

VERS LE SUIVI DES MIGRATIONS DES TORTUES LUTH DANS L'ATLANTIQUE NORD PAR FILTRAGE DE KALMAN

Cette manipulation de Travaux Pratiques concerne la réflexion préalable à la mise en œuvre d'un filtre de Kalman pour le suivi des migrations des tortues luth.

1 Introduction

La tortue luth, plus grande espèce de tortue marine, est actuellement menacée d'extinction. Dans le but de mieux contribuer à sa sauvegarde, des chercheurs en océanographie et en écologie équipent certains individus de balises ARGOS. Ainsi localisables par satellite, des relevés de leurs migrations sont désormais disponibles, à partir desquels plusieurs hypothèses peuvent être étudiées quant à la dynamique des populations en réponse aux variations de l'environnement marin. Cette étape de validation/invalidation de modèles est fondamentale car elle permet de simuler l'impact de diverses mesures de protection.

L'un des outils permettant cette analyse est bien sûr l'estimation Bayésienne, et le filtre de Kalman en particulier. Une idée peut consister à formuler une « batterie » de représentations d'état stochastiques, chacune correspondant à un type de comportement. Un filtre est ensuite implémenté pour chaque modèle, et ses paramètres (hypothèses de bruits, stratégie d'initialisation) sont réglés sur quelques trajectoires-types. Le système de trajectographie ainsi obtenu peut être testé sur de nouveaux relevés. Il peut être enrichi par l'adjonction de nouveaux modèles, doté d'une fonctionnalité de détection automatique du comportement le plus vraisemblable (par la détection du filtre de la batterie qui « explique » le mieux la réalité observée), etc.

On considère ici des relevés de tortues évoluant dans l'Atlantique Nord sur des périodes allant de quelques semaines à plus d'un an. Les trajectoires observées font effectivement apparaître différents types de comportements : de longs déplacements quasiment rectilignes évoquant une navigation au compas alternent avec des périodes de mouvements erratiques suggérant que l'animal est à la recherche de nourriture. On trouve également des périodes où l'animal se laisse porter par le courant.

Plus précisément, cette manipulation porte sur la modélisation de deux types de comportements, et la mise en œuvre d'un filtre pour l'un d'eux. Afin de mener cette étude préliminaire dans un temps raisonnable, le problème est bien sûr significativement simplifié.

D'une part, les tortues sont repérées par un couple (abscisse, ordonnée) caractérisant leur position depuis la plage point de départ de la migration. La transformation des coordonnées sphériques délivrées par le système de localisation en des coordonnées cartésiennes locales est donc supposée déjà réalisée. De même, la profondeur de nage n'est pas prise en compte.

On suppose par ailleurs qu'une étape préalable d'analyse de données a permis d'éliminer des « fausses mesures », qui sont parfois délivrées par ce système de localisation.

Enfin, le courant marin est supposé connu. Les autres paramètres (température, nourriture, etc.) ne sont pas explicitement modélisés. Ainsi, bien que la concentration en méduses puisse amener la tortue à commuter vers un modèle exprimant la recherche de nourriture, on admet que cette concentration n'intervient pas dans les paramètres de ce modèle.

2 Considérations préliminaires

La figure 1 présente le comportement d'une tortue. Un examen plus attentif des courants marins, reportés figure 2, montre que si le milieu était statique, l'animal décrirait le mouvement, ci-après référencé par le

