

# x Portion du pb

$$\bullet X_{k+1} = F_k X_k + G_k u_k + W_k$$

$$Z_k = H_k X_k + V_k$$

$$\bullet \begin{pmatrix} X_0 \\ W_{0:k} \\ V_{1:k'} \end{pmatrix} \text{ Gaussien}$$

$$\bullet \forall k, k'$$

$$\mathbb{E} \begin{bmatrix} X_0 \\ W_k \\ V_k \end{bmatrix} = \begin{pmatrix} m_{X_0} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

$$\mathbb{E} \begin{bmatrix} X_{0-M_{X_0}} \\ W_{k=0} \\ V_{k=0} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_{0-M_{X_0}} \\ W_{k'} \\ V_{k'} \end{bmatrix}^T =$$

# x Conclusions importantes

$$\bullet \forall k, \begin{pmatrix} X_{0:k} \\ Z_{1:k} \end{pmatrix} \text{ Gaussien}$$

$\Downarrow$

$$X_0, X_1, \dots, Z_1, \dots, Z_k \text{ Gaussiens}$$

$$= \begin{pmatrix} P_0 & \textcircled{1} & \textcircled{1} \\ \textcircled{1} & \textcircled{R_k \delta_{kk'}} & \textcircled{1} \\ \textcircled{1} & \textcircled{1} & R_k \delta_{kk'} \end{pmatrix}$$

\* Ponction du pb (cette det) bruit de dynamique

$$X_{k+1} = F_k X_k + G_k u_k + W_k$$

$$Z_k = H_k X_k + V_k \quad \text{bruit de mesure}$$

$\begin{pmatrix} X_0 \\ W_0, k \\ V_k, k' \end{pmatrix}$  Gaussien

$\forall k, k'$

$$\mathbb{E} \begin{bmatrix} X_0 \\ W_k \\ V_{k'} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbb{M} X_0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\mathbb{E} \begin{bmatrix} X_0 - \mathbb{M} X_0 \\ W_k - 0 \\ V_k - 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_0 - \mathbb{M} X_0 \\ W_{k'} - 0 \\ V_{k'} - 0 \end{bmatrix}^T =$$

$P_0 \geq 0, Q_k \geq 0, R_k > 0$   $\delta_{kk'} \rightarrow \begin{cases} = 1 \text{ si } k=k' \\ 0 \text{ sinon} \end{cases}$

$$= \begin{pmatrix} P_0 & 0 & 0 \\ 0 & Q_k \delta_{kk'} & 0 \\ 0 & 0 & R_k \delta_{kk'} \end{pmatrix}$$

\* Conclusions importantes

$$\forall k, \begin{pmatrix} x_{0,k} \\ z_{1,k} \end{pmatrix} \text{ Gaussien} \Rightarrow P_{x_{0,k}/z_{1,k}}(x_{0,k}/z_{1,k}) \text{ Gaussien} \Rightarrow \forall k, k',$$

$\Downarrow$

$x_0, x_1, \dots, z_1, \dots, z_k$  Gaussiens

$$P_{x_k/z_{1:k'}}(x_k/z_{1:k'}) = \mathcal{N}(x_k; \hat{x}_{k|k'}, P_{k|k'})$$

$$\bullet \text{ Et } \hat{x}_{0|0}, P_{0|0}; \hat{x}_{1|0}, P_{1|0}; \hat{x}_{1|1}, P_{1|1}; \dots; \hat{x}_{k-1|k-1}, P_{k-1|k-1}; \hat{x}_{k|k-1}, P_{k|k-1}; \dots$$

s'obtiennent récursivement et de manière analytique par les équations du F. Kalman

\* Conclusions importantes

$X_{0:k}$

$Z_{1:k}$

$(MM')$

Grammian

$\mathcal{N}(x_k | z_{1:k'})$  Gaussian

$\Rightarrow$

$P_{X_{0:k} | Z_{1:k}}$   $(x_{0:k} | z_{1:k'})$  Gaussian  $\Rightarrow \mathcal{N}(x_k | z_{1:k'})$

