* L'algorithme SIS (Sequential Importance Sampling)

$$\boxed{\left[\left\{w_k^{(i)}, x_k^{(i)}\right\}_{i=1}^{N}\right] = SIS\left(\left\{w_{k-1}^{(i)}, x_{k-1}^{(i)}\right\}_{i=1}^{N}, z_k\right)}$$

1. Si $k=0$, alors % Initialisation - Échantillonnage idéal selon la loi initiale
2. Échantillonner $x_0^{(1)} \dots x_0^{(N)} \overset{iid}{\sim} p(x_0)$ et poser $w_0^{(1)} = \dots = w_0^{N} = \frac{1}{N}$
3. Fin_si
4. Si $k \geqslant 1$ alors
5. Pour $i = 1..N$
6. "Propager" $x_{k-1}^{(i)}$ en échantillonnant indépendamment son successeur selon

$$x_k^{(i)} \sim q\left(x_k \mid x_{k-1}^{(i)}, z_k\right)$$

7. Calculer le poids non normalisé associé à $x_k^{(i)}$ par

$$w_k^{*(i)} = w_{k-1}^{(i)} \frac{p(z_k | x_k^{(i)}) \; p(x_k^{(i)} | x_{k-1}^{(i)})}{q(x_k^{(i)} | x_{k-1}^{(i)}, z_k)}$$

8. Fin-pour

9. Pour $i = 1..N$

10. Normaliser le poids $w_k^{(i)}$ associé à $x_k^{(i)}$ selon

$$w_k^{(i)} = \frac{w_k^{*(i)}}{\sum_{j=1}^{N} w_k^{*(j)}}$$

de sorte que $\sum_{i=1}^{N} w_k^{(i)} = 1$

11. Fin-pour

12. Calculer les estimés des moyennes et covariances a posteriori sur la base de $\{x_k^{(i)}, w_k^{(i)}\}$.

13 - Fin - pour

→ Nota : l'algorithme peut être parallélisé, est simple à coder, mais présente un pb lié à sa nature <ins>récursive</ins> : φ de DÉGÉNÉRESCENCE

la variance des poids augmente avec k ⟹ <ins>la variance de l'estimateur augmente également</ins>

après qq récursions, la plupart des particules sont associées à un poids négligeable

→ Taille efficace du N-échantillon

$$N_{eff} := \left(\sum_{i=1}^{N} \frac{1}{\left(w_k^{(i)}\right)^2} \right)^{-1}$$

$\in [1 ; N]$

$= N$ ssi $\forall i, \; w_k^{(i)} = \frac{1}{N}$

$= 1$ si $\forall i \neq i_0, \; w_k^{(i)} = 0$

et $w_k^{(i_0)} = 1$

* L'algorithme SIR (Sampling Importance Resampling)

$$\boxed{\left[\{\underbrace{w_k^{(i)}, x_k^{(i)}}_{x_{0:k}^{(i)}}\}_{i=1}^{N}\right] = SIR\left(\{\underbrace{w_{k-1}^{(i)}, x_{k-1}^{(i)}}_{x_{0:k-1}^{(i)}}\}_{i=1}^{N}, z_k\right)}$$

1 - Si $k=0$, alors % Initialisation - Échantillonnage idéal selon la loi initiale

2 - Échantillonner $x_0^{(1)} \dots x_0^{(N)} \overset{iid}{\sim} p(x_0)$ et poser $w_0^{(1)} = \dots = w_0^{N} = \frac{1}{N}$

3 - Fin-si

4 - Si $k \geq 1$ alors

5 - Pour $i = 1..N$

6 - "Propager" $x_{k-1}^{(i)}$ en échantillonnant indépendamment son successeur selon

$$x_k^{(i)} \sim q(x_k \mid x_{k-1}^{(i)}, z_k)$$

Calculer le poids non normalisé associé à $x_k^{(i)}$ par

$$w_k^{*(i)} = w_{k-1}^{(i)} \frac{p(z_k|x_k^{(i)})\; p(x_k^{(i)}|x_{k-1}^{(i)})}{q(x_k^{(i)}|x_{k-1}^{(i)}, z_k)}$$

