Robotique Probabiliste

Filtrage Particulaire

Filtrage = estimation dans le cas dynamique

Notions de . Sequential Monte Carlo Methods
. Particle Filtering

Introduction : Très utilisé par le filtrage Bayésien, non linéaire et non Gaussien. Il existe une solution emblématique du SLAM (fast SLAM ou Gumping)

I - Rappels : Filtrage Bayésien

On a une séquence d'états cachés $x_{0:k} = x_0, x_1, \dots x_k$

On dispose d'une séquence de mesures $z_{1:k} = z_1; z_2, \dots z_k$

Le contexte est incertain (approche probabiliste)

état
↳ $x_{0:k}$ réalisation de $X_{0:k}$, un processus aléatoire càd. une séquence de Variable Aléatoire $X_0; X_1; \dots; X_k$ telle que $x_{0:k} = X_{0:k}(\omega)$ CACHÉ

mesure
↳ $z_{1:k}$ réalisation de $Z_{1:k}$, un processus aléatoire tel que $z_{1:k} = Z_{1:k}(\omega)$ ACCESSIBLE

↳ description de la connaissance a priori en termes probabilistes :

* Processus Aléatoire (PA) d'état caché Markovien

  Loi de $X_{0:k}$ décrite par
  1. Loi de X_0 (loi initiale)
  2. Lien statistique entre X_{k-1} et X_k (loi ou modèle dynamique a priori)

* Processus Aléatoire (PA) de mesure

  Loi entre X_k caché et Z_k (loi ou modèle d'observation)

↳ Objectif : Déterminer la loi a posteriori / loi postérieure

$P_{X_{0:k}|Z_{1:k}}(x_{0:k}|z_{1:k})$ ou $P_{X_k|Z_{1:k}}(x_k|z_{1:k})$

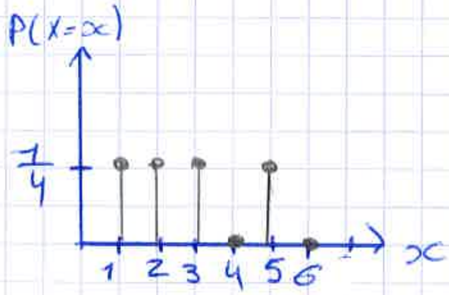
<u>Définitions</u> : • P.A d'état caché Markovien signifie que l'état X_k ne dépend que de l'état précédent X_{k-1} et pas du passé

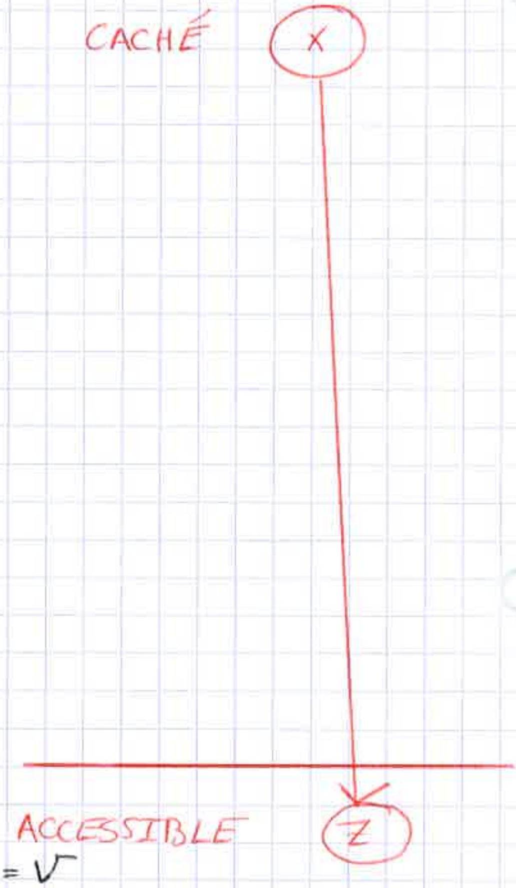
• De même, la mesure Z_k est une manifestation instantanée de l'état courant X_k.

<u>N.B</u> : La loi posterieure englobe toutes les séquences d'états qui donnent la même séquence de mesure.

