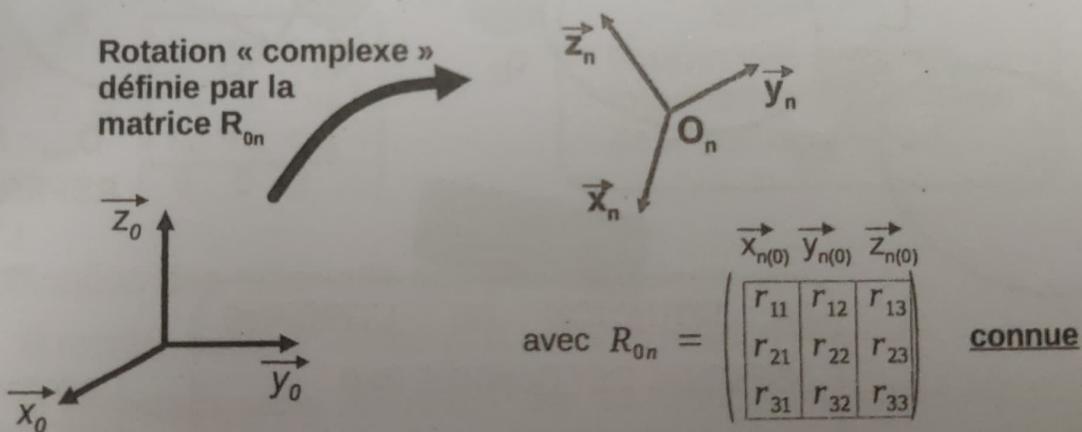
⇒ L'orientation est donnée par les vecteurs de  $R_n$  / Repère fixe (ici  $R_0$ )

# Représentation de la situation de l'organe terminal

- Représentation de l'orientation
  - Première paramétrisation :
    - Composantes de  $\vec{x}_n, \vec{y}_n, \vec{z}_n$  dans  $R_0$
    - Matrice de rotation  $R_{0n}$
    - Cosinus directeurs complets / partiels → 6 ou 9 paramètres
  - Autres solutions → ne sont calculables qu'à partir de  $R_{0n}$ 
    - Systèmes de trois angles → 3 paramètres
      - Angles de Bryant, Angles d'Euler, ...
      - Représentation minimale → Problème de singularités
    - 1 axe de rotation et 1 angle → 4 paramètres
      - Quaternions
      - Représentation non minimale → Pas de singularité

# Représentation de la situation de l'organe terminal

- Représentation de l'orientation
  - Systèmes de trois angles



Question : Peut-on décomposer cette rotation « complexe » en trois rotations « simples » ?

# Représentation de la situation de l'organe terminal

## ■ Représentation de l'orientation

### □ Systèmes de trois angles

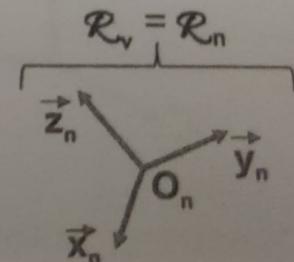
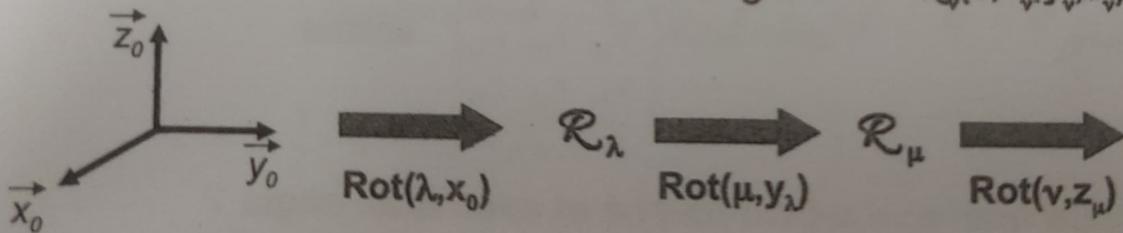
■ Idée : Décomposer la rotation « complexe » effectuée par l'organe terminal en trois rotations « simples »

