$$\Leftrightarrow \quad x^T P \left[A^{(t)} + B_\Delta w_\Delta(t) \right] - \gamma^2 w_\Delta^T w_\Delta(t) + z_\Delta^T(t) z_\Delta(t) < 0$$
$$+ (Ax + B_\Delta w_\Delta)^T P x(t)$$

$$\frac{dV}{dt}(t) - \gamma^2 \| w_\Delta(t) \|^2 + \| z_\Delta(t) \|^2 < 0$$

La norme d'un signal

$$\int_t^{\bar{t}} \frac{dV}{dt}(t) + \| z_\Delta(t) \|^2 < \gamma^2 \| w_\Delta(t) \|^2 \, dt$$

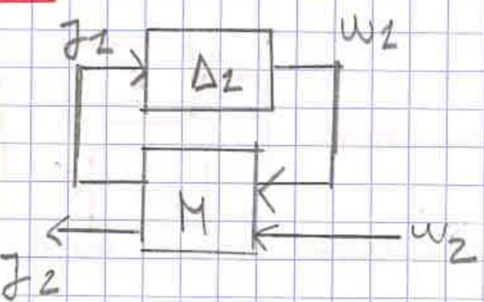
$$\underbrace{V(\bar{t})}_{\geqslant 0} - \underbrace{V(0)}_{= 0} + \int_t^{\bar{t}} \| z_\Delta(t) \|^2 dt < \gamma^2 \int_0^{\bar{t}} \| w_\Delta(t) \|^2 dt$$

$$\Leftrightarrow \| z_\Delta \|^2 < \gamma^2 \| w_\Delta \|^2 \Leftrightarrow (1)$$

21/09/2022

Exemple d'utilisation :

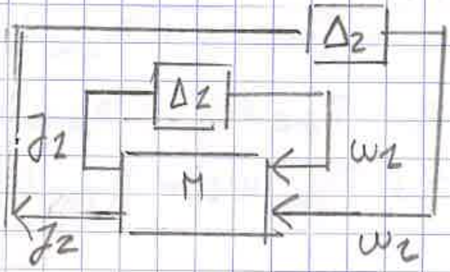
Soit le bouclage



prouver que $\frac{\| z_2 \|^2}{\| w_2 \|^2} \leqslant \gamma^2$

pour tout $\| \Delta_1 \|_2^2 \leqslant \mu^2$

Problème équivalent : En notant $\| M_{w_2 \to z_2} \|^2 = \frac{\| z_2 \|^2}{\| w_2 \|^2} \leqslant \gamma^2$



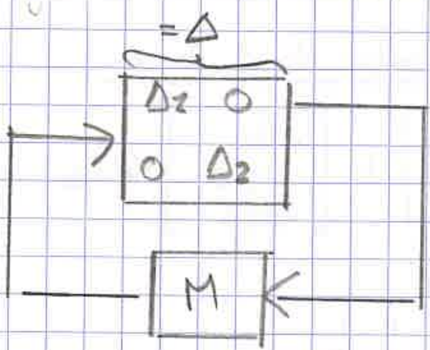
robustement stable

$\| \Delta_2 \|^2 \leqslant \gamma^2$

$\| \Delta_1 \|^2 \leqslant \mu^2$

Dès lors,

$Z = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}$



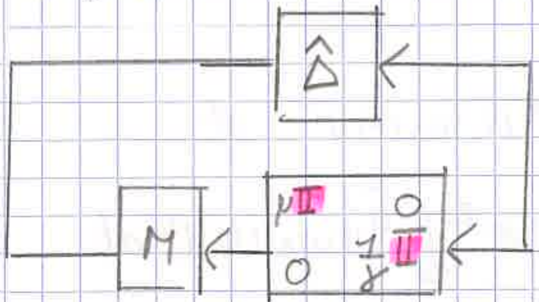
$\| \Delta \| \leqslant \max (\| \Delta_1 \|, \| \Delta_2 \|)$

