Autre solution :

Coordonnées de O7 dans R_0 — Coordonnées de O7 dans R_6

En coordonnées homogènes : $\begin{bmatrix} \overrightarrow{O_0O_7}(0) \\ 1 \end{bmatrix} = T_{06} \begin{bmatrix} \overrightarrow{O_6O_7}(6) \\ 1 \end{bmatrix}$

$$= \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & L \\ 1 & 0 & 0 & H \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} d_1 \\ 0 \\ d_2 \\ 1 \end{bmatrix} = \left.\begin{bmatrix} 0 \\ d_2 + L \\ d_1 + H \\ 1 \end{bmatrix}\right\}$$ Situation de l'organe terminal $x = \begin{pmatrix} x_p \\ x_R \end{pmatrix}$

cosinus directeurs partiel

avec $x_R = \begin{bmatrix} \overrightarrow{x_6}(0) \\ \overrightarrow{y_6}(0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$

et $x_p = \begin{bmatrix} 0 \\ d_2 + L \\ d_1 + L \end{bmatrix}$

TD2 - Réalisation d'une tâche de robotique industrielle

15/09/2022

Données : $\begin{cases} \text{coordonnées du point P dans } R_c \Rightarrow \overrightarrow{CP}(c) = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \\ \text{coordonnées du point } O_0 \text{ dans } R_c \Rightarrow \overrightarrow{CO_0}(c) = \begin{pmatrix} l_1 \\ -l_2 \\ -l_3 \end{pmatrix} \end{cases}$

1) Localiser la pièce dans R_0 : $\overrightarrow{O_0P}(0)$

Etape 1 : Ecrire la matrice de passage homogène T_{0c} entre R_0 et R_c

T_{0c} à pour forme $T_{0c} = \begin{bmatrix} R_{0c} & \overrightarrow{O_0C} \\ 0_{1\times3} & 1 \end{bmatrix}$

Remarque : Les deux repères mis en jeu sont fixes ⇒ T_{0c} est constante

$\overrightarrow{CP}(c) = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{CO_0}(c) = \begin{pmatrix} l_1 \\ -l_2 \\ -l_3 \end{pmatrix}$

$$T_{0c} = \begin{array}{c} \begin{matrix} \overrightarrow{x_c}(0) & \overrightarrow{y_c}(0) & \overrightarrow{z_c}(0) & \overrightarrow{O_0C}(0) \end{matrix} \\ \begin{bmatrix} \times & \times & \times & \times \\ \times & \times & \times & \times \\ \times & \times & \times & \times \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \end{array} = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 & l_2 \\ -1 & 0 & 0 & l_1 \\ 0 & 0 & 1 & l_3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

En effet, $\overrightarrow{O_0C}_{(0)} = -R_{0c}\,\overrightarrow{CO_0}_{(c)}$

$$= \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \ell_1 \\ -\ell_2 \\ -\ell_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \ell_2 \\ \ell_1 \\ \ell_3 \end{pmatrix}$$

Etape 2 : Calculer les coordonnées homogènes du point

$$\begin{bmatrix} \overrightarrow{O_0P}_{(0)} \\ 1 \end{bmatrix} = T_{0c} \begin{bmatrix} \overrightarrow{CP}_{(c)} \\ 1 \end{bmatrix}$$

⚠ Coordonnées homogène de P dans R_c noté $\overrightarrow{CP}_{(c)} \neq \overrightarrow{O_0P}_{(c)}$

$$= \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \ell_2 \\ -1 & 0 & 0 & \ell_1 \\ 0 & 0 & 1 & \ell_3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b+\ell_2 \\ -a+\ell_1 \\ c+\ell_3 \\ 1 \end{bmatrix}$$

2) Déterminer la configuration permettant d'aller saisir la pièce

Astuce : "Quelle est la configuration qui mène à une situation" => fait appel au MGI

Données : $\begin{cases} \text{coordonnées du point de saisie dans } R_0 \begin{pmatrix} a' \\ 0 \\ c' \end{pmatrix} \to \text{info de position} \\ \text{orientation de } R_p \text{ identique à celle de } R_0 \to \text{info d'orientation} \end{cases}$ } situation à atteindre

Etape 1 : Ecrire la forme de la matrice de passage homogène à atteindre T_{0p}^*

$$T_{0p}^* = \begin{bmatrix} \boxed{R_{0p}} & \boxed{\overrightarrow{O_0P}_{(0)}} \\ 0 \quad 0 \quad 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & a' \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & c' \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

↗ R_p et R_0 orientés identiquement

⇓

Ne pas mettre la matrice nulle !