<u>Exemple pour un cas statique</u> :

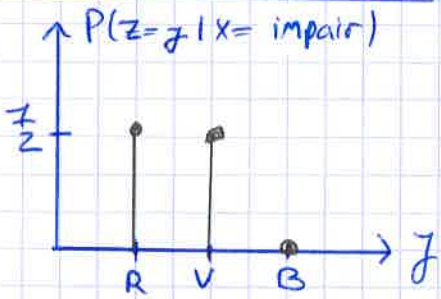
<u>Loi a priori d'un dé pipré</u>

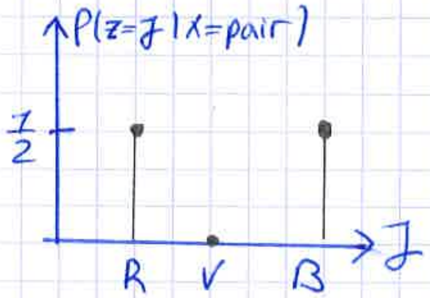




Le dé est tel qu'une peinture recouvre le numéro de la face par une couleur aléatoire : Rouge ou Verte pour une face impaire
Rouge ou Bleu pour une face paire

<u>Le modèle d'observation</u>





Expérience w : $Z(w) = z = V$

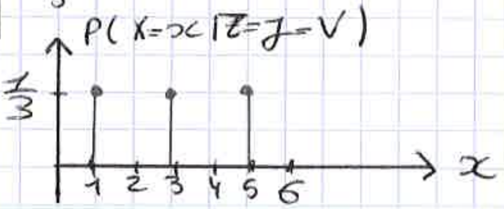
$\Leftrightarrow$ Si on observe du Vert alors

ESTIMATION

$\frac{1}{3}$ de chance qu'il tombe sur 1

$\frac{1}{3}$ de chance qu'il tombe sur 3

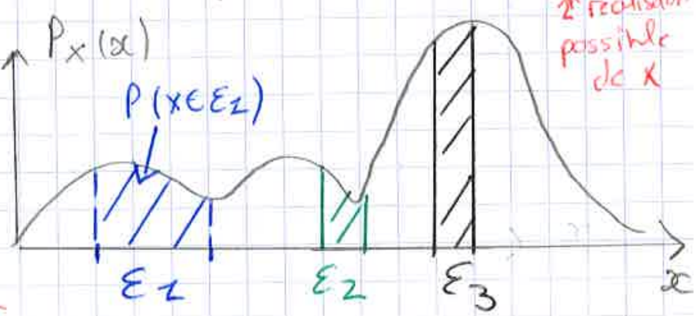
$\frac{1}{3}$ de chance qu'il tombe sur 5



Objectif 2 On peut obtenir l'ESTIMÉ telle que $E[x_k \mid Z_{1:k} = z_{1:k}]$

$= \int x_k \, P_{x_k \mid z_{1:k}} \, dx_k$ = MMSE estimate (cette valeur minimise le carré de la distance à la valeur réelle en moyenne)

Rappels de Densité de Probabilité : Soit $X \in \mathbb{R}$ aléatoire, $P_X(x)$ fonct dont la variable est x ↑ réalisation possible de X



$P_X(x) \geq 0$ et $\int_{\mathbb{R}} P_X(x)\,dx = 1$

De même $\underset{\uparrow \text{ensemble}}{\int_{\mathcal{E}}} P_X(x)\,dx = P(X \in \mathcal{E})$

Quelle est l'espérance de X ? càd la valeur moyenne des issues possibles de X.

$E[X] = E_{P_X(x)}$ $E[X] = \int_{\mathbb{R}} x P_X(x)\,dx$ noté $\bar{x}$

Si $\mathcal{E}_4 = \mathcal{E}_2 \cup \mathcal{E}_3$ alors $\int_{\mathcal{E}_4} P_X(x)\,dx = \square + \square$

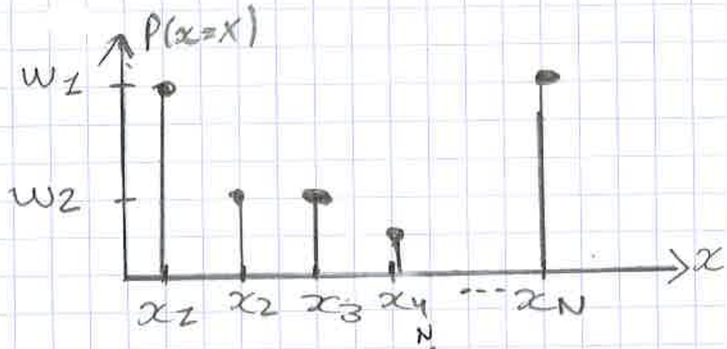
Comment se disperse X autour de $E[X]$?

