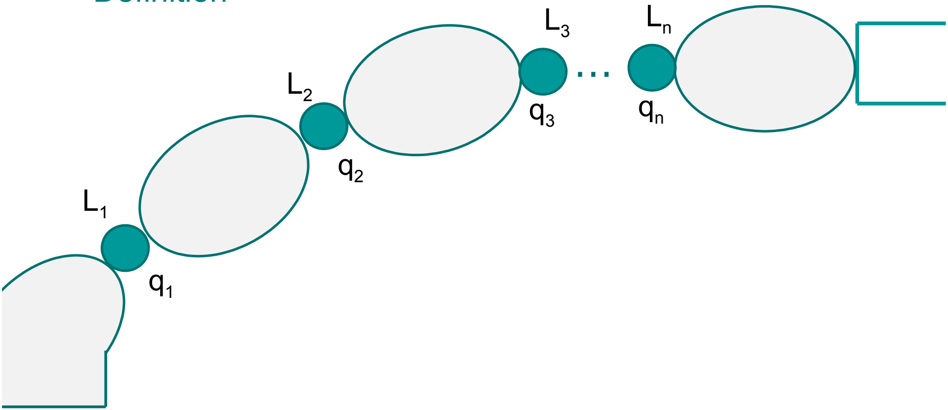
OUTILS FONDAMENTAUX POUR LA ROBOTIQUE

Viviane CADENAT.
Enseignant-chercheur à l'UPS.
LAAS-CNRS, équipe Robotique, Action, Perception.

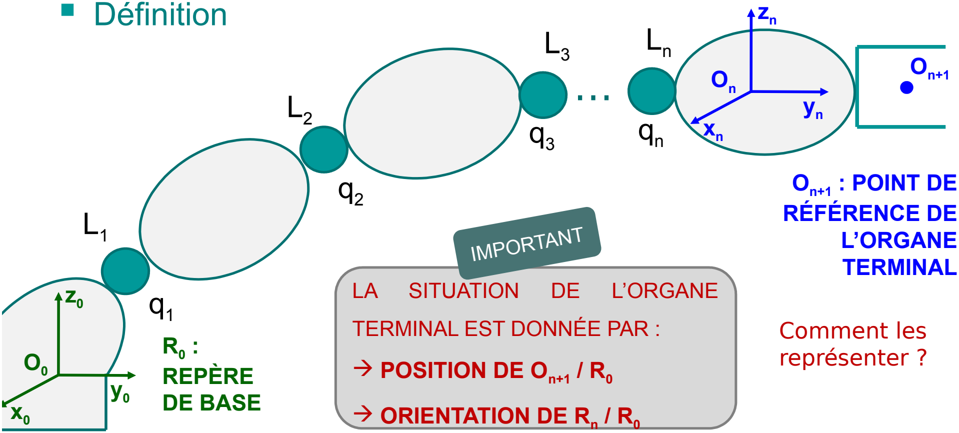
Représentation de la situation de l'organe terminal

- Définition



Représentation de la situation de l’organe terminal

- Définition



IMPORTANT

LA SITUATION DE L’ORGANE TERMINAL EST DONNÉE PAR :

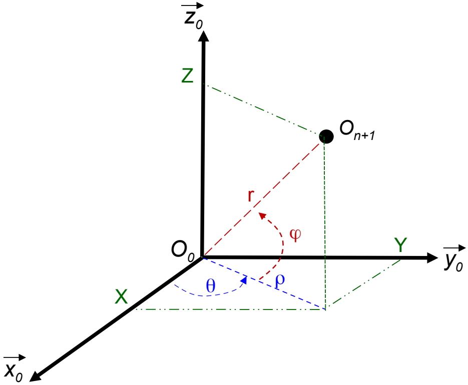
→ **POSITION DE O_{n+1} / R_0**

→ **ORIENTATION DE R_n / R_0**

Comment les représenter ?

