dux fois. On peut fixer les pôles avec k_1 et k_2.

En pratique, on ne connait pas explicitement $y_d(t)$ et il faut de la mesure.

Remarque (sur les deux exemple)

24/11/2022

Problème : Nous sommes partis d'un modèle de dimension 3 or nous avons maintenant une commande qui agit sur 2 états issu de la transformation.

Il nous faudrait nous assurer que les 3 états convergent avec cette commande.

Le degré relatif du système considéré dans l'exemple est de 2.

Exemple :

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_1 \\ \dot{x}_2 = x_2 \\ y = -x_1 + x_2 \end{cases} \qquad \begin{matrix} x_1(0) = 1 \\ x_2(0) = -1 \end{matrix}$$

$\Rightarrow y(t) = +e^t - e^t = 0$ ne reflète pas la dynamique des 2 variables internes qui explosent mais se compensent.

Objectif : Etudier la dynamique interne pour vérifier qu'elle converge ou qu'elle soit bornée

La dérivée de Lie - Crochet de Lie

Exemple :

$$\begin{cases} \dot{x} = f(x) \\ y = h(x) \end{cases}$$

$$\dot{y}(t)\ \frac{d}{dt} h(x) = \frac{\partial h}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial t} = \frac{\partial h}{\partial x}\cdot f(x) = L_f h$$

$$\ddot{y}(t) = \frac{d}{dt}\cdot L_f h = \frac{\partial L_f h}{\partial x}\cdot f = L_f L_f h = L_f^2 h$$

Linéarisation Entrée - Etat

Introduction : Soit le système $\begin{cases} \dot{x} = f(x) + g(x)u \\ y = T_1(x) \end{cases}$ SISO

$$\dot{y} = \frac{d}{dt}[T_1(x)] = \frac{\partial T_1}{\partial x}\dot{x} = \frac{\partial T_1}{\partial x}[f(x) + g(x)u]$$
$$= \frac{\partial T_1}{\partial x}.f(x) + \frac{\partial T_1}{\partial x}.g(x)u$$

(Hypothèse 1) On impose $\frac{\partial T_1}{\partial x}.g(x) = 0 \Rightarrow L_g T_1 = 0$

Ainsi,

$\dot{y} = L_f T_1(x)$

Dérivons une seconde fois,

$$\ddot{y} = \frac{d}{dt}[L_f T_1(x)] = \frac{\partial L_f T_1(x)}{\partial x}.f(x) + \frac{\partial L_f T_1(x)}{\partial x}.g(x)u$$
$$= L_f^2 T_1(x) + L_g L_f T_1(x) u$$

(Hypothèse 2) Pour construire un degré relatif = degré du système

$\frac{\partial L_f T_1}{\partial x} g = 0 \Rightarrow L_g L_f T_1(x) = 0$

⋮

Dérivons $(n-1)$-ième fois, $y^{(n-1)} = L_f^{(n-1)} T_1(x) + L_g L_f^{(n-2)} T_1(x) u$

(Hypothèse 3) $L_g L_f^2 T_1(x) = 0$

⋮

(Hypothèse $n-1$) $L_g L_f^{n-2} T_1(x) = 0$

Jusqu'à la dérivée n-ième $y^{(n)}(t) = L_f^n T_1(x) + L_g L_f^{(n-1)} T_1(x) u$

On obtient donc $y^{(n)}(t) = L_f^n T_1(x) + L_g L_f^{(n-1)} T_1(x) u$

On suppose que $L_g L_f^{(n-1)} T_1(x) \neq 0$ et donc on pose

$$\boxed{u = \frac{-L_f^n T_1(x)}{L_g L_f^{(n-1)} T_1(x)} + \frac{v}{L_g L_f^{(n-1)} T_1(x)}}$$ et on

obtient alors $\boxed{y^{(n)}(t) = v}$

On rappelle que l'on a deux séries de conditions à vérifier

$$\begin{cases} L_g T_1(x) = 0 \\ \vdots \\ L_g L_f^{(n-2)} T_1(x) = 0 \end{cases} \quad \text{et} \quad L_g L_f^{(n-1)} T_1(x) \neq 0$$

(condition d'intégrabilité) (condition de commandabilité)

