

Projet Systèmes Hybrides : Modélisation

Frédéric Gouaisbaut, Pauline Ribot

LAAS-CNRS

7 janvier 2023

Sommaire

- 1 Balle rebondissante
- 2 Capteur et observateur paresseux
- 3 Thermostat
- 4 Réservoir
- 5 Machine avec réparation
- 6 Modélisation formelle
- 7 Simulation
- 8 A retenir

Modèle avec condition de réinitialisation

Reprenons le modèle de la balle rebondissante, il existe 1 mode (donc 1 état discret !) et deux états à temps continu (position et vitesse) regroupés dans un vecteur x .

- Un espace de flot $\mathcal{C} = \{x, x_1 > 0 \text{ ou } (x_1 = 0 \text{ et } x_2 \geq 0)\}$ et équation dynamique :

$$\dot{x}_1 = x_2 \quad (1)$$

$$\dot{x}_2 = -g \quad (2)$$

- Un espace de saut $\mathcal{D} = \{x, x_1 = 0 \text{ et } x_2 \leq 0\}$ et une équation de ré-initialisation :

$$x_1^+ = x_2 \quad (3)$$

$$x_2^+ = -g \quad (4)$$

Observateur paresseux

- On considère un problème de synthèse d'observateur pour un système linéaire pour lequel les mesures sont obtenues de manière sporadique.

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) \quad (5)$$

$$y(t) = y(t_k) \quad (6)$$

- On sait qu'une première mesure arrive au pire à T_2 secondes et que deux mesures consécutives sont au moins espacées de T_1 secondes et au pire de T_2 secondes :

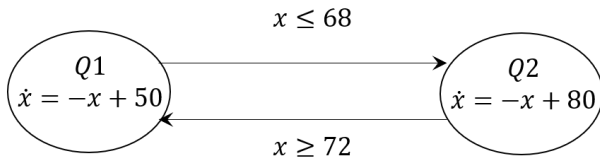
$$0 \leq t_1 \leq T_2 \quad (7)$$

$$T_1 \leq t_{k+1} - t_k \leq T_2 \quad (8)$$

- Comment construire un observateur ?

Fonctionnement du thermostat

- Deux modes de fonctionnement $Q1$ et $Q2$ correspondant au chauffage éteint et au chauffage allumé.
- L'état continu x correspond à la température dans la salle.
- Le thermostat est programmé pour maintenir une température entre 68 et 72 degrés. Lorsque le chauffage est allumé ($Q2$), la condition pour l'éteindre est $x \geq 72$, si le chauffage est éteint ($Q1$), la condition pour l'allumer est $x \leq 68$. En absence de chauffage, la température descend jusqu'à 50.



Modèle hybride du thermostat - 1

L'automate hybride $G = (Q, X, f, \phi, q_0, x_0)$:

- $f : Q \times X \rightarrow X$: la fonction dynamique temporelle

$$\begin{cases} f(Q_1, x) &= -x + 50 \\ f(Q_2, x) &= -x + 80 \end{cases} \quad (9)$$

- $\phi : Q \times X \rightarrow Q$: la fonction dynamique discrète

$$\begin{aligned} \phi(Q_1, x) &= \begin{cases} Q_2 & x \leq 68 \\ Q_1 & x > 68 \end{cases} \\ \phi(Q_2, x) &= \begin{cases} Q_1 & x \geq 72 \\ Q_2 & x < 72 \end{cases} \end{aligned} \quad (10)$$

La condition initiale est spécifiée pour compléter le modèle : (q_0, x_0) .

