Commande des systèmes non linéaires

Frédéric Gouaisbaut

LAAS-CNRS
Tel : 05 61 33 63 07
email : fgouaisb@laas.fr
webpage: *www.laas.fr/ ∼ fgouaisb*

November 23, 2022

Présentation du Cours

- Volume Horaire: 10h de Cours, 12h de TDs,8h de TPs
- Matériel par moment http://www.laas.fr/∼ fgouaisb
- Frédéric Gouaisbaut, fgouaisb@laas.fr

Sommaire

1. Introduction aux systèmes non linéaires,
2. Stabilité des systèmes non linéaires,
3. Commandes des systèmes non linéaires.

Part I

Linéarisation par bouclage

Principales sources

- Alberto Isidori, Nonlinear Control Systems, Springer-Verlag, 1989.
- H.K. Khalil. Nonlinear systems, Prentice Hall, 2002.
- J-J. Slotine and W. Li. Applied nonlinear control, Prentice Hall, 1991.

Difficulté d'asservir des systèmes non linéaires

- L'idée de la technique de linéarisation par bouclage s'appuie sur les remarques suivantes :
  - ▷ La synthèse de lois de commande pour les systèmes non-linéaires n'est pas systématique. Il existe peu de résultats constructifs. Si une structure du modèle NL est décelée alors il est possible d'imaginer des lois de commande basées sur la découverte, construction d'un fonction de Lyapunov.
  - ▷ Par contre, en linéaire, il existe de nombreuses techniques efficaces de synthèse dans le cas de modèles linéaires et qui sont systématiques (retour d'état par exemple).
- L'idée est d'établir un certain nombre d'analogies entre le linéaire et le non linéaire.
- Peut-on trouver des transformations adéquates afin de transformer le modèle non-linéaire en un modèle linéaire ?
  - ▷ Dans ce cas, on peut utiliser les techniques de synthèse de lois de commande des systèmes linéaires sur le modèle transformé afin de prouver les propriétés souhaitées pour le système non-linéaire de départ.
- C'est l'idée de la linéarisation par bouclage.

Quels types de système pour la linéarisation

Plusieurs questions

- Quelles classes de systèmes non-linéaires peuvent être étudiées via cette technique ?
- Quels sont les outils nécessaires pour appliquer une telle technique ?
- Quelles propriétés sont atteignables via cette technique pour le système bouclé ?
- Quelles techniques peuvent être utilisées sur le système linéaire obtenu ?

Contexte de la linéarisation : choix du système

- Plus précisément : nous considérons les systèmes non-linéaires affines en la commande.
- Soit le système continu de la forme :

$$\begin{aligned} \dot{x} &= f(x) + G(x)u \\ y &= h(x) \end{aligned} \tag{1}$$

avec $x \in \Re^n$, $u \in \Re^m$ et $y \in \Re^p$.

▷ Existe-t-il une loi de commande du type

$$u = \alpha(x) + \beta(x)v \tag{2}$$

et un changement de variables $z = T(x)$ tels que le système (1) est transformé en un système linéaire

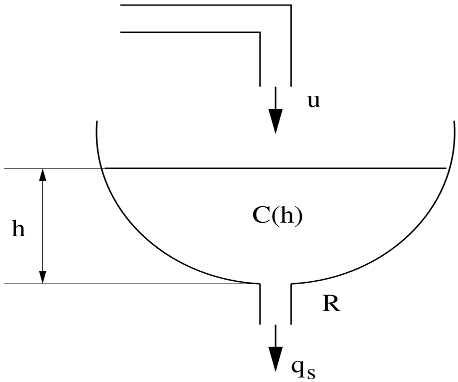
$$\dot{z} = Az + Bv \tag{3}$$

▷ Quels sont les hypothèses sur p et m ?

▷ Comment sera calculée la "nouvelle commande" v ?

Principe de la régulation de niveau

- Considérons une cuve :
  - ⋆ avec un débit de liquide en entrée u.
  - ⋆ avec une hauteur de liquide dans la cuve h.
  - ⋆ La valeur initiale de h est h_0.



Modélisation du comportement dynamique

- La section de la cuve dépend de la hauteur et donc sa capacité est une fonction de la hauteur que nous notons $C(h)$. On s'intéresse à la non-linéarité induit par la géométrie de la cuve.
- On suppose que le flux est non turbulent et finalement autour d'un point de fonctionnement, le débit sortant en bas de cuve s'approxime par une restriction caractérisée par un coefficient R.
  - En sortie, on aura un débit décrit par l'équation suivante :

$$q_s = R\sqrt{h} \tag{4}$$

- La variation du volume du liquide dans la cuve s'écrit

$$\frac{d}{dt}\left[\int_0^h C(v)dv\right] = u - q_s = u - R\sqrt{h} \tag{5}$$

- Nous avons l'équation d'état suivante :

$$C(h)\dot{h} = u - R\sqrt{h} \tag{6}$$

Choix d'une commande

- Un moyen de faire disparaître les termes non-linéaires est de choisir une commande

$$u = C(h)v + R\sqrt{h} \tag{7}$$

  - Le système bouclé est linéaire et s'écrit

$$\dot{h} = v \tag{8}$$

- Comment choisir v ? On utilise une commande proportionnelle classique.
  - Objectif. Passer d'une hauteur h_0 à une hauteur h_d, :

$$v = K(h_d - h) \tag{9}$$

  - Le système linéaire bouclé $\dot{h} = -Kh + Kh_d$
  - Il est clair que pour $K > 0$, on satisfait les propriétés de stabilité et de précision souhaitée.

