V. CADENAT 07/09

TD 1 : Outils Mathématiques

I. 1. Les rotations de base (1)

. Rotation d'un angle θ autour de l'axe $\vec{x}$: $\vec{x_1} = \vec{x_0} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$

Astuce : Se placer toujours au dessus de l'axe de rotation en vue 2D

1)

Rappel : la matrice de rotation $R_{01} = \begin{bmatrix} \vdots & \vdots & \vdots \\ \vec{x_1}_{(0)} & \vec{y_1}_{(0)} & \vec{z_1}_{(0)} \end{bmatrix}$

2)

$$R_{01} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ 0 & \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{bmatrix}$$ ← la norme d'une ligne doit être de 1

$$\vec{y_1}_{(0)} = \begin{bmatrix} 0 \\ \cos(\theta) \\ \sin(\theta) \end{bmatrix} \qquad \vec{z_1}_{(0)} = \begin{bmatrix} 0 \\ -\sin(\theta) \\ \cos(\theta) \end{bmatrix}$$

. Rotation d'un angle θ autour de l'axe $\vec{y}$: $\vec{y_1}_{(0)} = \vec{y_0}_{(0)} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$

3)

$$R_{01} = \begin{bmatrix} \cos(\theta) & 0 & \sin(\theta) \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin(\theta) & 0 & \cos(\theta) \end{bmatrix}$$ ← norme de la ligne doit être de 1

$\vec{y_1} = \vec{y_0}$

$$\vec{x_1}_{(0)} = \begin{bmatrix} \cos(\theta) \\ 0 \\ -\sin(\theta) \end{bmatrix} \qquad \vec{z_1}_{(0)} = \begin{bmatrix} \sin(\theta) \\ 0 \\ \cos(\theta) \end{bmatrix}$$

. Rotation d'un angle θ autour de l'axe $\vec{z}$: $\vec{z_1} = \vec{z_0}$

$$R_{01} = \begin{bmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) & 0 \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

norme de la ligne = 1 →

$\vec{z_1} = \vec{z_0}$

$$\vec{y_1}_{(0)} = \begin{bmatrix} -\sin(\theta) \\ \cos(\theta) \\ 0 \end{bmatrix} \qquad \vec{x_1}_{(0)} = \begin{bmatrix} \cos(\theta) \\ \sin(\theta) \\ 0 \end{bmatrix}$$

(4)

$$R_{01} = \begin{bmatrix} 0{,}5 & 0 & 0{,}87 \\ 0 & 1 & 0 \\ -0{,}87 & 0 & 0{,}5 \end{bmatrix}$$

$\vec{y_1} = \vec{y_0}$ => la rotation s'effectue autour de $\vec{y_0}$

Se munir de la matrice de rotation d'un angle θ autour de $\vec{y_0}$ (cf. ex 1)

On identifie les termes $\left.\begin{array}{l} \sin(\theta) = 0{,}87 = \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \cos(\theta) = 0{,}5 = \frac{1}{2} \end{array}\right\} \Rightarrow \theta = \frac{\pi}{3}$

Conclusion : Rotation autour de $\vec{y_0}$ d'angle $\frac{\pi}{3}$

$$R_{01} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Il faut chercher l'axe qui n'a pas subi de variation => rappel : les vecteurs sont écrits en colonne.

Ici, $\vec{x_{1(0)}} = \vec{y_{1(0)}}$

$\vec{y_{1(0)}} = -\vec{x_{0}}_{(0)}$

$\vec{z_{1(0)}} = \vec{z_{0(0)}}$ => inchangé

On en déduit que la rotation a lieu autour de $\vec{z}$

Puis identification, $\left\{\begin{array}{l} \cos(\theta) = 0 \\ \sin(\theta) = 1 \end{array}\right. \Rightarrow \theta = \frac{\pi}{2}$

$$R_{01} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

L'axe invariant est $\vec{x}$

Par identification $\left\{\begin{array}{l} \sin(\theta) = -1 \\ \cos(\theta) = 0 \end{array}\right. \Rightarrow \theta = -\frac{\pi}{2}$

I.2 Composition de rotations : a) cf. diapo 5

⚠ Sens de rotation (signe)

b) A la première étape, la matrice de passage $R_{01} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

