21/11/2022

V. Programmation Linéaire

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n \leq b_1$$
$$\vdots$$
$$a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots a_{nm}x_m \leq b_m$$

Ainsi $A = \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nm} \end{bmatrix} x \leq \begin{bmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}$

Exemple - Utilisation de dictionnaire (diapo 68)

Les variables de décision sont $\begin{cases} x_1 \text{ par les cendriers} \\ x_2 \text{ par les bols} \\ x_3 \text{ par les cruches} \\ x_4 \text{ par les vases} \end{cases}$

Les variables d'écarts sont $\begin{cases} x_5 \text{ pour le malaxage} \\ x_6 \text{ par la cuisson} \\ x_7 \text{ par la peinture} \end{cases}$

$$\begin{cases} x_5 = 42 - 2x_1 - 4x_2 - 5x_3 - 7x_4 \\ x_6 = 17 - x_1 - x_2 - 2x_3 - 2x_4 \\ x_7 = 24 - x_1 - 2x_2 - 3x_3 - 3x_4 \\ \hline Z = 0 + 7x_1 + 9x_2 + 18x_3 + 17x_4 \end{cases}$$

Notons que $X = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 42 \\ 17 \\ 24 \end{bmatrix}$ est une solution de base admissible

x_3 a le plus gros coefficient de profit. On choisit donc de le faire rentrer en base.

Si on augmente x_3 alors les variables d'écarts diminuent jusqu'à ce qu'il y en ait une qui passe à 0. On cherche $x_i = \text{Argmin}\left(\dfrac{b_i}{a_{i3}}\right)$

$= \text{Argmin}\left(\dfrac{42}{5} \,;\, \dfrac{17}{2} \,;\, \dfrac{24}{3}\right) = \text{Argmin}\begin{pmatrix} 8{,}4 \,; & 8{,}5 \,; & \boxed{8} \\ x_5 & x_6 & \boxed{x_7} \end{pmatrix}$

$= x_7$

x_7 sort de la base

On a alors :
$$\begin{cases} x_7 = 8 - \frac{1}{3}x_1 - \frac{2}{3}x_2 - x_4 + \frac{1}{3}x_7 \\ x_6 = 1 - \frac{1}{3}x_1 + \frac{1}{3}x_2 + 0x_4 + \frac{2}{3}x_7 \\ x_5 = 2 - \frac{1}{3}x_1 - \frac{2}{3}x_2 - 2x_4 + \frac{5}{3}x_2 \\ \hline J = 144 + x_1 - 3x_2 - x_4 - 6x_7 \end{cases}$$

On fabrique 8 cruches (0 pour les autres) et le profit est de 144.

On peut augmenter le profit en augmentant x_1.

$x_i = \text{Argmin}\left(\dfrac{b_i}{a_{i1}}\right) = \text{Argmin} = \left(\dfrac{8}{1/3} \,;\, \dfrac{1}{1/3} \,;\, \dfrac{2}{1/3}\right) = x_6$

sort de la base.

$$\begin{cases} x_1 = 3 + x_2 - 3x_6 + 2x_7 \\ x_5 = 1 - x_2 - 2x_4 + x_6 + x_7 \\ x_3 = 7 - x_2 - x_4 + x_6 - x_7 \\ \hline J = 147 - 2x_2 - x_4 - 3x_6 - 4x_7 \end{cases}$$

Tous les coefficients du profit sont négatifs $\Rightarrow$ on a trouvé la solutions optimale $x^* = \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \\ 7 \\ 0 \end{bmatrix}$ soit 3 cendriers

0 bol

7 cruches

0 vase