TD 2 La méthode du backstepping

L'objectif de ce Cours/TD est de construire une loi de commande pour des systèmes non linéaires. Il est bien sûr compliqué et illusoire de construire des lois de commande sur des systèmes non linéaires génériques. Par contre, si un certain nombre d'hypothèses de stabilité, de convergence et/ ou structurelles peuvent être émises, alors une certaine méthodologie peut mis en place afin de déterminer une loi de commande.
L'idée générale des méthodes proposées est de déterminer de manière conjointe une loi de commande et une fonction de Lyapunov qui permet de certifier que l'équilibre est stable asymptotiquement en boucle fermée.

1 L'intégrateur backstepping

1.1 Un peu de théorie

La technique du backstepping est une technique de commande qui consiste à construire une loi de commande étage par étage en se basant sur la construction de fonction de Lyapunov.
A titre d'exemple, on considère un premier système :

$$\dot{x}_1(t) = f(x_1) + g(x_1)x_2, \quad (1)$$
$$\dot{x}_2(t) = u. \quad (2)$$

L'objectif est de construire une loi de commande permettant d'assurer que le point d'équilibre 0 est globalement asymptotiquement stable. Les hypothèses sur le système sont les suivants :

H1 $f(0) = 0$ afin de s'assurer de l'existence d'un point d'équilibre.

H2 Le point d'équilibre $x_1 = 0$ peut être stabilisé par un retour d'état $x_2 = \phi(x_1)$ avec $\phi(0) = 0$ [1].
$$\dot{x}_1(t) = f(x_1) + g(x_1)\phi(x_1).$$
Le point d'équilibre $x_1 = 0$ est donc GAS.

On lui associe donc une fonction de Lyapunov V.

1. Quelles sont les relations vérifiées par V.
2. Faites un schéma bloc en mettant en évidence deux blocs intégrateurs et des blocs nonlinéaires f et g.
3. Transformez le schéma bloc pour mettre en évidence le retour d'état.

1. On supposera que la fonction ϕ est suffisamment régulière.

4. En posant le changement de variable
$$z_2 = x_2 - \phi(x_1),$$
déterminez la nouvelle modélisation du système non linéaire.
5. En choisissant astucieusement u, montrer qu'il est alors possible de se ramener à la forme précédente (3) :
$$\begin{aligned} \dot{x}_1(t) &= \tilde{f}(x_1) + \tilde{g}(x_1)z_2, && (3)\\ \dot{z}_2(t) &= v, && (4) \end{aligned}$$
où v est un signal de commande.
6. Proposer une fonction candidate de Lyapunov pour le système ainsi modélisé.
7. Proposer une loi de commande permettant de stabiliser le point d'équilibre.

1.2 Application

Appliquez la procédure aux systèmes suivants :

$$\begin{aligned} \dot{x}_1(t) &= x_1^2 - x_1^3 + x_2\\ \dot{x}_2(t) &= u \end{aligned}$$

Appliquez la procédure au système :

$$\begin{aligned} \dot{x}_1(t) &= x_1^2 - x_1^3 + x_2\\ \dot{x}_2(t) &= x_3\\ \dot{x}_3(t) &= u \end{aligned}$$

Appliquez la procédure au système :

$$\begin{aligned} \dot{x}_1(t) &= -x_1 + x_1^2 x_2\\ \dot{x}_2(t) &= u \end{aligned}$$

2 Pour aller plus loin

La technique du backstepping est une technique de commande récursive qui s'applique également sur le type de système suivant :

$$\begin{aligned} \dot{x}_1(t) &= f_1(x_1) + g_1(x_1)x_2 && (5)\\ \dot{x}_2(t) &= f_2(x_1, x_2) + g_2(x_1, x_2)u && (6) \end{aligned}$$

1. Proposer une technique pour transformer le système (5) en un système (3).
2. Proposer la loi de commande stabilisant (5).
3. Quelle est finalement la structure des systèmes permettant d'effectuer une commande de type backstepping ?

3 La méthode de forwarding

La méthode de forwarding est une méthode un peu plus délicate à manier et considère des structures de systèmes de la forme :

$$\begin{aligned} \dot{x}_1(t) &= f_1(x_1, u) && (7) \\ \dot{x}_2(t) &= f_2(x_1, u), && (8) \end{aligned}$$

signifiant qu'il n'existe pas de boucle de contre-reaction entre les sous-systèmes mais uniquement des boucles de feedforwarding.

H1 $f(0,0) = 0, g(0,0) = 0$ afin de s'assurer de l'existence d'un point d'équilibre.

H2 Le point d'équilibre $x_1 = 0$ peut être stabilisé par un retour d'état $u = \phi(x_1)$ avec $\phi(0) = 0$ [2]. Le point d'équilibre $x_1 = 0$ est donc GAS.

On lui associe donc une fonction de Lyapunov V.

Considérons la solution de l'équation différentielle

$$\begin{aligned} \dot{X}_1(t) &= f_1(X_1, \phi(x_1)) && (9) \\ \dot{X}_2(t) &= f_2(X_1, \phi(x_1)), && (10) \end{aligned}$$

en prenant comme conditions initiales x, y. L'idée générale de la méthode forwarding est la suivante. Si $X_1(t)$ converge vers 0 rapidement, alors X_2 devrait converger également vers une certaine quantité $\psi(x, y)$, i.e.,

$$\psi(x, y) = \lim_{t\to\infty} = X_2(t)$$

L'objectif est alors de modifier la loi de commande initiale afin de prouver que cette quantité converge vers 0. Ainsi, on perturbe la loi de commande qui devient :

$$u(t) = \phi(x_1) + v$$

où v est une nouvelle commande permettant d'assurer que :

$$V_2 = V + \frac{1}{2}\psi(x, y)^2$$

est une fonction de Lyapunov.

Appliquons cela à deux systèmes :

$$\begin{aligned} \dot{x}_1(t) &= u && (11) \\ \dot{x}_2(t) &= x_1, && (12) \end{aligned}$$

et le second un peu plus complexe :

$$\begin{aligned} \dot{x}_1(t) &= x_2 + x_3^2 + x_2 u && (13) \\ \dot{x}_2(t) &= x_3 - x_3^2 u, && (14) \\ \dot{x}_3(t) &= u, && (15) \end{aligned}$$

2. On supposera que la fonction ϕ est suffisamment régulière.