Représentation de la situation de l'organe terminal

- Représentation de la position



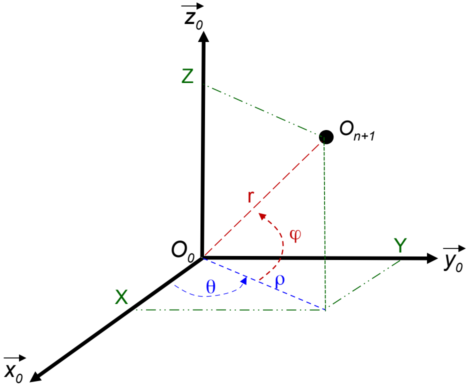
IMPORTANT

- Coordonnées cartésiennes
  $\rightarrow x_p = (X\ Y\ Z)^T$
- Coordonnées cylindriques
  $\rightarrow x_p = (\rho\ \ \theta\ Z)^T$
- Coordonnées sphériques
  $\rightarrow x_p = (r\ \theta\ \varphi)^T$

ON DÉDUIT LES COORDONNÉES CYLINDRIQUES ET SPHÉRIQUES DES COORDONNÉES CARTÉSIENNES.

Représentation de la situation de l'organe terminal

- Représentation de la position



Coord. cylindriques

$$\rho = \sqrt{X^2+Y^2}$$
$$\theta = \arctan 2(Y, X)$$

Singularité si X = Y= 0

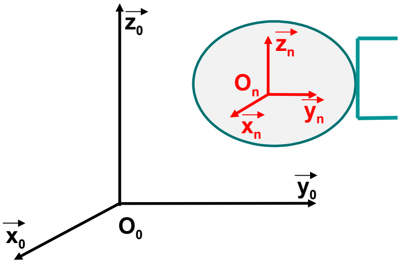
Coord. sphériques

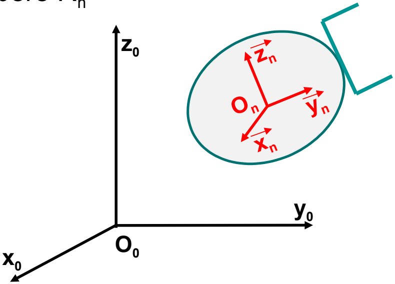
$$r = \sqrt{X^2+Y^2+Z^2}$$
$$\theta = \arctan 2(Y, X)$$
$$\varphi = \arcsin\left(\frac{Z}{r}\right)$$

Singularité si X = Y = Z = 0
ou si X = Y = 0

Représentation de la situation de l'organe terminal

- Représentation de l'orientation
  - Attacher à l'organe terminal un repère R_n





⇒ L'orientation est donnée par les vecteurs de R_n / Repère fixe (ici R_0)

Représentation de la situation de l'organe terminal

- ## Représentation de l'orientation
  - Première paramétrisation :
    - Composantes de $\vec{x}_n$, $\vec{y}_n$, $\vec{z}_n$ dans R_0

    → Matrice de rotation R_{0n}

    → Cosinus directeurs complets / partiels → 6 ou 9 paramètres

  - Autres solutions → **ne sont calculables qu'à partir de R_{0n}**
    - **Systèmes de trois angles → 3 paramètres**

      → Angles de Bryant, Angles d'Euler, ...

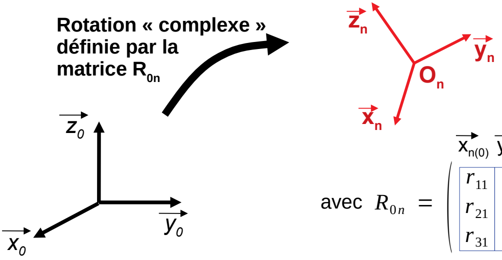
      → Représentation minimale → Problème de singularités
    - **1 axe de rotation et 1 angle → 4 paramètres**

      → Quaternions

      → Représentation non minimale → Pas de singularité

Représentation de la situation de l'organe terminal

- ## Représentation de l'orientation
  - **Systèmes de trois angles**



$$\text{avec } R_{0n} = \begin{array}{ccc} \vec{x}_{n(0)} & \vec{y}_{n(0)} & \vec{z}_{n(0)} \\ \multicolumn{3}{c}{\begin{pmatrix} r_{11} & r_{12} & r_{13} \\ r_{21} & r_{22} & r_{23} \\ r_{31} & r_{32} & r_{33} \end{pmatrix}} \end{array}$$

<u>connue</u>

<u>Question :</u> Peut-on décomposer cette rotation « complexe » en trois rotations « simples » ?

