Commande pour les systèmes complexes

Frédéric Gouaisbaut

LAAS-CNRS
Tel : 05 61 33 63 07
email : fgouaisb@laas.fr
webpage: *www.laas.fr/ ∼ fgouaisb*

November 7, 2022

Présentation du Cours

- Volume Horaire: 10h de Cours, 12h de TDs, 8h de TPs
- Matériel sur le Moodle (des fois)
- Frédéric Gouaisbaut, `fgouaisb@laas.fr`

Sommaire du cours

⋆ 3 grandes parties dans le cours:

1. Introduction aux systèmes non linéaires,
2. Stabilité des systèmes non linéaires,
3. Commandes des systèmes non linéaires.

Ce que nous ne ferons pas :

1. Analyse de commandabilité et/ou observabilité
2. Observateurs pour les systèmes non linéaires,

Part I

Introduction aux systèmes non linéaires

Sommaire

Introduction (1)

On considère des systèmes non linéaires, c'est-à-dire des systèmes de la forme:

$$\dot{x}(t) = f(t, x(t), u(t)), \tag{1}$$

où

- $x(t)$ est un vecteur d'état de dimension n.
- $u(t)$ est un vecteur d'entrée de dimension m.
- f est une fonction de trois paramètres, le temps t, le vecteur d'état x et l'entrée u.

Etude des systèmes non linéaires

Dans ce cours, étudier les équations non linéaires (1), c'est:

- Caractériser les solutions de l'équation (1),
- Etablir les propriétés de stabilité de (1),
- Déterminer des lois de commande pour le système (1).

Introduction (2)

Considérons le système non linéaire:

$$\dot{x}(t) = f(t, x(t), u(t)),$$

Definition

Considérons le système (1), celui-ci est dit stationnaire s'il ne dépend pas de la première variable t. Dans le cas contraire, on parle d'un système à temps variant.

Definition

Considérons le système (1), celui-ci est dit autonome s'il ne dépend pas de la troisième variable $u(t)$. Dans le cas contraire, on parle d'un système contrôlé.

Dans ce dernier cas, faire de la commande, c'est chercher u qui dépendent

- du temps t,
- de l'état x,
- d'une sortie $y = h(x, u)$,
- d'une sortie d'un système dynamique.

pour que les états d'un système (ou la sortie) se comporte de manière adéquate.

Introduction (3)

⋆ Pourquoi étudier les systèmes non linéaires?
⋆ Un système est dit non linéaire lorsqu'il n'est pas linéaire.
⋆ Un système linéaire:

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = A(t)x(t) + B(t)u(t) \\ y(t) = C(t)x(t) + Du(t) \end{cases}$$

- Propriétés d'homogénéité,
- Propriétés de superposition.

→ Deux propriétés fondamentales permettant d'obtenir des résultats importants basés sur l'Algèbre Linéaire.

⋆ Existe-il des techniques spécifiques aux systèmes non linéaires?
⋆ Existe-il des spécialistes des systèmes non linéaires?

like nonlinear science is like referring to the bulk of zoology as the study of non-elephant animals (Sta

Difficultés inhérentes aux systèmes non linéaires

Les systèmes non linéaires ont des propriétés complexes que nous ne retrouvons pas pour des systèmes non linéaires.

- *Échappement en temps fini*
  ⋆ Les états du système diverge vers l'infini en temps **fini**.
  ⋆ Remarquons que pour les systèmes linéaires, les systèmes instables divergent vers l'infini en temps infini.
- *Points d'équilibre multiples*
  ⋆ Les systèmes linéaires ont en général un unique point d'équilibre isolé.
  ⋆ Les systèmes non linéaires peuvent posséder plusieurs point d'équilibre. Il est donc important d'étudier le comportement du système en fonction des **conditions initiales**. → Notion de local/global extrêmement importante.
- *Apparition de cycles limites*
  ⋆ Des oscillations pour les systèmes linéaires apparaissent uniquement pour des valeurs propres sur l'axe imaginaire.
  → Phénomène peu robuste aux perturbations et dépendant de la condition initiale.
  ⋆ En non linéaire, des oscillations *stables* et robustes peuvent survenir, qui ne dépendent pas des conditions initiales. Ce sont des cycles limites.
- *Réponse à une entrée sinusoïdale*
  ⋆ Pour les systèmes linéaires, la réponse en régime permanent (sinusoidale) à une entrée sinusoïdale est une fonction sinusoïdale de même période.
  ⋆ Pour un système non-linéaire, elle peut être (sous,sur) harmonique ou pratiquement périodique. La notion de réponse fréquentielle n'est donc pas définie pour les systèmes non linéaires.
- *Phénomènes chaotiques*
  Un système non linéaire peut avoir en *régime permanent* des comportements autres qu'un point d'équilibre ou un cycle limite, des attracteurs étranges.

Exemple d'échappement en temps fini

On considère le système suivant:

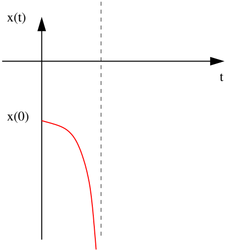
$$\dot{x}(t) = -x^2(t),\ x(0) = -1$$

⋆ C'est bien un système non linéaire!
⋆ La solution s'écrit:

$$x(t) = \frac{1}{t-1}.$$

Celle-ci reste valide pour $t \in [0, 1[$. D'autre part, nous avons:

$$\lim_{t \to 1} x(t) = \infty.$$



La solution va diverger vers $+\infty$ en temps fini.

