Commande des systèmes non linéaires

Frédéric Gouaisbaut

LAAS-CNRS
Tel : 05 61 33 63 07
email : fgouaisb@laas.fr
webpage: *www.laas.fr/* $\sim$ *fgouaisb*

9 novembre 2022

Première partie I

Analyse de la stabilité des systèmes non linéaires

Sommaire

Stabilité des systèmes automatisés

- ⋆ La stabilité joue un rôle primordiale en Automatique.
- ⋆ Il existe plusieurs définitions de la stabilité en Automatique.
  - La stabilité d'un point d'équilibre,
  - La stabilité entrée-sortie.

  Nous allons dans ce chapitre nous intéresser à la stabilité d'un point d'équilibre, ou stabilité interne.
- ⋆ La stabilité interne sera étudiée à l'aide de la théorie de Lyapunov[1].
- ⋆ Nous étudierons également une extension du théorème de Lyapunov, le théorème de Lasalle.

1. Lyapunov est un mathématicien russe qui a posé les bases de la théorie de la commande et de l'Automatique.

Stabilité des systèmes autonomes

On considère des systèmes non linéaires sans entrées, c'est-à-dire des systèmes de la forme :

$$\dot{x}(t) = f(x(t)), \tag{1}$$

où f est localement Lipschitz dans un domaine $\mathcal{D}$.

Definition (points d'équilibres)

Considérons le système sans entrée (1), on appelle x_e un point d'équilibre, la solution de l'équation

$$f(x_e) = 0,$$

- ⋆ Si le système sans entrée (1) admet un point d'équilibre, alors

$$\dot{x}(t) = f(t, x(t)), \; x(0) = x_e$$

  admet une unique solution $x(t) = x_e, \forall t \geq 0$.
  Autrement dit, si le système démarre du point d'équilibre, il y reste.
- ⋆ Dans cette première partie, on parle de la stabilité d'un point d'équilibre. Par changement variable $\tilde{x}(t) = x(t) - x_e$, on peut toujours se ramener à l'étude du point d'équilibre 0.
- ⋆ Dans la suite du cours, on supposera que le point d'équilibre étudié vaut 0.

Définitions

$\star$ On s'intéresse au comportement de la solution $x(t)$ lorsque $x(0) \neq 0$ mais proche de 0

Definition (Stabilité)

Le point d'équilibre 0 est dit stable ssi

$$\forall \epsilon > 0, \exists \delta = \delta(\epsilon) > 0, \|x(0)\| < \delta \Rightarrow \|x(t)\| < \epsilon, \forall t \geq 0.$$

$\star$ Les solutions restent bornées lorsque la condition initiale est petite comme le montre la Figure suivante :

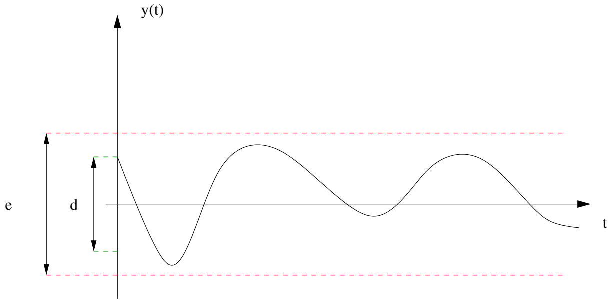


Figure – Stabilité d'un point d'équilibre

Définitions

⋆ On cherche à savoir si la solution $x(t)$ converge vers le point d'équilibre 0, lorsque la condition initiale n'est pas trop loin de 0.

Definition (Attractivité)

Le point d'équilibre 0 est dit attracteur ssi

$$\exists \delta > 0, \|x(0)\| < \delta \Rightarrow \lim_{t \to \infty} x(t) = 0,$$

$$\exists \delta > 0, \|x(0)\| < \delta \Rightarrow \forall \epsilon > 0, \exists t_1 > 0, \forall t > t_1, \|x(t)\| < \epsilon.$$

⋆ L'attractivité signifie que chaque solution commencant suffisamment près de 0 convergent vers 0 lorsque $t \to \infty$ [2].

