D. Paucelle 12/09/2022

Ressources 1 : yalmip.github.io/download/

Rappel : Inégalités matricielles linéaires LMI :

$\exists P > \varepsilon_2 \mathbb{I}$, $\forall v = 1 \dots \bar{v}$

Si $A^{[v]T}P + PA^{[v]} < -\varepsilon_2 \mathbb{I}$ alors le système $\dot{x} = A(t)x(t)$

est robustement stable $\forall A(t) \in Co\{A^{[v]}\} \Leftrightarrow \hat{P} \geqslant \mathbb{I}$, $A^{[v]T}\hat{P}^{-1} + \hat{P}^{-1}A^{[v]} \leqslant -\mathbb{I}$

Solver YALMIP :

Après avoir dézipé les Toolbox > Set Path > choisir le dossier

N.B : A refaire à chaque TP car pas de droit en écriture à l'université pour un compte étudiant

Permet d'écrire les problème en langage naturel

Ressource 2 : github.com/SQLP/SDPT3 ou blog.nus.edu.sg/mattohkc/softwares/sdpt3

Après avoir dézipé > Lire le README > Faire un Make dans le dossier

Dans Matlab > Set Path > Choisir le dossier

Permet de résoudre le problème ci-dessus

Si le solver trouve une solution alors c'est qu'elle existe

Si le solveur ne trouve pas alors il présente la preuve de sa non existence

Résolution avec Matlab : (code dans la boîte mail)

```
A(:,:,1) = [0 1; -49 -21];   % définition des sommets du
A(:,:,2) = [0 1; -49 -3];    %       polytope
A(:,:,3) = [0 1; -9 -3];
A(:,:,4) = [0 1; -9 -21];
```

Rappel : 1 point du polytope est si $\xi_v \geqslant 0$ $\sum \xi_v = 1$

$A(t) = \sum \xi_v A^{[v]}$

```
%% choix d'un point dans le polytope
Z = rand(1,4);   % rand a un résultat compris entre 0 et 1
  Z = Z/sum(Z)   % ||Z|| = 1
  AZ = Z(1)*A(:,:,1) + Z(2)*A(:,:,2) + Z(3)*A(:,:,3) + Z(4)*A(:,:,4)
eig(AZ)   % on trouve des vp donnant un matrice du polytope stable
```

11

```
%% Construction des LMI pour le polytope
P = sdpvar(2,2,'symetric') % langage "créer une matrice 2x2 symétrique"
quiz = [P>=eye(2)] % P doit être ≥ I2 (pas d'inégalité stricte !)
for v= 1 : 4
    quiz = + [A(:,:v)'* P+ P*A(:,:,v)<=eye(2)];
end
```

↑ ajout des contraintes

```
%% Resolution
res = optimize(quiz)

%% Analyse du résultat
checkset(quiz) % vérifie que la solution vérifie les contraintes
%% si faisable obtention du resultat
double(P)
```

Pour l'exemple de la page 7 : • Pas de solutions avec le polytope P_1.

• Solution avec le polytope P_2

$$\begin{bmatrix} 5{,}52 & 3{,}44 \\ 3{,}44 & 2{,}47 \end{bmatrix}$$

Notion de normes :

$\bar{x}$ conjugué

$\bar{x}^T = x^*$ transposé conjugué

. Soit $x \in \mathbb{C}^n$ on peut définir plusieurs normes :

① Norme euclidienne $\|x\|_2^2 = \sum_i |x_i|^2 = x^* x$

$$= x^* \mathbb{I}\, x$$

. Soit $M \in \mathbb{C}^{p\times m}$ servant d'application linéaire $y = Mu$

② Norme L2 $\|M\|_2^2 = \sup \left\{ \dfrac{\|y\|_2^2}{\|u\|_2^2} \right\}_{\|u\|_2 \neq 0}$ aussi appelée norme induite

Exemple : Considérons $M = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$

Avec $u = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ norme de u $\|u\|^2 = 1$

Calcul $y = Mu = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ sa norme est de $\|y\|^2 = 2$

On s'aperçoit que $\|M\|_2^2 \geq 2$ (il faut tester tous les signaux

Avec $u = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix}$ on a $y = Mu = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \to \|M\|_2^2 \geq 0$