Conclusion

- La loi de commande effectivement appliquée au système non-linéaire de départ est
$$u = C(h)K(h_d - h) + R\sqrt{h} \tag{10}$$

- Cet exemple illustre clairement l'idée de la linéarisation par bouclage :
  - on élimine les non-linéarités du modèle,
  - on se ramène à un système linéaire sous forme canonique de commandabilité,
  - on applique des techniques de synthèse de lois de commande des systèmes linéaires.
    - Correcteurs de type retour d'état,
    - Correcteurs de type retour de sortie statique ou dynamique...

Remarques préliminaires

- Quelle est la généralité de la technique ?
  - ▷ Le monde des systèmes non-linéaires étant vaste, il est illusoire d'appliquer ce genre de techniques à n'importe quel système non-linéaire.
  - ▷ Existe-t-il des propriétés structurelles du système permettant d'annuler les termes non-linéaires.
- Quelques idées de base :
  - ▷ Si on veut enlever le terme $\alpha(x)$ par soustraction, u et $\alpha(x)$ doivent apparaître comme une somme $u + \alpha(x)$
  - ▷ Si on veut enlever le terme $\gamma(x)$ par division, u et $\gamma(x)$ doivent apparaître comme un produit $\gamma(x)u$
  - ▷ Si $\gamma(x)$ est inversible pour tout x dans le domain d'intérêt D alors il peut être annulé en considérant $u = \beta(x)v = \gamma(x)^{-1}v$

Un première classe de système

- Une classe de systèmes non-linéaires pour laquelle on peut annuler les termes non-linéaires par bouclage est de la forme:

$$\dot{x} = Ax + B\gamma(x)(u - \alpha(x)) \tag{11}$$

avec

  - $A \in \Re^{n\times n}$, $B \in \Re^{n\times m}$, la paire (A, B) est contrôlable.
  - $\alpha : \Re^n \to \Re^m$ et $\gamma : \Re^n \to \Re^{m\times m}$ sont des fonctions définies dans un domaine $\mathbb{D} \subseteq \Re^n$ qui contient $x = 0$.
  - $\gamma(x)^{-1}$ existe pour tout $x \in \mathbb{D}$.
  - Un bouclage linéarisant est alors $u = \alpha(x) + \gamma(x)^{-1}v$
  - Le système linéaire résultant est $\dot{x} = Ax + Bv$

Un première classe de système (2)

- Nous pouvons alors aborder la question suivante : si le système n'a pas la forme (11) est-il toujours possible de linéariser le système par bouclage ?
- La réponse est oui, sous conditions ;).
  - ▷ Rappelons-nous que le modèle d'un système n'est pas unique car dépend du choix de la variable d'état.
  - ▷ Il peut exister une transformation (changement de variables) nous permettant de nous ramener à une forme (11).

Exemple

- Soit le système

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= a\sin(x_2)\\ \dot{x}_2 &= -x_1^2 + u\end{aligned}$$

  - ▷ On ne peut pas annuler le terme $asin(x_2)$
  - ▷ On considère le changement de variables

$$\begin{aligned}z_1 &= x_1\\ z_2 &= a\sin(x_2)\end{aligned}$$

Est-ce bien un changement de variables? La fonction réciproque (noté arcsin)de la fonction sin existe si nous restreignons $x_2 \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ et donc $z \in [-a, a]$.
On choisit donc

$$\mathbb{D} = \{x \in \mathbb{R}^2, x_2 \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]\}$$

  - ▷ On obtient alors un nouveau système:

$$\begin{aligned}\dot{z}_1 &= z_2\\ \dot{z}_2 &= a\cos(x_2)(-x_1^2 + u) = a\cos(\arcsin(\tfrac{z_2}{a}))(-z_1^2 + u)\\ &= a\sqrt{1 - (\tfrac{z_2}{a})^2}(-z_1^2 + u)\\ &= \sqrt{a^2 - z_2^2}(-z_1^2 + u)\end{aligned}$$

Exemple

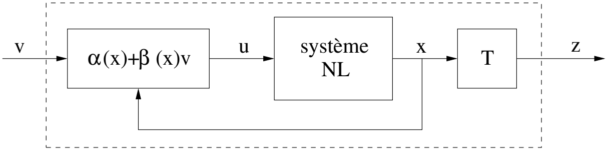
- On peut maintenant appliquer $u = x_1^2 + \frac{v}{acos(x_2)} = z_1^2 + \frac{v}{\sqrt{a^2 - z_2^2}}$
- Le domaine $\mathbb{D}$ (inversibilité de $\gamma(x) = acos(x_2)$) est défini par $-\frac{\pi}{2} < x_2 < \frac{\pi}{2}$ ou $-a < z_2 < a$
- le système en boucle fermée s'écrit alors:

$$\begin{aligned} \dot{z}_1 &= z_2 \\ \dot{z}_2 &= v \end{aligned}$$

- On peut alors élaborer une loi de commande classique $u(t) = Kz(t)$ afin de stabiliser le système en boucle fermée.

Principe général

Le principe général se résume comme suit:



système linéaire

Ainsi en boucle fermée, la relation entre l'entrée v et l'état z est un modèle linéaire.

