× Densités de probabilités

- Comment échantillonner une loi Gaussienne multivariée

(comment obtenir $x^{(1)}, \dots, x^{(N)} \in \mathbb{R}^M \overset{iid}{\sim} \mathcal{N}(m, P)$)

données $\begin{cases} m \in \mathbb{R}^M \\ P \in \mathbb{R}^{n \times n} \succ 0 \end{cases}$

→ on échantillonne $\underbrace{y^{(1)} \dots y^{(N)}}_{\in \mathbb{R}^M} \overset{iid}{\sim} \mathcal{N}(0_{M\times 1}, \mathbb{1}_{M \times M})$

multivariée standard

$Y = \text{randn}(M, N)$

de sorte que $y^{(1)} \dots y^{(N)}$ constituent les colonnes de Y

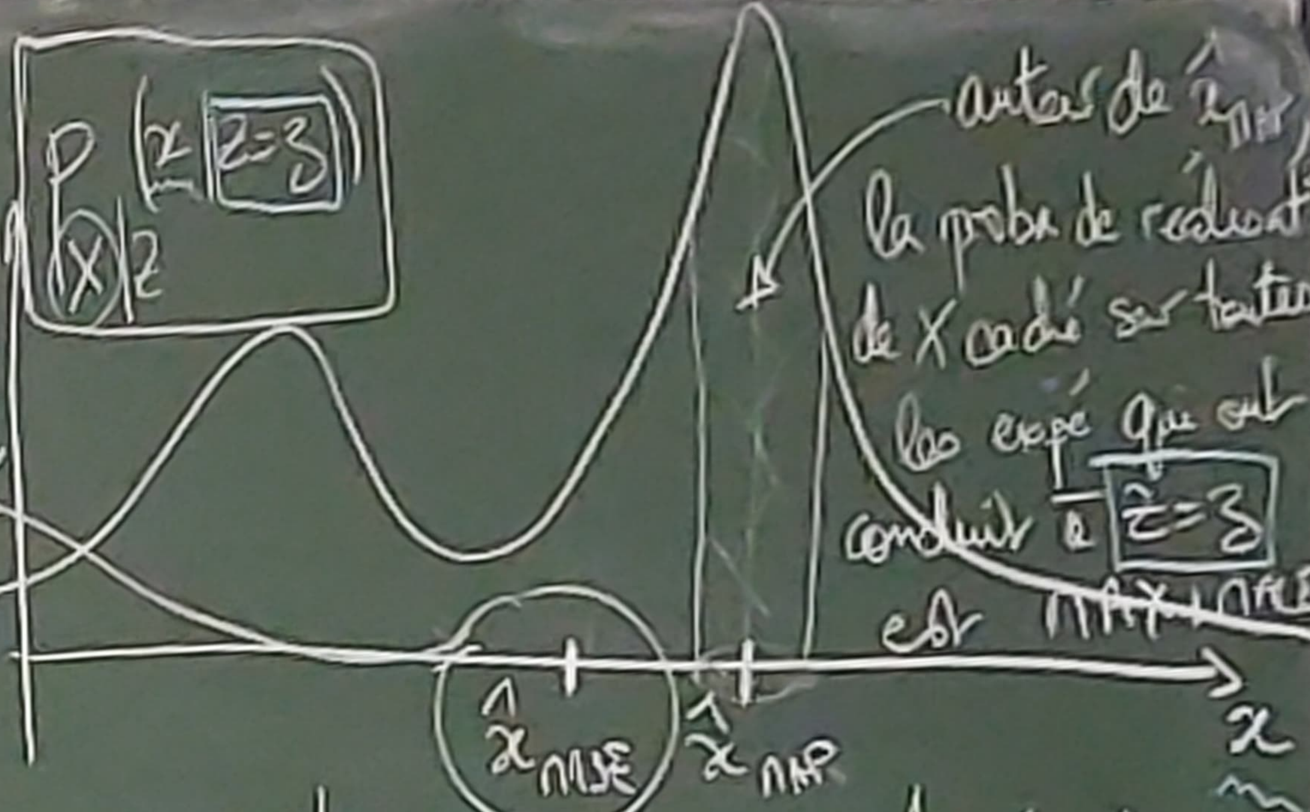
→ puis on pose

$\forall i \in \{1, \ldots, N\}$, $x^{(i)} = m + L\, y^{(i)}$ où L tq $LL^T = P$

$\boxed{L = (\overbrace{\mathrm{chol}(P)}^{C \text{ tq } C^T C = P})^T}$

(en effet, si $y \sim \mathcal{N}(0_{n\times 1}, \mathbb{1}_{n\times n})$, alors $x = m + Ly \sim \mathcal{N}(\underbrace{m + L\, 0_{n\times 1}}_{=m}, \underbrace{L\, \mathbb{1}_{n\times n} L^T}_{=P})$)

