



ВПВ по электродинамике и магнетизму  
Лабораторная работа 3.3.3 "Опыт Милликена"

Сурженко Эдуард Б01-304

Сидорчук Максим Б01-304

Иванов Максим Б04-307

Долгопрудный, 2024 г.

**Цель работы:** измерить электромагнитный заряд методом масляных капель.

**В работе используется:** плоский конденсатор в защитном кожухе, осветитель, измерительный микроскоп, электростатический вольтметр, секундомер, переключатель напряжения, пульверизатор с маслом.

## 1. Методика эксперимента

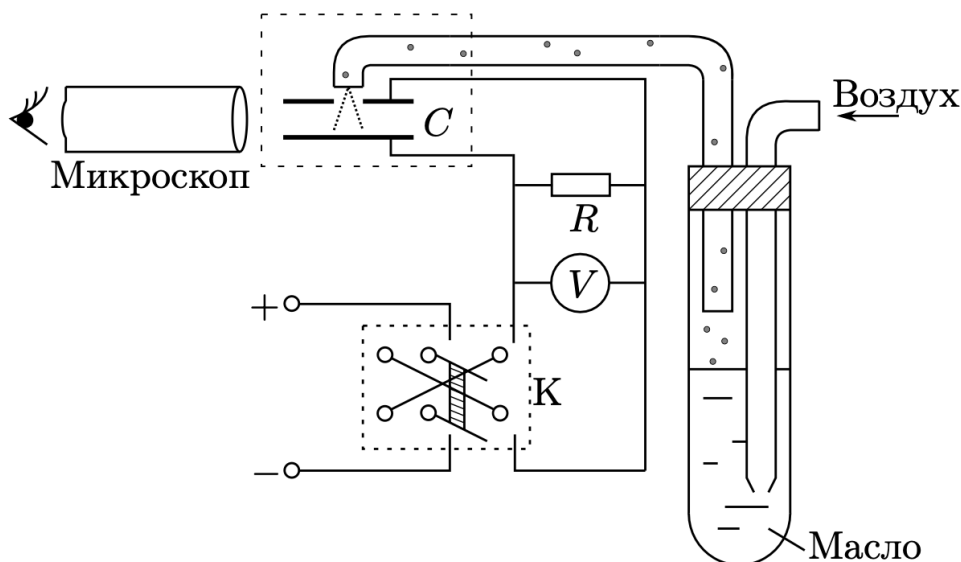


Рис. 1: Схема установки

Через маленькое отверстие верхней пластины конденсатора  $C$  разбрызгиваем капли масла. Из-за трения о воздух капли приобретают случайный по абсолютной величине и знаку электрический заряд.

Подаём на пластины конденсатора напряжение, которое будем измерять вольтметром  $V$ . Ключом  $K$  меняем направление поля в конденсаторе, чтобы можно было вернуть каплю на прежнее место и снова произвести измерение. В фокальной плоскости окуляра измерительного микроскопа виден ряд горизонтальных линий, расстояние между которыми равно 0.25 мм. Наблюдая за перемещением капли между линиями, можно определить пройденный каплей путь. Время  $t$  свободного падения капли от одной выбранной линии до другой и время  $t'$  её обратного подъёма, происходящего под действием сил электрического поля, измеряем секундомером. После размыкания ключа конденсатор разрядится через сопротивление  $R$ .

## 2. Теоретическое введение

Существование элементарного заряда приводит к дискретности значений заряда  $q$ :

$$q = 0, \pm e, \pm 2e, \pm 3e, \dots, \pm ne, \dots,$$

В данном опыте измеряется заряд малых капель масла, несущих несколько элементарных зарядов. Сравнив заряды между собой, мы убедимся в их кратности элементарному заряду  $e$ .

### 2.1 Уравнение движения капли

Рассмотрим свободное падение капли, применим второй закон Ньютона:

$$m \frac{dv}{dt} = mg - F_{\text{тр}}, \quad (1)$$

При малых скоростях сила трения для сферической капли определяется формулой Стокса:

$$F_{\text{тр}} = 6\pi\eta r v = kv, \quad (2)$$

где  $r$  - радиус капли  $\eta$  - коэффициент вязкости трения воздуха. Подставляя (2) в (1) проинтегрируем уравнение по времени ( $v_0 = 0$ ), получим:

$$v = v_{\infty}(1 - e^{-kt/m}), \quad (3)$$

где  $v_{\infty}$  - установившаяся скорость падения

$$v_{\infty} = \frac{mg}{k} = \frac{\frac{4}{3}\pi\rho r^3 g}{6\pi\eta r} = \frac{2}{9} \frac{\rho}{\eta} g r^2.$$

где  $\rho$  - плотность масла. Согласно (3), установление скорости происходит за характерное время:

$$\tau = \frac{m}{k} = \frac{v_{\infty}}{g} = \frac{2}{9} \frac{\rho}{\eta} r^2.$$

Из-за очень малого размера капли можно считать, что её движение всегда равно установившемуся.