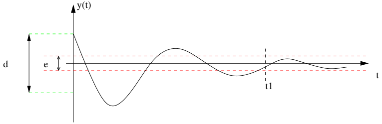


Figure – Attractivité d'un point d'équilibre

2. La condition de Lipschitz n'est évidemment pas suffisante pour assurer l'existence et l'unicité d'une solution pour $t > 0$. Néammoins, nous allons voir que les conditions de stabilité asymptotique nous assure de l'existence et l'unicité de la solution.

Definition (Stabilité asymptotique)

Le point d'équilibre 0 est dit asymptotiquement stable ssi il est stable et attracteur.

- La notion de stabilité est une notion locale.
- L'attractivité est une notion qui peut peut-être locale ou globale.
- Ainsi, si le point est attracteur depuis n'importe quelles conditions initiales alors on parle de stabilité asymptotique globale (GAS).
  Sinon, on parle de stabilité asymptotique locale (LAS). L'ensemble des points d'équilibres pour lequel le point d'équilibre est asympotiquement stable est appelée bassin d'attraction du point d'équilibre.
- Les notions de stabilité et d'attractivité sont deux notions différentes.

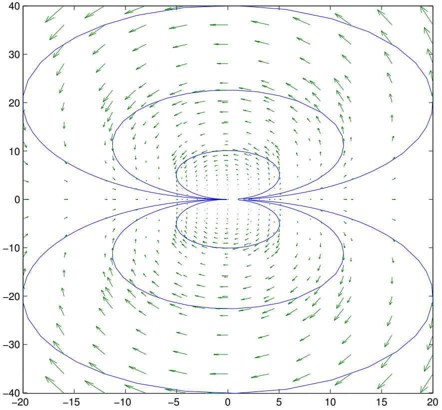
Exemple d'un système localement attracteur instable

On considère l'exemple suivant dit le système papillon :

$$\begin{cases} \dot{x}_1(t) = x_1^2(t) - x_2^2(t) \\ \dot{x}_2(t) = 2x_1(t)x_2(t) \end{cases}$$

- ⋆ L'unique point d'équilibre est le $x_e = [0, 0]^T$.
- ⋆ Toutes les trajectoires du système convergent vers x_e sauf 1 (laquelle ? ?). x_e est un attracteur local.
- ⋆ Le point d'équilibre 0 n'est pas stable comme le montre la Figure suivante. Effectivement, considérons un condition initiale proche de 0, la trajectoire $x(t)$ peut-être très grande.

Figure – Visualisation des trajectoires du papillon dans le plan de phase



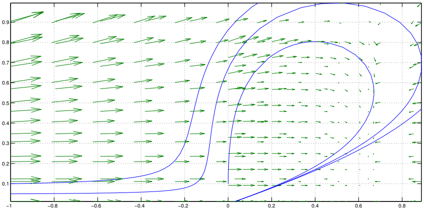
Exemple d'un système globalement attracteur instable

On considère l'exemple modifié suivant dit le système papillon :

$$\left\{ \begin{array}{c} \dot{x}_1(t) = x_1^2(t)(x_2(t) - x_1(t)) + x_2^5(t) \\ \dot{x}_2(t) = x_2^2(t)(x_2(t) - 2x_1(t)) \end{array} \right.$$

- ⋆ L'unique point d'équilibre est le $x_e = [0, 0]^T$.
- ⋆ Toutes les trajectoires du système convergent vers x_e. x_e est un attracteur global.
- ⋆ Le point d'équilibre 0 n'est pas stable comme le montre la Figure suivante. Effectivement, considérons un condition initiale proche de 0, la trajectoire $x(t)$ peut-être très grande.

Figure – Visualisation des trajectoires du papillon dans le plan de phase



Exemple d'un système stable non attracteur

On considère l'exemple suivant

$$\left\{ \begin{array}{r} \dot{x}_1(t) = x_2(t) \\ \dot{x}_2(t) = -\sin(x_1(t)) \end{array} \right.$$

- Calculons les points d'équilibre.
- Montrons qu'un point d'équilibre est stable mais non attracteur.

