

Работа 3.6.1

Спектральный анализ электрических сигналов.

Малиновский Владимир

galqiwi@galqiwi.ru

Цель работы: исследование спектра колебаний электрических сигналов.

В работе используются: персональный компьютер; USB-осциллограф АКИП-4107; функциональный генератор WaveStation2012; соединительные кабели.

Идея

Разложение сложных сигналов на периодические колебания

Используется разложение в сумму синусов и косинусов с различными аргументами или, как чаще его называют, *разложение в ряд Фурье*.

Пусть задана функция $f(t)$, которая периодически повторяется с частотой $\Omega_1 = \frac{2\pi}{T}$, где T — период повторения импульсов. Её разложение в ряд Фурье имеет вид

$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} [a_n \cos(n\Omega_1 t) + b_n \sin(n\Omega_1 t)] \quad (1)$$

или

$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \cos(n\Omega_1 t - \psi_n). \quad (2)$$

Если сигнал чётен относительно $t = 0$, в тригонометрической записи остаются только члены с косинусами. Для нечетной наоборот.

Коэффициенты определяются по формуле

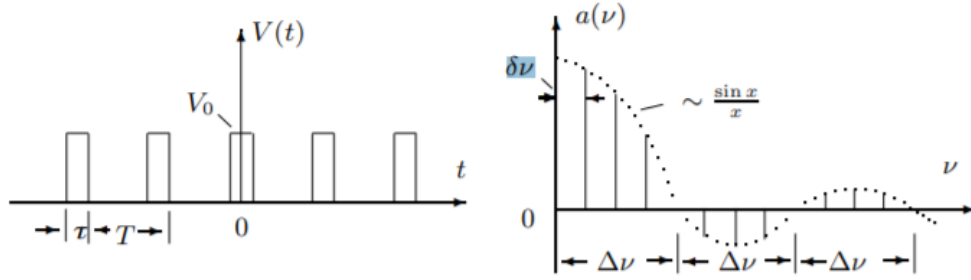
$$\begin{aligned} a_n &= \frac{2}{T} \int_{t_1}^{t_1+T} f(t) \cos(n\Omega_1 t) dt, \\ b_n &= \frac{2}{T} \int_{t_1}^{t_1+T} f(t) \sin(n\Omega_1 t) dt. \end{aligned} \quad (3)$$

Здесь t_1 — время, с которого мы начинаем отсчет.

Сравнив формулы (1) и (2) можно получить выражения для A_n и ψ_n :

$$\begin{aligned} A_n &= \sqrt{a_n^2 + b_n^2}, \\ \psi_n &= \arctan \frac{b_n}{a_n}. \end{aligned} \quad (4)$$

Периодическая последовательность прямоугольных импульсов



Введем величину: $\Omega_1 = \frac{2\pi}{T}$, где T — период повторения импульсов.

Коэффициенты при косинусных составляющих будут равны

$$a_n = \frac{2}{T} \int_{-\tau/2}^{\tau/2} V_0 \cos(n\Omega_1 t) dt = 2V_0 \frac{\tau}{T} \frac{\sin(n\Omega_1 \tau/2)}{n\Omega_1 \tau/2} \sim \frac{\sin x}{x}. \quad (5)$$

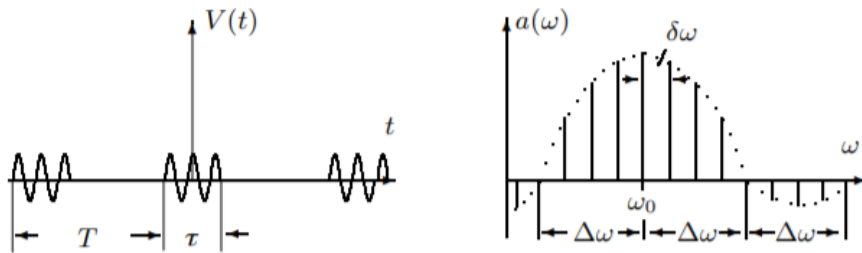
Здесь V_0 — амплитуда сигнала.

Поскольку наша функция четная, то $b_n = 0$.