$w = \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \end{pmatrix}$

Posons $\begin{cases} \hat{\Delta}_1 = \frac{1}{\mu} \Delta_1 & \text{et } \| \hat{\Delta}_1 \|^2 \leqslant 1 \\ \hat{\Delta}_2 = \gamma \Delta_2 & \text{et } \| \hat{\Delta}_2 \|^2 \leqslant 1 \end{cases}$

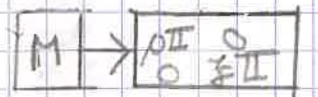
On peut alors affirmer que :

$$\hat{\Delta} = \begin{bmatrix} \hat{\Delta}_2 & 0 \\ 0 & \hat{\Delta}_2 \end{bmatrix}$$



robustement stable $\forall \, \|\hat{\Delta}\| \leq 1$

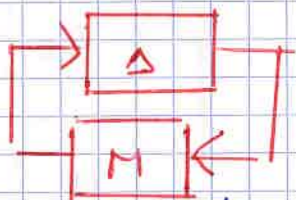
$\Uparrow$ (suffisant pour $M \begin{bmatrix} \mu I & 0 \\ 0 & \frac{1}{\gamma} I \end{bmatrix}$ quelconque)

vrai si $\Big\|$ interconnexion  $\Big\|_\infty < 1$

$\underbrace{\hspace{3em}}_{M \begin{bmatrix} \mu I & 0 \\ 0 & \frac{1}{\gamma} I \end{bmatrix}}$

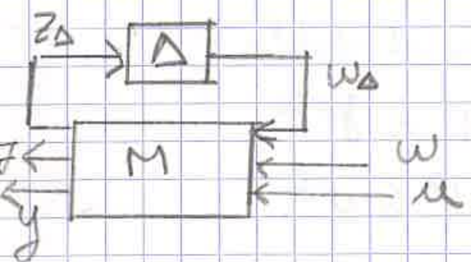
Remarque : Si $M \begin{bmatrix} \mu I & 0 \\ 0 & \frac{1}{\gamma} I \end{bmatrix}$ est bloc-diagonale alors la condition est nécessaire et suffisante.

Au final : On essaie de se ramener à une forme



Cas général : On a plusieurs entrées (perturbations, incertitudes, commande) et plusieurs sorties.

M est décrit par :



$$M: \quad \begin{aligned} \dot{x} &= Ax + B_\Delta w_\Delta + B_w w + B_u u \\ z_\Delta &= C_\Delta x + D_{\Delta\Delta} w_\Delta + D_{\Delta w} w + D_{\Delta u} u \\ z &= C_z x + D_{z\Delta} w_\Delta + D_{zw} w + D_{zu} u \\ y &= C_y x + D_{y\Delta} w_\Delta + D_{yw} w + D_{yu} u \end{aligned}$$

Il est possible de calculer le système pour une valeur de Δ donnée :

$$\begin{bmatrix} \dot{x} \\ z \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & B_w & B_u \\ C_z & D_{zw} & D_{zu} \\ C_y & D_{yw} & D_{yu} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ w \\ u \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B_\Delta \\ D_{z\Delta} \\ D_{y\Delta} \end{bmatrix} w_\Delta$$

$$\Leftrightarrow \quad z_\Delta = \begin{bmatrix} C_\Delta & D_{\Delta w} & D_{\Delta w} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ w \\ u \end{bmatrix} + D_{\Delta\Delta} w_\Delta$$

$$= \begin{bmatrix} C_\Delta & D_{\Delta w} & D_{\Delta u} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ w \\ u \end{bmatrix} + D_{\Delta\Delta} \Delta z_\Delta$$

$$(I - D_{\Delta\Delta} \Delta) z_\Delta = \begin{bmatrix} C_\Delta & D_{\Delta w} & D_{\Delta u} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ w \\ u \end{bmatrix}$$

