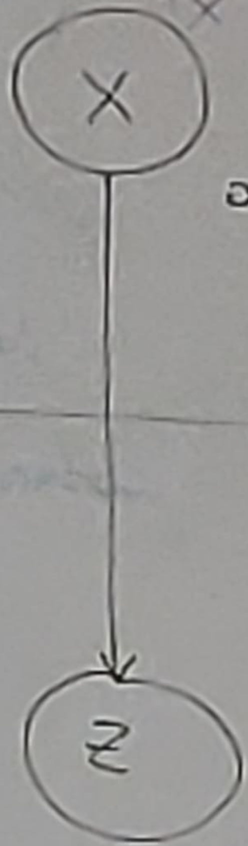
Estimation Bayésienne

Cas statique

$P_X(x)$ loi a priori



x ? $x = X(\omega)$

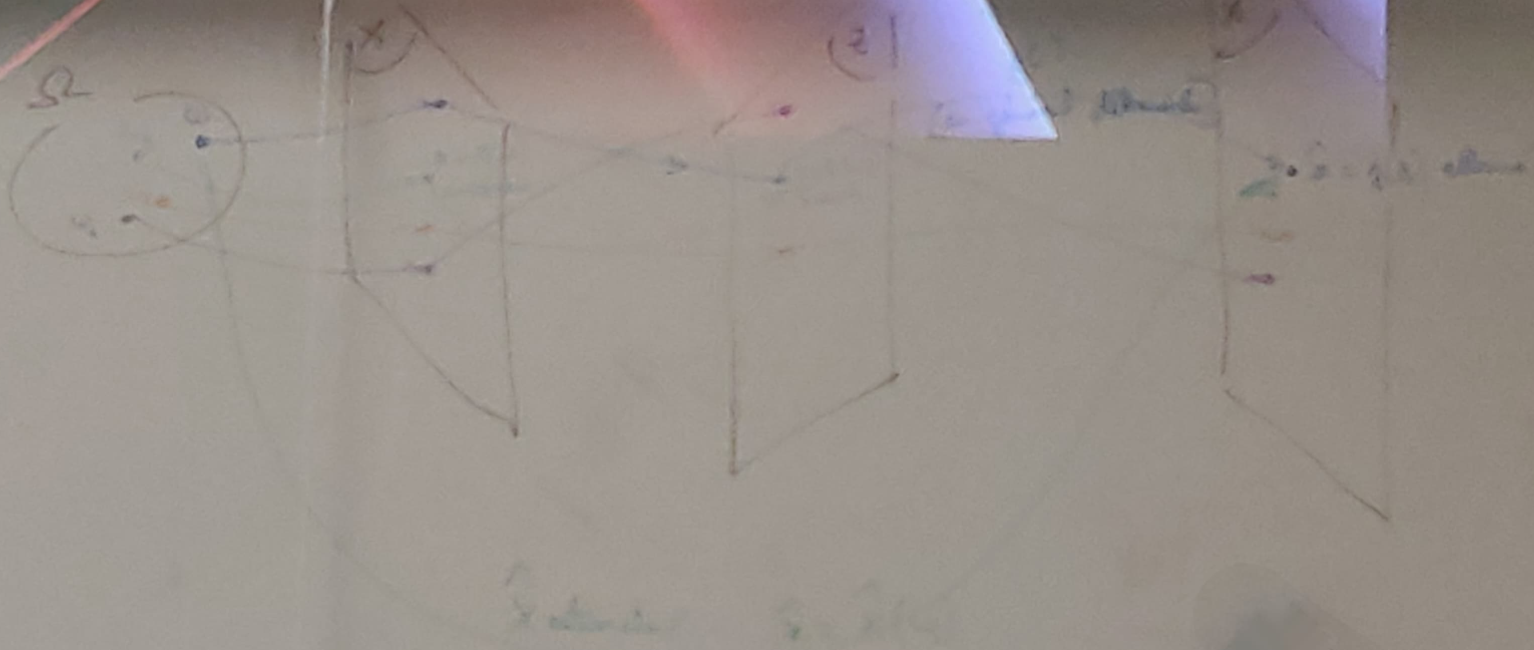
mesure $z = Z(\omega)$

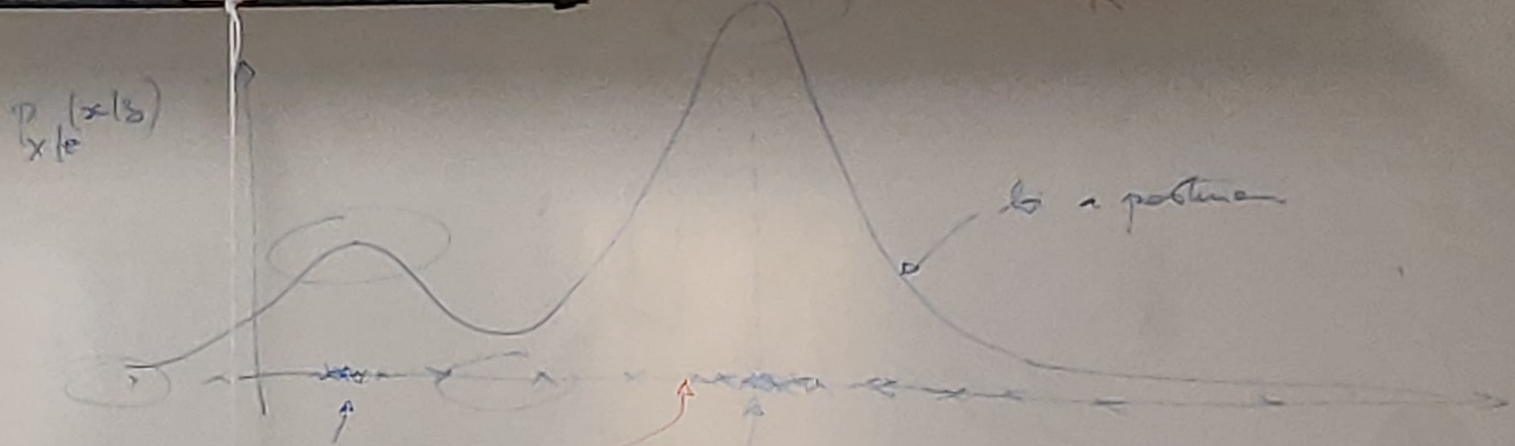
Objectif loi a posteriori

$P_{X|Z}(x|z)$

distribution de X caché sur toutes les expériences qui ont donné Z = observation z effectué sur l'expérience en cours.

