Solutions des vraies matrices :

Le gradient vaut :

$$\nabla f(x) = \begin{bmatrix} 2x^3 - 2xy + x - 1 \\ y - x^2 \end{bmatrix}$$

La matrice Hessienne vaut :

$$\nabla^2 f(x,y) = \begin{bmatrix} 6x^2 - 2y + 1 & -2x \\ -2x & 1 \end{bmatrix}$$

On approxime $\nabla^2 f(x) = J^t(x)\, J(x)$

$$= \begin{bmatrix} 4x^2 + 1 & -2x \\ -2x & 1 \end{bmatrix}$$ => approximation de la vraie matrice Hessienne

La vraie valeur est donnée par $\nabla^2 f(x) = J^t J + \sum_{i=1}^{m} r_j \Delta^2 r_j$

$$= \nabla^2 f(x) = \begin{bmatrix} 4x^2+1 & -2x \\ -2x & 1 \end{bmatrix} + (x^2 - y)\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + (1-x)\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 6x^2 - 2y + 1 & -2x \\ -2x & 1 \end{bmatrix}$$

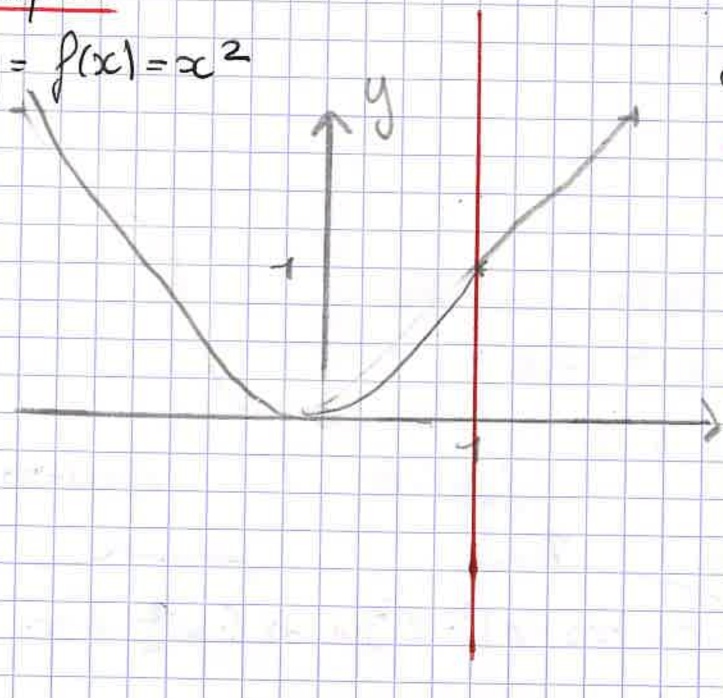
15/09/2022

Méthode de Levenberg-Marquardt

Optimisation non linéaire avec contraintes

A/ Conditions théoriques

Exemple : Soit $y = f(x) = x^2$



On calcule le $\min_x f(x)$

sous contrainte $x \geq 1$

$\nabla f(x) = 2x$

On ne cherche pas forcément à annuler le gradient

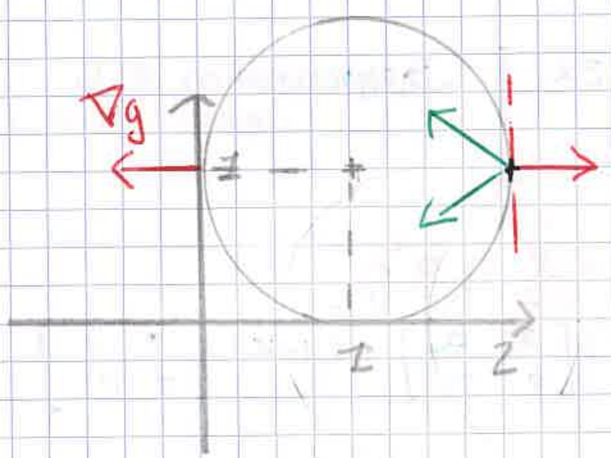
Remarque : Sans contraintes, toutes les directions de descente étaient acceptées
Tandis que sous contraintes, la direction doit respecter la contrainte => c'est la direction admissible.

Illustration du cône de direction :

Contraintes : $g(x) = \frac{1}{2}(x-1)^2 + \frac{1}{2}(y-1)^2 - \frac{1}{2} \leq 0$

$$\nabla(g) = \begin{bmatrix} x-1 \\ y-1 \end{bmatrix}$$

$$\tilde{x} \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} \Rightarrow \nabla g(\tilde{x}) = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

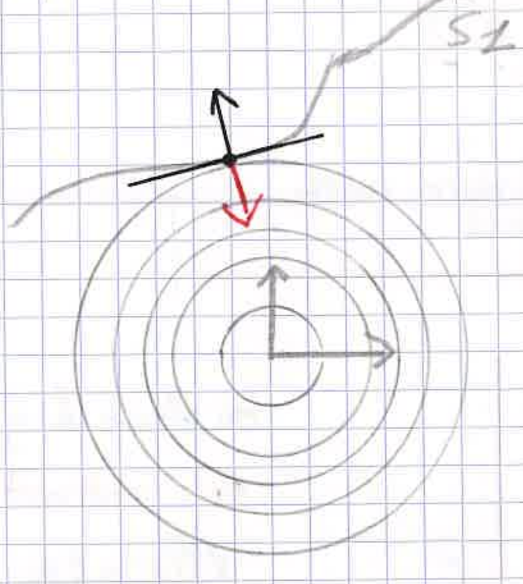


Optimisation avec contraintes égalité

-> Fonction Lagrangienne L :

