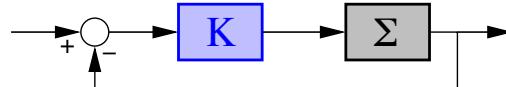


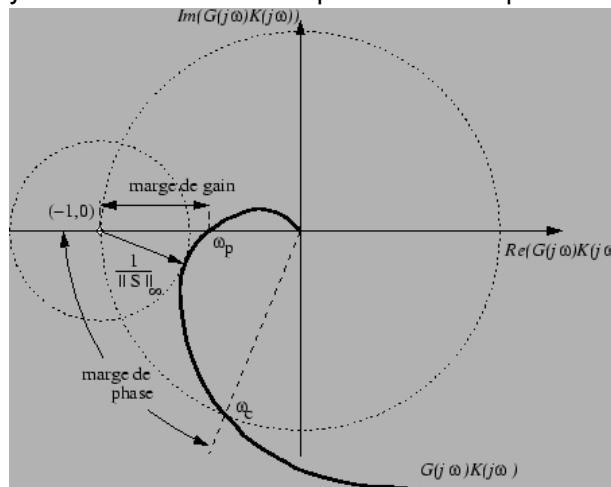
Cours 3 - Stabilité robuste et théorème du petit-gain

Stabilité robuste et théorème du petit-gain

■ Stabilité robuste - Sur la base du critère de Nyquist (systèmes SISO)



- Plus le lieu de Nyquist de ΣK est distant du point -1 plus on peut attendre de robustesse
- ▲ Marge de gain : de combien augmenter/diminuer le gain de ΣK sans couper -1
- ▲ Marge de phase : de combien augmenter/diminuer la phase de ΣK sans couper -1
- ▲ Marge de module : rayon maximal du cercle autour de -1 qui ne coupe pas ΣK
- ▲ Marge de module : rayon des cercles en tout point de ΣK qui ne coupent pas -1 .



■ Stabilité robuste - Marge de module SISO

▲ Marge de module : rayon maximal du cercle autour de -1 qui ne coupe pas ΣK

$$r = \min_{\omega} |1 + \Sigma(j\omega)K(j\omega)| = \frac{1}{\max_{\omega} |1 + \Sigma(j\omega)K(j\omega)|^{-1}}$$

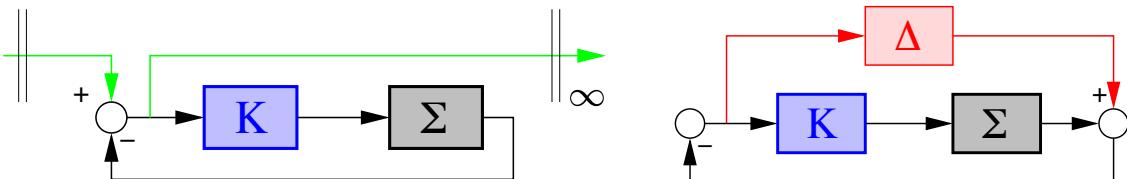
▲ Marge de module : rayon des cercles en tout point de ΣK qui ne coupent pas -1 .

■ Stabilité robuste - Marge de module MIMO

▲ Marge de module : inverse de la norme H_{∞} de la fonction de sensibilité $S = (1 + \Sigma K)^{-1}$

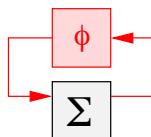
$$r = \min_{\omega} \underline{\sigma}(1 + \Sigma(j\omega)K(j\omega)) = \frac{1}{\max_{\omega} \overline{\sigma}(S(j\omega))} = \|S\|_{\infty}^{-1}$$

▲ Marge de module : norme maximale des incertitudes additives sur ΣK : $\|\Delta\|_{\infty} \leq r$



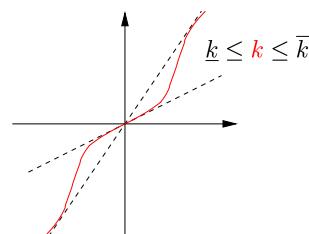
Stabilité robuste et théorème du petit-gain