Comment analyser la stabilité

- Analyser la stabilité d'un point d'équilibre peut-être très compliqué.
- En général, il est possible de l'analyser en linéarisant le système autour du point d'équilibre, l'analyse reste locale...
- D'ailleurs est-ce toujours possible de statuer sur la stabilité d'un point d'équilibre du système non linéaire en analysant un système approché (linéarisé) ?

⋆ Nécessité d'introduire de nouveaux outils pour simplifier l'étude.
⋆ Utiliser des arguments énergétiques pour étudier la stabilité.

L'exemple du pendule inverse

On considère le pendule de la Figure 14. Celui-ci évolue dans le plan vertical. On suppose qu'il existe une force de frottement agissant sur la masse qui est proportionnelle à sa vitesse.

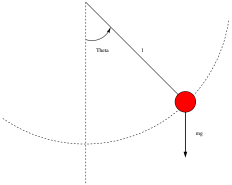


Figure – Le pendule inverse

- Le principe fondamentale de la mécanique nous donne :

$$mg\ddot{\theta}(t) = -mg\sin(\theta(t)) - kl\dot{\theta}(t)$$

- On choisit comme variable d'état $x(t) = \begin{bmatrix}\theta(t) & \dot{\theta}(t)\end{bmatrix}^T$.
- La modélisation non linéaire :

$$\begin{cases} \dot{x}_1(t) = x_2(t) \\ \dot{x}_2(t) = -\frac{g}{l}\sin(x_1(t)) - \frac{k}{m}x_2(t) \end{cases}$$

L'exemple du pendule inverse (2)

⋆ Il existe une infinité de points d'équilibre.

- Calculer ces points d'équilibre.
- Pour $k = 0$, établissez les propriétés des points d'équilibre.
- Pour $k \neq 0$, établissez les propriétés des points d'équilibre.

→ On utilise le plan de phase pour établir la stabilité, ce qui n'est pas évident.

⋆ Peut-on utiliser d'autres méthodes ?

L'exemple du pendule inverse (3)

- Calculons l'énergie du système $E(x)$, ie la somme de l'énergie potentielle et l'énergie cinétique en supposant que $E(0) = 0$.

$$E(x) = \int_0^{x_1} mgl\sin(y)dy + \frac{ml^2}{2}x_2^2 = mgl(1-\cos(x_1)) + \frac{ml^2}{2}x_2^2.$$

- Pour savoir comment l'énergie évolue, nous calculons son évolution au cours du temps :

$$\frac{dE(x)}{dt} = \frac{dE(x)}{dx}.\frac{dx}{dt}$$

$$\frac{dE(x)}{dt} = \begin{bmatrix} mgl\sin(x_1) & ml^2x_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_2 \\ -\frac{g}{l}\sin(x_1) - \frac{k}{m}x_2 \end{bmatrix} = -kl^2x_2^2$$

Que peut-on conclure de cette analyse ?

Exemple introductif : le pendule inverse (4)

$$E(x) = mgl(1 - \cos(x_1)) + \frac{ml^2}{2}x_2^2.$$

$$\frac{dE(x)}{dt} = -kl^2x_2^2$$

- ⋆ La dérivée de l'énergie est négative ou nulle. Ainsi, on pourrait dire ainsi que les trajectoires ne vont pas diverger.
- ⋆ Si $k = 0$, $\frac{dE}{dt} = 0$ le long des trajectoires du système. Le système est conservatif $\rightarrow$ Point d'équilibre stable ?
- ⋆ Si $k < 0$, $\frac{dE}{dt} \leq 0$ le long des trajectoires du système. Ainsi, localement, l'énergie est décroissante jusqu'à peut-être arriver à $E = 0$, et donc arriver jusqu'au point d'équilibre. Le système perd de l'énergie $\rightarrow$ Point d'équilibre stable asymptotiquement.