Les points d'équilibre (1)

Definition

Considérons le système sans entrée (1), on appelle x_e un point d'équilibre, la solution de l'équation

$$f(t, x_e) = 0, \forall t \geq 0$$

Remarque

Si le système sans entrée (1) admet un point d'équilibre, alors

$$\dot{x}(t) = f(t, x(t)), \ x(0) = x_e$$

admet une unique solution $x(t) = x_e, \forall t \geq 0$.

Autrement dit, si le système est initialisé sur un point d'équilibre, la trajectoire résultante est constante.

Remarque (le cas des systèmes linéaires)

$\star$ *Considérons un système linéaire de la forme* $\dot{x}(t) = Ax(t)$. *Un point d'équilibre* x_e *est solution de:*

$$Ax_e = 0$$

Celui-ci admet un unique point d'équilibre 0 *si* $det(A) \neq 0$. *Dans le cas contraire, il posséde une infinité de points d'équilibre.*

Les points d'équilibre (2)

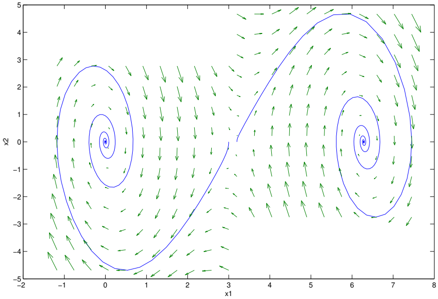
$\star$ Un système non linéaire peut posséder plusieurs points d'équilibre isolés.
Considérons l'exemple du pendule inverse avec frottement modélisé par:

$$\begin{cases} \dot{x}_1(t) = x_2(t) \\ \dot{x}_2(t) = -10\sin(x_1(t)) - x_2(t) \end{cases}$$

$\star$ Combien de points d'équilibre?

Tracé dans le plan (x_1, x_2)

Figure: Visualisation des trajectoires du pendule inverse dans le plan de phase



- ⋆ On voit apparaître plusieurs points d'équilibres $0, \pi, 2\pi$. Certaines trajectoires semblent converger vers les points $0, 2\pi$, mais le point π est plutôt répulsif.
- ⋆ Ajout en vert des tangentes aux courbes.

Les cycles limites (1)

$\star$ Les oscillations sont des phénomènes très courants dans l'étude des systèmes dynamiques. Les trajectoires oscillent lorsqu'il existe des solutions $x(t)$ non triviales et une période $T > 0$

$$x(t) = x(t + T)$$

$\star$ Pour les systèmes linéaires, nous retrouvons ce genre de phénomène lorsque les valeurs propres du système sont imaginaires.

$$\begin{cases} \dot{x}_1(t) = x_2(t) \\ \dot{x}_2(t) = -x_1(t) \end{cases}$$

Les valeurs propres sont $\{\pm j\}$ et les solutions appartiennent à un cercle de centre 0 et de rayon $\sqrt{x_{10}^2 + x_{20}^2}$. Elles s'écrivent:

$$\begin{cases} x_1(t) = x_{10}\cos(t) + x_{20}\sin(t) \\ x_1(t) = x_{20}\cos(t) - x_{10}\sin(t) \end{cases}$$

$\rightarrow$ Les oscillations obtenues dépendent donc des conditions initiales. Perturber les CIs modifie l'orbite...

$\rightarrow$ Ajouter une perturbation détruit les oscillations.

Les cycles limites (2)

⋆ Un cycle limite doit:

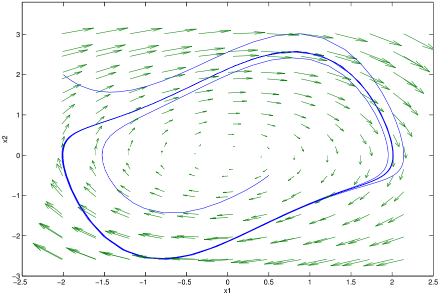
- Structurellement stable, résistant aux perturbations petites,
- Les oscillations ne dépendent pas des CIs.

On considère l'oscillateur de Van der Pol:

$$\begin{cases} \dot{x}_1(t) = x_2(t) \\ \dot{x}_2(t) = -x_1(t) + \epsilon(1 - x_1^2)x_2 \end{cases}$$

⋆ Tracé dans le plan x_1, x_2.

Figure: Visualisation des trajectoires de l'oscillateur de Van der Pol dans le plan de phase



systèmes chaotiques avec des exemples

$\star$ Dynamique de population $x(k)$ (sans prédateur et ressources limitées)

$$x(k+1) = 4\lambda x(k)(1-x(k))$$

$\star$ Phénomène de convection de Rayleigh-Bénard : Modèle de Lorenz

$$\begin{aligned}
\dot{x}(t) &= \sigma(y(t)-x(t)) \\
\dot{y}(t) &= \rho x(t) - y(t) - x(t)z(t) \\
\dot{z}(t) &= x(t)y(t) - \beta z(t)
\end{aligned}$$