■ Stabilité robuste - Problème de Lur'e



▲ $\phi \in [-\bar{k}, -\underline{k}]$ gain TV,NL borné dans un secteur

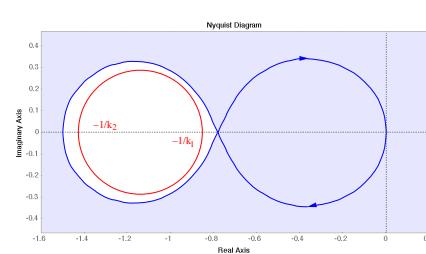
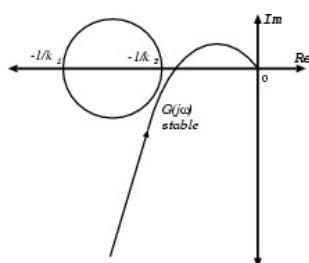
▲ $\Sigma = T(j\omega)$ fonction de transfert



● Critère du cercle :

▲ Pour une valeur $k \in [-\bar{k}, -\underline{k}]$ la boucle fermée est stable

▲ Le tracé de Nichols ne coupe pas le cercle de diamètre $[-1/\underline{k}, -1/\bar{k}]$



■ Stabilité robuste - Théorème du petit gain - [Zhou et al.(1996) Zhou, Doyle, and Glover]

Σ est stable et $\|\Sigma\|_\infty < \mu$

si et seulement si

la boucle fermée $\Delta \star \Sigma$ est stable pour toute incertitude causale stable telle que $\|\Delta\|_\infty \leq \frac{1}{\mu}$

Stabilité robuste et théorème du petit-gain

● Preuve suffisance :

▲ Pour tout $\tau \in [0, 1]$ on a $\tau \|\Delta\|_\infty \|\Sigma\|_\infty < 1$

On en déduit $\|\Sigma[\tau\Delta]\|_\infty < 1 \quad \forall \tau \in [0, 1] \quad \forall \|\Delta\|_\infty \leq \frac{1}{\mu}$

C'est à dire $\bar{\sigma}(\Sigma(j\omega)[\tau\Delta(j\omega)]) < 1 \quad \forall \tau \in [0, 1] \quad \forall \|\Delta\|_\infty \leq \frac{1}{\mu} \quad \forall \omega$

$[1 - \Sigma(j\omega)[\tau\Delta(j\omega)]]$ est inversible $\forall \tau \in [0, 1] \quad \forall \|\Delta\|_\infty \leq \frac{1}{\mu} \quad \forall \omega$

$$\begin{bmatrix} 1 & -\Sigma(j\omega) \\ -\tau\Delta(j\omega) & 1 \end{bmatrix}$$
 est inversible $\forall \tau \in [0, 1] \quad \forall \|\Delta\|_\infty \leq \frac{1}{\mu} \quad \forall \omega$

(A) La propriété est vraie $\forall \tau \in [0, 1]$ et $s = j\omega$ sur l'axe imaginaire = frontière de \mathbb{C}^+

▲ Σ est stable donc
$$\begin{bmatrix} 1 & -\Sigma(s) \\ -0\Delta(s) & 1 \end{bmatrix}$$
 propre et inversible $\forall \|\Delta\|_\infty \leq \frac{1}{\mu} \quad \forall s \in \mathbb{C}^+$

(B) La propriété est vraie pour $\tau = 0$ et $s \in \mathbb{C}^+$

▲ Argument de continuité : Pour que la propriété soit fausse pour $\tau = 1$ et un $s \in \mathbb{C}^+$ il faut qu'elle soit à la limite entre validité et non-validité pour un certain $\tau \in]0, 1[$. C'est à dire qu'il existe $\tau \in]0, 1[$ et $s = j\omega$ qui contredise (A).

- Preuve de la nécessité - Supposons $\|\Sigma\|_\infty = \mu + \epsilon$

$$\Rightarrow \exists \omega_0, \exists y (y^*y = (\mu + \epsilon)^2), \exists u (u^*u = 1) : y = \Sigma(j\omega_0)u$$

En prenant $\Delta = \frac{1}{(\mu+\epsilon)^2} uy^*$ on a $(1 - \Delta\Sigma(j\omega_0))u = 0$

i.e. Δ rend la boucle mal posée, donc instable, et on a

$$\|\Delta\|_\infty^2 = \frac{1}{(\mu + \epsilon)^4} \sigma_{\max}(yu^*uy^*) = \frac{1}{(\mu + \epsilon)^4} \sigma_{\max}(yy^*) = \frac{1}{(\mu + \epsilon)^2} < \frac{1}{\mu^2}$$