■ Angles de Bryant (ou angles de Cardan)  $\rightarrow X_R = (\lambda, \mu, \nu)^T$

$\rightarrow$  1 rotation autour de  $x$  d'angle  $\lambda \rightarrow R_\lambda(\lambda, x_\lambda, y_\lambda, z_\lambda)$

$\rightarrow$  1 rotation autour de  $y$  d'angle  $\mu \rightarrow R_\mu(\mu, x_\mu, y_\mu, z_\mu)$

$\rightarrow$  1 rotation autour de  $z$  d'angle  $\nu \rightarrow R_\nu(\nu, x_\nu, y_\nu, z_\nu)$

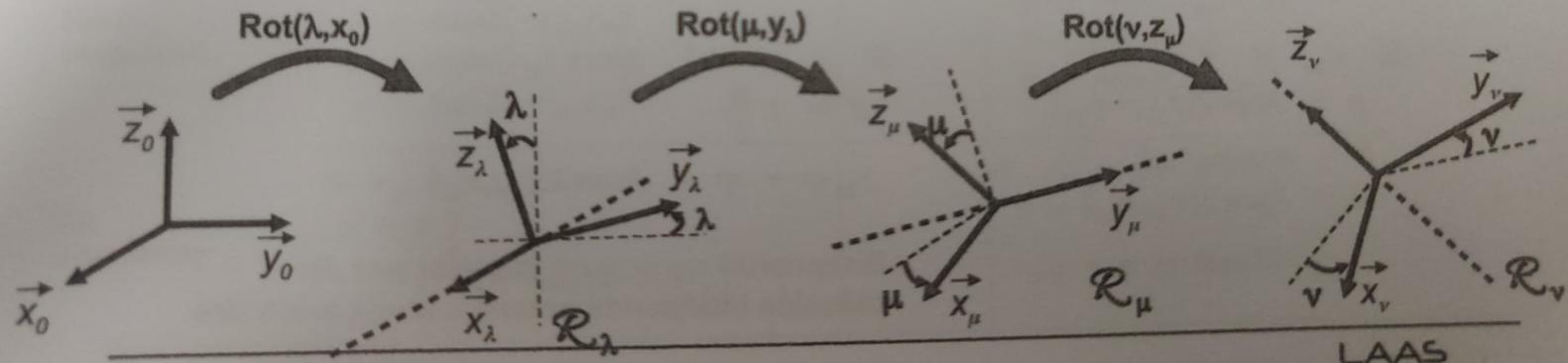


# Représentation de la situation de l'organe terminal

## ■ Représentation de l'orientation

### □ Systèmes de trois angles

- Idée : Décomposer la rotation « complexe » effectuée par l'organe terminal en trois rotations « simples »
- Angles de Bryant (ou angles de Cardan)  $\rightarrow \mathbf{X}_R = (\lambda, \mu, \nu)^T$ 
  - 1 rotation autour de x & 1 rotation autour de y & 1 rotation autour de z



# Représentation de la situation de l'organe terminal

## ■ Représentation de l'orientation

### □ Systèmes de trois angles

■ **Idée** : Décomposer la rotation « complexe » effectuée par l'organe terminal en trois rotations « simples »

■ Angles de Bryant (ou angles de Cardan)  $\rightarrow \mathbf{x}_R = (\lambda, \mu, \nu)^T$

$\rightarrow$  On montre que  $\mathbf{x}_R$  peut être calculé à partir de  $R_{0n}$ :

Si  $r_{13} \neq \pm 1$  alors

$$\lambda = \text{Atan}2(-r_{23}, r_{33})$$

$$\mu = \arcsin(r_{13})$$

$$\nu = \text{Atan}2(-r_{12}, r_{11})$$

Hors singularité

Si  $r_{13} = \pm 1$  alors

$$\mu = \pm \frac{\pi}{2}$$

$$r_{13}\lambda + \nu = \text{Atan}2(-r_{21}, r_{22})$$

Singularité :  $\lambda$  et  $\nu$  ne peuvent pas être calculés indépendamment  $\rightarrow$  choix arbitraire

