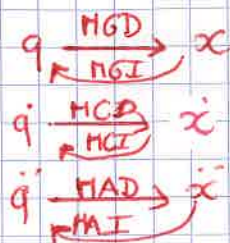


lien entre ces deux espace :

MGD = Modèle Géométrique Direct
MGI = Modèle Géométrique Indirect



Modèles géométriques (MG)

Modèles cinématiques (MC)

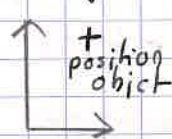
Modèles d'accélération (MA)

Remarque: Il existe un modèle faisant intervenir les couples et forces (un plus tard dans ce cours).

Exemple: Problème de Pick and Place diapo 18

↳ on retrouve la boucle « Perception, Décision, Action »

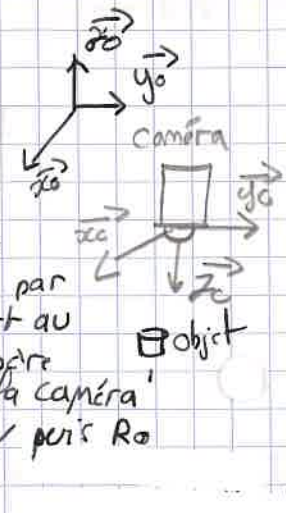
Image 2D



Nécessite de repérer l'objet dans l'environnement 3D dans le R_0

on utilise de la stéréo, des modèles de l'objet,

Donne une position par rapport au repère de la caméra puis R_0



Décision, Action

cf diapo 19

Au final, cela fait appel à 3 compétences vues dans ce cours :

- 1/ Savoir représenter la situation et donc définir X_{but} .
- 2/ Savoir gérer les changements de repères
- 3/ Savoir construire les modèles.

Outils Fondamentaux pour la robotique

1 Septembre 2022

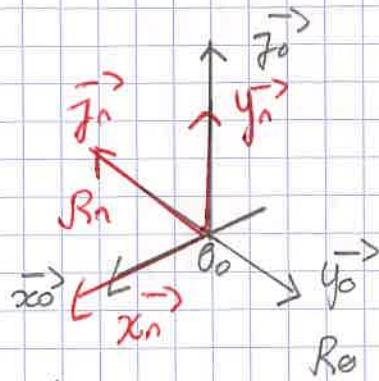
I. Représentation de la situation de l'OT (diapo 3)

Rappel: la configuration désigne la position de la structure mécanique représentée par le vecteur $q = \begin{bmatrix} q_1 \\ \vdots \\ q_n \end{bmatrix}$

la situation de l'organe terminal (OT) donne à la fois la position de l'OT et l'orientation de l'OT. Ces deux informations sont mises dans le vecteur $x = \begin{bmatrix} x_p \\ x_R \end{bmatrix}$.
Toutes deux sont données par rapport à R_0 (donnée constructeur).

Focus sur les représentations à 3 angles (diapo 8)

Retour à l'exemple:



$$R_{0n} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Par les angles de Bryant: $\Gamma_{13} = 0 \Rightarrow$ Hors cas de singularité

$$\lambda = \arctan 2(-\Gamma_{23}, \Gamma_{33}) = \arctan 2(-1, 0) = +\frac{\pi}{2}$$

quel est l'angle
tel que $\sin(\lambda) = 1$
et $\cos(\lambda) = 0$?

$$\mu = \arcsin(\Gamma_{13}) = \arcsin(0) = 0$$

$$\nu = \arctan 2(-\Gamma_{12}, \Gamma_{11}) = \arctan(0, 1) = 0$$

Vérification: on a bien effectué qu'une rotation autour de Ox_0 de $\frac{\pi}{2}$

Focus sur les représentations à 4 paramètres (diapo 14)

Le problème est ici complètement différent. On cherche à définir la rotation effectuée par son axe et son angle.

\hookrightarrow angle de rotation θ

droite définie
par son vecteur
directeur \vec{u}
unitaire

N.B: On donne les composantes de \vec{u} dans R_0 sous la forme $\vec{u}_{(0)} = \begin{pmatrix} u_x \\ u_y \\ u_z \end{pmatrix}$

Par conséquent, les coordonnées opérationnelles d'orientation

$$\alpha_{CR} = \begin{bmatrix} \theta \\ u_x \\ u_y \\ u_z \end{bmatrix} \quad \begin{matrix} \updownarrow \\ 4 \text{ paramètres} \end{matrix}$$

Remarque: Nous avons plus de 3 paramètres, nous évitons les problèmes de singularité.

Position de l'organe terminal nous est donnée par un point de référence de l'organe terminal noté O_{n+1}/R_0 par rapport à R_0 .

Orientation de l'organe terminal: nous est donnée par un repère R_n lié à l'OT par rapport à R_0 . ⚠ L'origine du repère n'est pas forcément O_{n+1} car on peut être amené à changer l'outil \Rightarrow cela modifie la position de O_{n+1} .

Tout cela définit la situation de l'OT.

Problématique: Quelle représentation mathématique?

I. 1. Représentation de la position de l'OT: (diapo 4)

Problématique: Quels paramètres utiliser pour représenter la position de O_{n+1}/R_0 ?

1^{er} choix: les coordonnées cartésiennes $x_p = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \underbrace{\vec{O_0 O_{n+1}(0)}}_{\text{vecteur } \vec{O_0} \text{ vers } O_{n+1} \text{ dans } R_0}$
coordonnées opérationnelles de position.

Remarque: Il est intéressant d'utiliser les autres coordonnées pour des tâches spécifiques (insertion) ou le type de structure (robot sphérique, etc.)

