EXERCICES ACADÉMIQUES ESTIMATION/FILTRAGE

I/ Soit $X \in \mathbb{R}$ une variable aléatoire distribuée selon la loi Gaussienne $\mathcal{N}(x_0, \sigma_0^2)$ de moyenne x_0 et variance σ_0^2. Soit $Z = (Z_1, \ldots, Z_N)^T \in \mathbb{R}^N$ un vecteur aléatoire lié à X par

$$\forall i \in \{1, \ldots, N\},\ Z_i = X + V_i$$

où $V_1, \ldots, V_N$ sont des vecteurs aléatoires de bruit mutuellement indépendants, indépendants de X, et distribués selon la loi Gaussienne $\mathcal{N}(0, \sigma_v^2)$ de moyenne nulle et d'écart-type σ_v.
Lors d'une expérience aléatoire, Z se réalise en $z = (z_1, \ldots, z_n)^T \in \mathbb{R}^N$, ce que l'on note $z = Z(\omega)$.

1. Établir la loi postérieure $p_{X|Z}(x|z)$ de X conditionnellement à l'événement $Z = z$. On notera $p_{X|Z}(x|z) = \mathcal{N}(x; \bar{x}, \sigma^2)$, *i.e.*, on désignera par $\bar{x}$ et σ^2 les moyenne et covariance a posteriori de X.
2. Quels sont les estimés du MMSE et du MAP de X obtenus sur la base du vecteur d'observation z ? Quel sens peut-on donner aux estimateurs correspondants ?
3. Quel serait l'estimé du maximum de vraisemblance de X si on ne disposait d'aucune connaissance a priori (ou, de manière « équivalente » si $\sigma_0 = \infty$) ?
4. Retrouver la loi postérieure établie ci-dessus par assimilation séquentielle de chacune des composantes de z.

II/ Un paramètre caché réel scalaire x se manifeste au travers de deux observations l, m bruitées, regroupées dans un vecteur $z = \begin{pmatrix} l \\ m \end{pmatrix}$. On définit pour cela le modèle

$$Z = Hx + V, \tag{1}$$

où $H = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, et la variable bidimensionnelle Gaussienne $V = \begin{pmatrix} V_l \\ V_m \end{pmatrix}$, d'espérance $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ et de covariance $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \rho \end{pmatrix}$, $\rho > 0$, caractérise le bruit de mesure additif. Le vecteur des observations z constitue donc une réalisation de la variable aléatoire Z pour l'expérience en cours.

A. Question préliminaire

5. Caractériser en termes simples les propriétés essentielles du bruit de mesure $V = \begin{pmatrix} V_l \\ V_m \end{pmatrix}$, en différenciant par exemple les cas où $\rho \in]0; 1[$, $\rho = 1$, $\rho > 1$.

B. x est constant, et on ne dispose d'aucune connaissance a priori à son sujet.
Par application de formules vues en cours, qui seront instanciées pour le problème considéré et simplifiées autant que possible, répondre aux questions suivantes.

6. Donner l'expression de l'estimé $\hat{x}_{\text{MLE}}$ du maximum de vraisemblance de x défini sur la base de la réalisation $z = \begin{pmatrix} l \\ m \end{pmatrix}$ de Z pour l'expérience en cours.
7. Établir le biais et la covariance de l'estimateur $\hat{X}_{\text{MLE}}$ associé. Caractériser ces propriétés en langage naturel, selon les valeurs de ρ.

C. x varie au fil du temps. À un instant k donné, on suppose que x_k est la réalisation de la variable aléatoire réelle X_k et se manifeste en $z_k = \binom{l_k}{m_k}$ réalisation de Z_k, avec,

$$X_0 = 4 \text{ de manière certaine}\,;\ \forall k > 0,\ X_{k+1} = X_k + W_k\ ;\ \forall k > 1,\ Z_k = HX_k + V_k, \tag{2}$$

$$W_{0:k}, V_{1:k} \text{ blancs mutuellement indépendants}\,;\ W_k \sim \mathcal{N}\big(0, 0.01\big)\ ;\ V_k \sim \mathcal{N}\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \rho \end{pmatrix}\right).$$

8. Proposer une méthode d'estimation récursive de x_k.
9. Donner ses équations en les simplifiant autant que possible.