Commande Optimale

Soheib Fergani

LAAS-CNRS
Tel : 05 61 33 78 15
email : sfergan@laas.fr

September 14, 2022

Introduction

Pour un système linéaire (au moins localement) on sait placer (sys C.C) les n pôles de la BF (fixés pour assurer la stabilité, robustesse, rejet aux perturbations) par résolution d'un système de n équations à n inconnues. Cependant pour des systèmes de grande dimension (n élevé) ou encore les systèmes MIMO à n états et m commandes il faut déterminer les n*m paramètres du correcteur statique ($u = -Kx$) et placer les n poles $\Longrightarrow$ $n * m - n$ paramètres libres. Il existe donc une infinité de gains K solution du problème.
Problème : Comment choisir les n * m paramètres du gain K solution du pb de commande.
Solution : Optimiser un critère de performance de type énergétique (en référence à l'énergie mise en jeu dans le système) sous la contrainte de la dynamique du système.

Critère de consomation à temps fini

Cas continu : Trouver la commande u fonction de l'état x qui minimise

$$\min_u J(u) = \frac{1}{2} \int_0^\infty \left(x^T(t) Q x(t) + u^T(t) R u(t) \right) dt$$

sous la contrainte de la dynamique du système

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= Ax(t) + Bu(t) \\ y(t) &= Cx(t) \end{aligned} \tag{1}$$

où $Q = Q^T \geq 0$, $R = R^T > 0$ sont des matrices de pondération choisies pour obtenir un bon compromis performance/robustesse.

Cas discret : Trouver la commande u fonction de l'état x qui minimise

$$\min_u J(u) = \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{\infty} \left[x_k^T Q x_k + u_k^T R u_k \right]$$

sous la contrainte de la dynamique du système

$$\begin{aligned} x_{k+1} &= Ax_k + Bu_k \\ y_k &= Cx_k \end{aligned} \tag{2}$$

où $Q = Q^T \geq 0$, $R = R^T > 0$.

Critères: commande en temps minimum/ non saturée

Critère de commande en temps minimum

Trouver la commande u fonction de l'état x qui minimise

$$J = t_f - t_0 = \int_{t_0}^{T_f} 1 \, dt$$

sous la contrainte de la dynamique du système (1).

Critère de commande avec non saturation de la commande

Il s'agit de trouver la commande permettant de faire évoluer le système (1) de l'état x_0, fixé à $t_0 = 0$ à l'état final $x_{T_f} = 0$ à l'instant T_f fixé en minimisant $J = \int_{t_0}^{T_f} |u| \, dt$ sous les contraintes de l'actionneur $|u| \leq 1$ et de la dynamique du système (1).

Combinaison de critères

Critère de commande à temps minimum et avec non saturation de la commande

Il s'agit de trouver la commande permettant de faire évoluer le système (1) de l'état x_0 (fixé à $t_0 = 0$) à l'état final $x_{T_f} = 0$ (à l'instant T_f non fixé) en minimisant $J = \int_{t_0}^{T_f} 1\, dt$ sous les contraintes de l'actionneur $|u| \leq 1 \Leftrightarrow u^2 - 1 \leq 0$ et de la dynamique du système (1).

Critère de commande pour un suivi de trajectoire

On considère la fonction de transfert $\frac{Y(p)}{U(p)} = \frac{1}{1+p}$ du premier ordre dont une des représentations d'état possible est

$$\begin{cases} \dot{x} = -x + u \\ y = x \end{cases}$$

Problème : Déterminer la commande à appliquer au procédé telle que le critère $J = \int_{t_0}^{T_f} \left(x(t) - r(t)\right)^2 dt$ soit minimal.
Données : $x(t)$ est l'état interne du système, il correspond à la sortie du procédé et $r(t) = t^2 \frac{e^{-t}}{2}$ est la référence à suivre.

