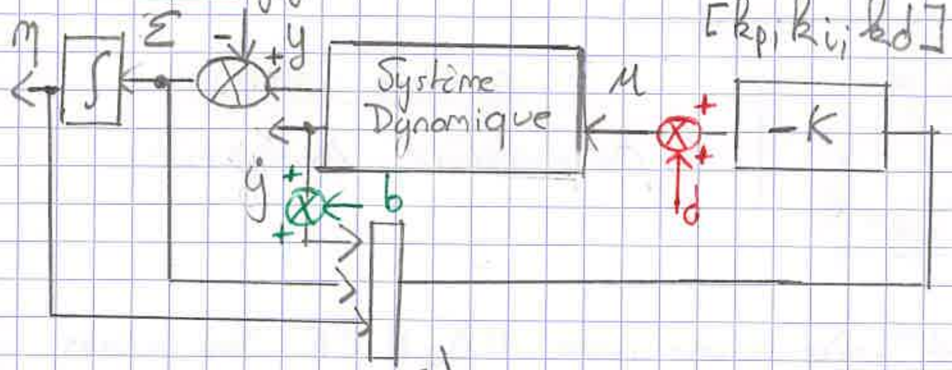
Dimitri Baucelle

Commande linéaire avancée

1

Introduction : $y_{ref} = cste$



— système multivariables
d perturbations
b bruits de mesure

$$\hat{y} = \begin{pmatrix} \varepsilon \\ \eta \\ \dot{y} \end{pmatrix}$$

$$\dot{x} = Ax + Bu \qquad \text{avec } u = k_p \varepsilon - k_i \eta - k_d \dot{y}$$
$$y = Cx + Du \qquad\qquad = -K\hat{y}$$

En pratique, on souhaiterait atténuer l'effet des perturbation d sur la sortie y.

Remarque : Le calcul de la dérivée en temps réel n'est pas possible. On peut seulement l'estimer. On considère alors les bruits en mesures b.
⇒ On se demande alors si u n'est pas trop grand pour compenser le bruit.

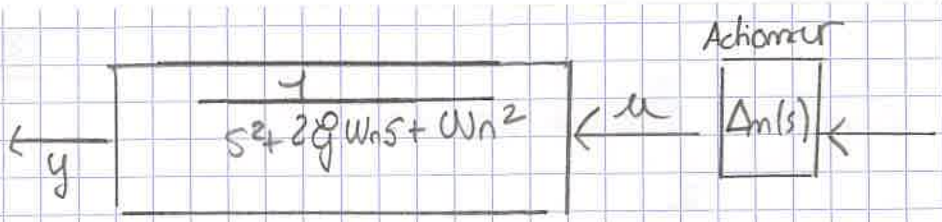
On rappelle que l'on ne connaît pas précisément le modèle exacte du système dynamique.

Robustesse : ① Être robuste aux perturbation
② Garantir des performances sur la boucle fermée malgré le manque de connaissances sur le système.

N.B : La boucle fermée est beaucoup plus stable que la boucle ouverte (on va le démontrer dans ce cours).

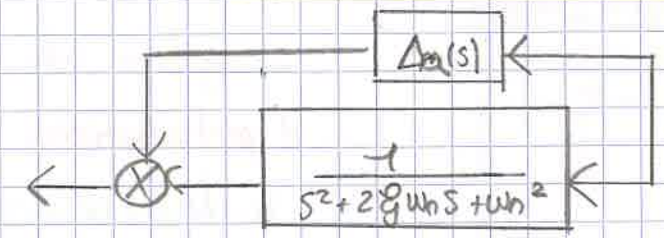
Exemple 1 : Soit le système $\dfrac{1}{s^2 + 2\xi\omega_n s + \omega_n^2}$ avec $\begin{cases} 0{,}8 \leq \xi \leq 1{,}2 & \text{"proche de 1"} \\ 3 \leq \omega_n \leq 7 & \text{"proche de 5"} \end{cases}$

On représente les paramètres incertains dans un plan.



Incertitude multiplicative

On considère par exemple $\Delta_m(s)$ proche de l'identité



Incertitude additive

On considère $\Delta_a(s)$ petit

On doit définir la notion de "petit" grâce à une norme $\|\Delta_a\| < \varepsilon$. Dans ce cours, on verra la norme H-infini.

Exemple 2 : Soit $\dot{x} = ax$ avec $a \in \mathbb{R}$

- Polynôme caractéristique $P_a(s) = s - a$
- Racines du poly. caractéristique doivent toutes $\mathrm{Re}(r_i) < 0$

$\Rightarrow$ stable si $a < 0$

- Si l'hypothèse sur le système est $a_{min} \leq a < a_{max}$ alors il est robustement stable si $a_{max} < 0$.

