Frédéric Gouaisbaut

Commande linéaire avancée 2

Problématique : Etudier des systèmes MIMO (Multi-input - Multi-output)

Partie ① : Performances et Robustessse

Partie ② : Systèmes nominaux et modèles (réalisation) et commande

possibilité de passer à un modèle EE
→ pour faire un retour d'état

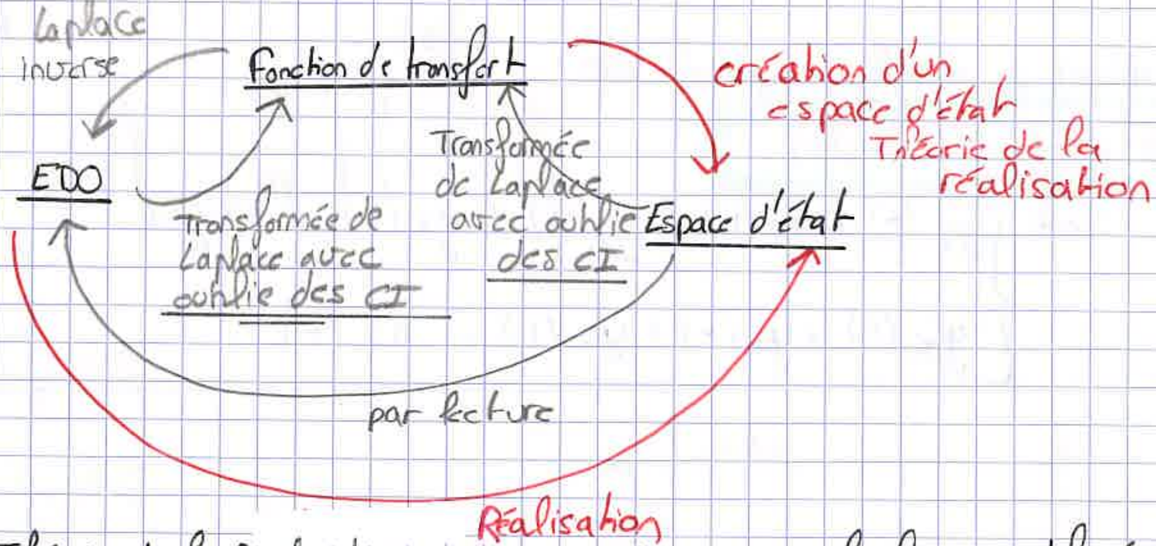
I- Modélisation des systèmes MIMO :

1. Rappel sur les systèmes SISO

Hypothèse : les modèles considérés sont linéaires

Les différents types de modèles :

- Les modèles entrées-sorties : les fonctions de transfert et les EDO
- Les modèles espace d'état



Rappel de la Théorie de la Réalisation : On peut se baser sur la forme modale (grâce à la Décomposition en éléments simples) ou sur les formes compagnes (approche par le polynôme caractéristique).

2. Les modèles MIMO

2.1. Les modèles E/S

Les modèles temporels représentent des EDO couplées entre les différentes entrées et sorties d'un modèle. On considère m entrées et p sorties.

Le modèle EDO s'écrit $\boxed{L_s y^{(s)}(t) + L_{s-1} y^{(s-1)}(t) + \dots + L_0 y(t) = M_r u^{(r)}(t) + \dots + M_0 u(t)}$

où $y(t) \in \mathbb{R}^p$ et $u(t) \in \mathbb{R}^m$

avec $\begin{cases} L_i \in \mathbb{R}^{p\times p}, & 0<i<j \\ M_i \in \mathbb{R}^{p\times m}, & 0<i<r \end{cases}$

Remarques : ① Le système est causal $\Leftrightarrow$ $s \geq r$.

② Il y a autant d'équations que de sorties (ici p EDO pour p sorties) pour ne pas surcontraindre algébriquement le système : si trop d'équations alors potentiellement il existe des contraintes algébriques entre les sorties (contraintes ne dépendant pas du temps). Au contraire s'il n'y a pas assez d'équations alors l'unicité des solutions n'est pas assurée.

On introduit l'opération différentiel : $D = a(t) \longrightarrow \frac{da(t)}{dt}$ noté $D = \frac{d}{dt}$

et $D^2 = D \circ D\,[a(t)] = \frac{d^2 a(t)}{dt^2}$

On obtient ainsi un modèle compact : $\underbrace{(L_s D^{(s)} + L_{s-1} D^{(s-1)} + \dots + L_0)}_{L(D)}\, y(t) = \underbrace{(M_r D^{(r)} + M_0)}_{M(D)}\, u(t)$

Enfin, on obtient un modèle temporel E/S :

$$\boxed{L(D)\, y(t) = M(D)\, u(t)}$$

$\begin{pmatrix} & \end{pmatrix}\begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_p \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} & \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \\ \end{pmatrix}$

p sorties
m entrées

Exemple : Soit $\begin{cases} \ddot{y}_1(t) + \dot{y}_2(t) + y_1(t) + y_2(t) = u_1(t) \\ \dot{y}_1(t) + \dot{y}_2(t) + y_1(t) = u_2(t) \end{cases}$