- ▲ Ici Δ est une matrice à valeurs complexes

On peut aussi construire $\Delta(s)$ modèle LTI à coefficient réels qui coïncide pour $s = j\omega_0$

[Scherer()]

```

>> H=tf([1 2 3],[3 5 2 3])
>> pole(H)
>> bode(H)
>> norm(H,inf)
>> wcg = wcgain(H)
>> dwc = 1/evalfr(H,j*wcg.CriticalFrequency)
>> abs(dwc)
>> Hwc = feedback ( H, -dwc )
>> pole( Hwc )

```

```

>> s=ss;
>> s.a=[-1 1 0 0;-1.5 -1 0 0;0 0 -2 2;0 0 -20 -2];
>> s.b=eye(4); s.c=eye(4);
>> norm(s,Inf)
>> sigma(s)
>> wcg = wcgain(s)
>> km=1/wcg.UpperBound;
>> pole( lft( s, km*eye(4) ) )
>> D=unb(4,4,km)
>> pole( lft( s, usample(D) ) )
>> Dtest=usample(D); Dtest=km/norm(Dtest)*Dtest
>> pole( lft( s, Dtest ) )
>> swc = evalfr(s, j*wcg.CriticalFrequency)
>> [U,S,V]=svd(swc)
>> deltawc = 1/S(1)*V(:,1)*U(:,1)'
>> norm(deltawc)
>> pole( lft( s, Deltawc ) )

```

Stabilité robuste et théorème du petit-gain

■ Exemple : système à retard

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + A_d x(t - \tau)$$

● Factorisation de $A_d = B_d C_d$

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) + B_d w_d(t) \\ z(t) = C_d x(t) \end{cases}, \quad w(t) = z(t - \tau)$$

● Opérateur retard $e^{-s\tau}$ = opérateur borné dans disque unité quand $s \in \mathbb{C}^+$

$$\|e^{-j\omega\tau}\|_\infty = 1$$

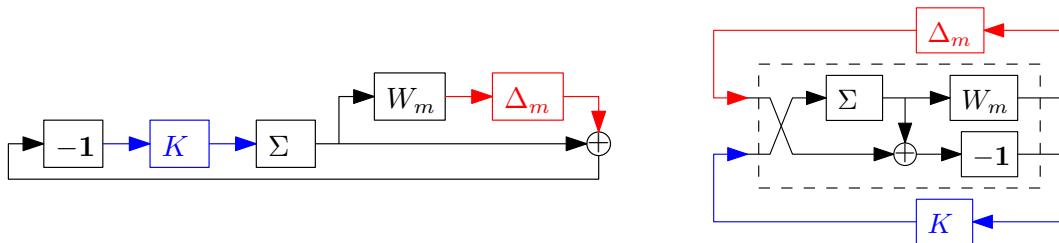
● Condition suffisante de stabilité indépendante du retard :

$$\|C_d(sI - A)^{-1}B_d\|_\infty < 1$$

- Exemple d'emploi du théorème du petit gain
- Capteurs : dispositifs conçus pour mesurer des grandeurs physiques - ils sont imparfaits
- ▲ erreur de mesure et bruits en haute fréquence : $y_m = (1 + \Delta_m W_m(s))y$
- W_m : gabarit fréquentiel (passe haut) , $\|\Delta_m\|_\infty \leq \frac{1}{\gamma_m}$

▲ Système Σ en boucle fermée avec un correcteur K , tenant compte de capteurs incertains :

$$((1 + \Delta_m W_m) \Sigma K) \star (-1) = \Delta_m \star \left[\begin{array}{c|c} 0 & W_m \Sigma \\ \hline -1 & -\Sigma \end{array} \right] \star K = \Delta_m \star (-W_m \Sigma K (1 + \Sigma K)^{-1})$$



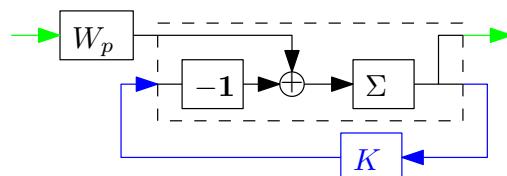
- ▲ Stabilité robuste garantie si $\|W_m \Sigma K (1 + \Sigma K)^{-1}\|_\infty < \gamma_m$
- ▲ SISO : $\gamma_m W_m^{-1}$ = gabarit sur la sensibilité complémentaire $\Sigma K (1 + \Sigma K)^{-1}$
- ▲ MIMO et $W_m = w_m \mathbf{1}$ alors $\gamma_m w_m^{-1}$ = gabarit sur $\bar{\sigma}$ de la sensibilité complémentaire

