08/11/2022 On remarque que lorsque P_{Tf} augmente alors l'état final converge plus rapidement vers zéro. En revanche, le coût énergétique est d'autant plus grand (car L augmente donc u augmente) que P_{Tf} augmente.

Commande LQ

I/ Cas continue

Objectif : Trouver $u^*(x(t), t)$ qui minimise le critère suivant $J(u) = \frac{1}{2}\int_t^{Tf} (x_t^T Q x_t + u_t^T R u_t)\,dt + \frac{1}{2} x_{Tf}^T P_{Tf} x_{Tf}$ sous la contrainte dynamique du système telle que

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) \\ y(t) = Cx(t) \end{cases}$$

Problème : en utilisant l'opérateur de Lagrange le critère devient $J(u) = \int_t^{Tf} L(x; u; t)\,dt + L_{Tf}(x_{Tf}; Tf)$ sous la contrainte $\dot{x} = F(x; u; t)$.

D'après le principe de Bellman, ce problème se réduit à trouver une fonctionnelle $V(x(t); t)$ définie sur $[0; Tf]$ de $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ solution de l'équation de Hamilton-Jacobi-Bellman (HJB).

$$\boxed{\begin{aligned} &-\dot{V}(x(t); t) = \min_u L(x; u; t) \\ \Leftrightarrow\ &-\frac{\partial V}{\partial t} = \min_u L(x; u; t) + \frac{\partial V}{\partial x} F(x; u; t) \end{aligned}} \quad \text{(HJB)}$$

Démonstration : $\dot{V}(x(t); t) = \frac{\partial V}{\partial t} + \frac{\partial V}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial t}$

$$= \frac{\partial V}{\partial t} + \frac{\partial V}{\partial x} \cdot F(x; u; t)$$

$V(x(t); t) = \int_t^{Tf} L(x; u; t)\,dt$ dans le cas général

II/ Cas LQ

Ainsi, dans le cas LQ :

$$\boxed{V(x(t),t) = \frac{1}{2} x_t P_t x_t = \frac{1}{2}\int_t^{T_f} (x_t^T Q x + u_t^T R u_t) + \frac{1}{2} x_{T_f}^T P_{T_f} x_{T_f}}$$

A - Pour un horizon fini avec HJB

On considère $\dot{x} = Ax + Bu$ et le coût à minimiser suivant

$$J(u) = \frac{1}{2}\int_t^{T_f} (x_t^T Q x_t + u_t^T R u_t)\,dt + \frac{1}{2} x_{T_f}^T R_{T_f} x_{T_f}$$

Problème : Déterminer une fonctionelle qui est définie sur $[0; T_f]$ solution de l'équation de Hamilton - Jacobie - Bellman

$$-\dot{V}(x(t), t) = \frac{1}{2}[(x_t^T Q x_t) + u_t^T R u_t]$$

où $V(t) = \frac{1}{2}\int_t^{T_f} (x_t^T Q x_t + u_t^T R u_t)\,dt + \frac{1}{2} x_{T_f}^T P_{T_f} x_{T_f}$

Résolution : On pose $V(x(t); t) = \frac{1}{2} x_t^T P_t x_t$

D'après HJB, $-\frac{1}{2} x_t^T \dot{P}_t x_t - \frac{1}{2}\dot{x}_t^T P_t x_t - \frac{1}{2} x_t^T P_t \dot{x}_t$

Rappels : la commande optimale u^* est telle que

$$u = \arg\min_u L(x; u; t) + \frac{\partial V}{\partial x} F(x; u; t)$$

avec $\begin{cases} \frac{\partial [HJB]}{\partial u} = 0 \\ \frac{\partial^2 [HJB]}{\partial u^2} > 0 \end{cases}$ et $-\frac{\partial V}{\partial t} = \min L(x; u; t) + \frac{\partial V}{\partial x} F(x; u; t)$

$$= \frac{1}{2}(x_t^T Q x_t + u_t^T R u_t)$$

$$\Leftrightarrow -\frac{1}{2} x_t^T \dot{P} x_t = \frac{1}{2}(x_t^T Q x_t + u_t^T R u_t) + \frac{1}{2}(Ax_t + Bu_t)^T P_t x_t$$