$\boxed{\text{CAPTURE TOUTE L'INFO SUR X CACHÉ CONTENUE DANS } z}$


Ω



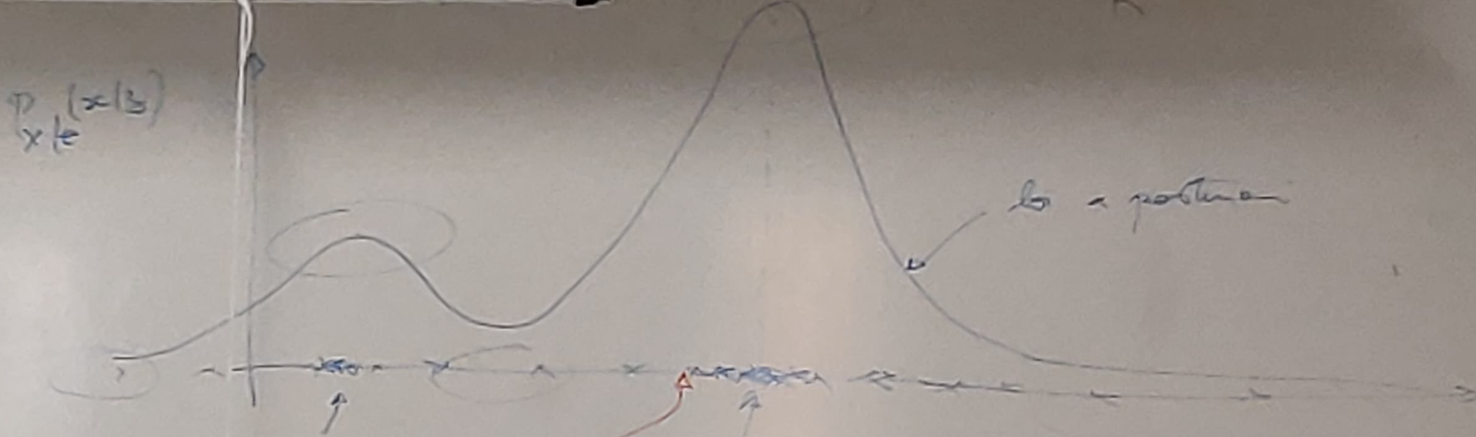
$\hat{x}_{MAP}$ estimé du Max a Posteriori

$\hat{x}_{MAP} = \arg\max_{x} P_{X|Z}(x|z)$

$\hat{x}_{MMSE}$

$$= \int x \, P_{X|Z}(x|z) \, dx = \mathbb{E}_{X|Z}\left[X|z\right]$$

Comment passer à un estimé a priori ?



