$$= \begin{bmatrix} R\,\overrightarrow{O'M}_{(R')} + P(R) \times 1 \\ 0_{1\times3}\,\overrightarrow{O'M} + 1 \times 1 \end{bmatrix}$$

Propriétés de la matrice de passage homogène :

1) Si $T = \begin{pmatrix} R & P \\ 0_{1\times3} & 1 \end{pmatrix}$ alors $T^{-1} = \begin{pmatrix} R^T & -R^T P \\ 0_{1\times3} & 1 \end{pmatrix}$

2) Composition des transformations : $\mathcal{R} \xrightarrow{T} \mathcal{R}' \xrightarrow{T'} \mathcal{R}''$

$T'' = TT'$ dans l'ordre ! $(TT' \neq T'T)$

08/09/2022

Modélisation des bras manipulateurs

I – Problématique :

Faire un lien entre l'espace opérationnel et l'espace des configuration. Cela fait appel aux modèles :

- Modèle géométrique $q \xrightarrow{MGD} x$, $x \xrightarrow{MGI} q$
- Modèle cinématique $\dot{q} \xrightarrow{MCD} \dot{x}$, $\dot{x} \xrightarrow{MCI} \dot{q}$

seront considérés ici (appliqués aux tâches à vitesse normale et ne nécessitant pas de précisions fines).

Dans ce cours
1) Survol de ces modèle
2) Méthode de calcul

II. Modèle Géométrique (MG) (fait intervenir la position et pas le temps par ce modèle)
↳ pas de mouvement

II.1. Modèle Géométrique Direct (MGD)

On connait q et on cherche à trouver $x = \begin{pmatrix} x_p \\ x_R \end{pmatrix}$ en fonction de $q = \begin{pmatrix} q_1 \\ q_n \end{pmatrix}$

On travaille en 2 étapes :

① On calcule T_{0n} en fonction de q

② De T_{0n}, on déduit $\overrightarrow{O_0O_{n+1}}$ dans R_0 puis on fait un choix de coordonnées opérationnelles que l'on calcule.

cf. outils vus dans les chap. précédents

Focus sur l'étape 1 :

Astuce : Eviter le calcul direct de T_{0n} : trop compliqué (sauf sur un bras mécanique simple : entre 2 et 3 liaisons)

Idée : - Positionner un repère R_i sur chaque corps i
- Calculer les matrices de passages homogènes $T_{i-1;i}\ (q_i)$ ↳ ne dépend que de q_i
- Déduire $\boxed{T_{0n}(q) = \prod_{i=1}^{n} T_{i-1;i}(q_i)}$

dépend de toute la configuration

Etape 2 = Déduire x selon la représentation choisie

Remarque : Le positionnement du repère R_i sur le corps :

Solution 1 : Au hasard => $T_{i-1;i}$ est spécifique et il n'y a pas d'automatisation possible du calcul.
=) adapté à un bras avec peu de liaisons

Solution 2 : Positionner en respectant une convention menant à une expression générique de $T_{i-1;i}$ afin d'automatiser le calcul.
=> adapté aux bras industriels

II. 2. Le Modèle Géomométrique Inverse (MGI)

On connaît les coordonnées opérationnelles x et on cherche la ou les configuration(s) q.

N.B : Le MGI est par essence plus compliqué que le MGD.

Méthode de calcul → numérique : la solution dépend de l'initialisation de l'algorithme
→ analytique : permet d'avoir toutes les solution

1) Calculer T_{0n} à partir de x. Il est connu donc on le notera

$$T_{0n}^{*} = \begin{bmatrix} t_{11} & t_{12} & t_{13} & t_{14} \\ t_{21} & t_{22} & t_{23} & t_{24} \\ t_{31} & t_{32} & t_{33} & t_{34} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$ avec t_{ij} connus

2) Si ce n'est pas déjà fait : calculer le MGD noté $T_{0n}(q)$

3) Identifier $T_{0n}(q)$ à T_{0n}^{*} et trouver q tel que $T_{0n}(q) = T_{0n}^{*}$

III Modèles cinématique

↳ fait intervenir du mouvement → inclut le temps

↳ ne fait pas intervenir les couples, frottements, etc. ⇒ vitesses raisonables

Rappel :

$$\begin{tikzcd} \dot{q} \arrow[r, bend left, "MCD"] & \dot{x} \arrow[l, bend left, "MCI"] \end{tikzcd}$$

vitesses généralisés ou articulaires — vitesses opérationnelles

III. 1. Modèle cinématique direct (MCD)

Remarque : Il possède une structure particulière $x = \begin{pmatrix} x_p \\ x_R \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_m \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} f_1(q_1; \cdots ; q_n) \\ \vdots \\ f_m(q_1; \cdots ; q_n) \end{pmatrix}}_{MGD}$

Une des solutions consiste à dériver le MGD pour trouver $\dot{x}$

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial q_1}\dot{q}_1 + \frac{\partial f_1}{\partial q_2}\dot{q}_2 + \cdots \frac{\partial f_1}{\partial q_n}\dot{q}_n \\ \vdots \\ \frac{\partial f_m}{\partial q_1}\dot{q}_1 + \cdots + \frac{\partial f_m}{\partial q_n}\dot{q}_n \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial q_1} & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial q_n} \\ \vdots & & \\ \frac{\partial f_m}{\partial q_1} & \cdots & \frac{\partial f_m}{\partial q_n} \end{bmatrix}}_{J,\ \text{Jacobienne du bras manipulateur}} \underbrace{\begin{bmatrix} \dot{q}_1 \\ \vdots \\ \dot{q}_n \end{bmatrix}}_{\dot{q}}$$

Remarque : Le degré de liberté est lié au rang de la matrice Jacobienne.

⚠ J dépend de la configuration q et pas forcément carrée (m, n)

III. 2. Modèle cinématique inverse (MCI)

On connait $\dot{x}$ et on cherche $\dot{q}$

On NE DERIVE PAS le MGI (même pour un bras manipulateur simple) !

↳ cherche à tirer avantage de la structure du MGD $\boxed{\dot{x} = J(q)\,\dot{q}}$

Il suffit de résoudre le système (inversion matricielle si possible, moindres carrés, etc.)

⚠ Configuration singulière qui fait chuter le degré de liberté. La matrice Jacobienne n'est plus inversible !