- Quelques remarques sur la transformation $T(x)$:
  - ▷ Cette transformation doit être inversible pour retrouver $x = T^{-1}(z)$ pour tous les $z \in T(D)$.
  - ▷ Puisque les dérivées de x et de z sont continues, $T(.)$ et $T^{-1}(.)$ doivent être continues.
  - ▷ Notion de difféomorphisme
  - ▷ Notion de domaine de validité

Outil mathématique : le difféomorphisme

Definition (Difféomorphisme)

- Une transformation continuement différentiable avec une inverse continuement différentiable est appelée un difféomorphisme.
- Si la matrice Jacobienne $\frac{\partial T}{\partial x}$ est non-singulière en un point $x_0 \in D$, alors il existe un voisinage N de x_0 tel que la restriction de T sur N est un difféomorphisme.
- Une transformation T est applée un difféomorphisme global si c'est un difféomorphisme sur $\Re^n$ et $T(\Re^n) = \Re^n$.
- T est un difféomorphisme global si et seulement si $\frac{\partial T}{\partial x}$ est non-singulière $\forall x \in \Re^n$ et T est propre, c'est-à-dire, $\min\limits_{\|x\| \to \infty} \| T(x) \| = \infty$.

Système linéarisable par bouclage

Definition

Un système non-linéaire

$$\dot{x} = f(x) + G(x)u$$

où $f : D \to \Re^n$ et $G : D \to \Re^{n \times m}$ sont suffisamment lisses (i.e., toutes leurs dérivées partielles sont définies et continues) sur un domaine D, est dit linéarisable par bouclage ou entrée/état linéarisable s'il existe un difféomorphisme $T : D \to \Re^n$ tel que

- ▷ $D_z = T(D)$ contient l'origine et le changement de variables $z = T(x)$ transforme le système en :

$$\dot{z} = Az + B\gamma(x)(u - \alpha(x))$$

- ▷ avec la paire (A, B) contrôlable et $\gamma(x)$ inversible $\forall x \in D$.

- Exemple 1 : $z = T(x) = x$. Exemple 2 : $z = T(x) = \begin{bmatrix} z_1 = x_1 \\ z_2 = \dot{x}_1 = asin(x_2) \end{bmatrix}$

Quelques questions/remarques.

- Comment trouver une transformation T adéquate et avec quel domaine de validité ?
- Il faut connaître assez précisément les paramètres du modèle sinon cela peut entraîner des erreurs importantes. En effet la transformation T s'appuie sur la connaissance de ces paramètres.
- Notion de robustesse

Principe de la linéarisation entrée/sortie

- Quand certaines variables de sortie sont d'intérêt comme dans le cas du problème de poursuite, le modèle considéré est décrit par des équations d'état et de sortie.
  - ▷ La linéarisation de l'équation d'état ne linéarise pas nécessairement l'équation de la sortie.
- Les problèmes de poursuite dans le cas des systèmes non-linéaires sont difficiles car la sortie peut dépendre de l'entrée et/ou de l'état de manière très complexe.
  - ▷ Il n'est pas aussi facile qu'en linéaire de calculer l'entrée permettant d'obtenir la sortie désirée.
- Linéarisation entrée/sortie. L'idée consiste, si c'est possible, à simplifier la relation entrée-sortie.
  - ▷ Nous allons voir que cette technique utilise les dérivées de la sortie.

Exemple

- Soit le système non-linéaire

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= sin(x_2) + (x_2 + 1)x_3 \\ \dot{x}_2 &= x_1^5 + x_3 \\ \dot{x}_3 &= x_1^2 + u \\ y &= x_1 \end{aligned}$$

- On calcule la première dérivée de la sortie

$$\dot{y} = sin(x_2) + (x_2 + 1)x_3$$

- La seconde dérivée nous donne une relation entrée/sortie

$$\ddot{y} = (x_2 + 1)u + (x_1^5 + x_3)(x_3 + cos(x_2)) + (x_2 + 1)x_1^2$$

Exemple (2)

- On choisit une loi de commande permettant de linéariser la relation entre y et une nouveau signal de commande. L'entrée est $u = \frac{1}{(x_2+1)}(v - (x_1^5 + x_3)(x_3 + cos(x_2)) - (x_2 + 1)x_1^2)$.
  Cette loi de commande est possible dans un domaine $\mathbb{D}$ qui exclut $x_2 = -1$.
- On obtient le système linéarisé

$$\ddot{y} = v$$

On peut alors définir des lois de commande permettant de poursuivre une référence $y_d(t)$.

- On définit l'erreur de poursuite $e = y - y_d$
- On choisit comme nouvelle entrée

$$v = \ddot{y}_d - k_1 e - k_2 \dot{e}$$

- Pour k_1 et k_2 positifs, l'erreur vérifie

$$\ddot{e} + k_2 \dot{e} + k_1 e = 0$$

  - ▷ Si les conditions initiales sur e sont nulles, alors on poursuit de manière exacte la trajectoire de référence. Sinon e converge exponentiellement vers zéro.

Remarques

- La transformation est valable pour $x_2 \neq -1$.
- Pour appliquer la commande, il faut connaître l'état car il intervient dans l'expression de u et v.
- On s'aperçoit qu'il a fallu dériver deux fois la sortie pour arriver au modèle linéaire entrée/sortie. On appelle ce nombre le degré relatif du système.
- En linéaire, ce degré correspond à la différence entre le degré du numérateur et celui du dénominateur de la fonction de transfert si le système est commandable et observable.

Exemple d'un système linéaire

On considère un modèle linéaire défini par sa fonction de transfert $G(p) = \frac{p+a}{(p+1)(p+2)}$.

1. Déterminer un modèle d'EE par la méthode de votre choix.
2. Appliquer la méthode proposée (dérivées successives) pour établir une relation entrée-sortie la plus simple possible.
3. Elaborer une loi de commande permettant de poursuivre la référence $\sin(t)$.
4. Le système en boucle fermée est-il stable?