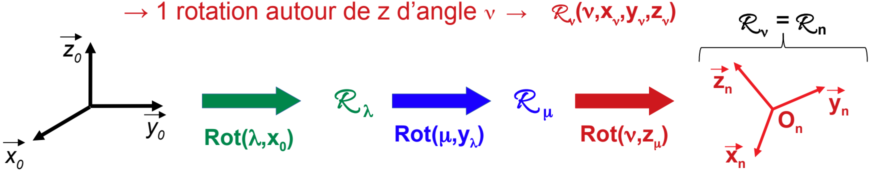
Représentation de la situation de l'organe terminal

- ## Représentation de l'orientation
  - **Systèmes de trois angles**
    - **Idée :** Décomposer la rotation « complexe » effectuée par l'organe terminal en trois rotations « simples »
    - **Angles de Bryant (ou angles de Cardan)** $\rightarrow X_R = (\lambda,\ \mu,\ \nu)^T$

      $\rightarrow$ 1 rotation autour de x d'angle λ $\rightarrow$ $\mathcal{R}_\lambda(\lambda, x_\lambda, y_\lambda, z_\lambda)$

      $\rightarrow$ 1 rotation autour de y d'angle μ $\rightarrow$ $\mathcal{R}_\mu(\mu, x_\mu, y_\mu, z_\mu)$

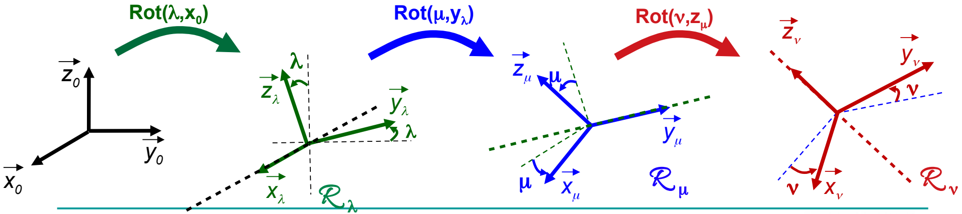
      $\rightarrow$ 1 rotation autour de z d'angle ν $\rightarrow$ $\mathcal{R}_\nu(\nu, x_\nu, y_\nu, z_\nu)$



Représentation de la situation de l'organe terminal

- Représentation de l'orientation
  - **Systèmes de trois angles**
    - Idée : Décomposer la rotation « complexe » effectuée par l'organe terminal en trois rotations « simples »
    - **Angles de Bryant (ou angles de Cardan)** → $X_R = (\lambda, \mu, \nu)^T$

      → 1 rotation autour de x & 1 rotation autour de y & 1 rotation autour de z



Représentation de la situation de l'organe terminal

Représentation de l'orientation

Systèmes de trois angles

- **Idée :** Décomposer la rotation « complexe » effectuée par l'organe terminal en trois rotations « simples »
- **Angles de Bryant (ou angles de Cardan) → $X_R = (\lambda, \mu, \nu)^T$**

→ On montre que x_R peut être calculé à partir de R_{0n} :

$$
\begin{aligned}
&Si \quad r_{13} \neq \pm 1 \quad alors \\
&\lambda = Atan2(-r_{23}, r_{33}) \\
&\mu = \arcsin(r_{13}) \\
&\nu = Atan2(-r_{12}, r_{11})
\end{aligned}
$$

Hors singularité

$$
\begin{aligned}
&Si \quad r_{13} = \pm 1 \quad alors \\
&\mu = \pm \frac{\pi}{2} \\
&r_{13}\lambda + \nu = Atan2(-r_{21}, r_{22})
\end{aligned}
$$

Singularité : λ et ν ne peuvent pas être calculés indépendamment → choix arbitraire