Fin-pour

Pour $i=1..N$

Normaliser le poids $w_k^{(i)}$ associé à $x_k^{(i)}$ selon

$$w_k^{(i)} = \frac{w_k^{*(i)}}{\sum_{j=1}^{N} w_k^{*(j)}}$$ de sorte que $\sum_{i=1}^{N} w_k^{(i)} = 1$.

Fin-pour

Calculer les estimés des moyennes et covariances a posteriori sur la base de $\{x_k^{(i)}, w_k^{(i)}\}$.

13. Si $N_{eff} < N_{seuil}$, alors Rééchantillonner $\left(\{w_k^{(i)}, x_k^{(i)}\}\right)$

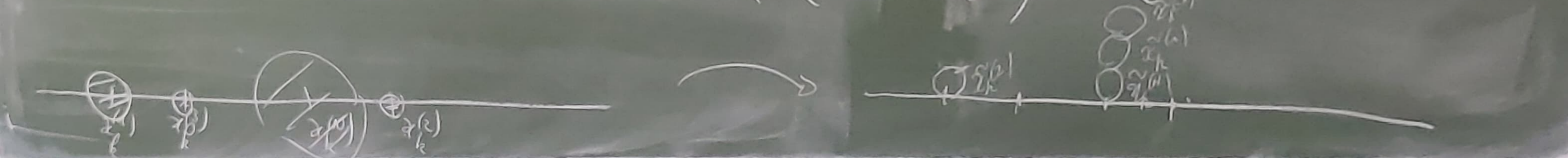
14- Fin-pour

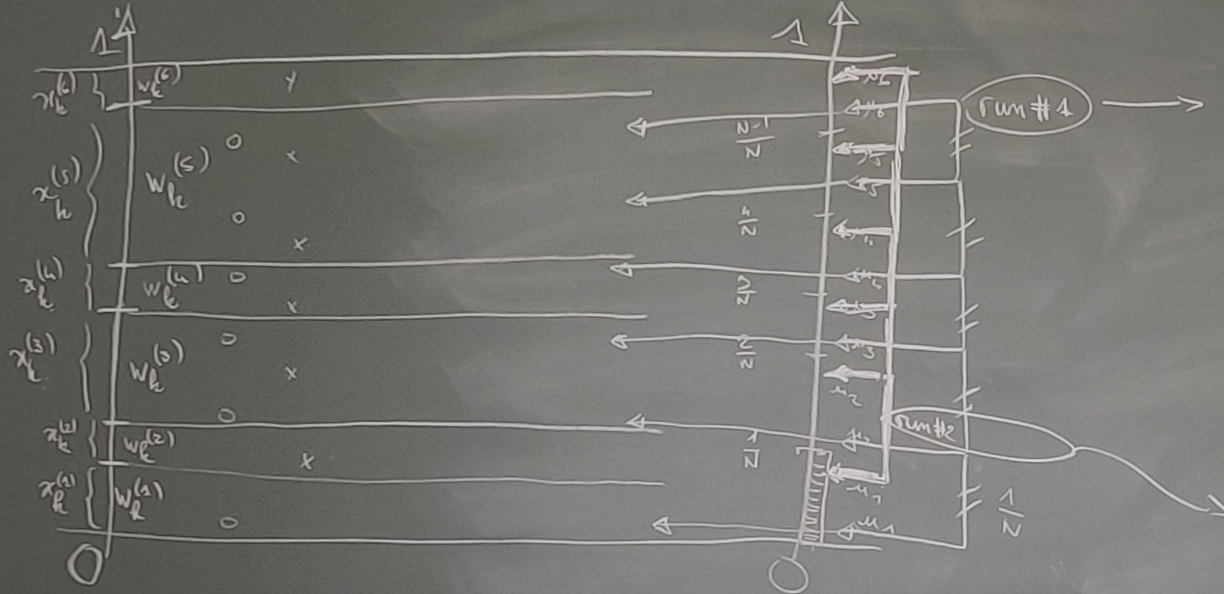
$\frac{N}{2}, \frac{2N}{3}, \frac{N}{3}$