$\hat{x}_{MAP}$ = estimé du max a Posteriori

$\hat{x}_{MAP} = \arg\max_{x} P_{X|Z}(x|z)$

Comment passer à un estimé ? estimateur ?

$$\hat{x}_{MMSE} = \int x \, P_{X|Z}(x|z)\, dx = E_{X|Z}[X|z]$$

l'estimateur associé $\hat{X}$ est tel que $\hat{X}_{MMSE} = g(Z)$ où $g(\cdot) = \arg\min_{\mathring{g}(\cdot)} E\left[\|X - \mathring{g}(Z)\|^2\right]$

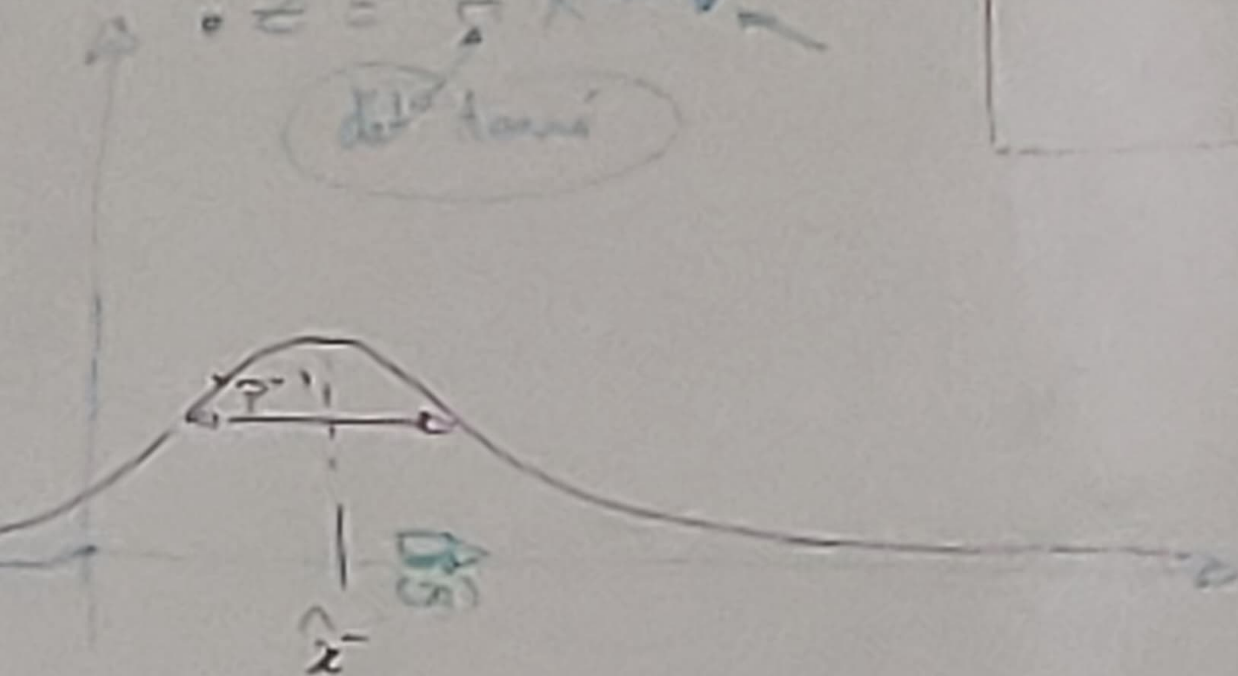
• $\begin{pmatrix} X \\ V \end{pmatrix} \sim \mathcal{N}\left(\begin{pmatrix} \hat{x}^- \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} P^- & 0 \\ 0 & R \end{pmatrix}\right)$ $\quad P_{X|Z}(x|z)$

