Notion d'ordre, de zéros, de pôles pour une fonction de transfert (suite)

Considérons une fonction de transfert $F(s) \in \mathbb{R}^{p \times m}$

Soit $\psi(s) = \text{ppcm}\,[\text{dénominateur des } F_{ij}(s)]$ $\quad 1 < i < p$, $1 < j < m$

ppcm ↓ plus petit commun multiple

Ainsi $F(s) = \dfrac{N(s)}{\psi(s)}$ où $N(s)$ est une matrice polynomiale en $s$.

Exemple :

$$F(s) = \begin{bmatrix} \frac{1}{s} & \frac{1}{(s+2)^2} \\ \frac{1}{(s+2)s} & \frac{1}{s} \\ \frac{1}{s+1} & \frac{1}{s+1} \end{bmatrix} = \frac{1}{s(s+2)^2(s+1)} \begin{bmatrix} (s+2)^2(s+1) & s(s+1) \\ (s+2)(s+1) & (s+2)^2(s+1) \\ s(s+2)^2 & s(s+2)^2 \end{bmatrix}$$

Définition : Forme de Smith

Il existe $\bar{\mathcal{U}}$ et $\bar{\mathcal{V}}$ deux matrices unimodulaires telles que

$$\bar{\mathcal{U}}(s)\,N(s)\,\bar{V}(s) = \text{diag}\,[\gamma_1(s), \dots, \gamma_r(s); \underbrace{0 — 0}_{\text{complétée par des zéro}}]$$

où $\begin{cases} r = \text{rang de } N(s). \\ \gamma_i(s),\ 1 < i < r \text{ les polynômes invariants} \end{cases}$

$$\begin{cases} \gamma_i(s) = \dfrac{\Delta_i(s)}{\Delta_{i-1}(s)} \\ \Delta_0(s) = 1 \end{cases} \quad \text{où } \Delta_i(s) = \text{pgcd}\,(\overset{\text{déterminant des mineurs}}{\text{mineurs}} \text{ de taille } i \times i \text{ de } N(s))$$

Remarques : 1) $\text{diag}\,[\gamma_1(s); \dots; \gamma_r(s); 0 — 0] = \begin{bmatrix} \gamma_1 & & & 0 - 0 \\ & \ddots & & \vdots \\ & & \gamma_r & \\ 0 & — & & 0 \end{bmatrix}$ (hauteur $p-r$, largeur $m-r$)

2) $\bar{\mathcal{U}}$ et $\bar{\mathcal{V}}$ sont des matrices unimodulaires (carrées)

Définition : (Forme de Smith – MacMillan)

On considère la forme de Smith – MacMillan $F_{SM}(s) = \bar{\mathcal{U}}(s)\,F(s)\,\bar{V}(p)$

où $F_{SM}(s) = \dfrac{1}{\psi(s)}\,\bar{\mathcal{U}}(s)\,N(s)\,\bar{V}(s)$

$$= \begin{bmatrix} \frac{\varepsilon_1(s)}{\psi_1(s)} & & & 0 \\ & \ddots & & \\ & & \frac{\varepsilon_r(s)}{\psi_r(s)} & \\ 0 & & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Ainsi, les modes sont les racines de $\psi_i(s)$

Les zéros de transmissions sont les racines de $\varepsilon_i(s)$

Le polynôme caractéristique s'écrit $\psi_1(s) \dots \psi_r(s)$

**Remarque :** Les zéros d'entrée empêche la propagation d'un mode en entrée
Les zéros de sortie bloque l'impact d'un mode en sortie

$\}$ utile pour le reject de perturbation

Les zéros de transmission (calculer par MatLab avec TZ) reflètent le transfert de l'entrée vers la sortie

Les zéros invariants sont invariants par changement de base.