Etape 2 : Ecrire le MGD pour avoir la matrice de passage homogène $T_{0E} = f(q_1, q_2, q_3)$

Astuce : Le calcul du MGI passe par le calcul du MGD au préalable !

On place des repères intermédiaires à chaque liaison (cf. diapo 2) et donc associer une matrice de passage homogène pour le passage d'un repère à l'autre consécutivement

Ainsi $T_{0E}(q_1,q_2,q_3) = T_{01}(q_1)\,T_{12}(q_2)\,T_{2E}(q_3)$

$$= \begin{bmatrix} \cos(q_1) & -\sin(q_1) & 0 & 0 \\ \sin(q_1) & \cos(q_1) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & h \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & q_2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\times \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \boxed{0} \\ 0 & 1 & 0 & \boxed{0} \\ 0 & 0 & 1 & \boxed{-q_3} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \rightarrow \overrightarrow{O_2E}_{(2)}$$

$$= \begin{bmatrix} \cos(q_1) & -\sin(q_1) & 0 & q_2\cos(q_1) \\ \sin(q_1) & \cos(q_1) & 0 & q_2\sin(q_1) \\ 0 & 0 & 1 & \delta - q_3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = T_{OE}(q)$$

<u>Etape 3</u> : Identification du MGD et du MGI pour atteindre la position

$T_{OE}(q) = T_{OP}^*$ <u>Astuce</u> : Ne noter que les équations qui donnent une information

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \cos(q_1) = 1 & (1) \\ \sin(q_1) = 0 & (2) \\ q_2\cos(q_1) = a' \\ q_2\sin(q_1) = 0 \\ \delta - q_3 = c' \end{cases}$$

<u>Remarque</u> : Le système est non linéaire en q_i

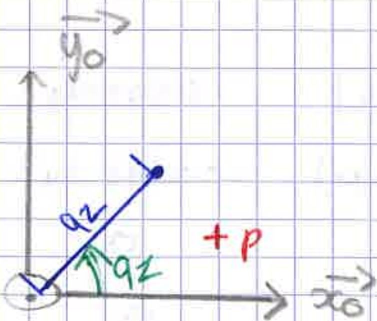
la solution existe $\Leftrightarrow$ q vérifie toutes les équations en même temps

(1) et $(2) \Rightarrow \underline{q_1 = 0}$ et $\begin{cases} q_2\cos(q_1) = a' & \Leftrightarrow & q_2 = a' \\ q_2\sin(q_1) = 0 & \Leftrightarrow & 0 = 0 \\ \delta - q_3 = c' & \Leftrightarrow & q_3 = \delta - c' \end{cases}$

3) <u>Changement du point de saisie</u>

<u>Etape 1</u> : Ecrire le changement sur la matrice but

$$T_{OP}^* = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & a' \\ 0 & 1 & 0 & b' \\ 0 & 0 & 1 & c' \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$



<u>Le MGD en revanche reste inchangé !</u>

<u>Etape 2</u> : Identification

$$\begin{matrix} \cos(q_1) = 1 \\ \sin(q_1) = 0 \end{matrix} \Rightarrow q_1 = 0$$

et $\begin{cases} q_2\cos(q_1) = a' & \Rightarrow q_2 = a' \\ q_2\sin(q_1) = b' & \Rightarrow b' = 0 \quad \text{or } b' \neq 0 \\ r - q_3 = c' & \Rightarrow q_3 = r - c' \end{cases}$

$\Rightarrow$ La saisie est impossible !

4. Déterminer la nouvelle configuration avec cette nouvelle structure :

La matrice but T_{op}^* est inchangée

Etape 1 : Calculer le nouveau MGD

composé d'une rotation + translation → on la calcule en 2 fois

$$T_{0E}(q) = T_{01}(q_1)\, T_{12}(q_2)\, T_{2E}(q_3, q_4)$$

$$= \begin{bmatrix} \cos(q_1) & -\sin(q_1) & 0 & 0 \\ \sin(q_1) & \cos(q_1) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & r \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & q_2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\times \begin{bmatrix} \cos(q_4) & -\sin(q_4) & 0 & 0 \\ \sin(q_4) & \cos(q_4) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -q_3 - r_2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \overbrace{\cos(q_1)\cos(q_4) - \sin(q_1)\sin(q_4)}^{\cos(q_1+q_4)} & -\cos(q_1)\sin(q_4) - \cos(q_4)\sin(q_1) & 0 & q_2\cos(q_1) \\ \underbrace{\cos(q_1)\sin(q_4) + \cos(q_4)\sin(q_1)}_{\sin(q_1+q_4)} & \cos(q_1)\cos(q_4) - \sin(q_1)\sin(q_4) & 0 & q_2\sin(q_1) \\ 0 & 0 & 1 & -q_3 - r_2 + r \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \left[\begin{array}{ccc|c} \cos(q_1+q_4) & -\sin(q_1+q_4) & 0 & q_2\cos(q_1) \\ \sin(q_1+q_4) & \cos(q_1+q_4) & 0 & q_2\sin(q_1) \\ 0 & 0 & 1 & -q_3 - r_2 + r \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