# Représentation de la situation de l'organe terminal

## ■ Représentation de l'orientation

### □ Systèmes de trois angles

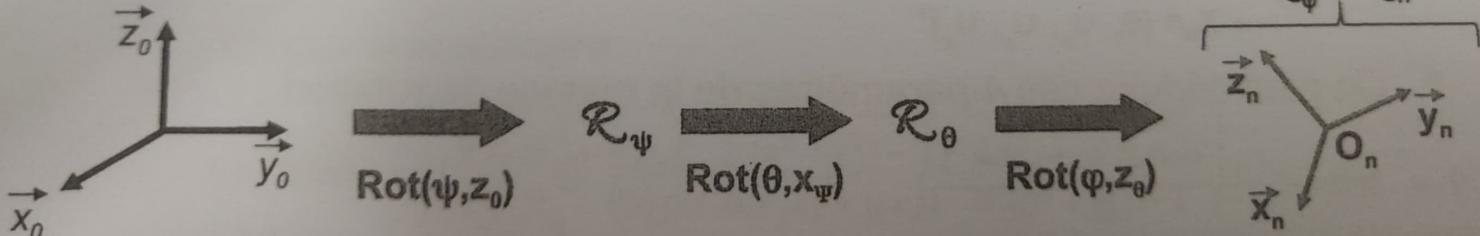
- Idée : Décomposer la rotation « complexe » effectuée par l'organe terminal en trois rotations « simples »

- Angles d'Euler  $\rightarrow \mathbf{x}_R = (\psi, \theta, \varphi)^T$

$\rightarrow$  1 rotation autour de z d'angle  $\psi \rightarrow \mathcal{R}_\psi(\psi, x_\psi, y_\psi, z_\psi)$

$\rightarrow$  1 rotation autour de x d'angle  $\theta \rightarrow \mathcal{R}_\theta(\theta, x_\theta, y_\theta, z_\theta)$

$\rightarrow$  1 rotation autour de z d'angle  $\varphi \rightarrow \mathcal{R}_\varphi(\varphi, x_\varphi, y_\varphi, z_\varphi)$



# Représentation de la situation de l'organe terminal

## ■ Représentation de l'orientation

### □ Systèmes de trois angles

- **Idée** : Décomposer la rotation « complexe » effectuée par l'organe terminal en trois rotations « simples »

- Angles d'Euler  $\rightarrow \mathbf{x}_R = (\psi, \theta, \varphi)^T$

$\rightarrow$  On montre que  $\mathbf{x}_R$  peut être calculé à partir de  $R_{0n}$