On suppose que $(I - D_{\Delta\Delta}\Delta)$ est inversible : "problème du bien posé" càd. que si cette matrice n'est pas inversible alors les équations décrivent un système qui n'a pas un point d'équilibre unique.

$$\Leftrightarrow z_\Delta = (\mathbb{I} - D_{\Delta\Delta}\Delta)^{-1} \begin{bmatrix} C_\Delta & D_{\Delta w} & D_{\Delta w} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ w \\ u \end{bmatrix}$$

On aboutit à :

$$\begin{bmatrix} \dot{x} \\ z \\ y \end{bmatrix} = \left[\begin{bmatrix} A & B_u & D_{\Delta u} \\ C_z & D_{zu} & D_{zu} \\ C_y & D_{yw} & D_{yu} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B_\Delta \\ D_{z\Delta} \\ D_{y\Delta} \end{bmatrix} \Delta (\mathbb{I} - D_{\Delta\Delta}\Delta)^{-1} \begin{bmatrix} C_\Delta & D_{\Delta w} & D_{\Delta u} \end{bmatrix} \right] \begin{bmatrix} x \\ w \\ u \end{bmatrix}$$

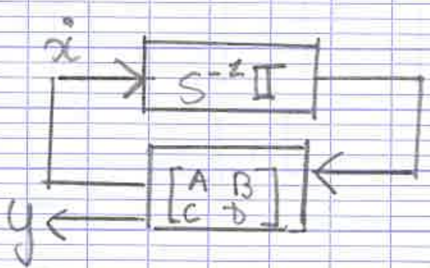
On peut donc écrire que :

$$\begin{cases} \dot{x} = A(\Delta)u + B_u(\Delta)w + B_u(\Delta)u \\ z = C_z(\Delta)x + D_{zu}(\Delta)w + D_{zu}(\Delta)u \\ y = C_y(\Delta)u + D_{yw}(\Delta)w + D_{yu}(\Delta)u \end{cases}$$

$$\delta(1-d\delta)^{-1} = \frac{\delta}{1-d\delta}$$

$$A(\Delta) = A + B_\Delta \Delta (\mathbb{I} - D_{\Delta\Delta}\Delta)^{-1} C_\Delta$$

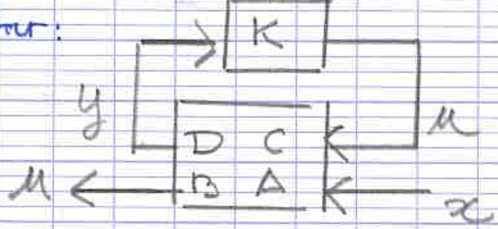
$$D_{zu}(\Delta) = D_{zu} + D_{z\Delta}\Delta(\mathbb{I} - D_{\Delta\Delta}\Delta)^{-1} D_{\Delta u}$$



La matrice de transfert donne :

$$y = [D + C(s^{-1}\mathbb{I})(\mathbb{I} - A(s^{-1}\mathbb{I}))^{-1}B]u$$
$$= [D + C(s\mathbb{I} - A)^{-1}B]u$$

Avec un intégrateur :