Пусть T кратно τ . Тогда введем ширину спектра, равную $\Delta\omega$ — расстояние от главного максимума до первого нуля огибающей, возникающего, как нетрудно убедиться при $n = \frac{2\pi}{\tau\Omega_1}$. При этом

$$\Delta\omega\tau \simeq 2\pi \Rightarrow \Delta\nu\Delta t \simeq 1. \quad (6)$$

Периодическая последовательность цугов



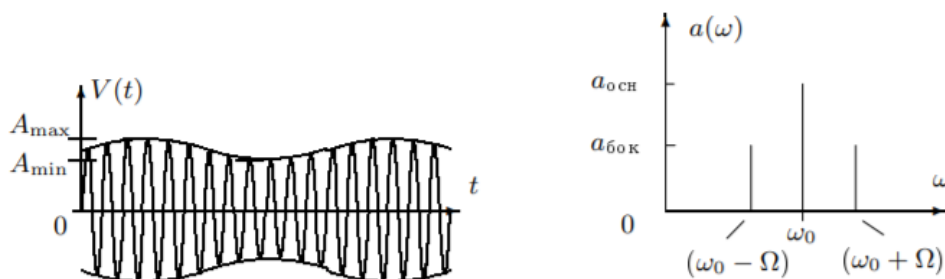
Возьмём цуги колебания $V_0 \cos(\omega_0 t)$ с длительностью цуга τ и периодом повторений T .

Функция $f(t)$ снова является четной относительно $t = 0$. Коэффициент при n -ой гармонике согласно формуле (3) равен

$$a_n = \frac{2}{T} \int_{-\tau/2}^{\tau/2} V_0 \cos(\omega_0 t) \cdot \cos(n\Omega_1 t) dt = V_0 \frac{\tau}{T} \left(\frac{\sin\left[(\omega_0 - n\Omega_1) \frac{\tau}{2}\right]}{(\omega_0 - n\Omega_1) \frac{\tau}{2}} + \frac{\sin\left[(\omega_0 + n\Omega_1) \frac{\tau}{2}\right]}{(\omega_0 + n\Omega_1) \frac{\tau}{2}} \right). \quad (7)$$

Пусть T кратно τ . Тогда спектры последовательности прямоугольных сигналов и цугов аналогичны, но максимумы сдвинуты на ω_0 .

Амплитудно-модулированные колебания



Рассмотрим гармонические колебания высокой частоты ω_0 , амплитуда которых медленно меняется по гармоническому закону с частотой $\Omega \ll \omega_0$.

$$f(t) = A_0 [1 + m \cos \Omega t] \cos \omega_0 t. \quad (8)$$

Коэффициент m называется *глубиной модуляции*. При $m < 1$ амплитуда меняется от минимальной $A_{min} = A_0(1 - m)$ до максимальной $A_{max} = A_0(1 + m)$. Глубина модуляции может быть представлена в виде

$$m = \frac{A_{max} - A_{min}}{A_{max} + A_{min}}. \quad (9)$$

Простым тригонометрическим преобразованием уравнения (8) можно найти спектр колебаний