Si  $r_{33} \neq \pm 1$  alors

$$\psi = \text{Atan2}(r_{13}, -r_{23})$$

$$\theta = \arccos(r_{33})$$

$$\varphi = \text{Atan2}(r_{31}, r_{32})$$

Si  $r_{33} = \pm 1$  alors

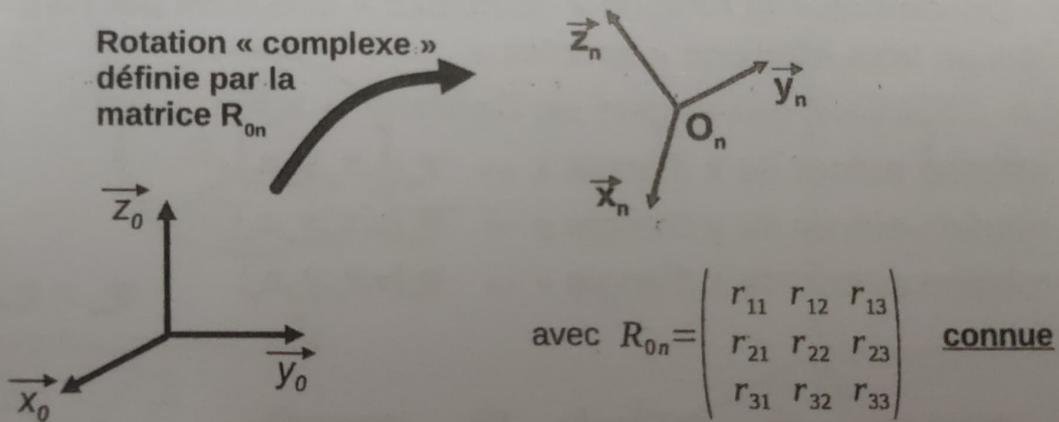
$$\theta = \pm \frac{\pi}{2}$$

$$r_{33}\varphi + \psi = \text{Atan2}(r_{21}, r_{11})$$

Singularité :  $\varphi$  et  $\psi$  ne peuvent pas être calculés indépendamment  $\rightarrow$  choix arbitraire

# Représentation de la situation de l'organe terminal

- Représentation de l'orientation
  - Rotation autour d'un axe et quaternions



Question : Autour de quel axe a-t-on tourné et avec quel angle ?

# Représentation de la situation de l'organe terminal

## ■ Représentation de l'orientation

### □ Rotation autour d'un axe et quaternions

- Idée : Définir la rotation « complexe » effectuée par l'organe terminal en déterminant son axe et son angle à partir de  $R_{0n}$
- 4 paramètres sont nécessaires :
  - Axe de rotation →  $u$  : vecteur directeur **unitaire** →  $u_{(0)} = (u_x, u_y, u_z)$
  - Angle de rotation autour de cet axe →  $\theta$   
→  $X_R = (\theta, u_x, u_y, u_z)^T$

- On peut déduire ces 4 paramètres de la matrice de rotation :

$$\theta = \arccos\left(\frac{r_{11} + r_{22} + r_{33} - 1}{2}\right) \quad u = \frac{1}{2 \sin(\theta)} \begin{pmatrix} r_{32} - r_{23} \\ r_{13} - r_{31} \\ r_{21} - r_{12} \end{pmatrix} \text{ si } \sin(\theta) \neq 0$$

# Représentation de la situation de l'organe terminal

## ■ Représentation de l'orientation

### □ Rotation autour d'un axe et quaternions

- Idée : Définir la rotation « complexe » effectuée par l'organe terminal en déterminant son axe et son angle à partir de  $R_{0n}$

- Quaternion unitaire  $\rightarrow X_R = (\eta, \epsilon_x, \epsilon_y, \epsilon_z)^T \mid \eta^2 + \epsilon^2 = 1$

- Aussi appelé paramètres d'Olinde – Rodrigues ou paramètres d'Euler
  - Très utilisé en robotique, en info. graphique, etc.
- **Par définition** :  $\eta = \cos(\theta/2)$  et  $\epsilon = \sin(\theta/2) u_{(0)}$  avec  $\epsilon = (\epsilon_x, \epsilon_y, \epsilon_z)^T$

- On montre que :

$$\eta = \frac{1}{2} \sqrt{r_{11} + r_{22} + r_{33} + 1}$$

$$\epsilon_x = \frac{1}{2} \sqrt{r_{11} - r_{22} - r_{33} + 1}$$

$$\epsilon_y = \frac{1}{2} \sqrt{-r_{11} + r_{22} - r_{33} + 1}$$

$$\epsilon_z = \frac{1}{2} \sqrt{-r_{11} - r_{22} + r_{33} + 1}$$

# Représentation de la situation de l'organe terminal

- Représentation de l'orientation : Bilan
  - Si on connaît  $R_{0n} = [r_{ij}]$  on peut calculer  $X_R$ 
    - Représentations non minimales → Pas de singularité
      - Axe + angle de rotation →  $X_R = (\theta, u_x, u_y, u_z)^T$

$$\theta = \arccos\left(\frac{r_{11} + r_{22} + r_{33} - 1}{2}\right) \quad u = \frac{1}{2 \sin(\theta)} \begin{cases} r_{32} - r_{23} \\ r_{13} - r_{31} \\ r_{21} - r_{12} \end{cases} \text{ si } \sin(\theta) \neq 0$$