**Exemple :**

$$H(s) = \begin{bmatrix} \frac{1}{s+2} & \frac{1}{s} \\ \frac{1}{s} & \frac{1}{s+1} \\ \frac{1}{s} & \frac{1}{s+2} \end{bmatrix}$$

Astuce : Noter le nombre d'entrées et le nombre de sorties

Dans ce cas : 2 entrées
3 sorties

$$H(s) = \frac{1}{(s+2)(s+1)s} \underbrace{\begin{bmatrix} (s+1)s & (s+2)(s+1) \\ (s+2)(s+1) & s(s+2) \\ (s+2)(s+1) & s(s+1) \end{bmatrix}}_{N(s)}$$

Déterminer le rang de $N(s)$

Essai 1 : $(s+1)s \Rightarrow$ de rang 2 ✗ ce n'est pas le degré le rang est 1 (taille)

Essai 2 ✗ Le rang ne peut pas être égal à 3.

Essai 3 :

$$\begin{vmatrix} (s+1)s & (s+1)(s+2) \\ (s+2)(s+1) & s(s+2) \end{vmatrix} = (s+1)(s+2)[s^2 - (s+1)(s+2)]$$

$\neq 0$ (le seul polynôme nul à ses coef nul)

$\Rightarrow$ on a trouvé un déterminant non nul de taille plus grande

le rang est de 2

On peut fixer $r = 2$ et construire <u>la forme de Smith</u> :

$$\bar{U}(s)\, N(s)\, \bar{V}(s) = \begin{bmatrix} \gamma_1 & 0 \\ 0 & \gamma_2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

<u>Calcul des $\Delta_i$ avec $1 \leq i \leq r$</u>

Astuce : ne jamais développer les polynômes

$\Delta_0(s) = 1$

$\Delta_1(s) = \text{pgcd}(\text{mineur taille } 1\times 2 \text{ de } N(s))$

$= 1$

$\Delta_2(s) = \text{pgcd}$ (<u>déterminants</u> des mineurs de taille $2\times 2$)

3 déterminants : (1)

$$\begin{vmatrix} (s+1)s & (s+2)(s+1) \\ (s+2)(s+1) & s(s+2) \end{vmatrix} = s^2(s+1)(s+2) - [(s+2)(s+1)]^2$$

$= (s+2)(s+1)(-3s-2)$

(2)

$$\begin{vmatrix} (s+1)(s+2) & s(s+2) \\ (s+2)(s+1) & s(s+1) \end{vmatrix} = s(s+1)^2(s+2) - s(s+2)^2(s+1)$$

$= s(s+2)(s+1)[(s+1)-(s+2)]$

$= s(s+2)(s+1)(s+1-s-2)$

(3)

$$\begin{vmatrix} (s+1)s & (s+2)(s+1) \\ (s+2)(s+1) & s(s+1) \end{vmatrix} = (s+1)^2[s^2 - (s+2)^2]$$

$= (s+1)^3 \cdot (-4)$

$\Delta_2(s) = s+1$

<u>$\Rightarrow$ Calcul des $\gamma_i$</u>

$\gamma_1 = 1$

$\gamma_2 = s+1$

<u>Forme de Smith-Macmillan</u>

$$F_{SM}(s) = \begin{bmatrix} \frac{1}{s(s+1)(s+2)} & 0 \\ 0 & \frac{1}{s(s+2)} \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

<u>Calcul du polynôme caractéristique</u> : $s^2((s+2)^2(s+1))$

Les pôles sont $\{0; 0; -2; -2; -1\}$

Il n'y a pas de zéro

Fonction smithform sur Matlab (pas sur les versions récentes)

⚠ **Attention :** $\bar{u}$ et $\bar{v}$ sont des résultats mathématiques mais on ne sait pas si elle reste valables dans l'espace d'état. La matrice $F_{SM}(s)$ nous donne une idée du système mais peut ne pas représenter le système.

