$\Big[\alpha_{n\,max} \cdot s^n + \alpha_{n-1\,min}\, s^{n-1} + \alpha_{n-2\,min}\, s^{n-2}$

respecter l'alternance

$2_{min} - 2_{max}$
$1_{min} - 2_{max}$
$2_{max} - 2_{min}$
$1_{max} - 2_{min}$

Exemple 6. Soit $\dot{x}(t) = \begin{bmatrix} -1 + 1{,}5\cos^2(t) & 1 - 1{,}5\sin(t)\cos(t) \\ -1 - 1{,}5\sin(t)\cos(t) & -1 + 1{,}5\sin^2(t) \end{bmatrix} x(t)$

- Signe de la trace $Tr(A) = -2 + 1{,}5 = -0{,}5 < 0$
- Signe du déterminant $dét(A) = [-1 + 1{,}5\cos^2(t)]\,[-1 + 1{,}5\sin^2(t)]$

$$- [-1 - 1{,}5\sin(t)\cos(t)]\,[1 - 1{,}5\sin(t)\cos(t)]$$
$$= 0{,}5 > 0$$

Le système vérifie les 2 premiers tests.
MAIS, il s'agit d'un système variant dans le temps !
Le polynôme caractéristique $|sI_n - A|$ n'est pas valable mathématiquement.

D. Paucelle — Commande linéaire avancée 3 — 05/09/2022

Rappels :

Soit $\dot{X} = A(\delta)X + Bu$ soit $P_A(s) = dét(sI - A)$

$y = CX + Du$ $= s^n + \alpha_{n-1}(\delta)\, s^{n-1} + \dots + a_n(\delta)$

Kharitonov : si 4 polynômes construits avec les valeurs min et max des les α_i sont stables $\Rightarrow$ système est robustement stable

↳ utiliser Routh-Hurwitz

Construction de A : $A(\delta) \in \mathbb{R}^{n \times n}$ $a_{min} \leq a \leq a_{max}$

$$\boxed{\begin{aligned} a &= \theta a_{min} + (1-\theta) a_{max} \\ &= \xi_1 a^{[1]} + \xi_2 a^{[2]} \end{aligned}}$$

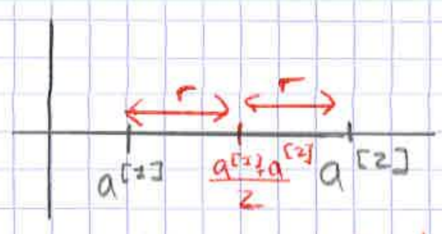
avec $0 \leq \theta \leq 1$

avec $\begin{cases} a^{[1]} = a_{min} \\ a^{[2]} = a_{max} \end{cases}$

tel que $\xi_1 = \theta \geq 0$ et $\xi_2 = (1-\theta) \geq 0$ et $\xi_1 + \xi_2 = 1$

Aussi $a = \frac{a^{[1]}+a^{[2]}}{2} + \delta \left| \frac{a^{[1]}+a^{[2]}}{2} \right|$

et $-1 \leq \delta \leq 1$

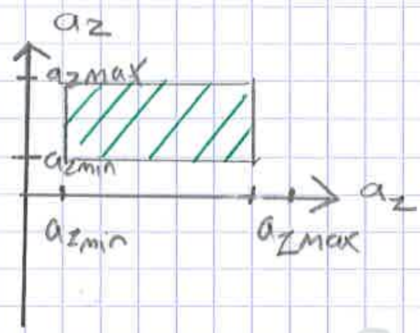


$r = \left| \frac{a^{[1]}-a^{[2]}}{2} \right|$

Problématique : Trouver une écriture analogue lorsque A est une matrice

$A = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{2\times 1}$ avec $a_{1min} \leq a_1 \leq a_{1max}$

$a_{2min} \leq a_2 \leq a_{2max}$



$$A = \begin{bmatrix} \theta_1 a_{1min} + (1-\theta_1) a_{1max} \\ \theta_2 a_{2min} + (1-\theta_2) a_{2max} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} [\theta_2 + (1-\theta_2)]\,[\theta_1 a_{1min} + (1-\theta_1) a_{1max}) \\ [\theta_1 + (1-\theta_1)]\,[\theta_2 a_{2min} + (1-\theta_2) a_{2max}) \end{bmatrix}$$