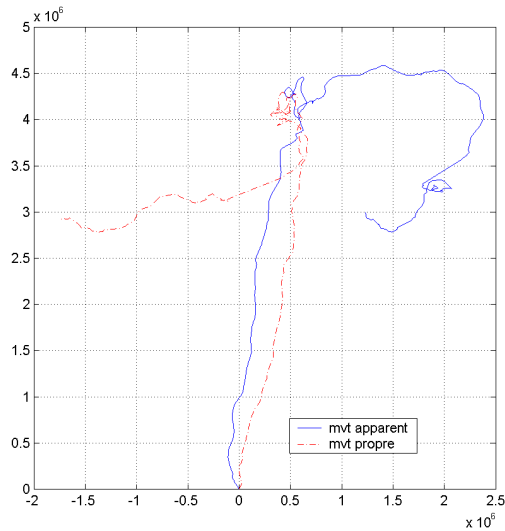


FIGURE 1 – Mouvement apparent et mouvement propre

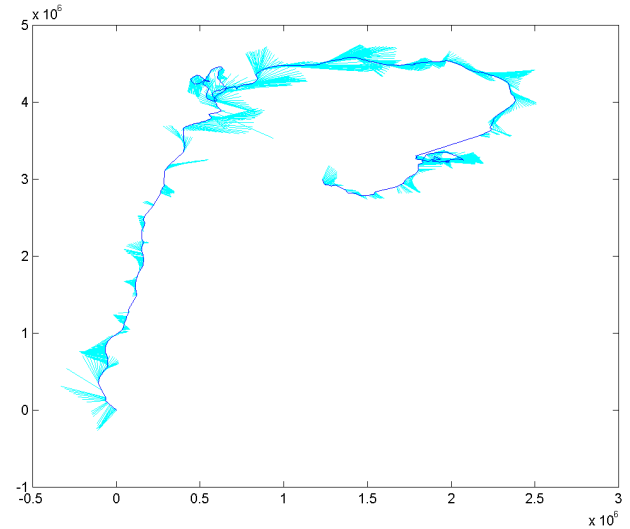


FIGURE 2 – Aperçu des courants marins

vocabulaire « mouvement propre », en pointillés.

Comme évoqué plus haut, il apparaît que la tortue commute entre des comportements distincts. Partant de la Guyane, les effets combinés d'une nage propre direction Nord / Nord-Est et du courant permettent à l'animal de rejoindre le Gulf Stream. La présence de nourriture engendre alors une commutation vers une dynamique propre beaucoup plus désordonnée, qui, combinée au courant, peut soit engendrer un déplacement local, soit conférer à la tortue un mouvement de dérive. Enfin, un mouvement propre cap vers l'Ouest / Sud-Ouest semble être décidé par l'animal, qui se combine également avec le courant.

Les déplacements consécutifs à une stratégie de navigation « à cap constant », tels le déplacement initial et le déplacement final dans les figures 1–2 seront dits « de Type A ». Tout déplacement consécutif à un mouvement propre désordonné sera dit « de Type B ».

On considère les représentations d'état suivantes :

$$\mathcal{X}(k+1) = F(k)\mathcal{X}(k) + G(k)u(k) + W(k), \quad \mathcal{Z}(k) = H(k)\mathcal{X}(k) + V(k) \quad (1)$$

$$\text{avec } \mathcal{X}(k) = \begin{pmatrix} X(k) \\ Y(k) \\ U_{\text{propre}}(k) \\ V_{\text{propre}}(k) \end{pmatrix}, \quad \mathcal{Z}(k) = \begin{pmatrix} Z_1(k) \\ Z_2(k) \end{pmatrix}, \quad u(k) = \begin{pmatrix} u_{\text{courant}}(k) \\ v_{\text{courant}}(k) \end{pmatrix}, \quad W(k) = \begin{pmatrix} W_X(k) \\ W_Y(k) \\ W_{U_p}(k) \\ W_{V_p}(k) \end{pmatrix}, \quad V(k) = \begin{pmatrix} V_1(k) \\ V_2(k) \end{pmatrix},$$

$$F_k = \begin{pmatrix} 1 & 0 & (t_{k+1}-t_k) & 0 \\ 0 & 1 & 0 & (t_{k+1}-t_k) \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad G_k = \begin{pmatrix} (t_{k+1}-t_k) & 0 \\ 0 & (t_{k+1}-t_k) \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad H_k = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

d'une part, et

$$\mathcal{Y}(k+1) = \mathcal{Y}(k) + N(k), \quad \mathcal{Z}(k) = \mathcal{Y}(k) + V(k) \quad (2)$$

$$\text{avec } \mathcal{Y}(k) = \begin{pmatrix} X(k) \\ Y(k) \end{pmatrix}, \quad \mathcal{Z}(k) = \begin{pmatrix} Z_1(k) \\ Z_2(k) \end{pmatrix}, \quad N(k) = \begin{pmatrix} N_x(k) \\ N_y(k) \end{pmatrix}, \quad V(k) = \begin{pmatrix} V_1(k) \\ V_2(k) \end{pmatrix}$$

d'autre part. $\mathcal{X}(\cdot)$ et $\mathcal{Y}(\cdot)$ désignent bien sûr les processus aléatoires d'état de (1) et (2), respectivement, et $\mathcal{Z}(\cdot)$ désigne le processus aléatoire de sortie, qui se réalise en les coordonnées cartésiennes locales délivrées par le système de localisation. Les processus aléatoires $W(\cdot)/N(\cdot)$ et $V(\cdot)$ représentent les bruits de dynamique et de mesure, respectivement. Le signal déterministe connu $u(\cdot)$, en entrée du modèle (1), est constitué des vitesses du courant marin.