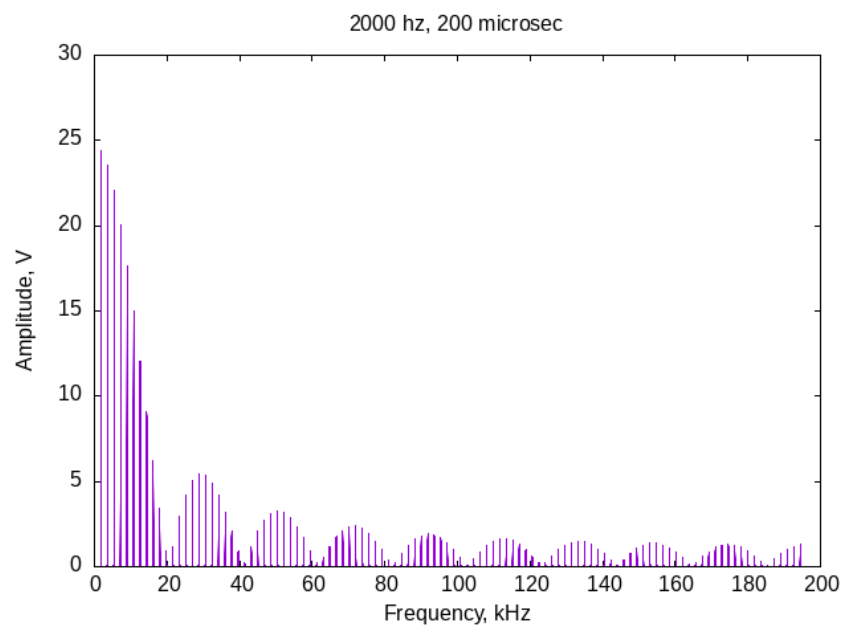
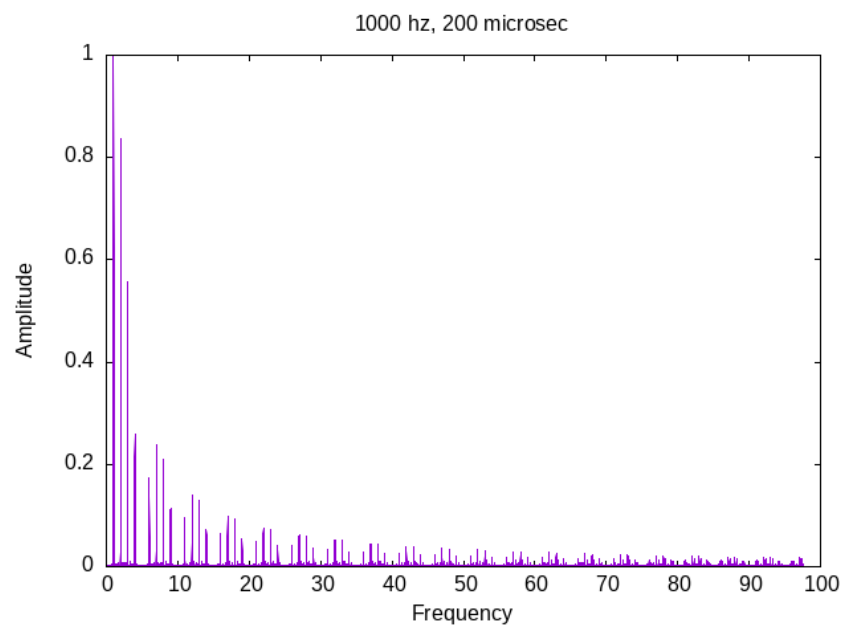
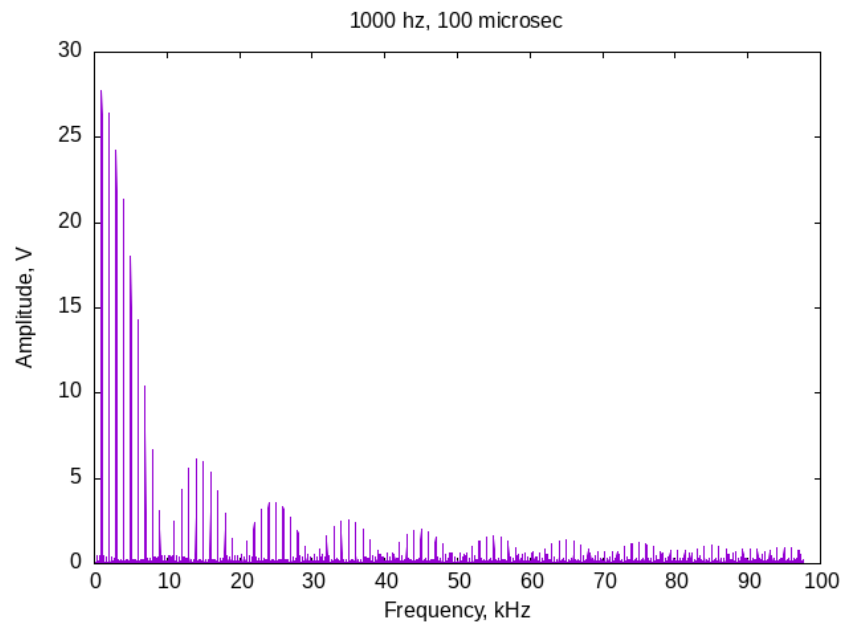
$$f(t) = A_0 \cos \omega_0 t + \frac{A_0 m}{2} \cos (\omega_0 + \Omega) t + \frac{A_0 m}{2} \cos (\omega_0 - \Omega) t. \quad (10)$$

Метод, результаты и обработка

Исследование спектра периодических последовательностей прямоугольных импульсов

Устанавливаем прямоугольные колебания с $\nu_{\text{повт}} = 1$ кГц (период $T = 1$ мс) и длительностью импульса $\tau = 100$ мкс.

