16/11/2022

TD1 (suite)

1. b) $\begin{cases} \dot{x}_1 = (x_1 - x_2)(x_1^2 + x_2^2 - 1) \\ \dot{x}_2 = (x_1 + x_2)(x_1^2 + x_2^2 - 1) \end{cases}$

$$\begin{cases} (x_1 - x_2)(x_1^2 + x_2^2 - 1) = 0 \\ (x_1 + x_2)(x_1^2 + x_2^2 - 1) = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = x_2 \quad \text{ou} \quad x_1^2 + x_2^2 - 1 = 0 \\ (x_1 + x_2)(x_1^2 + x_2^2 - 1) = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = x_2 \\ 2x_1 (2x_1^2 - 1) = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = x_2 \\ 4x_1^3 - 2x_1 = 0 \Leftrightarrow 2x_1 (\end{cases}$$

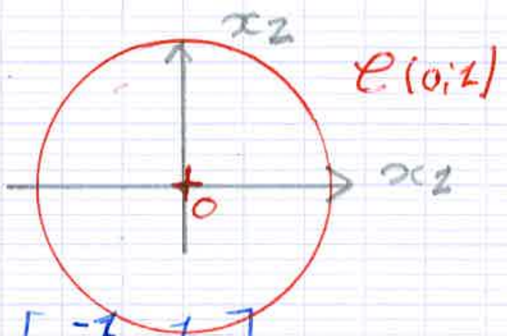
Calcul des points d'équilibre :

$$f(x_e) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} (x_1 - x_2)(x_1^2 + x_2^2 - 1) = 0 \\ \text{et} \\ (x_1 + x_2)(x_1^2 + x_2^2 - 1) = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = x_2 \quad \text{ou} \quad \underline{x_1^2 + x_2^2 - 1 = 0} \\ \text{et} \quad x_1 = -x_2 \quad \text{ou} \quad \underline{x_1^2 + x_2^2 - 1 = 0} \end{cases}$$

équations du cercle

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x_e \in \mathcal{C}(0;1) \\ \text{ou} \\ x_e = 0 \end{cases}$$



La matrice dynamique du linéarisé est au point $X_e = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$; $A = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}$

dont $vp_A = -1 \pm j$ correspondant à un point spirale

Cela nous permet d'émettre l'hypothèse que le bassin d'attraction est compris dans le cercle $\mathcal{C}(0,1)$

Nous allons alors tester la fonction $V(\underline{x}) = \frac{1}{2} x_1^2 + \frac{1}{2} x_2^2$

dans le domaine $\mathcal{D} = \mathcal{B}(0; 1-\varepsilon)$ avec $0 < \varepsilon < 1$

$V(\underline{x})$ est définie positive

$$\dot{V}(\underline{x}) = \underbrace{(x_1^2 + x_2^2 - 1)}_{\leq 0 \text{ dans } \mathcal{B}(0;1-\varepsilon)} (x_1^2 + x_2^2) \leq -\varepsilon (x_1^2 + x_2^2)$$

car $\forall \underline{x} \in \mathcal{D} \quad x_1^2 + x_2^2 \leq 1 - \varepsilon$

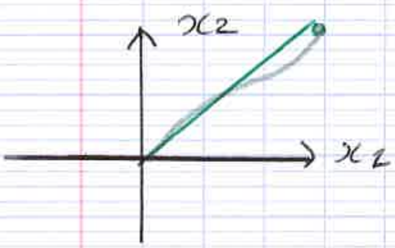
Donc $\dot{V}(\underline{x})$ est strictement définie négative dans $\mathcal{D}$

donc O est Localement Asymptotiquement Stable

Une estimation du bassin d'attraction est $\mathcal{B}(0; 1-\varepsilon)$ avec $0 < \varepsilon < 1$

Remarque : Une fonction de Lyapunov peut s'apparenter à une mesure de distance au cercle $x_1^2 + x_2^2 - 1 = 0$

$V = \frac{1}{2} (x_1^2 + x_2^2 - 1)^2$ (bien nul quand on est sur le cercle)



$$\left.\begin{cases} v(x) > 0 & \forall x > 0 \\ v(x) = 0 \Rightarrow x = 0 \end{cases}\right\}$$ 2 premiers axiome d'une métrique

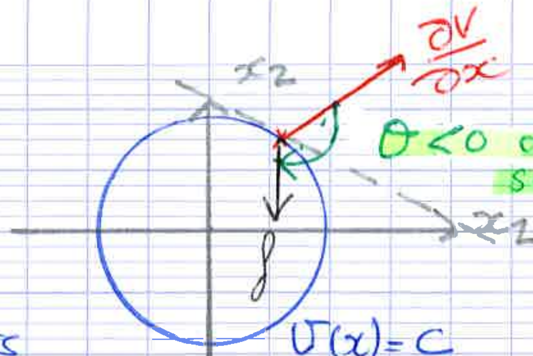
(seul axiome non nécessaire étant l'inégalité triangulaire)

$$\dot{V}(x(t)) < 0$$

$$\frac{\partial V}{\partial x} \cdot \dot{x}(t) < 0$$

$$\underbrace{\left\langle \frac{\partial V}{\partial x}, \dot{x} \right\rangle}^{\text{produit scalaire}} < 0$$

$\uparrow$ gradient



$\theta < 0$ donc produit scalaire < 0 => évolution vers l'intérieur

Si produit scalaire nul alors on reste sur la même ligne de niveau

Remarque : $\dot{x} = f(x(t))$ avec $f(\cdot)$, un champ de vecteur allant dans le sens de $x(t)$