X, V mut^t indep

$P^- \geq 0 \;,\; R > 0$

• $Z = HX + V$

dét^{te} donné



$$\Rightarrow \begin{pmatrix} X \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbb{1} & \mathbb{0} \\ H & \mathbb{1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X \\ V \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} X \\ z \end{pmatrix} \text{ Gaussien et}$$

$$\begin{pmatrix} X \\ z \end{pmatrix} \sim \mathcal{N}\left(\underbrace{\begin{pmatrix} \mathbb{1} & \mathbb{0} \\ H & \mathbb{1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \hat{x}^- \\ 0 \end{pmatrix}}_{\begin{array}{l} m_x \to \\ m_z \to \end{array} \begin{pmatrix} \hat{x}^- \\ H\hat{x}^- \end{pmatrix}} , \underbrace{\begin{pmatrix} \mathbb{1} & \mathbb{0} \\ H & \mathbb{1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} P^- & \mathbb{0} \\ \mathbb{0} & R \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbb{1} & \mathbb{0} \\ H & \mathbb{1} \end{pmatrix}^T}_{\begin{array}{l} P_{xx} \to \\ P_{zx} \to \end{array} \begin{pmatrix} P^- & P^-H^T \\ HP^- & R+HP^-H^T \end{pmatrix} \begin{array}{l} \leftarrow P_{xz} \\ \leftarrow P_{zz} \end{array}} \right)$$