- Quaternions →  $X_R = (\eta, \epsilon_x, \epsilon_y, \epsilon_z)^T \mid \eta^2 + \epsilon^2 = 1$

$$\eta = \frac{1}{2} \sqrt{r_{11} + r_{22} + r_{33} + 1} \quad \epsilon_x = \frac{1}{2} \sqrt{r_{11} - r_{22} - r_{33} + 1}$$
$$\epsilon_y = \frac{1}{2} \sqrt{-r_{11} + r_{22} - r_{33} + 1} \quad \epsilon_z = \frac{1}{2} \sqrt{-r_{11} - r_{22} + r_{33} + 1}$$

# Représentation de la situation de l'organe terminal

- Représentation de l'orientation : Bilan
  - Si on connaît  $R_{0n} = [r_{ij}]$  on peut calculer  $x_R$ 
    - Représentations minimales → Attention aux singularités !

Angles de Bryant

$$\rightarrow X_R = (\lambda, \mu, \nu)^T$$

Hors singularité

Si  $r_{13} \neq \pm 1$  alors

$$\lambda = \text{Atan2}(-r_{23}, r_{33})$$

$$\mu = \arcsin(r_{13})$$

$$\nu = \text{Atan2}(-r_{12}, r_{11})$$

Angles d'Euler

$$\rightarrow X_R = (\psi, \theta, \varphi)^T$$

En singularité

Si  $r_{33} \neq \pm 1$  alors

$$\psi = \text{Atan2}(r_{13}, -r_{23})$$

$$\theta = \arccos(r_{33})$$

$$\varphi = \text{Atan2}(r_{31}, r_{32})$$

En singularité

Si  $r_{13} = \pm 1$  alors

$$\mu = \pm \frac{\pi}{2}$$

$$r_{13}\lambda + \nu = \text{Atan2}(-r_{21}, r_{22})$$

Si  $r_{33} = \pm 1$  alors

$$\theta = \pm \frac{\pi}{2}$$

$$r_{33}\varphi + \psi = \text{Atan2}(r_{21}, r_{11})$$

# Représentation de la situation de l'organe terminal

- Représentation de l'orientation : Bilan
  - Si l'on connaît  $x_R$ , on peut aussi calculer  $R_{0n}$ 
    - Angles de Bryant  $\rightarrow x_R = (\lambda, \mu, \nu)^T$

$$R_{0n}(\lambda, \mu, \nu) = \begin{pmatrix} \cos\mu\cos\nu & -\cos\mu\sin\nu & \sin\mu \\ \sin\lambda\sin\mu\cos\nu + \cos\lambda\sin\nu & -\sin\lambda\sin\mu\sin\nu + \cos\lambda\cos\nu & -\sin\lambda\cos\mu \\ -\cos\lambda\sin\mu\cos\nu + \sin\lambda\sin\nu & \cos\lambda\sin\mu\sin\nu + \sin\lambda\cos\nu & \cos\lambda\cos\mu \end{pmatrix}$$

- Angles d'Euler  $\rightarrow x_R = (\psi, \theta, \varphi)^T$

$$R_{0n}(\psi, \theta, \varphi) = \begin{pmatrix} \cos\psi\cos\varphi - \sin\psi\cos\theta\sin\varphi & -\cos\psi\sin\varphi - \sin\psi\cos\theta\cos\varphi & \sin\psi\sin\theta \\ \sin\psi\cos\varphi + \cos\psi\cos\theta\sin\varphi & -\sin\psi\sin\varphi + \cos\psi\cos\theta\cos\varphi & -\cos\psi\sin\theta \\ \sin\theta\sin\varphi & \sin\theta\cos\varphi & \cos\theta \end{pmatrix}$$

