METODE NUMERICE PENTRU VALORI SI VECTORI PROPII (EIGENVALUE, EIGENVECTORS)

Cîndea Dumitru Ioan
Automatică Română
2023

CE ÎNSEAMNĂ?

În algebra liniară , un eigenvector (vector propriu) sau un vector caracteristic al unei transformări liniare este un vector diferit de zero care se modifică cel mult cu un factor scalar atunci când i se aplică acea transformare liniară. Eigenvalue (valoarea propriu-zisă) corespunzătoare , adesea notată cu λ, este factorul prin care vectorul propriu este scalat.

Din punct de vedere geometric , un vector propriu, corespunzător unei valori proprii reale nenule, indică într-o direcție în care este întins prin transformare, iar valoarea proprie este factorul prin care este întins. Dacă valoarea proprie este negativă, direcția este inversată. Vorbind vag, într-un spațiu vectorial multidimensional , vectorul propriu nu este rotit.

INTRODUCERE

În ecuația $Ax = \lambda x$

A este o matrice pătratică n x n

x reprezintă eigenvector (vector caracteristic)

x este un vector nenul

λ reprezintă eigenvalue (valoare propie din germană)

$$Ax - \lambda x = 0$$

$$\underbrace{(A - \lambda I)}x = 0$$

Dem:

Considerăm $A - \lambda I$ - inversabilă

$\Rightarrow$ $x = (A - \lambda I)^{-1} \, 0$

$x = 0$ contradicție cu ip.

$\Rightarrow A - \lambda I$ - nu poate fi inversabilă $\Rightarrow$ det $= 0$

$|A - \lambda I| = 0$ - ecuație caracteristică

soluțiile sunt eigenvalues

PENTRU A ÎNȚELEGE MAI BINE AVEM URMĂTORUL EXEMPLU:

ex: $A - \lambda I = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 4 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1-\lambda & 1 \\ 4 & 1-\lambda \end{bmatrix}$

$$|A - \lambda I| = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 1 \\ 4 & 1-\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda)(1-\lambda) - 4 =$$

$$= 1 - \lambda - \lambda + \lambda^2 - 4 = \lambda^2 - 2\lambda - 3$$

$$\lambda^2 - 2\lambda - 3 = 0$$

$$(\lambda - 3)(\lambda + 1) = 0$$

eigenvalues

$\lambda_1 = 3$

$\lambda_2 = -1$

Pentru $\lambda = 3$

$$(A - \lambda I)x = 0$$

$$(A - \lambda I) = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 4 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 4 & -2 \end{bmatrix}$$

! Se pot găsi o infinitate de valori pt vector

$$\xrightarrow{R_2 - 2R_1} \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow -2x_1 + x_2 = 0$$

$$x_2 = 2x_1$$

$$x_1 = 1 \Rightarrow x_2 = 2$$

=> eigenvectorul este $x = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$

pt orice valori alegem pt x, o să avem alt eigenvector corep pt $\lambda = 3$

Soluția generală pt un eigenvector este

$$x = \begin{bmatrix} y \\ 2y \end{bmatrix} \quad \forall y \in \mathbb{R}$$

Se procedează la fel pentru $\lambda = -1$

EXEMPLUL PREZENTAT, ÎN MATLAB

D reprezintă matricea ce are pe diagonale eigenvalue

V reprezintă matricea ce contine pe linii eigenvectors

Command Window

```
>> eigenvalue

A =

     1     1
     4     1


V =

    0.4472   -0.4472
    0.8944    0.8944


D =

    3.0000         0
         0   -1.0000

>>
```

F:\Calcul Numeric\eigenval...

```
A=[1,1;4,1]
[V,D]=eig(A)
```

Se folosește funcția predefinită din matlab “eig()” ce calculează eigenvalues și eigenvectors

MAI MULTE EXEMPLE ÎN MATLAB

Command Window

```
>> eigenvalue2

A =

     8     1     6
     3     5     7
     4     9     2


V =

   -0.5774   -0.8131   -0.3416
   -0.5774    0.4714   -0.4714
   -0.5774    0.3416    0.8131


D =

   15.0000         0         0
         0    4.8990         0
         0         0   -4.8990

matricea verifica conditiile
fx >>
```

F:\Calcul Numeric\eigenvalue2.m

EDITOR PUBLISH VIEW

FILE NAVIGATE CODE ANALYZE SECTION RUN

```matlab
A=magic(3)
[V,D]=eig(A)
if(round(V*D) == round(A*V))
    disp("matricea verifica conditiile")
else
    disp("matricea nu verifica conditiile")
end
```

CRLF script Ln 1 Col 3

LA CE SE POT FOLOSI?