• Nota : dans un contexte d'estimation Bayesienne de X caché sur la base de la réalisation z (mesure pour l'expé en cours) de Z lié à X, on a vu que la loi a posteriori capture toute l'info sur X caché contenue dans {conna prior, observations} l'estimateur correspondant minimise en moyenne l'erreur quadratique $\|x-\hat{x}\|^2$



→ on considère souvent un estimé de $\underset{\sim}{x}$ calculé sur la base de cette loi

- $\hat{x}_{MAP} = \arg\max_{x} P_{X|Z}(x|z)$ estimé du max a posteriori
- $\hat{x}_{MMSE} = \boxed{\int_{\mathbb{R}^k} x\, P_{X|Z}(x|z)\, dx}$ moyenne a posteriori

$= \mathbb{E}_{P_{X|Z}(x|z)}[X]$ estimé du min d'erreur quad. moyenne (min mean sq error est)

↳ en fait, si on note, pour l'eppé en cours (de résultat ω)

- $x = X(\omega)$ caché, inconnu
- $z = Z(\omega)$ observation effectuée
- estimé $\hat{x}_{MMSE} = \phi(z)$ = réalisation $\hat{X}_{MMSE}(\omega)$ de l'estimateur $\hat{X}_{MMSE} = \phi(Z)$

alors

$$\hat{X}_{MMSE} = \arg\min_{\mathring{X}} \mathbb{E}\left[(X - \mathring{X})^T Q (X - \mathring{X})\right] = \arg\min_{\mathring{X}} \|X - \mathring{X}\|_Q$$

$\forall Q \geq 0.$

- Covariance a posteriori P_{MMSE}, associée à $\hat{x}_{MMSE}$

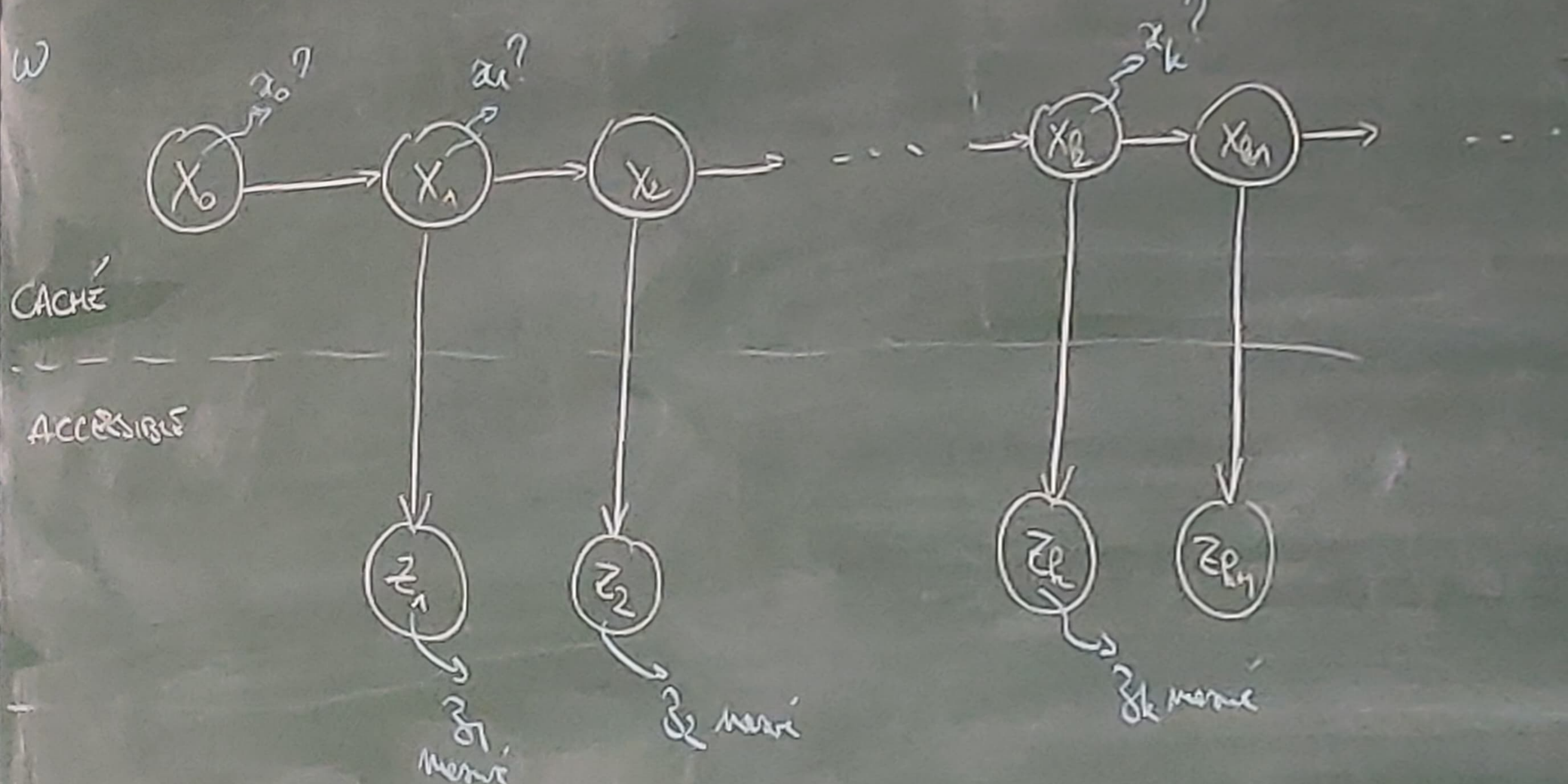
$$P_{MMSE} = \mathbb{E}_{p_{X|Z}(x|z)}\left[\left(X - \underbrace{\hat{x}_{MMSE}}_{\mathbb{E}_{p_{X|Z}(x|z)}[X]}\right)(\diamond)^T\right] = \text{covariance de la loi postérieure}$$

