Examen Automatique Non linéaire

1. Utilisez une fonction de Lyapunov pour prouver la stabilité de l'origine du système suivant :

$$\dot{x}_1 = -x_1 - x_2, \quad \dot{x}_2 = 2x_1 - x_2^3.$$

2. On considère un système de la forme :

$$\dot{x}_1 = x_2, \quad \dot{x}_2 = -g(x_1)(x_1 + x_2),$$

   où g est une fonction localement Lipschitz et $g(y) \geq 1$.
   (a) Vérifier que $V(x) = \int_0^{x_1} yg(y)dy + x_1x_2 + x_2^2$ est une fonction définie positive et radialement non bornée.
   (b) Prouver que le système est globalement asymptotiquement stable.
3. On considère le système $H1$ suivant :

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2, \\ \dot{x}_2 &= -ax_1^3 - kx_2 + e_1, \\ y &= x_2. \end{aligned}$$

   (a) Montrer que H_1 est à sortie strictement passive.
   (b) Montrer que H_1 est zero state détectable.
4. On considère le système $H2$ suivant :

$$\begin{aligned} \dot{x}_3 &= x_4, \\ \dot{x}_4 &= -bx_3 - x_4^3 + e_2, \\ y &= x_4. \end{aligned}$$

   (a) Montrer que H_2 est à sortie strictement passive.
   (b) Montrer que H_2 est zero state détectable.
   (c) Montrer que l'origine du système interconnecté entre H_1 et H_2 est asymptotiquement stable.
5. On considère le système suivant :

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2 + \theta_1 x_1 \sin(x_2), \\ \dot{x}_2 &= \theta_2 x_2^2 + x_1 + u, \end{aligned}$$

   où θ_1 et θ_2 sont deux paramètres inconnus bornés par 1.
   (a) En adaptant la technique du backstepping, déterminer une loi de commande permettant de stabiliser le système.
6. Enoncer la définition de stabilité asymptotique.