or P_t est définie positive => $V[x(t)]$ est définie positive
c'est une candidate à la fonction de Lyapunov.

De plus, $-\dot{V} = \frac{1}{2}\left[x_t^T Q x_t + (R^{-1}B^T P x_t)^T (R^{-1}B^T P x)\right]$

$$-\dot{V} = \frac{1}{2}\left[x_t^T Q x_t + x_t^T (R^{-1}B^T P)^T R (R^{-1}B^T P) x_t\right]$$

$$-\dot{V} = \frac{1}{2} x_t^T \underbrace{\left[Q + (R^{-1}B^T P)^T R (R^{-1}B^T P)\right]}_{>0} x_t$$

$$\Rightarrow -\dot{V} > 0 \iff \dot{V} < 0$$

La commande quadratique est stable au sens de Lyapunov.

Commande Optimale par Maximisation de l'Hamiltonien

I/ Définition de l'Hamiltonien :

$$H(\lambda; x; u) = -\frac{1}{2}(x^T Q x + u^T R u) + \underset{\substack{\uparrow \\ \text{opérateur} \\ \text{de Lagrange}}}{\lambda^T} \overbrace{(Ax + Bu)}^{\text{Dynamique du système } \dot{x}}$$

avec Q et R constantes

II/ Minimisation du critère :

Le critère à minimiser est à présent :

$$J(u) = \frac{1}{2} x_{Tf}^T P_{Tf} x_{Tf} + \int_0^{Tf} \underbrace{-H(\lambda, x, u) + \lambda^T (Ax + Bu)}_{\frac{1}{2}(x^T Q x + u^T R u)} dt$$

Si on prend une variation de u (δu) tel que $v = u + \delta u$ qui correspond à une variation d'état δx alors

$\delta J = J(u+\delta u) - J(u) = J(v) - J(u) \geq 0$ pour que le critère soit minimal.

On cherche une commande u qui minimise J

$$\delta J = J(u+\delta u) - J(u) = \frac{1}{2}(x_{Tf} + \delta x_{Tf})^T P_{Tf} (x_{Tf} + \delta x_{Tf})$$
$$+ \int_0^{Tf} - H(\lambda; x+\delta x; u+\delta u) + \lambda^T(\dot{x} + \delta \dot{x})\, dt$$
$$- \frac{1}{2} x_{Tf}^T P_{Tf} x_{Tf} - \int_0^{Tf} - H(\lambda; x; u) + \lambda^T \dot{x}\, dt$$

$$\delta J = \frac{1}{2}(x_{Tf} + \delta x_{Tf})^T P_t (x_{Tf} + \delta x_{Tf}) - \frac{1}{2} x_{Tf}^T P_t x_{Tf}$$
$$+ \int_0^{Tf} - H(\lambda; x+\delta x; u+\delta u) + H(\lambda; x; u) + \lambda^T(\dot{x} + \delta \dot{x}) - \lambda^T \dot{x}\, dt$$
$$= \frac{1}{2}(x_{Tf} + \delta x_{Tf})^T P_t (x_{Tf} + \delta x_{Tf}) - \frac{1}{2} x_{Tf}^T P_t x_{Tf}$$
$$+ \int_0^{Tf} - H(\lambda; x+\delta x; u+\delta u) + H(\lambda; x; u) + \lambda^T \delta \dot{x}\, dt$$

$$= \frac{1}{2}[x_{Tf} + \delta x_{Tf}]^T P_t (x_{Tf} + \delta_{Tf}) - \frac{1}{2} x^T_{Tf} P_t x_{Tf}$$
$$+ \int_0^{Tf} - H(\lambda; x+\delta x; u+\delta u) + H(\lambda; x; u)\, dt + \underbrace{[\lambda^T \delta x]_0^{Tf}}_{= \lambda_{Tf}^T \delta x_{Tf} - \lambda_0^T \delta x_0}$$
$$- \int_0^{Tf} \dot{\lambda}^T \delta x\, dt$$

