Diapos 17 et 18 : passage de Ron vers x_R

Diapos 19 et 20 : passage de x_R à Ron

II - Matrices de transformation :

07/09/2022

But : Acquérir la compétence "Savoir effectuer un changement de repère"

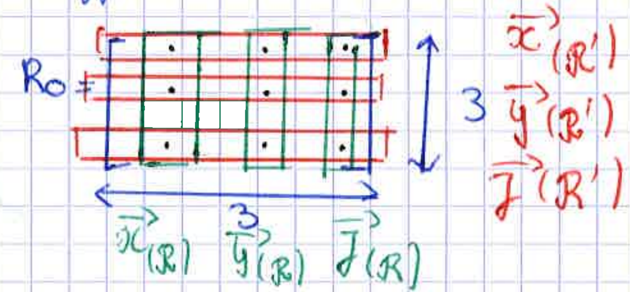
Cas général : Soit le repère fixe $\mathcal{R}(O, \vec{x}; \vec{y}; \vec{z})$

et $\mathcal{R}'(O'; \vec{x}'; \vec{y}'; \vec{z}')$ mobile par rapport à $\mathcal{R}$

II. 1. 1er cas : $\mathcal{R}'$ effectue une rotation seule par rapport à $\mathcal{R}$

Dans ce cas de figure, seule la direction des axes $\vec{x}; \vec{y}; \vec{y}$ change et $O' = O$.

La rotation effectuée est caractérisée par la matrice de rotation :



Mais la matrice de rotation est aussi une matrice de passage entre $\mathcal{R}$ et $\mathcal{R}'$

La position du point M dans le repère $\mathcal{R}$ ~~est~~ $\vec{OM}_{(\mathcal{R})} = \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix}$

Dans le repère $\mathcal{R}'$, il s'agit de $\vec{OM}_{(\mathcal{R}')} = \vec{O'M}_{(\mathcal{R}')} = \begin{bmatrix} a' \\ b' \\ c' \end{bmatrix}$ car $O = O'$ ici

On peut écrire $\vec{OM}_{(\mathcal{R})} = R\,\vec{OM}_{(\mathcal{R}')}$ $\Rightarrow$ $\vec{OM}_{(\mathcal{R}')} = R^{-1}\,\vec{OM}_{(\mathcal{R})}$

Propriétés de la matrice de rotation : 1) $R^{-1} = R^T$ $\Rightarrow$ $\vec{OM}_{(\mathcal{R}')} = R^T\,\vec{OM}_{(\mathcal{R})}$

2) R est une matrice orthonormale : → toutes les colonnes / lignes ont une norme de 1

→ le produit scalaire de deux colonnes / lignes est nul

(rappel : $R = (\vec{x}_{(\mathcal{R})}\ \vec{y}_{(\mathcal{R})}\ \vec{z}_{(\mathcal{R})})$)

3) Composition des rotations : Soit une rotation $\mathcal{R} \xrightarrow{R} \mathcal{R}' \xrightarrow{R'} \mathcal{R}''$

La rotation totale est le produit : $R'' = RR'$ dans l'ordre ! $(RR' \neq R'R)$

Cela est valable pour n rotations quelconque

II.2. 2ème cas : Une rotation et une translation dit "transformation"

Dans ce cas, l'orientation des axes $\vec{x}$, $\vec{y}$ et $\vec{z}$ change et $O \neq O'$.

On rend compte ici de la rotation avec R et de la translation avec $\vec{OO'}_{(R)}$.

Localisation de M : $\vec{OM} = \vec{OO'} + \vec{O'M}$

Exprime $\vec{OM}$ dans $\mathcal{R}$ veut que l'on exprime toute l'égalité dans $\mathcal{R}$: $\vec{OM}_{(R)} = \vec{OO'}_{(R)} + \vec{O'M}_{(R)}$

coordonnées de M dans $\mathcal{R}$ — translation effectué — ?