On supposera désormais que

$$\mathcal{X}(0) \sim \mathcal{N}(m_{X0}; P_{X0}); \quad \forall k, \quad E(W(k)) = 0 \text{ et } E(V(k)) = 0;$$

$$\forall k, k', \quad E\left(\begin{pmatrix} \mathcal{X}(0)-m_{X0} \\ W(k) \\ V(k) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathcal{X}(0)-m_{X0} \\ W(k') \\ V(k') \end{pmatrix}^T\right) = \begin{pmatrix} P_{X0} & 0 & 0 \\ 0 & Q_w(k)\delta(k-k') & 0 \\ 0 & 0 & R_v(k)\delta(k-k') \end{pmatrix},$$

$$\text{où } \delta(h) = 0 \text{ (resp. 1) si } h \neq 0 \text{ (resp. } h = 0\text{)}.$$

1. On considère le modèle (1).
 - Justifier pourquoi le modèle déterministe « moyen » correspondant, obtenu en supprimant les bruits de dynamique et de mesures, permet d'expliquer un mouvement de Type A.
 - Pourquoi est-il nécessaire de construire le vecteur d'état $\mathcal{X}(\cdot)$ à la fois avec les positions et les vitesses de la tortue ?
2. On considère le modèle (2).
 - Justifier sa capacité de modélisation d'un mouvement de Type B.

3 Mise en place d'un filtre de Kalman sur des données simulées

L'invocation de la fonction `simulationDonnees.m` fournie en Annexe permet la simulation d'un système stochastique obéissant au modèle d'état (1) précédent. Pour chaque expérience, vous disposerez du nombre d'échantillons temporels N , d'un vecteur des instants d'échantillonnage T , du signal de courant u et des mesures effectuées Z .

Comme il s'agit de simulation, vous disposerez également des caractéristiques statistiques du modèle $mX0$, $PX0$, Qw , Rv . De même, le vecteur d'état X disponible vous servira à vérifier le fonctionnement et à caractériser votre filtre de Kalman.

3. Déterminer les équations du filtre de Kalman permettant la reconstruction du vecteur d'état de (1) à partir de la connaissance d'une réalisation $z(\cdot)$ du processus de mesure $Z(\cdot)$ entre les instants 1 et N .
4. L'implémenter sous MATLAB, lorsque son initialisation ainsi que les modèles de bruits sur lesquels il est basé sont identiques à ceux exploités dans `simulationDonnees`. On pourra par exemple définir 5 vecteurs (lignes) de cellules, dont les $(l+1)^{\text{ème}}$ colonnes contiennent respectivement $\hat{x}_{l|l-1}$, $P_{l|l-1}$, $\hat{x}_{l|l}$, $P_{l|l}$, K_l (<https://fr.mathworks.com/help/matlab/ref/cell.html>).
5. Caractériser qualitativement le fonctionnement du filtre lorsqu'il admet pour entrée une réalisation du processus de mesure : état estimé à chaque instant, covariance de l'erreur d'estimation, etc.
6. Surveillance de l'innovation.

Un filtre de Kalman basé sur des hypothèses de bruit cohérentes avec celles du système Gaussien Markovien dont on veut estimer le vecteur d'état, est tel que le processus innovation $\Gamma(\cdot)$ (qui se réalise à l'instant k en l'écart $\gamma(k) = z(k) - \hat{z}(k|k-1)$, $z(k)$ et $\hat{z}(k|k-1)$ désignant les sorties réelle et prédite à l'instant k) est caractérisé par

$$\forall k, E(\Gamma(k)) = 0; \quad E(\Gamma(k)\Gamma(k')^T) = (R_v(k) + H_k P(k|k-1) H_k^T) \delta(k - k'),$$

où $\delta(h) = 0$ (resp. 1) si $h \neq 0$ (resp. $h = 0$).