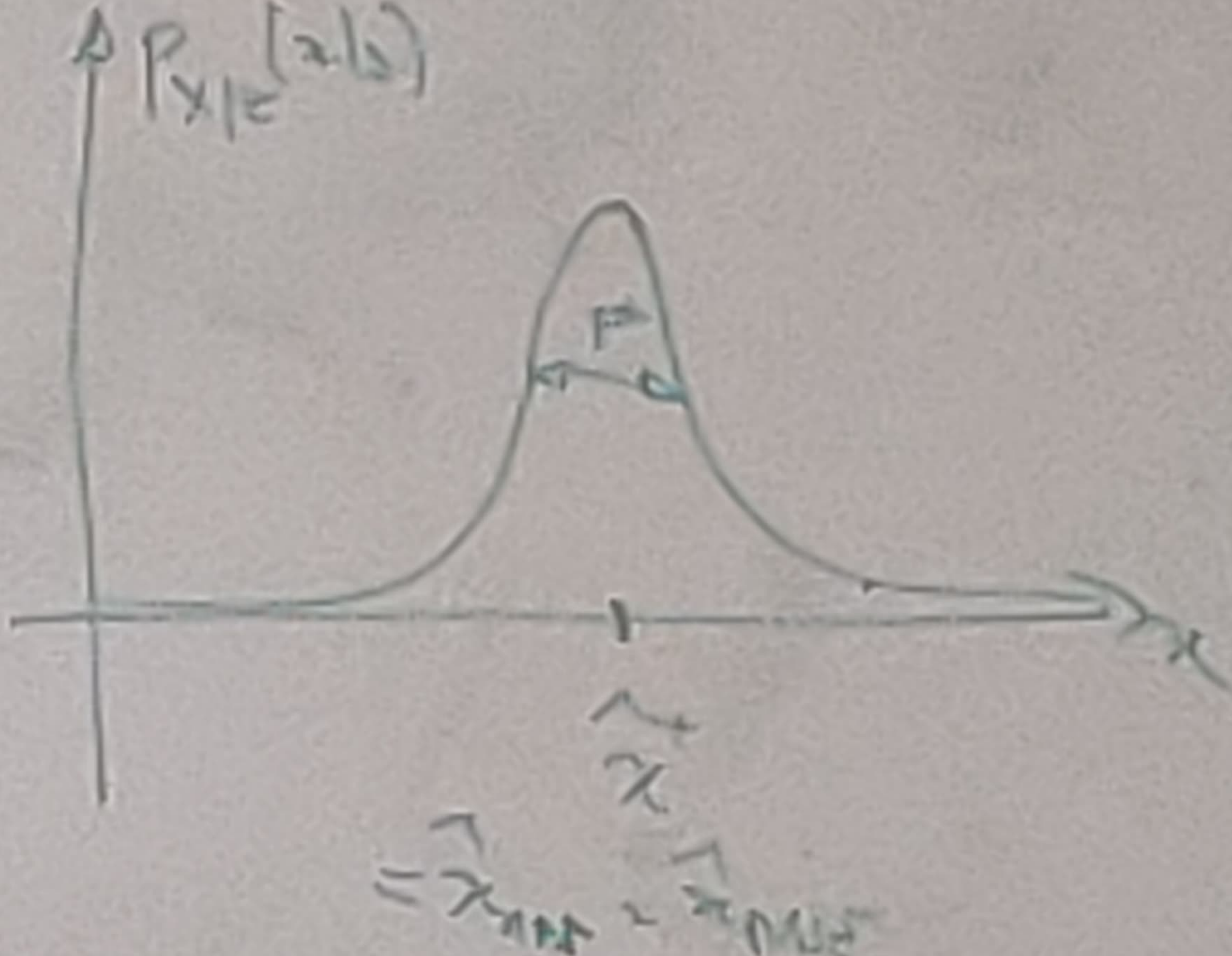
$$\Downarrow$$

$p_{X|z}(x|z)$ est Gaussienne $= \mathcal{N}(x, \hat{x}^+, P^+)$

$$m_{x|z} = m_x + P_{xz} P_{zz}^{-1} (z - m_z) \longrightarrow \hat{x}^+ = \hat{x}^- + K(z - H\hat{x}^-)$$

$$P_{x|z} = P_{xx} - P_{xz} P_{zz}^{-1} P_{zx} \longrightarrow P^+ = P^- - KHP^- = (\mathbb{1} - KH)P^-$$

