09/11/2022 **Exercice**

Problème de commande optimale en BF

$$\min J(u) = \frac{1}{2}\int_0^{T_f} (4x^2 + Ru^2)\,dt + \frac{10}{2} x_{T_f}^2$$

sous la contrainte $\dot{x} = -2x + Bu$

1) Déterminer par la méthode HJB les équations à résoudre pour un horizon infini avec
- $B = 3$
- $B = x$ (système dit bilinéaire : l'état répart la commande)

2) Lorsque $T_f \to \infty$, on va chercher u^* pour HJB avec
- $R = 1$
- $R \to \infty$

1) **Etape 1 :** Rappeler les équations démontrées

$$-\dot{P}_t = Q_t + A^T P_t + P_t A - P_t B R_t^{-1} B^T P_t \quad (1)$$

$$u_t^* = -R^{-1} B^T P_t x_t \quad (2)$$

⚠ Documents non autorisés à l'examen

Etape 2 : Repérer chaque matrice

$A = -2$, $B = x$, $Q = 4$, $R = R^{-1} > 0$ et $P_{Tf} = 10$

Etape 3 : Réécrire l'équation

$$-\dot{P}_t = 4 + 2P_t - 2P_t - P_t x \cdot R^{-1} x P_t$$

$$= 4 - 4P_t - R^{-1} P_t^2 x^2$$

on peut déterminer P_t en résolvant cette équation différentielle

$$u_t^* = -\frac{P_t x^2}{R}$$

Rq : La commande est non linéaire puisqu'il s'agit du cas particulier d'un système bilinéaire. Si $B = 3$ alors u linéaire

Remarquons, qu'en pratique, il est possible de commander les systèmes bilinéaire avec cette commande ou réaliser une opération de filtrage pour décoréler l'état de la commande.

2) Lorsque $T_f \to +\infty$, $0 = 4 - 4P_t - P_t^2 x^2 . R^{-1}$

$\Leftrightarrow P^2 x^2 + 4RP - 4R = 0$

On a deux solutions : $P_1 = \frac{-4R + \sqrt{16R^2 + 16x^2 R}}{2x^2}$

$= \frac{-2R + 2R\sqrt{1 + x^2 R^{-1}}}{x^2}$

$P_2 = \frac{-2R - 2R\sqrt{1+x^2R^{-1}}}{x^2}$

On prend la solution P_1

Enfin, $u^*_t = \frac{-P_t x^2}{R} = 2 - 2\sqrt{1+x^2R^{-1}}$ est l'unique commande optimale.

Dès lors, la dynamique du système en boucle fermée est :

$\dot{x} = -2x + Bu = -2x + xu^*$ dans le cas de la commande optimale. $\dot{x} = -2x\sqrt{1 + x^2 R^{-1}}$

Considérons à présent les deux cas :

Si $R = 1$ alors $\dot{x} = -2x\sqrt{1+x^2} \Rightarrow$ le système est stable

⚠ Si $R \to +\infty$ alors $\dot{x} \to -2x$ et $u^*_t \to 0 \Rightarrow$ le système est également stable avec une commande nulle $\Rightarrow$ dans ce cas on parle de commande à énergie minimale. Sans commande, ce système est stable. En revanche, cette commande ne modifie pas les performances temporelles (ici, dynamique de $x(t) = e^{-2t}$ imposée).

Question : La commande optimale assure-t-elle la stabilité au sens de Lyapunov ?

On sait que $\begin{cases} u^*_t = -l_t x \\ l_t = R_t^{-1} B^T P \\ \dot{x} = (A - Bl_t)x \end{cases}$ et nous avons pris une fonctionnelle

$V[x(t)] = \frac{1}{2} x_t^T P x_t$ telle que $-\dot{V} = \frac{1}{2}(x_t^T Q x + u^T R u)$

or P_t est définie positive $\Rightarrow$ $V[x(t)]$ est définie positive
c'est une candidate à la fonction de Lyapunov.
De plus, $-\dot{V} = \frac{1}{2}\left[x_t^T Q x_t + (R^{-1}B^T P x_t)^T (R^{-1}B^T P x)\right]$

$$-\dot{V} = \frac{1}{2}\left[x_t^T Q x_t + x_t^T (R^{-1}B^T P)^T R (R^{-1}B^T P) x_t\right]$$

$$-\dot{V} = \frac{1}{2} x_t^T \underbrace{\left[Q + (R^{-1}B^T P)^T R (R^{-1}B^T P)\right]}_{>0} x_t$$

$$\Rightarrow -\dot{V} > 0 \iff \dot{V} < 0$$

La commande quadratique est stable au sens de Lyapunov.

