Etape 5 : Vérification de l'équation $\nabla^2_{xx} L$

$$\nabla_{xx} L^2 = \begin{bmatrix} 2(1_2 - 1_2) & 0 \\ 0 & 2 1_2 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}$$ $\Rightarrow$ le point $(-1, 1)$ est un candidat à l'optimalité

$\Rightarrow y^T \nabla_{xx}^2 L y = 0 \quad \forall y \in D$

Exemple 5 (diapo 86)

$g(x) = 2x_1 + x_2 + 4 \leq 0$ contrainte inégalité

Lagrangien $= L(x;\lambda) = x_1^2 + x_2^2 + \lambda [2x_1 + x_2 + 4]$

utiliser μ pour les contraintes inégalité

$$L = \underbrace{x_1^2 + x_2^2}_{f(x)} + \mu \underbrace{[2x_1 + x_2 + 4]}_{g(x) \leq 0}$$

$\nabla_x L = 0 \quad (1)$

$\mu \geq 0 \quad (2)$

$\mu \cdot g(x^*) = 0 \quad (3)$

$g(x^*) \leq 0 \quad (4)$

$$\nabla_x L = \begin{bmatrix} 2x_1 + 2\mu \\ 2x_2 + \mu \end{bmatrix}$$

19/09/2022

$(3) \Leftrightarrow \mu [2x_1 + x_2 + 4] = 0$

$\Rightarrow$ 2 possibilités :

A) $\mu = 0 \Rightarrow \nabla_x L = 0$

$\Rightarrow x_1 = x_2 = 0$

$\Rightarrow \tilde{x} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $\tilde{\mu} = 0$

or $0 + 0 \leq -4$ est faux

donc $g(\tilde{x}) \leq 0$ n'est pas vérifiée

La contrainte est inactive

B) $\mu \neq 0 \Rightarrow 2x_1 + x_2 + 4 = 0$

La contrainte est active $g(x^*) = 0$

$\Rightarrow x^* = \begin{pmatrix} -\frac{8}{5} \\ -\frac{4}{5} \end{pmatrix}$ et $\mu^* = \frac{8}{5} \geq 0$

On vérifie pour toutes les contraintes actives :
$y^t \nabla g(x^*) = 0$

$\nabla g(x) = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$ càd. tous les vecteurs $[y_1 \ y_2] \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} = 0$
$\Rightarrow 2y_1 = y_2 \iff \forall y \begin{bmatrix} y_1 \\ -2y_1 \end{bmatrix}$

$\nabla^2_{xx} L = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$

On cherche à savoir $\underbrace{[y_1 \ -2y_1]}_{y^t} \underbrace{\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}}_{\nabla^2_{xx}L} \underbrace{\begin{bmatrix} y_1 \\ -2y_1 \end{bmatrix}}_{y} \overset{?}{\geq} 0$

$[y_1 \ -2y_1] \begin{bmatrix} 2y_1 \\ -4y_1 \end{bmatrix} = 2y_1^2 + 8y_1^2 = 10y_1^2$

ici $\forall y \neq 0$ on a $y^t \nabla^2_{xx} L \, y > 0$ ainsi x^* est un minimum local

Exemple supplémentaire : $\min \frac{1}{2}(x_1^2 - x_2^2)$
s.c $\{ x_2 \leq 0$

$g(x) = x_2$ contrainte inégalité

Lagrangien $\nabla_x L = \frac{1}{2}(x_1^2 - x_2^2) + \mu x_2$

$\nabla_x L = 0 \Rightarrow \begin{cases} x_1 = 0 \\ -x_2 + \mu = 0 \end{cases}$
$\mu . g(x) = 0 \Rightarrow \mu . x_2 = 0$, deux possibilités :

A) $\mu = 0$
$\Rightarrow x_2 = 0$ donc la contrainte est active
On ne peut pas affirmer que $\mu > 0$ car $\begin{cases} \mu = 0 \\ g(x) \end{cases}$

B) $\mu \neq 0$

/ À faire par entraînement /

dans le cas A) on ne peut pas conclure

Exercice supplémentaire - Bis - $\min \frac{1}{2}(x_1^2 - x_2^2)$

s.c $x_2 \leq 1$

$L = \frac{1}{2}(x_1^2 - x_2^2) + \mu(x_2 - 1)$

$\nabla_x L = 0 \Rightarrow \begin{cases} x_1 = 0 \\ -x_2 + \mu = 0 \end{cases}$

$\mu g(x) = 0 \Rightarrow \mu(x_2 - 1) = 0 \Rightarrow$ 2 possibilités :

a) $\mu \neq 0$, contrainte active

$\Rightarrow x_2 = 1$

$x^* = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $\mu^* = 1 > 0$

CN2 : $y^t \nabla g(x^*) = 0$

$\nabla g(x) = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$

$[y_1 \; y_2] \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = 0 \Rightarrow y_2 = 0$

$\nabla^2_{xx} L = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$

$[y_1 \; 0] \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ 0 \end{bmatrix}$