$\rightarrow$ Extension de cette à l'aide de fonctions plus générales que les fonctions énergies.

Fonctions de Lyapunov

Théorème fondamentale de stabilité, stabilité asymptotique locale

On propose un premier théorème permettant d'étudier la stabilité asymptotique locale.

Théorème

On considère le point d'équilibre $x_e = 0$ et un domaine $\mathcal{D}$ contenant 0. Soit $V : \mathcal{D} \to \mathbb{R}$, une fonction C^1 telle que :

$$V(0) = 0 \text{ et } V(x) > 0 \text{ pour } x \in \mathcal{D}\backslash\{0\}, \tag{2}$$

$$\dot{V}(x) \leq 0 \text{ dans } \mathcal{D}, \tag{3}$$

alors $x = 0$ est un point d'équilibre stable. De plus, si

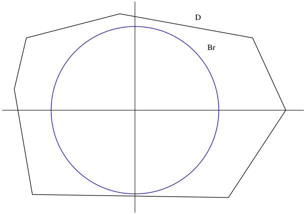
$$\dot{V}(x) < 0 \text{ dans } \mathcal{D}\backslash\{0\}, \tag{4}$$

alors $x = 0$ est asymptotiquement stable.

- Une fonction V qui satisfait les équations (6)-(3) ou (6)-(7) est appelée une fonction de Lyapunov.
- La surface $V(x) = c$ est appelée ligne de niveau (ou de surface) de la fonction de Lyapunov.
- Une fonction vérifiant $V(0) = 0$ et $V(x) > 0, \forall x \neq 0$ est une fonction définie positive.
- Une fonction vérifiant $V(x) \geq 0, \forall x \neq 0$ est une fonction semi-définie positive.

Eléments de preuve stabilité (1)

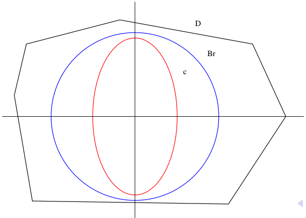
⋆ On considère $\epsilon > 0$, et $r \in]0, \epsilon]$, tel que $B_r \subset \mathcal{D}$[3].



⋆ Soit $\alpha = \min_{\|x\|=r} V(x) > 0$, soit $\beta \in [0, \alpha]$, et

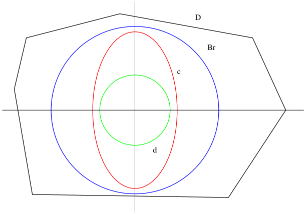
$$\Omega_\beta = \{x \in B_r, V(x) \leq \beta\}.$$

Ω_β est inclus dans B_r et toute trajectoire commencant à l'intérieur de Ω_β reste dans Ω_β car $\dot{V}(x(t)) \leq \Rightarrow V(x(t)) \leq V(x(0)) \leq \beta, \forall t \geq 0$.



Eléments de preuve stabilité(2)

⋆ Il existe $\delta > 0$ tel que $\|x\| \leq \delta \Rightarrow V(x) \leq \beta$.



⋆ Ainsi, $B_\delta \subset \Omega_\beta \subset B_r$ et $x(0) \in B_\delta \Rightarrow x(0) \in \Omega_\beta \Rightarrow x(t) \in \Omega_\beta \Rightarrow x(t) \in B_r$.
⋆ En conclusion, nous avons la propriété suivante :

$$\|x(0)\| \leq \delta \Rightarrow \|x(t)\| < r \leq \epsilon, \forall t \geq 0$$

Le point d'équilibre est stable.

Eléments de preuve attractivité (3)

⋆ Supposons que $\dot{V}(x) < 0 \text{ dans } \mathcal{D} - \{0\},$. On doit montrer que $x(t) \to 0$, ie $\forall \nu > 0, \exists t_1, \|x(t)\| \leq \nu, \forall t > t_1$. En répétant notre argumentaire, il suffit alors de montrer que $V(x(t)) \to 0$ lorsque $t \to +\infty$.