Stabilité robuste et théorème du petit-gain

- Exemple d'emploi du théorème du petit gain
- Précision de la boucle fermée à des perturbations basse fréquence sur l'entrée du système
- ▲ Peut être évaluée par

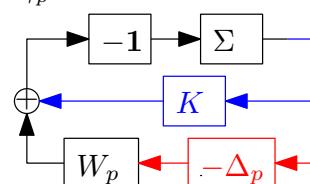
$$\left\| \left(\left[\begin{array}{c|c} \Sigma & -\Sigma \\ \hline \Sigma & -\Sigma \end{array} \right] \star K \right) W_p \right\|_\infty = \|(1 + \Sigma K)^{-1} \Sigma W_p\|_\infty \leq \gamma_p$$

W_p : gabarit fréquentiel (passe bas)



- ▲ Équivalent à la stabilité robuste vis-à-vis d'incertitudes $\|\Delta_p\|_\infty \leq \frac{1}{\gamma_p}$ de

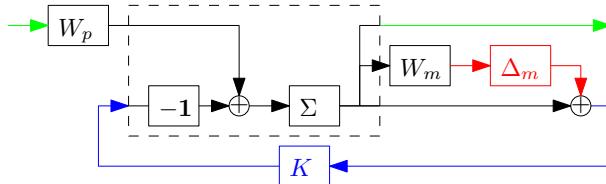
$$\Delta_p \star \left(\left[\begin{array}{c|c} \Sigma W_p & -\Sigma \\ \hline \Sigma W_p & -\Sigma \end{array} \right] \star K \right) = (-\Sigma) \star (K - W_p \Delta_p)$$



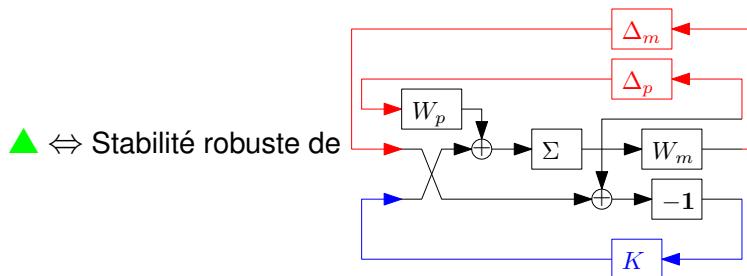
- ▲ Le rejet de perturbation \Leftrightarrow robustesse vis-à-vis d'incertitudes additives BF sur le contrôleur

■ Exemple de performance \mathcal{H}_∞ robuste

● Comment évaluer la précision robuste pour toutes les incertitudes sur les capteurs ?



$$\left\| \left(\begin{bmatrix} \Sigma & -\Sigma \\ (1 + \Delta_m W_m) \Sigma & -(1 + \Delta_m W_m) \Sigma \end{bmatrix} \star K \right) W_p \right\|_\infty \leq \gamma_p, \quad \forall \|\Delta_m\|_\infty \leq \frac{1}{\gamma_m}$$



$$\begin{bmatrix} \Delta_p & 0 \\ 0 & \Delta_m \end{bmatrix} \xrightarrow{w_{\Delta}, z_{\Delta}} \begin{bmatrix} \Sigma W_p & 0 & \Sigma \\ W_m \Sigma W_p & 0 & W_m \Sigma \\ -\Sigma W_p & -1 & -\Sigma \end{bmatrix} \xrightarrow{u, y} K, \quad \begin{aligned} \|\Delta_p\|_\infty &\leq \frac{1}{\gamma_p} \\ \|\Delta_m\|_\infty &\leq \frac{1}{\gamma_m} \end{aligned}$$

Stabilité robuste et théorème du petit-gain

▲ Stabilité robuste de

$$\begin{bmatrix} \Delta_p & 0 \\ 0 & \Delta_m \end{bmatrix} \xrightarrow{w_{\Delta}, z_{\Delta}} \begin{bmatrix} \Sigma W_p & 0 & \Sigma \\ W_m \Sigma W_p & 0 & W_m \Sigma \\ -\Sigma W_p & -1 & -\Sigma \end{bmatrix} \xrightarrow{u, y} K, \quad \begin{aligned} \|\Delta_p\|_\infty &\leq \frac{1}{\gamma_p} \\ \|\Delta_m\|_\infty &\leq \frac{1}{\gamma_m} \end{aligned}$$

