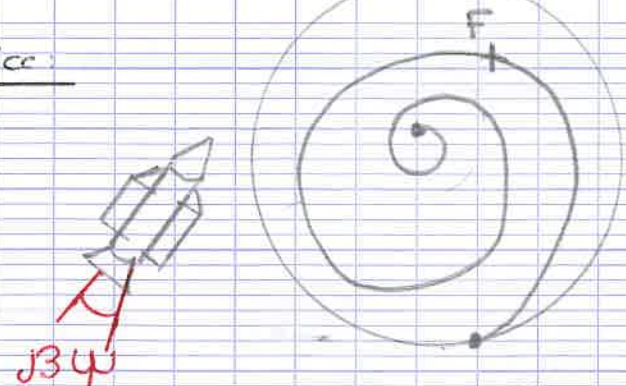
D. Paucelle

Exercice :



$\dot{x_1^*} = f_1(x; u)$

$x_1(t) \neq x_1^*(t)$

$\neq u^*(t)$

$b = -2,3$, efficacité de la commande

$B\psi$, commande sur l'axe ψ

On va s'intéresser à $x_2 = x_1 - x_1^2$: écart entre l'optimal et la trajectoire.

Notons : ψ o θ l'incidences des longueur

$\dot{\psi} = q + p\theta$

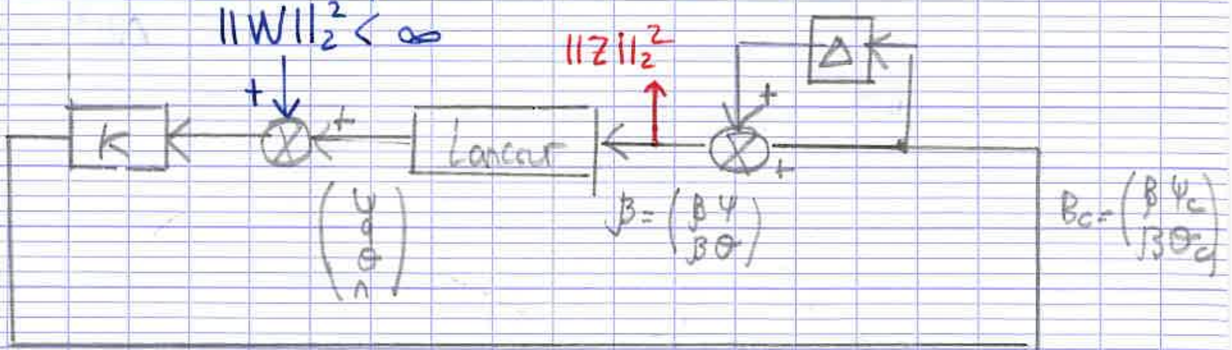
$\dot{q} = a\psi + pmn + b\beta\psi$

On appelle
- a, le coefficient aerodynamique $0,6 \leq a \leq 1,2$
- m, l'inertie fixée à $0,9$
- p, le roulie tel que $0,1 \leq p(t) \leq 0,9$

On sait que $\dot{\theta} = n - p\psi$

$\dot{n} = a\theta - pmq + b\beta\theta$ avec $\beta\theta$, la commande sur l'axe θ

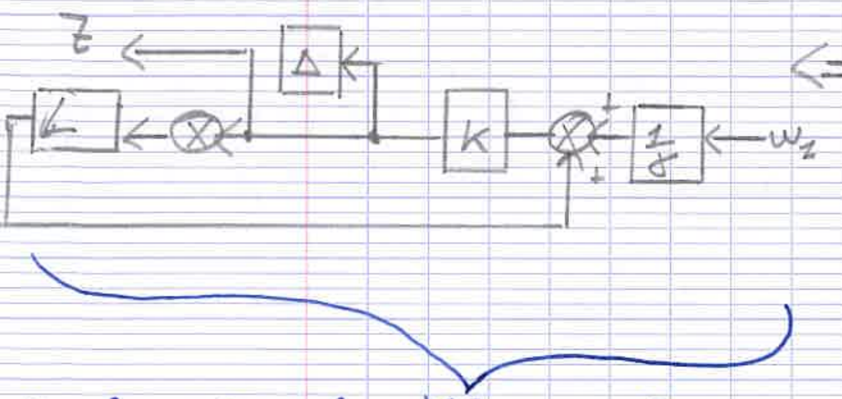
La situation est décrite par le schéma-bloc suivant :



Nota : $\|Z\|_2^2 \leq \gamma^2 \|W\|_2^2$ avec $\|\Delta\|_2^2 \leq \mu B^2 < 1$

$$\|W\|_2^2 = \int_0^{\infty} w^2(t) W(t)\, dt < \infty$$

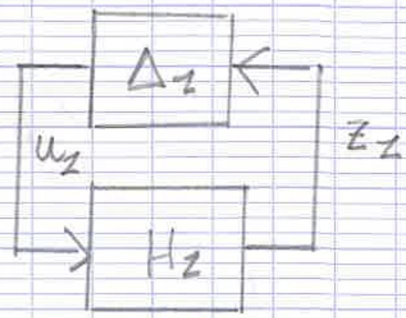
Mise sous la forme d'une interconnexion M-Δ :