Modèle hybride du thermostat - 2

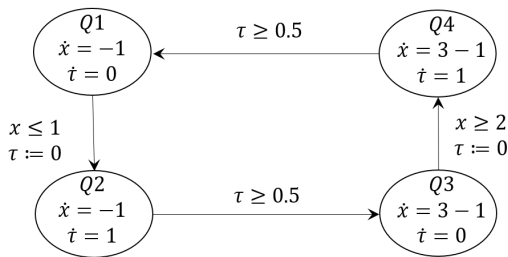
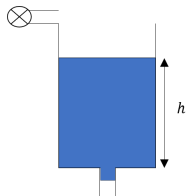
Dans cet exemple,

- Spécification de conditions de gardes sur les variables d'état continu,
- Pas de spécification des invariants associés aux modes discrets (définition de domaines par défaut),
- Pas d'occurrence d'événement discret,
- Pas de condition de réinitialisation des variables d'état continu.

Fonctionnement du réservoir avec délais

But de la commande : éviter que le bac ne se vide ou se remplisse trop.

- Flux entrant : $\lambda = 3$
- Flux sortant : $\mu = 1$
- Délai entre l'envoi de la commande et son exécution : $\delta = 0.5$
 → le temps est donc rajouté dans le vecteur d'état pour représenter ce délai



Modèle hybride de la commande du réservoir

Dans cet exemple,

- Spécification de conditions de gardes sur les variables d'état continu (x , τ),
- Pas de spécification des invariants associés aux modes discrets (définition de domaines par défaut),
- Définition de condition de réinitialisation pour la variable temporelle τ .

Fonctionnement d'une machine avec réparation - 1

Exemple de fonctionnement d'une machine non fiable avec des délais :

- Trois modes de fonctionnement : idle ($Q1$), busy ($Q2$) et down ($Q3$)
- L'état physique $x(t)$ est la température de la machine, $\tau(t)$ est une horloge qui permet d'obtenir un délai (timeout) : l'état continu est donc $x(t) = [x(t) \ \tau(t)]^T$

On rajoute des variables d'entrée de deux types :

- des **événements discrets** : $\Sigma = \{\alpha, \beta, \gamma\}$, extension de la fonction ϕ aux conditions ne dépendant pas de l'état continu x :
 - α représente le démarrage de la machine quand elle est en veille,
 - β représente l'arrêt de la machine lorsqu'elle est en cours d'utilisation,
 - γ représente la réparation de la machine lorsqu'elle est en panne,
- des **commandes continues** : une entrée contrôlable $u \in U$ est inclus, $\dot{x} = f(q, x, u)$.

Fonctionnement d'une machine avec réparation - 2

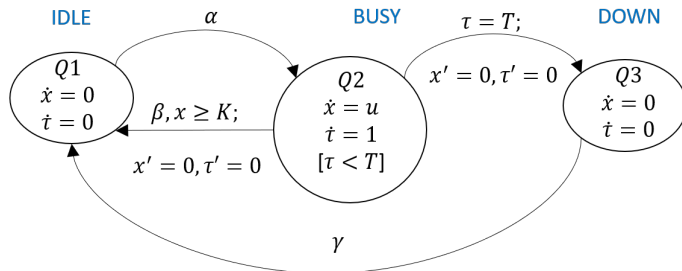
- Si la machine reste dans l'état $Q2$ (busy) pendant une durée T ou plus, cela cause immédiatement une transition vers l'état $Q3$ (down).
- Dans le mode $Q2$ (busy), le chauffage de la machine est activé $\dot{x} = u$, où u est une entrée scalaire contrôlable. Une horloge est déclenchée $\dot{\tau} = 1$. Dans ce mode $Q2$, une condition d'invariant est définie $\tau < T$.
- La condition de garde $\tau = T$ provoque le passage dans le mode $Q3$ (down). Pendant cette évolution, l'état continu x subit une condition de réinitialisation.
- Une autre transition est possible à partir de $Q2$ lorsque la température est supérieure à K ou que l'événement β apparaît :

$$\phi(Q2; x, \tau; e) = \begin{cases} 3 & \tau = T \\ 1 & x \geq K, e = \beta \\ 2 & \text{sinon} \end{cases} \quad (11)$$

Modèle hybride de la machine avec réparation - 1

Dans cet exemple,

- Spécification de conditions de garde sur X , défini dans la fonction ϕ ;
- Spécification d'une condition d'invariant (domaine) : sous-ensemble X associé au mode Q tel que x doit appartenir à cet ensemble pour rester dans ce mode ;
- Spécification d'une condition de réinitialisation sur x quand on change d'état discret.