▲ ⇔ Stabilité robuste de la LFT suivante (en posant $\hat{\Delta}_p = \gamma_p \Delta_p$ et $\hat{\Delta}_m = \gamma_m \Delta_m$)

$$\underbrace{\begin{bmatrix} \hat{\Delta}_p & 0 \\ 0 & \hat{\Delta}_m \end{bmatrix}}_{\hat{\Delta}} \xrightarrow{w_{\Delta}, z_{\Delta}} \underbrace{\begin{bmatrix} \frac{1}{\gamma_p} \Sigma W_p & 0 & \Sigma \\ \frac{1}{\gamma_m \gamma_p} W_m \Sigma W_p & 0 & \frac{1}{\gamma_m} W_m \Sigma \\ -\frac{1}{\gamma_p} \Sigma W_p & -1 & -\Sigma \end{bmatrix}}_{\hat{\Sigma}} \xrightarrow{u, y} K, \quad \begin{aligned} \|\hat{\Delta}_p\|_\infty &\leq 1 \\ \|\hat{\Delta}_m\|_\infty &\leq 1 \end{aligned}$$

▲ Condition suffisante : stabilité robuste de $\hat{\Delta} \star \hat{\Sigma} \star K$, $\|\hat{\Delta}\|_\infty \leq 1$

▲ Garanti (Thm du petit gain) si $\|\hat{\Sigma} \star K\|_\infty < 1$

■ Exemple de robustesse paramétrique

$$\begin{bmatrix} \alpha_1 1_2 \\ \alpha_2 \end{bmatrix} \underset{\star}{w_{\Delta}, z_{\Delta}} \begin{bmatrix} \Sigma_{\Delta\Delta} & \Sigma_{\Delta u} \\ \hline \Sigma_{y\Delta} & \Sigma_{yu} \end{bmatrix} \underset{\star}{u, y} K, \quad \alpha_1 \in [\underline{\alpha}_1, \bar{\alpha}_1], \quad \alpha_2^* + \alpha_2 \geq 0$$

● Incertitudes normalisées :

$$\alpha_1 = \underbrace{\frac{1}{2}(\underline{\alpha}_1 + \bar{\alpha}_1)}_{c_1} + \underbrace{\frac{1}{2}(\bar{\alpha}_1 - \underline{\alpha}_1)}_{r_1} \delta_1 = \delta_1 \star \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ \hline r_1 & c_1 \end{bmatrix} : \delta_1 \in [-1, 1]$$

$$\alpha_2 = \frac{1-\delta_2}{1+\delta_2} = \delta_2 \star \begin{bmatrix} -1 & -2 \\ \hline 1 & 1 \end{bmatrix} : |\delta_2| \leq 1$$

● En utilisant les propriétés des LFT on se ramène à stabilité robuste de

$$\begin{bmatrix} \delta_1 1_2 \\ \delta_2 \end{bmatrix} \hat{w}_{\Delta}, \hat{z}_{\Delta} \begin{bmatrix} \hat{\Sigma}_{\Delta\Delta} & \hat{\Sigma}_{\Delta u} \\ \hline \hat{\Sigma}_{y\Delta} & \hat{\Sigma}_{yu} \end{bmatrix} \underset{\star}{u, y} K$$

▲ Condition suffisante : $\|\hat{\Sigma} \star K\|_{\infty} < 1$.

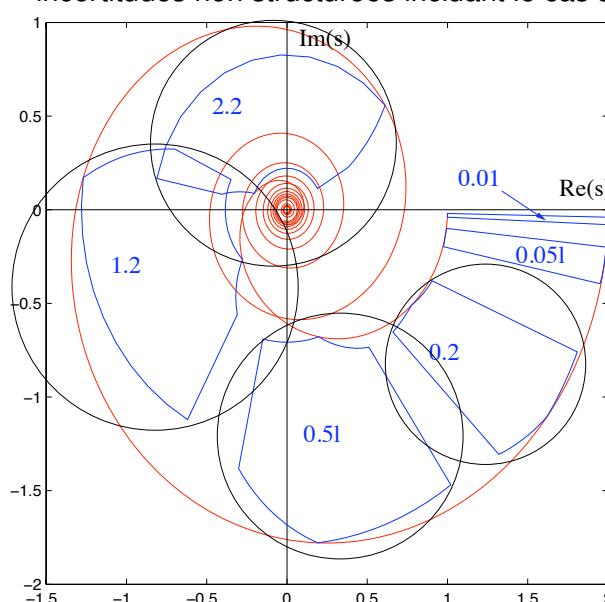
Stabilité robuste et théorème du petit-gain

▲ Condition suffisante : $\|\hat{\Sigma} \star K\|_{\infty} < 1$.