→ L'algorithme SIR incorpore si besoin une étape de rééchantillonnage du nuage de particules $\{w_k^{(i)}, x_k^{(i)}\}_{i=1}^{N}$ en un nuage équi-pondéré "équivalent"

$$\sum_{i=1}^{N} w_k^{(i)} \, \delta\left(x_k - x_k^{(i)}\right) \approx \sum_{i=1}^{N} \frac{1}{N} \, \delta\left(x_k - \tilde{x}_k^{(i)}\right)$$

où les particules $\tilde{x}_k^{(1)} \dots \tilde{x}_k^{(N)}$ sont échantillonnées avec remise dans $\{x_k^{(1)}, \dots, x_k^{(N)}\}$ selon la règle $\mathbb{P}\left(\tilde{x}_k^{(i)} = x_k^{(j)}\right) = w_k^{(j)}$





$$
\begin{cases}
\tilde{x}_k^{(1)} = x_k^{(1)} \\
\tilde{x}_k^{(2)} = x_k^{(3)} \\
\tilde{x}_k^{(3)} = x_k^{(3)} \\
\tilde{x}_k^{(4)} = x_k^{(4)} \\
\tilde{x}_k^{(N-1)} = x_k^{(5)} \\
\tilde{x}_k^{(N)} = x_k^{(5)}
\end{cases}
$$

$$
\begin{cases}
\tilde{x}_k^{(1)} = x_k^{(2)} \\
\tilde{x}_k(2) = x_k^{(3)} \\
\tilde{x}_k(3) = x_k^{(4)} \\
\tilde{x}_k(4) = x_k^{(5)} \\
\tilde{x}_k(N-1) = x_k(5) \\
\tilde{x}_k(N) = x(5)
\end{cases}
$$

$u_1 \sim \mathcal{U}[0; \frac{1}{N}]$

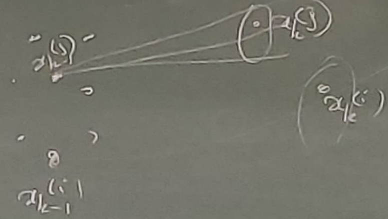
$u_2 = u_1 + \frac{1}{N}$

$u_3 = u_2 + \frac{1}{N} \ldots$

III 3. Choix de la fonction d'importance

A. "CONDENSATION" / "Bootstrap filter"

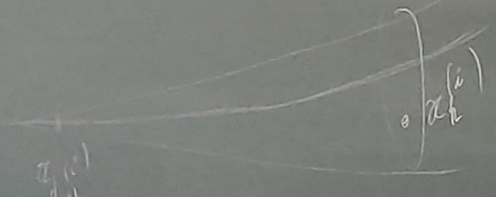
Conditional
Density
Propagation



* $q(x_k | x_{k-1}, z_k) := p(x_k | x_{k-1})$ loi de dynamique a priori

$$\Downarrow$$

$x_k^{(i)}$ successeur de $x_{k-1}^{(i)}$ et échantillonné selon $x_k^{(i)} \sim p(x_k | x_{k-1}^{(i)})$