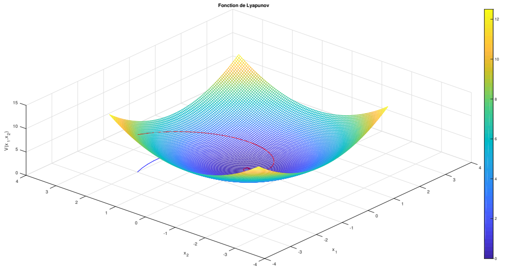
⋆ On le montre par l'absurde :

Illustration

On considère le système

$$\dot{x}(t) = \begin{bmatrix} -1 & -2 \\ 2 & -1 \end{bmatrix} x(t),$$

dont le point d'équilibre 0 est asymptotiquement stable.
On choisit la fonction de Lyapunov $V(x) = x_1^2 + x_2^2$.



Exemples

On considère le système simple suivant :

$$\dot{x}(t) = ax(t), \ a < 0.$$

- C'est un système linéaire du premier ordre.
- Choisissons $V(x(t)) = \frac{1}{2}x^2(t)$.
- La dérivée de V le long des trajectoires du système donne :

$$\dot{V}(t) = x(\dot{x}(t)) = -ax^2(t).$$

$\rightarrow$ $\dot{V}(x) \leq 0$, le système est stable.

$\rightarrow$ $\dot{V}(x) < 0$ pour $x \in \mathbb{R} - 0$, le système est asymptotiquement stable.

Exemples

Considérons l'exemple du pendule inverse.

$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{x}_1(t) = x_2(t) \\ \dot{x}_2(t) = -a\sin(x_1(t)) - bx_2(t) \end{array} \right.$$

et la fonction

$$V(x) = a(1 - \cos(x_1)) + \frac{1}{2}x_2^2$$

1. Donner la valeur de $\mathcal{D}$.
2. Est ce une fonction de Lyapunov ?
3. On considère une nouvelle fonction :

$$V(x) = a(1 - \cos(x_1)) + \frac{1}{2}x^T(t)Px(t)$$

Est ce une fonction de Lyapunov ?

Comment estimer le bassin d'attraction ?

- ⋆ On considère un point d'équilibre $x_e = 0$ localement asymptotiquement stable, ce qui signifie qu'il est stable et attracteur localement.
- ⋆ Peut-on estimer la région d'attraction du point d'équilibre, c'est-à-dire l'ensemble des points conditions initiales, telle que la solution de (1) partant de ces conditions initiales convergent vers $x_e = 0$?
- ⋆ Trouver cet ensemble est très compliqué voire impossible. Par contre, on peut en trouver une estimation en utilisant la théorie de Lyapunov.

Considérons l'ensemble

$$\Omega_c = \{x \in \mathcal{D}, V(x) \leq c\}$$

Toute trajectoire commençant à l'intérieur de Ω_c reste dans Ω_c car $\dot{V}(x(t)) \leq 0$ et converge vers zéro.
Ω_c est une estimation du domaine d'attraction (nommé aussi bassin d'attraction).
⋆ L'idée est de trouver le plus grand $c > 0$, mais attention cela peut se révéler très conservatif.

Théorème fondamentale de stabilité, stabilité asymptotique globale

⋆ Jusqu'à présent, nous avons un théorème de stabilité asymptotique locale.
⋆ Sous quelles conditions, obtient-on un domaine d'attraction égale à $\mathbb{R}^n$.

Théorème

On considère $x = 0$ un point d'équilibre pour le système (1). Soit $V : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, une fonction C^1 telle que :

$$\|x(t)\| \to +\infty \;\Rightarrow V(x) \to +\infty \tag{5}$$

$$V(x_e) = 0 \text{ et } V(x) > 0 \;\forall x \neq 0, \tag{6}$$

$$\dot{V}(x) < 0 \;\forall x \neq 0, \tag{7}$$

alors $x = 0$ est globalement asymptotiquement stable.

⋆ La condition (5) nous dit que la fonction V est radialement non bornée.