Exemple 3 : Soit $\dot{X} = \overbrace{\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}}^{A} X$

- Polynôme caractéristique $P_A(s) = s^2 - \mathrm{Tr}(A) + \det(A)$ pour les systèmes du 2nd ordre

$$= s^2 - \underbrace{(a_{11}+a_{22})}_{\lambda_1+\lambda_2}s + \underbrace{(a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21})}_{\lambda_1\lambda_2}$$

- Pour assurer la stabilité il faut : $\lambda_1 + \lambda_2 < 0$ et $\lambda_1 \cdot \lambda_2 > 0$
- C'est bien le cas ici, on peut alors calculer le tableau de Routh

1	$a_{11}a_{22} - a_{12}a_{22}$	0
$a_{11}+a_{22}$	0	0
$a_{11}a_{12}$ $-a_{12}a_{21}$	0	

• Prenons l'hypothèse,
$$\begin{cases} a_{11\,min} \leq a_{11} \leq a_{11\,max} \\ a_{12\,min} \leq a_{12} \leq a_{12\,max} \\ a_{21\,min} \leq a_{21} \leq a_{21\,max} \\ a_{22\,min} \leq a_{22} \leq a_{22\,max} \end{cases}$$

On souhaite que $a_{11max} + a_{112max} < 0$ et $\min[a_{11} \cdot a_{22}] > \max[a_{12} \cdot a_{21}]$

Exemple 4: $\dot{x} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$

$P_A(s) = s^3 - Tr(A)s^2 + \underbrace{\alpha_1}_{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}} - \det(A)$ pour un système d'ordre 3 $= |s\mathbb{I}_3 - A|$

=> les calculs deviennent trop fastidieux

• On parvient normalement à $s^3 + \alpha_2 s^2 + \alpha_1 s + \alpha_0$

et $0 < \alpha_{2min} \leq \alpha_2 \leq \alpha_{2max}$

$0 < \alpha_{1min} \leq \alpha_1 \leq a_{1max}$

$0 \leq \alpha_{0min} \leq \alpha_0 \leq \alpha_{0max}$

1	α_1	0
α_2	α_0	0
$\frac{\alpha_1\alpha_2 - \alpha_0}{\alpha_2}$	0	
α_0		

$\min[\alpha_1 \alpha_2] > \alpha_{0max}$ or α_1 et α_2 tous deux positifs donc $\alpha_1\alpha_2 > \alpha_{0\,max}$

• Application numérique

Soit $s^3 + (1+\delta_1)s^2 + (1+\delta_2)s + (1+\delta_1\delta_2)$

Hypothèses: $\begin{cases} 0,1 \leq \delta_1 \leq 3 \\ 0,1 \leq \delta_2 \leq 3 \end{cases}$ Ainsi, $\begin{cases} 1,1 \leq \alpha_2 = 1+\delta_1 \leq 4 \\ 1,1 \leq \alpha_1 = 1+\delta_2 \leq 4 \\ 1,01 \leq \alpha_0 = 1+\delta_1\delta_2 \leq 10 \end{cases}$

La première insertion est $\boxed{1,1^2 = 1,21 \geq 10 \Rightarrow \text{faux}}$

⚠ L'ensemble $P_1 = \left\{ s^3 + (1+\delta_1)s^2 + (1+\delta_2)s + 1 + \delta_1\delta_2 \;\middle|\; \begin{matrix} 0,1 \leq \delta_1 \leq 3 \\ 0,1 \leq \delta_2 \leq 3 \end{matrix} \right\}$

et $P_2 = \left\{ s^3 + \alpha_2 s^2 + \alpha_1 s + \alpha_0 \;\middle|\; \begin{matrix} 1,1 \leq \alpha_2 \leq 4 \\ 1,1 \leq \alpha_1 \leq 4 \\ 1,01 \leq \alpha_0 \leq 10 \end{matrix} \right\}$

deux ensembles de polynôme pour représenter des systèmes

On en déduit que $\boxed{P_1 \subset P_2}$

On en conclut que dans P_2 il y a des polynômes dont certaines racines vérifient $Re(r) < 0$.

Appliquons directement Routh-Hurwitz aux coefficients de P_1

1	$1+\delta_1$	0
$1+\delta_2$	$1+\delta_1\delta_2$	0
$(1+\delta_1)(1+\delta_2) - (1+\delta_1\delta_2)$	0	
$1+\delta_2$		
$1+\delta_1\delta_2$		