Pour simplifier, on va utiliser le développement limité à l'ordre 1 pour $H(\lambda; x+\delta x; u+\delta u)$:

$$H(\lambda; x+\delta x; \underbrace{u+\delta u}_{v}) = H(\lambda; x+v) = \frac{\partial H(\lambda; x; v)}{\partial x^T} \delta x$$ correspondant au développement d'ordre 1 d'une fonction quelconque

On le remplace alors dans l'expression de δJ :

$$\delta J = (x_{Tf}^T P_{Tf} + \lambda_{Tf}^T)\delta x_{Tf} - \lambda_0 \overset{(1)}{\cancel{\delta x_0}} + \frac{1}{2} \overset{(2)}{\cancel{\delta x_{Tf}^T P_{Tf} \delta x_{Tf}}}$$
$$- \int_0^{Tf} \left(\dot{\lambda}^T + \frac{\partial H}{\partial x^T}\right) \delta x\, dt + \int_0^{Tf} H(\lambda; x; u) - H(\lambda; x; v)\, dt$$

Hypothèses : La variation des conditions initiales est négligeable (1) et la variation de l'état final au carré est négligeable (2) par une petite variation de la commande.

$$\delta J = (x_{Tf}^T P_{Tf} + \lambda_{Tf}^T)\,\delta x_{Tf} - \int_0^{Tf} \left(\lambda^T + \frac{\partial H}{\partial x^T}\right) \delta x \, dt$$
$$+ \int_0^{Tf} H(\lambda; x; u) - H(\lambda; x; v)\, dt$$

But : $\delta J = J(u + \delta u) - J(u) \geq 0$

$$\Rightarrow \begin{cases} x_{Tf}^T P_{Tf} + \lambda_{Tf} = 0 \\ \lambda^T + \frac{\partial H}{\partial x^T} = 0 \end{cases} \Rightarrow \delta J = \int_0^{Tf} H(\lambda; x; u) - H(\lambda; x; \cancel{u})\, dt \geq 0$$
$$= \int_0^{Tf} H(\lambda; x; \cancel{u}) - H(\lambda; x; u + \delta u)\, dt \geq 0$$

$\Rightarrow H(\lambda; x; u) \geq H(\lambda; x; u + \delta u)$

$$\boxed{\Leftrightarrow H(\lambda; x; u + \delta u) - H(\lambda; x; u) \leq 0}$$

2. A. Dans le cas continue :

But : Trouver $u^*(x(t), t)$ qui maximise l'Hamiltonien
$H(x(t), t) = -L(x; u; t) + \lambda^T f(x; u; t)$
avec $\dot{x} = f(x; u; t)$

2. B. Dans le cas discret :

But : $H_{k+1} = -L(x; u; k) + \lambda_{k+1}^T f(x; u; t)$ avec
$x_{k+1} = f(x; u; k)$

2. C. Conditions Dans le cas continu :

Les conditions d'optimalité $\Leftrightarrow$ minimiser le critère J
$\Leftrightarrow$ maximiser l'Hamiltonien.

$$\begin{cases} (1)\ \text{Condition finale :}\ \lambda_{Tf}^{T} = -x_{Tf}^{T} P_{Tf} \\ (2)\ \dot{\lambda} = -\dfrac{\partial H}{\partial x} \\ (3)\ \dot{x} = \dfrac{\partial H}{\partial \lambda} \end{cases}$$

Puis, recherche d'une commande optimale $\Leftrightarrow$ maximiser l'Hamiltonien

$$\begin{cases} \left.\dfrac{\partial H}{\partial u}\right|_{u=u^*} = 0 \\ \left.\dfrac{\partial^2 H}{\partial u^2}\right|_{u=u^*} < 0 \end{cases}$$

Dans le cas discret : Les conditions d'optimalité (aussi appelées Conditions du Premier Ordre d'Hamilton).

$$\begin{cases} (1)\ x_{k+1} = \dfrac{\partial H_{k+1}}{\partial \lambda_{k+1}} \\ (2)\ \lambda_k = \dfrac{\partial H_{k+1}}{\partial x_k} \\ (3)\ \text{Condition finale :}\ \lambda_{Tf}^{T} = x_{Tf}^{T} P_{Tf} \end{cases}$$