Figure: trajectoires du modèle de dynamique de la population

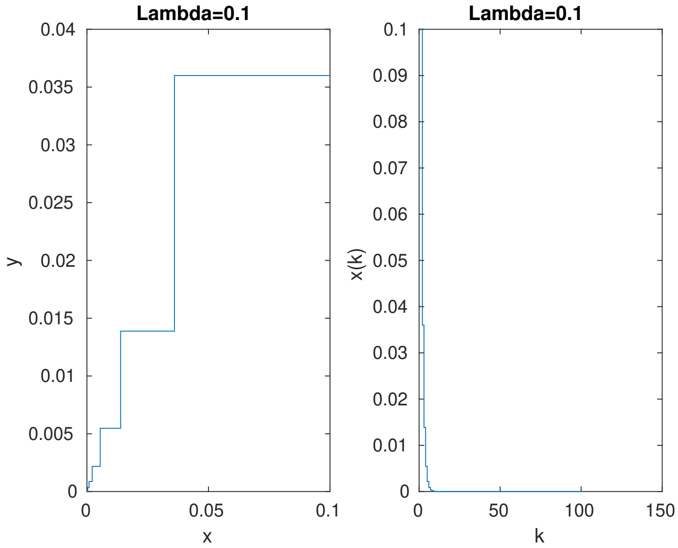


Figure: trajectoires du modèle de dynamique de la population

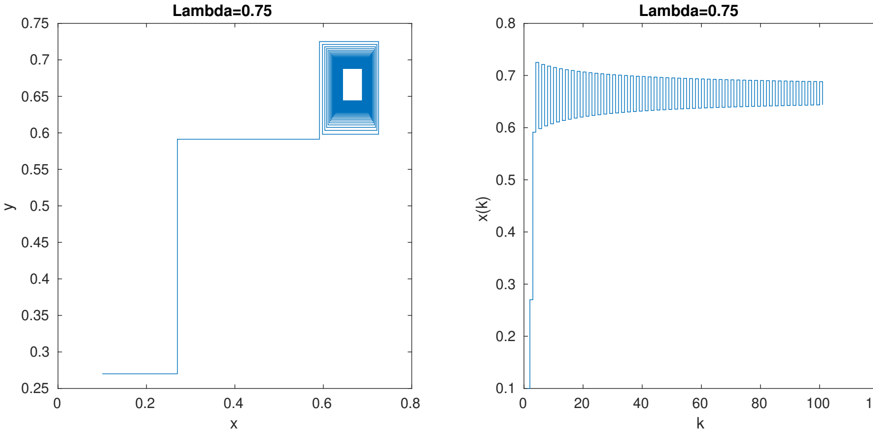


Figure: trajectoires du modèle de dynamique de la population

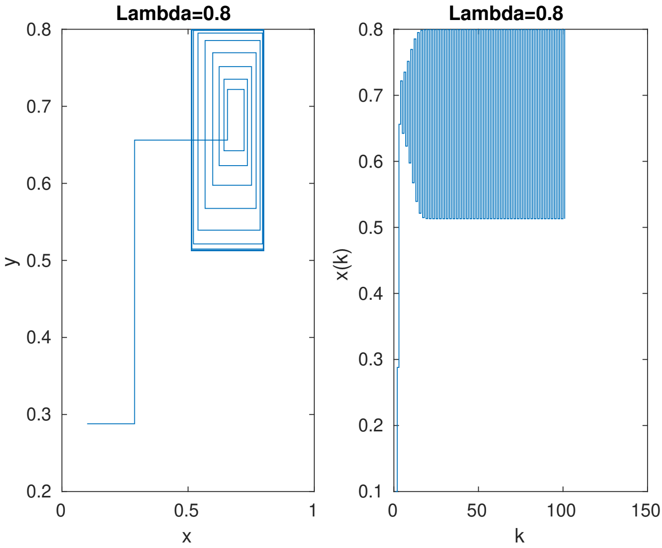


Figure: trajectoires du modèle de dynamique de la population

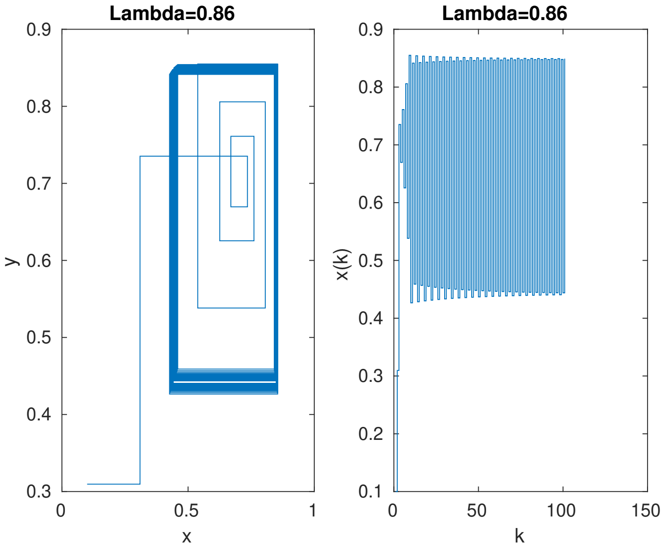


Figure: trajectoires du modèle de dynamique de la population

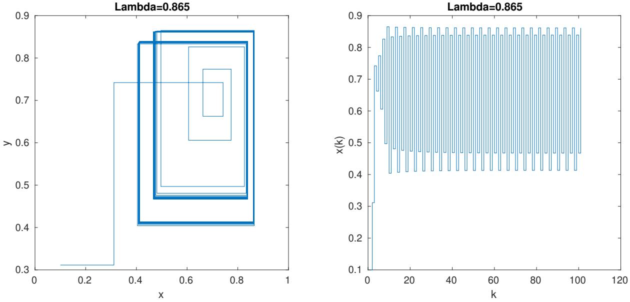


Figure: trajectoires du modèle de dynamique de la population

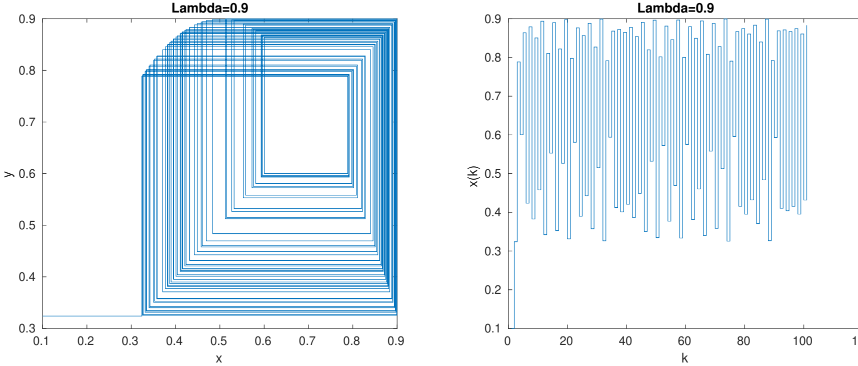


Figure: trajectoires du modèle de dynamique de la population

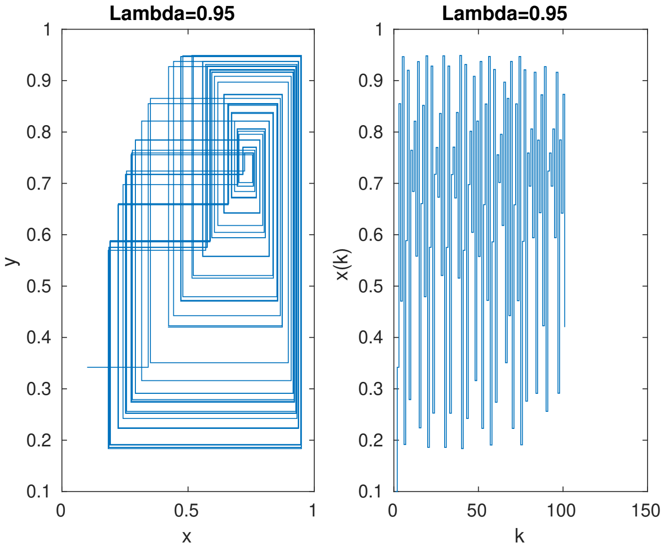


Figure: trajectoires du modèle de dynamique de la population

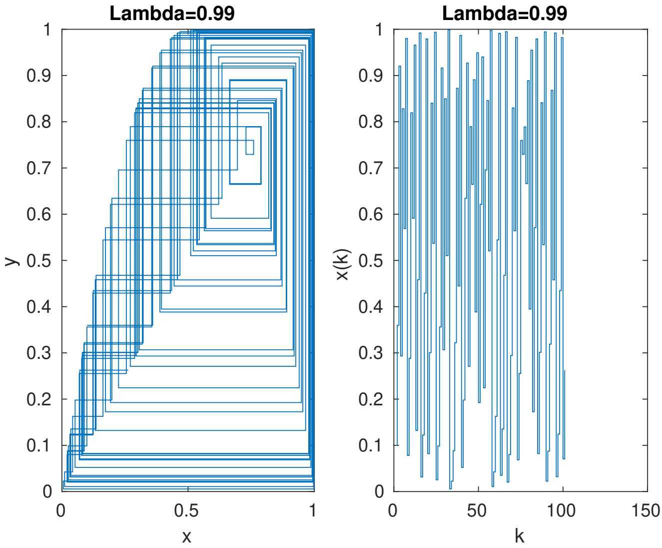


Figure: trajectoires du modèle de dynamique de la population

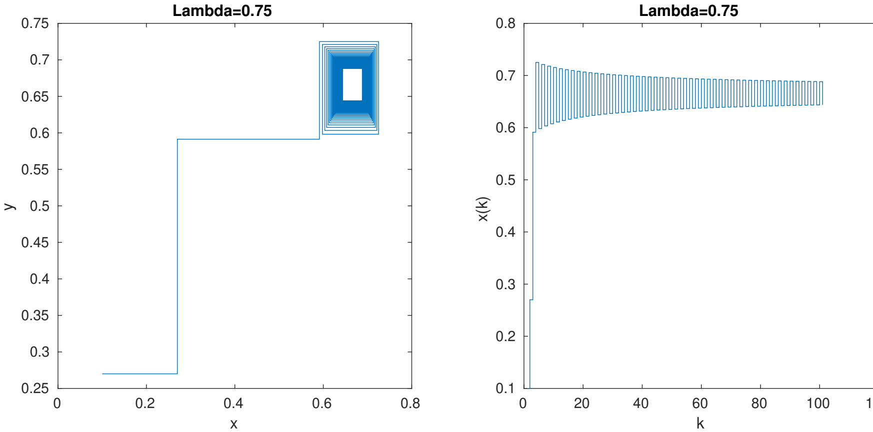


Figure: trajectoires du modèle de Lorentz

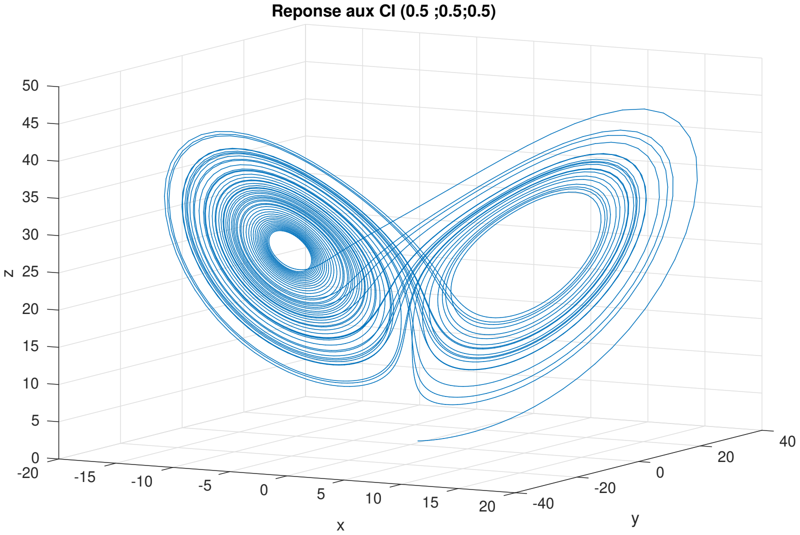
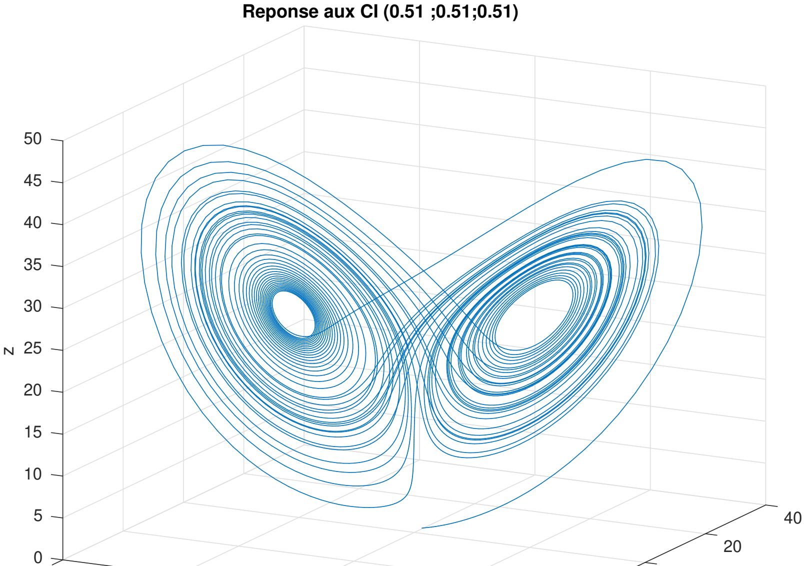


