$$\boxed{\text{Preuve : } J = \Lambda J_i}$$

On a montré dans le cours que : $\vec{\alpha}_k = \vec{\beta}_k + \bar{\bar{\tau}}_k \vec{z}_k \wedge \vec{O_iO_m}$

On pose (pour alléger les notations) : $\vec{O_iO_m} = \vec{p}_{im}$

Il vient : $\vec{\alpha}_k = \vec{\beta}_k + \bar{\bar{\tau}}_k \vec{z}_k \wedge \vec{p}_{im}$

$= \vec{\beta}_k - \bar{\bar{\tau}}_k \vec{p}_{im} \wedge \vec{z}_k$

$= \vec{\beta}_k - \bar{\bar{\tau}}_k \hat{P} \vec{z}_k$ où $\hat{P}$ est appelée matrice de préproduit vectoriel : elle "transforme" les produits vectoriels en produits matriciels. Elle se construit directement à partir de $\vec{p}_{in}$ selon la formule indiquée dans le cours. Soient 2 vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ dont on veut calculer le produit vectoriel : $\vec{u} \wedge \vec{v} = \hat{U}\vec{v} = -\vec{v} \wedge \vec{u} = -\hat{V}\vec{u}$ où $\hat{U}$ et $\hat{V}$ sont calculées avec la formule du cours.

$\Rightarrow$ On vient de montrer que : $\vec{\alpha}_k = \vec{\beta}_k - \bar{\bar{\tau}}_k \hat{P} \vec{z}_k$. $\vec{\alpha}_k$ peut donc se ré-écrire comme suit :

$\hookrightarrow \vec{\alpha}_k = \begin{pmatrix} I & -\hat{P} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \vec{\beta}_k \\ \bar{\bar{\tau}}_k \vec{z}_k \end{pmatrix}$

De même, nous avons :

$\hookrightarrow \bar{\bar{\tau}}_k \vec{z}_k = \begin{pmatrix} 0 & I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \vec{\beta}_k \\ \bar{\bar{\tau}}_k \vec{z}_k \end{pmatrix}$

$$\Rightarrow \underbrace{\begin{pmatrix} \vec{\alpha}_k \\ \bar{\bar{\tau}}_k \vec{z}_k \end{pmatrix}}_{\text{Colonne de } J} = \overbrace{\begin{pmatrix} I & -\hat{P} \\ 0 & I \end{pmatrix}}^{\Lambda} \underbrace{\begin{pmatrix} \vec{\beta}_k \\ \bar{\bar{\tau}}_k \vec{z}_k \end{pmatrix}}_{\text{Colonne de } J_i}$$

Nous venons donc d'exprimer une colonne de J en fonction de celle de J_i et en faisant apparaître Λ. Nous pouvons alors affiner les écritures :

Si l'on pose : $C_k = \begin{pmatrix} \vec{\alpha}_k \\ \bar{\bar{\tau}}_k \vec{z}_k \end{pmatrix}$ et $D_k = \begin{pmatrix} \vec{\beta}_k \\ \bar{\bar{\tau}}_k \vec{z}_k \end{pmatrix}$

Alors chaque colonne C_k de J s'écrit comme suit en fct de la colonne D_k de J_i : $C_k = \Lambda D_k$. Et de plus :

$J = \begin{pmatrix} C_1 & C_2 & \dots & C_n \end{pmatrix}$ puisque $J = \begin{pmatrix} \vec{\alpha}_1 & \dots & \vec{\alpha}_n \\ \bar{\bar{\tau}}_1 \vec{z}_1 & \dots & \bar{\bar{\tau}}_n \vec{z}_n \end{pmatrix}$

$\Rightarrow J = \begin{pmatrix} \Lambda D_1 & \Lambda D_2 & \dots & \Lambda D_n \end{pmatrix} \quad (1)$

On peut alors factoriser par Λ à gauche de l'équation (1) et il vient :

$$J = \Lambda \underbrace{\begin{pmatrix} D_1 & D_2 & \dots & D_n \end{pmatrix}}_{J_i}$$ puisque $J_i = \begin{pmatrix} \vec{\beta}_1 & \dots & \vec{\beta}_n \\ \bar{\bar{\tau}}_1 \vec{z}_1 & \dots & \bar{\bar{\tau}}_n \vec{z}_n \end{pmatrix}$

Et donc : $J = \Lambda J_i$