$P_{X_k | Z_{1:k}}(x_k | z_{1:k'})$

$\mathcal{N}(x_k; \hat{x}_{k|k'}, P_{k|k'})$

$X_0, x_1, \dots, z_1, \dots, z_k$  Gaussiens

• Et  $(\hat{x}_{0|0}, P_{0|0}), (\hat{x}_{1|1}, P_{1|1}), \dots, (\hat{x}_{k-1|k-1}, P_{k-1|k-1}), (\hat{x}_{k|k}, P_{k|k})$

On obtient récursivement et de manière analytique par les équations de F. Kalman



\* Nota lois a priori

$H_k$   $x_k \sim \mathcal{N}(m_{x_k}, P_k)$  et  $z_k \sim \mathcal{N}(m_{z_k}, S_k)$  ou

$$m_{x_{k+1}} = F_k m_{x_k} + G_k u_k$$

$$P_{k+1} = F_k P_k F_k^T + Q_k$$

$$m_{z_k} = H_k m_{x_k}$$

$$S_k = R_k + H_k P_k H_k^T$$

## \* Équations du filtre

### INITIALISATION

$$\hat{x}_{0|0} = m_{x_0} ; P_{0|0} = P_0$$

### PREDICTION

(TIME UPDATE)

$$\hat{x}_{k+1|k} = F_k \hat{x}_{k|k} + G_k u_k ; P_{k+1|k} = F_k P_{k|k} F_k^T + Q_k$$

(nota, on passe de  $P_{x_k|z_{k|k}}$  à  $P_{x_{k+1}|z_{k|k}}$ )  
loi de filtrage à l'instant  $k$  loi de prédiction à l'instant  $k+1$

### MISE À JOUR

(MEASUREMENT UPDATE)

$$\hat{x}_{k+1|k+1} = \hat{x}_{k+1|k} + K_{k+1} (z_{k+1} - H_{k+1} \hat{x}_{k+1|k}) ;$$

$$K_{k+1} = P_{k+1|k} H_{k+1}^T (R_{k+1} + H_{k+1} P_{k+1|k} H_{k+1}^T)^{-1}$$

On passe de  $P_{x_{k+1}|z_{k|k}}$  à  $P_{x_{k+1}|z_{k+1|k+1}}$  ET  $z_{k+1}$

\* Nota lors a priori

$\forall k, X_k \sim \mathcal{N}(m_{X_k}, P_k)$  et  $Z_k \sim \mathcal{N}(m_{Z_k}, S_k)$  où

$$\begin{cases} m_{X_{k+1}} = F_k m_{X_k} + G_k u_k \\ P_{k+1} = F_k P_k F_k^T + Q_k \end{cases}$$

\* Équations du filtre

◦ INITIALISATION

①  $\hat{x}_{0|0} = m_{X_0}$     ②  $P_{0|0} = P_0$

$$\begin{cases} m_{Z_k} = H_k m_{X_k} \\ S_k = R_k + H_k P_k H_k^T \end{cases}$$

◦ PRÉDICTION  
(TIME UPDATE)

③  $\hat{x}_{k+1|k} = F_k \hat{x}_{k|k} + G_k u_k$  ;    ④  $P_{k+1|k} = F_k P_{k|k} F_k^T + Q_k$

(nota, on passe de  $\underbrace{P_{X_k|Z_{1:k}}(x_k|Z_{1:k})}_{\text{loi de filtrage à l'instant } k}$  à  $\underbrace{P_{X_{k+1}|Z_{1:k}}(x_{k+1}|Z_{1:k})}_{\text{loi de prédiction à l'instant } k+1}$ )

◦ MISE À JOUR

(MEASUREMENT UPDATE)

⑤  $K_{k+1} = P_{k+1|k} H_{k+1}^T (R_{k+1} + H_{k+1} P_{k+1|k} H_{k+1}^T)^{-1}$  ;    ⑥  $\hat{x}_{k+1|k+1} = \hat{x}_{k+1|k} + K_{k+1} (z_{k+1} - H_{k+1} \hat{x}_{k+1|k})$  ;

⑦  $P_{k+1|k+1} = P_{k+1|k} - K_{k+1} H_{k+1} P_{k+1|k}$

On passe de  $\underbrace{P_{X_{k+1}|Z_{1:k}}(x_{k+1}|Z_{1:k})}_{\text{loi de prédiction à l'instant } k+1}$  ET  $z_{k+1}$  à  $\underbrace{P_{X_{k+1}|Z_{1:k+1}}(x_{k+1}|Z_{1:k+1})}_{\text{loi de filtrage à l'instant } k+1}$