Problématique

Considérons de nouveau le pendule inverse :

$$\begin{cases} \dot{x}_1(t) = x_2(t) \\ \dot{x}_2(t) = -a\sin(x_1(t)) - bx_2(t) \end{cases}$$

et la fonction

$$V(x) = a(1-\cos(x_1)) + \frac{1}{2}x_2^2$$

On a $\dot{V}(t) = -bx_2^2(t) \leq 0$, le système est stable. Peut-on tout de même prouver que le point d'équilibre est asymptotiquement stable ?

Principe d'invariance de Lasalle (1)

Definition (Ensemble invariant)

On dit qu'un ensemble M est invariant ssi

$$x(0) \in M \Rightarrow x(t) \in M, \forall t \geq 0.$$

Théorème

Supposons une fonction de Lyapunov $V : \mathbb{R}^n \rightarrow R$ continuement différentiable, radialement non bornée, définie positive telle que :

$$\dot{V}(x) \leq W(x) \leq 0, \forall x \in \mathbb{R}^n,$$

alors :

1. $x_e = 0$ *est un point d'équilibre stable,*
2. *Les solutions de (1) convergent vers le plus grand ensemble invariant M contenu dans $E = \{x, W(x) = 0\}$.*

Principe d'invariance de Lasalle (2)

Ce dernier théorème permet souvent de prouver la stabilité d'un point d'équilibre :

Corollaire

Supposons une fonction de Lyapunov $V : \mathbb{R}^n \to R$ *continuement différentiable, radialement non bornée, définie positive telle que :*

$$\dot{V}(x) \leq W(x) \leq 0, \forall x \in \mathbb{R}^n,$$

Supposons qu'aucune trajectoire autre que $x = x_e = 0$ *ne peut rester dans l'ensemble* $E = \{x, W(x) = 0\}$, *alors le point d'équilibre est globalement asymptotiquement stable.*

Exemple

Considérons

$$\begin{cases} \dot{x}_1(t) = x_2(t) \\ \dot{x}_2(t) = -ax_1^3(t) - bx_2(t) \end{cases}$$

1. Déterminer les point d'équilibre du système,
2. Déterminer une fonction de Lyapunov et utiliser le principe de Lasalle pour caractériser la stabilité des points d'équilibre

Exemple

Considérons

$$\begin{cases} \dot{x}_1(t) = x_2(t) \\ \dot{x}_2(t) = -a\sin(x_1(t)) - bx_2(t) \end{cases}$$

1. Déterminer les point d'équilibre du système,
2. Déterminer une fonction de Lyapunov et utiliser le principe de Lasalle pour caractériser la stabilité des points d'équilibre

Théorème inverse de Stabilité

⋆ Nous avons vu que s'il existe V une fonction de Lyapunov pour (1) et un point d'équilibre $x_e = 0$, alors ce point d'équilibre est (asymptotiquement) stable (localement ou globalement).
⋆ La réciproque est vraie :

Théorème

Soit $x_e = 0$ un point d'équilibre asymptotiquement stable pour le système

$$\dot{x}(t) = f(x(t)),$$

Considérons le bassin d'attraction $\mathcal{R}_a$ du point d'équilibre, alors il existe une fonction $V : \mathcal{R}_a \to \mathbb{R}$, une fonction définie positive et une fonction continue définie positive $W : \mathcal{R}_a \to \mathbb{R}$ telles que :

$$V(x) \to +\infty, x \in \partial\mathcal{R}_a$$

$$\dot{V}(x) \leq -W(x), \forall x \in \mathcal{R}_a$$

⋆ Si $\mathcal{R}_a = \mathbb{R}^n$, alors V est radialement non bornée.