▲ Illustration du pessimisme

Zones bleues = possibles valeurs de $\hat{\Sigma} \star K$ pour une fréquence donnée

Cercles = incertitudes non structurées incluant le cas strcturé



■ Exemple de multi-performance \mathcal{H}_∞

- Précision de la boucle fermée à des perturbations basse fréquence sur l'entrée du système

$$\left\| \begin{bmatrix} -\Sigma W_p & -\Sigma \\ -\Sigma W_p & -\Sigma \end{bmatrix} * \mathbf{K} \right\|_\infty = \|(1 + \Sigma \mathbf{K})^{-1} \Sigma W_p\|_\infty \leq \gamma_p$$

- Minimisation de l'effort des actionneurs en réponse à des bruits de mesure

$$\left\| \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -W_b & -\Sigma \end{bmatrix} * \mathbf{K} \right\|_\infty = \|\mathbf{K}(1 + \Sigma \mathbf{K})^{-1} W_b\|_\infty \leq \gamma_b$$

▲ Condition suffisante : stabilité robuste vis à vis de 2 incertitudes

$$\begin{bmatrix} \hat{\Delta}_p & 0 \\ 0 & \hat{\Delta}_b \end{bmatrix} * \left(\begin{bmatrix} \hat{\Sigma} & & \\ \hline -\frac{1}{\gamma_p} \Sigma W_p & -\frac{1}{\gamma_b} W_b & -\Sigma \\ \frac{1}{\gamma_p} W_p & 0 & 1 \\ -\frac{1}{\gamma_p} \Sigma W_p & -\frac{1}{\gamma_b} W_b & -\Sigma \end{bmatrix} * \mathbf{K} \right), \quad \begin{array}{l} \|\hat{\Delta}_p\|_\infty \leq 1 \\ \|\hat{\Delta}_b\|_\infty \leq 1 \end{array}$$

▲ Condition suffisante de la condition suffisante : $\|\hat{\Sigma} * \mathbf{K}\|_\infty \leq 1$

Stabilité robuste et théorème du petit-gain

■ Loop-shaping SISO

- Suivi de référence et réjection de perturbations :

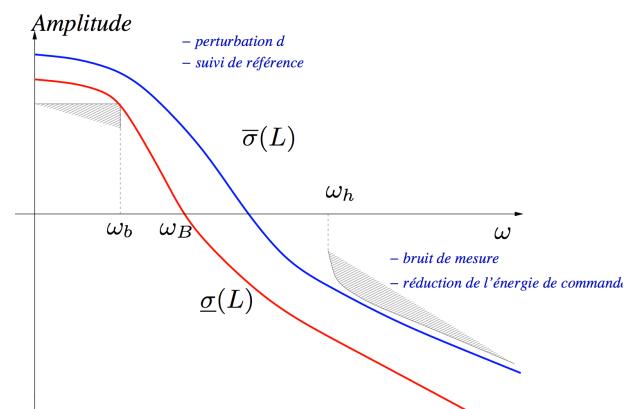
$$\underline{\sigma}(L_y) \text{ grand } 0 \leq \omega \leq \omega_B$$

- Réduction d'énergie de commande :

$$\bar{\sigma}(K) \text{ faible } 0 \leq \omega_B \leq \omega$$

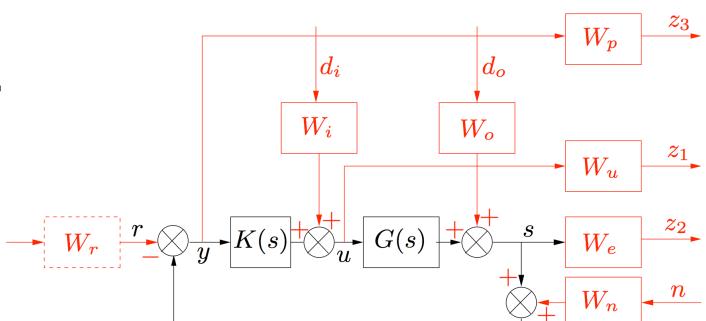
- Filtrage des bruits de mesure :