$$Var[X] = E_{P_X(x)}\left[(x - E[X])^2\right] \text{ noté } \sigma_X^2$$

$$= E[X^2] - (E[X])^2$$

$$= \int_{\mathbb{R}} (x - \bar{x})^2 P_X(x)\,dx$$

Cas de $X \in \mathbb{R}$ aléatoire à valeurs discrètes $(x_1; \cdots; x_N)$

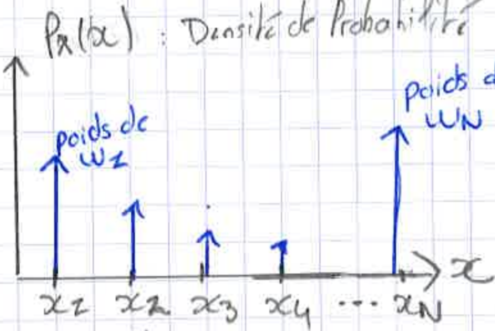


Notons $P(X = x_i) = w_i \geq 0$

où $\sum_{i=1}^{N} w_i = 1$

Ainsi, $\bar{x} = E[X] = \sum_{i=1}^{N} w_i x_i$

$$\sigma_X^2 = \sum_{i=1}^{N} w_i (x_i - \bar{x})^2 = \left(\sum_{i=1}^{N} x_i^2\right) - \bar{x}^2$$



On a tout de même la notion de densité de probabilité

$$P_X(x) = \sum_{i=1}^{N} w_i \underbrace{\delta(x - x_i)}_{\text{peigne de Dirac}}$$

où $\int_{\mathbb{R}} P_X(x)\,dx = \int_{\mathbb{R}} \sum_{i=1}^{N} w_i \delta(x - x_i)\,dx$

$= \sum_{i=1}^{N} w_i \int \delta(x - x_i)\,dx$

car il s'agit d'une somme finie

$$\int_{\mathbb{R}} P_X(x)\,dx = \sum_{i=1}^{N} w_i = 1$$

Rappel : $\bullet \int_{\mathbb{R}} f(x)\,\delta(x-x_i)\,dx = f(x_i)$

$\bullet\ f(x) * \delta(x-x_i) = f(x-x_i)$

Espérance : $\bar{x} := E[X] = \int_{\mathbb{R}} \left[\sum_{i=1}^{N} w_i\,\delta(x-x_i)\right] dx$

$$= \sum_{i=1}^{N} w_i \underbrace{\int_{\mathbb{R}} x\,\delta(x-x_i)\,dx}_{x_i}$$

$$= \sum_i w_i x_i$$

Covariance : $\sigma_X^2 = \sum_{i=1}^{N} w_i (x_i - \bar{x})^2$

Cas où $X \in \mathbb{R}^m$

$$P_X : \mathbb{R}^m \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$x \longmapsto P_X(x)$$

ensemble $\in \mathbb{R}^m$

$$P(x \in E) = \underbrace{\iiint}_{E} P_X(x_1; x_2; \dots; x_m)\ \underbrace{dx_1 x_2 \dots x_m}_{dx} \text{ notée } \int_E P_X(x)\,dx$$

Les définitions sont analogues au cas scalaire :

↳ cas discret : N issues possibles dans le cas multivarié dans $\mathbb{R}^m$

$$\bar{x} = \int_{\mathbb{R}^m} \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_m \end{bmatrix} \sum_{i=1}^{N} w^{(i)} \delta\left(\begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_m \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} x_1^{(i)} \\ \vdots \\ x_m^{(i)} \end{bmatrix} \right) \underbrace{dx_1 \dots dx_m}_{dx} = \sum_{i=1}^{N} w^{(i)} \delta^{(i)}$$

si les valeurs possibles sont $(x^{(1)}; \dots; x^{(N)}) \in \mathbb{R}^m$ avec les poids (probabilité) respectifs $w^{(1)}, \dots, w^{(N)}$ où la densité de probabilité est

$$P_X(x) = \sum_{i=1}^{N} w^{(i)} \delta(x - x^{(i)}) = \sum_{i=1}^{N} w^{(i)} \delta(x_1 - x_1^{(i)})\, \delta(x_2 - x_2^{(i)}) \dots \delta(x_m - x_m^{(i)})$$