1.c) $\begin{cases} \dot{x}_1 = -x_1 + x_1^2 x_2 \\ \dot{x}_2 = -x_2 + x_1 \end{cases}$

Points d'équilibre : $\begin{cases} -x_1 + x_1^2 x_2 = 0 \\ x_1 = x_2 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} -x_2 + x_2^3 = 0 \\ x_1 = x_2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_2(x_2^2 - 1) = 0 \\ x_1 = x_2 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x_2 = 0 \\ x_1 = x_2 \end{cases}$ ou $\begin{cases} x_2^2 = 1 \\ x_1 = x_2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_2 = \pm 1 \\ x_1 = x_2 \end{cases}$

$X_{e1} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$; $X_{e2} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ et $X_3 = \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \end{bmatrix}$

Astuce tracer les points d'équilibre

Linéarise au point $X_{e1} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$

$$\frac{\partial F}{\partial x} = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 + 2x_1 x_2 & x_1^2 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$$

$$\left.\frac{\partial F}{\partial x}\right|_{x=x_e} = A = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$$ ✓

$$P_S(A) = \begin{vmatrix} s+1 & 0 \\ -1 & s+1 \end{vmatrix} = (s+1)^2 + 1$$

$$= s^2 + 2s + 2$$

$$\Delta = b^2 - 4ac$$
$$= 2^2 - 4 \times 1 \times 2$$
$$= 4 - 8$$
$$= -4 < 0 \qquad p_{1,2} = \frac{-2 \pm 2j}{2} = -1 \pm j$$

$\Rightarrow x_e = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ est LAS

Recherche d'une fonction de Lyapunov

$V(\underline{x}) = \frac{1}{2} x_1^2 + \frac{1}{2} x_2^2$ définie positive

$$\dot{V}(\underline{x}) = 2x_1\dot{x}_1 + 2x_2\dot{x}_2$$
$$= x_1(-x_1 + x_1^2 x_2) + x_2(-x_2 + x_1)$$
$$= -x_1^2 - x_1^3 x_2 - x_2^2 + x_1 x_2$$

$$= \underset{\leq 0}{-x_1^2} - \underset{\leq 0\ ?}{x_1^4 x_2} - \underset{\leq 0}{x_2^2}$$ ✗

$$V(\underline{x}) = \frac{1}{2}(x_1^2 x_2 - \varepsilon)^2 \qquad \varepsilon > 0$$

Prenons une fonction de Lyapunov de distance euclidienne

$V = \frac{1}{2}x_1^2 + \frac{1}{2}x_2^2$ et $\dot{V} = -x_1^2 - x_2^2 + x_1x_2 + \underline{x_1^3 x_2}$

On factorise en $\dot{V} = -\left(x_1 - \frac{1}{2}x_2\right)^2 - \frac{3}{4}x_2^2$
$\underline{+ x_1^3 x_2}$

On défini $\mathcal{D}$ a posteriori afin que le terme $x_1 x_2$ dont on ne connait pas le signe soit négligeable devant les autres
Il nous faut rendre $x_1^3 x_2$ très petit
Nous savons que :
$x_1^3 x_2 = x_1^2 x_1 x_2$ et notre but est de contraindre le domaine pour garder x_1 petit.
On choisit $\mathcal{D} = (0; \varepsilon]$ avec $\varepsilon \ll 1$

$\Rightarrow x_1^2 + x_2^2 < \varepsilon$
$\Leftrightarrow |x_1^2 x_1 x_2| < \varepsilon |x_1 x_2|$
$\Leftrightarrow -\varepsilon |x_1 x_2| < x_1^2 x_1 x_2 < \varepsilon |x_1 x_2|$
$\Leftrightarrow \dot{V} < \varepsilon |x_1 x_2| - x_1^2 - x_2^2 + x_1 x_2$
$< -x_1^2 - x_2^2 (1+\varepsilon) |x_1 x_2|$
$\Leftrightarrow \dot{V} < -|x_1|^2 - |x_2|^2 + (1+\varepsilon)|x_1| \cdot |x_2| \quad 1+\varepsilon > 0$
$< -\left(|x_1| - \frac{1}{2}(1+\varepsilon)|x_2|\right)^2 + \underbrace{\left(\frac{1}{4}(1+\varepsilon) - 1\right)}_{<0 \text{ pour } \varepsilon \ll 1} |x_2|^2$

donc $\dot{V}$ est définie négative

donc 0 est localement asymptotiquement stable

Autre exemple : Soit le système $\begin{cases} \dot{x}_1 = -x_1 + x_1^2 x_2 \\ \dot{x}_2 = -x_2 \end{cases}$

Point d'équilibre $X_e = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ unique

On connecte un système qui converge exponentiellement et un système asymptotiquement stable.

$V(x) = \frac{1}{2}x_1^2 + \frac{1}{2}x_2^2$

$$\dot{V}(x) = 2x_1\dot{x}_1 + 2x_2\dot{x}_2$$
$$= 2x_1(-x_1 + x_1^2 x_2) - 2x_2^2$$
$$= -2x_1^2 + 2x_1^2 x_2 - 2x_2^2$$

Choix du domaine $\mathcal{D} = (0;\varepsilon)$ avec $\varepsilon << 1$

$x_1^2 + x_2^2 < \varepsilon$