Avec $u = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ on a $y = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \end{bmatrix}$ d'où $\|y\|^2 = 8$

calcul de la norme de u, $\|u\|^2 = 2$

On en déduit que $\|M\|_2^2 \geq 4$

Astuce : $\dfrac{\|y\|^2}{\|u\|^2} = \dfrac{u^* M^* M u}{u^* u}$ et u est diagonalisable dans une base orthonormale

donc $\dfrac{\|y\|^2}{\|u\|^2} = \dfrac{u^* T^* D T u}{u^* u}$ avec $\begin{cases} T^* T = I \\ D = \mathrm{diag}\left[\lambda(M^* M)\right] \end{cases}$ valeurs propres λ

La pire des amplifications est donnée par $\lambda_{MAX}(M^* M)$. On la notera $\bar{\sigma}(M)^2$, la valeur singulière maximale de M.

$\|M\|_2^2 = \bar{\sigma}(M)^2$

Retour à l'exemple : $M^* M = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}$

$$\begin{cases} \det[M^* M] = 0 = \lambda_1 \lambda_2 \\ \mathrm{Tr}(M^* M) = 4 = \lambda_1 + \lambda_2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \lambda_1 = 0 \\ \boxed{\lambda_2 = 4} \end{cases}$$

Soit un signal $t \longmapsto x(t) \in \mathbb{C}^n$

$s \longmapsto X(s) \in \mathbb{C}^n$ en Laplace, $X(s) = \int_0^\infty x(t) e^{-st} dt$

③ Norme L_2 : $\|x\|_2^2 = \int_0^\infty \|x(t)\|_2^2 dt = \int_{-\infty}^{+\infty} \|X(j\omega)\|_2^2 d\omega = \|X\|_2^2$

d'après Parseval

Soit un système H $\begin{cases} \dot{x} = f(x, u) \\ y = g(x, u) \end{cases}$

④ Norme induite L_2 : $\|H\|_2^2 = \sup_{\substack{\|u\|_2 \neq 0 \\ x(0) = 0}} \left\{ \dfrac{\|y\|_2^2}{\|u\|_2^2} \right\}$

Soit un système linéaire temps invariant (LTI)

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + Bu \\ y = Cx + Du \end{cases} \xrightarrow[x(0)=0]{\mathcal{L}} \begin{cases} sX = Ax + Bu \\ (sI - A)X = Bu \end{cases} \Leftrightarrow X = (sI - A)^{-1} Bu$$

$$Y(s) = \underbrace{\left[D + C(sI - A)^{-1}B\right]}_{H(s)} U(s)$$

$$\|H\|_2^2 = \sup_{\omega \in \mathbb{R}} \|H(j\omega)\|_2^2 = \sup_{\omega \in \mathbb{R}} \bar{\sigma}^2(H(j\omega))$$

$$= \sup_{\omega \in \mathbb{R}} \lambda_{max}\left[H^*(j\omega)H(j\omega)\right]$$

$$= \|H\|_\infty^2 \quad \text{norme H-infini}$$

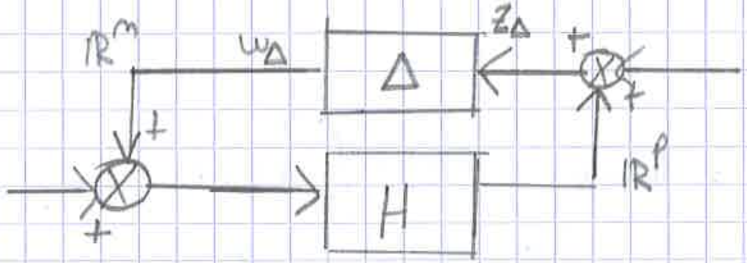
⚠ uniquement pour les systèmes LTI !

<u>Exemple :</u> Soit le système LTI MIMO (cf. code dans la boîte mail)

```
H=ss;
H.A = [-.1 -1 0; -0.1 0 0; 0 -0.1 3; 0 0 -3 -0.1];
H.B = [1 0 0.1; 0 1 0; 1 0 1; 0 0.1 0];
H.C = [1 0 0 0; 0 1 0 0; 0 0 1 0]
sigma(H)   % Trace les valeurs singulières dans le plan de Bode
[wcg, wcu] = wcgain(H)   % Worst Case Gain (pire des gains)
```