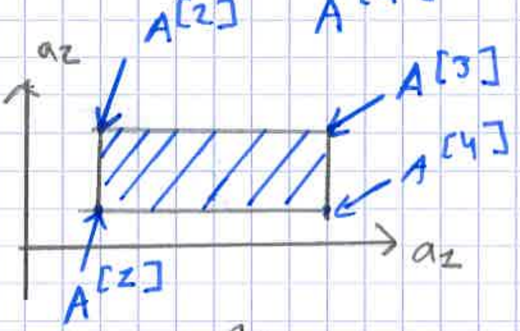
$$= \underbrace{\theta_1\theta_2}_{\xi_1} \overbrace{\begin{bmatrix} a_{1min} \\ a_{2min} \end{bmatrix}}^{A^{[1]}} + \underbrace{\theta_1(1-\theta_2)}_{\xi_2} \overbrace{\begin{bmatrix} a_{1min} \\ a_{2max} \end{bmatrix}}^{A^{[2]}} + \underbrace{(1-\theta_1)(1-\theta_2)}_{\xi_3} \overbrace{\begin{bmatrix} a_{1max} \\ a_{2max} \end{bmatrix}}^{A^{[3]}}$$

$$+ \underbrace{\theta_2(1-\theta_1)}_{\xi_4} \underbrace{\begin{bmatrix} a_{1max} \\ a_{2min} \end{bmatrix}}_{A^{[4]}}$$

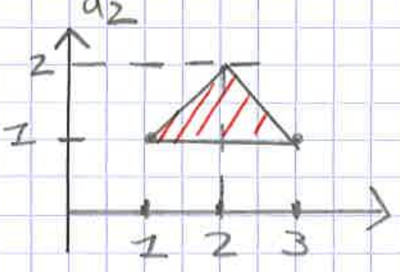
où $\xi_v \geq 0$

$$\sum_{v=1}^{4} \xi_v = \theta_1 \overbrace{[\theta_2 + (1-\theta_2)]}^{=1} + (1-\theta_1) \underbrace{(\theta_2 + (1-\theta_2))}_{=1}$$

$$= \theta_1 + (1-\theta_1) = 1$$



Par exemple :



$$A = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \end{bmatrix} \in \mathcal{C}_o \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$$

enveloppe convexe

$$= \xi_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} + \xi_2 \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \end{bmatrix} + \xi_3 \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix}$$

avec $\xi_v \geq 0$ et $\sum \xi_v = 1$

On aboutit ainsi à une représentation polytopique : $A(\delta) \in \mathbb{R}^{n\times m}$

$A(\delta) \in \mathcal{C}_o \{ A^{[1]}\ A^{[2]} \ldots A^{[N]} \}$ avec $A^{[v]} \in \mathbb{R}^{n\times m}$

$$= \xi_1 A^{[1]} + \xi_2 A^{[2]} + \dots + \xi_{\bar{v}} A^{[\bar{v}]} \qquad \xi_v \geq 0 \text{ et } \sum_{v=1}^{\bar{v}} \xi_v = 1$$