2.D. A horizon infini $(Tf \to +\infty)$:

Lorsque $Tf \to +\infty$ alors $\lim\limits_{\substack{u \to u^* \\ \lambda \to \lambda^*}} H(x; u; \lambda) = 0$

Remarque : Lorsque l'on veut passer d'un état x_0 à l'instant t_0 vers un état x_1 à l'instant t_1 via une commande optimale u^*

$$(x_0; t_0) \xrightarrow{u^*} (x_1; t_1)$$

L'Hamiltonien ~~est égal~~ à $\underline{H = cste}$ | entre 2 points de l'état

III / Application du Principe de Maximisation de Pontryaguine (PMP) à la commande LQ

Soit un système $x_{k+1} = Ax_k + Bu$

But : On recherche la commande optimale LQ qui minimise le critère suivant : $L(x_i u_i k) = \frac{1}{2}[x_k^T Q_k x_k + u_k^T R u_k]$

avec $Q_J = Q_J^T \geq 0$, $P_J = P_J^T \geq 0$ et $R_J = R_J^T > 0$

On pose l'Hamiltonien :

$$H(x_i u_i k+1) = -\frac{1}{2}[x_k^T Q_k x_k + u_k^T R_k u_k] + \lambda_k^T \underbrace{(Ax_k + Bu_k)}_{x_{k+1} = F(x_i u_i k)}$$

multiplicateur de Lagrange

Maximisation de H : $\Leftrightarrow$ conditions d'optimalité vérifiées

$x_{k+1} = \frac{\partial H_{k+1}}{\partial \lambda_{k+1}}$ avec $\left.\frac{\partial H_{k+1}}{\partial u_k}\right|_{u=u^*} = 0$

$\lambda_k = \frac{\partial H_{k+1}}{\partial x_k}$ $\quad \left.\frac{\partial^2 H_{k+1}}{\partial u_{k+1}^2}\right|_{u=u^*} < 0$

$\lambda_{T_f}^T = -x_{T_f}^T P_{T_f}$

Ainsi $\boxed{x_{k+1} = \frac{\partial H_{k+1}}{\partial \lambda_{k+1}} = Ax_k + Bu_k}$

$$\boxed{\lambda_k = \frac{\partial H_{k+1}}{\partial x_k} = A^T \lambda_{k+1} = -Q_k x_k}$$

$\left.\frac{\partial H_{k+1}}{\partial u_k}\right|_{u=u^*} = 0 \Rightarrow \left. -R_k + u_k + B^T \lambda_{k+1}\right|_{u=u^*} = 0$

$\Leftrightarrow \boxed{u^*_k = R^{-1} B^T \lambda_{k+1}}$

$\left.\frac{\partial^2 H_{k+1}}{\partial u^2_{k+1}}\right|_{u=u^*} < 0 \Leftrightarrow \boxed{-R_k < 0}$

S'assurer d'avoir la commande optimale :

$u^*_k = R^{-1} B^T \lambda_{k+1}$; $\lambda_{T_f} = -P_{T_f} x_{T_f}$

On pose $\lambda_k = -P_k x_k$

Lorsque l'on remplace dans les équations, on obtient

$u_k^* = R^{-1}B^T\lambda_{k+1}$

$= -R^{-1}B^T P_{k+1} x_{k+1}$

$Ru_k^* = -B^T P_{k+1} x_{k+1} = -B^T P_{k+1}(Ax_k + Bu_k^*)$

$= -B^T P_{k+1}(Ax_k + Bu_k^*)$

$\Leftrightarrow (R + B^T P_{k+1} B)u_k^* = -B^T P_{k+1} A x_k$

$\Leftrightarrow u_k^* = (R + B^T P_{k+1} B)^{-1} \cdot (-B^T) P_{k+1} A x_k$

$$\boxed{\begin{aligned} &\Leftrightarrow u_k^* = -\underbrace{(R + B^T P_{k+1} B)^{-1} \times B^T P_{k+1} A}_{L_{k+1}} x_k \\ &\Leftrightarrow u_k^* = -L_{k+1} x_k \end{aligned}}$$