Etape 2 : Identifier les matrices $T_{0E} = T_{op}^*$

$\cos(q_1+q_4) = 1 \quad (1)$
$\sin(q_1+q_4) = 0 \quad (2)$
$q_2\cos(q_1) = a'$
$q_2\sin(q_1) = b'$

$-q_3 - \ell_2 + \ell = c'$

(1) et (2) $\Rightarrow q_1 + q_4 = 0 \Leftrightarrow \boxed{q_1 = -q_4}$

et $\begin{cases} q_2 \cos(q_1) = a' & \Leftrightarrow \cos(q_1) = \dfrac{a'}{q_2} \\ q_2 \sin(q_1) = b' & \Leftrightarrow \sin(q_1) = \dfrac{b'}{q_2} \end{cases}$

$\Leftrightarrow \quad q_1 = \text{arctan2}\left(\dfrac{b'}{q_2} ; \dfrac{a'}{q_2}\right)$

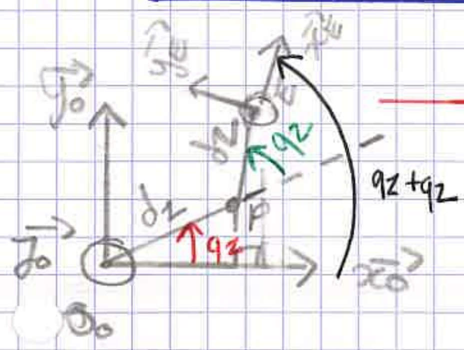
$\Leftrightarrow \begin{cases} q_2^2 \cos(q_1)^2 = a'^2 \quad (3) \\ q_2^2 \sin(q_1)^2 = b'^2 \quad (4) \end{cases} \Leftrightarrow \quad (3)+(4) : q_2^2 = a'^2 + b'^2$

$\Leftrightarrow \quad \boxed{q_2 = +\sqrt{a'^2 + b'^2}}$ car $q_2 > 0$

et d'après (1) et (2) $\boxed{q_4 = -\text{arctan2}\left(\dfrac{b'}{q_2} ; \dfrac{a'}{q_2}\right)}$

Remarque : $q_2 = 0$ est une singularité, on ne la considère pas car elle donnerait une infinité de q_1

Enfin, $\boxed{q_3 = \ell_2 - \ell + c'}$



Cas du robot 2R

Les distances d_1 et d_2 sont fixes

$$T_{0E} = \begin{pmatrix} R_{0E} & \overrightarrow{O_0E}_{(0)} \\ 0_{1\times3} & 1 \end{pmatrix}$$

$$\overrightarrow{OE}_{(0)} = \begin{pmatrix} d_1 \cos(q_1) + d_2 \cos(q_1+q_2) \\ d_1 \sin(q_1) + d_2 \sin(q_1+q_2) \\ \ell \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

si le robot est surélevé

$$R_{0E} = \begin{bmatrix} \cos(q_1+q_2) & -\sin(q_1+q_2) & 0 \\ \sin(q_1+q_2) & \cos(q_1+q_2) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Calcul d'un modèle cinématique Direct MCD :

Fait le lien entre les vitesses de l'organe terminal et les vitesses des liaisons

Astuce : Pour des robots simples, le MCD s'obtient en dérivant la matrice de passage homogène par rapport au temps

$$\dot{x} = -d_1 \dot{q_1} \sin(q_1) - d_2 (\dot{q_1} + \dot{q_2}) \sin(q_1 + q_2)$$
$$\dot{y} = d_1 \dot{q_1} \cos(q_1) + d_2 (\dot{q_1} + \dot{q_2}) \cos(q_1 + q_2)$$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} -d_1 \sin(q_1) - d_2 \sin(q_1+q_2) & -d_2 \sin(q_1+q_2) \\ d_1 \cos(q_1) + d_2 \sin(q_1+q_2) & d_2 \cos(q_1+q_2) \end{pmatrix}}_{\text{Matrice Jacobienne du Bras Manipulateur}} \begin{pmatrix} \dot{q_1} \\ \dot{q_2} \end{pmatrix}$$