(caractérise la dispersion de X caché, autour de $\hat{x}_{MMSE}$, sur toutes les expériences conduisant à $Z = z$)

- Nota : $\hat{X}_{MMSE}$ est non biaisé

(on montre que $\mathbb{E}\left[X - \hat{X}_{MMSE}\right] = 0$)

* Compléments sur l'estimation dynamique



- Connaissance a priori

① loi initiale

$X_0 \sim P_{X_0}(x_0)$, p. ex. $X_0 \sim \mathcal{N}(m_{x_0}, P_0)$

$\boxed{\text{noté } x_0 \sim p(x_0)}$

② loi de dynamique a priori

si $\underline{\underline{X_{k-1} = x_{k-1}}}$ alors $X_k \sim P_{X_k | \underline{\underline{X_{k-1}}}}(x_k | \underline{\underline{x_{k-1}}})$

variable muette x_k

loi paramétrée par x_{k-1}

exemple : si $X_k = f(X_{k-1}, u_{k-1}) + W_{k-1}$

f : dét$^\circ$ donnée

u_{k-1} : vecteur dét$^\circ$ connue

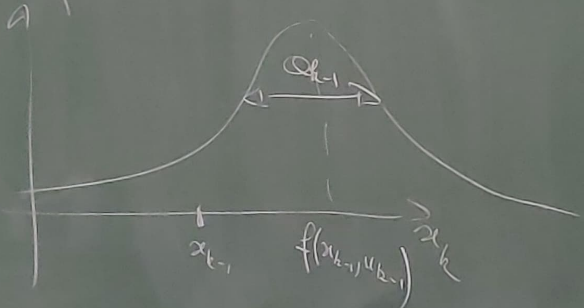
V.A. de bruit de dyn

$W_{k-1} \sim \mathcal{N}(0, Q_{k-1})$

alors $$P_{X_k | X_{k-1}}(x_k | x_{k-1}) = \mathcal{N}\left(x_k ; f(x_{k-1}, u_{k-1}), Q_{k-1}\right)$$

$$= \frac{1}{\sqrt{\det(2\pi Q_{k-1})}} \exp\left[-\frac{1}{2}\left(x_k - f(x_{k-1}, u_{k-1})\right)^T Q_{k-1}^{-1} (\triangle)\right]$$

noté $$p(x_k | x_{k-1}) = \mathcal{N}\left(x_k ; f(x_{k-1}, u_{k-1}), Q_{k-1}\right)$$



P ex. , $$X_k = F_{k-1} X_{k-1} + W_{k-1}$$

$$\Leftrightarrow p(x_k | x_{k-1}) = \mathcal{N}\left(x_k, F_{k-1} x_{k-1}, Q_{k-1}\right)$$