2^{ème} choix: Coordonnées cylindriques: (diapo 5)

Elles se construisent à partir des coordonnées cartésiennes.

Par lecture graphique on déduit $\begin{cases} x = p \cos(\theta) & (1) \\ y = p \sin(\theta) & (2) \\ z = z \end{cases} \Leftrightarrow$

$$\begin{cases} x^2 = p^2 \cos^2(\theta) & (1) \\ y^2 = p^2 \sin^2(\theta) & (2) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (1) + (2) & p^2 = x^2 + y^2 \end{cases}$$

on ne conserve que les solutions positives $\Rightarrow p = \sqrt{x^2 + y^2}$

et $\theta = \arctan\left(\frac{y}{x}\right) \in \left]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right[$.

Remarque $\arctan z$ renvoie dans le cadran $\left]-\pi; \pi\right[$

$$\theta = \arctan z(y, x) \in]-\pi; \pi[$$

⚠ si $x=y=0$ est une singularité de représentation car O_{n+2} appartient à l'axe Oz_0 mais il y a une infinité de possibilité de θ et $\rho=0 \Rightarrow$ on ne peut pas définir la position de manière unique. On tombe donc le même cas avec les coordonnées sphériques.



A FAIRE: Retrouver la démonstration pour les coordonnées sphériques.

I.2. Représentation de l'orientation de l'organe terminal (diapo 6)

Problématique: Quels paramètres utiliser pour représenter l'orientation de R_n par rapport à R_0 ? En d'autres termes, comment définir x_R ?

Remarque: Il faut au moins 3 paramètres (1 rotation autour de chaque axe) pour définir l'orientation. Le nombre de paramètres est variable.

I.2.2. Une première paramétrisation: (diapo 7)

Les cosinus directeurs complets: $x_R = \begin{pmatrix} x_{n(0)}^{\rightarrow} \\ y_{n(0)}^{\rightarrow} \\ z_{n(0)}^{\rightarrow} \end{pmatrix} \begin{matrix} \updownarrow 3 \\ \updownarrow 3 \\ \updownarrow 3 \end{matrix}$ les composantes de chaque vecteur dans R_0 soit au total 9 paramètres.

Les cosinus directeurs partiels on prend 2 des 3 vecteurs de la base directe et on déduit le dernier par produit vectoriel. En général, on choisit

$$x_R = \begin{pmatrix} x_{n(0)}^{\rightarrow} \\ z_{n(0)}^{\rightarrow} \end{pmatrix} \begin{matrix} \updownarrow 3 \\ \updownarrow 3 \end{matrix} \text{ soit 6 paramètres.}$$

Au final $y_{n(0)}^{\rightarrow} = z_{n(0)}^{\rightarrow} \wedge x_{n(0)}^{\rightarrow}$

Remarque: $x_{n(0)}^{\rightarrow}$, $y_{n(0)}^{\rightarrow}$ et $z_{n(0)}^{\rightarrow}$ permettent de définir la matrice de rotation

$$\text{notée } R_{0n} = \begin{bmatrix} x_{n(0)}^{\rightarrow} & y_{n(0)}^{\rightarrow} & z_{n(0)}^{\rightarrow} \end{bmatrix}_{3 \times 3}$$

Exemple:

Cas des quaternions :

↳ quaternion unitaires : $x_R = \begin{bmatrix} \eta \\ \epsilon_x \\ \epsilon_y \\ \epsilon_z \end{bmatrix}$ } → lié à l'axe de rotation θ

Exemple :

$$R_{0n} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Composantes de $\vec{\epsilon}_{(0)}$ } lié à l'axe de rotation \vec{u}

1^{er} cas :

Considérons $x_R = \begin{bmatrix} \theta \\ \mu_x \\ \mu_y \\ \mu_z \end{bmatrix}$

$$\theta = \arccos\left(\frac{1+0+0-1}{2}\right) = \arccos(0) = \frac{\pi}{2}$$

$$\vec{u} = \frac{1}{2 \sin(\theta)} \begin{bmatrix} 1 - (-1) \\ 0 - 0 \\ 0 - 0 \end{bmatrix} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \vec{x}_{0(n)}$$

Vérification : On a bien tourné d'un angle de $\frac{\pi}{2}$ autour de \vec{x}_0

2^{ème} cas : Quaternion tel que $x_R = \begin{bmatrix} \eta \\ \epsilon_x \\ \epsilon_y \\ \epsilon_z \end{bmatrix}$

A partir de la matrice R_{0n} , on obtient $\eta = \frac{1}{2} \sqrt{1+0+0+1} = \frac{\sqrt{2}}{2}$
Or on sait que $\eta = \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}$ ce qui correspond à $\frac{\theta}{2} = \frac{\pi}{4} \Leftrightarrow \theta = \frac{\pi}{2}$

⇒ La vérification est cohérente.

A présent, $\vec{\epsilon}_{(0)} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} \sqrt{1-0-0+1} \\ \frac{1}{2} \sqrt{-1+0-0+1} \\ \frac{1}{2} \sqrt{-1-0+0+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$

Vérification : $\vec{\epsilon}_{(0)} = \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) \vec{u}_0 = \frac{\sqrt{2}}{2} \vec{u}_0$

Or $\vec{\epsilon}_{(0)} = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \frac{\sqrt{2}}{2} \begin{bmatrix} \mu_x \\ \mu_y \\ \mu_z \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} \mu_x = 1 \\ \mu_y = 0 \\ \mu_z = 0 \end{cases} \text{ d'où } \vec{u}_0 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$

Ce qui est cohérent avec le résultat.

Diapos 17 et 18 : passage de R_{on} vers x_R

Diapos 19 et 20 : passage de x_R à R_{on}