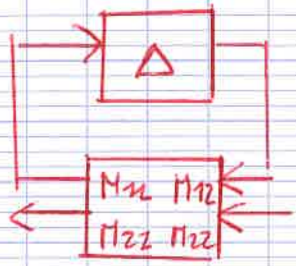


$$\dot{x} = (A + BK(\mathbb{I} - DK)^{-1}C)x$$

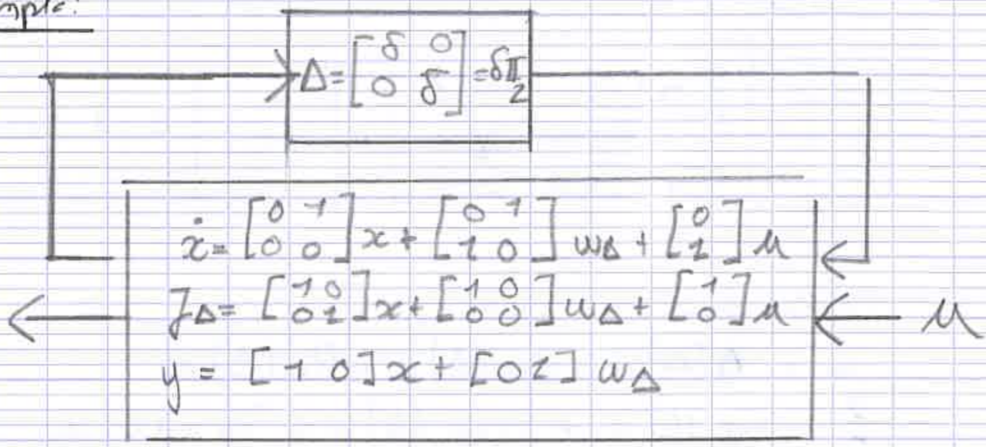
Introduisons l'opérateur LFT (Linear Fractional Transfert)

Noté $\Delta \star \left[\begin{array}{c|c} M_{11} & M_{12} \\ \hline M_{21} & M_{22} \end{array}\right] = M_{22} + M_{21}\Delta(\mathbb{I} - M_{11}\Delta)^{-1}M_{12}$

pour



Exemple:



$$\Delta_a = \Delta(\mathbb{I} - D_{\Delta\Delta}\Delta)^{-1}$$
$$= \delta\left(\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\delta\right)^{-1}$$
$$= \delta \begin{bmatrix} 1-\delta & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{\delta}{1-\delta} & 0 \\ 0 & \delta \end{bmatrix}$$

$$A(\Delta) = A - B_\Delta \Delta_a C_\Delta = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\delta}{1-\delta} & 0 \\ 0 & \delta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$
$$= \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & \delta \\ \frac{\delta}{\delta-1} & \delta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1+\delta \\ \frac{\delta}{1-\delta} & \delta \end{bmatrix}$$

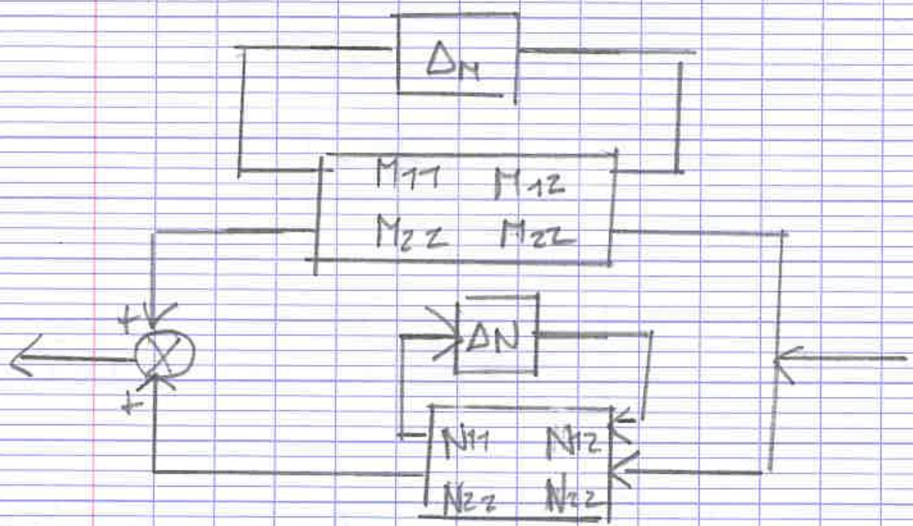
$$B_u(\Delta) = B_u + B_\Delta \Delta_a D_{\Delta u} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\delta}{1-\delta} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$
$$= \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & \delta \\ \frac{\delta}{1-\delta} & \delta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 + \frac{\delta}{1-\delta} \end{bmatrix}$$
$$= \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{1-\delta} \end{bmatrix}$$

