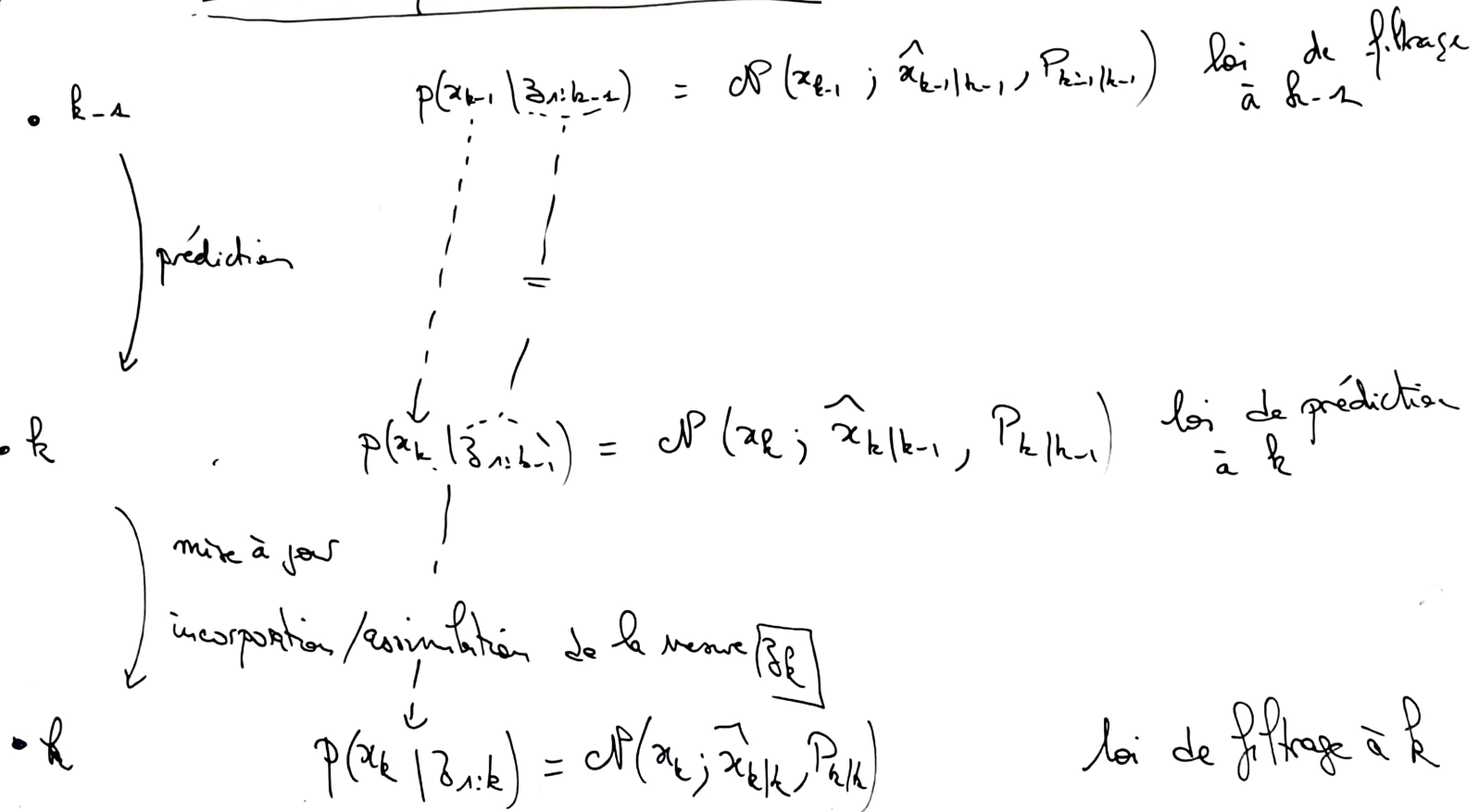


### III Application au filtrage Bayésien

#### III.1. Les équations récurrentes exactes



\* Cas général :

•  $k-1$   $p(x_{0:k-1} | z_{1:k-1})$  loi jointe de filtrage  
à  $k-1$

préd°



$$p(\underline{x_{0:k}} | z_{1:k-1}) = \underline{p(x_k | x_{k-1})} \underline{p(x_{0:k-1} | z_{1:k-1})}$$

•  $k$   $p(x_{0:k} | z_{1:k-1})$  loi jointe de préd  
à  $k$

MAI  
incorporat° de  $z_k$   
asympt°



$$p(\underline{x_{0:k}} | z_{1:k}) = \frac{p(z_k | \underline{x_{0:k}}) p(\underline{x_{0:k}} | z_{1:k-1})}{p(z_k | \underline{z_{1:k-1}})} \quad (\text{Bayes})$$