A la deuxième étape $R_{12} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

c)

$$R_{02} = R_{01} \cdot R_{12} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

__Vérification__ : On lit en colonne
$$\left.\begin{aligned} \vec{x_{2(0)}} &= \vec{z_{0(0)}} \\ \vec{y_{2(0)}} &= -\vec{x_{0(0)}} \\ \vec{z_{2(0)}} &= -\vec{y_{0(0)}} \end{aligned}\right\}$$ cohérent avec le schéma

N.B. : Pas d'identification possible avec une des 3 matrices de rotation usuelle.

d) Soit $\vec{v_{(0)}} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$

$\vec{v_{(0)}} = R_{01} \cdot \vec{v_{(1)}}$ __astuce pour le calcul des vecteurs dans une autre base__

$\Leftrightarrow \vec{v_{(1)}} = R_{01}^T \vec{v_{(0)}} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

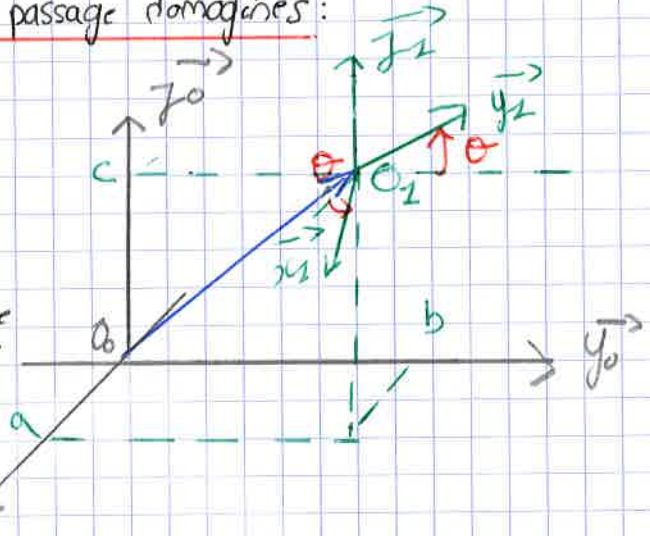
De même $\vec{v_{(0)}} = R_{02} \vec{v_{(2)}} \Leftrightarrow \vec{v_{(2)}} = R_{02}^T \vec{v_{(0)}} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$

Enfin, $\vec{v_{(1)}} = R_{12} \vec{v_{(2)}} \Leftrightarrow \vec{v_{(2)}} = R_{12}^T \vec{v_{(1)}}$

I.3. Matrices de passage homogènes :

1)

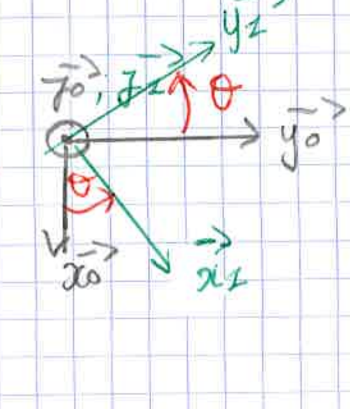
$R_0 \to R_1$
Tr + Rot
→ on a besoin d'une matrice de passage homogène



La matrice de passage est $T_{01} = \begin{bmatrix} R_{01} & P_{01(0)} \\ 0_{1\times3} & 1 \end{bmatrix}$ avec $P_{01(0)} = \overrightarrow{O_0O_1}_{(0)} = \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix}$

__Concernant la rotation :__

Rotation autour de $\vec{z_0}$ d'angle θ



La matrice de rotation usuelle est bien connue $R_{01} = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

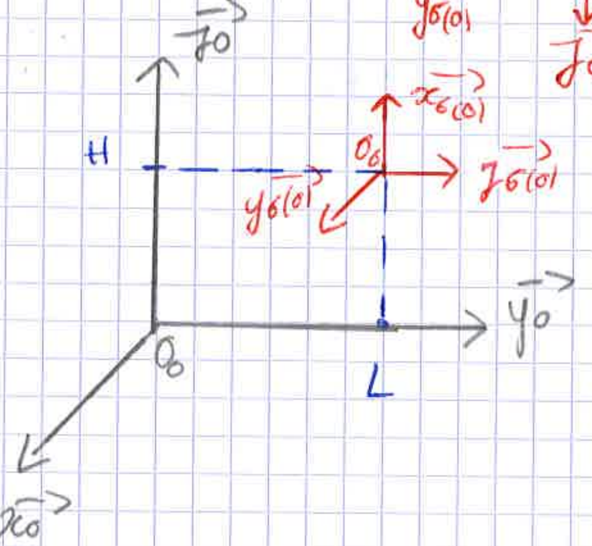
Au bilan, la matrice de passage homogène est :