On suppose $W_{0:k}$ blanc $\left[W_0, W_1, \dots W_k \text{ | mut. ind}\right]$

(cf. le diagramme probabiliste)

③ Modèle d'observation

si $X_k = x_k$

alors $Z_k \sim p_{Z_k | X_k}(z_k | x_k)$

variable muette z_k

paramètre en x_k

exemple si $Z_k = h(X_k) + V_k$

fon$^{\text{ct}^\circ}$ dét$^\circ$ donnée

VA bruit de mesure

$V_k \sim \mathcal{N}(0, R_k)$

on suppose

V_{k} blanc

et

$X_0, W_0, V_{1:k}$ mut^t ind

$$\underbrace{p_{z_k|x_k}(z_k|x_k)}_{\text{note } p(z_k|x_k)} = \mathcal{N}(z_k, h_k(x_k), R_k)$$

p ex

$$z_k = H_k x_k + v_k, \quad v_k \sim \mathcal{N}(0, R_k)$$

$$R_k > 0$$

$$\Leftrightarrow p(z_k|x_k) = \mathcal{N}(z_k; H_k x_k, R_k)$$

$v_{1:k}$ blanc; $x_0, w_{0:k}, v_{1:k}$ mut° ind.

Sous les hypothèses en bleu,

$X_{0:k}$ et $Z_{1:k'}$ sont conjointement Gaussiens

$\Downarrow$

$p_{X_{0:k}|Z_{1:k'}}(x_{0:k}|z_{1:k'})$ est une loi Gaussienne

$\Downarrow$

$$p_{X_k|Z_{1:k'}}(x_k|z_{1:k'}) = \mathcal{N}(x_k\,;\,\hat{x}_{k|k'}\,,\,P_{k|k'})$$

et les $\hat{x}_{k|k'}, P_{k|k'}$ sont obtenus récursivement et de manière analytique via les équations du filtre de Kalman (dans une problématique de filtrage)

INIT°

$\hat{x}_{0|0}$

$P_{0|0}$

moments m_{X_0}, P_0

de $P_{X_0}(x_0)$

RÉCURSION

$k|k \longrightarrow k+1|k$

TIME UPDATE

moments $\hat{x}_{k|k}, P_{k|k}$

de $P_{X_k|Z_{1:k}}(x_k|z_{1:k})$ loi de filtrage à l'instant k

$\Downarrow$

moments $\hat{x}_{k+1|k}, P_{k+1|k}$

de $P_{X_{k+1}|Z_{1:k}}(x_{k+1}|z_{1:k})$ loi de prédiction à l'instant $k+1$

PUIS

$k+1|k \longrightarrow k+1|k+1$

MEASUREMENT UPDATE

moments $\hat{x}_{k+1|k}, P_{k+1|k}$ de $P_{X_{k+1}|Z_{1:k}}(x_{k+1}|z_{1:k})$ à l'instant $k+1$

et observation z_{k+1}

$\Downarrow$

moments $\hat{x}_{k+1|k+1}, P_{k+1|k+1}$ de la loi de filtrage $P_{X_{k+1}|Z_{1:k+1}}(x_{k+1}|z_{1:k+1})$ à l'instant $k+1$

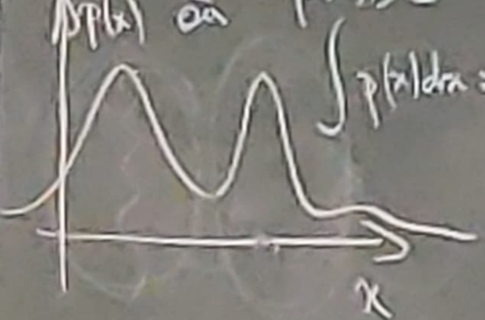
II Approximation (ponctuelle) de Monte Carlo d'une loi de probabilité (ou d'une pdf)

• $p(x) \approx \hat{p}(x) = \sum_{i=1}^{N} w^{(i)} \delta(x - x^{(i)})$

où $p(x) \geq 0$

$\int p(x)dx = 1$

où $\sum_{i=1}^{N} w^{(i)} = 1$



Échantillonner $x \sim p(x)$

$\approx$

Échantillonner $x \sim \hat{p}(x)$ $\equiv$ sélectionner x dans $\{x^{(i)}\}$ avec les probas respectives $\{w^{(i)}\}$