On souhaite minimiser, par exemple, $\min \|x\|$ sous la contrainte $x \in S_1$ avec S_1, une surface décrite par l'équation $h_1(x)$. On peut calculer $\nabla h_1(x)$

Au minimum, $\nabla f \pm \lambda \nabla h = 0$



Exemple (diapo 79) $f(x_1, x_2) = x_1 + x_2$

Sous contraintes $\begin{cases} x_1^2 + (x_2 - 1)^2 = 1 \\ -x_2^2 + x_2 = 0 \end{cases}$

Etape 1 : Ecriture du Lagrangien

$$L = x_1 + x_2 + \lambda_1 \underbrace{[x_1^2 + (x_2-1)^2 - 1]}_{h_1(x)=0} + \lambda_2 \underbrace{[-x_2^2 + x_2]}_{h_2(x)=0}$$

Etape 2 : Poser la condition sur ~~les contraintes qui doivent être~~ LICQ

$$\begin{cases} \nabla_x L = 0 \\ \nabla_y L = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -1 + 2\lambda_1 x_1 - 2\lambda_2 x_1 = 0 \\ -1 + 2\lambda_1 (x_2 - 1) + \lambda_2 = 0 \\ x_1^2 + (x_2^2 + 1 - 2x_2) - 1 = 0 \\ -x_1^2 + x_2 = 0 \end{cases} \iff x_2 = x_1^2$$

$\iff x_2(x_2 - 1) = 0 \Rightarrow$ 2 cas de figures :

(A) $\bar{x} = \begin{pmatrix} x_1 = \pm 1 \\ x_2 = 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{x_1 = 1} \lambda = \begin{pmatrix} -\frac{3}{2} \\ 1 \end{pmatrix}$, $\xrightarrow{x_1 = -1} \lambda = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ -1 \end{pmatrix}$

Etape 3 : Vérifier que les contraintes sont linéairement indépendantes

$\nabla h_1 = \begin{bmatrix} 2x_1 \\ 2(x_2 - 1) \end{bmatrix}$ et $\nabla h_2 = \begin{bmatrix} -2x_1 \\ 1 \end{bmatrix}$

$\nabla h \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & -2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

linéairement indépendantes

(B) $\underline{X} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ $\begin{cases} -1 + 0 + 0 = 0 & \rightarrow \text{impossible} \\ -1 + 0 - 2\lambda_1 + \lambda_2 \end{cases}$

$\Rightarrow$ ce point n'est pas un minimum

En effet, $\nabla h \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}$ $\Rightarrow$ on ne peut pas conclure

linéairement dépendantes

Etape 4 : Admissibilité de la direction

$\bar{x} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ on avait $\nabla h \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

Une direction est admissible si $d^t \nabla h = 0$ en posant $d = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$

il faut que $[y_1 \; y_2] \begin{bmatrix} -2 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = 0$

$\iff [-2y_1 \;\; 2y_1 + y_2] = [0 \;\; 0]$

$\iff \boxed{y_1 = y_2 = 0}$

Etape 5 : Vérification de l'équation fiant $\nabla^2_{xx} L$

$$\nabla_{xx} L^2 = \begin{bmatrix} 2(1z - 1z) & 0 \\ 0 & 21z \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}$$ => le point $(-1, 2)$ est un candidat à l'optimalité
=> $y^T \nabla_{xx}^2 L y = 0 \quad \forall y \in D$

Exemple 5 (diapo 86)

$g(x) = 2x_1 + x_2 + 4 \leq 0$ contrainte inégalité

Lagrangien = $L(x;\lambda) = x_1^2 + x_2^2 + \lambda [2x_1 + x_2 + 4]$

utiliser μ pour les contraintes inégalité

$$L = \underbrace{x_1^2 + x_2^2}_{f(x)} + \mu \underbrace{[2x_1 + x_2 + 4]}_{g(x) \leq 0}$$

$\nabla_x L = 0 \quad (1)$

$\mu \geq 0 \quad (2)$

$\mu \cdot g(x^*) = 0 \quad (3)$

$g(x^*) \leq 0 \quad (4)$

$$\nabla_x L = \begin{bmatrix} 2x_1 + 2\mu \\ 2x_2 + \mu \end{bmatrix}$$

19/09/2022

(3) $\Leftrightarrow \mu [2x_1 + x_2 + 4] = 0$

=> 2 possibilités :

A) $\mu = 0 \Rightarrow \nabla_x L = 0$

$\Rightarrow x_2 = x_2 = 0$

$\Rightarrow \tilde{x} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $\tilde{\mu} = 0$

or $0 + 0 \leq -4$ est faux

donc $g(\tilde{x}) \leq 0$ n'est pas vérifiée

La contrainte est inactive

B) $\mu \neq 0 \Rightarrow 2x_1 + x_2 + 4 = 0$

La contrainte est active $g(x^*) = 0$

$\Rightarrow x^* = \begin{pmatrix} -\frac{8}{5} \\ -\frac{4}{5} \end{pmatrix}$ et $\mu^* = \frac{8}{5} > 0$