$= [y_1 \; 0] \begin{bmatrix} y_1 \\ 0 \end{bmatrix} = y_1^2$

b) $\mu = 0$

$\Rightarrow x_2 = 0$ donc la contrainte est ~~active~~ est inactive

$\tilde{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

$g(\tilde{x}) < 0 \Rightarrow$ vérifié

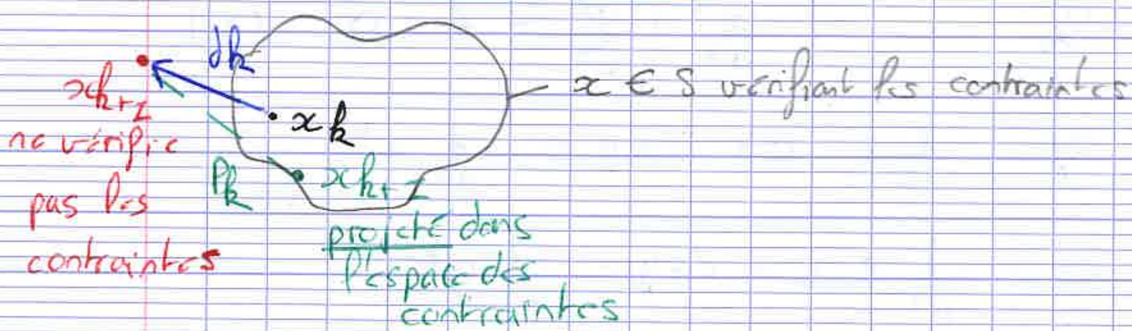
On ne peut pas conclure parce que la contrainte est inactive et on ne peut pas conclure par la condition d'ordre 2.

N.B : On pourrait montrer de manière analytique qu'il s'agit d'un point selle.

a) X^* est un minimum local

Partie IV - Optimisation avec contraintes : B/ Méthodes et algorithmes

Méthode du gradient projeté



$P_k[x_{k+1}] \in S$

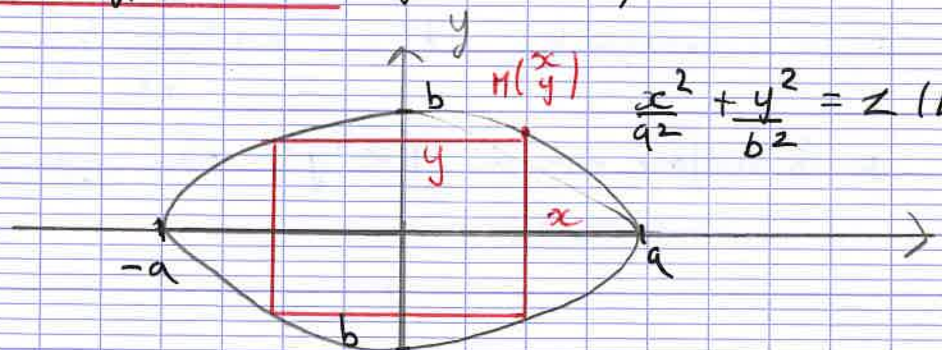
Lagrangien augmenté :

$$L_c(x, \lambda) = f(x) + \lambda^t h(x) + \frac{c}{2} \|h(x)\|^2$$

on souhaite « grand »

on souhaite $\longrightarrow \lambda^*$

Exercice type examen : (février 2022)



$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad (E)$$

Trouver le rectangle de surface maximal inscrit dans l'ellipse (E) max xy ou avec $M = \binom{x}{y}$ on a max $4xy$

sc. $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \iff g(x) = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0$

$$L = 4xy + \lambda \left[\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1 \right]$$

$$\nabla_x L = 0 \iff \begin{cases} 4y + \frac{2\lambda x}{a^2} = 0 \\ 4x + \frac{2\lambda y}{b^2} = 0 \end{cases} \quad (1)$$

$$\nabla_\lambda L = 0 \Rightarrow \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0 \quad (2)$$

$$\begin{cases} 2y = -\frac{\lambda}{a^2} x \iff 2xy = -\frac{\lambda}{a^2} x^2 \\ 2x = -\frac{\lambda}{b^2} x \iff 2xy = -\frac{\lambda}{b^2} y^2 \end{cases} \quad (1)$$

et $\frac{\lambda^2}{a^2} x^2 = \frac{\lambda^2}{b^2} y$ (2)

(1) et (2) $\frac{x^2}{a^2} + \frac{x^2}{a^2} = 1 \iff 2x^2 = a^2$

$\iff \boxed{x^2 = \frac{a}{\sqrt{2}}}$

et $\boxed{y^* = \frac{b}{\sqrt{2}}}$

On sait aussi que $\boxed{\lambda^* = -\frac{2a^2 y}{x}}$

ou, en remplaçant, $\lambda^* = -2a * \frac{b}{\sqrt{2}} \frac{\sqrt{2}}{a} = \boxed{-2ab}$

or la surface est de $4x^* y^*$ d'où $\boxed{\text{max surface} = 2ab}$

Sujet sur moodle

Exercice type examen (février 2022)

Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par $f(x,y) = x \cdot y + y^2 + x + y$

On recherche l'optimum de f sur $\mathbb{R}^2$.

Méthode de Newton en partant de $X_0 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$:

$$\nabla f(x,y) = \begin{bmatrix} y+1 \\ x+2y+1 \end{bmatrix}$$

Rappel Newton (diapo 67)

$$X_{k+1} = X_k - [\nabla^2 f(X_k)]^{-1} \nabla f(X_k)$$

$$\nabla^2 f(x,y) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \text{ et } [\nabla^2 f(x,y)]^{-1} = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$X_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

$$X_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \underbrace{\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}}_{\nabla f(X_1)} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} = X_1$$

Méthode de Newton en partant de $X_0 = \begin{bmatrix} 2 \\ -3 \end{bmatrix}$:

$$X_1 = \begin{bmatrix} 2 \\ -3 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -2 \\ -3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

$$X_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

$$X_3 = X_2$$

Explication d'un point de vue théorique :

/ Vérifier par le calcul analytique pour s'entrainer /

/ Prouver que l'on a un minimum local /