Figure: trajectoires du modèle de Lorentz



Position du problème (1)

- On considère un système non linéaire d'ordre 2:

$$\begin{cases} \dot{x}_1(t) = f_1(x_1, x_2) \\ \dot{x}_2(t) = f_2(x_1, x_2) \end{cases} \tag{2}$$

- Nous voudrions comprendre l'évolution locale des trajectoires de (2) autour des points d'équilibre du système définis par:

$$f_1(x_{1e,} x_{2e}) = 0, \;\; f_2(x_{1e,} x_{2e}) = 0$$

- L'idée est de développer en série de Taylor autour du point x_e les équations du système (2) et de s'arrêter à l'ordre 1, les autres termes étant négligeables autour de x_e.

$$\dot{x}(t) = f(x_e) + \left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{x_e} (x - x_e). \tag{3}$$

où $f = [f_1; f_2]^T$. Comme $f(x_e) = 0$, en posant $y = x - x_e$ nous obtenons l'équation suivante:

- $$\dot{y}(t) = \left[\left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{x_e} \right] y, \tag{4}$$

qui définit le comportement local du système autour du point d'équilibre.

Position du problème (2)

- Le système défini par

$$\dot{y}(t) = \left[\left. \frac{\partial f}{\partial x} \right|_{x_e} \right] y, \tag{5}$$

  est un système linéaire de dimension 2, que nous pouvons étudier analytiquement.

⋆ Indices quant aux comportements locaux du système non linéaire.

Comportement qualitatif des systèmes linéaires de dimension 2

On considère un système linéaire de dimension 2 $\dot{x}(t) = Ax(t),\ x(0) = x_0$.

- ⋆ La solution de l'équation d'état vaut $x(t) = e^{At}x_0$.
- ⋆ En utilisant un changement de base, on peut reécrire la matrice A sous la forme $A = PJP^{-1}$, où P est la matrice de changement de base et J le bloc de jordan associé à A.
- ⋆ J peut prendre la forme suivante
  - A a deux valeurs propres réelles et distinctes $J = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix}$
  - A a deux valeurs propres identiques $J = \begin{bmatrix} \lambda_1 & k \\ 0 & \lambda_1 \end{bmatrix}$.
  - A a deux valeurs propres complexes et conjuguées $J = \begin{bmatrix} \alpha & \beta \\ \beta & \alpha \end{bmatrix}$.

⋆ Dans le cas des valeurs propres réelles, si une des valeurs propres est nulle, le système n'admet plus un point d'équilibre unique. C'est une étude à part.