Stabilité des systèmes linéaires

Un petit rappel :

Théorème

On considère le point d'équilibre $x_e = 0$ du système $\dot{x}(t) = Ax(t)$. Le point d'équilibre $x_e = 0$ est :

1. *stable ssi $Re(\lambda_i) \leq 0$ et pour toutes les valeurs propres imaginaires pures , de multiplicité algébrique $q_i \geq 2$, on vérifie que $rang(A - \lambda_i 1_n) = n_i - q_i$.*
2. *asymptotiquement stable ssi $Re(\lambda_i) < 0$.*

Comment trouver une fonction de Lyapunov ?

⋆ Considérons une fonction de Lyapunov quadratique $V(x) = x^T(t)Px(t)$ avec $P > 0$.

$$\dot{V}(x) = x^T(t)(A^T P + PA)x(t) = -x^T(t)Qx(t),$$

où

$$A^T P + PA = -Q$$

$\rightarrow$ Equation de Lyapunov

⋆ Si $Q > 0$, alors le point d'équilibre est asymptotiquement stable.

$\Rightarrow$ Si A est Hurwitz, alors P vérifiant l'équation de Lyapunov est unique.

Méthode de Lyapunov indirecte

⋆ On peut utiliser l'approximation de Taylor à l'ordre 1 pour prouver la stabilité locale d'un système non linéaire :

Théorème

Soit le système $\dot{x}(t) = f(x(t))$, $x_e = 0$ un point d'équilibre. Considérons $A = \left.\frac{\partial f(x)}{\partial x}\right|_{x=x_e}$.

- *Si $Re(\lambda_i) < 0$ alors le point d'équilibre $x_e = 0$ est localement asymptotiquement stable.*
- *S'il existe une valeur propre telle que $Re(\lambda) > 0$ alors le point d'équilibre $x_e = 0$ est instable.*
- *S'il existe une valeur propre telle que $Re(\lambda) = 0$ alors on ne peut pas conclure.*

Introduction

On considère un système non linéaire de la forme :

$$\dot{x}(t) = f(t, x(t), u(t)), \tag{8}$$

où f est une fonction continue par morceaux par rapport au temps, localement Lipschitz par rapport à x et u. L'entrée $u(t)$ est continue par morceaux et est une fonction bornée du temps.

On suppose que le système sans entrée

$$\dot{x}(t) = f(t, x(t), 0)$$

a un point d'équilibre globalement asymptotiquement stable en 0.

$\star$ Que peut-on dire du comportement de (8) lorsque celui-ci est soumis à une entrée de perturbation $u(t)$ bornée ?

Le cas des systèmes linéaires

Dans le cas d'un système linéaire, ce n'est pas très compliqué car nous connaissons la solution :

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t), A \,\mathrm{Hurwitz},$$

La solution s'écrit :

$$x(t) = e^{At}x(0) + \int_{t=0}^{t} e^{(t-\tau)A}Bu(\tau)d\tau.$$

Or $\exists k, \lambda > 0, \|e^{At}\| \leq ke^{-\lambda t}$, on obtient ainsi :

$$\begin{aligned} \|x(t)\| &\leq ke^{-\lambda t}\|x(0)\| + \int_{t=0}^{t} ke^{-\lambda(t-\tau)}\|B\|\|u(\tau)\|d\tau. \\ &\leq ke^{-\lambda t}\|x(0)\| + \frac{k\|B\|}{\lambda} \sup_{0\leq\tau\leq t} \|u(\tau)\| \end{aligned}$$

$\rightarrow$ Entrée bornée $\Rightarrow$ états bornées.
$\rightarrow$ la borne sur les états est proportionnelle à la borne de l'entrée.
Est-ce la même chose pour les systèmes non linéaires ?

Un exemple en non linéaire

Considérons l'exemple suivant :

$$\dot{x}(t) = -x(t) + (x^2(t) + 1)u(t)$$

- ⋆ Sans entrée de perturbation, le point d'équilibre 0 est GAS [4].
- ⋆ Considérons $u(t) = 1$...

Le système devient instable en présence d'une perturbation.

4. Globalement asymptotiquement stable.

Définition des fonctions de classe $\mathcal{K}$, $\mathcal{KL}$, $\mathcal{L}$

Afin de définir la stabilité au sens de Lyapunov et la stabilité de type ISS, il est utile d'utiliser des fonctions dite de comparaison.