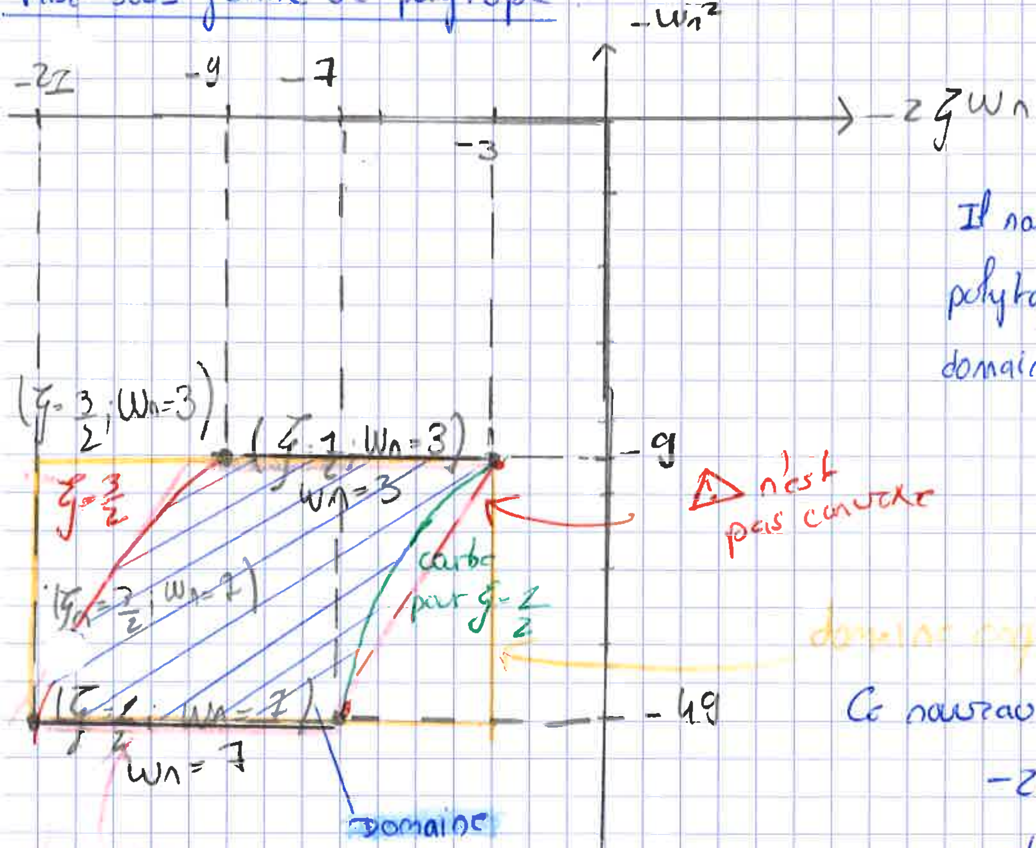
La combinaison linéaire convexe.

Exemple : $\ddot{y} + 2\xi\omega_n \dot{y} + \omega_n^2 y = u - 1$

Expression dans l'EE : On prend $x = \begin{bmatrix} y \\ \dot{y} \end{bmatrix}$

Ainsi
$$\begin{cases} \dot{x} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\omega_n^2 & -2\xi\omega_n \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u \\ \xi \text{ le coefficient d'amortissement}, \quad \frac{1}{2} \leq \xi \leq \frac{3}{2} \\ \omega_n \text{ la pulsation naturelle}, \quad 3 \leq \omega_n \leq 7 \end{cases}$$

Mise sous forme de polytope



Il nous faut trouver un nouveau polytope qui englobe ▨ le domaine et qui est un polytope.

domaine coefficient P_1

Ce nouveau domaine correspond à :

$$-21 \leq -2\xi\omega_n \leq -3$$
$$-49 \leq -\omega_n^2 \leq -9$$
$$\Downarrow$$
$$A(\xi, \omega_n) \in P_1 = Co\left\{ \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -49 & -21 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -9 & -21 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -9 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -49 & -3 \end{bmatrix} \right\}$$

par $\frac{1}{2} \leq \xi \leq \frac{3}{2}$ et $3 \leq \omega_n \leq 7$
=> n'est pas un polytope !

Un autre polytope serait $A(\xi\, \omega_n) \in P_2 = Co\left\{ \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -49 & -21 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -9 & -21 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -9 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -49 & -7 \end{bmatrix} \right\}$

Remarque :

$\{ A(\xi\, \omega_n) \text{ avec } \frac{1}{2} \leq \xi \leq \frac{3}{2} \text{ et } 3 \leq \omega_n \leq 7 \} \subset P_2 \subset P_1$

Construire un polytope pour : (à la maison)

1) $A = \begin{bmatrix} \alpha & 1+w\alpha \\ 0 & 1+w^2 \end{bmatrix}$ avec $-1 \leq \alpha \leq 1$, $-1 \leq w \leq 1$

2) $\dot{x} = \begin{bmatrix} \delta - 1 & 0 \\ \frac{\delta}{1+\delta} & -1 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} w$ avec $-\frac{1}{2} \leq \delta_1 \leq \frac{1}{2}$

3) $\begin{cases} \ddot{q} = u + w + \delta \dot{q} + \frac{\delta_1}{1+\delta_2} q \\ y = q + \delta_2 \dot{q} \end{cases}$ avec $-\frac{1}{2} \leq \delta_1 \leq \frac{1}{2}$, $-\frac{1}{2} \leq \delta_2 \leq \frac{1}{2}$

