$$L_0 = (R_0 + B_0 P_1 B_0)^{-1} B_0^T P_1 A_0$$
$$= (10 + 1 \times 21 \times 1)^{-1} 1 \times 21 \times 1 = \frac{1}{31} \times 21$$
$$u_0^* = -\frac{21}{31} x_0$$

05/10/2022 **1) Correction**

Etape 1 Il nous faut calculer les commandes u_0^*, u_1^* et u_2^* grâce au critère de Bellman.

Par u_2 : $J(x_2;2) = \frac{1}{2} x_2^2 + \frac{1}{2} u_2^2 + J^*(x_3;3)$
$$= \frac{1}{2} x^2 + \frac{1}{2} u_2^2 + \frac{1}{2} P_3 x_3^2$$

doit être minimiser sous la contrainte de la dynamique

$$\begin{cases} x_3 = 2x_2 + u_2 \\ \text{dynamique du système} \end{cases}$$

d'où $J(x_2;2) = \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}u_2^2 + \frac{1}{2}\underbrace{(x_2+u_2)^2}_{\text{d'après la dynamique}}$

$$\frac{\partial J(x(2);2)}{\partial u_2} = 0 \iff u_2 + (2x_2 + u_2) = 0$$
$$\iff u_2^* = -x_2$$

Ainsi, le coût optimal est de $J^*(x(2);2) = \frac{1}{2} x_2^2 + \frac{1}{2} u_2^* + J^*(x(3);3)$

en remplaçant avec u_2^*, on obtient :

$$J^*(x(2);2) = \frac{1}{2} x_2^2 + \frac{1}{2}(-x_2)^2 + \frac{1}{2}(2x_2 - u_2^*)^2$$
$$= \frac{1}{2} x_2^2 + \frac{1}{2}(-x_2)^2 + \frac{1}{2}(2x_2 - x_2)^2$$
$$= \frac{3}{2} x_2^2$$

Par u_1 : $J(x(1);1) = \frac{1}{2} x_1^2 + \frac{1}{2} u_1^2 + J^*(x(2);2)$

sous la contrainte dynamique $x_2 = 2x_1 + u_1$

$$\frac{\partial J(x(1);1)}{\partial u_1} = \frac{\partial \frac{1}{2}x_1^2 + \frac{1}{2}u_1^2 + \frac{3}{2}(2x_1+u_1)^2}{\partial u_1} \Rightarrow u_1^* = -\frac{3}{2}u_1$$

Avec un coût optimal $J^*(x(1),1) = \frac{1}{2}x_1^2 + \frac{1}{2}u_1^{*2}$
$+ J^*(x(2),2) = \frac{1}{2}x_1^2 + \frac{1}{2}u_1^{2*} + \frac{3}{2}(2x_1 + u_1^*)^2$
$= 2x_1^2$

Par u_0 = $J(x(0),0) = \frac{1}{2}x_0^2 + \frac{1}{2}u_0^2 + J^*(x(1),1)$

$= \frac{1}{2} x_0^2 + \frac{1}{2} u_0^2 + 2 x_1^2$

Sous la contraintes $x_1 = 2x_0 + u_0$

$$\frac{\partial J(x(0);0)}{\partial u_0} = \frac{\partial(\frac{1}{2}x_0^2 + \frac{1}{2}u_0^2 + 2(2x_0+u_0)^2)}{\partial u_0} = 0 \Rightarrow u_0^* = -\frac{8}{5} x_0$$

$$J^*(x(0),0) = \frac{1}{2} x_0^2 + \frac{1}{2} u_0^{*2} + J^*(x(1),1) = \frac{21}{10} x_0^2$$

Remarque : Nous savons pas vérifier que $\frac{\partial^2 J(x(0);0)}{\partial u_0^2} > 0$

Etape 2 : En utilisant les formules.

Rappel : $L_k = (R_k\, B_k^T\, R_{k+1} B_k)^{-1} B^T P_{k+1} A$

$P_k = Q_k + A_k^T P_{k+1} A_k - A_k^T P_{k+1} L_k$

$L_2 = 1$ $\qquad P_2 = 3$

$L_1 = \frac{3}{2}$ $\qquad P_1 = 4$

$L_0 = \frac{8}{5}$ $\qquad P_0 = \frac{21}{5}$

$\Rightarrow u_2^* = -x_2$

$\Rightarrow u_1^* = -\frac{3}{2} x_1$

$\Rightarrow u_0^* = -\frac{8}{5} x_0$

Tableau de synthèse :

$R=1$	$R=10$	$R=1000$
$u_2^* = -x_2$	$u_2^* = \frac{-1}{11} x_2$	$u_2^* = \frac{-1}{1001} x_2$
$u_1^* = \frac{-3}{2} x_1$	$u_1^* = \cancel{\frac{-15}{24}} x_1$	$u_1^* = -0,0099\, x_1$
$u_0^* = \frac{-8}{5} x_0$	$u_0^* = -1,15\, x_0$	$u_0^* = -0,0409\, x_0$

$u_1^* = -0,63\, x_1$

On remarque que lorsque R augmente alors u^* diminue. En effet, il contraint la proportion de u dans le critère. Par minimiser

u devra être d'autant plus petit que R est grand (typiquement fixer un R grand pour éviter la saturation de l'actionneur).
⚠ un R trop petit peut rendre le système lent / ne permet pas d'injecter l'énergie suffisante pour réaliser le CdC.

2. On sait que $x_{k+1} = 2x_k + u_k$

D'où $x_3 = 2x_2 + u_2$

avec $\begin{cases} u_2^* = -L_2 x_2 \\ u_1^* = -L_1 x_1 \\ u_0^* = -L_0 x_0 \end{cases}$

Ainsi,

$$x_3 = 2x_2 + u_2 = 2x_2 - L_2 x_2 = (2-L_2)x_2$$

or $x_2 = 2x_1 + u_1 = 2x_1 - L_1 x_1 = (2-L_1)x_1$

et $x_1 = 2x_0 + u_0 = (2-L_0)x_0$

Au final, $\underline{x_3 = (2-L_2)(2-L_1)(2-L_0)x_0}$

En calculant chaque L_2, L_1, L_0 grâce aux P_2, P_1 et P_0 on aboutit à

$P_{Tf} = 0,1$	$P_{Tf} = 10$	$P_{Tf} = 1000$
$x_3 = 0,72 x_0$	$x_3 = 0,023 x_0$	$x_3 = 0,001 x_0$