Théorème du petit gain

Condition suffisante : Si $\|H\|_2^2 < \gamma^2$ alors la boucle fermée suivante

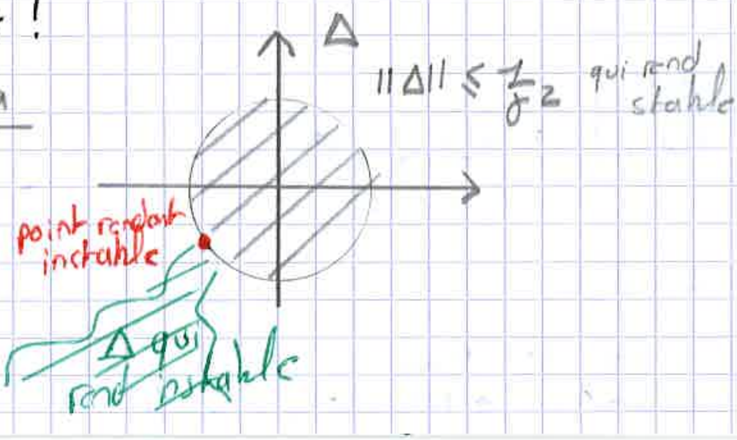


est robustement stable $\forall \Delta$, $\|\Delta\|_2^2 \leq \frac{1}{\gamma^2}$

Condition nécessaire : Si $\|H\|_2^2 = \gamma^2$ alors $\exists \Delta$; $\|\Delta\|_2^2 = \frac{1}{\gamma^2}$ tel que la boucle est "instable" (en limite de stabilité)

⚠ Cela NE signifie <u>PAS QUE</u> $\forall \Delta$; $\|\Delta\| \geq \frac{1}{\gamma^2}$ la boucle fermée est instable !

<u>Schéma</u>



14

Retour à l'exemple

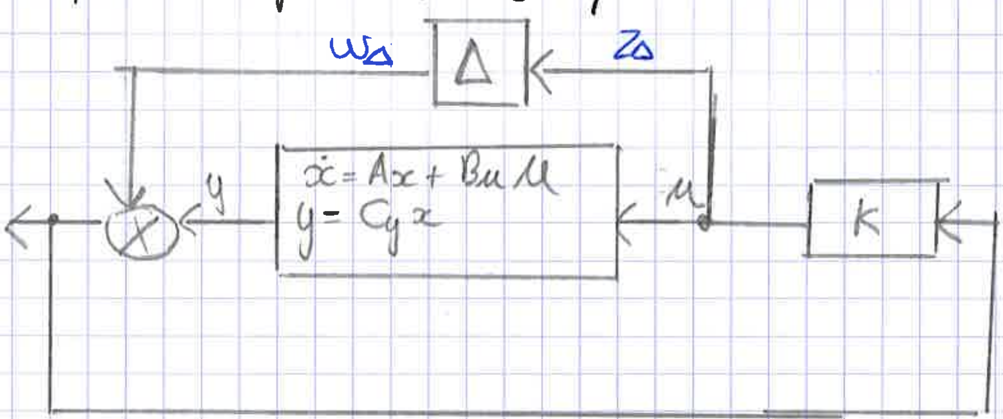
Hjone = evalfr(H;

cf. code MATLAB

```
%% Condition suffisante du Th Petit Gain
D=rand(3,3);
D = D/norm(D,2)          ← décalage pour l'inégalité
D = 1/(norm(H,inf)+0.001)*D;
norm(D)
pole(feedback H,-D)   feedback fait une retour négatif par défaut

%% Condition nécessaire
[U,S,V] = svd(Hjone)   % décomposition pour le changement de base
Dwc(:1)*V(:,1)/norm(H,inf)   % sélection du vecteur propre dans la pire des situation (wc = worst case)
norm(Dwe)
pole(feedback(H,-Dwc))   % affiche un pôle proche d'une partie réelle nulle (limite de stabilité)
```

Exemple: Soit un système où $A \in C_0 \{ A^{[1]}; A^{[2]} \}$ et une dynamique incertaine Δ venant s'ajouter au système $\|\Delta\|_2^2 \leq \mu^2$