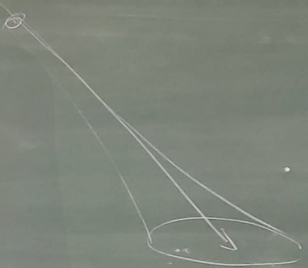
* On obtient le poids associé

$$w_k^{(i)} \propto w_k^{*(i)} := w_{k-1}^{(i)} \frac{p(z_k|x_k^{(i)})\, \cancel{p(x_k^{(i)}|x_{k-1}^{(i)})}}{\cancel{p(x_k^{(i)}|x_{k-1}^{(i)})}}$$

$$\Downarrow$$

$$\boxed{w_k^{(i)} \propto w_{k-1}^{(i)} \underbrace{p(z_k|x_k^{(i)})}}$$

VRAISEMBLANCE de la particule $x_k^{(i)}$ // mesure z_k



$k-1$ $\{w_{k-1}^{(i)}, x_{k-1}^{(i)}\}_{i=1}^{N}$

$\downarrow R$

$k-1$ $\{w_{k-1}^{(i)} = \frac{1}{N}, x_{k-1}^{(i)}\}$ nouveaux

$\downarrow$ I.S

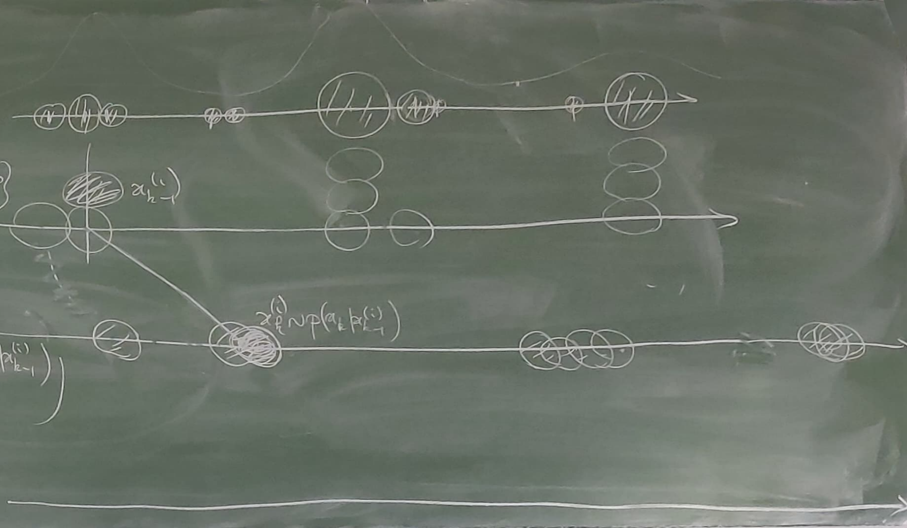
k $\{w_{k-1}^{(i)}, x_k^{(i)} \sim q(x_k | x_{k-1}^{(i)})\}$