Représentation de la situation de l'organe terminal

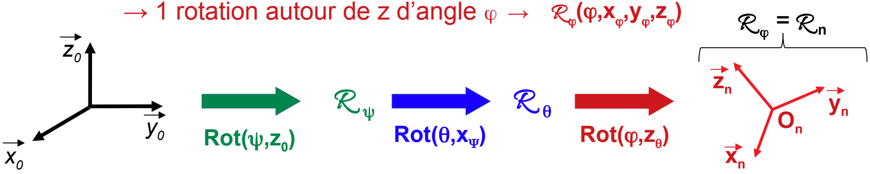
Représentation de l'orientation

- **Systèmes de trois angles**
  - **Idée :** Décomposer la rotation « complexe » effectuée par l'organe terminal en trois rotations « simples »
  - **Angles d'Euler** $\rightarrow X_R = (\psi,\ \theta,\ \varphi)^T$

    $\rightarrow$ 1 rotation autour de z d'angle ψ $\rightarrow$ $\mathcal{R}_\psi(\psi, x_\psi, y_\psi, z_\psi)$

    $\rightarrow$ 1 rotation autour de x d'angle θ $\rightarrow$ $\mathcal{R}_\theta(\theta, x_\theta, y_\theta, z_\theta)$

    $\rightarrow$ 1 rotation autour de z d'angle φ $\rightarrow$ $\mathcal{R}_\varphi(\varphi, x_\varphi, y_\varphi, z_\varphi)$



Représentation de la situation de l'organe terminal

Représentation de l'orientation

Systèmes de trois angles

- **Idée :** Décomposer la rotation « complexe » effectuée par l'organe terminal en trois rotations « simples »
- **Angles d'Euler** → $X_R = (\psi, \theta, \varphi)^T$

  → On montre que x_R peut être calculé à partir de R_{0n}

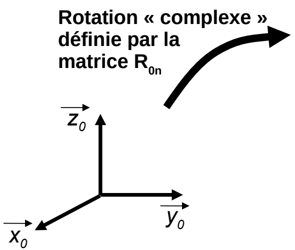
$$
\begin{aligned}
Si \quad r_{33} \quad &\neq \quad \pm 1 \quad alors \\
\psi \; &= \; Atan2(r_{13}, -r_{23}) \\
\theta \; &= \; \arccos(r_{33}) \\
\varphi \; &= \; Atan2(r_{31}, r_{32})
\end{aligned}
$$

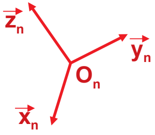
$$
\begin{aligned}
Si \quad r_{33} \; &= \; \pm 1 \quad alors \\
\theta \; &= \; \pm \frac{\pi}{2} \\
r_{33}\varphi + \psi \; &= \; Atan2(r_{21}, r_{11})
\end{aligned}
$$

Singularité : φ et ψ ne peuvent pas être calculés indépendamment → choix arbitraire

Représentation de la situation de l’organe terminal

- Représentation de l’orientation
  - **Rotation autour d’un axe et quaternions**





avec $R_{0n} = \begin{pmatrix} r_{11} & r_{12} & r_{13} \\ r_{21} & r_{22} & r_{23} \\ r_{31} & r_{32} & r_{33} \end{pmatrix}$ <u>**connue**</u>

<u>Question :</u> Autour de quel axe a-t-on tourné et avec quel angle ?

Représentation de la situation de l'organe terminal

- Représentation de l'orientation
  - **Rotation autour d'un axe et quaternions**
    - Idée : Définir la rotation « complexe » effectuée par l'organe terminal en déterminant son axe et son angle à partir de R_{0n}
    - 4 paramètres sont nécessaires :
      - Axe de rotation → u : vecteur directeur **unitaire** → $u_{(0)} = (u_x, u_y, u_z)$
      - Angle de rotation autour de cet axe → θ