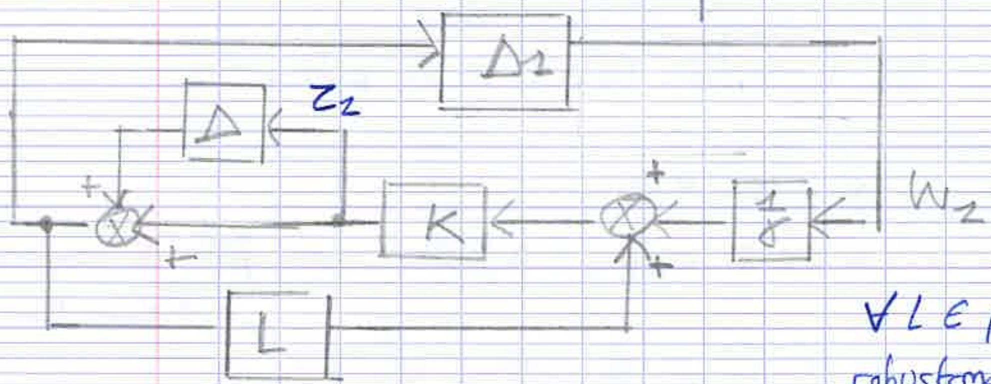
$\|z\|_2^2 < s^2 \|w\|_2^2 = \frac{\gamma_0^2}{\gamma^2} \|w_1\|_2^2$

et $\|H_1\|_2^2 < 1$

$\Longleftrightarrow$



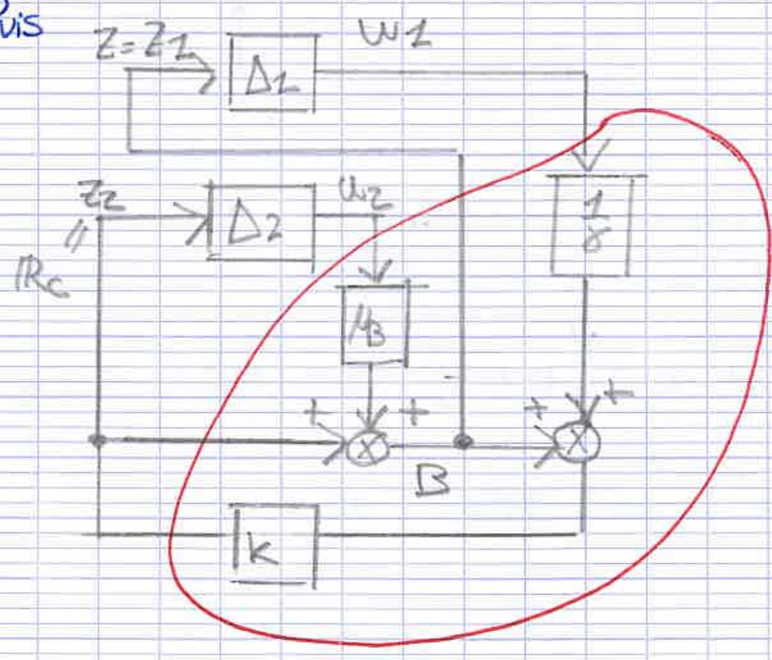
robustement stable $\forall \|\Delta_1\|_2^2 \leq 1$



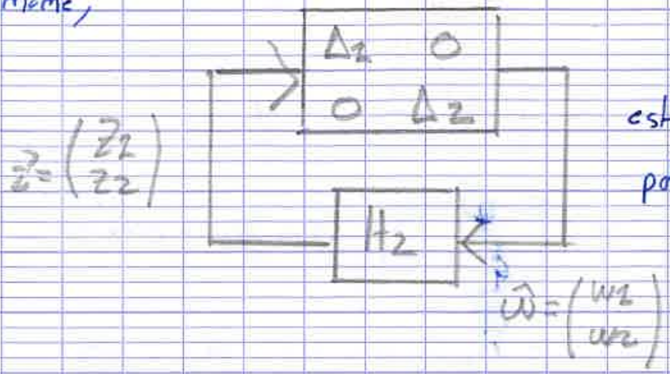
$\forall L \in$ polytope, le système est robustement stable

$\forall \|\Delta\|^2 \leq \rho_n^2 \quad \forall \|\Delta_1\| < 1$

Puis



De même,



est robustement stable $\forall H_2 \in$ polytope $\forall \|\Delta_1\| < 1$
$\forall \|\Delta_2\| < 1$

Aussi,

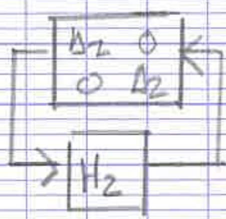
$$\hat{\Delta} = \begin{bmatrix} \Delta_1 & 0 \\ 0 & \Delta_2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{cases} \|\Delta\|_2^2 \leq 1 \\ \|\Delta\|_2^2 \leq 1 \end{cases} \Rightarrow \|\hat{\Delta}\| \leq 1$$