- Reformuler « en langage naturel » les propriétés du processus innovation $\Gamma(\cdot)$.
- Pour une réalisation choisie, porter sur un même graphique l'évolution temporelle de $z_1(k)$ et $\hat{z}_1(k|k-1)$, et vérifier que l'innovation est compatible avec tout ou partie des propriétés théoriques mentionnées ci-dessus. Renouveler ce tracé pour $z_2(k)$ et $\hat{z}_2(k|k-1)$.

4 Filtrage sur des données réelles (si le temps le permet)

Le troisième jeu de données correspond à des mesures réellement effectuées sur une tortue. On note l'enchaînement des types suivants : Type A–Type B–Type A.

7. On ne considère dans un premier temps que la première portion de mouvement de Type A.
 - Proposer un premier réglage des hypothèses de bruits et de l'initialisation du filtre, basé sur des considérations « de sens commun ».
 - Réaliser le filtrage.
8. À partir de la surveillance de l'innovation, affiner ce réglage de telle sorte que le filtre admette un comportement satisfaisant, *i.e.* légèrement pessimiste.
9. Tester le filtre ainsi configuré sur la dernière portion du mouvement, également de Type A.

5 Annexe

```
function [N,T,Z,u,F,G,H,mX0,PX0,Qw,Rv,X] = simulationDonnees;
%SIMULATIONDONNEES
% Simulation d'un ensemble de données pour la QUESTION3
% Syntaxe d'appel : [N,T,Z,u,F,G,H,mX0,PX0,Qw,Rv,X] = simulationDonnees;
% -> N : nombre d'échantillons temporels
% -> T : vecteur des instants d'échantillonnage (1xN)
% -> Z : réalisation du processus aléatoire de mesure (2xN)
% -> u : signal déterministe vecteur vitesse du courant (2xN)
% -> et comme ceci est de la simulation, sont également accessibles
% . F, G, H : matrices du modèle (respectivement (4x4), (4x2), (2x4))
% . mX0 : espérance du vecteur d'état à l'instant 0 (4x1)
% . PX0 : covariance du vecteur d'état à l'instant 0 (4x4)
% . Qw : covariance du bruit de dynamique (supposé stationnaire)
% . (4x4)
% . Rv : covariance du bruit de mesure (supposé stationnaire)
% . (2x2)
% . X : réalisation du processus aléatoire d'état (4xN)
%
% Z, u, X admettent AUTANT DE COLONNES QUE D'INSTANTS

N = 120;
deltaT = 10000;
T = [0:N-1]*deltaT;
u = [0.1*cos(2*pi/1e6*T);0.5*sin(2*pi/2e6*T)]*0.5;
%
mX0 = [0;0;0.05;0.1];
PX0 = diag([2 2 0 0]*1e6);
Qw = diag([2e4 2e4 1e-6 1e-6]);
Rv = diag([1e6 1e6])/100000;
Rv = diag([36e4 36e4]);
%
F = [1 0 deltaT 0; 0 1 0 deltaT; 0 0 1 0; 0 0 0 1];
G = [deltaT 0; 0 deltaT; 0 0; 0 0];
H = [1 0 0 0; 0 1 0 0];
X = nan*ones(4,N); Z = nan*ones(2,N); Zpropre = nan*ones(2,N);

% Instant 0
W = chol(Qw)*randn(4,N);
V = chol(Rv)*randn(2,N);
%X(:,1) = mX0 + chol(PX0)*randn(4,1);
X(:,1) = mX0 + sqrt(PX0)*randn(4,1);
Xpropre(:,1) = X(:,1);

% Instants 1:(N-1);
for k=2:N, % k == instant+1
    X(:,k) = F*X(:,k-1) + G*u(:,k-1) + W(:,k-1);
    Xpropre(:,k) = F*Xpropre(:,k-1) + W(:,k-1);
    Z(:,k) = H*X(:,k) + V(:,k);
    Zpropre(:,k) = H*Xpropre(:,k) + V(:,k);
end;

figure
h7 = quiver(Z(1,:),Z(2,:),u(1,:),u(2,:),2,'c.-'); hold on;
h6 = plot(Z(1,:),Z(2,:),'b.-'); hold off; axis square;
grid on; legend([h6 h7],'Z','u');
%
figure;
h1 = plot(Z(1,:),Z(2,:),'r'); hold on;
h2 = plot(Zpropre(1,:),Zpropre(2,:),'m'); hold off; axis square;
grid on; legend([h1 h2],'Z','Zpropre');
```