Definition

Une fonction continue α de $[0, a]$ à valeur dans $[0, +\infty]$ est dite de classe $\mathcal{K}$ si elle est strictement croissante et $\alpha(0) = 0$. On dit qu'elle est de classe $\mathcal{K}_\infty$ si $a = \infty$ et $\lim_{r \to +\infty} \alpha(r) = +\infty$.

Definition

Une fonction continue ϕ de $[0, \infty]$ à valeur dans $[0, +\infty]$ est dite de classe $\mathcal{L}$ si elle est strictement décroissante et $\lim_{s \to +\infty} \phi(s) = 0$.

Definition

Une fonction à deux arguments est dite de classe $\mathcal{KL}$ si celle-ci est de classe $\mathcal{K}$ par rapport au premier argument et de classe $\mathcal{L}$ par rapport au second argument.

Théorème de Lyapunov en utilisant les fonctions de comparaison

On considère un système dynamique modélisé par l'équation différentielle (1) et un point d'équilibre $x_e = 0$.

Théorème

On considère le point d'équilibre $x_e = [0, 0]^T$ *et un domaine* $\mathcal{D}$ *contenant* 0. *Soit* $V(x, t) : \mathcal{D} \times \mathbb{R}+ \to \mathbb{R}$, *une fonction* C^1 *telle que :*

$$\alpha_1(\|x\|) \leq V(x, t) \leq \alpha_2(\|x\|) \tag{9}$$

$$\dot{V}(t) \leq -\alpha_3(\|x\|), \tag{10}$$

alors,

- *Stable si* α_1, α_2 *sont des fonctions de classe* $\mathcal{K}$ *et* $\alpha_3 \geq 0$ *sur* $\mathcal{D}$.
- *Asymptotiquement stable si* $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ *sont des fonctions de classe* $\mathcal{K}_\infty$.

Définition de l'Input to State Stability (ISS)

Definition

Un système de la forme $\dot{x}(t) = f(x(t), u(t))$ est dit Input to State Stable ssi une existe une fonction β de classe $\mathcal{KL}$ et une fonction γ de classe $\mathcal{K}$ telle que pour toutes conditions initiales x_0 et toutes entrées bornées $u(t)$, la solution $x(t)$ existe pour $t \geq 0$ et vérifie :

$$\|x(t)\| \leq \beta(\|x_0\|, t) + \gamma(\sup_{0 \leq \tau \leq t} \|u(\tau)\|).$$

$\star$ Si $u = 0$, alors cette définition se réduit à la stabilité asymptotique globale de l'origine.

Quelques propriétés

- La propriété d'ISS implique la propriété GAS,
- Pour un système linéaire, l'inverse est vrai.
- Attention, pour un système non linéaire, ce n'est pas le cas.

Théorème de Lyapunov pour l'ISS

On propose un théorème utilisant une fonction de Lyapunov et qui prouve l'ISS d'un système non linéaire :

Théorème

Considérons une fonction $V : \mathbb{R}+\times\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$*, une fonction* C^1 *telle que :*

$$\alpha_1(\|x\|) \quad \leq V \quad \leq \alpha_2(\|x\|)$$

$$\frac{\partial V}{\partial t} + \frac{\partial V}{\partial x} f(t, x(t), u) \leq -\alpha_3(x), \ \forall \|x\| \geq \rho(\|u\|) > 0,$$

où α_1, α_2 *sont des fonctions de classe* $\mathcal{K}_\infty$*,* ρ *une fonction de classe* $\mathcal{K}$ *et* α_3 *une fonction définie postive sur* $\mathbb{R}^n$*, alors le système (8) est ISS.*

Exemples

- $$\dot{x}(t) = -x^3 + u,$$
- $$\dot{x}(t) = -x - 2x^3 + (1 + x^2)u^2,$$
- $$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= -x_1 + x_2^2 \\ \dot{x}_2 &= -x_2 + u \end{aligned}$$