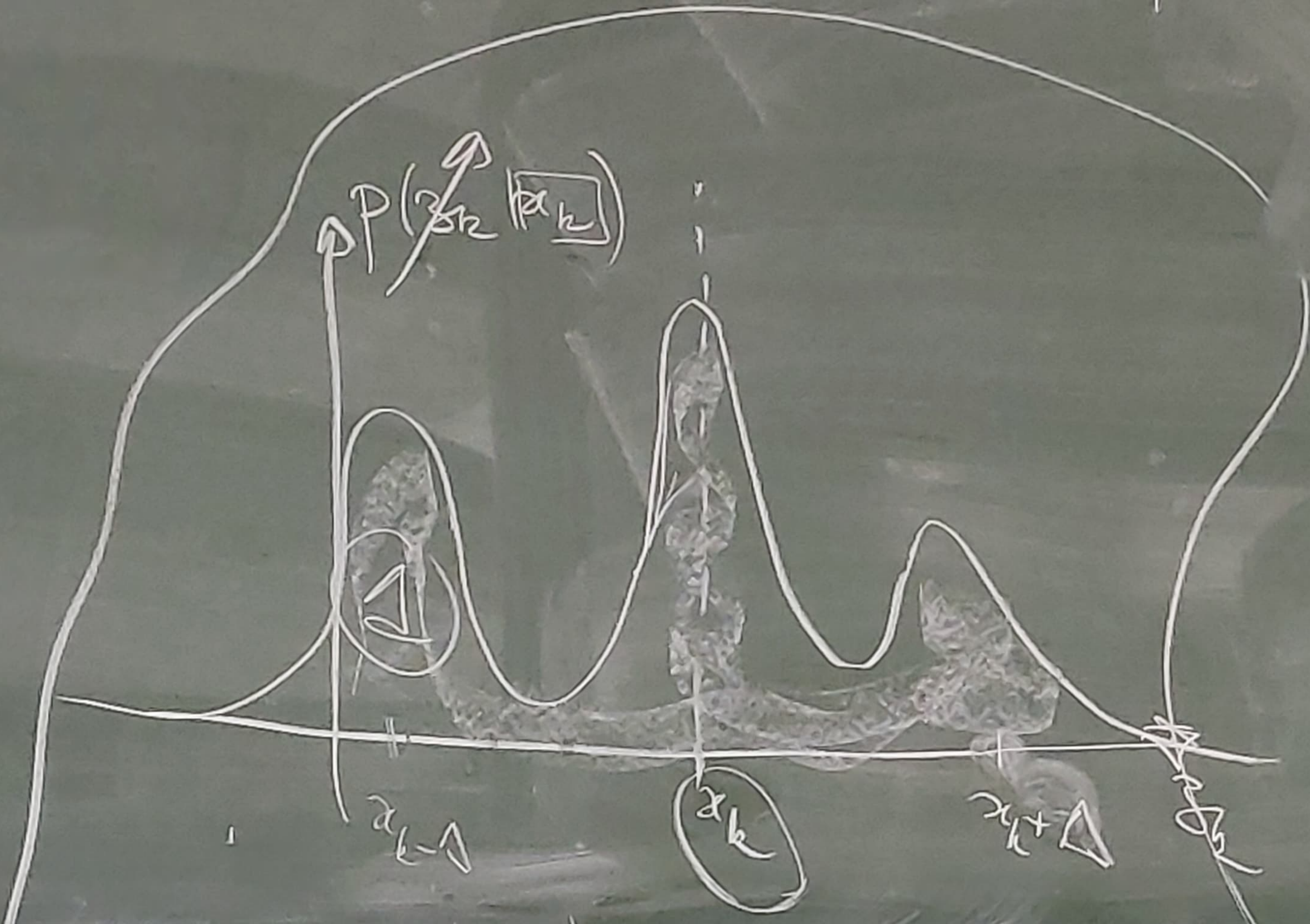
$\downarrow W$

$\{w_k^{(i)}, x_k^{(i)}\}$

Note :