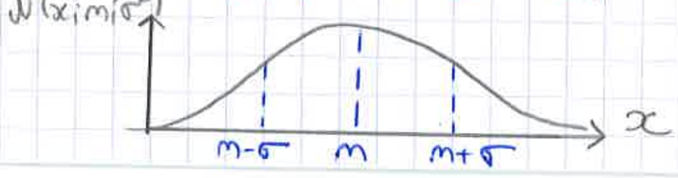
on retrouve le cas scalaire pour la $j^{\text{ème}}$ composante

$$\int_{\mathbb{R}^m} x_j \sum_{i=1}^{N} w^{(i)} \delta(x_1 - x_1^{(i)}) \dots \delta(x_j - x_j^{(i)}) \dots \delta(x_m - x_m^{(i)})\, dx_1 \dots dx_j \dots dx_m$$

$$= \sum_{i=1}^{N} w^{(i)} \int_{\mathbb{R}} x_j\, \delta(x_j - x_j^{(i)})\ \sum_{i=1}^{N} w^{(i)} x_j^{(i)}$$

Rappel sur les lois Gaussiennes $X \in \mathbb{R}$; $X \sim \mathcal{N}(m; \sigma^2)$

$$\Leftrightarrow P_X(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma} \exp\left[-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}\right] =: \mathcal{N}(x; m; \sigma^2)$$



$$P(x \in [a; b[) = \int_a^b \mathcal{N}(x; m; \sigma^2)\,dx = \Pi(b) - \Pi(a)$$

Espérance. $E_{\mathcal{N}(x;m;\sigma^2)}[x] = \int_{\mathbb{R}} x \, \mathcal{N}(x;m;\sigma^2)\, dx = m$

Variance : $E_{\mathcal{N}}[(x-m)^2] = \sigma^2$

Intervalle de confiance : $I\alpha$ de taille minimale telle que $P(x \in I\alpha) = P\alpha$ donné

On montre que $I\alpha = [m - \alpha\sigma ; m + \alpha\sigma] = \{ x \in \mathbb{R} ; \frac{(x-m)^2}{\sigma^2} \leq \alpha^2 \}$

De plus $\alpha = 1 \leftrightarrow p\alpha = 0{,}6827$

$\alpha = 2 \leftrightarrow p\alpha = 0{,}95$

$\alpha = 3 \leftrightarrow p\alpha = 0{,}997$

Cas multivarié $X \in \mathbb{R}^M \sim \mathcal{N}(m; P)$ avec $P \in \mathbb{R}^{M \times N}$

$$P_X(x) = \frac{1}{\sqrt{\det(2\pi P)}} \exp\left[-\frac{1}{2} (x-m)^T P^{-1} (x-m) \right]$$

Rappelons que le déterminant est une forme multilinéaire $\sqrt{\det(2\pi P)} = \sqrt{(2\pi)^M \det(P)}$

$= \sqrt{(2\pi)^M} \cdot \sqrt{\det(P)}$

Espérance : $\bar{x} = E[X] = \int_{\mathbb{R}^M} x \, \mathcal{N}(x; m; P)\, dx = m$

Covariance $\mathrm{Cov}[X] = E[(x-\bar{x})(x-\bar{x})^T] = \int_{\mathbb{R}^M} (x-\bar{x})(x-\bar{x})^T \mathcal{N}(x;m;P)\, dx = P$

Ensemble de confiance : $\mathcal{E}\alpha = \{ x, (x-m)^T P^{-1} (x-m) \leq \alpha^2 \}$

$\mathcal{E}\alpha$ de taille minimale telle que $P(X \in \mathcal{E}\alpha) = P\alpha$ donné

N.B : Les ensembles quadratiques pour des matrices symétriques sont des ellipses dont la direction est donnée par les vecteurs propres