Position du problème

Soit un système à temps continu de représentation d'état :

$$\dot{x} = f(x, u, t) \tag{1}$$

et de condition initiale $x(t_0) = x_0$, où $t \in \mathbb{R}$, $u \in \mathbb{R}^m$ et $x \in \mathbb{R}^n$. Les signaux u et x sont des fonctions de $\mathbb{R}$ vers respectivement $\mathbb{R}^m$ et $\mathcal{R}^n$. Pour la condition initiale x_0 et la commande u, l'équation d'état (1) définit une trajectoire unique x pour l'état sur $[t_0, t_f]$. Celle-ci est fonction de la condition initiale x_0 et de la commande u sur $[t_0, t_f]$.

Soit un critère :

$$J(x_0, t_0, u) = \theta(x_f, t_f) + \int_{t_0}^{t_f} \phi(x, u, t)dt$$

avec $x_f = x(t_f)$. Les fonctions θ et ϕ ainsi que les instants t_0 et t_f étant donnés, ce critère ne dépend que de x_0 et de u sur $[t_0, t_f]$. L'application qui au signal de commande u associe le critère scalaire $J(x_0, t_0, u)$ est une *fonctionnelle*.

Critères dans la litérature

– le problème de Lagrange :

$$\int_{t_0}^{t_f} \psi(x,u,t)dt$$

– le critère de Bolza :

$$\theta(x_f) + \int_{t_0}^{t_f} \phi(x,u,t)dt$$

– le critère de Mayer :

$$\sigma(x_f, t_f)$$

Il est intéressant de noter que tout ces critères sont équivalents (au moyen d'une augmentation du système).

Le problème de la commande optimale consiste alors à trouver la commande $\tilde{u}$ minimisant $J(x_0, t_0, u)$:

$$\tilde{u} = \min_{u \in U} J(x_0, t_0, u)$$

Comment calculer une commande optimale?

Principe d'optimalité de Bellman

Soit le critère :

$$J(x_0, t_0, u) = \theta(x_f, t_f) + \int_{t_0}^{t_f} \phi(x, u, t)dt$$

La trajectoire optimale sur $[t_0, t_f]$ est $\tilde{u}$ et le critère optimal :

$$\tilde{J}(x_0, t_0) = \min_{u_{[t_0, t_f]}} J(x_0, t_0, u).$$

Soit $t_1 \in [t_0, t_f]$. Le principe d'optimalité de Bellman énonce que la trajectoire optimale sur $[t_0, t_f]$ contient la trajectoire optimale sur $[t_1, t_f]$ avec comme condition initiale $x_1 = x(t_1)$. Autrement dit :

$$\tilde{J}(x_0) = \min_{u_{[t_0, t_1]}, x_1} \left(\int_{t_0}^{t_1} \phi(x, u, t)dt + \tilde{J}(x_1) \right).$$

Comment calculer une commande optimale?

Les 2 principes suivants sont équivalents :

1. Dans un processus d'optimisation dynamique, une suite de décisions est optimale si, quels que soient l'état et l'instant considérés sur la trajectoire qui lui est associée, les décisions ultérieures constituent une suite optimale de décisions pour le sous-problème dynamique ayant cet état et cet instant comme conditions initiales.

2. Une politique optimale est telle que, quels que soient l'état initial et la décision initiale, les décisions suivantes doivent constituer une politique optimale par rapport à l'état résultant de la première décision.

Comment calculer une commande optimale?

Principe du Maximum de Pontryaguin: commande optimalepar maximisation de l'Hamiltonien

Cas continu

Cas général : Trouver $u*(x(t),t)$ qui maximise l'Hamiltonien

$$H(\ x,\ \ u,\ \ \lambda,\ \ t\ ) = -L(\ x,\ \ u,\ \ t\ ) + \lambda^T F(\ x,\ \ u,\ \ t\ )$$

où $\dot{x} = F(\ x,\ \ u,\ \ k\ )$. Remarque pour une commande LQ : $L(\ x,\ \ u,\ \ t\ ) = \frac{1}{2}\left(x_t^T Q_t x_t + u_t^T R_t u_t\right)$

Cas discret

Cas général : Trouver u*(x, k) qui maximise l'Hamiltonien

$$H_{k+1} = -L(\ x,\ \ u,\ \ k\ ) + \lambda_{k+1}^T F(\ x,\ \ u,\ \ k\ )$$

où $x_{k+1} = F(\ x,\ \ u,\ \ k\ )$.