Commande Optimale par Maximisation de l'Hamiltonien

I/ Définition de l'Hamiltonien :

$$H(\lambda, x, u) = -\frac{1}{2}(x^T Q x + u^T R u) + \lambda^T \underbrace{(Ax + Bu)}_{\text{Dynamique du système } \dot{x}}$$

λ : opérateur de Lagrange

avec Q et R constantes

II/ Minimisation du critère :

Le critère à minimiser est à présent :

$$J(u) = \frac{1}{2} x_{T_f}^T P_{T_f} x_{T_f} + \underbrace{\int_0^{T_f} -H(\lambda, x, u) + \lambda^T (Ax + Bu)\, dt}_{\frac{1}{2}(x^T Q x + u^T R u)}$$

Si on prend une variation de u (δu) tel que $v = u + \delta u$ qui correspond à une variation d'état δx alors
$\delta J = J(u + \delta u) - J(u) = J(v) - J(u) \geq 0$ pour que le critère soit minimal.
On cherche une commande u qui minimise J

$$\delta J = J(u+\delta u) - J(u) = \frac{1}{2}(x_{Tf}+\delta x_{Tf})^T P_{Tf}(x_{Tf}+\delta x_{Tf})$$
$$+\int_0^{Tf} -H(\lambda; x+\delta x; u+\delta u) + \lambda^T(x+\delta x)\,dt$$
$$-\frac{1}{2}x_{Tf}^T P_{Tf} x_{Tf} - \int_0^{Tf} -H(\lambda; x; u) + \lambda^T \dot{x}\,dt$$

$$\delta J = \frac{1}{2}(x_{Tf}+\delta x_{Tf})^T P_t (x_{Tf}+\delta x_{Tf}) - \frac{1}{2} x_{Tf}^T P_t x_{Tf}$$
$$+\int_0^{Tf} -H(\lambda; x+\delta x; u+\delta u) + H(\lambda; x; u) + \lambda^T(\dot{x}+\delta\dot{x}) - \lambda^T\dot{x}\,dt$$
$$= \frac{1}{2}(x_{Tf}+\delta x_{Tf})^T P_t (x_{Tf}+\delta x_{Tf}) - \frac{1}{2} x_{Tf}^T P_t x_{Tf}$$
$$+\int_0^{Tf} -H(\lambda; x+\delta x; u+\delta u) + H(\lambda; x; u) + \lambda^T\delta\dot{x}\,dt$$
$$= \frac{1}{2}[x_{Tf}+\delta x_{Tf}]^T P_t (x_{Tf}+\delta_{Tf}) - \frac{1}{2} x^T_{Tf} P_t x_{Tf}$$
$$+\int_0^{Tf} -H(\lambda; x+\delta x; u+\delta u) + H(\lambda; x; u)\,dt + \underbrace{[\lambda^T\delta x]_0^{Tf}}_{=\lambda_{Tf}^T\delta x_{Tf} - \lambda_0^T\delta x_0}$$
$$-\int_0^{Tf} \lambda^T\delta x\,dt$$

Pour simplifier, on va utiliser le développement limité à l'ordre 1 pour $H(\lambda; x+\delta x; u+\delta u)$:

$$H(\lambda; x+\delta x; \underbrace{u+\delta u}_{v}) = H(\lambda; x+v) = \frac{\partial H(\lambda; x; v)}{\partial x^T}\,\delta x$$ correspondant au développement d'ordre 1 d'une fonction quelconque

On le remplace alors dans l'expression de δJ :

$$\delta J = (x_{Tf}^T P_{Tf} + \lambda_{Tf}^T)\,\delta x_{Tf} - \lambda_0 \cancelto{(1)}{\delta x_0} + \frac{1}{2}\cancelto{(2)}{\delta x_{Tf}^T} P_{Tf}\,\delta x_{Tf}$$
$$-\int_0^{Tf}\left(\lambda^T + \frac{\partial H}{\partial x^T}\right)\delta x\,dt + \int_0^{Tf} H(\lambda; x; u) - H(\lambda; x; v)\,dt$$

<u>Hypothèses</u>: La variation des conditions initiales est négligeable (1)
et la variation de l'état final au carré est négligeable (2)
pour une petite variation de la commande.

$$\delta J = (x_{Tf}^T P_{Tf} + \lambda_{Tf}^T)\,\delta x_{Tf} - \int_0^{Tf} \left(\lambda^T + \frac{\partial H}{\partial x^T}\right) \delta x \, dt$$
$$+ \int_0^{Tf} H(\lambda; x; u) - H(\lambda; x; v)\, dt$$

<u>But</u>: $\delta J = J(u+\delta u) - J(u) \geq 0$

$$\Rightarrow \begin{cases} x_{Tf}^T P_{Tf} + \lambda_{Tf} = 0 \\ \lambda^T + \frac{\partial H}{\partial x^T} = 0 \end{cases} \Rightarrow \delta J = \int_0^{Tf} H(\lambda; x; u) - H(\lambda; x; u)\, dt \geq 0$$
$$= \int_0^{Tf} H(\lambda; x; u) - H(\lambda; x; u+\delta u)\, dt \geq 0$$

$\Rightarrow H(\lambda; x; u) \geq H(\lambda; x; u+\delta u)$

$$\boxed{\Leftrightarrow H(\lambda; x; u+\delta u) - H(\lambda; x; u) \leq 0}$$