- **Ecuaţia Schrödinger**
  - Ecuaţia Schrödinger este o ecuaţie diferenţială parţială liniară care guvernează funcţia de undă a unui sistem mecanic cuantic.

$$H\psi_E = E\psi_E$$

$$A x = \lambda x$$

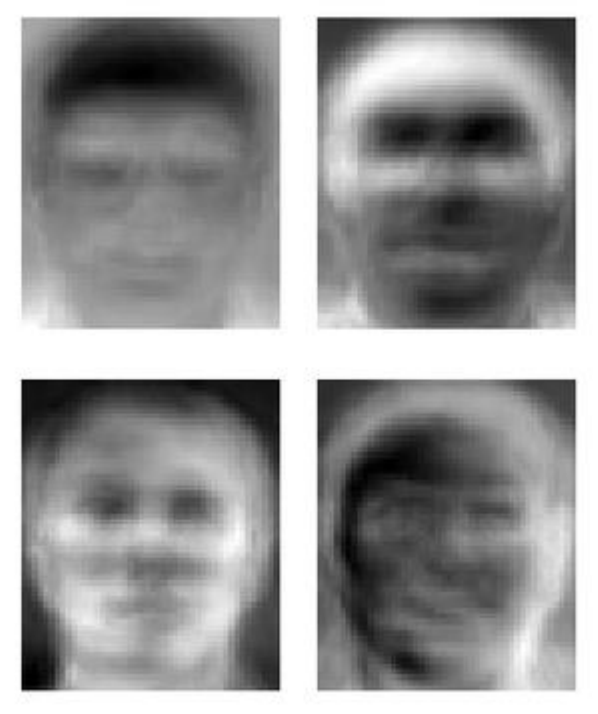
- **Transportul valurilor**
  - Lumina , undele acustice şi microundele sunt împrăştiate aleatoriu de mai multe ori atunci când traversează un sistem static dezordonat . Chiar dacă împrăştierea multiplă randomizează undele în mod repetat, în cele din urmă transportul coerent al undelor prin sistem este un proces determinist care poate fi descris printr-o matrice de transmisie de câmp

- **Geologie şi glaciologie**
  - În geologie , în special în studiul till-ului glaciar , vectorii proprii şi valorile proprii sunt folosiţi ca metodă prin care o masă de informaţii despre orientarea şi cufundarea constituenţilor unei ţesături claste poate fi rezumată într-un spaţiu 3-D cu şase numere. Pe teren, un geolog poate colecta astfel de date pentru sute sau mii de claste dintr-o probă de sol, care pot fi comparate doar grafic, cum ar fi într-o diagramă Tri-Plot (Sneed şi Folk), sau ca Stereonet pe o reţea Wulff.
- **Eigenfaces**
  - În procesarea imaginilorfeţele pot fi văzute ca vectori ale căror componente sunt luminozitatea fiecărui pixel . Dimensiunea acestui spaţiu vectorial este numărul de pixeli. Vectorii proprii ai matricei de covarianţă asociate cu un set mare de imagini normalizate ale feţelor sunt numiţi feţe proprii ; acesta este un exemplu de analiză a componentelor principale . Sunt foarte utile pentru a exprima orice imagine a feţei ca o combinaţie liniară a unora dintre ele. În ramura recunoaşterii faciale a biometriei , feţele proprii oferă un mijloc de aplicare a compresiei datelorla chipuri în scop de identificare . De asemenea, au fost făcute cercetări legate de sistemele de viziune proprii care determină gesturile mâinii.