## \* Statistiques des erreurs

- VAs Estimateurs, Prédicteurs, Erreurs

$\rightarrow \omega \rightsquigarrow X_{0:k}(\omega) = x_{0:k}$  cadé  
 $\searrow \rightarrow Z_{1:k}(\omega) = \boxed{z_{1:k}}$  connue (mesuré)

$\downarrow$  FK

$$\hat{x}_{k|k-1} = \mathbb{E}[X_k | Z_{1:k-1} = z_{1:k-1}] \text{ prédiction de } X_k$$
$$\hat{z}_{k|k-1} = H_k \hat{x}_{k|k-1} = \mathbb{E}[Z_k | Z_{1:k-1} = z_{1:k-1}] \text{ prédiction de } Z_k$$
$$\hat{x}_{k|k} = \mathbb{E}[X_k | Z_{1:k} = z_{1:k}] \text{ estimé de } X_k$$



## \* Statistiques des erreurs

- VAs estimateurs, Prédicteurs, Erreurs

$$\rightarrow \omega \rightsquigarrow X_{0:k}(\omega) = x_{0:k} \text{ cadé}$$

$$\rightarrow Z_{1:k}(\omega) = \boxed{z_{1:k}} \text{ connue (mesuré)}$$

$$\hat{X}_{k|k-1} = \text{VA prédicteur}, \hat{X}_{k|k-1}(\omega) = \hat{x}_{k|k-1} = \mathbb{E}[X_k | Z_{1:k-1} = z_{1:k-1}] \text{ prédiction de } X_k$$

$$\hat{Z}_{k|k-1} = H_k \hat{X}_{k|k-1} = \text{VA prédicteur de la mesure}, \hat{z}_{k|k-1}(\omega) = \hat{z}_{k|k-1} = H_k \hat{x}_{k|k-1} = \mathbb{E}[Z_k | Z_{1:k-1} = z_{1:k-1}] \text{ prédiction de } Z_k$$

$$\hat{X}_{k|k} = \text{VA filtre/estimateur}, \hat{X}_{k|k}(\omega) = \hat{x}_{k|k} = \mathbb{E}[X_k | Z_{1:k} = \underline{z_{1:k}}] \text{ estimé de } X_k$$

$$x_k - \hat{x}_{k|k-1}$$

$$z_k - \hat{z}_{k|k-1}$$



$\hat{x}_{k|k}$  inconnues mais "caractérisables" statistiquement



• VA error d'estimation

$$\tilde{X}_k = X_k - \hat{X}_{k|k} \quad \text{et} \quad \tilde{X}(w) = x_k - \hat{x}_{k|k}$$

$\uparrow$   
état réel ( $\pi$ )
 $\uparrow$   
estime

• VA error de prédiction

$$\tilde{X}_k^- = X_k - \hat{X}_{k|k-1} \quad \text{et} \quad \tilde{X}_k^-(w) = x_k - \hat{x}_{k|k-1}$$

$\uparrow$   
état réel ( $\pi$ )
 $\uparrow$   
prédit
 $\uparrow$   
l'ov

• VA innovation (residual)

$$\Gamma_k = Z_k - \hat{Z}_{k|k-1} \quad \text{et} \quad \Gamma_k(w) = y_k - \hat{y}_{k|k-1}$$

$\uparrow$   
observ
 $\uparrow$   
prédit



$\rightarrow z_k$   
 $\rightarrow z_k | h-1$

$$E_{\underline{z}} + q R = \underline{95\%}$$



$m \times$   
 $IR$

$$E_{\beta} + q PR = 50\%$$

$$y_h = z_h - \hat{z}_{h|h-1} \sim \mathcal{N}(0, S_{k|h-1})$$

$\Downarrow$

$$\sum_{k=1}^L \boxed{y_k^T S_{k|h-1}^{-1} y_k}$$

$$\sim \chi^2_{m=L}$$

chi-square

STATREK

chi2inv

$\beta$   
 $(k)$   
 $R$

$\alpha$