Problématique : Comment ramener $\vec{OM}_{(R')} = \begin{pmatrix} a' \\ b' \\ c' \end{pmatrix}$ dans $\mathcal{R}$?

Solution : $\vec{OM}_{(R)} = R\,\vec{O'M}_{(R')}$

En conclusion : $\boxed{\vec{OM}_{(R)} = \vec{OO'}_{(R)} + R\,\vec{O'M}_{(R')}}$

coordonnées de M dans $\mathcal{R}'$

Au bilan :

-> Si rotation seule : R est nécessaire et $\vec{OM}_{(R)} = R\,\vec{OM}_{(R')}$

-> Si rotation et translation : R et $\vec{OO'}$ sont nécessaires et $\vec{OM}_{(R)} = R\,\vec{OM}_{(R)} + \vec{OO'}_{(R)}$

Matrice de passage homogène :

Noté T, ~~elle~~ est de dimensions 4×4

matrice de rotation R

$$T = \left[\begin{array}{ccc|c} \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

vecteur de translation $\vec{OO'}_{(R)} = P_{(R)}$

$$= \begin{bmatrix} R & P_{(R)} \\ 0_{1\times3} & 1 \end{bmatrix}$$

$0_{1\times3}$ pour l'inversion

On cherche à localiser

$$\underbrace{\begin{bmatrix} \vec{OM}_{(R)} \\ 1 \end{bmatrix}}_{1} 4 = \underbrace{T}_{4} \, 4 \underbrace{\begin{bmatrix} \vec{O'M}_{(R')} \\ 1 \end{bmatrix}}_{1} 4$$

$$= \begin{bmatrix} \underbrace{R}_{3}\,3 & \underbrace{P_{(R)}}_{1}\,3 \\ 0_{1\times3} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \vec{O'M}_{(R')}\,3 \\ 1 \end{bmatrix} 1$$

$$= \begin{bmatrix} {}^{R}\overrightarrow{O'M}_{(R')} + P(R) \times 1 \\ 0_{1\times3}\,\overrightarrow{O'M} + 1 \times 1 \end{bmatrix}$$

Propriétés de la matrice de passage homogène :

1) Si $T = \begin{pmatrix} R & P \\ 0_{1\times3} & 1 \end{pmatrix}$ alors $T^{-1} = \begin{pmatrix} R^T & -R^T P \\ 0_{1\times3} & 1 \end{pmatrix}$

2) Composition des transformations : $\mathcal{R} \xrightarrow{T} \mathcal{R}' \xrightarrow{T'} \mathcal{R}''$

$T'' = TT'$ dans l'ordre ! $(TT' \neq T'T)$

08/09/2022

Modélisation des bras manipulateurs

I_ Problématique :

Faire un lien entre l'espace opérationnel et l'espace des configuration. Cela fait appel aux modèles :

- Modèle géométrique $q \underset{MGI}{\overset{MGD}{\rightleftarrows}} x$
- Modèle cinématique $\dot{q} \underset{MCI}{\overset{MCD}{\rightleftarrows}} \dot{x}$

seront considérés ici (appliqués aux tâches à vitesse normale et ne nécessitant pas de précisions fines).

Dans ce cours
1) Survol de ces modèle
2) Méthode de calcul

II. Modèle Géométrique (MG) (fait intervenir la position et pas le temps par ce modèle)
↳ pas de mouvement

II.1. Modèle Géométrique Direct (MGD)

On connait q et on cherche à trouver $x = \begin{pmatrix} x_p \\ x_R \end{pmatrix}$ en fonction de $q = \begin{pmatrix} q_1 \\ \vdots \\ q_n \end{pmatrix}$

On travaille en 2 étapes :

① On calcule T_{0n} en fonction de q

② De T_{0n}, on déduit $\overrightarrow{O_0 O_{n+1}}$ dans R_0 puis on fait un choix de coordonnées opérationnelles que l'on calcule.

cf. outils vus dans les chap. précédents