•  $k$   $p(x_{0:k} | z_{1:k})$  loi jointe de filtrage  
à  $k$

\* Lois marginales

• loi marginale de prédiction

$$\left( \int p(x_{0:k} | z_{1:k-1}) dx_0 \dots dx_{k-1} = \right)$$

$$p(x_k | z_{1:k-1}) = \int p(x_k | x_{k-1}) p(x_{k-1} | z_{1:k-1}) dx_{k-1}$$

eq de Chapman-Kolmogorov

• loi marginale de filtrage

$$\left( \int p(x_{0:k} | z_{1:k}) dx_0 \dots dx_{k-1} = \right)$$

$$p(x_k | z_{1:k}) = \frac{p(z_k | x_k) p(x_k | z_{1:k-1})}{p(z_k | z_{k-1})}$$

$\bullet z_k = F_k x_{k-1} + G_k u_k + w_k \quad \hookrightarrow p(x_k | z_k) = \mathcal{N}(x_k; F_{k|k}, Q_{k|k})$

$\nearrow N(0, Q_k)$

$p(x_{k-1} | z_{k-1}) = \mathcal{P}(x_{k-1}; \hat{x}_{k-1|k-1}, P_{k-1|k-1}) = \frac{1}{\sqrt{|2\pi P_{k-1|k-1}|}} \exp\left[-\frac{1}{2} (x_{k-1} - \hat{x}_{k-1|k-1})^T P_{k-1|k-1}^{-1} (\Delta)\right]$

et  
[so]  $d x_{k-1}$  peut être réorganisé en  $\mathcal{P}(x_k; \hat{x}_k | k-1, P_k | k-1)$

[so]  $= \frac{1}{\sqrt{|2\pi [P_k | k-1]|}} \exp\left[-\frac{1}{2} (x_k - [\hat{x}_k | k-1])^T [P_k | k-1]^{-1} (\Delta)\right]$

$$\left[ \begin{aligned} & \cdot z_k = H_k x_k + v_k \leftarrow \mathcal{N}(0, R_k) \\ & \cdot p(z_k | x_k) = \mathcal{N}(z_k; H_k x_k, R_k) = \frac{1}{\sqrt{|2\pi R_k|}} \exp\left(-\frac{1}{2} (z_k - H_k x_k)^T R_k^{-1} (\Delta)\right) \end{aligned} \right]$$

$$\left[ \begin{aligned} & \cdot p(x_k | z_{1:k-1}) = \text{?} \\ & \cdot p(z_k | z_{1:k-1}) = \frac{1}{\sqrt{|2\pi (R_k + H_k P_{k|k-1} H_k^T)|}} \exp\left(-\frac{1}{2} (z_k - H_k \hat{x}_{k|k-1}) (\underline{R_{k+...}})^{-1} (\Delta)\right) \end{aligned} \right]$$

or identify  $\frac{p(z_k | x_k)}{(\Delta)} \hat{=} \mathcal{N}(x_k; \hat{x}_{k|k}, P_{k|k})$   
 (5)

$$* \underbrace{p(x_{0:k} | z_{1:k})} \approx \hat{p}_N(x_{0:k} | z_{1:k}) := \sum_{i=1}^N w_{0:k}^{(i)}$$

