UNIVERSITÉ PAUL SABATIER **F.S.I.**

EXAMEN DE ROBOTIQUE MOBILE ET NAVIGATION (SLAM)
M2 AURO & IAFA

1° session – Mardi 06 Décembre 2022 – Durée 30mn

Tous documents (Cours,TD,TP...) autorisés – Tablettes et objets communicants interdits

MERCI DE RÉDIGER CETTE PARTIE SUR UNE COPIE SÉPARÉE

$\mathcal{N}(\bar{x}, C)$ désigne la loi Gaussienne multidimensionnelle d'espérance $\bar{x}$ et de matrice de covariance C. Si $y_0, \ldots, y_k$ désigne un ensemble de variables aléatoires indexées temporellement par les instants $0, \ldots, k$, alors la séquence de ces variables aléatoires est indifféremment désignée par $y_{0:k}$.

Le plan est muni du repère de référence $(\mathsf{R}_0, \vec{x}, \vec{y})$, avec $\vec{x}$ le vecteur des abscisses, orienté vers l'Est, et $\vec{y}$ le vecteur des ordonnées, orienté vers le Nord. Un robot ponctuel (sans orientation) se déplace dans ce plan. À l'instant initial $k = 0$, il est situé en le point R_0, c'est à dire que le vecteur $r_0 \in \mathbb{R}^2$ de ses coordonnées initiales est défini par

$$r_0 = \left(\begin{smallmatrix} 0 \\ 0 \end{smallmatrix}\right). \tag{1}$$

En tout instant ultérieur $k > 0$, ce robot se situe en le point R_k dont les coordonnées dans le repère de référence constituent le vecteur $r_k \in \mathbb{R}^2$. Le lien qui unit les positions (aléatoires) R_{k-1} et R_k du robot entre deux instants successifs $k-1$ et k est exprimé par la relation

$$r_k = r_{k-1} + u_{k-1} + w_{k-1}, \tag{2}$$

où

- $u_{k-1} \in \mathbb{R}^2$ est le vecteur de commande, déterministe, appliquée au robot ; celui-ci appartient à un ensemble de 5 valeurs possibles,

$$u_{k-1} \in \{c_{0,0}, c_{0,1}, c_{1,0}, c_{0,-1}, c_{-1,0}\}, \text{ avec } c_{i,j} = \left(\begin{smallmatrix} i \\ j \end{smallmatrix}\right); \tag{3}$$

- le processus aléatoire de bruit de dynamique $w_{0:k} = w_0, w_1, \ldots, w_k$ est blanc ($w_0, w_1, \ldots, w_k$ sont mutuellement indépendants) tel que

$$w_k \sim \mathcal{N}\Big(\left(\begin{smallmatrix} 0 \\ 0 \end{smallmatrix}\right), \left(\begin{smallmatrix} 10^{-4} & 0 \\ 0 & 4.10^{-4} \end{smallmatrix}\right)\Big). \tag{4}$$

---

1. Expliquer en langage naturel (simple) la nature des déplacements effectués par le robot selon (2)-(3).
2. Donner : un ordre de grandeur numérique des valeurs possibles du bruit de dynamique w_{k-1} qui se superpose à la commande u_{k-1} ; une caractérisation qualitative de l'évolution de l'incertitude qui affecte la position du robot lorsque le temps croît.

M amers ponctuels statiques indicés par $l = 1, \ldots, M$ (M connu) sont situés en les points $\mathsf{M}_1, \ldots, \mathsf{M}_M$ de coordonnées inconnues $m_1, \ldots, m_M$ dans le repère de référence. On dispose toutefois d'une connaissance a priori à leur sujet, s'exprimant sous la forme

$$\forall l \in \{1, \ldots, M\}, m_l \sim \mathcal{N}\Big(\bar{m}_l, M_l\Big), \text{ avec } \bar{m}_l, M_l \text{ donnés.} \tag{5}$$

En chaque instant k, tous les amers sont visibles par le robot et sont parfaitement distinguables (étiquetables). Le robot perçoit alors le vecteur z_k constitué des sous-vecteurs $z_{l,k} \in \mathbb{R}^2$ définis par

$$\forall l \in \{1, \ldots, M\}, z_{l,k} = h(r_k, m_l) + v_{l,k}, \tag{6}$$

où chaque vecteur des bruits de mesure $v_{l,k}$ est indépendant des autres bruits $v_{l',k}$, $l' \neq l$, indépendant des bruits de dynamiques, et satisfait

$$v_k \sim \mathcal{N}\Big(\big(\begin{smallmatrix}0\\0\end{smallmatrix}\big), R_k\Big). \tag{7}$$

---

3. Déterminer l'expression de la fonction $h(.,.)$ de telle sorte que les deux composantes de $z_{l,k}$ correspondent respectivement à une version bruitée de : la distance $\|\overrightarrow{\mathsf{R}_k\mathsf{M}_l}\|$; l'angle $(\widehat{\vec{\imath}, \overrightarrow{\mathsf{R}_k\mathsf{M}_l}})$.

La formulation mathématique du problème de localisation et cartographie simultanées (SLAM) peut consister en le calcul récursif de la densité de probabilité (ou « loi ») jointe postérieure $p(r_{0:k}, m_1, \ldots, m_M | z_{0:k})$ de la séquence des positions $r_0, \ldots, r_k$ cachées du robot et des positions $m_1, \ldots, m_M$ cachées des amers conditionnellement à la séquence des observations prélevées $z_0, \ldots, z_k$.

---

4. Quelle signification peut-on donner à cette densité de probabilité ?
5. Il existe des méthodes de SLAM à base d'optimisation quadratique non linéaire creuse permettant de calculer le n-uplet $(r^\star_{0:k}, m^\star_1, \ldots, m^\star_M)$ pour lequel de cette loi atteint sa valeur maximale. Quelle signification peut-on donner à l'optimum ainsi obtenu ?

On se place dans le cas, réaliste, où seul un sous-ensemble (connu) des amers est visible à chaque instant k.

---

6. En quoi le fait que le robot, lors de son évolution, perçoive à nouveau des amers perçus par le passé est-il intéressant ? Quel nom donne-t-on à cette propriété ?
