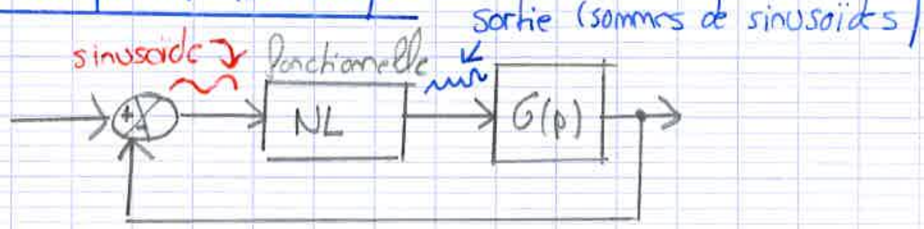
07/11/2022

Commande par les Systèmes Complexes (non linéaire)

Méthode du premier harmonique :



On développe en série de Fourier la sortie de la fonction non linéaire et on applique les propriétés de l'automatique fréquentielle (Bode, Nyquist, etc.) pour étudier le système.

09/11/2022

Exemple d'un système localement attracteur instable

Points d'équilibre :

$$\begin{cases} x_1^2 - x_2^2 = 0 \\ x_1 x_2 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1^2 = x_2^2 \\ \text{et} \\ x_1 x_2 = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x_1 = x_2 \text{ ou } x_1 = -x_2 \\ \text{et} \\ x_1 = 0 \text{ ou } x_2 = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x_1 = 0 \\ x_2 = 0 \end{cases}$$

Éléments de preuve de stabilité (1)

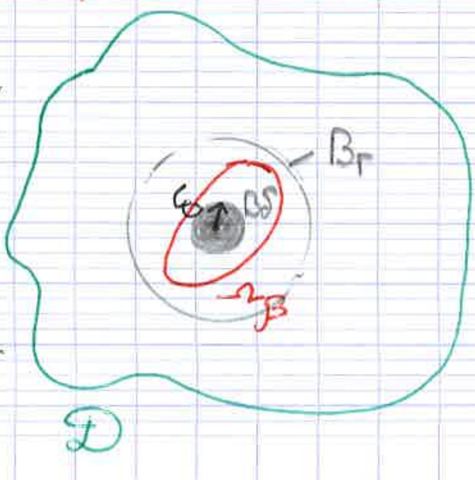
$\forall \varepsilon > 0$, $\exists \delta(\varepsilon) > 0$,

$\|x(0)\| < \delta$,

$x(t) \in \Omega_\beta$

or $\Omega_\beta \subset B_r$ et

donc $\|x(t)\| < r < \varepsilon$



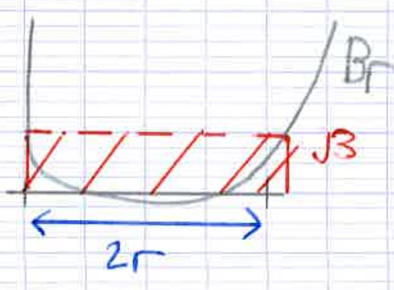
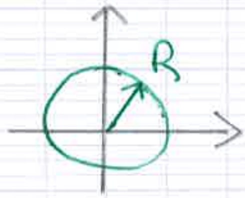


Illustration :

Soit $\begin{cases} \dot{x}_1 = -x_1 - 2x_2 \\ \dot{x}_2 = 2x_1 - x_2 \end{cases}$

Prenons $V = x_1^2 + x_2^2$



On s'appuie sur le domaine $\mathcal{D} = B(0;R)$

V définie positive sur $\mathcal{D}$

De plus, $\dot{V} = 2x_1\dot{x}_1 + 2x_2\dot{x}_2$

$= -2x_1^2 - 2x_2^2 \Rightarrow \dot{V}$ est définie négative pour $x \in \mathcal{D}$

Remarque : Il s'agit d'un système linéaire donc on peut calculer les valeurs propres $sp = \{-1 \pm 2j\}$

N.B Tout système linéaire stable admet une fonction de Lyapunov quadratique. P est solution $A^TP + PA = -Q$

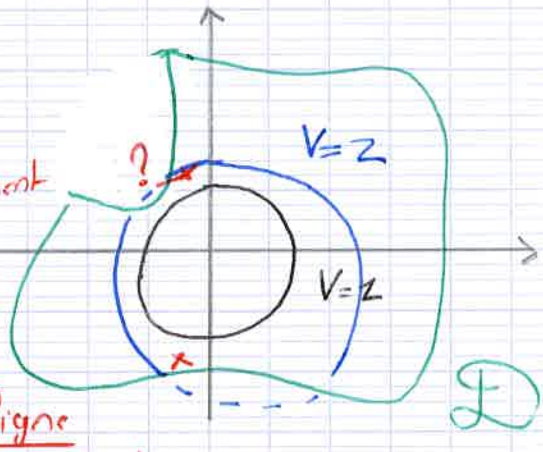
cf. fonction Lyap sur MATLAB

Comment estimer le bassin d'attraction ?

Soit :

On sait que $\dot{V} < 0$ seulement dans $\mathcal{D}$

$\Rightarrow$ on sait faire trouver la plus grande ligne de niveau comprise dans $\mathcal{D}$



Exemple : Considérons $\begin{cases} \dot{x}_1(t) = x_2(t) \\ \dot{x}_2(t) = -a x_1^3(t) - b x_2(t) \end{cases}$

1) $\begin{cases} x_2 = 0 \\ -a x_1^3 - b x_2 = 0 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x_2 = 0 \\ -a x_1^3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow X_{eq} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$

2) $V(x_1; x_2) = x_1^2 + x_2^2$ ✗

Il faut tester plusieurs fonctions candidates. On peut reconnaître un système de forme reconnaissable.

$V_1 = \gamma x_1^4 + \frac{1}{2} x_2^2$ — V est définie positive sur $\mathbb{R}^2$

$\dot{V}_1 = -a \cancel{x_2 x_1^3} - b x_2^2 + 4\gamma \cancel{x_2 x_1^3}$ avec $\gamma = \frac{a}{4} > 0$

$= -b x_2^2 \leq 0$

V_1 est radialement non borné (RNB). En effet, si $\|x\| \to \infty$ alors $V(x) \to +\infty$

On a $\dot{V} = -b x_2^2$

Prenons $W(x) = \{x \mid x_2 = 0\}$

Supposons que $x_2 \equiv 0$ pour se placer dans l'ensemble

identiquement (tout le temps)

On se demande quelles sont les trajectoires possibles ?

$\begin{cases} \dot{x}_1(t) = 0 \\ \dot{x}_2(t) = -a x_1^3(t) = 0 \end{cases}$ => L'unique trajectoire est $x = \begin{vmatrix} 0 \\ 0 \end{vmatrix}$

-> $x(0) = 0$ donc 0 est attracteur par le Principe de Lassalle