4) $\begin{cases} \dot{x} = \begin{bmatrix} -1 & 1+\delta \\ \frac{-1}{1+\delta} & -1 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 1{,}2+\delta & 0 \\ 0 & \frac{1{,}2}{1+\delta} \end{bmatrix} w + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u \\ z = x \\ y = x \end{cases}$ avec $-1 \leq \delta \leq 1$

Stabilité :

$\dot{x} = A(t)x \quad A(t) \in Co\{A^{[1]}\ A^{[2]} \dots A^{[\bar{v}]}\}$

Parmi les réalisations possibles $\dot{x} = A^{[v]}x$:

Pour avoir la stabilité, une condition nécessaire est $\forall v = 1, \dots, \bar{v}$ $A^{[v]}$ est stable

⚠ Ce n'est pas une condition suffisante : on va le démontrer par un contre-exemple

On a $A^{[1]} = \begin{bmatrix} -1 & -10 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$ $\quad -Tr(A^{[1]}) = -(-1-1) = 2 > 0$

$\det(A^{[1]}) = 1 + 10 = 11 > 0$

$\Rightarrow$ le système $\dot{x} = A^{[1]}x$ est stable

De même, $A^{[2]} = \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ 10 & -1 \end{bmatrix}$ $\quad -Tr(A^{[2]}) = 2 > 0$

$\det[A^{[2]}] = 11 > 0$

Regardons les combinaison convexe : $\frac{1}{2}A^{[1]} + \frac{1}{2}A^{[2]} = \begin{bmatrix} -1 & 9/2 \\ \frac{9}{2} & -1 \end{bmatrix}$

$-Tr = 2 > 0$ et $\det = -\left(\frac{9}{2}\right)^2 < 0$

La combinaison nous donne une instabilité.

Théorème : Barmish et Bernussou - La stabilité Quadratique

Si $\exists P \in \mathbb{R}^{n \times n}$ symétrique ($P = P^T$) et définie positive ($P \succ 0$) telle que $\forall v = 1, \dots, \bar{v}$ on a $A^{[v]T}P + PA^{[v]} \prec 0$ ← définie négative

alors le système polytopique $\dot{x} = A(t)x(t)$ avec $A(t) \in Co\{A^{[1]} \dots A^{[\bar{v}]}\}$ est robustement stable.

Rappel : $P \succ 0 \iff \exists \varepsilon_1 > 0,\ \forall x \neq 0,\ x \in \mathbb{R}^n,\quad x^T P x > \varepsilon \|x\|^2$

Par exemple : $P = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$ $\quad x^T P x = \frac{1}{2} x_1^2 + 2 x_2^2 > \frac{1}{3} \underbrace{(x_1^2 + x_2^2)}_{x^T x = \|x\|^2}$

Cela rappelle une fonction candidate à Lyapunov $V(x) = x^T P x$

N.B : $\forall\ v = 1 \cdots \bar{v} \quad \exists\ \varepsilon_1^{[v]}$

$$A^{[v]^T} P + P A^{[v]} < -\varepsilon_1^{[v]} \mathbb{I}_n < \underbrace{-\min \varepsilon_1^{[v]}}_{\varepsilon_1} \mathbb{I}$$

Autrement dit, $A^{[v]^T} P + P A^{[v]} + \varepsilon_1 \mathbb{I}_n$ est définie négative

$\iff \xi_v (A^{[v]T} P + P A^{[v]} + \varepsilon_1 \mathbb{I}_2) \quad \swarrow \times \xi_v$

La somme donne $\sum_{v=1}^{\bar{v}} \xi_v (A^{[v]T} P + P A^{[v]} + \varepsilon_1 \mathbb{I}_2)$ et $\xi_v \geq 0$

$$\iff \underbrace{\sum_{v=1}^{\bar{v}} (\xi_v A^{[v]T}) P + P \left(\sum_{v=1}^{\bar{v}} \xi_v A^{[v]} \right) < -\left(\sum_{v=1}^{\bar{v}} \xi_v \right) \varepsilon_1 \mathbb{I}}_{A(t)^T P + P A(t) < -\varepsilon_1 \mathbb{I}}$$

Mise sous forme quadratique :

$x^T(t) \left[A(t)^T P + P A(t) \right] x(t) < x^T (-\varepsilon_1 \mathbb{I}) x(t) \quad \forall x(t) \neq 0$

