28/09/2022 **Synthèse de Régulateur LQ :**

... A horizon fini

Problématique $\min_U J(U) = \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{T_f - 1} [x_k^T Q_k x_k + u_k^T R_k u_k] + \frac{1}{2} x_{T_f}^T P_{T_f} x_{T_f}$

sous la contrainte de dynamique du système $\begin{cases} x_{k+1} = A x_k + B u_k \\ y_k = C x_k \end{cases}$

où $Q_k = Q_k^T \geq 0$; $R_k = R_k^T > 0$ et $P_{T_f} = P_{T_f}^T > 0$ sont des matrices choisies par le designer.

Solution : $u_k^* = - L_k x_k$ où L_k est la solution de l'équation de Riccati à temps rétrograde :

$$L_k = (R_k + B_k^T P_{k+1} B_k)^{-1} B_k^T P_{k+1} A_k$$
$$P_k = Q_k + A_k^T P_{k+1} A_k - A_k^T P_{k+1} B_k L_k$$

initialisé par $P_{T_f} = Q_{T_f}$

Le **minimum** du critère est alors donné par $\min_U J(u) = \frac{1}{2} x_0^T P_0 x_0$ avec P_0 obtenu par l'équation précédente.

... A horizon infini Problématique

$\min_u J(u) = \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{\infty} [x_k^T Q x_k + u_k^T R u_k]$

sous la contrainte dynamique du système $\begin{cases} x_{k+1} = A x_k + B u_k \\ y_k = C x_k \end{cases}$

où $Q = Q^T \geq 0$ et $R = R^T > 0$ (choisies par le designer)

Remarques : . Q, R et P n'ont plus d'indices

. $P_{T_f} = 0$ parce que le coût final pour les cas d'un horizon infini est nul

Solution : Le système bouclé est asymptotiquement stable sous réserve des conditions suivantes :

1) Que le système dynamique soit stationnaire et **stabilisable**

2) Que le couple $(A, Q^{\frac{1}{2}})$ soit détectable

Rappel :

- Quelque soit l'état du système au voisinage d'un point d'équilibre, si le système est asymptotiquement stable alors le système tend vers le point d'équilibre en un temps infini

- Quelque soit l'état du système dans l'espace d'état, si le système est asymptotiquement et globalement stable (GAS) alors le système atteint un point d'équilibre en temps infini

- Quelque soit l'état du système au voisinage du point d'équilibre, si le système est simplement stable alors il reste dans ce voisinage en un temps infini.

Système stationnaire : Les paramètres du système (coefficients de l'EDO) sont constants dans le temps.

relaxe des conditions de commandabilité et d'observabilité

Stabilisable : Les modes non commandables du système sont stables (demi-plan gauche). Astuce : Écrire le système sous forme modale, étudier les modes et imposer des pôles dominants (dynamique la plus lente) pour la commande.

Détectabilité : les modes non observables du systèmes sont stables.

Remarque : Le critère PBH permet de déterminer les modes stabilisables et détectables du système

$Q^{\frac{1}{2}}$ est n'importe quelle matrice **rectangulaire** qui vérifie

$$(Q^{\frac{1}{2}})^T = Q^{\frac{1}{2}} = Q$$

N.B. commandable $\not\Leftarrow \Rightarrow$ stabilisable
obscrvable $\Rightarrow$ détectable
$\not\Leftarrow$

Théorème 1: Si le système dynamique est stabilisable :

- $P_{k+1} = P_k = \dots = P$ admet une limite constante semi définie positive qui est la solution de l'équation :
$$P = Q + A^T P A = A^T P B (R + B^T P B)^{-1} B^T P A \quad (1)$$
- La commande optimale est donnée par :
$$u^* = -L x_k \quad \text{avec } L = (R + B^T P B)^{-1} B^T P A$$
- le coût optimal $\min_u J(u) = \frac{1}{2} x_c^T P_c$

Remarque : L'équation (1) est une équation de Riccati qui n'est plus rétrograde mais aux différences !

Théorème 2: Si le système est stabilisable et le couple $(A, Q^{\frac{1}{2}})$ est détectable :

- P est l'unique solution définie positive de l'équation algébrique de Riccati $P = Q + A^T P A - A^T P B (R + B^T P B)^{-1} B^T P A$
- Le système bouclé avec une telle commande est asymptotiquement stable
- si de plus la paire $(A; Q^{\frac{1}{2}})$ est observable alors la matrice P est définie strictement positive.