$D = \dot{y} = \begin{pmatrix} \dot{y}_1 \\ \dot{y}_2 \end{pmatrix}$ ✗

$D^2 y = \begin{pmatrix} \ddot{y}_1 \\ \ddot{y}_2 \end{pmatrix}$ ✗

$L = \begin{bmatrix} & \end{bmatrix}_{(2\times 2)}$ ✓ $\quad M = \begin{bmatrix} ✗ \end{bmatrix}$

$\begin{cases} \dot{y} \\ \end{cases}$

On choisit $y(t) = \begin{pmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \end{pmatrix}$ et $u(t) = \begin{pmatrix} u_1(t) \\ u_2(t) \end{pmatrix}$

$L(D) = \begin{bmatrix} D^2+1 & D+1 \\ D+1 & D \end{bmatrix}$ (2 × 2) $\qquad M(D) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \mathbb{I}_2$

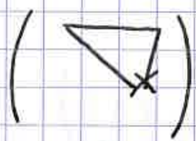
On défini l'ordre d'un système par le nombre de conditions initiales à connaître pour le résoudre.

Exemple :
$$\begin{cases} \dot y_1(t) + y_2(t) = u_1(t) & \rightarrow 1 \text{ CI nécessaire} \\ \dot y_2(t) = u_2(t) & \rightarrow 1 \text{ CI nécessaire} \end{cases}$$

Il faut 2 CI pour le résoudre → système d'ordre 2

Par ailleurs $L(D) = \begin{pmatrix} D & 1 \\ 0 & D \end{pmatrix}$

Exemple 2 :
$$\begin{cases} \ddot y_1(t) + \ddot y_2(t) = u_1(t) \\ \dot y_2(t) = u_2(t) \end{cases} \qquad L(D) = \begin{pmatrix} D^2 & D^2 \\ 0 & D \end{pmatrix}$$

Si $L(D)$ est triangulaire supérieure avec son terme inférieur droit à son degré > degré de tous les autres termes de la dernière colonne. Alors, il est aisé de déterminer le nombre de CI nécessaires. $L(D) =$ 

Retour à l'exemple $L(D) = \begin{pmatrix} D^2 & 1 \\ 0 & D \end{pmatrix}$ degré (EDO) = 3

dét $[L(D)] = 3$ degré [dét $[L(D)]$] = 3

Lemme : Il existe $V(D) \in \mathbb{R}^{p \times p}$ avec $V(p)$ unimodulaire (le déterminant de $V(p)$ ne dépend pas de p) tel que $V(D)L(D) = \begin{bmatrix} I_{11} & \cdots & \vdots \\ (0) & \ddots & I_{pp} \end{bmatrix}$

avec $\deg(I_{jj}) > \deg(I_{ij})$

avec $\begin{cases} 1 < i < j-1 \\ 1 < j < p \end{cases}$

Théorème : Le degré (ordre) d'un modèle $L(D)y(t) = M(D)u(t)$ est égal au degré du déterminant de $L(D)$.

Exemple :
$$\begin{cases} \ddot y_1(t) + \dot y_2(t) + y_1(t) + y_2(t) = u_1(t) \\ \dot y_1(t) + y_2(t) + y_2(t) = u_2(t) \end{cases}$$

$$L(D) = \begin{bmatrix} D^2 + 1 & D + 1 \\ D + 1 & 1 \end{bmatrix}$$

dét $[L(D)] = -2D$

ordre $\deg[\text{dét}[L(D)]] = 1$

A faire, trouver $V(D)L(D)$ pour vérifier $V(D)L(D) = \begin{bmatrix} I_{11} & & \\ & \ddots & \\ (0) & & I_{pp} \end{bmatrix}$

La fonction de transfert (modèles fréquentiels) utilise la Transformée de Laplace (partant par exemple d'EDO). Dans le cas monovariable, le modèle s'écrit $F(s) = \frac{y(s)}{U(s)}$

avec $\begin{cases} y(s) = \mathcal{L}[y(t)] \\ u(s) = \mathcal{L}[u(t)] \\ \text{condition initiales nulles} \end{cases}$

Dans le cas multivariable : $y(s) = F(s)U(s)$ avec $\begin{cases} y(s) \in \mathbb{C}^{p}[s] \\ u(s) \in \mathbb{C}^{p \times m}[s] \\ F(s) \in \mathbb{C}^{p \times m}(s) \end{cases}$ polynômes, fractions rationnelles matricielles

Exemple : $F(s) = \begin{bmatrix} \frac{1}{s+1} & \frac{1}{s} \\ \frac{1}{s+2} & \frac{1}{(s+1)(s+2)} \end{bmatrix}$

Autrement dit, $F(s) = \left(F_{ij}(s) \right)_{\substack{1<i<p \\ 1<j<m}}$ et $y_i(s) = \sum_{j=1}^{m} F_{ij}(s) u_s(s)$

Problématique : Connaître l'ordre

Connaître les pôles

Connaître les zéros (influant sur la précision et bloquer les perturbations)

Définition de l'ordre zéros / pôles d'une fonction de transfert :

Exemple 1 : $F(s) = \begin{bmatrix} \frac{1}{s} & \frac{1}{s+1} \\ \frac{1}{s+2} & \frac{1}{s} \\ \frac{1}{s+2} & \frac{1}{s+4} \end{bmatrix}$ même si elle n'est pas carré, il est possible d'opérer une transformation tel que $F(s) = \begin{bmatrix} \times & 0 \\ 0 & \times \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$

valeur singulières ou directions propres / principales

grâce à Smith - Magnillan