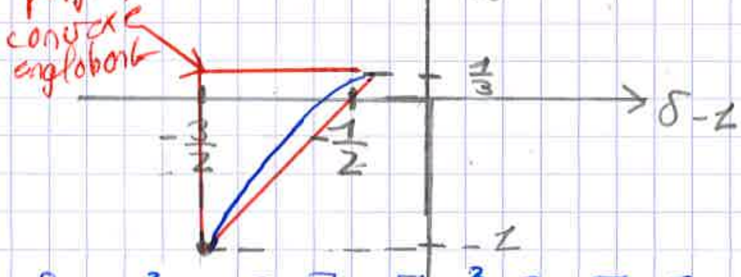
$\iff x^T(t) A^T(t) P x(t) + x^T(t) P A(t) x(t) < -\varepsilon_1 \underbrace{x^T(t) x(t)}_{\|x(t)\|^2}$

$\dot{x}(t) = A(t) x(t)$

$\dot{x}(t) P x(t) + x_1(t)^T P \dot{x}(t) < -\varepsilon_1 \|x(t)\|^2$

$$\boxed{\text{On note } \dot{V}(x) = \frac{d\, x^T P x(t)}{dt} < -\varepsilon \|x\|^2}$$

Exemple : $A = \begin{bmatrix} \delta - 1 & 0 \\ \frac{\delta}{1+\delta} & -1 \end{bmatrix}$ avec $-\frac{1}{2} \leq \delta \leq \frac{1}{2}$



On prend $A \in Co \left\{ \underbrace{\begin{bmatrix} -\frac{3}{2} & 0 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}}_{A^{[1]}} \underbrace{\begin{bmatrix} -\frac{3}{2} & 0 \\ \frac{1}{3} & -1 \end{bmatrix}}_{A^{[2]}} \underbrace{\begin{bmatrix} -\frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{3} & -1 \end{bmatrix}}_{A^{[3]}} \right\}$

Testons avec :

$P = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \mathbb{I}_2$, on a $A^{[1]^T} P + P A^{[1]}$

$= \begin{bmatrix} -\frac{3}{2} & -1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -3/2 & 0 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}$

$= \begin{bmatrix} -3 & -1 \\ -1 & -2 \end{bmatrix}$ $\quad -tr = 5$, $dét = 5$

Pour le premier sommet $A^{[1]}$ on a une matrice symétrique définie négative $\Rightarrow$ OK

Ensuite, $A^{[2]^T} P + P A^{[2]} = \begin{bmatrix} -3/2 & 1/3 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -3/2 & 0 \\ 1/3 & -1 \end{bmatrix}$

$= \begin{bmatrix} -3 & 1/3 \\ \frac{1}{3} & -2 \end{bmatrix}$ $\quad -tr = 5 > 0$, $dét = 6 - \frac{1}{9}$

OK par le sommet $A^{[2]}$.

Enfin, $A^{[3]^T} P + P A^{[3]} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{1}{3} \\ 0 & -1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{3} & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & -2 \end{bmatrix}$

$Tr = -3 < 0$

$dét = 2 - \frac{1}{3} > 0$

OK par le sommet $A^{[3]}$

On a trouvé la stabilité quadratique par les 3 sommets. $\Leftrightarrow$ robustement stable

Suite du Théorème : Si $\forall \xi_v \geq 0$ et $\sum \xi_v = 1$ $\exists P(\xi) > 0$
telle que $A(\xi)^T P(\xi) + P(\xi) A(\xi) \prec 0$
alors $\dot{x} = A(\xi) x$ est robustement stable
et $\forall A(\xi) = cste = \sum \xi_v A^{[v]}$

Théorème 2 : $\exists X > 0$, $\exists S \in \mathbb{R}^{m \times n}$ et $X \in \mathbb{R}^{n \times n}$
$\forall v = 1 \dots \bar{v}$ et $A^{[v]} X + BS + S^T B^T + X A^{[v]^T} < 0$
alors $K = S X^{-1}$ est un retour d'état qui stabilise robustement
$\dot{x} = A(t) x + Bu$ et $A(t) \in Co\{A^{[1]} \dots A^{[\bar{v}]}\}$

 A démontrer (piste : $V(x) = x^T P x$ avec $P = X^{-1}$)