Le système est asservi avec un controleur de gain K

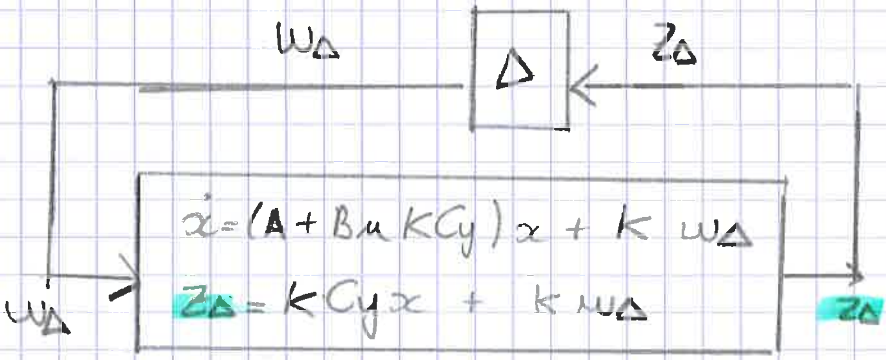
On souhaite étudier la stabilité

Etape 1: Nommer les signaux z_Δ et w_Δ

Etape 2: Mettre sous la forme d'une interconnection pour appliquer le Petit Gain

Remarquons que $\begin{cases} u = k(y + w_\Delta) = kC_y x + k w_\Delta \\ z_\Delta = u \end{cases}$

Ainsi,



⚠ On ne peut pas passer en fonction de transfert car A varie dans le temps

Etape 3 : Ecrire le Théorème du Petit Gain

Si $\|H\|_2^2 < \frac{1}{\rho^2}$ alors le système est robustement stable

Théorème : Si $\exists\ P \succ 0$ tel que $\forall\ v = 1, \dots, \bar{v}$

$$\begin{bmatrix} A^{[v]T} P + P A^{[v]} & P B_\Delta \\ B_\Delta^T P & -\gamma^2 I \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} C_\Delta^T \\ D_{\Delta\Delta}^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C_\Delta & D_{\Delta\Delta} \end{bmatrix} < 0 \qquad (1)$$

alors $\frac{\|z_\Delta\|^2}{\|w_\Delta\|^2} < \gamma^2$ pour le système $\begin{cases} \dot{x} = A(t) x + B_\Delta w_\Delta \\ z_\Delta = C_\Delta x + D_{\Delta\Delta} w_\Delta \end{cases}$

avec $A(t) \in Co\{A^{[1]}, \dots, A^{[\bar{v}]}\}$

entrée en Δ et sortie en Δ

Démonstration

(1) est vraie pour tous les sommets $\sum_{v=1}^{\bar{v}} (1) < 0$

$$= \begin{bmatrix} A^T(t) P + P A(t) & P B_\Delta \\ B_\Delta^T P & -\gamma^2 I \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} C_\Delta^T \\ D_{\Delta\Delta}^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C_\Delta & D_{\Delta\Delta} \end{bmatrix} < 0$$

$\forall\ A(t) \in \{A^{[v]}\}$

$$= \begin{bmatrix} x^T & w_\Delta^T \end{bmatrix} \left(\begin{bmatrix} A^T(t) P + P A(t) & P B_\Delta \\ B_\Delta^T P & -\gamma^2 I \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} C_\Delta^T \\ D_{\Delta\Delta} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C_\Delta & D_{\Delta\Delta} \end{bmatrix} \right) \begin{bmatrix} x^T \\ w_\Delta^T \end{bmatrix}$$

< 0

$$\Leftrightarrow \; x^T P \left[A^{(t)} + B_\Delta w_\Delta(t) \right] - \gamma^2 w_\Delta^T w_\Delta(t) + z_\Delta^T(t) z_\Delta(t) < 0$$
$$+ (Ax + B_\Delta w_\Delta)^T P x(t)$$

$$\frac{dV}{dt}(t) - \gamma^2 \| w_\Delta(t) \|^2 + \| z_\Delta(t) \|^2 < 0$$

<u>La norme d'un signal</u> $\displaystyle \int_t^{\bar{t}} \frac{dV}{dt}(t) + \| z_\Delta(t) \|^2 < \gamma^2 \| w_\Delta(t) \|^2 \, dt$

$$\underbrace{V(\bar{t})}_{\geqslant 0} - \underset{0}{\underset{\shortparallel}{V(0)}} + \int_t^{\bar{t}} \| z_\Delta(t) \|^2 dt < \gamma^2 \int_0^{\bar{t}} \| w_\Delta(t) \|^2 dt$$

$$\Leftrightarrow \| z_\Delta \|^2 < \gamma^2 \| w_\Delta \|^2 \Leftrightarrow (1)$$