Université Paul Sabatier
Cours M2 ISTR & RODECO
Commande linéaire avancée - Commande Robuste
Travaux pratiques - 1
octobre 2022

La totalité des TP se font en salle I3 avec à disposition le logiciel Matlab.

Nous allons travailler avec le logiciel libre **YALMIP** interface permettant de coder des problèmes d'optimisation tels que les problèmes LMI `https://yalmip.github.io/download/` et avec le solveur SDPT3 `https://blog.nus.edu.sg/mattohkc/softwares/sdpt3/`. Merci de les télécharger et de les installer. Pour cela cliquez sur **Set Path**, faire **Add with subfolders** et sélectionner les répertoires `yalmip` et `sdpt3` que vous avez téléchargé. Se positionner dans le répertoire `sdpt3` et faire `Installmex.m`.

Théorème 1
S'il existe $X = X^T \succ 0$ et R solutions de la LMI

$$\begin{bmatrix} AX + B_uR + (AX + B_uR)^T & B_w & XC_z^T \\ B_w^T & -\mu^2 I & D_{zw}^T \\ C_zX & D_{zw} & -I \end{bmatrix} \prec 0$$

alors $K = -RX^{-1}$ est une matrice de retour d'état telle que la norme L_2 induite du système

$$\dot{x} = Ax + B_uu + B_ww \quad , \quad u = -Kx \quad , \quad z = C_zx + D_{zw}w$$

vérifie $\sup \frac{\|z\|^2}{\|w\|^2} < \mu^2$.

Q1. Prouver le théorème 1. On suggère pour faire cette preuve de considérer la fonction $V(x) = x^T Px$ avec $P = X^{-1}$ et le vecteur

$$\eta = \begin{pmatrix} Px \\ w \\ z \end{pmatrix}.$$

Q2. Soit le système décrit par

$$\ddot{q} = u + w + \delta_1\dot{q} + \delta_1/(1+\delta_2)q \quad , \quad z = q + \delta_2\dot{q}$$

Construire un modèle d'état de ce système :

$$\dot{x} = A(\delta_1, \delta_2)x + B_uu + B_ww \quad , \quad z = C_z(\delta_1, \delta_2)x + D_{zw}w.$$

Q3. En supposant pour commencer que $\delta_1 = \delta_2 = 0$. Calculer un retour d'état $u = -Kx$ tel que la norme L_2 induite du système vérifie $\sup \frac{\|z\|^2}{\|w\|^2} < 2^2$. Vous pouvez pour cela utiliser les fonctions telles que `sdpvar` et `optimize` de YALMIP.

Q4. Que peut-on conclure du résultat de la question **Q3** par le théorème du petit gain ?

Q5. On suppose maintenant que $|\delta_1| \leq \frac{1}{2}$ et $|\delta_2| \leq \frac{1}{2}$. Proposer un modèle polytopique pour le système. Calculer le système en boucle fermée avec $u = -Kx$ obtenu à la question **Q3**. Est-ce un modèle polytopique ?

Théorème 2
S'il existe $P = P^T \succ 0$ solution des LMI

$$A^{[v]T}P + PA^{[v]} \prec 0 \quad , \quad v = 1 \ldots \bar{v}$$

alors le système incertain

$$\dot{x} = A(\zeta)x$$

est robustement stable pour tout $A(\zeta) = \sum_{v=1}^{\bar{v}} \zeta_v A^{[v]}$ où $\zeta_v \geq 0$ pour tout $v = 1 \ldots \bar{v}$ et $\sum_{v=1}^{\bar{v}} \zeta_v = 1$.

Q6. Prouver le théorème 2.

Q7. Est-ce que le système de la question **Q5** est robustement stable en boucle ouverte ? en boucle fermée ?

Q8. Tracer les valeurs singulières du système en boucle fermée pour 10 réalisations aléatoires du système en boucle fermée avec le correcteur trouvé à la question **Q5**. Est-ce que la contrainte sur la norme induite L_2 souhaitée $\left(\sup \frac{\|z\|^2}{\|w\|^2} < 2^2\right)$ est satisfaite robustement ?

Q9. (Question optionnelle) Proposer un résultat LMI pour calculer une borne supérieure sur la norme induite L_2 qui serait valide pour toutes les incertitudes. Calculer cette borne supérieure.

Q10. Proposer un modèle LFT pour le système.

Q11. Proposer une méthode pour analyser la stabilité robuste du système LFT bouclé avec le correcteur trouvé à la question **Q5**. Est-ce que cette méthode premet de conclure que le système est robustement stable pour tout $|\delta_1| \leq \frac{1}{2}$ et $|\delta_2| \leq \frac{1}{2}$?

Q12. Soit la boucle fermée avec le correcteur avec le gain de retour d'état calculé en **Q5**. Proposer un modèle LFT de type $\Delta \star M$ pour l'analyse robuste de sa norme L_2 induite. Calculer la norme H_∞ de M et conclure.