25/11/2022

Poursuite Optimale

Soit un système $\begin{cases} \dot{X} = AX + Bu \\ y = CX \end{cases}$

et on considère une trajectoire de référence y_{ref} à suivre sur $[0; T_f]$
d'où $e = y_{ref} - y$

Remarques : • Si $y_{ref} = 0$ alors on est sur un problème de régulation (cf. tout ce qui a été vu avant dans ce cours ou en M1)

• Si $y_{ref} \neq 0$ alors nous sommes dans le cas d'une poursuite induisant deux cas $\left| \begin{array}{l} y_{ref} = cste \neq 0 \\ y_{ref} = variable \neq 0 \end{array} \right.$

• Le cas de figure dans lequel se placer se fait en fonction de l'interprétation du cahier des charges.

I/ Problème de poursuite optimale à horizon infini avec $y_{ref} = cste$

Remarque : • A horizon infini signifie en régime permanent

• Un contrainte sur un horizon fini doit prendre en compte les limites physiques du système.

On considère la commande : $u_t = -L_t x_t + \Gamma v_{ref}$ avec L : gain où $L = R^{-1}B^TP$ qui est la solution de l'équation de Ricatti pour la commande LQ (pour trouver la matrice P).

De plus, $0 = Q + A^TP + PA - PBR^{-1}B^TP$

avec Γ : le gain de précompensation qui est calculé de façon à avoir une erreur de poursuite nulle

On a notre commande $u_t = -L_t x_t + \Gamma v_{ref}$ qui stabilise le système en boucle fermée. En régime permanent, $\dot{x} = 0$ (les dynamiques sont stabilisées). Dès lors, $\begin{cases} \dot{x} = 0 = Ax_t + B(-L_t x_t + \Gamma v_{ref}) \\ y = Cx_t \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \dot{x} = 0 = (A - BL)x_t + B\delta V_{ref} & (1) \\ y = Cx_t & (2) \end{cases}$$

$$(1) \Leftrightarrow x_t = -(A - BL)^{-1} B\delta V_{ref}$$

On injecte (1) dans (2) $\Rightarrow y = Cx_t = -C(A - BL)^{-1} B\delta V_{ref}$

$$\Leftrightarrow \frac{y}{V_{ref}} = C(A - BL)^{-1} B\delta$$

Rappel : pour une erreur de poursuite nulle $y(\infty)$ doit atteindre V_{ref} soit $\frac{y(\infty)}{V_{ref}} = 1$

$$\frac{y(\infty)}{V_{ref}} = 1 \Leftrightarrow \boxed{\delta = -\left[C(A - BL)^{-1} B\right]^{-1}}$$

Condition pour l'existence d'une poursuite : $(A - BL)^{-1}$ soit inversible $\Leftrightarrow$ pas de valeurs propres à partie réelle nulle

1.1 Minimisation du critère $(e_t = y_{ref} - y_t)$

$$\boxed{J(u) = \lim_{T_f \to +\infty} \frac{1}{2} \int_t^{T_f} e_T^T Q e_t + u_t^T R u_t \, dt}$$

$$= \lim_{T_f \to +\infty} \frac{1}{2} \int_t^{T_f} (y_{ref} - y)^T Q (y_{ref} - y) + u_t^T R u_t \, dt$$

$$= \lim_{T_f \to +\infty} \frac{1}{2} \int_t^{T_f} (y_{ref} - Cx)^T Q (y_{ref} - Cx) + u_t^T R u_t \, dt$$

$$= \lim_{T_f \to +\infty} \frac{1}{2} \int_t^{T_f} (x_t^T C^T Q C x_t) + u_t^T R u_t \, dt$$

$$- \lim_{T_f \to +\infty} \frac{1}{2} \int_0^{T_f} y_{ref} Q C x_t \, dt + \lim_{T_f \to +\infty} \frac{1}{2} \int_t^{T_f} y_{ref}^T Q y_{ref} \, dt$$

$$- \lim_{T_f \to +\infty} \frac{1}{2} \int_t^{T_f} x^T C^T Q y_{ref} \, dt$$

$$= \lim_{T_f \to +\infty} \frac{1}{2} \int_t^{T_f} x_t^T C^T Q C x_t + u_t^T R u_t \, dt$$

$$- \lim_{T_f \to +\infty} \int_t^{T_f} y_{ref}^T Q C x_t \, dt + \lim_{T_f \to +\infty} \frac{1}{2} \int_t^{T_f} y_{ref} Q y_{ref} \, dt$$

On prend la fonctionnelle suivante $V(x(t); t) = \frac{1}{2} x_t^T P_t x_t + g_t^T x_t + \delta_t$

sous la contrainte $\begin{cases} \dot{x} = Ax + Bu \\ y = Cx \end{cases}$ du système en boucle ouverte