$$C_y(\Delta) = C_y + D_{y\Delta} \Delta_a C_\Delta$$
$$= [1 \ 0] + [0 \ 1] \begin{bmatrix} \frac{\delta}{1-\delta} & 0 \\ 0 & \delta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= [1 \ 0] + [0 \ \delta] = [1 \ \delta]$$

$$D_{yu}(\Delta) = D_{yu} + D_{y\Delta} \Delta_a \Delta_{\Delta u} = 0 + [0 \ 1] \begin{bmatrix} \frac{\delta}{1-\delta} & 0 \\ 0 & \delta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$
$$= 0$$

<u>Algèbre définie par l'opérateur $\star$:</u>



$$\Delta_M \star \begin{bmatrix} M_{11} & M_{12} \\ M_{21} & M_{22} \end{bmatrix} + \Delta_N \star \begin{bmatrix} N_{11} & N_{12} \\ N_{21} & N_{22} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \Delta M & 0 \\ 0 & \Delta N \end{bmatrix} \star \left[\begin{array}{cc|c} M_{11} & 0 & M_{12} \\ 0 & N_{11} & N_{12} \\ \hline M_{21} & N_{21} & M_{22}+N_{22} \end{array}\right]$$

$$[\delta_1 \ \delta_2] = \delta_1 [1 \ 0] + \delta_2 [0 \ 1]$$
$$= \delta_1 \star \left[\begin{array}{c|cc} 0 & 1 & 0 \\ \hline 1 & 0 & 0 \end{array}\right] + \delta_2 \star \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$
$$= \begin{bmatrix} \delta_1 & 0 \\ 0 & \delta_2 \end{bmatrix} \star \left[\begin{array}{cc|cc} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ \hline 1 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

$$M_{22} + M_{21} \Delta M_{12} = \Delta \star \left[\begin{array}{c|c} 0 & M_{12} \\ \hline M_{21} & M_{22} \end{array}\right]$$

$$M_{22} + M_{21} \Delta (\mathbb{I} - M_{11} \Delta)^{-1} M_{12}$$

$$\left(\Delta_M \star \begin{bmatrix} M_{11} & M_{12} \\ M_{22} & M_{22} \end{bmatrix}\right) \left(\Delta_N \star \begin{bmatrix} N_{11} & N_{12} \\ N_{22} & N_{22} \end{bmatrix}\right)$$

$$= \begin{bmatrix} \Delta_M & 0 \\ 0 & \Delta_N \end{bmatrix} \star \left[\begin{array}{cc|c} M_{12} & M_{12}N_{22} & M_{12}M_{22} \\ 0 & N_{11} & N_{12} \\ \hline M_{22} & M_{22}N_{22} & M_{22}N_{22} \end{array}\right]$$

$$\delta^2 = \left(\delta \star \left[\begin{array}{c|c} 0 & 1 \\ \hline 1 & 0 \end{array}\right]\right)\left(\delta \star \left[\begin{array}{c|c} 0 & 1 \\ \hline 1 & 0 \end{array}\right]\right)$$

$$= \begin{bmatrix} \delta & 0 \\ 0 & \delta \end{bmatrix} \star \left[\begin{array}{cc|c} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ \hline 1 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

$$-\Delta \star \begin{bmatrix} M_{11} & M_{12} \\ -M_{22} & -M_{22} \end{bmatrix} = \Delta \star \begin{bmatrix} M_{11} & -M_{12} \\ M_{22} & -M_{22} \end{bmatrix}$$

$$\left(\Delta \star \begin{bmatrix} M_{11} & M_{12} \\ M_{22} & M_{22} \end{bmatrix}^{-1}\right) = \Delta \star \left[\begin{array}{c|c} M_{11} - M_{12}M_{22}^{-1}M_{21} & -M_{12}M_{22}^{-1} \\ \hline M_{22} - M_{22} & M_{22}^{-1} \end{array}\right]$$