Comment calculer une commande optimale?

Principe du Maximum de Pontryaguin: cas continu

Equations canoniques de Hamilton : cas continu

Les conditions d'optimalité s'expriment simplement par les équations canoniques de Hamilton et le principe du maximum, i.e.,

Conditions au premier ordre :

$$\begin{aligned}\dot{x} &= \frac{\delta H}{\delta \lambda}\\ \dot{\lambda} &= -\frac{\delta H}{\delta x}\end{aligned}$$

avec la condition terminale $\lambda_{T_f}^T = -x_{T_f}^T P_{T_f}$.

La maximisation de H conduit à la commande optimale :

$$\left.\frac{\delta H}{\delta u}\right|_{u=u*} = 0$$

avec la condition au second ordre : $\frac{\delta^2 H}{\delta u^2} < 0$

Comment calculer une commande optimale?

Principe du Maximum de Pontryaguin: cas discret

Equations canonique de Hamilton : cas discret

Conditions au premier ordre :

$$x_{k+1} = \frac{\delta H_{k+1}}{\delta \lambda_{k+1}}$$

$$\lambda_k = \frac{\delta H_{k+1}}{\delta x_k}$$

avec la condition terminale $\lambda_{T_f}^T = -x_{T_f}^T P_{T_f}$.

La maximisation de H conduit à la commande optimale :

$$\left.\frac{\delta H_{k+1}}{\delta u_k}\right|_{u_k = u_k^*} = 0$$

avec la condition au second ordre : $\frac{\delta^2 H_{k+1}}{\delta u_k^2} < 0$

Comment calculer une commande optimale?

Principe du Maximum de Pontryaguin: remarques

1. Pour $T_f \to \infty$ (t_1 non specifié), $u = u^*$, $\lambda = \lambda^*, x = x^*$ l'Hamiltonien associé est nul pour tous t.
$$H\left(\ x^*,\quad u^*,\quad \lambda^*\ \right) = 0, \quad T_f \to \infty$$
2. Si on souhaite aller du point $x\,(t=0) = x_0$ au point $x = x_1$ sans specificier le temps t_1 d'atteinte de ce point, il est necessaire d'assurer pour $u = u^*$, $\lambda = \lambda^*, x = x^*$ que $H\left(\ x^*,\quad u^*,\quad \lambda^*\ \right) = 0$
3. Si on souhaite aller du point $x\,(t=0) = x_0$ au point $x\,(t=t_1) = x_1$ où t_1 est specificié on peut montrer pour $u = u^*$, $\lambda = \lambda^*, x = x^*$ que $H\left(\ x^*,\quad u^*,\quad \lambda^*\ \right) = Cte$.

Comment calculer une commande optimale?

Equation Euler-Lagrange

L'équation d'Euler-Lagrange, bien connue en mécanique, peut être retrouvée à partir du principe du minimum. En notant T, l'énergie cinétique et U l'énergie potentielle d'un système mécanique, le principe de moindre action énoncé par Maupertuis postule que le système évolue en minimisant l'intégrale :

$$\int_{t_0}^{t_f} (T - U)dt.$$

Notons q les cordonnées généralisées du système. Soit $L(q, \dot{q}) = T(q, \dot{q}) - U(q)$ le lagrangien, avec le critère :

$$J(q_0, t_0, \dot{q}) = \int_{t_0}^{t_f} L(q, \dot{q})dt$$

On considère un système dont on commande la vitesse, l'équation d'état du système s'écrivant alors simplement :

$$\dot{q} = u$$

Comment calculer une commande optimale?

