On souhaite que $u = \frac{\partial \phi}{\partial z_1} \dot{z}_1 - \frac{\partial V}{\partial z_2} g(z_1) - \alpha z_2$ avec $\alpha > 0$

$$= \underbrace{u(z_1) - \alpha z_2^2}_{\text{définie négatif par rapport à } z_1 \text{ et } z_2}$$

$\Rightarrow$ 0 est GAS

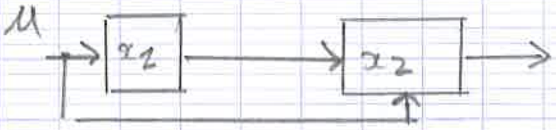
1.2 Application :

III - La méthode du forwarding :

23/11/2022

Cette méthode empêche la possibilité de feedback : on considère donc des systèmes de la forme
$$\begin{cases} \dot{x}_1 = f_1(x_1; u) \\ \dot{x}_2 = f_2(x_1; u) \end{cases}$$

u attaque chaque sous-système.
On suppose un point d'équilibre en $x_1 = 0$ GAS



Idée : x_2 est un intégrateur soumis à une entrée qui elle même converge.
A priori x_2 devrait converger vers une quantité $\psi(x;y)$
On sait qu'il existe une commande $u = \phi(x_1)$ qui stabilise le premier sous système $\Rightarrow$ on peut trouver $V(x_1)$, une fonction de Lyapunov

Solution : On veut construire une fonction de Lyapunov générale
$W = V(x_1) + \varphi^2(x_1; x_2)$
On calcule une loi de commande $u = \cancel{\phi(x_1) + v}(x_1, x_2)$ à trouver
pour rendre définie négative $\dot{W}$.

Définissons, $\begin{cases} \dot{X}_1 = f_1(X_1 ; \phi(x_1)) \\ \dot{X}_2 = f_2(X_2 ; \phi(x_2)) \end{cases}$ l'équation différentielle

avec pour conditions initiales l'état courant du système $\begin{cases} x_1 \\ x_2 \end{cases}$

Dès lors, "si tout se passe bien" alors $X_2 \underset{t \to +\infty}{\to} \psi(x_1 ; x_2)$

Exemple : Prenons $\begin{cases} \dot{x}_1(t) = u \\ \dot{x}_2(t) = x_1 \end{cases}$

Etape ① : Trouver une loi stabilisante :

$u = -x_1$ et donc 0 est GAS pour $\dot{x}_1 = -x_1$

par exemple pour $V(x_1) = \frac{1}{2} x_1^2$

Etape ② : Résoudre l'équation différentielle partant de conditions initiales $\dot{X}_2 = X_1$ telle que $\begin{cases} \dot{X}_1(t) = -X_1 \\ X_1(0) = x_1 \end{cases}$

$\Rightarrow \dot{X}_2 = e^{-t} x_1$ $\qquad \Rightarrow X_1(t) = e^{-t} x_1$

$\Leftrightarrow X_2(t) = \int_0^t e^{-s} x_1 \, ds + x_2$

$= -[e^{-s}]_0^t x_1 + x_2 = -(e^{-t} - 1) x_1 + x_2$

donc $X_2(t) = (1 - e^{-t}) x_1 + x_2$

Remarquons que : lorsque $t \to +\infty$ on a $X_2(t) \to x_1 + x_2$

Etape ③ : Choix de la fonction de Lyapunov en regard de cette limite

$W(x_1 ; x_2) = \frac{1}{2} x_1^2 + \frac{1}{2}(x_1 + x_2)^2$ définie >0 et radialement non borné

$\dot{W}(x_1 ; x_2) = x_1 \dot{x}_1 + (x_1 + x_2)(\dot{x}_1 + \dot{x}_2)$