poids  $\in \mathbb{R}$   
tg

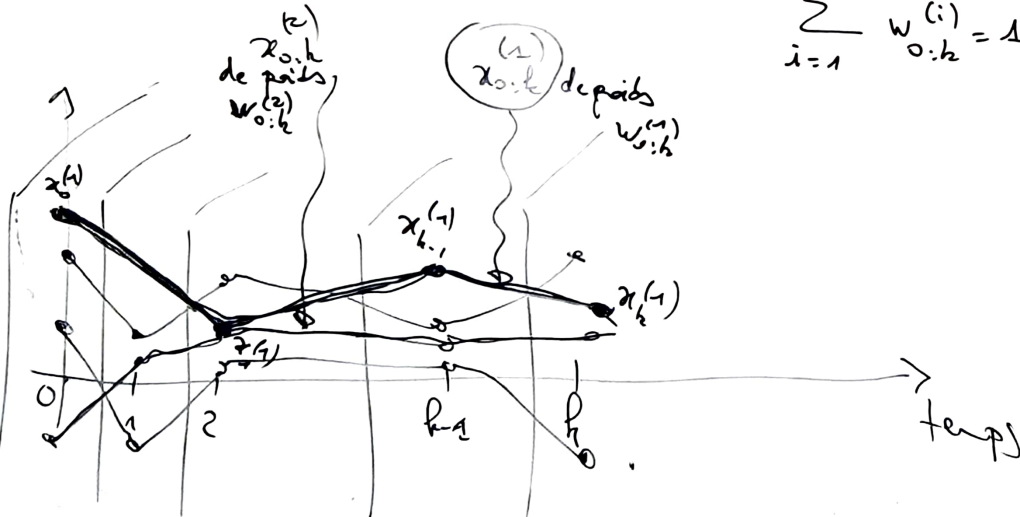
$$\sum_{i=1}^N w_{0:k}^{(i)} = 1$$

$$\delta(x_{0:k} \rightarrow \textcircled{x_{0:k}^{(i)}})$$

particules  $\{x_{0:k}^{(1)} \dots x_{0:k}^{(N)}\}$   
=

hypothèses de trajectoires

$$x_{0:k}^{(n)} = x_0^{(n)}, a_1^{(n)}, \dots, a_k^{(n)}$$



$$* p(x_k | z_{1:k}) \approx \hat{p}_N(x_k | z_{1:k})$$

$$= \int \hat{p}_N(x_{0:k} | z_{1:k}) dx_0 \dots dx_k$$

$$:= \sum_{i=1}^N w_k^{(i)} \delta(x_k - x_k^{(i)}) \quad \text{doit être égal à}$$

$$\sum_{i=1}^N w_{0:k}^{(i)} \delta(x_{0:k} - x_{0:k}^{(i)}) \quad \text{doit être égal à}$$

$$p(x_k | z_k) \text{ ou } \delta(x_{0:k} - x_{0:k}^{(i)})$$

$$\delta(x_0 - x_0^{(i)}) \delta(x_1 - x_1^{(i)}) \dots \delta(x_{k-1} - x_{k-1}^{(i)}) \delta(x_k - x_k^{(i)})$$

$$\sum_{i=1}^N w_{0:k}^{(i)} \left[ \int \delta(x_0 - x_0^{(i)}) dx_0 \right] \dots \left[ \int \delta(x_{k-1} - x_{k-1}^{(i)}) dx_{k-1} \right] \delta(x_k - x_k^{(i)})$$

$$p(x_k | z_{1:k}) \approx \hat{p}_N(x_k | z_{1:k})$$

$$= \sum_{i=1}^N w_k^{(i)} \delta(x_k - x_k^{(i)})$$

avec

$x_k^{(i)}$  dernier élément de  $x_{0:k}^{(i)}$

$$w_k^{(i)} = w_{0:k}^{(i)}$$

$$\sum_{i=1}^N w_{0:k}^{(i)} \delta(x_k - x_k^{(i)})$$

→ Dans les grandes lignes,

$$x_{0:k-1}^{(i)} \sim q(x_{0:k-1} | z_{1:k-1}) \text{ loi d'importance choisie}$$

$$w_{0:k-1}^{(i)} \propto \frac{p(x_{0:k-1}^{(i)} | z_{1:k-1})}{q(x_{0:k-1}^{(i)} | z_{1:k-1})}$$

et

$$x_{0:k}^{(i)} \sim q(x_{0:k} | z_{1:k})$$

$$w_{0:k}^{(i)} \propto \frac{p(x_{0:k}^{(i)} | z_{1:k})}{q(x_{0:k}^{(i)} | z_{1:k})}$$

$$\text{avec } [p(\cdot | \cdot) > 0] \Rightarrow [q(\cdot | \cdot) > 0]$$

et, pour obtenir un schéma récursif,  $q(x_{0:k} | z_{1:k})$  de la forme

$$q(x_k | x_{0:k-1}, z_{1:k}) q(x_{0:k-1} | z_{1:k-1})$$



cette hypothèse permet,  
disposant de  $\{x_{0:k-1}^{(i)}\} \sim q(x_{0:k-1} | z_{1:k-1})$   
d'obtenir

$x_{0:k}^{(i)}$  tel que  $x_{0:k}^{(i)} = \underline{x_{0:k-1}^{(i)}} , x_k^{(i)}$

où :  $x_{0:k-1}^{(i)}$  hérite de l'échant<sup>o</sup> d'importance

$\tilde{u}_{k-1}$  ;  $x_k^{(i)} \sim q(x_k | x_{0:k-1}^{(i)}, z_{1:k})$

De plus, on montre que sous cette hypothèse,  
 les poids  $\{w_{0:k}^{(i)}\}$  associés aux particules trajectoires  $\{x_{0:k}^{(i)}\}$   
 s'écrivent

$$w_{0:k}^{(i)} \propto w_{0:k-1}^{*(i)} \frac{p(z_k | x_k^{(i)}) p(x_k^{(i)} | x_{k-1}^{(i)})}{q(x_k^{(i)} | x_{0:k-1}^{(i)}, z_{1:k})}$$

préalablement à la renormalisation

$$w_{0:k}^{(i)} = \frac{w_{0:k}^{*(i)}}{\sum_{l=1}^N w_{0:k}^{*(l)}}$$

→ Note: généralement,  $q(x_k | x_{0:k-1}, z_{1:k})$  est en fait  $q(x_k | x_{k-1}, z_k)$   
 (on échantillonne chaque  $x_k^{(i)}$  sur la base de  $x_{k-1}^{(i)}$  et  $z_k$  sans remonter plus loin dans le passé)