On a bien une commande quadratique et linéaire par rapport à l'état

Obtention de la matrice P_k :

On sait que $\lambda_k = A^T\lambda_{k+1} - Q_k x_k$ vérifié et on pose

$$\begin{cases} \lambda_k = -P_k x_k \\ \lambda_{Tf} = -P_{Tf} x_{Tf} \end{cases}$$

$\Leftrightarrow -P_k x_k = A^T\lambda_{k+1} - Q_k x_k$

$= A^T\lambda_{k+1} - Q_k x_k$

$= A^T(-P_{k+1})x_{k+1} - Q_k x_k$

$= -A^T P_{k+1}(Ax_k + Bu_k^*) - Q_k x_k$

$= -A^T P_{k+1}(Ax_k - BL_{k+1}x_k) - Q_k x_k$

$= [-A^T P_{k+1} A + A^T P_{k+1} B L_{k+1} - Q_k] x_k$

$= -[A^T P_{k+1} A - A^T P_{k+1} B L_{k+1} + Q_k] x_k$

$$\boxed{\Leftrightarrow P_k = A^T P_{k+1} A - A^T P_{k+1} B L_{k+1} + Q_k \text{ avec } \lambda_{Tf} = -P_{Tf} x_{Tf}}$$

Exercice : Soit $\dot{x}_1 = -x_1 + u$

Déterminer la commande optimale qui minimise le critère $J = \frac{1}{2}\int_0^1 (3x_1^2 + u^2 dt)$ sous la contrainte de la dynamique du système sachant que le système évolue de $x_1 = 0$ à 60 vers x_1 à t_0. Avec $x_1 = 2$ à t_1 grâce à ~~u~~ commande u.

$\lambda_{tf} = -P_{tf} x_{tf} = - \quad \times (2)$

en général $P_{tf} = Q_{tf}$

Notons les matrices à notre disposition $A = 1$, $B = 1$, $Q = 3 \geq 0$; $R = 1$

En général, $P_{tf} = Q_{tf} = 3$

l'Hamiltonien est $H = -\frac{1}{2}[x^T Q x + u^T R u] + \lambda^T \dot{x}$

$$= -\frac{1}{2}[3x_1^2 + u_1^2] + \lambda^T(-x_1 + u)$$

Les conditions d'optimalité sont :

et $\lambda_{tf} = -P_{tf} x_f$

$$\begin{cases} \dot{x} = \frac{\partial H}{\partial \lambda} = -x_1 + u \\ \dot{\lambda} = -\frac{\partial H}{\partial \lambda} = +3x_1 + \lambda \\ \left.\frac{\partial H}{\partial u}\right|_{u=u^*} = 0 = -u + \lambda^T \\ \frac{\partial^2 H}{\partial u^2} = -1 < 0 \end{cases}$$

Ainsi, $\boxed{u^* = +\lambda^T}$

$\dot{\lambda} = 3x_1 + \lambda$ et $\dot{x}_1 = -x_1 + u^* = -x_1 + \lambda$

d'où $\ddot{x}_1 = -\dot{x}_1 + \dot{\lambda}$

$$= -\dot{x}_1 + 3x_1 + \lambda$$

or $\lambda = \dot{x}_1 + x_1$

donc $\ddot{x}_1 = -\cancel{\dot{x}_1} + 3x_1 + \cancel{\dot{x}_1} + x_1$

$$= 4x_1$$

$\ddot{x}_1 = 4x_1 \Rightarrow x_1(t) = k\sin(\alpha t + \beta)$

$\lambda = \dot{x}_1 + x_1 = \alpha k \cos(\alpha t + \beta) + k\sin(\alpha t + \beta)$

donc $\boxed{u^* = \alpha k \cos(\alpha t + \beta) + k\sin(\alpha t + \beta)}$