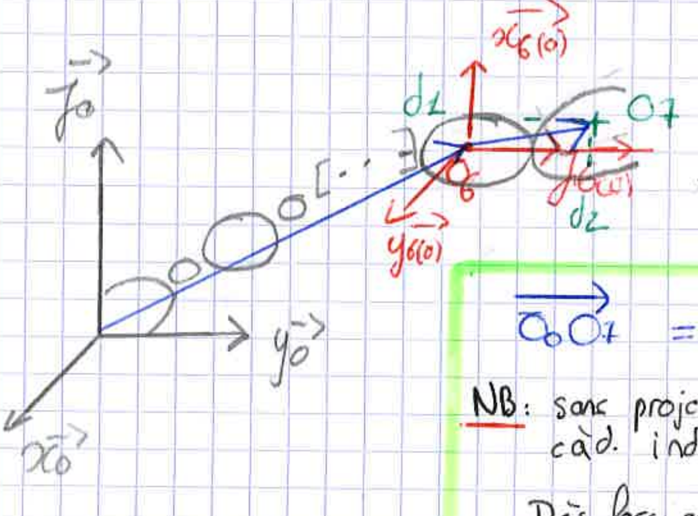
$$T_{0Z} = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 & a \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 & b \\ 0 & 0 & 1 & c \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

2) On considère un bras mécanique à 6 liaisons. Le repère R_6 est lié à l'organe terminal et la matrice de passage homogène est

$$T_{06} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & L \\ 1 & 0 & 0 & H \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \rightarrow Pos_{(0)} = \overrightarrow{O_0O_6}_{(0)}$$

$\overrightarrow{x_{6(0)}}$ $\overrightarrow{y_{6(0)}}$ $\overrightarrow{z_{6(0)}}$





$\overrightarrow{O_0O_7}_{(0)}$ = Position de O_7 dans R_0

$\Rightarrow$ Pour calculer $\overrightarrow{O_0O_7}_{(0)}$ on a besoin de T_{06}

$$\overrightarrow{O_0O_7} = \overrightarrow{O_0O_6} + \overrightarrow{O_6O_7}$$

NB : sans projection dans un repère cette relation est intrinsèque c.à.d. indépendante de toute base.

Dès lors que l'on projette dans R_0, on trouve la relation extrinsèque. $\overrightarrow{O_0O_7}_{(0)} = \overrightarrow{O_0O_6}_{(0)} + \overrightarrow{O_6O_7}_{(0)}$

⚠ $\overrightarrow{O_6O_7}_{(6)} = \begin{bmatrix} d_1 \\ 0 \\ d_2 \end{bmatrix} \Rightarrow$ Pour calculer $\overrightarrow{O_6O_7}_{(0)}$ on a besoin de T_{06} !

Autre solution :

En coordonnées homogènes :

$$\begin{bmatrix} \overbrace{\overrightarrow{O_0 O_7}(0)}^{\text{Coordonnées de } O_7 \text{ dans } R_0} \\ 1 \end{bmatrix} = T_{06} \begin{bmatrix} \overbrace{\overrightarrow{O_6 O_7}(6)}^{\text{Coordonnées de } O_7 \text{ dans } R_6} \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & L \\ 1 & 0 & 0 & H \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} d_1 \\ 0 \\ d_2 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ d_2 + L \\ d_1 + H \\ 1 \end{bmatrix}$$

Situation de l'organe terminal

$$x = \begin{pmatrix} x_p \\ x_R \end{pmatrix}$$

cosinus directeurs partiel

avec $x_R = \begin{bmatrix} \overrightarrow{x_6}(0) \\ \overrightarrow{y_6}(0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$

et $x_p = \begin{bmatrix} 0 \\ d_2 + L \\ d_1 + L \end{bmatrix}$