        → $\mathbf{X_R = (\theta, u_x, u_y, u_z)^T}$
    - On peut déduire ces 4 paramètres de la matrice de rotation :

$$\theta = \arccos\left(\frac{r_{11} + r_{22} + r_{33} - 1}{2}\right) \qquad u = \frac{1}{2\sin(\theta)} \begin{pmatrix} r_{32} - r_{23} \\ r_{13} - r_{31} \\ r_{21} - r_{12} \end{pmatrix} \quad si \quad \sin(\theta) \neq 0$$

Représentation de la situation de l'organe terminal

Représentation de l'orientation

Rotation autour d'un axe et quaternions

- <u>Idée :</u> Définir la rotation « complexe » effectuée par l'organe terminal en déterminant son axe et son angle à partir de R_{0n}
- Quaternion unitaire → $X_R = (\eta,\ \varepsilon_x,\ \varepsilon_y,\ \varepsilon_z)^T \mid \eta^2 + \varepsilon^2 = 1$
  - Aussi appelé paramètres d'Olinde – Rodrigues ou paramètres d'Euler → Très utilisé en robotique, en info. graphique, etc.
  - **Par définition : $\eta = \cos(\theta/2)$ et $\varepsilon = \sin(\theta/2)\, u_{(0)}$ avec $\varepsilon = (\varepsilon_x, \varepsilon_y, \varepsilon_z)^T$**
- On montre que :

$$\eta = \frac{1}{2}\sqrt{r_{11} + r_{22} + r_{33} + 1}$$

$$\epsilon_x = \frac{1}{2}\sqrt{r_{11} - r_{22} - r_{33} + 1}$$

$$\epsilon_y = \frac{1}{2}\sqrt{-r_{11} + r_{22} - r_{33} + 1}$$

$$\epsilon_z = \frac{1}{2}\sqrt{-r_{11} - r_{22} + r_{33} + 1}$$

Représentation de la situation de l'organe terminal

- Représentation de l'orientation : Bilan
  - **Si on connaît $R_{0n} = [r_{ij}]$ on peut calculer x_R**
    - **Représentations non minimales → Pas de singularité**
      - **Axe + angle de rotation → $X_R = (\theta,\ u_x, u_y, u_z)^T$**

$$\theta = \arccos\left(\frac{r_{11} + r_{22} + r_{33} - 1}{2}\right) \qquad u = \frac{1}{2\sin(\theta)}\begin{pmatrix} r_{32} - r_{23} \\ r_{13} - r_{31} \\ r_{21} - r_{12} \end{pmatrix} \quad si \quad \sin(\theta) \neq 0$$

      - **Quaternions → $X_R = (\eta,\ \varepsilon_x, \varepsilon_y, \varepsilon_z)^T \mid \eta^2 + \varepsilon^2 = 1$**

$$\eta = \frac{1}{2}\sqrt{r_{11} + r_{22} + r_{33} + 1} \qquad \epsilon_x = \frac{1}{2}\sqrt{r_{11} - r_{22} - r_{33} + 1}$$

$$\epsilon_y = \frac{1}{2}\sqrt{-r_{11} + r_{22} - r_{33} + 1} \qquad \epsilon_z = \frac{1}{2}\sqrt{-r_{11} - r_{22} + r_{33} + 1}$$

Représentation de la situation de l'organe terminal

- Représentation de l'orientation : Bilan
  - **Si on connaît R_{0n} = $[r_{ij}]$ on peut calculer x_R**
    - **Représentations minimales → Attention aux singularités !**

	Angles de Bryant → $X_R = (\lambda, \mu, \nu)^T$	**Angles d'Euler** → $X_R = (\psi, \theta, \varphi)^T$
Hors singularité	$\begin{aligned} &Si \quad r_{13} \neq \pm 1 \quad alors \\ &\lambda = Atan2(-r_{23}, r_{33}) \\ &\mu = \arcsin(r_{13}) \\ &\nu = Atan2(-r_{12}, r_{11}) \end{aligned}$	$\begin{aligned} &Si \quad r_{33} \neq \pm 1 \quad alors \\ &\psi = Atan2(r_{13}, -r_{23}) \\ &\theta = \arccos(r_{33}) \\ &\varphi = Atan2(r_{31}, r_{32}) \end{aligned}$
En singularité	$\begin{aligned} &Si \quad r_{13} = \pm 1 \quad alors \\ &\mu = \pm \frac{\pi}{2} \\ &r_{13}\lambda + \nu = Atan2(-r_{21}, r_{22}) \end{aligned}$	$\begin{aligned} &Si \quad r_{33} = \pm 1 \quad alors \\ &\theta = \pm \frac{\pi}{2} \\ &r_{33}\varphi + \psi = Atan2(r_{21}, r_{11}) \end{aligned}$