Valeurs propres réelles différentes de zéro

- On considére que les valeurs propres sont non nuls associés aux valeurs propres v_1, v_2.
- On pose $P = [v_1, v_2]$ et $z = P^{-1}x$, le système devient:

$$\dot{z}_1(t) = \lambda_1 z_1(t), \; \dot{z}_2(t) = \lambda_2 z_2(t)$$

- la Réponse s'écrit:

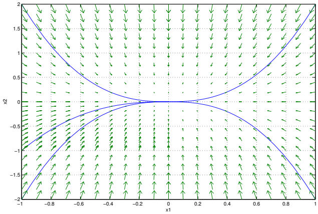
$$z_1(t) = z_{10}e^{\lambda_1 t}, \; z_2(t) = z_{20}e^{\lambda_2 t}$$

- En éliminant le temps, on trouve:

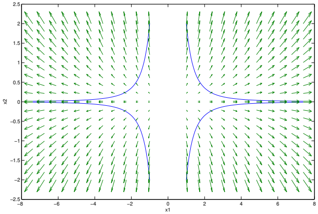
$$z_2 = cz_1^{\lambda_2/\lambda_1},$$

  où c est une constante dépendant des conditions initiales.
- Plusieurs cas sont possibles suivant le signe des valeurs propres.
  1. $\lambda_2 < \lambda_1 < 0$, les états du système convergent vers 0, un point noeud stable.
  2. $0 < \lambda_2 < \lambda_1$, les états du système divergent, 0 est un point noeud instable.
  3. $\lambda_2 < 0 < \lambda_1$, les états du systèmes divergent, 0 est un point selle instable. Dans ce cas, il existe des directions stables le long de la droite engendrée par v_2.

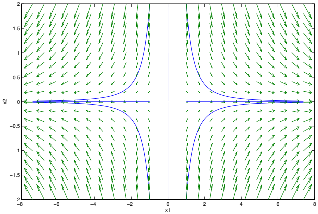
Illustration dans le plan v_1, v_2



Noeud stable



Noeud instable



Point selle

Valeurs propres complexes

Pour comprendre les solutions, on utilise le changement de variable $z = M^{-1}x$ qui transforme le système original en:

$$\begin{cases} \dot{z}_1(t) = \alpha z_1(t) - \beta z_2(t) \\ \dot{z}_2(t) = \beta z_1(t) + \alpha z_2(t) \end{cases}$$

On utilise les coordonnées polaires $r = \sqrt{z_1^2 + z_2^2}, \theta = atan(\frac{z_2}{z_1})$, pour obtenir simplement:

$$\begin{cases} \dot{r}(t) = \alpha r(t) \\ \dot{\theta}(t) = \beta \end{cases}$$

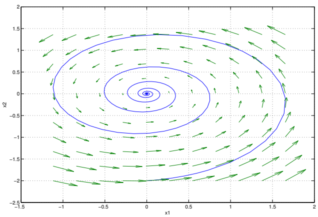
Pour une condition initiale (r_0, θ_0), on obtient:

$$r(t) = r_0 e^{\alpha t}, \theta = \theta_0 + \beta t.$$

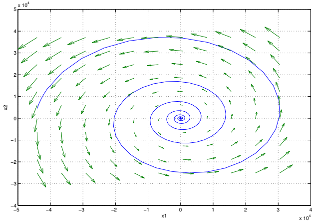
C'est une spirale logarithmique dans le plan z_1, z_2. Suivant la valeur de α, nous obtenons plusieurs types de solutions:

1. $\alpha < 0$, les états du système convergent vers 0. 0 est un foyer stable.
2. $\alpha > 0$, les états du système divergent. 0 est un foyer instable.
3. $\alpha = 0$, $r(t) = r_0$. Les états du système oscillent autour du point 0. 0 est un centre.

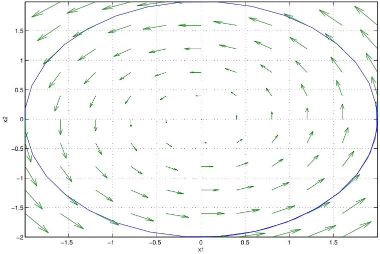
Illustration dans le plan v_1, v_2



Point spirale convergente



Point spirale divergente



Point centre

Valeurs propres multiples différentes de zéro

Le changement de variable $z = M^{-1}x$ transforme le système original en:

$$\begin{cases} \dot{z}_1(t) = \lambda z_1(t) + k z_2(t) \\ \dot{z}_2(t) = \lambda z_2(t) \end{cases}$$

Les solutions s'écrivent:

$$z_1(t) = e^{\lambda t}(z_{10} + k z_{20} t),\ z_2(t) = z_{20} e^{\lambda t}.$$

Nous avons les mêmes propriétés qualitatives que dans le cas des valeurs propres réelles distinctes.

Valeurs propres nulles

⋆ Jusqu'à présent, les valeurs propres sont tous non nulles, ce qui implique un point d'équilibre unique 0.

⋆ Lorsque une ou deux valeurs propres sont nulles, alors il existe une infinité de point d'équilibre. puisque $Ax = 0$, pour $x \neq 0$.

⋆ Plusieurs cas sont possibles suivant la multiplicité de la valeur propre nulle (1 ou 2).

1. $\lambda_1 = 0, \lambda_2 \neq 0$, alors $\dot{z}_1(t) = 0, \dot{z}_2(t) = \lambda_2 z_2(t)$.
2. $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$, alors $\dot{z}_1(t) = z_2(t), \dot{z}_2(t) = 0$.

Notions de solutions

$\star$ L'idée est d'analyser les propriétés fondamentales des solutions des systèmes définies par une équation différentielle ordinaire définie par:

$$\dot{x}(t) = f(t, x),\ x(t_0) = x_0 \tag{6}$$

Que voulons nous étudier ?

