Projet Systèmes Hybrides : Trajectoires et Propriétés (1)

Frédéric Gouaisbaut, Pauline Ribot

LAAS-CNRS

11 janvier 2023

Sommaire

Retour sur le modèle d'un système hybride - version SED

$$G = (Q, X, E, U, f, \phi, Inv, Guard, \rho, q_0, x_0)$$

- Q : ensemble d'états discrets (modes)
- X : espace d'état continu ($\mathbb{R}^n$)
- E : ensemble fini d'événements
- U : ensemble de commandes admissibles $U \subseteq \mathbb{R}^m$
- f : champs de vecteurs, $f : Q \times X \times U \rightarrow X$
- ϕ : fonction de transition d'état discret, $\phi : Q \times X \times E \rightarrow Q$
- Inv : ensemble définissant les conditions d'invariants (domaines) : $Inv \subseteq Q \times X$
- $Guard$: ensemble définissant les conditions de gardes : $Guard \subseteq Q \times Q \times X$
- ρ : fonction de réinitialisation, $\rho : Q \times Q \times X \times E \rightarrow X$
- q_0 : état discret initial
- x_0 : état continu initial

Phénomène de blocage (deadlock)

La définition formelle de l'automate hybride (version SED) ne prend pas en compte le phénomène de deadlock qui peut apparaître quand l'état ne peut plus évoluer par le temps dans un mode discret (quand une condition d'invariant n'est plus respectée par exemple) ni par les événements (pas de condition de garde satisfaite).

$\rightarrow$ Pour éviter ce problème, on s'assure que $Inv(q)$ est ouvert et quand $x \notin Inv(q)$ on a $x \in \cup Guard(q, q')$.

Prévenir un comportement Zenon

On a un comportement Zenon quand l'évolution de l'état du système hybride implique un nombre infini de transitions discrètes en un temps fini. Il s'agit d'un comportement indésirable pour concevoir des contrôleurs.

$\rightarrow$ Pour éviter ce problème, on peut expliciter des contraintes, comme une borne inférieure par exemple, sur le temps entre deux transitions discrètes successives.

Automate non déterministe

Un système hybride est non déterministe lorsqu'une transition discrète n'est pas unique. Il existe plusieurs façons de faire évoluer l'état du système hybride (problème de modélisation, problème de connaissance, incertitude). Trois différences dans la définition formelle donnée de l'automate hybride (version SED) :

- $\phi : Q \times X \times E \to 2^Q$,
- $\rho : Q \times Q \times X \times E \to 2^X$,
- q_0 peut être un ensemble d'états $q_0 \subseteq Q$.

Tout est très bien expliqué dans [CL09] : LA référence pour les SED !

Le temps hybride

- Pour les systèmes à temps continu, le temps ordinaire est $t \in \mathbb{R}$.
- Pour les systèmes discrets, nous comptons le nombre de sauts par un indice $j \in \mathbb{N}$.
- Le temps hybride est l'union de ces deux informations (t, j).

Attention, le temps ordinaire n'est pas forcément défini pour chaque indice j.

Definition

On appelle domaine temporel hybride l'ensemble suivant :

$$E = \bigcup_{j=0}^{J-1} ([t_j, t_{j+1}], j)$$

Remarques

- Cette union est constituée de couple en nombre fini ou infini.
- Le dernier intervalle $[t_j, t_{j+1}]$ peut être infini, signifiant que le système hybride finit dans le flot.
- On peut définir un ordre pour ordonner cette union assez naturellement

$$(t, j) \leq (t', j') \,\mathrm{si}\, (t \leq t') \,\mathrm{ou}\, ((t = t') \,\mathrm{et}\, j \leq j')$$

- on définit alors deux bornes :

$$\sup_t E = \sup\{t \in \mathbb{R}_+, \exists j \in \mathbb{N}, (t, j) \in E\}$$

$$\sup_j E = \sup\{j \in \mathbb{N}, \exists t \in \mathbb{R}_+, (t, j) \in E\}$$

Trajectoires hybrides

Une fois défini le temps hybride, nous pouvons définir la notion de solutions, dont le domaine de définition sera domaine hybride.

Definition

On appelle arc hybride une fonction $\phi : E \to \mathbb{R}^n$, avec E un domaine hybride et $\phi(t, .)$ localement absolument continu sur $t, (t, j) \in E$. [a]

a. Grossièrement, une fonction F est absolumment continue ssi elle est la primitive d'une fonction f intégrable.

Ainsi, sur des intervalles $[t_j, t_{j+1}]$, la fonction ϕ est différentiable.
Par la suite, on note le domaine de définition de ϕ :

$$dom(\phi) = \{(t, j) \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{N}, \phi(t, j) \neq \emptyset\}$$

Différents types d'arc hybride

On peut définir plusieurs types d'arcs hybrides :

- Non trivial si $dom(\phi)$ contient au moins deux points.
- Complet si $dom(\phi)$ n'est pas borné.
- Zéno si l'arc est complet et $\sup_t dom(\phi)$ est borné.
- Eventuellement discret si $T = \sup_t dom(\phi)$ est borné et $dom(\phi) \bigcap (T) \times \mathbb{N}$ contient au moins deux points.
- Discret si non trivial et $dom(\phi) \subset \{0\} \times \mathbb{N}$.
- Eventuellement continu si $J = \sup_t dom(\phi)$ est borné et $dom(\phi) \bigcap \mathbb{R}_+ \times J$ contient au moins deux points.
- Continu si non trivial et $dom(\phi) \subset \mathbb{R}_+ \times \{0\}$.

Solutions

Un arc hybride est solution du système hybride $\mathcal{H} = (\mathcal{C}, F, \mathcal{D}, G)$ si

- la condition initiale $\phi(0,0) \in \bar{\mathcal{C}} \cup \mathcal{D}$.
- Pour tout les j tel que l'intérieur de $I^j = \{t, (t,j) \in dom(\phi)\}$ est non vide,

$$\phi(t,j) \in \mathcal{C}, \forall t \in Int(I^j)$$

$$\dot{\phi}(t,j) \in F(\phi(t,j)), \forall t\,(pp) \in I^j$$

- Pour tout les $(t,j) \in dom(\phi)$ tel que $(t,j+1) \in dom(\phi)$

$$\phi(t,j) \in \mathcal{D},$$

$$\phi(t,j+1) \in G(\phi(t,j)),$$

Un exemple classique (1)

On considère un système hybride défini par les données suivantes :

- $\mathcal{C} = \mathbb{R}^2 \setminus D, f(x) = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$
- $\mathcal{D} = \{x, 0 \leq x_2 \leq -\frac{1}{5}x_1 + \frac{2}{5}, g(x) = \begin{bmatrix} \frac{3}{4}x_1 \\ \frac{1}{4}x_1 \end{bmatrix}$

Un exemple classique (2)

1. Repérer dans le plan (x_1, x_2) les domaines C et D.
2. Donner le type d'arc hybride pour les conditions initiales suivantes $(0, 0), (2, -1), (1, -1), (0, -1), (-1, 0)$

- Simulation à l'aide de la Toolbox HyEQ (https ://hybrid.soe.ucsc.edu/software) ou la Toobox de Matlab Stateflow.

Retour sur le paradoxe de Zenon

C.G. Cassandras and S. Lafortune.
Introduction to Discrete Event Systems.
Springer, New York, 2009.