Autrement dit,

$L_g T_1(x) = 0 \iff \frac{\partial T_1}{\partial x} \cdot g(x) = 0 \quad (1)$

$L_g L_f T_1(x) = 0 \quad (2)$

Rappel : Identité de Jacobi

$L_{[f\ g]} T_1(x) = L_f L_g T_1(x) - L_g L_f T_1(x)$

(1) et $(2) \iff L_{[f,g]} T_1 = 0$

$\iff \frac{\partial T_1}{\partial x} [f\ g] = 0$

De même, par récurrence, $L_{[f,[f,g]]} T_1 = 0$

D'où
$$\begin{cases} \frac{\partial T_1}{\partial x} g = 0 \\ \frac{\partial T_1}{\partial x} [f, g] = 0 \\ \frac{\partial T_1}{\partial x} [f, [f, g]] = 0 = \frac{\partial T}{\partial x} ad_f^2 g \\ \vdots \\ \frac{\partial T_1}{\partial x} ad_f^{(n-2)} g = 0 \end{cases}$$

$$\iff \frac{\partial T_1}{\partial x} \Big(\underbrace{g \quad [f, g] \quad ad_f^2 g \quad \dots \quad ad_f^{(n-2)} g}_{\text{champ de vecteur intégrable}} \Big) = 0$$

Puis, appliquer Théorème de Frobenius

Interprétation du résultat de linéarisation entrée-état :

Dans le cas discret par exemple,

On considère $x(0) = 0$

$$x(k+1) = Ax(k) + Bu(k)$$

$x(1) = Ax(0) + Bu(0) = Bu(0)$

$x(2) = Ax(1) + Bu(1) = ABu(0) + Bu(1) = [B \ AB] \begin{bmatrix} u(1) \\ u(2) \end{bmatrix}$

On voit se dessiner l'espace d'atteignabilité par le système

Exemple d'un système linéaire :

Considérons $G(p) = \dfrac{p+a}{(p+1)(p+2)} = \dfrac{p+a}{p^2+2p+p+2} = \dfrac{p+a}{p^2+3p+2}$

1) Déterminer un modèle EE par la forme compagne de commande

$Y(p) = G(p)U(p)$

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -3 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$C = \begin{bmatrix} a & 1 \end{bmatrix}$$

Démonstration $\quad Y(p) = G(p)U(p) = \dfrac{p+a}{p^2+3p+2} U(p)$

Posons $X(p) = \dfrac{1}{p^2+3p+2} U(p)$

On pose les état $\begin{cases} x_1 = X \\ x_2 = \dot{X} \end{cases}$ d'où $\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = -2x_1 - 3x_2 + u(t) \end{cases}$

or $Y(p) = (p+a)X(p) \Rightarrow y = [a \ 1]\, x$

2) Méthode des dérivées successives :

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + Bu \\ y = Cx \end{cases}$$

$y = Cx$

$$\dot{y} = CAx + CBu = \begin{bmatrix} a & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -3 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} a & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u(t)$$

$$= \underbrace{\begin{bmatrix} -2 & a-3 \end{bmatrix}}_{M} x + u(t)$$

$\Rightarrow$ degré relatif $r = 1$

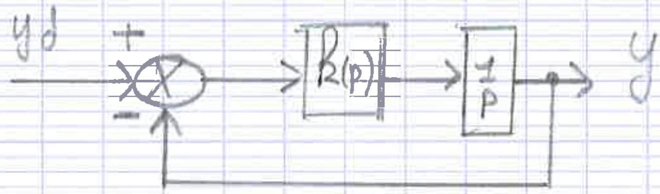
3) Elaborer une loi de commande permettant de poursuivre une référence

$\dot{y} = Mx + u(t)$ et en posant $u(t) = -Mx + v$

on retrouve $\dot{y} = v(t)$

On désire suivre $y_d(t) = \sin(t)$

Idée 1



Idée 2 : on pose $e = y - y_d \Rightarrow \dot{e} = v - \dot{y}_d$

et on choisit $v = \dot{y}_d - \alpha e$ avec $\alpha > 0$

Dès lors, en boucle fermée $\dot{e}(t) = -\alpha e(t)$

$$\Rightarrow e(t) = e^{-\alpha t} e(0)$$

$$\text{et } \lim_{t \to +\infty} e(t) = 0$$

⚠ Problème de dynamique interne ! Rappelons qu'avec l'idée 2 nous avons imposé la dynamique

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + Bu = Ax + B(-Mx - \alpha e + \dot{y}_d) \\ e = Cx - y_d \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \dot{x} = (A - BM - \alpha BC)x + \alpha B y_d + B\dot{y}_d \\ e = Cx - y_d \end{cases}$$

La matrice dynamique est $(A - BM - \alpha BC)$

Il faut s'assurer que :

- $A-BM-\alpha BC$ admet des valeurs propres à partie réelles strictement négatives.

avec $x(t) = e^{(A-BM-\alpha BC)t} + \int_0^t e^{(A-BM-\alpha BC)(t-s)} B u(s)\, ds$

ce qui donnerait la stabilité asymptotique

Rappel : la stabilité asymptotique implique la stabilité BIBO donc nous devons assurer la stabilité asymptotique (pôles $\in$ valeur propres en étudiant les pôles de la FT (conclut sur BIBO))

4) Le système en boucle fermée est-il stable ?