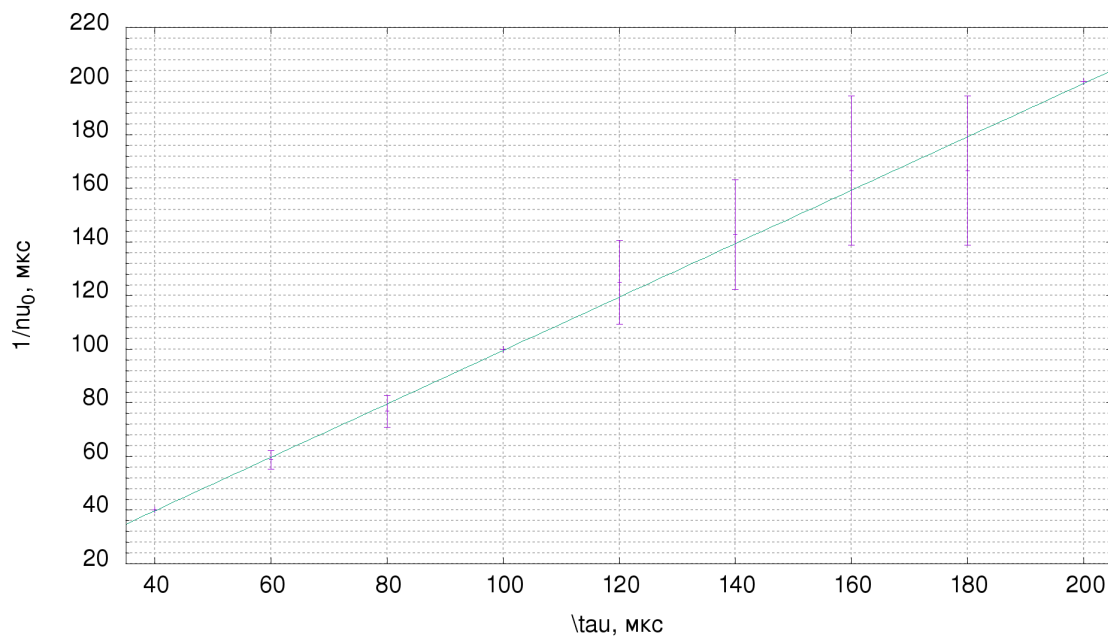
Получаем на экране спектр сигнала и, изменяя либо τ , либо $\nu_{\text{повт}}$, наблюдаем, как изменяется спектр.



Из данных видно, что, при увеличении τ , уменьшается $\Delta\nu$, а при увеличении $\nu_{\text{повт}}$, увеличивается расстояние между пиками.

Измерим зависимость $\Delta\nu$ от τ :