$$\bar{\sigma}(L_y) \text{ faible } 0 \leq \omega_B \leq \omega$$



● Généralisation MIMO grâce aux filtres et H_∞

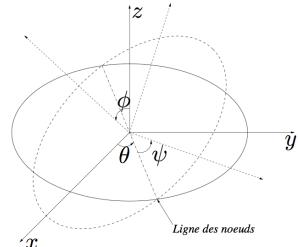
- W_u : restriction sur u
- W_e, W_p : spéfic. sur des transferts en E
- W_i, W_o, W_n : contenu fréq. de d et de n
- W_r : modélage de la consigne



■ Exemple : stabilité robuste d'un satellite

- Ecriture des équations d'Euler du satellite en spin Ω constante autour de l'axe z et des équations de la cinématique
- Linéarisation des équations d'Euler et de la cinématique
- $I_{xx} = I_{yy} = I_1$ et $I_{zz} = I_3$

- Découplage du mouvement autour de z / axes x et y



- Equations d'Euler linéarisées et découplées :

$$I_1 \dot{\omega}_1 - \omega_2 \Omega (I_1 - I_3) = T_1$$

$$I_1 \dot{\omega}_2 - \omega_1 \Omega (I_3 - I_1) = T_2$$

- On pose $a = (1 - I_3/I_1)\Omega$ et $\begin{bmatrix} u_1 & u_2 \end{bmatrix}' = \begin{bmatrix} T_1/I_1 & T_2/I_1 \end{bmatrix}'$

Stabilité robuste et théorème du petit-gain

■ Exemple : stabilité robuste d'un satellite (suite)

● Modèle d'état :

$$\begin{bmatrix} \dot{\omega}_1 \\ \dot{\omega}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & a \\ -a & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \omega_1 \\ \omega_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & a \\ -a & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \omega_1 \\ \omega_2 \end{bmatrix}$$

● Matrice de transfert :

$$\Sigma(s) = C(sI - A)^{-1}B = \frac{1}{s^2 + a^2} \begin{bmatrix} s - a^2 & a(s + 1) \\ -a(s + 1) & s - a^2 \end{bmatrix}$$

■ Exemple : stabilité robuste d'un satellite (suite)

● Stabilisation interne nominale : $K = 1_2$

▲ Test entrée - sortie (fonctions de sensibilité et de sensibilité complémentaire)

$$S_y(s) = S_u(s) = (1 + \Sigma(s)K)^{-1} = \frac{1}{s+1} \begin{bmatrix} s & -a \\ a & s \end{bmatrix}$$

$$T_y(s) = T_u(s) = \Sigma(s)K(1 + \Sigma(s)K)^{-1} = \frac{1}{s+1} \begin{bmatrix} 1 & a \\ -a & 1 \end{bmatrix}$$

▲ Test d'état :

$$\tilde{A} = A - BKC = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$

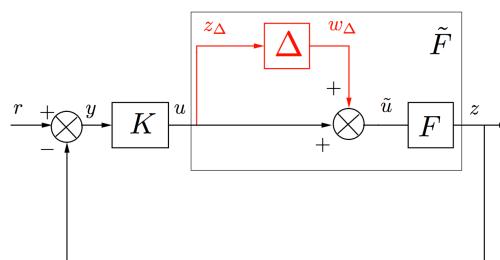
Stabilité robuste et théorème du petit-gain

■ Exemple : stabilité robuste d'un satellite (suite)

● On suppose que des dynamiques liées aux modes souples ont été négligées ou non modélisées

▲ Modèle incertain multiplicatif :

$$\Sigma(s, \Delta) = \Sigma(s)(1 + \Delta) = \frac{1}{s^2 + a^2} \begin{bmatrix} s - a^2 & a(s+1) \\ -a(s+1) & s - a^2 \end{bmatrix} [1 + \Delta]$$



▲ Modèle $\Delta * M$ pour $K = 1$

$$M = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\Sigma & -\Sigma \end{bmatrix} * K = -K(1 + \Sigma K)^{-1}\Sigma = \begin{bmatrix} -\frac{1}{s+1} & -\frac{a}{s+1} \\ \frac{a}{s+1} & -\frac{1}{s+1} \end{bmatrix}$$