## III. Réalisation sous forme espace d'état :

**Exemple 1** : $G(s) = \dfrac{1}{(s+1)(s+2)}$

$$G(s) \overset{DES}{=} \frac{a}{s+1} + \frac{b}{s+2} \qquad a = \lim_{s \to -1} G(s)(s+1) = 1 \qquad b = \lim_{s \to -2} G(s)(s+2) = -1$$

$$G(s) = \frac{1}{s+1} - \frac{1}{s+2} \qquad \mathcal{L}^{-1}$$

Rappel : $Y(s) = G(s)\,U(s)$

$$y(t) = e^{-1t} - e^{-2t}$$

$$Y(s) = \underbrace{\frac{1}{s+1} U(s)}_{X_1(s)} - \underbrace{\frac{1}{s+2} U(s)}_{X_2(s)}$$

on pose $X_1(s)$, $X_2(s)$

$$\Rightarrow \begin{cases} \dot{x}_1(t) = -x_1(t) + u(t) \\ \dot{x}_2(t) = -2x_2(t) + u(t) \\ y(t) = x_1 - x_2 \end{cases}$$

↳ On est sûr d'avoir une forme commandable et observable

### 1. La forme modale : (forme de Gilbert)

On considère $F(s)$ et $\Psi(s) = \text{ppcm}(\text{dénominateur } F_{ij}(s))$

Hypothèse : $\Psi(s)$ admet des racines simples distinctes

Dès lors, $\Psi(s) = \prod_{i=1}^{n} (s - p_i)$ donc $F(s) = \dfrac{1}{\Psi(s)} N(s)$

On applique la DES : $F(s) = \dfrac{N(s)}{\prod_{i=1}^{n}(s-p_i)} = \sum_{i=1}^{n} \dfrac{N_i}{s - p_i}$

où $N_i = \lim_{s \to p_i} (s+p_i) F(s)$

**Exemple :** $F(s) = \begin{bmatrix} \frac{1}{s+2} & \frac{1}{s} \\ \frac{1}{s+2} & \frac{1}{(s+1)(s+2)} \end{bmatrix}$

$$F(s) = \frac{1}{s(s+1)(s+2)} \begin{bmatrix} s(s+2) & (s+1)(s+2) \\ s(s+1) & s \end{bmatrix}$$

$$\frac{1}{s(s+1)(s+2)} = \frac{a}{s} + \frac{b}{(s+1)} + \frac{c}{(s+2)}$$

$a = \lim \times$ ce sont des quantités de fois $\frac{1}{s}$

1 fois $\frac{1}{s}$ dans $N(s)$

$$a = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$b = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad c = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$$

lorsque l'on calcule

$$\frac{1}{(s+1)(s+2)} = \frac{a}{s+1} + \frac{b}{s+2}$$

d'après ex précédent $\begin{cases} a = 1 \\ b = -1 \end{cases}$

Au final, $F(s) = \dfrac{\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}}{s} + \dfrac{\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}}{s+1} + \dfrac{\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}}{s+2}$

$y(s) = \sum_{i=1}^{n} \underbrace{\frac{N_i}{s-p_i} u(s)}_{\text{On pose : } X_i(s)}$ ; $N_i \in \mathbb{R}^{p \times m}$

$x_i(t) \in \mathbb{R}^p$

$X_i(s) = \frac{N_i}{s-p_i} u(s)$ d'où $\dot{x}_i(t) = p_i x_i(t) + N_i u(t)$

On répète l'étape n fois
$$\begin{cases} \dot{x}_1 = p_1 x_1(t) + N_1 u(t) \\ \vdots \\ \dot{x}_n = p_n x_n(t) + N_n u(t) \end{cases}$$

$$y(t) = \sum_{i=1}^{n} x_i$$

$$A = \begin{bmatrix} p_1 \mathbb{I}_p & & \\ & \ddots & \\ & & p_1 \mathbb{I}_p \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} N_1 \\ \vdots \\ N_n \end{bmatrix}$$

$$C = (\mathbb{1}_p \text{ —— } \mathbb{1}_p) \qquad D = [0]$$

La représentation n'est pas minimale a priori et des modes sont non commandables

On a en effet utiliser trop d'états pour représenter $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$. Cette matrice est de rang 1 -> il n'est pas pratique d'utiliser 2 états.

On s'apperçoit que $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix}$

Pour cette $y_i(s) = \dfrac{\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix}}{s} u(s)$

$x_1(s)$

ainsi $x_1(s) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix} \dfrac{u(s)}{s}$ (pas d'informations perdues)