$$P_{xz} P_{zz}^{-1} \longrightarrow K = P^- H^T (R + HP^-H^T)^{-1}$$

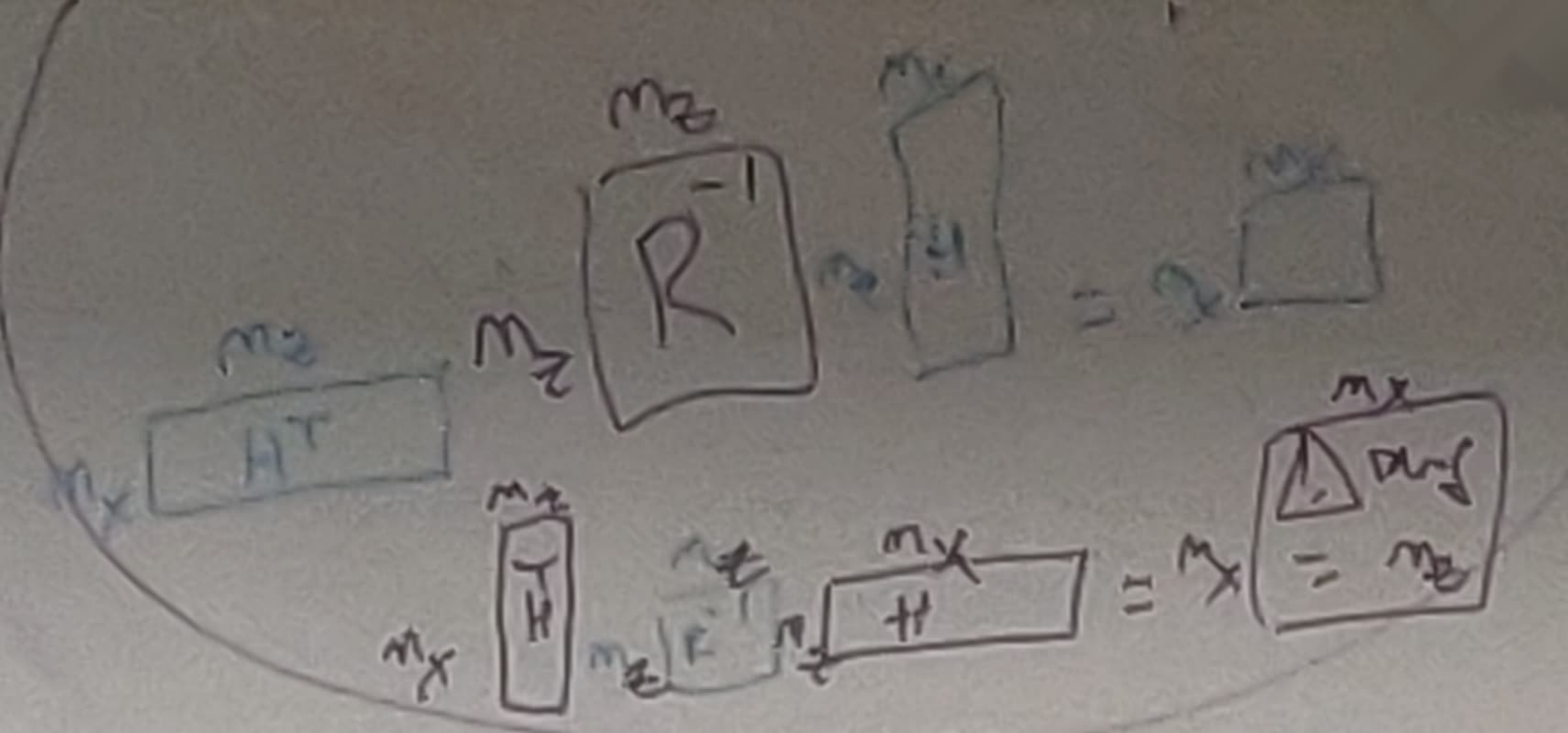

$P_{X|Z}(x|z)$
x

* Cas où $n_z \geq n_x$, $H \in \mathbb{R}^{n_z \times n_x}$ est de rang plein, $rg(H) = n_x$

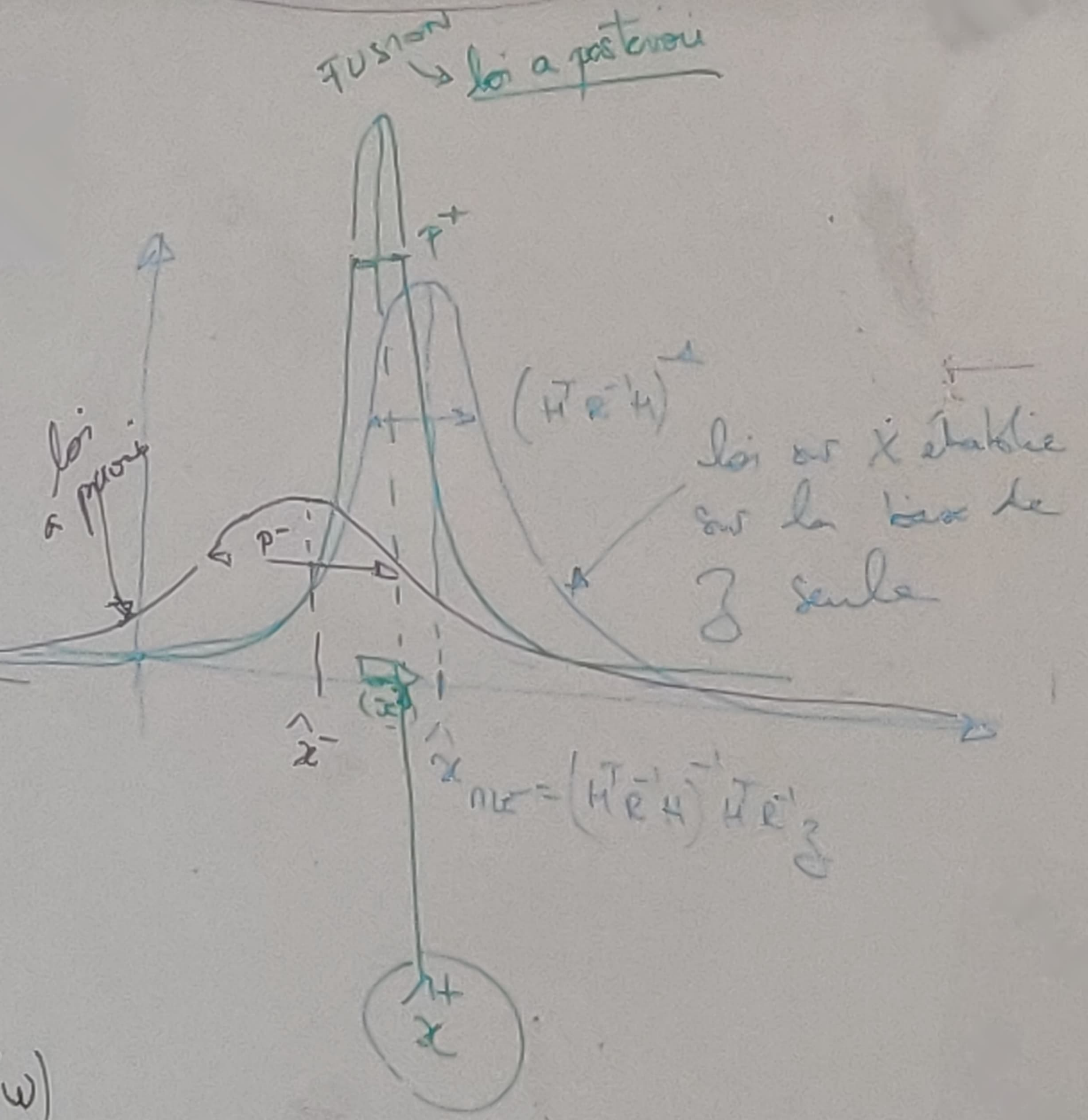
$$\begin{cases} (P^+)^{-1} = (P^-)^{-1} + H^T R^{-1} H \\ (P^+)^{-1} \hat{x}^+ = (P^-)^{-1} \hat{x}^- + H^T R^{-1} z \end{cases}$$