Remarques (sur les deux exemples)

- On se rend compte également que l'équation définissant la dynamique de l'erreur est d'ordre différent que l'ordre du système alors que la loi de commande ne rajoute pas d'état.
- Cela signifie qu'une partie du système n'apparaît pas dans ces équations. En fait, on l'a rendue inobservable
- On appelle cette partie la dynamique interne.
- Pour résoudre le problème de poursuite, il faut s'assurer qu'elle est stable sinon le système n'aura pas le comportement souhaité.

Toutes ces remarques et les problèmes qu'elles soulèvent doivent trouver une réponse si l'on veut connaître les limitations et les avantages de cette technique.

Introduction

- La dynamique interne d'un système linéaire est liée à la notion de minimum de phase.
  - Nous verrons un peu plus loin comment est définie la dynamique interne dans le contexte non-linéaire.
  - Il est intéressant de définir le concept de minimum de phase pour les systèmes non-linéaires et étudier les rapports qu'il peut y avoir avec la stabilité de la dynamique interne.
  - Dans le cas linéaire, cette définition est assez simple car indépendante de la commande.
  - Ce n'est pas le cas pour les systèmes non-linéaires.

Exemple

- Soit le système linéaire

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2 + u \\ \dot{x}_2 &= u \\ y &= x_1 \end{aligned}$$

- En dérivant la sortie on a $\dot{y} = x_2 + u$ qui traduit la relation entrée/sortie.
- En prenant $u = -x_2 + \dot{y}_d + (y_d - y)$ et $e = y_d - y$ on a $\dot{e} + e = 0$
- La dynamique interne est obtenue en remplaçant u dans la deuxième équation d'état, soit $\dot{x}_2 + x_2 = \dot{y}_d + e$
- Ce dernier système est asymptotiquement stable et donc BIBO stable.
- Le problème de poursuite est donc résolu de manière satisfaisante.

Exemple

- Soit le système linéaire

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2 + u \\ \dot{x}_2 &= -u \\ y &= x_1 \end{aligned}$$

- En appliquant la même procédure que pour l'exemple 4, la dynamique interne est $\dot{x}_2 - x_2 = -\dot{y}_d - e$
- Problème de stabilité !!!
  - ▷ La commande semble ne pas être adaptée pour traiter le problème de poursuite posé.

Conclusion

- La seule différence entre les deux exemples est que le système de l'exemple 4 est à minimum de phase et pas celui de l'exemple 5.
  - ▷ Cette propriété structurelle est à l'origine du problème.
  - ▷ Lorsque le système est à minimum de phase, il n'y aura pas de problème de stabilité pour la dynamique interne.

Necessité de développer des outils théoriques

- Pour développer un peu plus précisément les techniques de linéarisation par bouclage nous avons besoin d'introduire certains outils de géométrie différentielle qui est une branche des mathématiques.
- Définissons tout d'abord ce que sont un champs de vecteurs et la matrice Jacobienne.
- Champs de vecteurs. Un champs de vecteurs f est une fonction de $\Re^n$ dans $\Re^n$.
  - ▷ Le champs de vecteurs f est lisse si ses dérivées partielles jusqu'à un ordre qui dépend du contexte sont continues.
  - ▷ Chaque composante de f notée f_i est une fonction scalaire d'un vecteur. On définit son gradient comme

$$\nabla f_i = \frac{\partial f_i}{\partial x} = \left[\frac{\partial f_i}{\partial x_j}\right]_{j=1,\ldots,n} = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_i}{\partial x_1} & \ldots & \frac{\partial f_i}{\partial x_n} \end{bmatrix}$$

C'est un vecteur ligne.

La matrice Jacobienne

- Matrice Jacobienne (ou Jacobien). La matrice Jacobienne du champs de vecteur f est définie sans ambiguité de la même manière

$$\nabla f = \left[\frac{\partial f_i}{\partial x}\right]_i = \left[\frac{\partial f_i}{\partial x_j}\right]_{ij}$$

  - ▷ Il s'agit dans ce cas d'une matrice de dimensions $n \times n$.
  - ▷ Exemple. Pour $n = 2$ on a $\nabla f = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} \end{bmatrix}$
- Nous allons maintenant définir les outils que sont les dérivées de Lie et Crochets de Lie ou encore le théorème de Frobenius en essayant de les interpréter.

La Dérivée de Lie - Crochets de Lie

Definition

Soit une fonction scalaire lisse h de $\Re^n \to \Re$ et un champs de vecteurs lisse f de $\Re^n \to \Re^n$, la dérivée de Lie de h par rapport à f est une fonction scalaire définie par

$$L_f h = \nabla h.f = \frac{\partial h}{\partial x} f$$

-
- Interprétation. La dérivée de Lie n'est rien d'autre que la dérivée directionnelle le long du vecteur f. Si g est un autre champs de vecteur, alors on a

$$L_g L_f.h = \nabla(L_f h).g$$

Calcul des Dérivée de Lie successives

- Le calcul des dérivées successives se fait de manière récursive comme suit :

$$\begin{aligned} L_f^0 h &= h \\ L_f^1 h &= \nabla h.f \\ &\vdots \\ L_f^i h &= L_f(L_f^{i-1}h) = \nabla(L_f^{i-1}h).f = \frac{\partial L_f^{i-1}h}{\partial x} f \ \text{ pour } \ i = 1, 2, \ldots \end{aligned}$$

Exemple

- Considérons le système non-linéaire

$$\begin{aligned} \dot{x} &= f(x) \\ y &= h(x) \end{aligned}$$

  - ▷ On considére les dérivées de la sortie :

$$\begin{aligned} \dot{y} &= \frac{\partial h}{\partial x}\dot{x} = L_f h \\ \ddot{y} &= \frac{\partial (L_f.h)}{\partial x} f = L_f^2 h \\ y^{(3)} &= \frac{\partial (L_f^2.h)}{\partial x} f = L_f^3 h \\ &\vdots \\ y^{(k)} &= \frac{\partial (L_f^{k-1}.h)}{\partial x}\dot{x} = L_f^k h \end{aligned}$$

  - ▷ Les notations introduites permettent de transformer des expressions complexes en des expressions plus concises et déterminées systématiquement.

