Diapos 17 et 18 : passage de Ron vers x_R

Diapos 19 et 20 : passage de x_R à Ron

II - Matrices de transformation :

07/09/2022

But : Acquérir la compétence "Savoir effectuer un changement de repère"

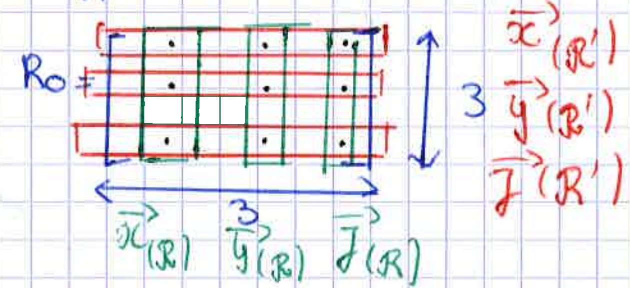
Cas général : Soit le repère fixe $\mathcal{R}(O; \vec{x}; \vec{y}; \vec{z})$

et $\mathcal{R}'(O'; \vec{x}; \vec{y}; \vec{z})$ mobile par rapport à $\mathcal{R}$

II. 1. 1er cas : $\mathcal{R}'$ effectue une rotation seule par rapport à $\mathcal{R}$

Dans ce cas de figure, seule la direction des axes $\vec{x}; \vec{y}; \vec{y}$ change et $O' = O$.

La rotation effectué est caractérisée par la matrice de rotation :



Mais la matrice de rotation est aussi une matrice de passage entre $\mathcal{R}$ et $\mathcal{R}'$

La position du point M dans le repère $\mathcal{R}$ ~~est~~ $\vec{OM}_{(\mathcal{R})} = \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix}$

Dans le repère $\mathcal{R}'$, il s'agit de $\vec{OM}_{(\mathcal{R}')} = \vec{O'M}_{(\mathcal{R}')} = \begin{bmatrix} a' \\ b' \\ c' \end{bmatrix}$ car $O = O'$ ici

On peut écrire $\boxed{\vec{OM}_{(\mathcal{R})} = R\,\vec{OM}_{(\mathcal{R}')}}$ $\Rightarrow$ $\boxed{\vec{OM}_{(\mathcal{R}')} = R^{-1}\,\vec{OM}_{(\mathcal{R})}}$

Propriétés de la matrice de rotation : 1) $R^{-1} = R^T$ $\Rightarrow$ $\vec{OM}_{(\mathcal{R}')} = R^T\,\vec{OM}_{(\mathcal{R})}$

2) R est une matrice orthonormale : → toutes les colonnes / lignes ont une norme de 1

→ le produit scalaire de deux colonnes / lignes est nul

(rappel : $R = (\vec{x}_{(\mathcal{R})}\ \vec{y}_{(\mathcal{R})}\ \vec{z}_{(\mathcal{R})})$)

3) Composition des rotations :

Soit une rotation $\mathcal{R} \xrightarrow{R} \mathcal{R}' \xrightarrow{R'} \mathcal{R}''$

la rotation totale est le produit : $R'' = RR'$ dans l'ordre ! $(RR' \neq R'R)$

Cela est valable pour n rotations quelconque

II.2. 2ème cas : Une rotation et une translation dit "transformation"

Dans ce cas, l'orientation des axes $\vec{x}$, $\vec{y}$ et $\vec{z}$ change et $O \neq O'$.

On rend compte ici de la rotation avec R et de la translation avec $\overrightarrow{OO'}_{(R)}$.

Localisation de M : $\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OO'} + \overrightarrow{O'M}$

Exprime $\overrightarrow{OM}$ dans $\mathcal{R}$ veut que l'on exprime toute l'égalité dans $\mathcal{R}$

$$\overrightarrow{OM}_{(R)} = \overrightarrow{OO'}_{(R)} + \overrightarrow{O'M}_{(R)}$$

coordonnées de M dans $\mathcal{R}$ — translation effectué — ?

Problématique : Comment ramener $\overrightarrow{OM}_{(R')} = \begin{pmatrix} a' \\ b' \\ c' \end{pmatrix}$ dans $\mathcal{R}$?

