F. Gouaisbaut 20/09/2022

Soit $\begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) \\ u = -Kx(t) \end{cases}$

Le cahier des charges :

-> placement des valeurs propres

-> on cherche $K \in \mathbb{R}^{n \times m}$; $\underbrace{P_{A-BK}(\lambda) = P_{des}(\lambda)}_{n \text{ équations}}$

Placement de pôles avec une forme compagne de commande :

Rappel : La forme compagnon associé est $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & \vdots \\ \vdots & & & 1 \\ \times & \times & \times & \times \end{bmatrix}$ $B = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix}$

N.B : A-BK est encore sous forme compagne et on lit directement K dans les coefficients de la dernière ligne.

Or dans le cas MIMO : $B = [b_1 | \cdots | b_n]$

c.à.d. $B_c = \begin{bmatrix} 0 & \\ \vdots & \\ 1 & 0 \\ & \vdots \\ & 1 \end{bmatrix}$ sous forme compagne de commande

$\triangle$ la forme de $A_c = \begin{bmatrix} \ddots & \begin{matrix}(0) \\ \times\times\times\end{matrix} & \cdots \\ \begin{matrix}(0) \\ \times\times\times\end{matrix} & \ddots & \begin{matrix}(0) \\ \times\times\times\end{matrix} \\ \begin{matrix}(0) \\ \times\times\times\end{matrix} & \ddots & \begin{matrix}(0) \\ \times\times\times\end{matrix} \end{bmatrix}$

matrice creuse avec des coef sur la dernière ligne

La Forme Compagne par Blocs

Hypothèses : 1/ le système est commandable

2/ rang(B) = m (le nombre d'actionneurs)

Si ce n'est pas le cas alors on réduit la matrice B en enlevant les colonnes redondantes.
Sachant que $B \in \mathbb{R}^{n \times m}$.

Définitions des indices de commandabilité :

① Indices de commandabilité

Pour $j \in \{1; \dots ; m\}$, l'indice de commandabilité ρ_j est le plus petit indice tel que $A^{\rho_j} B_j$ est linéairement dépendant des colonnes situées à sa gauche dans la matrice de commandabilité

Remarque : . B_j est la j-ième colonne de B
. matrice de commandabilité $\mathcal{C} = [B ; AB \dots A^{n-1}B]$

② Indices de commandabilité cumulés : $\sigma_i = \sum_{j=1}^{i} \rho_j$

et $\begin{cases} \sigma_1 = \rho_1 \\ \sigma_n = n \text{ (le nombre d'états} \end{cases}$

Exemple : Soit $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$ et $B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$

$AB = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \\ 2 & 0 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$

$A^2B = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 3 \\ \end{bmatrix}$

Etape 1 : Calculer la matrice de commandabilité

$$\mathcal{C} = \begin{array}{c} \left[\begin{array}{cc|cc|cc|cc} 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & 1 & 3 & 3 & 6 & 5 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 3 & 1 & 4 & 3 \\ 1 & 1 & 2 & 2 & 3 & 2 & 6 & 3 \end{array}\right] \\ \begin{array}{cccccccc} B_1 & B_2 & Ab_1 & Ab_2 & A^2b_1 & A^2b_2 & A^3b_1 & A^3b_2 \end{array} \end{array}$$

Etape 2 : Chercher l'indépendance du vecteur considéré par rapport à ses colonnes de gauche et évoluer de gauche à droite. => en déduire le rang de $\mathcal{C}$.

On a trouvé 4 colonnes linéairement indépendantes. C'est le rang maximal donc $rang(\mathcal{C}) = 4$.

Etape 3 : Calcul des indices

Astuce : la matrice est de rang 4 donc les autres colonnes sont fonction des 4 premières

-> pour $j = 1$: $A^2 b_1$ est linéairement dépendant de b_1, b_2, Ab_1 et $Ab_2 \Rightarrow \underline{\rho_1 = 2}$

-> pour $j = 2$: $A^2 b_2$ est linéairement dépendant de $b_1, b_2, Ab_1, Ab_2, A^2 b_1]$ $\Rightarrow \underline{\rho_2 = 2}$

Apparté en temps discret : Soit $x_{k+1} = A x_k + B u_k$

$x_0 = 0$

donc $x_1 = B u_0$ (on part dans la direction de B)

$x_2 = AB u_0 + B u_1$

$= [B \ AB] \begin{bmatrix} u_1 \\ u_0 \end{bmatrix}$ en deux itérations on part dans la direction des combinaisons de B et AB

On perçoit que si le système est commandable alors on recouvre tout l'espace.

On est sûr de cette commandabilité en n-coups.

On appelle l'espace atteignable, l'image de l'espace couvert par la matrice de commandabilité.

Calcul du changement de base :

On extrait de la matrice $\mathcal{C}$, une matrice inversible $\mathcal{C}_{co}$

$$\mathcal{C}_0 = \left[b_1 \,\vdots\, Ab_1 \,\vdots\, \dots \, A^{\rho_1 - 1} b_1 \,\vdots\, b_2 \,\vdots\, \dots \,\vdots\, A^{\rho_2 - 1} \,\vdots\, A^{\rho_n - 1} b_n \right]$$

La matrice est ordonnée par action / influence de chaque actionneur.