$A-BM-\alpha BC =$

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -3 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -2 & -a-3 \end{bmatrix} - \alpha \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\alpha a & -a-\alpha \end{bmatrix}$$

et $P_{(A-BM-\alpha BC)}(\lambda) = \begin{vmatrix} p & -1 \\ \alpha a & p+a+\alpha \end{vmatrix}$

$= p^2 + (\alpha + a)p + \alpha a \Rightarrow vp = \{-a ; -\alpha\}$

En conclusion, les valeurs propres du système en boucle fermée sont $\{-a ; -\alpha\}$ or $\alpha > 0$ donc $-\alpha < 0$

⚠ α est issue d'un choix mais a est un zéro de la boucle ouverte

Si $\alpha < 0$ alors le système asservi est instable.

La fonction de co-sensibilité est $T(p) = \frac{\cancel{p+a}}{\cancel{(p+a)}(p+\alpha)}$

$= \frac{1}{p+\alpha}$

Il y a compensation pôle par zéro
=> le système est soit non commandable, soit non observable
or le système avait été mis sous forme compagne de commande
=> il y a un mode non observable

5) Proposer une linéarisation entrée / état

On sait que $\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = -2x_1 - 3x_2 + u \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} \dot{x} = f_1(x_2) + f_2(x_1; x_2) + g(x)u \\ y = h(x) ? \end{cases}$

$f(x) = \begin{bmatrix} f_1(x) \\ f_2(x) \end{bmatrix}$ $A = f(x)$ $B = g(x)$

Dérivée première

$\dot{y}(x) = \frac{\partial h(x)}{\partial x} . f(x) + \frac{\partial h(x)}{\partial x} . g(x) u$

on impose $\frac{\partial h(x)}{\partial x} . g(x) u = 0 \Rightarrow L_g h = 0$

Dérivée seconde :

$\ddot{y}(x) = \frac{\partial}{\partial x}[L_f h(x)] f(x) + \frac{\partial [L_g h]}{\partial x} . g(x) u$

On cherche $y = h(x)$ telle que

$\begin{cases} \frac{\partial h}{\partial x} . g(x) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \begin{bmatrix} \frac{\partial h}{\partial x_1} & \frac{\partial h}{\partial x_2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = 0 \Leftrightarrow \frac{\partial h}{\partial x_2} = 0 \ (1) \\ \frac{\partial h}{\partial x} . [f, g] \neq 0 \end{cases}$

(1) Par exemple, $x_1 = h(x)$ vérifie cette première assertion

$\begin{cases} \dot{x} = Ax + Bu \\ y = Cx \end{cases}$ en linéaire, $\dot{y} = CAx + \underbrace{CBu}_{\frac{\partial h}{\partial x} . g}$

On a bien $(C_1 \quad C_2)\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = 0$

$\ddot{y} = CA^2x + \underbrace{CABu}_{\neq 0\ \underline{\underline{(2)}}}$ c'est-à-dire $[1 \quad 0]\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ \cdot & \cdot \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = 1$

1 structure venant de la propriété de la FCC commandable

$= x_1(-x_1+v) + (x_1+x_2)(-\cancel{x_1}+v+\cancel{x_1})$ $\quad u = -x_1 + v$

$= -x_1^2 + v\,(x_1+x_2+x_1)$

$= -x_1^2 + v\,(2x_1+x_2)$

Etape (4) : Choisir v par que $\dot{W}$ soit définie négative

On choisi $v(x_1;x_2) = -(2x_1+x_2)$ ainsi

$\dot{W}(x_1;x_2) = -x_1^2 - (2x_1+x_2)^2$

qui est bien définie négative.

Etape (5) : Ecriture de la loi de commande et du système commandé

La loi de commande s'écrit $u = -x_1 - 2x_1 - x_2$

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = -3x_1 - x_2 \\ \dot{x}_2 = x_1 \end{cases} \quad \text{d'où } A = \begin{bmatrix} -3 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Remarque : • Cette méthode génère des entrées d'amplitudes de plus en plus faible à mesure que l'on avance dans la mise en cascade des systèmes.

• En pratique on peut alterner les étapes de backsteping et de fowarding selon le type de mise en cascade des système

Autre exercice : Traiter d'abord (15) -> loi de commande et une fonction de Lyapunov pour (14) -> loi de commande pour (13).

$\cancel{\dot{x}_2(t) = x_3 - x_3^2 u}$

$\dot{x}_3(t) = u$