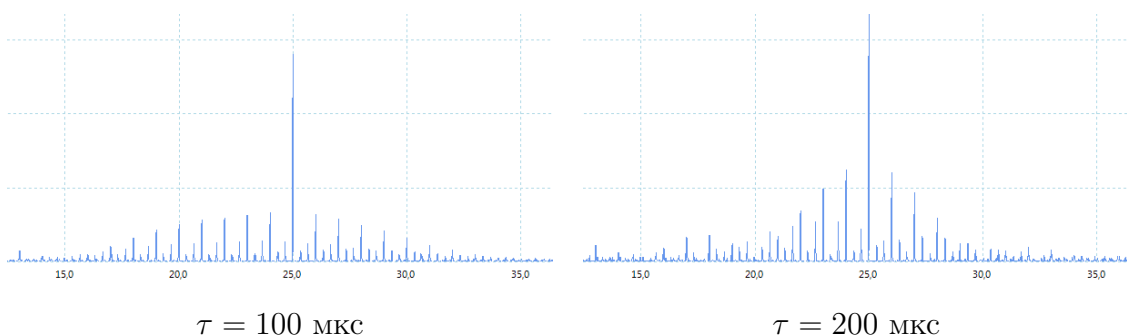
| τ , мкс | ν_0 , кГц | $\Delta\nu_0$, кГц | $1/\nu_0$, мкс | $\Delta 1/\nu_0$, мкс |
|--------------|---------------|---------------------|-----------------|------------------------|
| 50.0 | 1.0 | 1.0 | 40.0 | 0 |
| 50.0 | 1.2 | 1.2 | 59 | 3 |
| 50.0 | 1.4 | 1.4 | 77 | 6 |
| 50.0 | 1.6 | 1.6 | 100.0 | 0 |
| 50.0 | 1.8 | 1.8 | 125 | 16 |
| 50.0 | 2.0 | 2.0 | 140 | 20 |
| 50.0 | 3.0 | 3.0 | 170 | 30 |
| 50.0 | 4.0 | 4.0 | 170 | 30 |
| 50.0 | 5.0 | 5.0 | 200.0 | 0 |



Из графика $\Delta\nu \cdot \tau = 1.004 \pm 0.014$, что подтверждает соотношение неопределенностей.

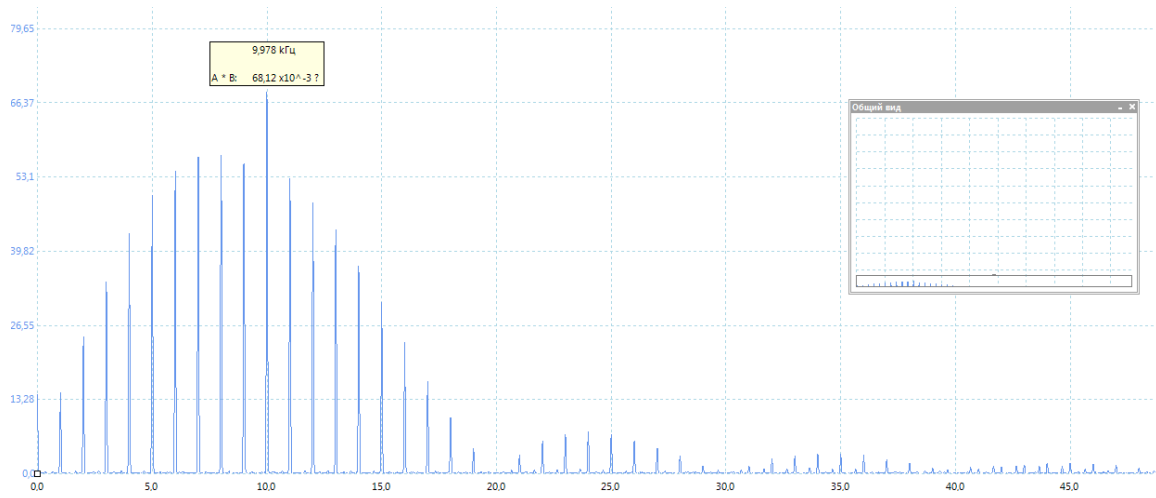
Исследование спектра периодической последовательности цугов

Посмотрим на последовательность цугов с характерными параметрами: $\nu_0 = 50$ кГц частота повторения импульсов $f_{\text{повт}} = 1$ кГц и исследуем спектр этого сигнала для разных длительностей импульса:

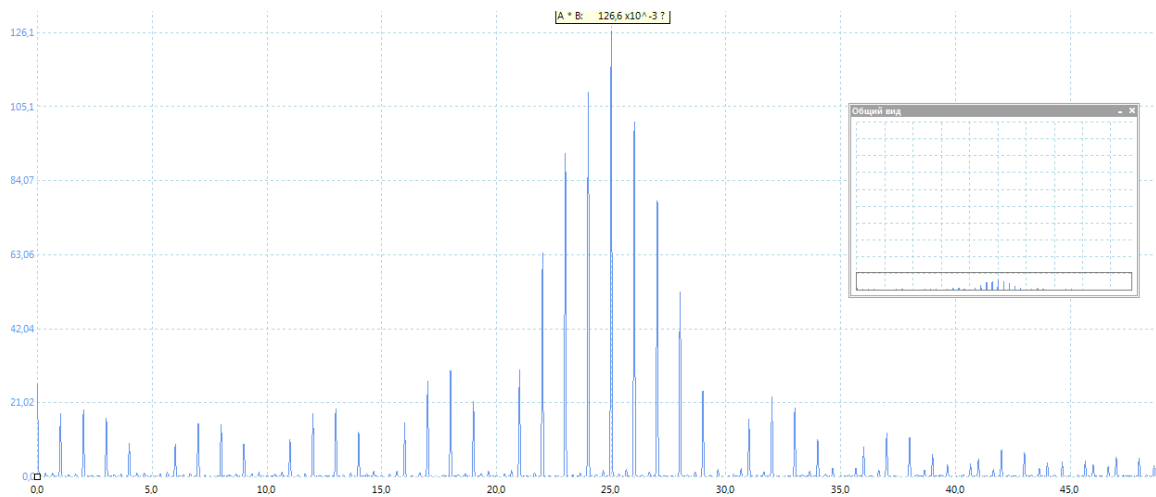


Из данных видно, что при изменении τ значение $\Delta\omega$ обратнопропорционально меняется.

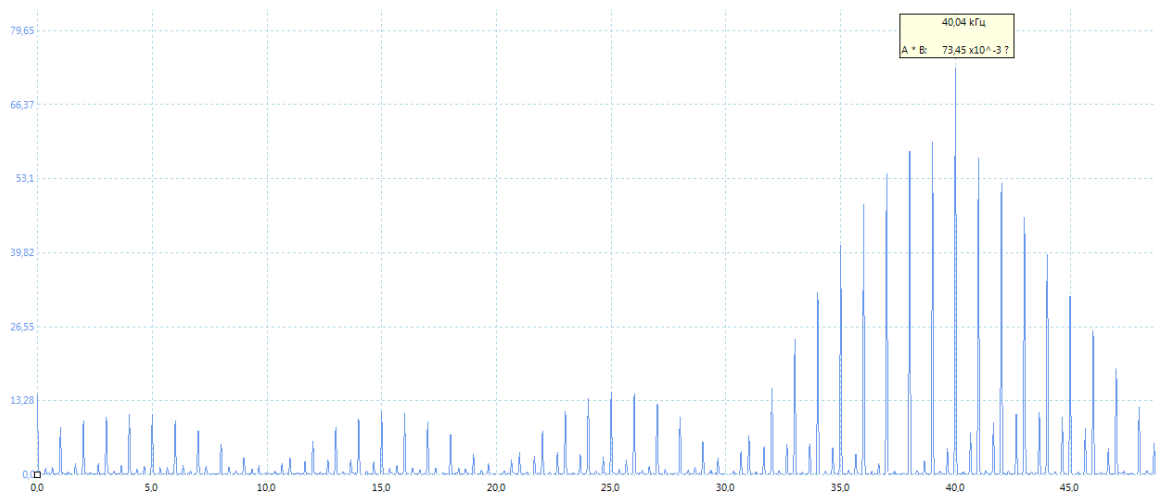
Рассмотрим поведение спектрограммы при фиксированном значении τ и меняющемся значении ν_0 :



$\nu_0 = 10 \text{ кГц}$



$\nu_0 = 25 \text{ кГц}$



$\nu_0 = 40 \text{ кГц}$

Из данных видно, что при изменении ν_0 картина смещается без изменения расстояния между спектральными компонентами.