# Représentation de la situation de l'organe terminal

- Représentation de l'orientation : Bilan
  - Si l'on connaît  $x_R$ , on peut aussi calculer  $R_{0n}$ 
    - Axe  $r = (r_x, r_y, r_z)^T$  et angle de rotation  $\theta$

$$R_{0n}(\theta, r) = \begin{pmatrix} r_x^2(1 - c\theta) + c\theta & r_x \cdot r_y \cdot (1 - c\theta) - r_z \cdot s\theta & r_x \cdot r_z \cdot (1 - c\theta) + r_y \cdot s\theta \\ r_x \cdot r_y \cdot (1 - c\theta) + r_z \cdot s\theta & r_y^2(1 - c\theta) + c\theta & r_y \cdot r_z \cdot (1 - c\theta) - r_x \cdot s\theta \\ r_x \cdot r_z \cdot (1 - c\theta) - r_y \cdot s\theta & r_y \cdot r_z \cdot (1 - c\theta) + r_x \cdot s\theta & r_z^2(1 - c\theta) + c\theta \end{pmatrix}$$

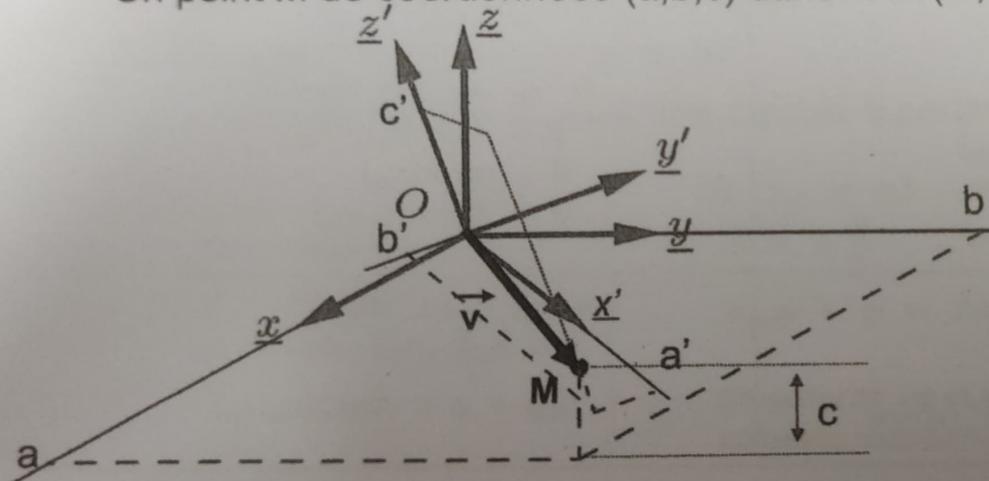
- Quaternion unitaire

$$R_{0n}(\eta, \epsilon) = \begin{pmatrix} 2(\eta^2 + \epsilon_x^2) - 1 & 2(\epsilon_x \epsilon_y - \eta \cdot \epsilon_z) & 2(\epsilon_x \epsilon_z + \eta \cdot \epsilon_y) \\ 2(\epsilon_x \epsilon_y + \eta \cdot \epsilon_z) & 2(\eta^2 + \epsilon_y^2) - 1 & 2(\epsilon_y \epsilon_z - \eta \cdot \epsilon_x) \\ 2(\epsilon_x \epsilon_z - \eta \cdot \epsilon_y) & 2(\epsilon_y \epsilon_z + \eta \cdot \epsilon_x) & 2(\eta^2 + \epsilon_z^2) - 1 \end{pmatrix}$$

# Matrices de transformation

## ■ Rotation seule → Changement de base

- Deux repères orthonormés directs:  $R(O, \underline{x}, \underline{y}, \underline{z})$  et  $R'(O, \underline{x}', \underline{y}', \underline{z}')$  (même origine)
- Un point M de coordonnées  $(a, b, c)$  dans  $R$  et  $(a', b', c')$  dans  $R' \rightarrow \vec{v} = \overrightarrow{OM}$