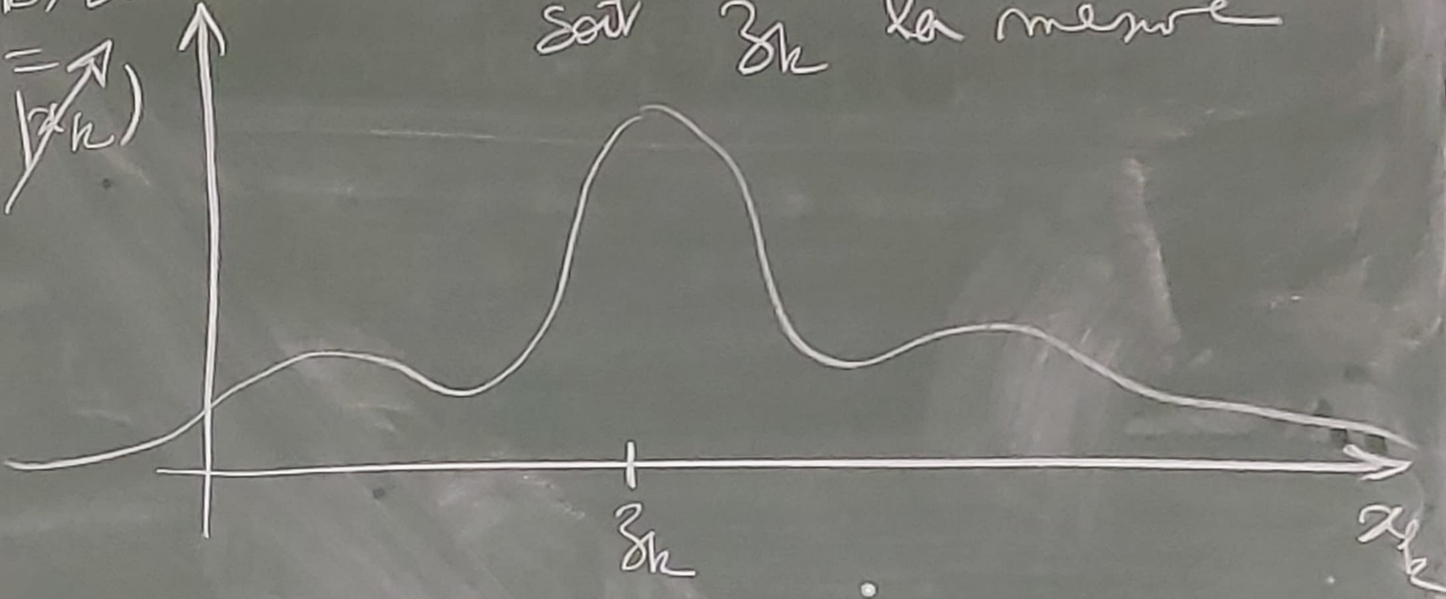
$$\sum_{i=1}^{N} w_{k-1}^{(i)} \delta(x_k - x_k^{(i)}) \approx p(x_k | z_{1:k-1})$$