toujours vrai, peut se réécrire du fait que $H^T R^{-1} H$ est inversible, en

$$(P^+)^{-1} = \underbrace{(P^-)^{-1}}_{} + \underbrace{\left((H^T R^{-1} H)^{-1}\right)^{-1}}_{} \quad \text{et} \quad \underbrace{(P^+)^{-1}}_{} \underbrace{\hat{x}^+}_{} = \underbrace{(P^-)^{-1}}_{} \underbrace{\hat{x}^-}_{} + \underbrace{\left((H^T R^{-1} H)^{-1}\right)^{-1}}_{} \underbrace{(H^T R^{-1} H)^{-1} H^T R^{-1} z}_{\hat{x}_{MLE}}$$



m_z
R^{-1}
m_z
H^T
m_x
m_x
H
m_x
Diag
m_z


FUSION → loi a posteriori
P+
(HT R-1 H)-1
loi sur X établie sur la base de z seule
loi a priori
P-
x̂-
(x̂)
x̂MLE = (HT R-1 H)-1 HT R-1 z
x̂+
w)

Cas dynamique

loi a priori

$P_{X_{0:k}}(x_{0:k})$

CACHÉ $X_{0:k}$

$x_{0:k} = x_0, x_1, \dots x_k$

$= X_{0:k}(\omega)$ inconnu

modèle de mesure

$P_{Z_{1:k}|X_{0:k}}(z_{1:k}|x_{0:k})$

MESURES $Z_{1:k}$

$z_{1:k}$ séquence de mesures

BUT

$P_{X_{0:k}|Z_{1:k}}(x_{0:k} \mid z_{1:k})$

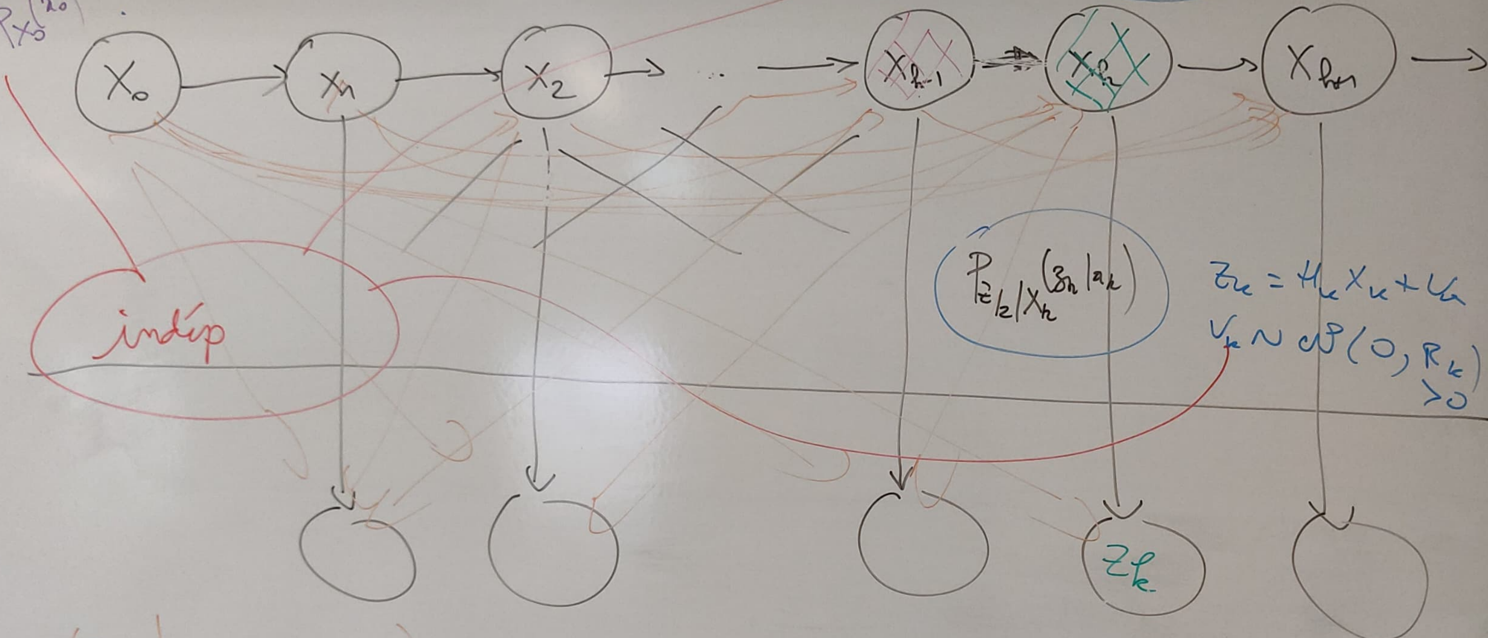
distrib/densité de proba de $X_{0:k}$ caché sur toutes les expé qui ont donné lieu à la séquence de mesures $z_{1:k}$ obtenue sur l'expé en cours.