Solution : $\overrightarrow{OM}_{(R)} = R\,\overrightarrow{O'M}_{(R')}$

En conclusion : $\boxed{\overrightarrow{OM}_{(\mathcal{R})} = \overrightarrow{OO'}_{(\mathcal{R})} + R\,\overrightarrow{O'M}_{(\mathcal{R}')}}$

coordonnées de M dans $\mathcal{R}'$

Au bilan :

-> Si rotation seule : R est nécessaire et $\overrightarrow{OM}_{(R)} = R\,\overrightarrow{OM}_{(\mathcal{R}')}$

-> Si rotation et translation : R et $\overrightarrow{OO'}$ sont nécessaires et $\overrightarrow{OM}_{(\mathcal{R})} = R\,\overrightarrow{OM}_{(R)} + \overrightarrow{OO'}_{(R)}$

Matrice de passage homogène :

Noté T, elle est de dimensions 4x4

matrice de rotation R

$$T = \left[\begin{array}{ccc|c} \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] = \begin{bmatrix} R & P_{(R)} \\ 0_{1\times3} & 1 \end{bmatrix}$$

vecteur de translation $\overrightarrow{OO'}_{(R)} = P_{(R)}$

$0_{1\times3}$ pour l'inversion

On cherche à localiser

$$\underbrace{\begin{bmatrix} \overrightarrow{OM}_{(R)} \\ 1 \end{bmatrix}}_{4\times1} = \underbrace{T}_{4\times4} \underbrace{\begin{bmatrix} \overrightarrow{O'M}_{(R')} \\ 1 \end{bmatrix}}_{4\times1}$$

$$= \begin{bmatrix} \underbrace{R}_{3\times3} & \underbrace{P_{(R)}}_{3\times1} \\ 0_{1\times3} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \underbrace{\overrightarrow{O'M}_{(R')}}_{3\times1} \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} R\overrightarrow{O'M}_{(R')} + P(R) \times 1 \\ 0_{1\times3}\,\overrightarrow{O'M} + 1 \times 1 \end{bmatrix}$$

Propriétés de la matrice de passage homogène :

1) Si $T = \begin{pmatrix} R & P \\ 0_{1\times3} & 1 \end{pmatrix}$ alors $T^{-1} = \begin{pmatrix} R^T & -R^TP \\ 0_{1\times3} & 1 \end{pmatrix}$

2) Composition des transformations :

$$\begin{tikzcd} \mathcal{R} \arrow[r, "T"] \arrow[rr, bend right] & \mathcal{R}' \arrow[r, "T'"] & \mathcal{R}'' \end{tikzcd}$$

$T'' = TT'$ dans l'ordre ! $(TT' \neq T'T)$

08/09/2022

Modélisation des bras manipulateurs

I_ Problématique

Faire un lien entre l'espace opérationnel et l'espace des configuration. Cela fait appel aux modèles :

- Modèle géométrique $\begin{tikzcd} q \arrow[r, bend left, "MGD"] & x \arrow[l, bend left, "MGI"] \end{tikzcd}$

- Modèle cinématique $\begin{tikzcd} \dot{q} \arrow[r, bend left, "MCD"] & \dot{x} \arrow[l, bend left, "MCI"] \end{tikzcd}$

seront considérés ici. (appliqués aux tâches à vitesse normale et ne nécessitant pas de précisions fines).

Dans ce cours : 1) Survol de ces modèle
2) Méthode de calcul

II. Modèle Géométrique (MG) (fait intervenir la position et pas le temps par ce modèle)
↳ pas de mouvement

II.1. Modèle Géométrique Direct (MGD)

On connait q et on cherche à trouver $x = \begin{pmatrix} x_p \\ x_R \end{pmatrix}$ en fonction de $q = \begin{pmatrix} q_1 \\ q_n \end{pmatrix}$

On travaille en 2 étapes :

① On calcule T_{0n} en fonction de q

② De T_{0n}, on déduit $\overrightarrow{O_0O_{n+1}}$ dans R_0 puis on fait un choix de coordonnées opérationnelles que l'on calcule.

cf. outils vus dans les chap. précédents