22/09/2022

TD2 : Automatique Linéaire

I/ Représentation d'état :

1) $G(s) = \dfrac{1}{(s+1)(s+3)(s+2)} \times \begin{bmatrix} (s+2)^2(s+1) & (s+3)^2(s+2) & (s+1)^2(s+2) \\ (s+2) & s(s+1)(s+2) & (s+1)^2(s+3) \end{bmatrix}$

⚠ Nous ne sommes pas dans le cas où $\deg(D) > \deg(N)$
→ faire une division euclidienne pour aboutir à $G(s) = G_{sp}(\ ) + \ldots$

C'est-à-dire $\dfrac{s+3}{s+1} = 1 \cdot \dfrac{(s+1)}{s+1} + \dfrac{2}{s+1}$

$= 1 + \dfrac{2}{s+1}$ ⇒ constituer les éléments de la matrice D

Étape 1 : Réaliser la division euclidienne

$$G(s) = \begin{bmatrix} \dfrac{s+2}{(s+1)(s+3)} & \dfrac{2}{s+1} & \dfrac{-2}{s+3} \\ \dfrac{1}{(s+3)(s+2)} & \dfrac{-3}{s+3} & \dfrac{s+1}{(s+3)(s+2)} \end{bmatrix} + \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}}_{D}$$

Nous savons que $Y(s) = G(s)\,U(s)$

$= \underbrace{G_{sp}(s)\,U(s)}_{\text{à réaliser}} + D\,U(s)$

$G_{sp}(s)U(s) \rightarrow y_{sp}(s)$ à réaliser

$D\,U(s)$ → ne représente pas de dynamique → pas d'état associé

| SP = strictement propre |

N.B : $\dfrac{N}{D} = \displaystyle\sum_{i=1}^{i} \dfrac{R_i}{(s-\lambda_i)^{\mu_i}} + Q$

$G_{sp}(s) = \dfrac{1}{(s+1)(s+2)(s+3)} \begin{bmatrix} (s+2)^2 & 2(s+1)(s+3) & -2(s+1)(s+2) \\ (s+2) & -3(s+1)(s+2) & (s+2)^2 \end{bmatrix}$

Etape 2: Rang des résidus

$$G_{sp}(s) = \frac{\begin{bmatrix} R_1 \end{bmatrix}}{(s+1)} + \frac{\begin{bmatrix} R_2 \end{bmatrix}}{(s+2)} + \frac{\begin{bmatrix} R_3 \end{bmatrix}}{(s+3)}$$

$$R_1 = \begin{bmatrix} \cancel{\tfrac{1}{4}}\ \tfrac{1}{2} & 2 & 0 \\ \cancel{\tfrac{1}{4}}\ \tfrac{1}{2} & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$R_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad R_3 = \begin{bmatrix} \tfrac{1}{2} & 0 & -2 \\ -\tfrac{1}{2} & -3 & 2 \end{bmatrix}$$

$\text{rang}(R_1) = 2$

$\text{rang}(R_2) = 1$ et $\text{rang}(R_3) = 2$

$\Rightarrow$ il faudra 5 états

avec $\delta_i = $ rang de R_i

Rappel: $R_i = C_i B_i$

avec $C_i \in \mathbb{R}^{p \times \delta_i}$ et $B_i \in \mathbb{R}^{\delta_i \times m}$

Plus grande sous matrice de déterminant non nul

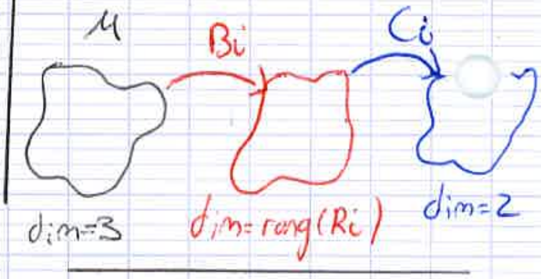
Seule la matrice nulle est de rang 0

On pose $X_i(s) = \frac{B_i}{s-p_i}\, \mu(s)$

$$y(s) = \sum_{i=1}^{\hat{}} C_i X_i(s)$$

$$y_{sp}(s) = \mathbb{1}_n X_1(s) + C_2 X_2(s) + \mathbb{1}_n X_3(s)$$

Illustration:



Etape 3: Poser les variables $X_i(s)$

$$\begin{cases} X_1(s) = \dfrac{R_1}{s+1}\, U(s) \in \mathbb{R}^2 \\[2ex] X_2(s) = \dfrac{R_2}{s+2}\, U(s) \in \mathbb{R} \\[2ex] X_3(s) = \dfrac{R_3}{s+3}\, U(s) \in \mathbb{R}^2 \end{cases}$$

Etape 4: Réaliser la forme minimale

$$A = \begin{bmatrix} -1 & & & & (0) \\ & -1 & & & \\ & & -2 & & \\ & & & -3 & \\ (0) & & & & -3 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} B_1 \\ B_2 \\ B_3 \end{bmatrix}$$

$$C = \begin{pmatrix} 1I_2 & C_2 & 1I_2 \end{pmatrix} \quad D = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Etape 5 : Calcul des sous-matrices B_2 et C_2