$\mathbb{E}(x_0)$ $\quad$ $\mathrm{Cov}(x_0)$

loi initiale $p_{X_0}(x_0) = \mathcal{N}(x_0; m_{x_0}, P_0)$, $\quad P_0 \geq 0$

$\Xi \quad X_k = F_{k-1} X_{k-1} + G_{k-1} u_{k-1} + W_{k-1}, \quad W_{k-1} \sim \mathcal{N}(0, Q_{k-1}), \quad Q_{k-1} \geq 0$

loi de dynamique a priori $p_{X_k|X_{k-1}}(x_k|x_{k-1})$



$p_{Z_k|X_k}(z_k|x_k)$

$Z_k = H_k X_k + V_k$

$V_k \sim \mathcal{N}(0, R_k)$, $\quad R_k > 0$

$$p\Big(z_k \,\Big|\, \underbrace{X_{0:N}}_{x_{0:k-1},\ x_k,\ x_{k+1:N}},\ \underbrace{Z_{1:N}}_{z_{1:k-1},\ z_k,\ z_{k+1:N}}\Big) = p(z_k|x_k) = p(z_k|x_k, z_{k-1})$$

FK

- $k=0$ $\quad \mathcal{N}(x_0 ; \hat{x}_{0|0}, P_{0|0})$ loi de X_0 càd conditionnellement à toutes les mesures jusqu'à l'instant 0

$\Big\downarrow$ PRED / (TU)

- $k=1$ $\quad \mathcal{N}(x_1 ; \hat{x}_{1|0}, P_{1|0})$ loi de X_1 - - - - - - - - - - 0
= loi de préd en $k=1$

MAJ / (MU) $\quad z_1 \rightarrow$

$\mathcal{N}(x_1 ; \hat{x}_{1|1}, P_{1|1})$ - - - - X_1 - - - - - - - - - 1
= loi de filtrage en $k=1$

$\boxed{\bullet\ k-1}$ loi de filtrage $p_{X_{k-1}|Z_{1:k-1}}(x_{k-1}|z_{1:k-1}) = \mathcal{N}(x_{k-1} ; \hat{x}_{k-1|k-1}, P_{k-1|k-1})$

$\Big\downarrow$ PRED

$\boxed{\bullet\ k}$

loi de prédiction $p_{X_k|Z_{1:k-1}}(x_k|z_{1:k-1}) = \mathcal{N}(x_k ; \hat{x}_{k|k-1}, P_{k|k-1})$

puis incorporation de z_k $\longrightarrow$ loi de filtrage $p_{X_k|Z_{1:k}}(x_k|z_{1:k}) = \mathcal{N}(x_k ; \hat{x}_{k|k}, P_{k|k})$