$$\frac{\delta}{1-\delta} = \left(\delta \star \left[\begin{array}{c|c} 0 & 1 \\ \hline 1 & 0 \end{array}\right]\right)\left(\delta \star \left[\begin{array}{c|c} 0 & 1 \\ \hline -1 & 1 \end{array}\right]\right)^{-1}$$

$$= \left(\delta \star \left[\begin{array}{c|c} 0 & 1 \\ \hline 1 & 0 \end{array}\right]\right)\left(\delta \star \left[\begin{array}{c|c} 0 - 1 \cdot 1(-1) & -1 \cdot 1^{-1} \\ \hline 1^{-1}(-1) & 1^{-1} \end{array}\right]\right)$$

$$= \left(\delta \star \left[\begin{array}{c|c} 0 & 1 \\ \hline 1 & 0 \end{array}\right]\right)\left(\delta \star \left[\begin{array}{c|c} 1 & -1 \\ \hline -1 & 1 \end{array}\right]\right)$$

$$= \begin{bmatrix} \delta & 0 \\ 0 & \delta \end{bmatrix} \star \left[\begin{array}{cc|c} 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ \hline 1 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

Exemple 1 : $\begin{cases} \dot{x} = \dfrac{\delta_1}{1+\delta_1} x + u \\ y = x \end{cases}$

But : Faire un système avec δ_x et δ_z et un système qui n'en contient pas afin de pouvoir appliquer le Théorème du Petit Gain par la suite.

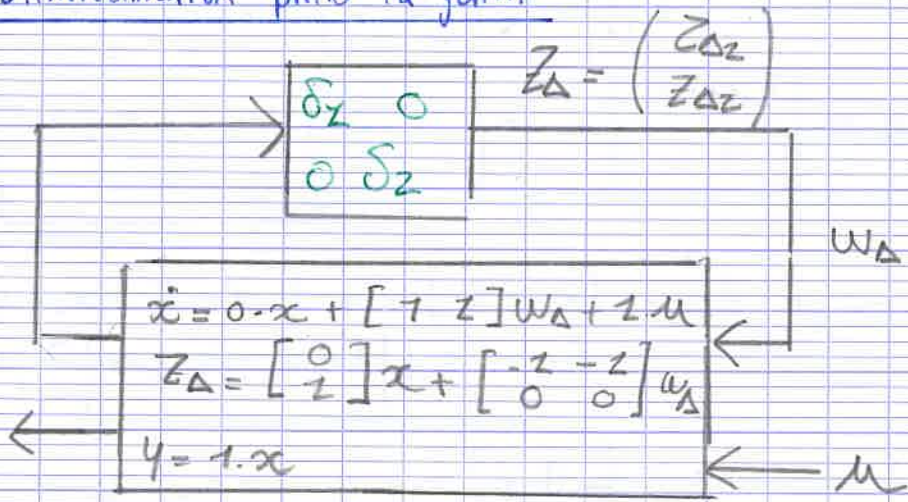
En supposant le problème bien posé : $\delta_z \neq -1$,

$$(1+\delta_z)\dot{x} = \delta_z x + (1+\delta_z)u$$

$$\Leftrightarrow \dot{x} = \underbrace{0 \cdot x + 1.u}_{\text{partie sans incertitude}} + \underbrace{\underbrace{\delta_z(u-\dot{x})}_{\text{contribution } w_{\Delta z}} + \underbrace{\delta_z x}_{\text{contribution } w_{\Delta z}}}_{\text{partie faisant intervenir les incertitude}}$$

$$\Leftrightarrow \dot{x} = 0.x + [1 \quad 1]\, w_\Delta + 1.u$$

L'interconnexion prend la forme



$z_{\Delta z} = x$

$z_{\Delta z} = u - \dot{x} = u - [1 \quad 1]\, w_\Delta - u = [1 \quad 1]\, w_\Delta$

Exemple 2

$$\begin{cases} \dot{x} = \begin{bmatrix} \delta - 1 & 0 \\ \frac{\delta}{\delta - 1} & -1 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u \\ z = [1 \quad 0]\, x \end{cases}$$