On calcule $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ? \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$

et de la même manière $C_2 = \begin{bmatrix} x & x & x \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

Cette réalisation est minimale d'après le Théorème de Guilbert

2) $d(s) = \text{ppcm} \left[\text{dénominateur des } G_{sp\,ij} \right]$

$d(s) = (s+1)(s+3)(s+2)$

$=$

Rappel : $y_{sp}(s) = \dfrac{1}{\text{ppcm}} \left[C_1 \,\vdots\, C_2 \,\vdots\, C_3 \right] \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{bmatrix}$

On réalise par colonne $y_{sp}(s) = \dfrac{C_1 u_1}{\text{ppcm}} + \dfrac{C_2 u_2}{} + \dfrac{C_3 u_2}{\text{ppcm}}$

On perd des informations sur l'interaction entre les colonnes

=> des états sont redondants

=> ces états seront non observables

Rq : Il existe une théorie appelée la Réduction de colonne pour palier à ce problème.

cf. la réalisation de $y(s) = \frac{1}{s+2}\,[\,u_1(s) \quad u_2(s)\,]$ se fait avec un seul état

Mais on se rend compte que si on sépare les colonnes

$y(s) = \frac{1}{s+2}U_1(s) + \frac{1}{s+2}U_2(s)$ on va créer deux états redondants

$$y_{sp}(s) = \frac{1}{(s+2)(s+2)(s+3)}\left[\begin{array}{c|c|c} (s+2)^2 & \cancel{2(s+2)(s+3)} & \cancel{-2(s+1)(s+2)} \\ s+2 & -3(s+2)(s+1) & (s+1)^2 \end{array}\right]$$

$$y_{sp_1}(s) = \frac{1}{\underbrace{(s+2)(s+2)(s+3)}_{s^3+6s^2+11s+6}}\begin{bmatrix} (s+2) \\ (s+2) \end{bmatrix} u_1(s)$$

On pose $V_{s1}(s) = \frac{1}{(s+2)(s+2)(s+3)}U_1(s)$

Posons $\begin{cases} x_1 = v_{s1} \\ x_2 = \dot{v}_{s1} \\ x_3 = \ddot{v}_{s1} \end{cases}$ donc $\begin{cases} \dot{X}_1 = \overset{=A_1}{\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -6 & -11 & -6 \end{bmatrix}} X_1 + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} u_1 \\ y_{sp_1} = \underset{=C_1}{\begin{bmatrix} 4 & 4 & 1 \\ 2 & 2 & 0 \end{bmatrix}} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} \end{cases}$

le vecteur d'état est $\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = X_1$

De même pour la deuxième colonne

$$\begin{cases} \dot{X}_2 = \overset{=A_2}{\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -6 & -11 & -6 \end{bmatrix}} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} u_2 \\ y_{sp2} = \underset{=C_2}{\begin{bmatrix} 12 & 10 & 2 \\ -6 & -9 & -3 \end{bmatrix}} \begin{bmatrix} x_3 \\ x_4 \\ x_6 \end{bmatrix} = X_2 \end{cases}$$

Et enfin, $\dot{X}_3 = \underset{=A_3}{\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -6 & -11 & -6 \end{bmatrix}} X_3 + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} u_3$

$$y_{sp3} = \underbrace{\begin{bmatrix} -4 & -6 & -2 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix}}_{= C_3} \underbrace{\begin{bmatrix} x_7 \\ x_8 \\ x_8 \end{bmatrix}}_{= X_3}$$

Au bilan, $A = \begin{bmatrix} A_1 & & [0] \\ & A_2 & \\ [0] & & A_3 \end{bmatrix}$

$$B = \text{diag}\left[\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} ; \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} ; \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right]$$

$$C = [C_1 \quad C_2 \quad C_3]$$

$$D = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

On a 9 états au lieu des 5 nécessaires pour la réalisation minimale => cette forme compagne de commande est non observable

Remarque : on a créé de la redondance en réalisant déjà $\frac{1}{(s+2)(s+2)(s+3)} \begin{bmatrix} (s+2) \\ (s+2) \end{bmatrix}$!

II / Commande de systèmes linéaires (1)

Rappel :

$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t)$ avec $K \in \mathbb{R}^{m \times n}$ pour mettre en place le retour d'état

On pose l'hypothèse : On cherche une solution au problème tel que K est de rang 1.

Si K est de rang 1 alors $K = qk$ avec $k \in \mathbb{R}^{1 \times n}$, $q \in \mathbb{R}^{m \times 1}$

et q fixé. On cherche k tel que $(A - Bqk)$ admette des valeurs propres choisies.

N.B : Cette méthode marche à peu près partout c-à-d. partout sauf où l'espace de mesure est nul (ex : un plan dans $\mathbb{R}^3$ ou une droite dans $\mathbb{R}^2$, etc.)
Visible par des blocs de Jordan orthogonaux successifs sur la matrice dynamique
Solution : On réalise deux retours (un cassant la dynamique problématique et l'autre qui commande le système)
Dans cet exercice on a des valeurs propres en $\{2, 2, 2\}$.

Conseil : Ne pas prendre 0 ou 1 / nombres évidents