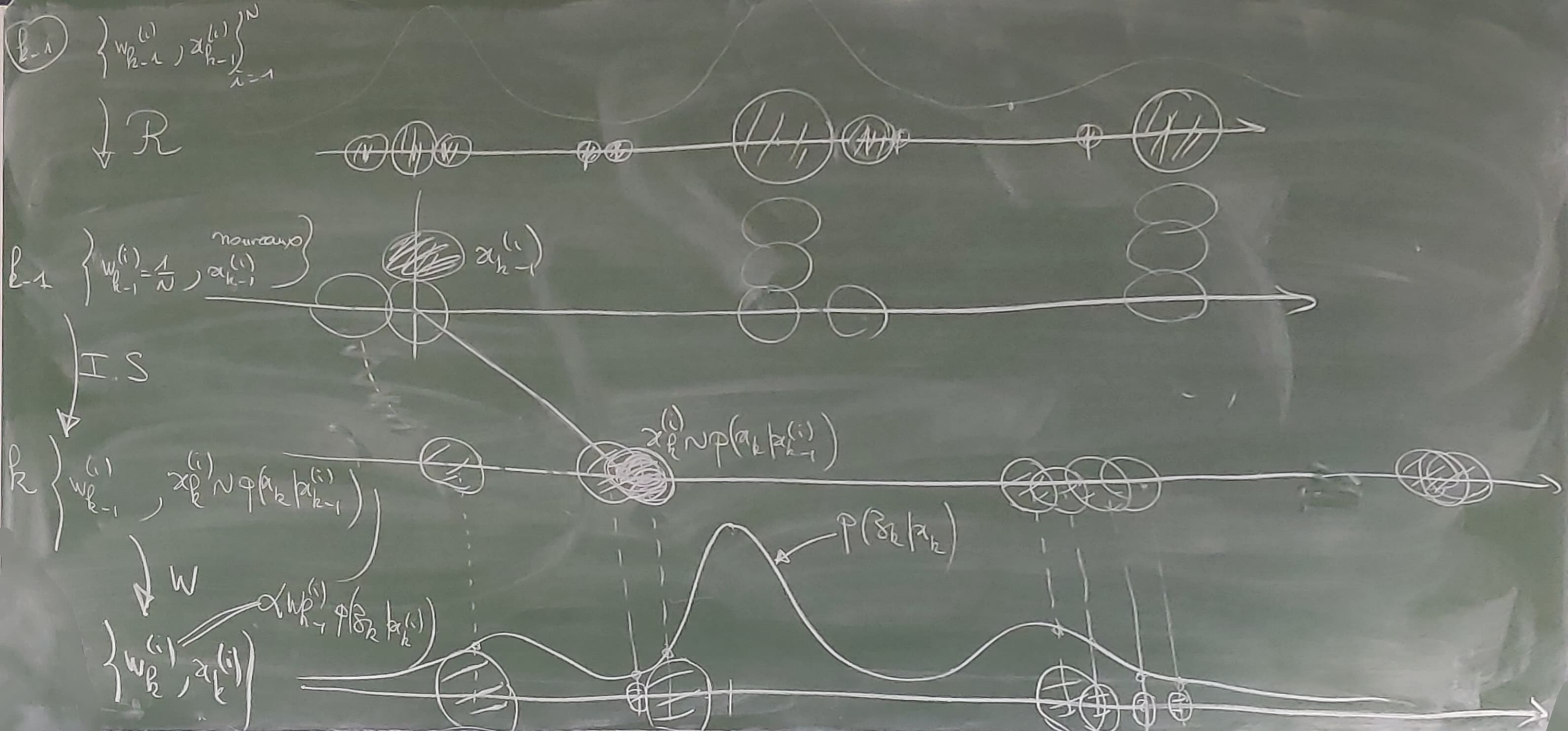



$P(z_k | x_k)$
Δ
$x_k - \Delta$
x_k
$x_k + \Delta$
z_k

$$L(x_k ; z_k) = p(z_k | x_k)$$

soit z_k la mesure





$k-1$ $\{w_{k-1}^{(i)}, x_{k-1}^{(i)}\}_{i=1}^{N}$
R
$k-1$ $\{w_{k-1}^{(i)} = \frac{1}{N}, x_{k-1}^{(i)}\}$ nouveaux
$x_{k-1}^{(i)}$
I.S
k $\{w_{k-1}^{(i)}, x_k^{(i)} \sim p(x_k|x_{k-1}^{(i)})\}$
$x_k^{(i)} \sim p(x_k|x_{k-1}^{(i)})$
$p(z_k|x_k)$
W
$\propto w_{k-1}^{(i)}\, p(z_k|x_k^{(i)})$
$\{w_k^{(i)}, x_k^{(i)}\}$

B- Loi d'importance guidée par la mesure

$* \quad q(x_k | x_{k-1}, z_k) = q_0(x_k | z_k)$ — $\left(\begin{array}{l}\text{à valeurs élevées dans les}\\ \text{zones de l'espace d'état}\\ \text{fortement vraisemblables //}\\ \text{la mesure } z_k\end{array}\right)$