Equation Euler-Lagrange

L'hamiltonien s'écrit alors :

$$H(q, \dot{q}) = L(q, \dot{q}) + p^{\mathrm{T}} \dot{q}$$

et le principe du minimum donne les deux équations suivantes :

$$\frac{\partial H}{\partial q} = \frac{\partial L}{\partial q} = -\dot{p}$$

$$\frac{\partial H}{\partial \dot{q}} = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} + p = 0$$

En dérivant la seconde équation par rapport au temps puis en remplaçant $\dot{p}$ grâce à la première, on obtient l'équation d'Euler-Lagrange :

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} - \frac{\partial L}{\partial q} = 0.$$

Comment calculer une commande optimale?

Commande Bang Bang

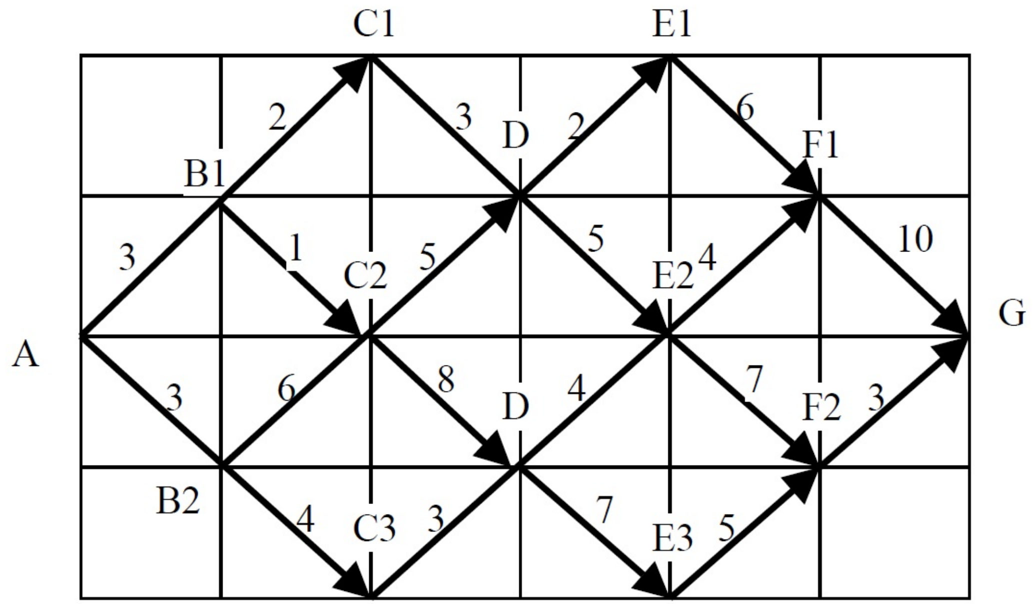
Un type de commande optimal particulier bien connu est la commande à temps minimal. Prenons un exemple : vous commandez l'accélération d'un véhicule que vous devez amener d'une position initiale d'arrêt à une position finale, également à l'arrêt, dans le temps le plus court possible. Si l'on considère un mouvement enn ligne droite, on conçoit intuitivement que la commande optimale est dans ce cas une accélération maximale jusqu'à un certain instant à partir duquel il faudra freiner au maximum. On parle de commande bang-bang parce que la commande est toujours saturée, alternativement à sa valeur minimale ou à sa valeur maximale. Quant à la robustesse de la commande, c'est-à-dire la capacité à remplir la mission de manière précise, lorsque la masse du véhicule est imparfaitement estimée, vous imaginez bien que ce genre de commande n'est pas très recommandable.