Cette matrice est inversible donc on calcule l'inverse $\mathcal{C}_{co}^{-1}$ telle que

$$\mathcal{C}_{co}^{-1} = \begin{bmatrix} L_1 \\ \vdots \\ L_n \end{bmatrix} \text{ (en lignes) } \quad \in \mathbb{R}^{n\times n}$$

On pose la matrice de changement de base :

$$P = \begin{bmatrix} L_{\sigma_1} \\ L_{\sigma_1} A \\ \vdots \\ L_{\sigma_1} A^{\rho_1 - 1} \\ \vdots \\ L_{\sigma_n} \\ L_{\sigma_n} A \\ \vdots \\ L_{\sigma_n} A^{\rho_n - 1} \end{bmatrix} \quad n \text{ lignes}$$

Notons que $\underline{P \text{ est inversible}}$.

On applique le changement de base $z(t) = Px(t)$

$$\boxed{\dot{z}(t) = PAP^{-1} z(t) + PB\,u(t)}$$

donc $\begin{cases} A_c = PAP^{-1} \\ B_c = PB \end{cases}$ avec pour formes respectives

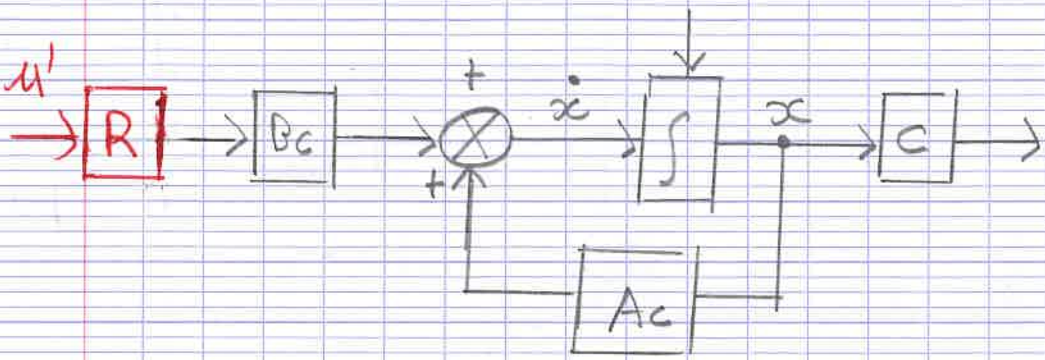
$$A_c = \begin{bmatrix} A_{11} & \text{———} & A_{1n} \\ & & \\ A_{n1} & & A_{nn} \end{bmatrix} \quad \text{où} \quad A_{11} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & & 1 \\ \hline & \tilde{a}_{ii} & & \end{bmatrix}$$

$$A_{ij} = \begin{bmatrix} 0 & \text{—} & 0 \\ \vdots & & \vdots \\ 0 & \text{—} & 0 \\ \hline & \tilde{a}_{ij} & \end{bmatrix} \quad \text{avec } i \neq j$$

$$B_c = \begin{bmatrix} b_{11} & \cdots & b_{1n} \\ & \ddots & \\ [0] & & b_{nn} \end{bmatrix} \text{ où } b_{ij} = \begin{bmatrix} 0 \\ | \\ c \\ x \end{bmatrix} \text{ et } b_{ii} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ | \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Modification de la loi de commande :

Ajout d'un précompensateur matriciel :



$u = Ru'$ donc le système s'écrit $\dot{z} = A_c z(t) + \underbrace{B_c R}_{B_{cc}} u'(t)$

On note $B_{cc} = B_c R$

Problématique : Peut-on trouver R telle que

$$B_{cc} = B_c R = \begin{bmatrix} \begin{matrix} 0 \\ \vdots \\ 1 \end{matrix} & & \\ & \ddots & \\ & & \begin{matrix} 0 \\ \vdots \\ 1 \end{matrix} \end{bmatrix} = \text{diag}\,[b_{ii}] \text{ avec } 1 < i < n$$

On veut résoudre $B_c R = B_{cc}$ mais B_{cc} n'est pas inversible

Solution : On approxime la solution au sens des moindres carrés

$$AX = Y \Rightarrow \hat{X} = (A^T A)^{-1} A^T Y$$

Etablissement de la loi de commande : $u(t) = K_c z(t)$

$$K = \begin{bmatrix} K_{11} & \cdots & K_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ K_{n1} & \cdots & K_{nn} \end{bmatrix} \quad \text{avec } K_{ij} \in \mathbb{R}^{1 \times \rho_j}$$

$$B_{cc} K = \left[\begin{array}{c|c|c} \begin{matrix} 0 \\ K_{11} \end{matrix} & \begin{matrix} 0 \\ K_{12} \end{matrix} & \begin{matrix} 0 \\ K_{1n} \end{matrix} \\ \hline \begin{matrix} 0 \\ K_{21} \end{matrix} & \begin{matrix} 0 \\ K_{12} \end{matrix} & \vdots \\ & & \end{array}\right]$$

Dès lors, $A_c - B_{cc} K = \left[\begin{array}{c|c|c} \boxed{\begin{matrix} 0 & 1 & & \\ & & \ddots & \\ & & & 1 \\ \tilde{a}_{11} - k_{11} & & & \end{matrix}} & \begin{matrix} [0] \\ \tilde{a}_{12} - k_{12} \end{matrix} & \\ \hline & \boxed{\phantom{\begin{matrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{matrix}}} & \\ \hline & & \boxed{} \end{array}\right]$

On choisit $k_{ij} = \tilde{a}_{ij}$ ($i \neq j$) et on obtient une matrice diagonale par blocs dont on connaît le polynôme caractéristique.

La fonction MATLAB place() réalise cette opération.

Exemple : $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -3 \\ 4 & 5 & -6 \\ 7 & 7 & -9 \end{bmatrix}$ $B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

Trouver k pour placer les valeurs propres $\{-1; -2; -3\}$

$\mathcal{C} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$