SECVENȚĂ DIN CODUL EIGENFACES

```
function [images,H,W,M,m,U,omega]=trainingEF(trainingFolder)
    % find the training files
    pgmFiles=dir(sprintf('%s/*.pgm',trainingFolder));

    im=imread(pgmFiles(1).name); % read an image to determine the Height & Width

    H=size(im,1); %Height of the images
    W=size(im,2); %Width of the images
    M=size(pgmFiles,1); %Number of images in the training set

    images=zeros(H,W,M);
    vec=zeros(H*W,M);

    % load the training images
    for i=1:M
        images(:,:,i)=imread(pgmFiles(i).name);
        vec(:,i)=reshape(images(:,:,i),H*W,1);
    end

    % mean face
    m=sum(vec,2)/M;

    % face space
    A=vec-repmat(m,1,M);

    L=A'*A;
    [V,lambda]=eig(L);

    % eigenvector of the covariance matrix of A. These are the eigenfaces
    U=A*V;

    % projection of each vector in the face space A on the eigenfaces
    omega=U'*A;
```

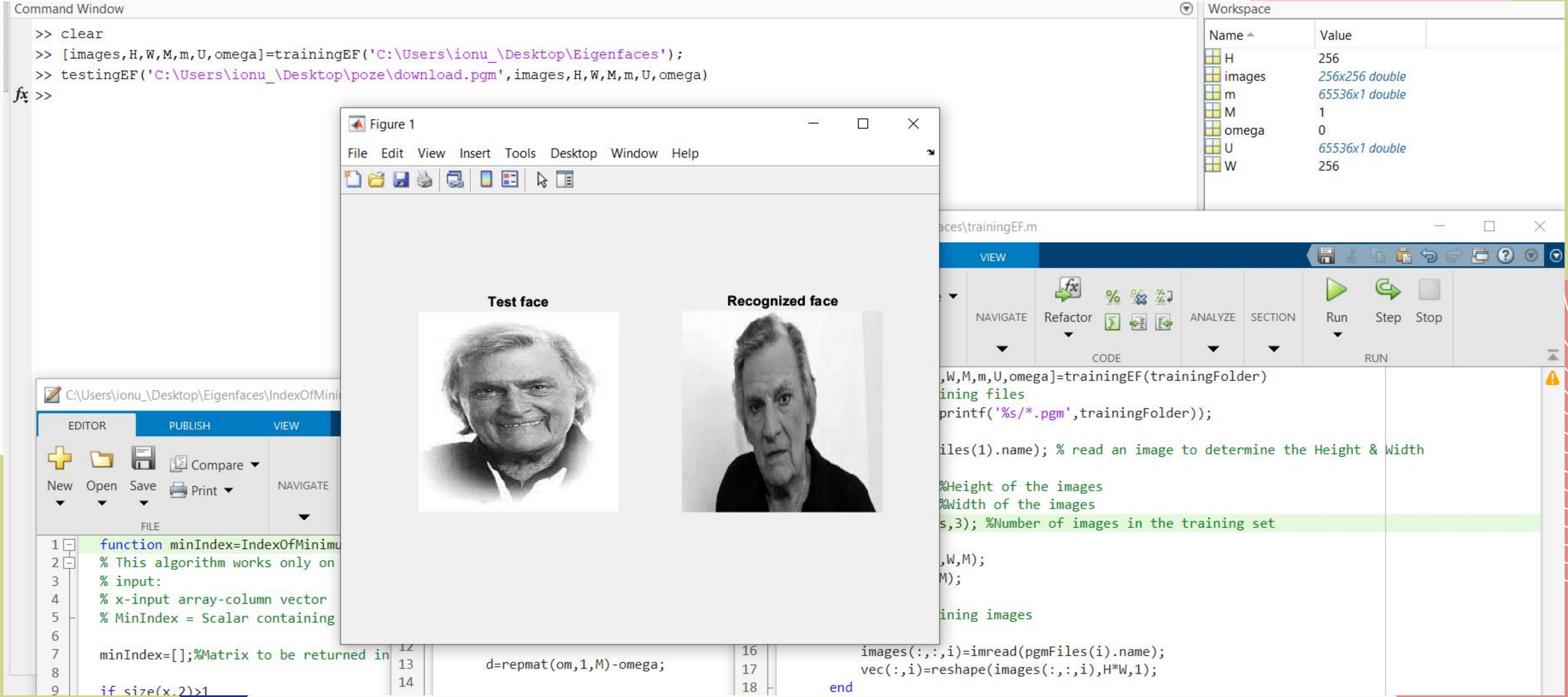
Imagine procesata de Eigenfaces
Ca exemple de eigenvectors



Antrenarea programului s-a facut cu pozele

Recunoasterea s-a facut cu poza

REZULTATUL DIN MATLAB



BIBLIOGRAFIE

Wikipedia

Metode numerice

Mathworks

Eigenfaces

Finding Eigenvalues and Eigenvectors

SFÂRȘIT