- La première propriété est l'existence de la solution. Sous quelles conditions sur f, existe-t-il au moins une solution passant par la condition initiale?
- La seconde propriété importante est l'unicité de la solution de (6). Effectivement, si ce n'est pas le cas en imaginant que (6) représente un système réel, refaire des expériences sur le système mèneraità des solutions différentes ! Cette propriété peut être comprise localement ou globalement: Existe-il une unique solution sur un intervalle temporel suffisamment petit, pour un intervalle $[0, \infty[$.
- Un dernier problème concerne la dépendence continue des solutions de (6) aux données initiales t_0, x_0.

Notions de solutions : exemples

$\star$ Evidemment, sans restrictions sur le champs de vecteur f, nous ne pouvons assurer aucune de ces propriétés:

- $\dot{x}(t) = -sign(x(t)), \forall t \geq 0, x(0) = 0$ admet elle une solution ?
- $\dot{x}(t) = \frac{1}{2x(t)}, \forall t \geq 0, x(0) = 0$ admet deux solutions :

$$x(t) = \pm t^{1/2}.$$

- $\dot{x}(t) = 1 + x^2(t), \forall t \geq 0, x(0) = 0$ admet comme solution $x(t) = tan(t), \forall t \in [0, 1[$. Mais il n'est pas possible de définir cette fonction sur l'intervalle $\mathbb{R}^+$ en entier, car lorsque $t \rightarrow \frac{\pi}{2}$, la solution $x(t) \rightarrow \infty$.

Existence et Unicité de la solution

⋆ Pour assurer l'existence d'une solution, on suppose que f est continue par rapportà l'état x et continue par morceaux par rapport au temps t.

Definition

$f(t,x)$ est continue par morceaux par rapportà t sur un intervalle J si pour tous sous-intervalles $J_0 \subset J$, f est continue par rapport au temps $t \in J_0$ sauf en un nombre fini de points, dits points de discontinuité.

⋆ La continuité n'est pas suffisante pour assurer l'unicité de la solution:
Considérons l'exemple suivant:

$$\dot{x}(t) = x^{1/3}, \; x(0) = 0.$$

Il admet comme solution $x(t) = (\frac{2t}{3})^{3/2}$ et $x(t) = 0$.

→ Il nous faut une condition plus forte pour assurer l'unicité.

Condition suffisante d'existence et d'unicité locale (1)

Theorem (Condition suffisante d'existence et d'unicité locale)

On considère $f(t,x)$ une fonction continue par morceaux par rapportà t et qui vérifie la condition de Lipschitz suivante:

$$\|f(t,x) - f(t,y)\| \leq L\|x-y\|, \forall x, y \in \mathcal{B}, \forall t \in [t_0, t_1],$$

où $\mathcal{B} = \{x \in \mathbb{R}^n, \|x - x_0\| \leq r\}$ est un voisinage de la condition initiale (condition de Lipschitz locale). Alors, il existe $\delta > 0$, tel que la solution de (6) a une unique solution sur l'intervalle $[t_0, t_0 + \delta]$.

C'est une solution unique valable uniquement localement:

- Localement autour de la condition initiale.
- Localement autour du temps initial, ie δ peut être très petit.

A propos de la condition de Lipschitz locale

- ⋆ La condition importante est la condition de Lipschitz locale, ie L dépend a priori de $\mathcal{B}$.
- ⋆ Considérons le cas $f(t,x) = f(x)$, on dit que f est localement Lipschitz sur un domaine D si pour tous les voisinages $\forall \mathcal{B}$ de D, f satisfait une condition de Lipschitz. La constante L peut dépendre du voisinage a priori.
- ⋆ Si L ne dépend pas du voisinage, alors on dit que f est Lipschitz sur D. Bien évidemment, la condition de Lipschitz sur D implique la condition de Lipschitz locale.
- ⋆ Enfin, on dit que f est globalement Lipschitz si $D = \mathbb{R}^n$.
- ⋆ Lorsque f dépend également du temps t, il nous faut adapter ces définitons. Si $f = f(t,x)$, adapter ces résulats, c'est satisfaire la condition de Lischitz uniformément par rapport au temps t.

Interprétation géométrique

En dimension 1, nous pouvons avoir une interprétation géometrique simple:

- ⋆ Lorsque $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, la condition de Lipschitz peut se réécrire:

$$\frac{|f(y) - f(x)|}{|y - x|} \leq L.$$

- ⋆ Dans le plan $(x, f(x))$, la pente en valeur absolue entre deux points ne peut excéder L.
- → Ainsi dans le cas scalaire si $|f'|$ est bornée par une constante k sur un intervalle donné, alors f est Lipschitz avec la même constante k.
- → Technique (suffisante) pour s'assurer de la condition de Lipschitz localement.

Quels sont les systèmes localement Lipschitz en 0 ?

- $f(x) = -x^2$,
- $f(x) = x^{1/3}$,
- $f(x) = sign(x)$.

Condition suffisante d'existence et d'unicité locale (2)

La remarque précédente peut s'étendre de la manière suivante:

Lemme

Soit $f : [a, b] \times D \subset \mathcal{R}^n \to \mathcal{R}^n$ une fonction continu sur D telle que $\frac{\partial f}{\partial x}$ existe et soit continue sur $[a, b] \times D$. Si pour W convexe, $W \subset D$, il existe une constante $L \geq 0$, telle que:

$$\|\frac{\partial f}{\partial x}(t, x)\| \leq L,$$

sur $[a, b] \times W$, alors

$$\|f(t, x) - f(t, y)\| \leq L\|x - y\|, \forall x, y \in W, \forall t \in [a, b].$$

⋆ Technique pour savoir si un système respecte la condition de Lipschitz localement.
⋆ La condition de Lipschitz est une condition plus forte que la continuité et moins forte que la condition dite de differentiabilité continue:

Lemme

Si f et $\partial f / \partial x$ sont continues sur $[a, b] \times D \subset \mathbb{R}^n$, alors f est localement Lipschitz en x sur $[a, b] \times D$.