IMPORTANT

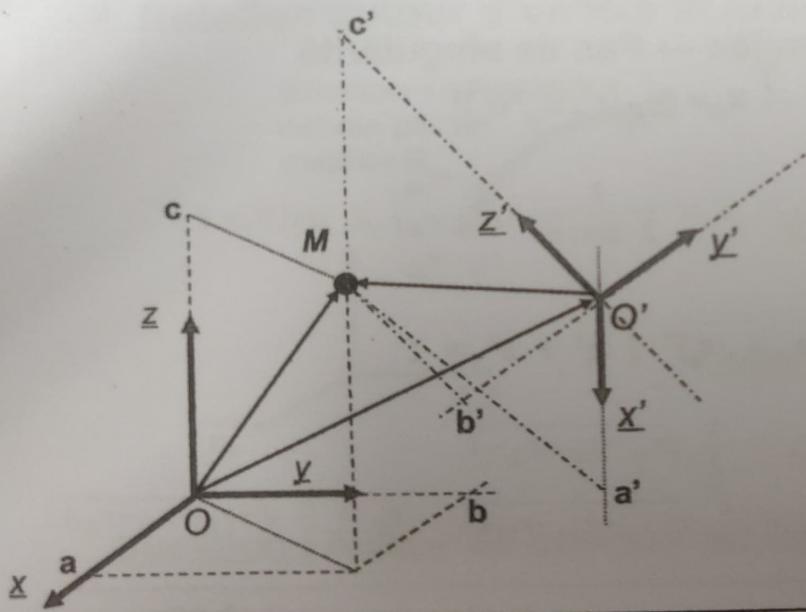
LA MATRICE DE ROTATION DONNE LA RELATION ENTRE  $\vec{v}_{(R)}$  et  $\vec{v}_{(R')}$

$$\vec{v}_{(R)} = \mathbf{R} \vec{v}_{(R')}$$

# Matrices de transformation

## ■ Translation + rotation → Changement de repère

- Deux repères orthonormés directs  $R(O,x,y,z)$  et  $R'(O',x',y',z')$  (origines différentes)
- Un point M de coordonnées  $(a,b,c)$  dans R et  $(a',b',c')$  dans R'



IMPORTANT

PRISE EN COMPTE DU CHANGEMENT  
DE POSITION ET D'ORIENTATION

$$\vec{OM}_{(R)} = \vec{OO'}_{(R)} + \vec{R} \vec{O'M}_{(R')}$$

# Matrices de transformation

## ■ Matrice de passage homogène

### □ Définition

$$T = \begin{pmatrix} R & P = \overset{\leftarrow}{OO'}_{(R)} \\ \begin{matrix} r_{11} & r_{12} & r_{13} \\ r_{21} & r_{22} & r_{23} \\ r_{31} & r_{32} & r_{33} \end{matrix} & \begin{matrix} X \\ Y \\ Z \\ 1 \end{matrix} \end{pmatrix}$$

IMPORTANT

Fournit une première information de situation de  $R'$  par rapport à  $R$

### □ Expression des coordonnées homogènes d'un point M

$$\begin{pmatrix} \overset{\rightarrow}{OM}_{(R)} \\ 1 \end{pmatrix} = T \begin{pmatrix} \overset{\rightarrow}{O'M}_{(R')} \\ 1 \end{pmatrix}$$

Coordonnées homogènes de M dans R      Coordonnées homogènes de M dans R'

# Matrice de transformation

## ■ Matrice de passage homogène

### □ Définition

$$T = \begin{pmatrix} R & P = \overrightarrow{OO'}_{(R)} \\ \begin{matrix} r_{11} & r_{12} & r_{13} & X \\ r_{21} & r_{22} & r_{23} & Y \\ r_{31} & r_{32} & r_{33} & Z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{matrix} \end{pmatrix}$$

IMPORTANT

Fournit une première information de situation de  $R'$  par rapport à  $R$

### □ Unification des différents cas possibles :

- Si rotation seule,  $P$  est nul et  $R$  définit la rotation effectuée
- Si translation seule,  $R = \text{Id}$  et  $P$  non nul définit la translation effectuée
- Si rotation et translation,  $R \neq \text{Id}$  et  $P$  non nul