Introduction

Application du principe d'optimalité de Bellman: recherche du chemin minimal

La compagnie des eaux de votre ville désire construire un réseau qui permette de desservir un certain nombre de bâtiments, notés de A à G. Après avoir déterminé toutes les solutions possibles, l'étude a conduit au réseau potentiel de la figure 1.1. A chaque arc (en gras) de ce projet correspond un prix d'investissement (comprenant l'achat du droit de passage, le coût du tuyau, les frais de terrassement , etc.).

On propose par application du principe de Bellman énoncé précédemment de déterminer le chemin de coût minimal (plus court chemin) qui permet de relier A à G. On note d(P,Q) la distance entre les points quelconques P et Q et L(P) la longueur du plus court chemin (coût optimal) entre le point P quelconque du graphe, et le point G. On recherche donc en particulier L(A).



Introduction

Solution :

Etape 1
$$\begin{cases} \text{en partant de F1, on a L(F1)=d(F1,G)=10} \\ \text{en partant de F2, on a L(F2)=d(F2,G)=3} \end{cases}$$

Etape 2
$$\begin{cases} \text{en partant de E1, on a L(E1)=d(E1,F1)+L(F1)=16} \\ \text{en partant de E2, on a L(E2)=min\{d(E2,F1)+L(F1), d(E2,F2)+L(F2)\}} \\ =\text{min}\{4+10,7+3)\}=10 \\ \text{en partant de E3, on a L(E3)=d(E3,F2)+L(F2)=8} \end{cases}$$

Etape 3
$$\begin{cases} \text{en partant de D1, on a L(D1)=min\{d(D1,E1)+L(E1), d(D1,E2)+L(E2)\}} \\ =\text{min}\{2+16,5+10)\}=15 \\ \text{en partant de D2, on a L(D2)=min\{d(D2,E2)+L(E2), d(D2,E3)+L(E3)\}} \\ =\text{min}\{4+10,7+8)\}=14 \end{cases}$$

Etape 4
$$\begin{cases} \text{en partant de C1, on a L(C1)=d(C1,D1)+L(D1)=3+15=18} \\ \text{en partant de C2, on a L(C2)=min\{d(C2,D1)+L(D1), d(C2,D2)+L(D2)\}} \\ =\text{min}\{5+15,8+14)\}=20 \\ \text{en partant de C3, on a L(C3)=d(C3,D2)+L(D2)=3+14=17} \end{cases}$$

Etape 5
$$\begin{cases} \text{en partant de B1, on a L(B1)=min\{d(B1,C1)+L(C1), d(B1,C2)+L(C2)\}} \\ =\text{min}\{2+18,1+20)\}=20 \\ \text{en partant de B2, on a L(B2)=min\{d(B2,C2)+L(C2), d(B2,C3)+L(C3)\}} \\ =\text{min}\{6+20,4+17)\}=21 \end{cases}$$

Etape 6
$$\begin{cases} \text{en partant de A, on a L(A)=min\{d(A,B1)+L(B1),d(A,B2)+L(B2)\}} \\ =\text{min}\{3+20,3+21)\}=23 \end{cases}$$

Introduction

Conclusion, le chemin le moins coûteux est finalement, A,B1,C1,D1,E2,F2,G de coût final 23 euros

Remarque 1 *Au lieu de tester la vingtaine de chemins possibles, i.e. d'évaluer sur chacun des ces chemin le coût total entre A et G, on obtient par le principe d'optimalité de Bellman le coût optimal en 6 étapes. Cette méthode est souvent employée pour les problèmes de plus court chemin dans les graphes. En particulier, la méthode PERT de gestion de projet qui permet de déterminer les « dates au plus tôt » et « dates au plus tard » d'achèvement des différentes étapes d'un projet.*

Remarque 2 *(Problème du plus court chemin) : découper des morceaux de ficelle de longueurs correspondant aux données du problème. Mettre bout à bout les bouts de ficelle, et les coller à la super glue, de façon à reproduire exactement le graphe ; tirer doucement sur les bouts A et G : le premier qui commence à se tendre est la solution recherchée.*