Exemple

- Considérons le système linéaire

$$\begin{aligned} \dot{x} &= Ax + Bu \\ y &= Cx \end{aligned}$$

  - ▷ On a donc $f(x) = Ax$, $g(x) = B$ et $h(x) = Cx$.
  - ▷ On considére les dérivées de la sortie :

$$\begin{aligned} \dot{y} &= \frac{\partial h}{\partial x}\dot{x} = L_f h = CAx + CBu \\ \ddot{y} &= \frac{\partial (L_f.h)}{\partial x} f = L_f^2 h = CA^2 x + CABu + CB\dot{u} \\ y^{(3)} &= \frac{\partial (L_f^2.h)}{\partial x} f = L_f^3 h = CA^3 x \\ &\vdots \\ y^{(k)} &= \frac{\partial (L_f^{k-1}.h)}{\partial x}\dot{x} = L_f^k h = CA^k x + \sum_{j=0}^{k-1} CA^{k-1-j} Bu^{(j)} \end{aligned}$$

  - ▷ Nous verrons un peu plus loin quelle interprétation donner à ces dérivées en linéaire.

Le Crochet de Lie

Nous définissons maintenant un autre outil important : le crochet de Lie entre deux champs de vecteurs.

Definition

Soient f et g deux champs de vecteurs. Le crochet de Lie entre f et g est un champs de vecteur défini par

$$[f,g] = \nabla g.f - \nabla f.g = \frac{\partial g}{\partial x} f - \frac{\partial f}{\partial x} g$$

On note également le crochet de Lie entre f et g

$$[f,g] = ad_f g \text{ (}ad\text{ pour adjoint)}$$

et de manière récursive

$$\begin{aligned} ad_f^0 g &= g \\ ad_f^1 g &= [f,g] \\ ad_f^2 g &= [f,[f,g]] \\ &\vdots \\ ad_f^i g &= [f, ad_f^{i-1} g] \end{aligned}$$

Exemple

- Considérons le système non-linéaire

$$\begin{aligned}\dot{x} &= f(x) + g(x)u \\ \text{avec} \quad & f(x) = \begin{bmatrix} x_2 \\ -sin(x_1) - x_2 \end{bmatrix}; g(x) = \begin{bmatrix} 0 \\ x_1 \end{bmatrix}\end{aligned}$$

- On calcule les dérivées :

$$\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial x} &= \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial x_1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -cos(x_1) & -1 \end{bmatrix} \\ \frac{\partial g}{\partial x} &= \begin{bmatrix} \frac{\partial g_1}{\partial x_1} & \frac{\partial g_1}{\partial x_2} \\ \frac{\partial g_2}{\partial x_1} & \frac{\partial g_2}{\partial x_1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}\end{aligned}$$

Exemple

- On calcule les crochets de Lie et on obtient :

$$
\begin{aligned}
[f,g] &= \frac{\partial g}{\partial x} f - \frac{\partial f}{\partial x} g \\
&= \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_2 \\ -sin(x_1) - x_2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -cos(x_1) & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ x_1 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} -x_1 \\ x_1 + x_2 \end{bmatrix} \\
ad_f^2 g &= [f,[f,g]] \\
&= \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_2 \\ -sin(x_1) - x_2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -cos(x_1) & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -x_1 \\ x_1 + x_2 \end{bmatrix}
\end{aligned}
$$

Propriétés des Crochets de Lie

- Nous pouvons décrire quelques propriétés des crochets de Lie.
  - ▷ Bilinéarité. Soient f, f_1, f_2, g, g_1 et g_2 des champs de vecteurs lisses et soient α et β deux scalaires, on a

$$\begin{aligned} [\alpha f_1 + \beta f_2, g] &= \alpha\,[f_1, g] + \beta\,[f_2, g] \\ [f, \alpha g_1 + \beta g_2] &= \alpha\,[f, g_1] + \beta[f, g_2] \end{aligned}$$

  - ▷ Antisymétrie. Soient f et g deux champs de vecteurs, on a

$$[f, g] = -[g, f]$$

  - ▷ Identité de Jacobi. Soient f et g deux champs de vecteurs lisses et h une fonction scalaire lisse, on a

$$L_{ad_f g} h = \nabla h.[f, g] = L_f L_g h - L_g L_f h$$

Difféomorphisme

Nous avons vu précédemment la notion de difféomorphisme.

Definition

- Une transformation continuement différentiable avec une inverse continuement différentiable est appelée un difféomorphisme.
- Si la matrice Jacobienne $\frac{\partial T}{\partial x}$ est non-singulière en un point $x_0 \in D$, alors il existe un voisinage N de x_0 tel que la restriction de T sur N est un difféomorphisme.
- Une transformation T est applée un difféomorphisme global si c'est un difféomorphisme sur $\Re^n$ et $T(\Re^n) = \Re^n$.
- T est un difféomorphisme global si et seulement si $\frac{\partial T}{\partial x}$ est non-singulière $\forall x \in \Re^n$ et T est propre, c'est-à-dire, $\min\limits_{\|x\| \to \infty} \| T(x) \| = \infty$.