<u>Astuce</u> Supprimer les dénominateurs dans les termes

fois $(1+\delta)$ sur la 2ème ligne

$$\left\{ \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1+\delta \end{bmatrix} \dot{x} = \begin{bmatrix} \delta-2 & 0 \\ \delta & -1-\delta \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 0 \\ 1+\delta \end{bmatrix} w \right.$$

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} w + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -\delta \end{bmatrix} \dot{x} + \begin{bmatrix} \delta & 0 \\ \delta & -\delta \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 0 \\ \delta \end{bmatrix} w$$

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \underbrace{\delta [1 \ 0] x}_{w_{\Delta_1}}$$

$$+ \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \underbrace{\delta [0 \ -2] \dot{x} + [1 \ -2] x + w}_{w_{\Delta_2}}$$

$$\boxed{\begin{aligned} \dot{x} &= \begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} w_\Delta + \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \end{bmatrix} w \\ z_\Delta &= \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix} w_\Delta + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} w \end{aligned}}$$

Notons que
$$\begin{aligned} z_{\Delta_2} &= [0 \ -2] \dot{x} + [1 \ -2] x + w \\ &= [0 \ -2] \left[[-x + w_\Delta + \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \end{bmatrix} w \right] + [1 \ -2] x + w \\ &= [1 \ 0] x + [0 \ -2] w_\Delta + (-2+2) w \end{aligned}$$

<u>Exemple 3:</u>

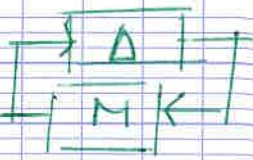
$$\left\{ \begin{aligned} & m\ddot{p} + c\dot{p} + k_p = w \\ & z = p \end{aligned} \right.$$

On souhaite prouver $\dfrac{\|z\|_2^2}{\|w\|_2^2} < \gamma^2$ $\forall$ $1 \leq m \leq 3$, $0,2 \leq c \leq 0,3$ et $0,9 \leq k \leq 1,2$

de même $\dfrac{\|z\|_2^2}{\|\tilde{w}\|} \leq 1$ $\quad m = 2 + \delta m$ avec $|\delta m| \leq 1$

$\tilde{w} = \gamma w$ $\quad c = 0,2 + 0,1 \delta c$ avec $|\delta c| \leq 1$

$\quad k = 1 + 0,1 \delta k$ avec $|\delta k| \leq 2$

But : Réécrire le problème sous la forme 
avec $\|\Delta\| \leq 1$ afin d'y appliquer le Théorème du Petit Gain

$$(2+\delta_m)\ddot{p} = -0{,}2\dot{p} - 0{,}1\,\delta_c\dot{p} - p - 0{,}1\,\delta_k p + \frac{1}{\gamma}\hat{\omega}$$

On pose
$$\left.\begin{aligned} \delta_m \ddot{p} &= w_{\Delta 1} \\ \delta_c \dot{p} &= w_{\Delta 2} \\ \delta_k p &= w_{\Delta 3} \\ \hat{\omega} &= w_{\Delta 4} \end{aligned}\right\} \Rightarrow \boxed{\Delta = \begin{bmatrix} \delta_m & & & (0) \\ & \delta_c & & \\ & & \delta_c & \\ (0) & & & \hat{\omega} \end{bmatrix}}$$

<u>M correspond donc au système :</u>

Prenons comme vecteur d'état $x = \begin{pmatrix} p \\ \dot{p} \end{pmatrix}$

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{1}{2} & -0{,}1 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{2} & -0{,}05 & -0{,}05 & \frac{1}{2\gamma} \end{bmatrix} w_\Delta$$

$$z_\Delta = \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} & -0{,}1 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} & -0{,}05 & -0{,}05 & \frac{1}{2\gamma} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} w_\Delta$$

rappel : $z = p$