Exercice : Pour $x_{k+1} = 2x_k + u_k$

Déterminer la commande optimale u^* qui stabilise x et minimise
$$J(x_k, k) = \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{T_f - 1} (x_k^T x + u_k^T R u_k) + \frac{1}{2} x_{Tf}^T R_{Tf} x_{Tf}$$

1) Avec $T_f = 3$ et $P_f = 1$ montrer par respectivement $R = 1$ puis $R = 10$ et $R = 1000$ l'influence de la pondération R

sur les pôles du système.

2) Avec $T=3$; $R=1$ et respectivement $P_{Tf}=0{,}1$; $P_{Tf}=10$ et $P_{Tf}=1000$ déterminer x_3 en fonction de L_0, L_1, L_2 et x_0.

3) Reprendre la question ① avec $T_f \to \infty$

4)

$P_{Tf} = Q_{Tf} = 1$ est choisit $\Rightarrow P_3 = 1$

En considérant $R=1$

$P_{Tf-1} = P_2 = Q_3 + A_3^T P_3 A_3$
$= 1 + 2 \times 1 \times 2$
$= 5$

$L_2 = (R_1 + B^T P_3 B)^{-1} B^T P_3 A = (1+1\times1\times1)^{-1} 1\times1\times2 = \frac{1}{2}\times 2 = 1$ $u_2^* = -L_2 x_2 = -1 x_2$ ✓

$P_1 = 1 + 2 \times 5 \times 2$
$= 21$

$L_1 = (1+1\times5\times1)^{-1} 1\times5\times2 = \frac{1}{6}\times10 = \frac{5}{3}$ $u_1^* = -\frac{5}{3} x_1$

$P_0 = Q_1 + A_1^T P_1 A_1$
$= 1 + 2\times21\times2 = 85$

$L_1 = (R_1 + B^T P_2 B)^{-1} B^T P_2 A$
$= (1 + 1\times21\times1)^{-1}\, 1\times21\times1$
$= \frac{1}{22} \times 21 = \frac{21}{22}$ $\Rightarrow u_0^* = -\frac{21}{22} x_0$.

En considérant $R=10$:

$P_2 = 5$

$L_2 = (R_2 + B^T P_3 B)^{-1} B^T P_3 A$
$= (10 + 1\times1\times1)^{-1}\, 1\times1\times2$
$= \frac{1}{11} \times 2 = \frac{2}{11}$ $\Rightarrow u_2^* = -\frac{2}{11} u_2$

$L_1 = (R_1 + B_1^T P_2 B_1)^{-1} B_1 P_2 A_1$

$= (10 + 1 \times 5 \times 1)^{-1} \, 2 \times 5 \times 2$

$= \frac{1}{11} \times 10 = \frac{10}{11} \Rightarrow u_1^* = -\frac{10}{11} u_1$

1) Correction:

$J(x(2);2) = \frac{1}{2} x_2^T x_2 + u_2^T R u_2 + J^*(x(3);3)$

$= \frac{1}{2} x_2^T + \frac{1}{2} R u_2^T + \frac{P_3}{2} x_3^T$

R = 1	R = 10	R = 1000
$u_2^* = -x_2$ $u_1^* =$ $u_0^* =$	$u_2^* =$ $u_1^* =$ $u_0^* =$	$u_2^* =$ $u_1^* =$ $u_0^* =$

$\frac{\partial J(x(2),2)}{\partial u_2} = \frac{\partial [\frac{1}{2} x_2^T + \frac{R}{2} u_2^T + \frac{P_3}{2} (2x_2 + u_2)]}{\partial u_2} = 0$

$\Leftrightarrow R u_2 + P_3 (2x_2 + u_2) = 0$

et enfin, $u_2^* = -2(R + P_3)^{-1} P_3 x_2$

$= -x_2$

est obtenu après avoir vérifié $\frac{\partial^2 J(x(2);2)}{\partial u_2^2} > 0$

- Autre méthode:

$u_k^* = -L_k x_k = -[(R_k + B_k^T P_{k+1} B)^{-1} B_k^T P_{k+1} A_k] x_k$

$u_2^* = -(1 + 1 \times 1 \times 2) \times 1 \times 1 \times 2 \; x_k$

$u_2^* = -1 x_2$