Objectifs du Théorème de Frobenius

- Le théorème de Frobenius donne des conditions sur la notion de solution complètement intégrable.
  - ▷ Les notions de distribution, distribution non-singulière, distribution involutive peuvent aussi être introduites.

Exemple

- Considérons les champs de vecteurs f et g et la fonction scalaire h

$$f(x) = \left[\begin{array}{c} f_1(x_1,x_2,x_3) \\ f_2(x_1,x_2,x_3) \\ f_3(x_1,x_2,x_3) \end{array}\right] \;;\; g(x) = \left[\begin{array}{c} g_1(x_1,x_2,x_3) \\ g_2(x_1,x_2,x_3) \\ g_3(x_1,x_2,x_3) \end{array}\right] \;;\; h(x) = h(x_1,x_2,x_3)$$

- Considérons les équations suivantes :

$$\begin{array}{rcl} \frac{\partial h}{\partial x_1} f_1 + \frac{\partial h}{\partial x_2} f_2 + \frac{\partial h}{\partial x_3} f_3 & = & 0 \\ \frac{\partial h}{\partial x_1} g_1 + \frac{\partial h}{\partial x_2} g_2 + \frac{\partial h}{\partial x_3} g_3 & = & 0 \end{array}$$

  ▷ f et g sont connues et on cherche une solution h.

Le théorème de Frobenius

- Si une solution h existe, le couple de champs de vecteurs (f, g) est dit complètement intégrable.
  - Le théorème de Frobénius donne une condition nécessaire et suffisante pour l'existence d'une solution.
  - S'il existe deux fonctions scalaires $\beta_1(x_1, x_2, x_3)$ et $\beta_2(x_1, x_2, x_3)$ pour lesquelles le crochet de Lie vérifie : $[f, g] = \beta_1 f + \beta_2 g$, alors il existe une solution h au système d'équations.
  - Le couple (f, g) est dit involutif : le crochet de Lie est une combinaison linéaire des champs de vecteurs f et g.

Le Théorème de Frobenius : généralisation

Nous généralisons ce que nous venons de voir dans l'exemple pour un ensemble de m champs de vecteurs.

Definition

Considérons f_1, f_2,..., f_m, un ensemble de m champs de vecteurs de $\Re^n$ linéairement indépendants. On dit que cet ensemble est complètement intégrable si et seulement s'il existe $n-m$ fonctions scalaires $h_1(x)$, $h_2(x)$,...,$h_{n-m}(x)$ telles que

$$\nabla h_i f_j = L_{f_j} h_i = 0 \ , \ i = 1, ..., n-m, \ 1 \leq j \leq m$$

et si les gradients ∇h_i sont linéairement indépendants.

Il est important de noter que si l'on a m champs de vecteurs, le nombre de fonctions inconnues est $n-m$, où n est la dimension de x et le nombre d'équations aux dérivées partielles est $m(n-m)$.

- Dans l'exemple : $n = 3$, $m = 2$ et $n - m = 1$.

Théorème de Frobenius

Definition

Considérons f_1, f_2,..., f_m, un ensemble de m champs de vecteurs de $\Re^n$ linéairement indépendants. On dit que cet ensemble est involutif si et seulement s'il existe des fonctions scalaires α_{ijk} de $\Re^n$ dans $\Re$ telles que

$$[f_i, f_j] = \sum_{k=1}^{m} \alpha_{ijk}(x) f_k(x)$$

-
- Cette définition est une généralisation de la notion présentée dans l'exemple précédent.
  - ▷ Si la condition de la définition est satisfaite, alors

$$rang[(f_1(x)...f_m(x))] = rang[(f_1(x)...f_m(x)\ [f_i, f_j](x))]$$

pour tout x, i et j.

Exemple

- Considérons f_1 et f_2, un ensemble de 2 champs de vecteurs de $\Re^3$:

$$f_1(x) = \begin{bmatrix} 2x_2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \; ; \; f_2(x) = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

- On a : $[f_1, f_2] = \frac{\partial f_2}{\partial x} f_1 - \frac{\partial f_1}{\partial x} f_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$
- On a : $rang[(f_1, f_2)] = 2$ MAIS

$$rang[(f_1, f_2, [f_1, f_2])] = rang \begin{bmatrix} 2x_2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & x_2 & 1 \end{bmatrix} = 3 \; , \; \forall x \in \Re^3$$

▷ L'ensemble de champs de vecteur n'est pas involutif.

Le Théorème de Frobenius

- Nous pouvons maintenant donner une condition nécessaire et suffisante de complète intégrabilité de l'ensemble f_1, f_2,...,f_m.

Theorem

Soient f_1, f_2,..., f_m un ensemble de m champs de vecteurs de $\Re^n$ linéairement indépendants. Cet ensemble est complètement intégrable si et seulement s'il est involutif.

-
- Il est important de souligner que ce théorème donne une condition d'existence, et pas une méthode permettant de calculer une solution.

Introduction (1)

- Nous allons présenter quelques résultats théoriques dans le cadre de la linéarisation entrée/état.
  - ▷ Nous considérons les systèmes avec une seule entrée : $m = 1$.
  - ▷ Nous allons voir comment les outils précédemment décrits sont utilisés.
  - ▷ Nous allons utiliser la notion de forme normale
- Considérons le système non-linéaire suivant :

$$\dot{x} = f(x) + g(x)u \tag{12}$$

où f et g sont des champs de vecteurs lisses.