Condition suffisante d'existence et d'unicité locale (3)

- Nous avons désormais un résulat d'existence et d'unicité locale.
- Cette solution n'existe que sur l'intervalle $[t_0, t_0 + \delta]$, avec δ qui n'est pas maitrisé! Autrement, ayant fixé a priori un intervalle $[t_0, t_1]$, je ne sais pas si la solution existe et est unique sur cette intervalle!
- Cependant, je peux essayer d'étendre la solution, intervalle par intervalle. Effectivement, je sais qu'il existe une solution unique entre $[t_0, t_0 + \delta]$. Ensuite partant de $t_0 + \delta$ comme temps initial, je réitère le processus...Cependant, rien ne me dit que j'arriveraisà t_1! Effectivement, pout certains temps, les conditions ne sont plus forcément remplies...

Un exemple classique est $\dot{x}(t) = -x^2, x(0) = -1$.

- f est localement Lipschitz sur n'importe quel ensemble compact de R, donc il y a existence et unicité locale.
- La solution vaut $x(t) = \frac{1}{t-1}$. Elle ne peut pas être étendu au delà de $t = 1$.

Condition suffisante d'existence et d'unicité globale (1)

Nous avons vu des résultats d'existence et d'unicité locale. Pour savoir si nous pouvons étendre les solutions sur des intervalles de temps plus grands, il faut ajouter des conditions plus fortes sur f.

Theorem (Condition suffisante d'existence et d'unicité globale)

On considère $f(t,x)$ une fonction continue par morceaux par rapportà t et qui vérifie la condition de Lipschitz suivante:

$$\|f(t,x) - f(t,y)\| \leq L\|x - y\|, \forall x, y \in \mathbb{R}^n, \forall t \in [t_0, t_1],$$

alors la solution de (6) a une unique solution sur l'intervalle $[t_0, t_1]$.

⋆ La condition très forte est la condition de Lipschitz globale.

Lemme

Si f et $\partial f/\partial x$ sont continues sur $[a,b] \times \mathbb{R}^n$, alors f est globalement Lipschitz en x sur $[a,b] \times \mathbb{R}^n$ ssi $\partial f/\partial x$ est uniformément bornée sur $[a,b] \times R^n$.

Exemples

Etablissez les conditions de Lipschitz locales ou globales des fonctions suivantes

- $f(x) = \begin{bmatrix} -x_1 + x_1 x_2 \\ x_2 - x_1 x_2 \end{bmatrix}$
- $f(x) = \begin{bmatrix} x_2 \\ -sat(x_1 + x_2) \end{bmatrix}$

Exemples-solution

Etablissez les conditions de Lipschitz locales ou globales des fonctions suivantes

- $f(x) = \begin{bmatrix} -x_1 + x_1 x_2 \\ x_2 - x_1 x_2 \end{bmatrix}$
- $f(x) = \begin{bmatrix} x_2 \\ -sat(x_1 + x_2) \end{bmatrix}$
- $$\frac{\partial f}{\partial x} = \begin{bmatrix} -1 + x_2 & x_1 \\ -x_2 & 1 - x_1 \end{bmatrix}$$

  f est localement Lipchitz sur n'importe quel compact de $\mathbb{R}^2$.
- $f(x) = \begin{bmatrix} x_2 \\ -sat(x_1 + x_2) \end{bmatrix}$ n'est pas continuement différentiable. Cependant, calculons: $\|f(x) - f(y)\|_2$. D'autre part, on a

  $$|sat(\alpha) - sat(\beta)| \leq |\alpha - \beta|$$

  Ainsi,

  $$\|f(x) - f(y)\|_2^2 \leq (x_2 - y_2)^2 + (x_1 + x_2 - y_1 - y_2)^2,$$
  $$\|f(x) - f(y)\|_2^2 \leq (x_1 - y_1)^2 + 2(x_2 - y_2)^2 + 2(x_1 - y_1)(x_2 - y_2) \leq C\|x - y\|^2$$

  f est gloablement Lipschtiz (utiliser une expression matricielle).

Condition suffisante d'existence et d'unicité globale (2)

- ⋆ La condition de Lipschitz globale est très contraignante.
- ⋆ Peut-on obtenir un résultat global en utilisant une condition de Lipschitz locale? La Réponse est oui au prix d'une connaissance accrue sur la solution du système.

Theorem

On considère $f(t,x)$ une fonction continue par morceaux par rapportà t et qui vérifie la condition de Lipschitz locale en x,$\forall t \geq t_0$, $\forall x \in D \subset \mathbb{R}^n$. Soit $W \subset D$ un ensemble compact (fermé et borné) de D et $x_0 \in W$. Supposons que toutes solutions de

$$\dot{x}(t) = f(t,x), \; x(t_0) = x_0,$$

appartiennent à D, alors il existe une unique solution définie $\forall t \geq t_0$.

- Nous avons une condition de Lipschitz locale, ce qui est assez facile à vérifier.
- La condition sur W peut-être compliquée à vérifier. L'idée est de montrer que la solution ne part pas d'un ensemble compact. Des outils développés plus tard (théorie de Lyapunov) pourront nous aider.

Exemples

On considère le système $\dot{x} = -x^3$. Démontrer l'existence d'une solution globale.