sforgan@laas.fr

15/09/2022

Commande Optimale

Introduction :

Pour des systèmes de grande dimension (n élevé) ou MIMO (n états et m commandes) il faut déterminer les $n \times m$ paramètres du correcteur statique ($u = -Kx$) et placer les n pôles $\Rightarrow$ $n * m - n$ paramètres libres.

Problème : Comment choisir les $n \times m$ paramètres du gain K

$\Rightarrow$ **Solution :** Optimiser un critère de performance de type énergétique (énergie mise en jeu dans le Σ) sous la contrainte dynamique du système.

Cas SISO : $K = \underbrace{[\quad\quad\quad]}_{n} \updownarrow 1$

Cas MIMO : $K = \underbrace{\begin{bmatrix} k_1 & \dots & k_n \\ ? & ? & ? \\ ? & ? & ? \end{bmatrix}}_{n} \updownarrow m$ $\rightarrow$ $n * m - n$ paramètres qu'il faut déterminer de façon optimale

Cas de figure du pendule : On avait placé des pôles très rapide pour le pendule à -20 mais cela aurait saturé l'entrée $\Rightarrow$ cela parrait être un critère tout en conservant la stabilité.

Quelques critères :

Cas continu : Trouver la commande u fonction de l'état x qui minimise

$$\min_u J(u) = \frac{1}{2} \int_0^\infty [x^T(t) Q x(t) + u^T(t) R u(t)] \, dt$$

où $Q = Q^T \geq 0$ semi-définie positive

$R = R^T > 0$ strictement définit positive

Cas discret : $$\min_u J(u) = \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{\infty} [x_k^T Q x_k + u_k^T R u_k]$$

avec $Q = Q^T \geq 0$ et $R = R^T > 0$

Attention : Les critères de stabilité ne sont pas les mêmes en continu et en discret

1- Critère de commande en temps minimum $J = tf - t_0 = \int_{t_0}^{Tf} 1 \, dt$

2- avec non ~~sta~~saturation de la commande : trouver la commande permettant de faire évoluer le système de l'état x_0 fixé à $t_0 = 0$ à l'état final $x_{Tf} = 0$ à l'instant Tf fixé en minimisant $J = \int_{t_0}^{Tf} |u| \, dt$ sous les contraintes de l'actionneur $|u| \leq 1$ et de la dynamique du système.

3- à temps minimum et avec non saturation faire évoluer le système de l'état x_0 fixé à $t_0 = 0$ à l'état final $x_{Tf} = 0$ (à l'instant Tf non fixé) en minimisant $J = \int_{t_0}^{Tf} 1 \, dt$ et sous les contraintes de l'actionneur $|u| \leq 1 \Leftrightarrow u^2 - 1 \leq 0$ et de la dynamique ⚠ L'optimalité est très liée aux contraintes !

4- pour un suivi de trajectoire : on considère $\frac{Y(p)}{U(p)} = \frac{1}{1+p}$
représenté par $\begin{cases} \dot{x} = -x + u \\ y = x \end{cases}$

But : Déterminer la commande à applique telle que $J = \int_{t_0}^{Tf} (x(t) - r(t))^2 \, dt$ soit minimal

Données : $x(t)$ est l'état interne du système, il correspond à la sortie du procédé et
$r(t) = \frac{t^2 e^{-t}}{2}$ est la référence à suivre

Position du problème : Soit un système à temps continu de représentation d'état $\dot{x} = f(x; u; t)$ et de C.I $x(t_0) = x_0$
Pour la condition initiale x_0 et la commande u, l'équation d'état défini une trajectoire unique x pour l'état sur $[t_0; tf]$
Le critère $J(x_0; t_0; u) = \theta(x_f; tf) + \int_{t_0}^{tf} \phi(x; u; t) \, dt$ avec $x_f = x(tf)$
Les fonctions θ et ϕ et les instants t_0 et tf étant donnés, J ne dépend que de x_0 et u sur $[t_0; tf]$
$J(x_0; t_0; u)$ est une fonctionnelle.

Plusieurs formes pour le critère :

① Critère de Lagrange $\int_{t_0}^{tf} \varphi(x; u; t) \, dt$: vision énergétique de l'évolution du système
② Critère de Bolza $\theta(x_f) + \int_{t_0}^{tf} \phi(x; u; t) \, dt$: le dernier point $\in$ à la trajectoire optimale.