Représentation de la situation de l'organe terminal

- Représentation de l'orientation : Bilan
  - **Si l'on connaît x_R , on peut aussi calculer R_{0n}**
    - **Angles de Bryant** $\rightarrow x_R = (\lambda, \mu, \nu)^T$

$$R_{0n}(\lambda,\mu,\nu) = \begin{pmatrix} cos\mu cos\nu & -cos\mu sin\nu & sin\mu \\ sin\lambda sin\mu cos\nu + cos\lambda sin\nu & -sin\lambda sin\mu sin\nu + cos\lambda cos\nu & -sin\lambda cos\mu \\ -cos\lambda sin\mu cos\nu + sin\lambda sin\nu & cos\lambda sin\mu sin\nu + sin\lambda cos\nu & cos\lambda cos\mu \end{pmatrix}$$

    - **Angles d'Euler** $\rightarrow x_R = (\psi, \theta, \varphi)^T$

$$R_{0n}(\psi,\theta,\varphi) = \begin{pmatrix} \cos\psi\cos\varphi - \sin\psi\cos\theta\sin\varphi & -\cos\psi\sin\varphi - \sin\psi\cos\theta\cos\varphi & \sin\psi\sin\theta \\ \sin\psi\cos\varphi + \cos\psi\cos\theta\sin\varphi & -\sin\psi\sin\varphi + \cos\psi\cos\theta\cos\varphi & -\cos\psi\sin\theta \\ sin\theta sin\varphi & \sin\theta\cos\varphi & \cos\theta \end{pmatrix}$$

Représentation de la situation de l'organe terminal

- Représentation de l'orientation : Bilan
  - Si l'on connaît x_R, on peut aussi calculer R_{0n}
    - **Axe $r = (r_x, r_y, r_z)^T$ et angle de rotation θ**

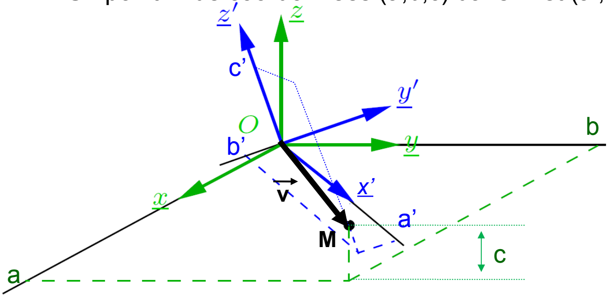
$$R_{0n}(\theta,r) = \begin{pmatrix} r_x^2(1-c\theta)+c\theta & r_x.r_y.(1-c\theta)-r_z.s\theta & r_x.r_z.(1-c\theta)+r_y.s\theta \\ r_x.r_y.(1-c\theta)+r_z.s\theta & r_y^2(1-c\theta)+c\theta & r_y.r_z.(1-c\theta)-r_x.s\theta \\ r_x.r_z.(1-c\theta)-r_y.s\theta & r_y.r_z.(1-c\theta)+r_x.s\theta & r_z^2(1-c\theta)+c\theta \end{pmatrix}$$