L'équation HJB :

$$-\dot{V}(x(t);t) = \frac{1}{2}\overbrace{\left[x_t^T C^T Q C x_t + u_t^T R u_t\right]}^{\text{coût état + commande}} \underbrace{- y_{ref}^T Q C x_t}_{\text{coût de poursuite}}$$
$$+ \underbrace{\frac{1}{2}\left[y_{ref}^T Q\, y_{ref}\right]}_{\text{coût final}}$$

On calcule $-\dot{V}(x(t);t) = -\frac{1}{2}\dot{x}_t^T P_t x_t - \frac{1}{2} x_t^T P \dot{x}_t - \frac{1}{2} x_t^T \dot{P} x_t - g_t^T \dot{x}_t - \dot{r}_t$

On sait que $\begin{cases} r = cste \Rightarrow \dot{r} = 0 \text{ ⚠ précompensation trajectoire constante} \\ g_t = cste \text{ ⚠ pondération trajectoire constante} \end{cases}$

Aussi, **$\dot{P} = 0$ à horizon infini.**

Par conséquent, $-\dot{V}(x(t);t) = -\frac{1}{2} x_t^T P_t x_t - \frac{1}{2} x_t^T P \dot{x}_t - g_t^T \dot{x}_t$

or $\begin{cases} \dot{x} = Ax + Bu \\ y = Cx \end{cases} \Rightarrow -\dot{V}(x(t);t) = -\frac{1}{2} x_t^T (A^T P_t + P_t A) x_t - u_t^T B^T P_t x_t$
$$- g_t A x_t - g_t^T B u_t$$

$$\Leftrightarrow -\dot{V}(x(t);t) = -\frac{1}{2} x_t^T (A^T P_t + PA) x_t - u_t^T B^T P_t x_t - g_t^T A x_t - g_t^T B u_t$$
$$= \frac{1}{2} x_t^T C x_t + \frac{1}{2} u^T R u_t - y_{ref} Q C x_t + \frac{1}{2} y_{ref} Q\, y_{ref}$$

$$\Rightarrow -\frac{1}{2} x_t^T (A^T P_t + PA) x_t - u_t^T B^T P_t x_t - g_t^T A x_t - g_t^T B u_t - \frac{1}{2} x_t^T C^T Q C x_t$$
$$- \frac{1}{2} u_t R u_t + y_{ref} Q C x_t - \frac{1}{2} y_{ref} Q\, y_{ref} = 0 \qquad \text{(HJB)}$$

Dérivées de l'équation :

$$\left.\frac{\partial [HJB]}{\partial u}\right|_{u=u^*} = 0 \Leftrightarrow 0 = -R u^* - g_t^T B - B^T P_t x_t$$
$$\boxed{\Rightarrow u^* = -R^{-1}(g^T B + B^T P_t x_t)}$$

$$\boxed{\left.\frac{\partial^2 [HJB]}{\partial u^2}\right|_{u=u^*} = -R < 0}$$ assurant l'optimalité de u^*

On remplace $u^* = -R^{-1} g_t^T B - R^{-1} B^T P_t x_t$ dans (HJB) :

$$-\frac{1}{2} x_t^T (A^T P_t + P_t A - 2 L_t^T B^T P_t + C^T Q C + L_t R_t L_t) x_t - (g_t^T A - y_{ref}^T Q C$$
$$- g_t^T B L_t) x_t + \frac{1}{2} g_t B R^{-1} B^T g_t - \frac{1}{2} y_{ref} Q\, y_{ref} = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} A^T P_t + P_t A - 2L_t^T B^T P_t + L^T Q C + L_t^T R L_t = 0 & (1) \\ g_t^T A - y_{ref}^T Q t - g_t^T B L_t = 0 & (2) \\ \frac{1}{2} g_t^T B R^{-1} B^T g_t - \frac{1}{2} y_{ref}^T Q y_{ref} = 0 & (3) \end{cases}$$

car $x_t \neq 0$

On obtient P_t de l'équation (1) : Equation de Ricatti

Grâce à (2) on déduit que $g_t = y_{ref}^T Q C (A - BL_t)^{-1}$

$= y_{ref}^T Q C (A - BR^{-1}B^T P_t)^{-1}$

De l'équation (3) on a $g_t^T B R^{-1} B^T g_t = y_{ref}^T Q y_{ref}$

condition nécessaire pour la poursuite optimale

On a trouvé une commande optimale pour suivre une trajectoire constante.

$$u^* = - R^{-1} B^T P_t x_t - R^{-1} B^T g_t$$

$$u^* = - L_t \; x_t + \ell u_{ref}$$