$$\Downarrow$$

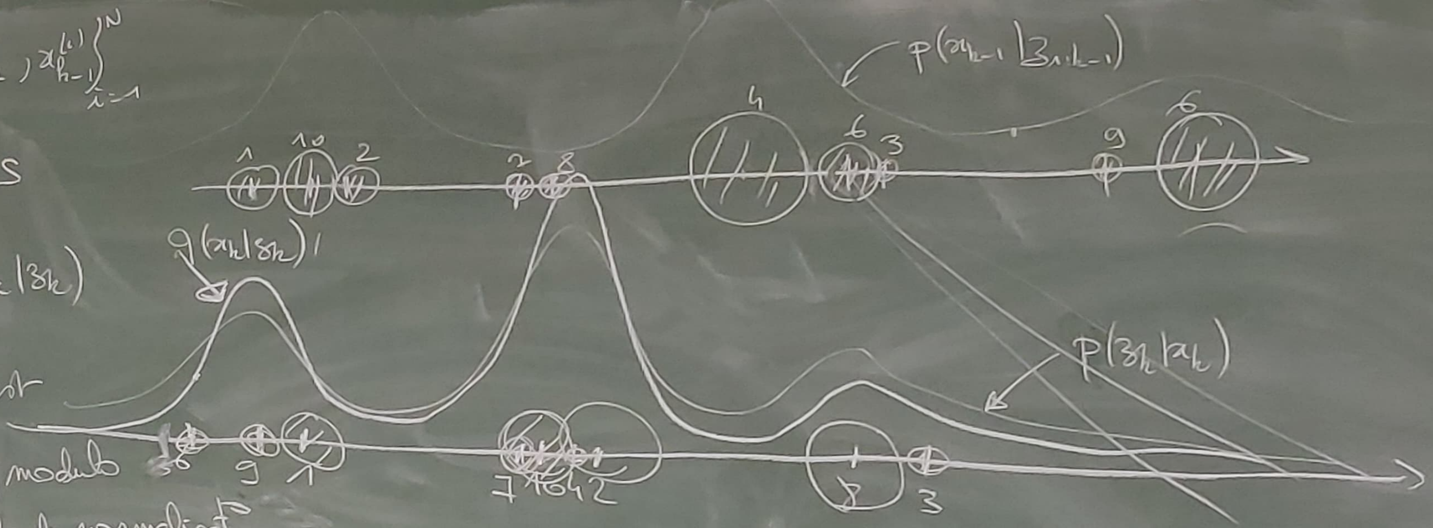
$$x_k^{(i)} \sim q_0(x_k | z_k)$$

$$w_k^{(i)} \propto w_{k-1}^{(i)} \frac{p(\boxed{z_k} | x_k^{(i)}) \, \overline{p(x_k^{(i)} | x_{k-1}^{(i)})}}{\underline{q_0(x_k^{(i)} | z_k)}}$$

⚠ Le lien de compatibilité de $x_k^{(i)}$ et $x_{k-1}^{(i)}$ du pt de vue de la dyn a priori n'est pas garanti !

$\left\{ w_{k-1}^{(i)}, x_{k-1}^{(i)} \right\}_{i=1}^{N}$

$\downarrow \underline{+}\, S$



$x_k^{(i)} \sim q(x_k \mid z_k)$

où

$q(x_k \mid z_k)$ est

$\simeq p(z_k \mid x_k)$ modulo

une constante de normalisat°

$$w_k^{(i)} \propto w_{k-1}^{(i)} \frac{p(z_k \mid x_k^{(i)})\, p(x_k^{(i)} \mid x_{k-1}^{(i)})}{q(x_k^{(i)} \mid z_k)}$$

C - Exemple de mélange de lois

* $q(x_k | x_{k-1}, z_k) = \lambda_0 \underbrace{q_0(x_k | z_k)} + \lambda_1 \underbrace{p(x_k | x_{k-1})} + \lambda_2 \underbrace{\mathcal{U}_{\mathcal{D}}(x_k)}$

où $\lambda_0 + \lambda_1 + \lambda_2 = 1$

et $\lambda_0, \lambda_1, \lambda_2 \geq 0$

pour échantillonner

$x_k^{(i)} \sim q(x_k | x_{k-1}^{(i)}, z_k)$

$\rightarrow x_k^{(i)} \sim q_0(x_k | z_k)$ avec la proba λ_0

$\rightarrow x_k^{(i)} \sim p(x_k | x_{k-1}^{(i)})$ ———— λ_1

$\rightarrow x_k^{(i)} \sim \mathcal{U}_{\mathcal{D}}(x_k)$ ———— $\lambda_2 = 1 - \lambda_0 - \lambda_1$