Introduction (2)

- **Définition 6.** Le système (12) est dit entrée/état linéarisable s'il existe
  - une région D de $\Re^n$
  - un difféomorphisme T de D dans $\Re^n$
  - et un retour d'état non-linéaire

$$u = \alpha(x) + \gamma(x)v \tag{13}$$

qui permet de ramener le système (12) sous la forme

$$\dot{z} = Az + Bv \tag{14}$$

avec $z = T(x)$; $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & . \\ 0 & 0 & 1 & 0 & . \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix}$; $B = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$

- z est appelé l'état linéarisant et u est la commande linéarisante.

Résultats théoriques

Le principal résultat théorique s'énonce comme suit.

Theorem

Le système non-linéaire (12) où f et g sont des champs de vecteurs lisses est entrée/état linéarisable si et seulement s'il existe une région D telle que

1. *Les champs de vecteurs g, $ad_f g$, $ad_f^2 g$,..., $ad_f^{n-1} g$, sont linéairement indépendants dans D*
2. *L'ensemble des champs de vecteurs g, $ad_f g$, $ad_f^2 g$,..., $ad_f^{n-2} g$ est involutif dans D.*

Interprétation du résultat de linéarisation entrée-état

- Nous donnons maintenant quelques éléments d'interprétation sur ce résultat.
- Regardons tout d'abord quelle est l'interprétation de la condition 1 du théorème.
  - ▷ Dire que les vecteurs g, $ad_f g$, $ad_f^2 g$,..., $ad_f^{n-1} g$, sont linéairement indépendants dans D, revient à dire que $rang \begin{bmatrix} g & ad_f g & ad_f^2 g & \dots & ad_f^{n-1} g \end{bmatrix} = n$, $\forall x \in D$.
  - ▷ Prenons un exemple pour voir un peu plus finement ce que cette condition signifie.

Exemple

- Considérons le système (12) où f et g sont définies par :

$$f(x) = Ax\ ;\ g(x) = B$$

- La condition 1 du théorème s'écrit comme :

$$\begin{aligned} rang\left[\begin{array}{ccccc} g & ad_f g & ad_f^2 g & \dots & ad_f^{n-1} g \end{array}\right] &= rang\left[\begin{array}{ccccc} B & AB & A^2B & \dots & A^{n-1} \end{array}\right. \\ &= n \end{aligned}$$

  ▷ Cette condition correspond donc en linéaire à la condition de commandabilité qui garantit son inversibilité.

- On peut également vérifier que la condition 2 est aussi satisfaite.

Un résultat de commandabilité ?

- La condition 1 peut être vue comme une généralisation de la condition de commandabilité.
- Considérons l'approximation linéaire du système non-linéaire dans une région connexe D :
  - ▷ On peut amener le système d'un point de D à un autre point de D.
  - ▷ Cependant, il est important de noter qu'un système non-linéaire peut être commandable alors que son approximation linéaire ne l'est pas.
  - ▷ C'est une autre particularité des systèmes non-linéaires.

Exemple

- Considérons le système (12) où f et g sont définies par :

$$f(x) = \begin{bmatrix} asin(x_2) \\ -x_1^2 \end{bmatrix} \; ; \; g(x) = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

  - ▷ On a $ad_f g = [f, g] = \frac{\partial f}{\partial x} g = \begin{bmatrix} -acos(x_2) \\ 0 \end{bmatrix}$

- La condition 1 du théorème s'écrit comme :

$$rang \begin{bmatrix} g & ad_f g \end{bmatrix} = rang \begin{bmatrix} 0 & -acos(x_2) \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

  - ▷ On peut vérifier que le *rang* est égale à 2 pour tout x tel que $cos(x_2) \neq 0$.

- On peut ainsi vérifier que les conditions du théorème 2 sont satisfaites dans le domaine $D = \{x \in \Re^2; cos(x_2) \neq 0\}$.

Procédure (1)

- Dans le contexte linéarisation entrée/état, on peut utiliser la procédure suivante.
  1. On construit les champs de vecteurs $ad_f g$, $ad_f^2 g$,..., $ad_f^{n-1} g$
  2. On vérifie les 2 conditions d'existence du théorème 2, c'est-à-dire la condition de commandabilité et la condition d'involutivité
  3. Si les 2 conditions d'existence du théorème 2 sont satisfaites, alors on cherche la fonction $T_1(x)$ telle que

$$\begin{aligned} \nabla T_1 ad_f^i g &= 0 \ ; \ i = 0, \cdots, n-2 \\ \nabla T_1 ad_f^{n-1} g &\neq 0 \end{aligned}$$

Procédure (2)

4. On calcule la transformation linéarisante

$$T(x) = \begin{bmatrix} T_1(x) \\ L_f\, T_1(x) \\ \vdots \\ L_f^{n-1}\, T_1(x) \end{bmatrix}$$

5. On calcule la commande linéarisante $u = \alpha(x) + \gamma(x)v$ avec

$$\alpha(x) = -\frac{L_f^n\ T_1}{L_g\, L_f^{n-1}\, T_1} \ \ ; \ \ \gamma(x) = \frac{1}{L_g\, L_f^{n-1}\, T_1}$$