③ Critère de Mayer $J(x_f; t_f)$

⚠ Tous ces critères sont équivalents (au moyen d'une augmentation du système)

Ainsi, le problème de la commande optimale consiste à trouver la commande $\tilde{u}$ minimisant $J(x_0; t_0; u)$: $\tilde{u} = \min\limits_{u \in U} J(x_0; t_0; u)$

Principe d'optimalité de Bellman

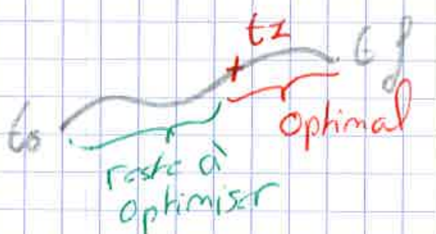
Soit le critère $J(x_0; t_0; u) = \theta(x_f; t_f) + \int_{t_0}^{t_f} \phi(x; u; t)\, dt$

La trajectoire optimale sur $[t_0; t_f]$ est $\tilde{u}$ et le critère optimal $\tilde{J}(x_0; t_0)$

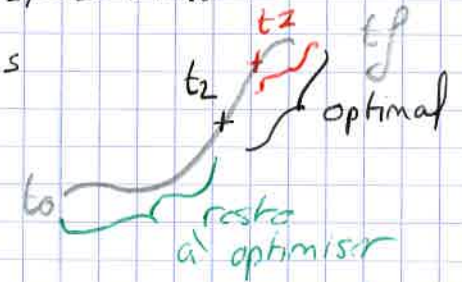
$= \min\limits_{u[t_0; t_f]} J(x_0; t_0; u)$

Soit $t_1 \in [t_0; t_f]$. Le principe d'optimalité énonce que la trajectoire optimale sur $[t_0; t_f]$ contient la trajectoire optimale sur $[t_1; t_f]$ avec comme CI $x_1 = x(t_1)$

autrement dit, $\tilde{J}(x_0) = \min\limits_{u[t_0;t_1]; x_1} \left(\int_{t_0}^{t_1} \phi(x, u, t)\, dt + \tilde{J}(x_1) \right)$



puis



et ainsi de suite ... jusqu'à t_0

Principe du maximum de Pontryagin : Commande optimale par maximisation de l'Hamiltonien

Cas Continu : Trouver $u^*(x(t); t)$ qui maximise l'Hamiltonien

$$H(x, u, \lambda, t) = -L(x, u, t) + \lambda^T F(x, u, t)$$

où $F(x, u, t) = \dot{x}$

Remarque $L(x, u, t) = \frac{1}{2}(x_t^T Q_t x_t + u_t^T R_t u_t)$

Cas discret : Trouver $u^*(x; k)$ qui maximise l'Hamiltonien

$$H_{k+1} = -L(x, u, k) + \lambda_{k+1}^T F(x; u; k)$$

où $x_{k+1} = F(u; x; k)$

Principe du maximum de Pontryagin : équations canoniques de Hamilton Condition 1er ordre :

$\dot{x} = \frac{\partial H}{\partial \lambda}$ et $\dot{\lambda} = \frac{\partial H}{\partial x}$ avec la condition terminale $\lambda_{T_f}^T = -x_{T_f}^T P_{T_f}$

La maximisation de H conduit à la commande optimale

$$\left.\frac{\partial H}{\partial u}\right|_{u=u^*} = 0$$

Avec la condition du 2nd ordre $\frac{\partial^2 H}{\partial u^2} < 0$

Remarques : 1. lorsque $T_f \to \infty$ (t_1 non spécifié) l'Hamiltonien associé est nul $\forall t$

$$H(x^*, u^*, \lambda^*) = 0$$

2. si on souhaite aller de $x(t=0) = x_0$ au point $x = x_1$ sans spécifier t_1 le temps pour atteindre ce point, il faut assurer que $H(x^*, u^*, \lambda^*) = 0$

3. Si on souhaite aller de x_0 au point x_1 où t_1 est spécifié on peut montrer que $H(x^*, u^*, \lambda^*) = cste$

Equation Euler-Lagrange : En notant T, l'énergie cinétique
U, l'énergie potentielle

Le principe de moindre action de Maupertuis postule que le système évolue en minimisant l'intégrale $\int_{t_0}^{t_f} (T - U)\, dt$

Notons q les coordonnées généralisées du système. Soit $L(q,\dot{q}) = T(q,\dot{q}) - U(q)$, le lagrangien avec le critère $J(q_0, t_0, \dot{q}) = \int_{t_0}^{t_f} L(q,\dot{q})\, dt$

On considère le système dont on commande la vitesse, l'équation d'état s'écrit $\dot{q} = u$

L'Hamiltonien s'écrit $H(q,\dot{q}) = L(q,\dot{q}) + p^T p$ et le principe du minimum donne

$$\begin{cases} \frac{\partial H}{\partial q} = \frac{\partial L}{\partial q} = -\dot{p} \\ \frac{\partial H}{\partial \dot{q}} = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} + p = 0 \end{cases}$$

En dérivant la seconde équation par rapport au temps et en remplaçant $\dot{p}$ grâce à la première :

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}} - \frac{\partial L}{\partial q} = 0 \qquad \text{Equation d'Euler-Lagrange}$$

Commande Bang Bang On parle de commande bang-bang parce que la commande est toujours saturée, alternativement à sa valeur minimale ou à sa valeur maximale. Quant à la robustesse de la commande càd la capacité à remplir la mission de manière précise, lorsque la masse d'un véhicule est mal estimée, par exemple, ce genre de commande n'est pas très recommandable. Permet d'assurer l'optimalité du temps.

La mise en saturation nous exclus des propriétés linéaires. Il faut aussi envisager des problèmes d'usures.