$+\frac{1}{2}x_t^T P_t (Ax_t + Bu_t)$

$$\Leftrightarrow -\frac{1}{2}x_t^T \dot{P}_t x^T = \frac{1}{2}x_t^T (Q + A^T P_t + P_t A) x_t + \frac{1}{2}u_t^T B^T P_t x_t + \frac{1}{2}x_t^T P_t B u_t + \frac{1}{2}u_t^T R u_t$$

On dérive (HJB) par rapport à u :

$$\frac{\partial [HJB]}{\partial u} = \frac{\partial \left[\frac{1}{2}x_t^T (Q + A^T P_t + P_t A) x_t + \frac{1}{2}u_t^T B^T P_t x_t + \frac{1}{2}x_t^T P_t B u_t + \frac{1}{2}u_t^T R u_t\right]}{\partial u_t} = 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{2}B^T P_t x_t + \frac{1}{2}x_t^T P_t B + R u_t = 0$$

Rappel :

si R est quelconque $\frac{\partial u^T R u}{\partial u} = (R + R^T) u$

si R est symétrique $R^T = R \Rightarrow \frac{\partial u^T R u}{\partial u} = 2Ru$

or il s'agit d'une équation scalaire donc

$$\frac{1}{2}B^T P_t x_t + \frac{1}{2}x_t P_t B + R u_t = 0$$

or $x_t^T = x_t$ donc $B^T P_t x_t + R u_t = 0$

$$\boxed{\Leftrightarrow u_t^* = \underbrace{-R^{-1} B^T P_t}_{L_t} x_t}$$

est la commande optimale sous réserve que R soit strictement définie positive et inversible.

On dérive une seconde fois (HJB) par rapport à u :

$$\boxed{\frac{\partial^2 [HJB]}{\partial u^2} = R > 0}$$

le conditionnement initial est vérifié

On a donc une commande linéaire quadratique (LQ) par rapport à l'état $u^* = -R^{-1} B^T P_t x_t$ que l'on remplace dans HJB

$$-\frac{1}{2}x_t^T \dot{P}_t x_t = \frac{1}{2}x_t^T (Q + A^T P_t + P_t A) x_t + \frac{1}{2}(-R^{-1} B^T P_t x_t)^T B^T P_t x_t + \frac{1}{2}x_t^T P_t B (-R^{-1} B^T P_t x_t) + \frac{1}{2}(-R^{-1} B^T P_t x_t)^T R$$

$(-R^{-1}B^T P_t x_t)$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{2} x^T [Q_t + A^T P_t + P_t A + P_t B R^{-1} B^T P_t - 2 P_t B R^{-1} B^T P_t] x_t = -\frac{1}{2} x_t^T \dot{P}_t x_t$$

$$\boxed{\Leftrightarrow -\dot{P}_t = Q + A^T P_t + P_t A - P_t B R^{-1} B^T P_t}$$

__Au bilan :__ la commande optimale est une fonction linéaire de l'état

$$\boxed{\begin{aligned} u_t^* &= -R^{-1} B^T P_t x_t \\ &= -L_t x_t \end{aligned} \quad \text{avec } L_t \text{, gain variable dans le temps}}$$

__Remarques :__ • P_t est solution de l'équation différentielle de Riccati avec $P_{T_f} = Q_{T_f}$

• pour un horizon infini, l'état du système tend vers zéro (stabilité asymptotique) et $\lim_{k \to \infty} P_k$ = cste perd sa dynamique $\Rightarrow \dot{P}_t = 0$ et on peut trouver la matrice P_t grâce à l'expression.

B - Par un horizon infini :

P_t est solution de l'équation de Riccati et converge vers une constante. On minimise un critère ne dépendant pas de l'état final. En effet,

$$\min J(u) = \lim_{T_f \to \infty} \frac{1}{2} \int_t^{T_f} (x_t^T Q x_t + u_t^T R u_t)\, dt$$

(car $P_{T_f} = \emptyset$).

Ainsi, la solution reste inchangée $\begin{cases} u_t^* = -L_t x_t \\ L_t = R^{-1} B P \end{cases}$

P est solution de $A^T P + PA - PBR^{-1}B^T P + Q_t = 0$

On a accès au coût instantané $\boxed{J(x(t), t) = \frac{1}{2} x_t^T P_t x_t}$