Рассмотрим то, как это расстояние меняется при изменении $f_{\text{повт}}$:

| $f_{\text{повт}}$ | ν , кГц |
|-------------------|-------------|
| 0.5 | 0.5 |
| 1.0 | 1.0 |
| 2.0 | 2.0 |
| 4.0 | 4.0 |
| 5.0 | 5.0 |

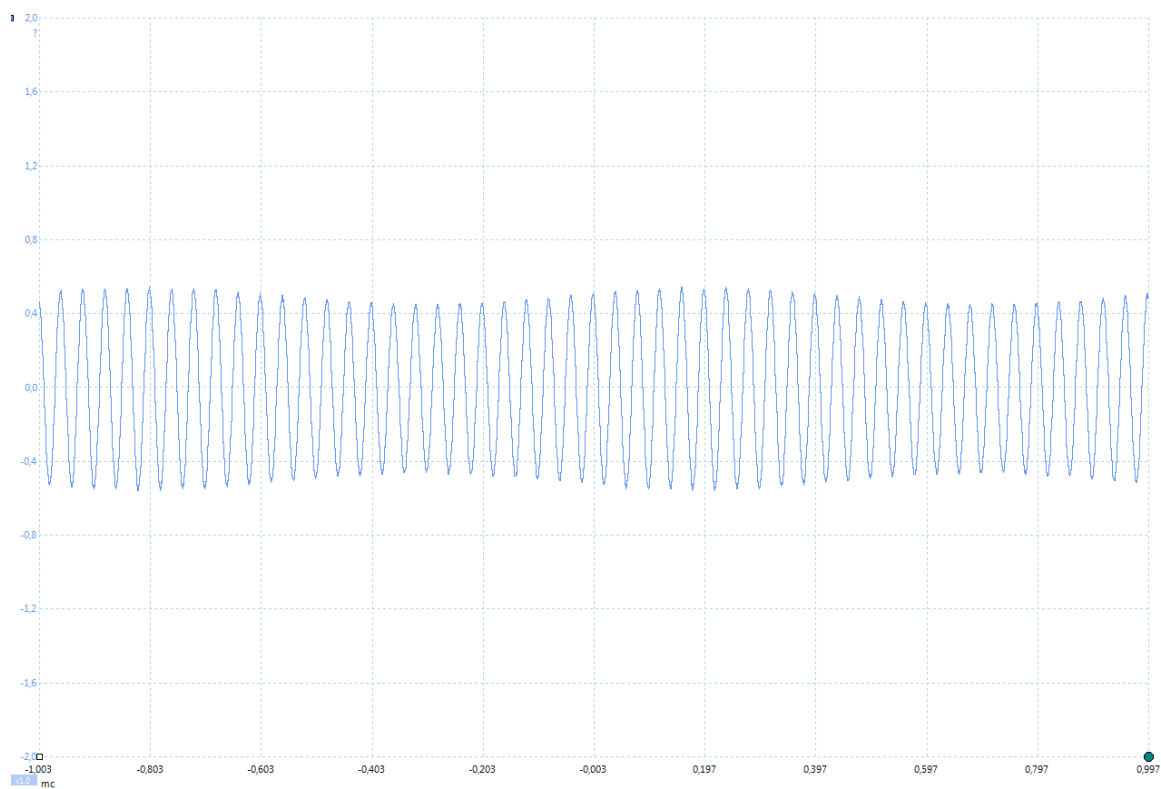
Погрешность результатов определяется погрешностью генератора – 0.5 Гц.

$$\frac{f_{\text{повт}}}{\nu, \text{кГц}} = 1 \pm 0.1\%,$$

что согласуется с теорией.

Исследование спектра амплитудно модулированного сигнала

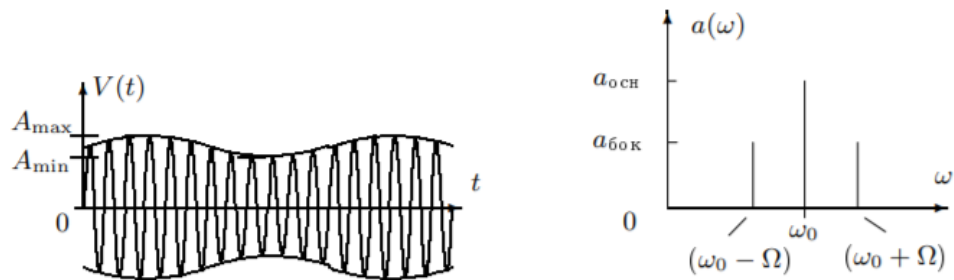
Рассмотрим амплитудно промодулированную синусоиду с параметрами $\nu_0 = 25\text{кГц}$, $\nu_{\text{мод}} = 1\text{кГц}$:



$$\nu_0 = 40 \text{ кГц}$$

Посмотрим на спектрограмму этого сигнала:

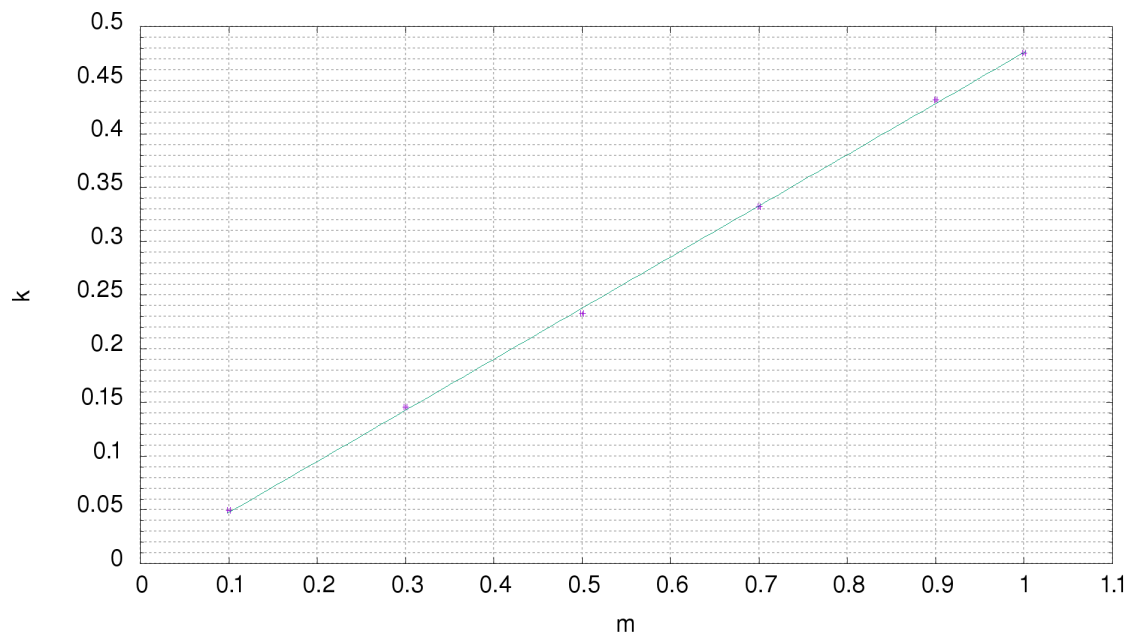
<тут должен быть скрин со спектрограммой, но у меня его нет>



Посмотрим зависимость отношения амплитуд $k = A_{\text{бок}}/A_{\text{оч}}$ у боковых и основной частоты от параметра $m = (A_{\text{max}} - A_{\text{min}})/(A_{\text{max}} + A_{\text{min}})$.

| $A_{\text{max}} - A_{\text{min}}, \text{ В}$ | $A_{\text{бок}}, \text{ В}$ | m | k |
|--|-----------------------------|-----|--------|
| 0.2 | 0.0160 | 0.1 | 0.0497 |
| 0.6 | 0.0470 | 0.3 | 0.1460 |
| 1.0 | 0.0750 | 0.5 | 0.2329 |
| 1.4 | 0.1070 | 0.7 | 0.3323 |
| 1.8 | 0.1390 | 0.9 | 0.4317 |
| 2.0 | 0.1530 | 1.0 | 0.4752 |

$$A_{\text{оч}} = (322 \pm 0.5) \text{ мВ}, \Delta A_{\text{бок}} = 0.0005 \text{ В}, \Delta k = 0.0016$$



Из графика

$$\frac{k}{m} = 0.476 \pm 0.015,$$

что сходится с теоретическим значением 0.5.

Вывод

В данной работе мы изучили понятие спектра и спектрального анализа, а также исследовали спектральный состав периодических электрических сигналов.

А именно, мы посмотрели на прямоугольные импульсы, цуги гармонических колебаний, а также гармонические сигналы, модулированные по амплитуде. Кроме того, нами был экспериментально проверен частный случай выполнения соотношения неопределённости.