■ Exemple : stabilité robuste d'un satellite (suite)

● Cas où Δ est pleine, LTI, bornée en norme (cas des dynamiques couplées négligées)

▲ THM du petit gain : le système $\Delta \star M$ pour tout $\|\Delta\|_\infty \leq \gamma$ est stablessi $\|M\|_\infty < \frac{1}{\gamma}$

$$\begin{aligned}\|M\|_\infty &= \max_{\omega \in \mathbb{R}} \bar{\sigma} \left[\begin{array}{cc} -\frac{1}{j\omega+1} & -\frac{a}{j\omega+1} \\ \frac{a}{j\omega+1} & -\frac{1}{j\omega+1} \end{array} \right] \\ &= \max_{\omega \in \mathbb{R}} \left| \frac{1}{j\omega+1} \right| \cdot \bar{\sigma} \left[\begin{array}{cc} -1 & -a \\ a & -1 \end{array} \right] \\ &= 1 \cdot \sqrt{1 + a^2}\end{aligned}$$

▲ Le système $\Delta \star M$ pour tout $\|\Delta\|_\infty \leq \frac{1}{\sqrt{1+a^2}}$

Stabilité robuste et théorème du petit-gain

■ Exemple : stabilité robuste d'un satellite (suite)

● Cas où $\Delta = \text{diag}(\delta, \delta) \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$

▲ Calcul à l'aide du critère de Routh-Hurwitz conduit à : $\Delta \star M$ est stable si

$$2 + 2\delta > 0 , \quad 1 + 2\delta + (a^2 + 1)\delta^2 = a^2\delta^2 + (1 + \delta)^2 > 0$$

▲ $\Delta \star M$ stable si $\delta > -1$

■ L'exemple illustre le pessimisme du théorème du petit gain quand Δ est structurée.

$$\begin{aligned}\Delta_1 &= \{\|\Delta\|_\infty \leq \frac{1}{\sqrt{1+a^2}}\} \\ \Delta_2 &= \{\Delta = \text{diag}(\delta, \delta) \in \mathbb{R}^{2 \times 2} : |\delta| \leq \frac{1}{\sqrt{1+a^2}}\} \\ \Delta_3 &= \{\Delta = \text{diag}(\delta, \delta) \in \mathbb{R}^{2 \times 2} : \delta \geq -1\}\end{aligned}$$

- THM petit gain prouve que $\Delta \star M$ pour tout $\Delta \in \Delta_1$
- ▲ Comme $\Delta_2 \subset \Delta_1$ on en déduit que $\Delta \star M$ pour tout $\Delta \in \Delta_2$
- ▲ Ne permet pas de conclure pour Δ_3

- THM Routh-Hurwitz prouve que $\Delta \star M$ pour tout $\Delta \in \Delta_3$
- ▲ Comme $\Delta_2 \subset \Delta_3$ on en déduit que $\Delta \star M$ pour tout $\Delta \in \Delta_2$
- ▲ Ne permet pas de conclure pour Δ_1

■ L'exemple dans Romuloc

```
>> a=sqrt(2);
>> s=ssmodel;
>> s.a=[0 a ;-a 0];
>> s.bu=eye(2);
>> s.cy=[1 a;-a 1];
>> s.bd=eye(2);
>> s.ddu=eye(2);
>> s.bw=eye(2);
>> s.dzu=eye(2);
>> sbf=feedback(s, eye(2))
>> pole(sbf)
```

- Cas d'une incertitude pleine bornée en norme

```
>> norm(sbf,inf)
>> sqrt(1+a^2)
>> d1=unb(2,2,1/sqrt(1+a^2)-0.01)
>> sbf1=ussmodel(sbf,d1)
>> quiz=ctrpb('a')+stability(sbf1)
>> solvesdp(quiz)
```

- Cas d'une incertitude réelle répétée

```
>> d2=unb(1,1,1-0.01)
>> sbf2=ussmodel(sbf,diag(d2,d2))
>> quiz=ctrpb('a')+stability(sbf2)
>> solvesdp(quiz)
```

- Dans le premier cas les LMI que l'on résout sont celles du calcul de la norme H_∞
- Dans le second cas ce sont d'autres LMI avec plus de variables de décision