Si

robustement stable $\forall \|\hat{\Delta}\| \leq 1$

alors



robustement stable $\begin{cases} \|\Delta_1\| \leq 1 \\ \|\Delta_2\| \leq 1 \end{cases}$

$\Rightarrow \|H_2\|_2^2 < 1$ par tout $H_2 \in$ polytope

Théorème: Si $\exists X > 0$ $\exists R$ tel que $\forall v = 1; \dots; \bar{v}$

(1)
$$\left[\begin{array}{c|c|c} AX + B_u R + R^T B_u^T + X A^T & B_w & R^T D_{yu}^T + X C_y^T \\ \hline B_w & -\mathbb{1} & D_y^T w \\ \hline C_y X + D_{yu} R & D_{yw} & -\mathbb{1} \end{array}\right] < 0$$

alors $K = R X^{-1}$ stabilise robustement le système.

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + B_w w + B_u u \\ y = C_y x + D_y u + B + D_{yw} u \end{cases}$$

robustement aux incertitude du polytope

et garantie robustement $\frac{\|Z\|^2}{\|W\|^2} < 1$

avec $A(t) \in Co\{A^{[1]}, \dots, A^{[\bar{v}]}\}$

Calculons H_2 : $x = \begin{bmatrix} \dot{\psi} \\ \dot{q} \\ \dot{\theta} \\ \dot{r} \end{bmatrix}$; $\beta = \beta_c + \nu\beta\, w_2$ et $\hat{w} = \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \end{pmatrix}$

$$\dot{x} = \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 1 & \beta & 0 \\ q & 0 & 0 & pm \\ -p & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -pmq & a & 0 \end{bmatrix}}_{A(t)} \begin{bmatrix} \psi \\ q \\ \theta \\ r \end{bmatrix} + \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ b & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & b \end{bmatrix}}_{Bu} \underset{u}{\overset{\beta}{\|}} + \underbrace{\left[\begin{array}{cccc|cc} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & b\nu\beta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & b\nu\beta \end{array}\right]}_{Bw} \hat{w}$$

$$Z^n = \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \end{bmatrix} = \underbrace{\left[\begin{array}{cccc} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]}_{C_J = 0} x + \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}}_{D_J u} u + \underbrace{\left[\begin{array}{cccc|cc} 0 & 0 & 0 & 0 & \nu\beta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \nu\beta \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]}_{D_J w} \hat{w}$$

Preuve du théorème : $\sum_{v=1}^{\bar{v}} \underset{\geq 0}{\xi_v}(1) < 0$ et on suppose $\sum^{\bar{v}} \xi_v = 1$

Dès lors, $A(t)X + BuK + K^T Bu^T + XA(t)\ (x^T x - \gamma w^T z^T)$

et
$$\left[\begin{array}{c|c|c} (\sum \xi_v A^{[k]})X + (\overset{1}{\overset{\|}{\sum \xi_v}}) Bu^T K^T + (\dots) & Bw & K \\ Bw^T & -\mathbb{1} & D_J w \\ C_J X + D_J u K & D_J w & -\mathbb{1} \end{array}\right]$$

$\Rightarrow$ vrai $\forall A(t) \in Co\{A^{[1]}, \dots A^{[\bar{v}]}\}$

Après calcul, $\dot{V}(x) + Z^* Z - W^* W < 0$ le long des trajectoire de la boucle fermé

$\dot{x}(t) = (A(t) + Bu K) x + B_w w$

$$z=(C_z+D_{zu}K)x+D_{zw}w \quad \text{avec} \quad V(x)=xX^{-1}x$$

$$\Rightarrow \int_0^T (\dot V(x)+z^Tz-w^Tw)<0$$

$$\underbrace{V(t)}_{\geq 0}-\underbrace{V(0)}_{=0}+\int_0^T \|z(t)\|^2dt-\int_0^T\|w(t)\|^2dt<0$$

$$\Rightarrow \int_0^T \|z(t)\|^2dt<\int_0^T\|w(t)\|^2dt$$

Lorsque $T=\infty$ $\|z\|^2<\|w\|^2$

Regardons le polytope,

$$A=\begin{bmatrix} 0 & 1 & \underline{p} & 0 \\ \underline{a} & 0 & 0 & \underline{ag/v} \\ \underline{-p} & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -ag/v\underline{p} & a & 0 \end{bmatrix} = a\begin{bmatrix} \cdots \end{bmatrix} + p\begin{bmatrix} \cdots \end{bmatrix}$$

$$A \in Co\left\{\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0,1 & 0 \\ 0,6 & 0 & 0 & 0,09 \\ -0,1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -0,09 & 0,6 & 0 \end{bmatrix}; \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0,2 & 0 \\ 1,2 & 0 & 0 & 0,09 \\ -0,2 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -0,09 & 1,2 & 0 \end{bmatrix}; \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0,9 & 0 \\ 0,6 & 0 & 0 & 0,82 \\ 0,9 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -0,82 & 0,6 & 0 \end{bmatrix}\right\}$$