10/11/2022

TD 1 : Analyse de stabilité des systèmes non linéaires

1. (a) $\begin{cases} \dot{x}_1 = -x_1 + x_2^2 \\ \dot{x}_2 = -x_2 \end{cases}$

Rappel : f définie ssi $f(x) = 0 \Rightarrow x = 0$

Points d'équilibre :

$$\begin{cases} x_1 = x_2^2 \\ x_2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = 0 \\ x_2 = 0 \end{cases} \Rightarrow X_e = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$V_1(x) = x_1^2 + x_2^2 \qquad V_1 : \mathcal{D} \to \mathbb{R}$

$V_1(0) = 0$

$V_1(x) > 0 \quad \forall x \in \mathcal{D} \setminus \{0\} \Rightarrow$ candidate à une fonction de Lyapunov

$$\begin{aligned} \dot{V}_1(x) &= 2x_1\dot{x}_1 + 2x_2\dot{x}_2 \\ &= 2(-x_1 + x_2^2)x_1 + (-2x_2^2) \\ &= -2x_1^2 - 2x_2^2x_1 - 2x_2^2 \\ &= \underbrace{-2x_1^2}_{<0} \underbrace{- 2x_2^2}_{<0}(1 + x_1) \end{aligned}$$

Problème : Si le système est instable alors pas d'existence de la fonction de Lyapunov.

Linéarisé au point $X_e = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 2x_2 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$

$$\left.\frac{\partial F}{\partial x}\right|_{x_e} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$

Vp en $\{-1 ; -1\}$ ✓ $\Rightarrow$ O est localement asymptotiquement stable

Etape 1 : Trouver une fonction de Lyapunov par le système linéarisé en X_e :
$$\begin{cases} \dot{\tilde{x}}_1 = -\tilde{x}_1 \\ \dot{\tilde{x}}_2 = -\tilde{x}_2 \end{cases}$$
La fonction $\theta = \frac{1}{2}\tilde{x}_1^2 + \frac{1}{2}\tilde{x}_2^2$ fonctionne

Etape 2 : Etudier la stabilité locale autour du point d'équilibre

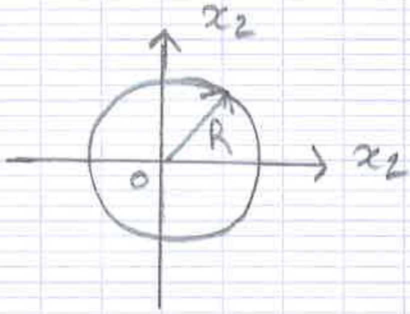
$V = \frac{1}{2}x_1^2 + \frac{1}{2}x_2^2$ et on choisit le domaine $x \in \mathcal{D} = B(0;R)$

On a bien V définie positive sur $\mathcal{D}$

Etudions sa dérivée :

$\dot{V} = -x_1^2 - x_2^2 + x_1 x_2^2$

$= -x_1^2 - (1 - x_1)x_2^2$



Prenons $\varepsilon > 0$

$\forall x_1 \leq 1 - \varepsilon$; $1 - x_1 \geq \varepsilon > 0 \Rightarrow x_2^2(1 - x_1) \geq \varepsilon x_2^2$

$\dot{V}(x) = -x_1^2 - (1 - x_1)x_2^2 \leq x_1^2 - \varepsilon x_2^2$ définie négative sur $\mathcal{D}$

Etape 3 : Choisir le domaine $\mathcal{D} = B(0, \frac{1}{2})$: boule centrée en O et de rayon $\frac{1}{2}$

NB : On résout l'équation (2) $\Leftrightarrow x_2(t) = e^{-t}x_2(0)$

Puis on réinjecte dans (1) $\Leftrightarrow \dot{x}_1 = -x_1 + e^{-2t}x_2^2(0)$

La résolution de (1) donne :

SH : $x_1(t) = Ae^{-t}$

SP | . ~~Par la méthode de la variation de la constante~~

$x_1(t) = A(t)\, e^{-t}$

8 | . On sait que la solution ~~particulière d'un~~ système de forme $\dot{x} = Ax + Bu$ est

$x_p~~(t) =~~ \int_0^t e^{A(t-s)}\, Bu(s)\, ds$

Ainsi, S : $x_1(t) = SH + SP$

$$\boxed{x_1(t) = e^{-t} x_{10} + \int_0^t e^{-(t-s)} e^{-2s} x_{20}^2\, ds}$$

Le système ne respecte pas les propriétés de superposition et d'homogénéité => le système est bel et bien non linéaire. Néanmoins, nous avons pu utiliser les outils linéaires pour résoudre.

En effet, $x_1(t) = e^{-t} x_{10} + e^{-t} \int_0^t e^{-s}\, x_{20}^2\, ds$

$= e^{-t} x_{10} - e^{-t} [e^{-s}]_0^t\, x_{20}^2$

$= e^{-t} x_{10} - e^{-t} [e^{-t} - 1]\, x_{20}^2$

$= e^{-t} (x_{10} + x_{20}^2) - e^{-2t} x_{20}^2$

$\Rightarrow x_2(t) = e^{-t} x_{20}$

On en conclut que $\lim_{t \to +\infty} x(t) = 0 \quad \forall\, x_0 \in \mathbb{R}^2$

$\boxed{\text{Au bilan 0 est globalement attracteur donc 0 est GAS}}$

D'après le théorème inverse de stabilité, il existe une fonction de Lyapunov globale

Retour à la recherche d'une fonction de Lyapunov :

$V_2(x) = \frac{1}{2}$

$\dot{V}_{général} = x_1 \dot{x}_1 + x_2 \dot{x}_2$

En calculant $V = \frac{1}{2} x_1^2 + \frac{1}{2} x_2^2$ nous avons obtenu

$\dot{V} = -x_1^2 + x_1 x_2^2 - x_2^2$ induit

On augmente le degré de x_2 tel que :

$V = \frac{1}{2}x_1^2 + \frac{1}{4}x_2^4$ définie positive

De plus, si $\|x\|^2 \to +\infty$ alors $x_1^2 + \frac{x_2^4}{4} \to +\infty \Rightarrow V$ radialement UB

Dès lors, $\dot{V} = -x_1^2 + x_1 x_2^2 - x_2^4$

si x_2 est grand alors il occulte la contribution de $x_1 x_2^2$
pour des x petit, $-x_1^2$ domine

En s'appuyant sur les identités remarquables :

$$\dot{V} = -\left(x_1 - \frac{1}{2}x_2^2\right)^2 + \frac{1}{4}x_2^4 - x_2^4$$

$$= -\left(x_1 - \frac{1}{2}x_2^2\right)^2 - \frac{3}{4}x_2^4$$

$$\dot{V} = 0 \Rightarrow \begin{cases} x_1 - \frac{1}{2}x_2^2 = 0 \\ \text{et } x_2^4 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = 0 \\ x_2 = 0 \end{cases}$$

donc $\dot{V}$ est définie négative

$\boxed{\text{D'après Lyapunov 0 est GAS}}$

Autre méthode : $\begin{bmatrix} x_1 & x_2 & x_2^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} M \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_2^2 \end{bmatrix}$

avec M définie négative

on obtient $M = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -\frac{3}{4} \end{bmatrix}$