$1 \geq 0$

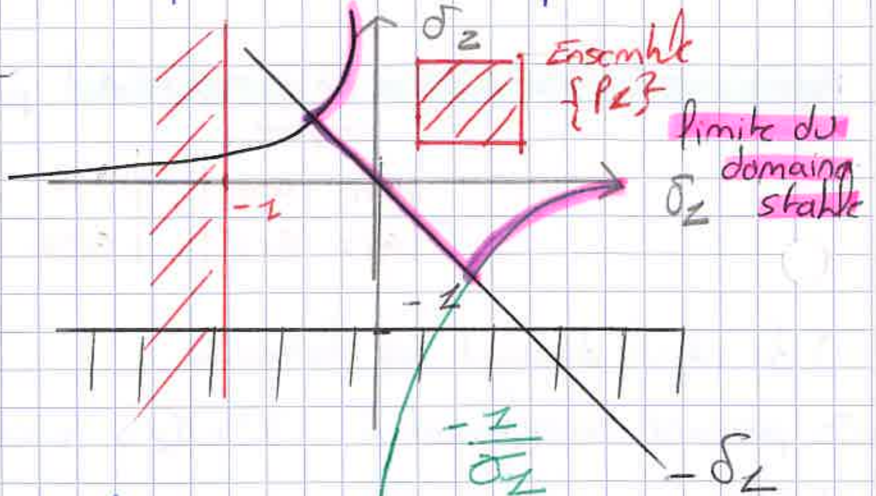
$1+\delta_1 > 0 \Leftrightarrow \delta_1 > -1$

$1+\delta_2 > 0 \Leftrightarrow \delta_2 > -1$

$1+\delta_1\delta_2 > 0 \Leftrightarrow \delta_2 > -\frac{1}{\delta_1}$ si $\delta_1 > 0$

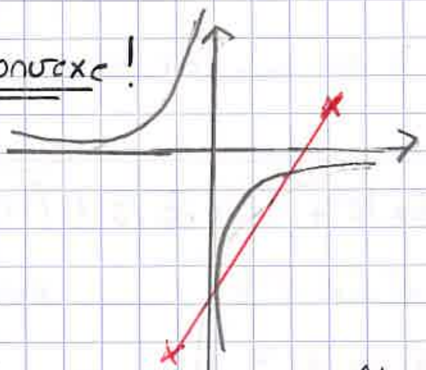
$\Leftrightarrow -\frac{1}{\delta_1}$ si $\delta_1 < 0$

On peut tracer dans le plan



$\Rightarrow$ les polynômes appartenant à l'ensemble P_1 représentent bien des systèmes stables.

Remarque : Le domaine de validité n'est pas convexe !



N.B : le cercle, le triangle, la parabole donnent des domaines convexes par exemple.

Définition : Soit un polynôme de degré n quelconque défini par l'ensemble

$$P = \{\alpha_n s^n + \alpha_{n-1} s^{n-1} + a_{n-2} s^{n-2} \dots + \alpha_1 s + \alpha_0 \;/\; \alpha_{i\,min} \leq \alpha_i \leq \alpha_{i\,max}\} \quad \text{(Kharitonov)}$$

Remarque : Il y a 2^{n+1} nombre de combinaisons des min et max

est robustement stable si et seulement si quatres polynômes sont stables

$$\begin{cases} \alpha_{n_{min}} s^n + \alpha_{n-1_{min}} s^{n-1} + \alpha_{n-2_{max}} s^{n-2} + \alpha_{n-3_{max}} s^{n-3} + \alpha_{n-4_{min}} \dots \\ \alpha_{n_{min}} s^n + \alpha_{n+1_{max}} s^{n-1} + \alpha_{n-2_{max}} s^{n-2} + \alpha_{n-3_{min}} \dots \\ \alpha_{n_{max}} s^n + a_{n-1_{max}} s^{n-1} + \alpha_{n-2_{min}} s^{n-2} + a_{n-3_{min}} s^{n-3} \dots \end{cases}$$

$\Big[\ \alpha_{n\,max}\, s^n + \alpha_{n-1\,min}\, s^{n-1} + \alpha_{n-2\,min}\, s^{n-2}$

respecter l'alternance

$2_{min} - 2_{max}$
$1_{min} - 1_{max}$
$2_{max} - 2_{min}$
$1_{max} - 2_{min}$

Exemple 6. Soit $\dot{x}(t) = \begin{bmatrix} -1 + 1{,}5\cos^2(t) & 1 - 1{,}5\sin(t)\cos(t) \\ -1 - 1{,}5\sin(t)\cos(t) & -1 + 1{,}5\sin^2(t) \end{bmatrix} x(t)$

- Signe de la trace $Tr(A) = -2 + 1{,}5 = -0{,}5 < 0$
- Signe du déterminant $dét(A) = [-1 + 1{,}5\cos^2(t)]\,[-1 + 1{,}5\sin^2(t)]$

$$- [-1 - 1{,}5\sin(t)\cos(t)]\,[1 - 1{,}5\sin(t)\cos(t)]$$

$$= 0{,}5 > 0$$

Le système vérifie les 2 premiers tests

MAIS, il s'agit d'un système variant dans le temps !

Le polynôme caractéristique $|sI_n - A|$ n'est pas valable mathématiquement.