    - **Quaternion unitaire**

$$R_{0n}(\eta,\varepsilon) = \begin{pmatrix} 2.(\eta^2+\epsilon_x^2)-1 & 2.(\epsilon_x\epsilon_y-\eta.\epsilon_z) & 2.(\epsilon_x\epsilon_z+\eta.\epsilon_y) \\ 2.(\epsilon_x\epsilon_y+\eta.\epsilon_z) & 2.(\eta^2+\epsilon_y^2)-1 & 2.(\epsilon_y\epsilon_z-\eta.\epsilon_x) \\ 2.(\epsilon_x\epsilon_z-\eta.\epsilon_y) & 2.(\epsilon_y\epsilon_z+\eta.\epsilon_x) & 2.(\eta^2+\epsilon_z^2)-1 \end{pmatrix}$$

Matrices de transformation

- Rotation seule → Changement de base
  - Deux repères orthonormés directs R*(O,$\underline{x}$,$\underline{y}$,$\underline{z}$)* et R′*(O,$\underline{x}'$,$\underline{y}'$,$\underline{z}'$)* (même origine)
  - Un point M de coordonnées (a,b,c) dans R et (a',b',c') dans R′ → $\vec{v} = \vec{OM}$



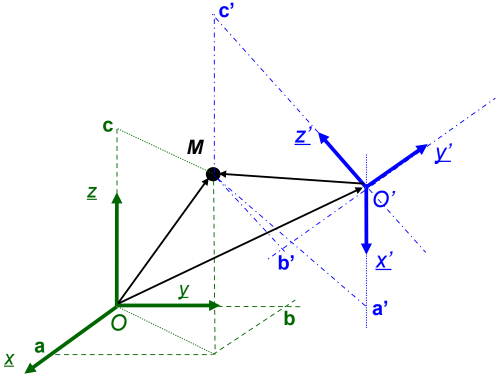
IMPORTANT

LA MATRICE DE ROTATION DONNE LA RELATION ENTRE $\vec{v}_{(R)}$ et $\vec{v}_{(R')}$

$$\vec{v}_{(R)} = R\,\vec{v}_{(R')}$$

Matrices de transformation

- Translation + rotation → Changement de repère



- Deux repères orthonormés directs R(*O,x,y,z*) et R'(*O',x',y',z'*) (origines différentes)
- Un point M de coordonnées (a,b,c) dans R et (a',b',c') dans R'

IMPORTANT

PRISE EN COMPTE DU CHANGEMENT DE POSITION ET D'ORIENTATION

$$\overrightarrow{OM}_{(R)} = \overrightarrow{OO'}_{(R)} + R\,\overrightarrow{O'M}_{(R')}$$

Matrices de transformation

- Matrice de passage homogène
  - Définition

$$T = \begin{array}{c} \begin{array}{cc} \quad\quad \mathbf{R} & \quad\quad \mathbf{P} = \overrightarrow{\mathbf{OO'}}_{(R)} \end{array} \\ \begin{pmatrix} r_{11} & r_{12} & r_{13} & X \\ r_{21} & r_{22} & r_{23} & Y \\ r_{31} & r_{32} & r_{33} & Z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \end{array}$$

IMPORTANT

Fournit une première information de situation de R' par rapport à R

  - Expression des *coordonnées homogènes* d'un point M

$$\underbrace{\begin{pmatrix} \overrightarrow{OM}_{(R)} \\ 1 \end{pmatrix}}_{\text{Coordonnées homogènes de M dans R}} = T \underbrace{\begin{pmatrix} \overrightarrow{O'M}_{(R')} \\ 1 \end{pmatrix}}_{\text{Coordonnées homogènes de M dans R'}}$$

Matrice de transformation

- Matrice de passage homogène
  - Définition

$$T = \begin{array}{c} \begin{array}{cc} \mathbf{R} & \mathbf{P} = \overrightarrow{\mathbf{OO'}}_{(R)} \end{array} \\ \begin{pmatrix} r_{11} & r_{12} & r_{13} & X \\ r_{21} & r_{22} & r_{23} & Y \\ r_{31} & r_{32} & r_{33} & Z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \end{array}$$

IMPORTANT

Fournit une première information de situation de R' par rapport à R

  - Unification des différents cas possibles :
    - Si rotation seule, P est nul et R définit la rotation effectuée
    - Si translation seule, R = Id et P non nul définit la translation effectuée
    - Si rotation et translation, R ≠ Id et P non nul