Modèle hybride de la machine avec réparation - 2

Remarque : distinction entre événement **exogène** et **endogène** dans un système hybride :

- exogène : vient de l'extérieur pour forcer une transition discrète dans un automate classique ;
- endogène : événement apparaissant quand une variable continue dépendant du temps entre dans un ensemble particulier : $x(t) \geq K$ ou $\tau \geq T$.

Modèle d'un système hybride - version SED

$$G = (Q, X, E, U, f, \phi, Inv, Guard, \rho, q_0, x_0)$$

- Q : ensemble d'états discrets (modes)
- X : espace d'état continu (\mathbb{R}^n)
- E : ensemble fini d'événements
- U : ensemble de commandes admissibles $U \subseteq \mathbb{R}^m$
- f : champs de vecteurs, $f : Q \times X \times U \rightarrow X$
- ϕ : fonction de transition d'état discret, $\phi : Q \times X \times E \rightarrow Q$
- Inv : ensemble définissant les conditions d'invariants (domaines) :
 $Inv \subseteq Q \times X$
- $Guard$: ensemble définissant les conditions de gardes :
 $Guard \subseteq Q \times Q \times X$
- ρ : fonction de réinitialisation, $\rho : Q \times Q \times X \times E \rightarrow X$
- q_0 : état discret initial
- x_0 : état continu initial

Modèle d'un système hybride - version TC

$$\mathcal{H} = (\mathcal{C}, F, \mathcal{D}, G)$$

- Un espace d'état $X = \mathbb{R}^n$,
- Un espace de flot $\mathcal{C} \subset X$,
- Un espace de saut $\mathcal{D} \subset X$,
- une équation d'évolution vérifiée dans l'espace du flot F .

$$F : \begin{array}{ccc} X & \Rightarrow & X \\ x & \mapsto & X_x \subset X \end{array}$$

- Une équation de ré-initialisation G .

$$G : \begin{array}{ccc} X & \Rightarrow & X \\ x & \mapsto & X_x \subset X \end{array}$$

Remarques

- Il n'existe pas dans la définition des systèmes hybrides au sens TC la notion d'état discret. Lors de la modélisation, cette dernière notion est englobée dans la notion d'état.
- Comme les exemples l'ont montré, il est absolument nécessaire de définir des équations d'évolution et de ré-initialisation multivariées, pour prendre en compte les différents comportements dynamique continue de chaque mode.

Exemple - Exercices

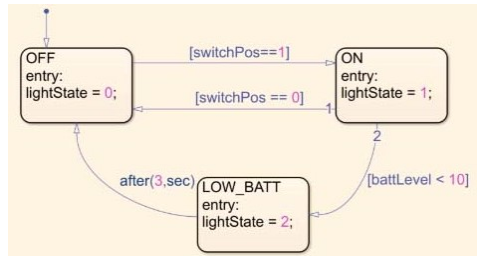
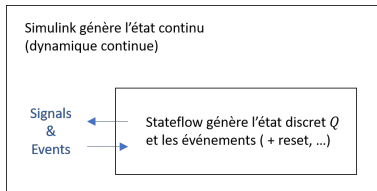
- Déterminer le modèle Hybride au sens de STC du modèle avec Thermostat.
- Déterminer le modèle Hybride au sens automate de l'observateur paresseux.

Simulation d'un système hybride

Simulation d'un automate hybride avec Simulink, **Stateflow** ou Modelica :

- Simulation ODE
- Zero crossing detection
- Tutoriels disponibles en ligne

Un exemple sous Stateflow :



A retenir !

- Construction des deux modèles et le vocabulaire associé.
- Comment passer d'un modèle à un autre.
- Les outils de simulation.