Méthode de Newton

08/09/2022

Exemple : $f(x) = \frac{1}{2} x_1^2 + \frac{1}{4} x_2^4 - \frac{1}{2} x_2^2$

$$\nabla f(x) = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2^3 - x_2 \end{bmatrix} \qquad \nabla^2 f(x) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3x_2^3 - 1 \end{bmatrix}$$

$$[\nabla^2 f(x)]^{-1} = \frac{1}{3x_2^3 - 1} \begin{bmatrix} 3x_2^3 - 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

On choisit le point de départ $X_0 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$

$$X_1 = X_0 - [\nabla^2 f(X_0)]^{-1} \nabla f(X_0)$$
$$= \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

rappel : Il s'agit un point selle d'après l'exercice précédent

$$X_2 = X_1 - [\nabla^2 f(X_1)]^{-1} \nabla f(X_1)$$
$$= \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Autre point de départ : $X_0 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$

$$X_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} - \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

rappel : on a trouvé un minimum local

$$X_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} - \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Remarque : Ce sont des méthodes locales !

Méthode de quasi-Newton (zéro d'une fonction)

Rappel : Soit $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ on peut calculer le gradient $\nabla f = \begin{bmatrix} \frac{\partial f}{\partial x_1} \\ \vdots \\ \frac{\partial f}{\partial x_n} \end{bmatrix}$

Soit $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ on a $\underline{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \longmapsto \begin{bmatrix} f_1(\underline{x}) \\ \vdots \\ f_m(\underline{x}) \end{bmatrix}$

on peut calculer la matrice Jacobienne

$$A = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ & & \vdots & \\ \frac{\partial f_m}{\partial x_1} & & \cdots & \frac{\partial f_m}{\partial x_n} \end{bmatrix} \begin{matrix} \longrightarrow \nabla f_1(\underline{x}) \\ \\ \longrightarrow \nabla f_m(\underline{x}) \end{matrix}$$

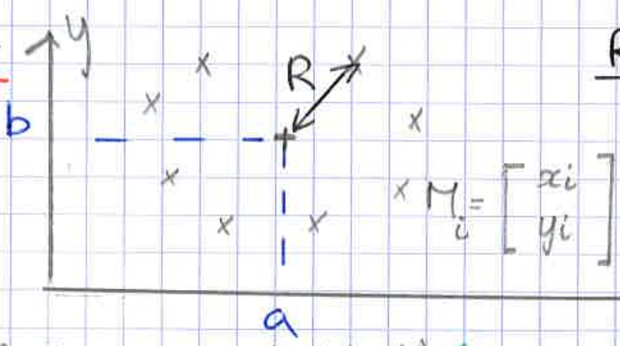
$(m \times n)$

III. Moindres Carrés

$$\min f(x) = \frac{1}{2} \left(r_1^2(x) + r_2^2(x) + \cdots + r_m^2(x) \right)$$

On construit $r(x) = \begin{bmatrix} r_1 \\ \vdots \\ r_m \end{bmatrix}$

Exercice :



y

Remarque : Certes l'équation du cercle n'est pas linéaire mais le modèle est linéaire par rapport aux paramètres => on peut appliquer MCL

Considérons m mesures $(x_i ; y_i)$

$y_{mod} = a^2 x_i + b^2 y_i - R^2 = 0$ ✗ équation du cercle $(x_i - a)^2 + (y_i - b)^2 = R^2$

=> Pour chaque mesure $r_i = R^2 - (x_i^2 + a^2 - 2x_i a) - (y_i^2 + b^2 - 2y_i b)$

$$Y_{MOD} = \begin{bmatrix} a^2 x_1 + b^2 y_1 - R^2 \\ \vdots \\ a^2 x_m + b^2 y_m - R^2 \end{bmatrix}$$

On souhaite minimiser

$$\min f(x) = \frac{1}{2} (r_1^2 + r_2^2 + \cdots + r_m^2)$$

$$Y_{MOD} = \begin{bmatrix} x_1 & y_1 & -1 \\ & \vdots & \\ x_m & y_m & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \\ R \end{bmatrix}$$

ϕ

P ✗ sinon le modèle n'est pas linéaire par rapport aux paramètres.

On choisit le vecteur de paramètre $X = \begin{bmatrix} a^2 \\ b^2 \\ R^2 \end{bmatrix}$ (avec la notation de ce cours)

Problématique Écrire $r(x) = Ax - b$

$$r_i = R^2 - a^2 - b^2 + 2x_i a + 2y_i b - x_i^2 - y_i^2$$

$$= \underbrace{\begin{bmatrix} 2x_i & 2y_i & 1 \end{bmatrix}}_{a_i} \underbrace{\begin{bmatrix} a \\ b \\ R^2 - a^2 - b^2 \end{bmatrix}}_{x} - \underbrace{\begin{bmatrix} x_i^2 + y_i^2 \end{bmatrix}}_{b_i}$$

$$R = \underbrace{\begin{bmatrix} 2x_1 & 2y_1 & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ 2x_m & 2y_m & 1 \end{bmatrix}}_{A} \underbrace{\begin{bmatrix} a \\ b \\ R^2 - a^2 - b^2 \end{bmatrix}}_{x} - \underbrace{\begin{bmatrix} x_1^2 + y_1^2 \\ \vdots \\ x_m^2 + y_m^2 \end{bmatrix}}_{b}$$

III. 2. Moindres Carrés non linéaires

Méthode de Gauss-Newton

Direction de Gauss-Newton : $-(J_k^t J_k)^{-1} \cdot J_k^t r_k$

Exemple : Soit $f(x,y) = \frac{1}{2}[(x^2 - y)^2 + (1-x)^2]$

Trouver le minimum $\min f(x,y)$ par la méthode de Gauss-Newton.

Écriture sous forme d'une somme de résidus :

$f(x,y) = \frac{1}{2}[x^4 - 2x^2y + y^2 + 1 - 2x + x^2] = \frac{1}{2}[x^4 - 2x^2y + x^2 + y^2 - 2x + 1]$

On souhaite $f = \frac{1}{2}(r_1^2 + r_2^2) \Rightarrow \begin{cases} r_1 = (x^2 - y) \\ r_2 = (1 - x) \end{cases}$

Écriture du gradient des résidus :

$\nabla r_1 = \begin{bmatrix} 2x \\ -1 \end{bmatrix}$ $\quad \nabla r_2 = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \end{bmatrix}$ $\quad$ N.B. la dérivée seconde est nulle pour $\nabla^2 r_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ et petite pour $\nabla r_1 = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$

Calcul de la matrice Hessienne

$J(x) = \begin{bmatrix} 2x & -1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \nabla f(x) = J(x)^t \cdot r(x)$

$$= \begin{bmatrix} 2x & -1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x^2 - y \\ 1 - x \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 2x^3 - 2xy + x - 1 \\ y - x^2 \end{bmatrix} \Rightarrow \text{ok}$$

Solutions des vraies matrices :

Le gradient vaut :

$$\nabla f(x) = \begin{bmatrix} 2x^3 - 2xy + x - 1 \\ y - x^2 \end{bmatrix}$$

La matrice Hessienne vaut :

$$\nabla^2 f(x,y) = \begin{bmatrix} 6x^2 - 2y + 1 & -2x \\ -2x & 1 \end{bmatrix}$$

On approxime $\nabla^2 f(x) = J^t(x) J(x)$

$$= \begin{bmatrix} 4x^2 + 1 & -2x \\ -2x & 1 \end{bmatrix}$$ => approximation de la vraie matrice Hessienne