Exemple

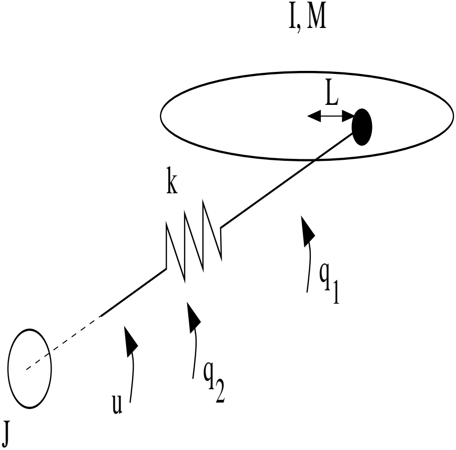
- Considérons les équations dynamiques d'un robot manipulateur avec un seul lien et des joints flexibles :

$$\begin{aligned} I\ddot{q}_1 + MgL\, sin\, q_1 + k(q_1 - q_2) &= 0 \\ J\ddot{q}_2 - k(q_1 - q_2) &= u \end{aligned}$$

  - q_1 et q_2 sont les positions angulaires.
  - I et J sont les moments d'inertie.
  - k est la constante de raideur.
  - M est la masse totale.
  - L est une distance.
  - u est la commande en couple.

Exemple

- Ce système mécanique est illustré sur la figure qui suit.



- Il s'agit dans un premier temps de choisir les variables d'état pour définir les équations d'état sur lesquelles on va travailler.

Exemple

- Nous considérons donc le vecteur d'état :

$$x = \left[\begin{array}{cccc} q_1 & \dot{q}_1 & q_2 & \dot{q}_2 \end{array} \right]' \in \Re^4$$

- On a donc le système $\dot{x} = f(x) + g(x)u$ avec

$$\begin{aligned} f(x) &= \left[\begin{array}{c} x_2 \\ -\frac{MgL}{I} sin(x_1) - \frac{k}{I}(x_1 - x_3) \\ x_4 \\ \frac{k}{J}(x_1 - x_3) \end{array} \right] \\ g(x) &= \left[\begin{array}{c} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \frac{1}{J} \end{array} \right] \end{aligned}$$

Exemple

- Nous appliquons la procédure de linéarisation.
- Considérons les Etapes 1 et 2.
  - ▷ On vérifie tout d'abord la condition 1 du théorème 2 (condition de commandabilité).

$$\begin{bmatrix} g & ad_f g & ad_f^2 g & ad_f^3 g \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & -\frac{k}{IJ} \\ 0 & 0 & \frac{k}{IJ} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{J} & 0 & \frac{k}{J^2} \\ \frac{1}{J} & 0 & -\frac{k}{J^2} & 0 \end{bmatrix}$$

  - ▷ Le rang de cette matrice est égale à 4.
  - ▷ On vérifie ensuite la condition 2 du théorème 2 (condition d'involutivité). L'involutivité est vérifiée car le champs de vecteur $\begin{bmatrix} g & ad_f g & ad_f^2 g \end{bmatrix}$ est constant.

Exemple

- Considérons l'Etape 3
  - ▷ On cherche la fonction $T_1(x)$ telle que

$$\begin{array}{rcl} \nabla T_1 ad_f^i g & = & 0 \;\; ; \;\; i = 0, 1, 2 \\ \nabla T_1 ad_f^3 g & \neq & 0 \end{array}$$

  - ▷ Ceci nous donne :

$$\frac{\partial T_1}{\partial x_2} = 0, \; \frac{\partial T_1}{\partial x_3} = 0, \; \frac{\partial T_1}{\partial x_4} = 0, \; \frac{\partial T_1}{\partial x_1} \neq 0$$

  - ▷ On peut choisir $T_1(x) = x_1$

Exemple

- Considérons l'Etape 4.
  - ▷ On construit la transformation $T(x)$

$$T(x) = \begin{bmatrix} T_1(x) \\ L_f T_1(x) \\ L_f^2 T_1(x) \\ L_f^3 T_1(x) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ -\frac{MgL}{I} sin(x_1) - \frac{k}{I}(x_1 - x_3) \\ -\frac{MgL}{I} x_2 cos(x_1) - \frac{k}{I}(x_2 - x_4) \end{bmatrix}$$

- Considérons l'Etape 5.
  - ▷ On calcule la commande linéarisante $u = \alpha(x) + \gamma(x)v$ avec

$$\alpha(x) = -\frac{L_f^4 \; T_1}{L_g L_f^3 T_1} \;\; ; \;\; \gamma(x) = \frac{1}{L_g L_f^3 T_1}$$

  - ▷ On a $u = \frac{IJ}{k}(v - a(x))$ avec

$$a(x) = \frac{MgL}{I} sin(x_1)({x_2}^2 + \frac{MgL}{I} cos(x_1) + \frac{k}{I}) + \frac{k}{I}(x_1 - x_3)(\frac{k}{I} + \frac{k}{J} + \frac{MgL}{I} cos(x_1))$$

Exemple

- Quelques remarques.
  - Avec cette loi de commande, le système linéaire obtenu est

$$\begin{aligned}\dot{z}_1 &= z_2\\ \dot{z}_2 &= z_3\\ \dot{z}_3 &= z_4\\ \dot{z}_4 &= v\end{aligned}$$

  - Il est important de noter que le difféomorphisme utilisé est global : c'est-à-dire que le domaine $D = \Re^4$.
  - De la même manière, la linéarisation par bouclage est globale.
  - La transformation inverse est alors :

$$\begin{aligned}x_1 &= z_1\\ x_2 &= z_2\\ x_3 &= z_1 + \frac{I}{k}\left(z_3 + \frac{MgL}{I} sin(z_1)\right)\\ x_4 &= z_2 + \frac{I}{k}\left(z_4 + \frac{MgL}{I} z_2 cos(z_1)\right)\end{aligned}$$