Examen Automatique Non linéaire

1. On considère le système suivant :

$$\dot{x}_1 = x_2(1 - x_1^2), \quad \dot{x}_2 = -\alpha(x_1 + x_2)(1 - x_1^2).$$

   (a) Quelles sont les point d'équilibres du système.

   (b) Etudier les propriétés de stabilité asymptotique du système autour de l'origine.

   (c) Tracer l'allure des trajectoires du plan de phase autour de l'origine.

2. On considère le système suivant :

$$\dot{x} = g(x),$$

   où g est une fonction de x vérfiant les propriétés $g(0) = 0$, $xg(x) > 0, \forall x$.

   (a) Quelles sont les point d'équilibres du système.

   (b) En considérant la fonction

$$V(x) = \frac{1}{2}x^2(t) + \int_0^x g(y)dy$$

   Etudier les propriétés de stabilité asymptotique du système autour de l'origine.

3. On considère le système $H1$ suivant :

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2, \\ \dot{x}_2 &= -ax_1^3 - kx_2 + e_1, \\ y &= x_2. \end{aligned}$$

   (a) Montrer que H_1 est à sortie strictement passive.

   (b) Montrer que H_1 est zero state détectable.

4. On considère le système $H2$ suivant :

$$\begin{aligned} \dot{x}_3 &= x_4, \\ \dot{x}_4 &= -bx_3 - x_4^3 + e_2, \\ y &= x_4. \end{aligned}$$

   (a) Montrer que H_2 est à sortie strictement passive.

   (b) Montrer que H_2 est zero state détectable.

   (c) Montrer que l'origine du système interconnecté entre H_1 et H_2 est asymptotiquement stable.

5. On considère le système suivant :

$$\dot{x}_1 = x_2 + \theta_1 x_1 \sin(x_2),$$
$$\dot{x}_2 = \theta_2 x_2^2 + x_1 + u,$$

   où θ_1 et θ_2 sont deux paramètres inconnus bornés par 1.

   (a) En adaptant la technique du backstepping, déterminer une loi de commande permettant de stabiliser le système.

6. Enoncer la définition de stabilité asymptotique.