17/11/2022 Control Lyapunov Fuction :

Construire la commande et trouver $V(\underline{x})$ en même temps

TD 2 : La méthode du backstepping

Construire étape par étape une commande pour rendre le point X_e stable

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = f(x_1) + g(x_1)\, x_2 \\ \dot{x}_2 = u \end{cases}$$

d'abord on trouve une commande pour le 1er sous-système puis connaissant le x_2, on construit la commande u adéquate

I. L'intégrateur backstepping :

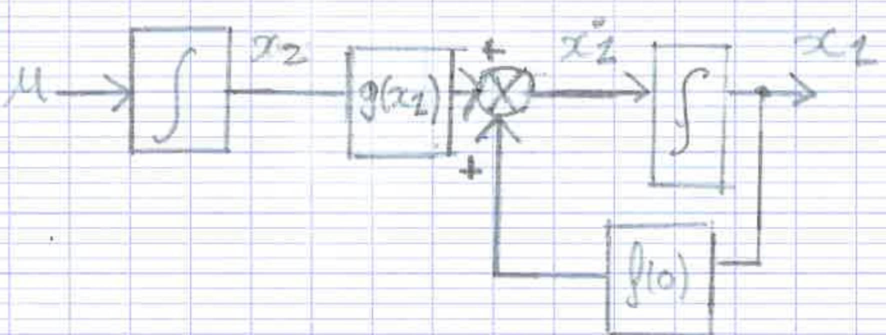
1.1 Un peu de théorie :

1. On sait que $\exists\ \phi(x_1) \mid \dot{x}_1 = f(x_1) + g(x_1)\phi(x_1)$ avec 0 GAS (hypothèse 2)

D'après le Théorème de stabilité inverse $\exists\ V(x_1)$ telle que $V(x_1)$ définie positive et radialement non bornée

De plus, $\dot{V}(x_1) = \dfrac{\partial V}{\partial x_1} \cdot [f(x_1) + g(x_1)\phi(x_1)]$ définie négative

2)



Structure en feedback

⚠ Pas de forward autorisé

partie stabilisante

3. $\begin{cases} \dot{x}_1 = \boxed{f(x_1) + g(x_1)\,\phi(x_1)} + g(x_1)\,[x_2 - \phi(x_1)] \\ \dot{x}_2 = u \end{cases}$

Objectif de commande : Trouver u pour $x_2(t)$ converge vers $\phi(x_1)$ pour annuler le deuxième terme.

4. Posons un changement de variable : $\begin{cases} z_1 = x_1 \\ z_2 = x_2 - \phi(x_1) \end{cases}$

Remarque : Un changement de variable doit être injectif et surjectif $\Leftrightarrow$ bijectif

Nous savons que $\begin{cases} \phi \in C^1 \\ \phi(0) = 0 \end{cases}$

de plus, $\begin{cases} x_1 = z_1 \\ x_2 = z_2 + \phi(z_1) \end{cases}$ $\Rightarrow$ bijectif

⚠ En non linéaire, il faut qu'EN PLUS le changement de variable soit difféomorphique (existance de la différentielle)

ϕ est différentiable

$$\begin{cases} \dot{z}_1 = f(z_1) + g(z_1)\,\phi(z_1) + g(z_1)\,z_2 \\ \dot{z}_2 = -\dfrac{\partial \phi}{\partial x_1}\,\dot{x}_1 + u \end{cases}$$

5. On va forcer u pour que 0 soit un point asymptotiquement stable pour z_2.

Calcul de la commande et choix d'une fonction de Lyapunov candidate :

Prenons $V_{totale} = \underset{\substack{\uparrow \\ \text{pour le premier sous système}}}{V(z_1)} + \frac{1}{2} z_2^2$ radialement non bornée définie positive

$$\dot{V}_{totale} = \frac{\partial V}{\partial z_1} \cdot \underbrace{[f(z_1) + g(z_1)\,\phi(z_1)]}_{\substack{\text{définie négative} \\ \text{vis à vis de } z_1 \text{ notée } W(z_1)}} + \frac{\partial V}{\partial z_1}[g(z_1)]\,z_2$$

$$+ z_2\left(-\frac{\partial \phi}{\partial z_1}\,\dot{z}_1 + u\right)$$

On souhaite que $u = \frac{\partial \phi}{\partial z_1}\dot{z}_1 - \frac{\partial V}{\partial z_1} g(z_1) - \alpha z_2$ avec $\alpha > 0$

$$= \underbrace{u(z_1) - \alpha z_2^2}_{\text{définie négatif par rapport à } z_1 \text{ et } z_2}$$

$\Rightarrow$ O est GAS

1.2. Application :