Тогда, зная время падения капли, определим её радиус, обозначим пройденный путь через  $h \approx v_{\infty}t$ :

$$r = \sqrt{\frac{9\eta h}{2\rho g t}}. \quad (4)$$

Теперь рассмотрим движение капли при наличии электрического поля  $E = U/l$ . Если капля движется против  $g$  то уравнение принимает вид:

$$m \frac{dv}{dt} = \frac{qU}{l} - mg - kv,$$

Дополнительная константа в правой части не изменяет постоянной времени  $\theta = \frac{k}{m}$ . Найдём новую установившуюся скорость, положим, что временем установления скорости можно пренебречь:

$$v'_\infty = \frac{qU}{kl} - v_\infty, \quad (5)$$

пусть  $t' = h/v'_\infty$  - время подъёма капли на начальную высоту. Используя равенства (2), (4) и (5), получим окончательную расчётную формулу для заряда капли:

$$q = 9\pi \frac{l}{U} \sqrt{\frac{2}{\rho g}} (\eta h)^{3/2} \frac{t + t'}{t^{3/2} t'}. \quad (6)$$

## Оценка погрешности

Дискретность заряда можно определить, если только погрешность измерения заряда много меньше элементарного заряда. Это условие легко выполнимо, если кратность заряда -  $n$  - мала. В условиях нашего опыта трудно произвести измерения с точностью лучше 5%. Поэтому необходимо, чтобы заряд капли был меньше  $20e$  (оптимально —  $5e$ ).

Проанализируем погрешность формулы ((6)). Из всех велчин, входящих в формулу ((6)), на опыте измеряются только  $U, t, t'$ . Погрешность напряжения пренебрежимо мала, поэтому погрешность измерения  $q$  определяется в основном погрешностью времени  $\delta t$ .

При визуальных наблюдениях фактором, определяющим величину погрешности, выступает время реакции человека, которое практически не бывает меньше  $\delta t \approx 0,2$  с.

Из формулы ((6)) нетрудно определить погрешность:

$$\frac{\sigma_q}{q} = \sqrt{\frac{\sigma_U^2}{U^2} + \frac{\sigma_t^2 t_0^2}{t^2 (t_0 + t)^2} + \frac{\sigma_{t_0}^2}{4t_0^2} \left( \frac{3t + t_0}{t + t_0} \right)^2} \quad (7)$$

Из соотношения ((7)) следует, что погрешность будет минимальна, если времена  $t$  и  $t'$  — величины одного порядка. В этом случае для погрешности определения заряда имеем

$$\frac{\sigma_q}{q} = \sqrt{\frac{\sigma_U^2}{U^2} + \frac{\sigma_t^2}{4t_0^2} + \frac{\sigma_{t_0}^2}{t_0^2}}$$

### 3. Обработка результатов измерений

Оценим с помощью формулы (6) минимальное напряжение  $U_{min} = 300$  В, такое напряжение нужно для подъёма капель, несущих 5 зарядов электрона на высоту  $h = 1$  мм. Напряжения, меньше этого будут поднимать слишком сильно заряженные капли, что приведёт к неточности эксперимента и слишком большим погрешностям. **Условия эксперимента:**

Расстояние между пластинами  $l = 0.725$  см, плотность масла  $\rho = 0.898$  г/см<sup>3</sup>, вязкость воздуха  $\eta = 1.85 \cdot 10^{-5}$  Па · с ( $T = 300$  К), цена деления окуляра  $b = 0.25$  мм,  $U_{min} = 300$  В.

**Определение величины элементарного заряда:**

Для 14 капель проведём измерение их зарядов  $q$ , результаты представлены в таблице:

$N_{зар}$	$U_{конд}, В$	$t_0, с$	$t, с$	$q_{ср} \cdot 10^{-19}$ Кл	$n_{шт}$
1	(300 ± 20)	(32.68 ± 0.2)	(9.59 ± 0.2)	(6.09 ± 1.51)	4
2	(400 ± 20)	(28.88 ± 0.2)	(7.91 ± 0.2)	(5.81 ± 1.24)	4
3	(400 ± 20)	(26.48 ± 0.2)	(8.06 ± 0.2)	(6.08 ± 1.52)	4
4	(400 ± 20)	(18.46 ± 0.2)	(3.06 ± 0.2)	(17.17 ± 3.16)	10
5	(400 ± 20)	(16.11 ± 0.2)	(3.39 ± 0.2)	(17.18 ± 3.48)	10
6	(400 ± 20)	(22.47 ± 0.2)	(10.15 ± 0.2)	(5.83 ± 0.92)	4
7	(400 ± 20)	(26.26 ± 0.2)	(9.05 ± 0.2)	(5.62 ± 1.52)	3
8	(400 ± 20)	(25.44 ± 0.2)	(8.86 ± 0.2)	(5.87 ± 1.53)	4
9	(400 ± 20)	(21.69 ± 0.2)	(10.33 ± 0.2)	(5.95 ± 1.68)	4
10	(400 ± 20)	(32.03 ± 0.2)	(6.90 ± 0.2)	(6.03 ± 1.53)	4
11	(400 ± 20)	(24.04 ± 0.2)	(3.77 ± 0.2)	(12.13 ± 3.20)	7
12	(400 ± 20)	(27.91 ± 0.2)	(7.22 ± 0.2)	(6.40 ± 1.83)	4
13	(400 ± 20)	(8.72 ± 0.2)	(7.20 ± 0.2)	(16.5 ± 2.71)	10
14	(400 ± 20)	(12.24 ± 0.2)	(4.52 ± 0.2)	(16.72 ± 3.53)	10

Таблица 1: Таблица с результатами измерений

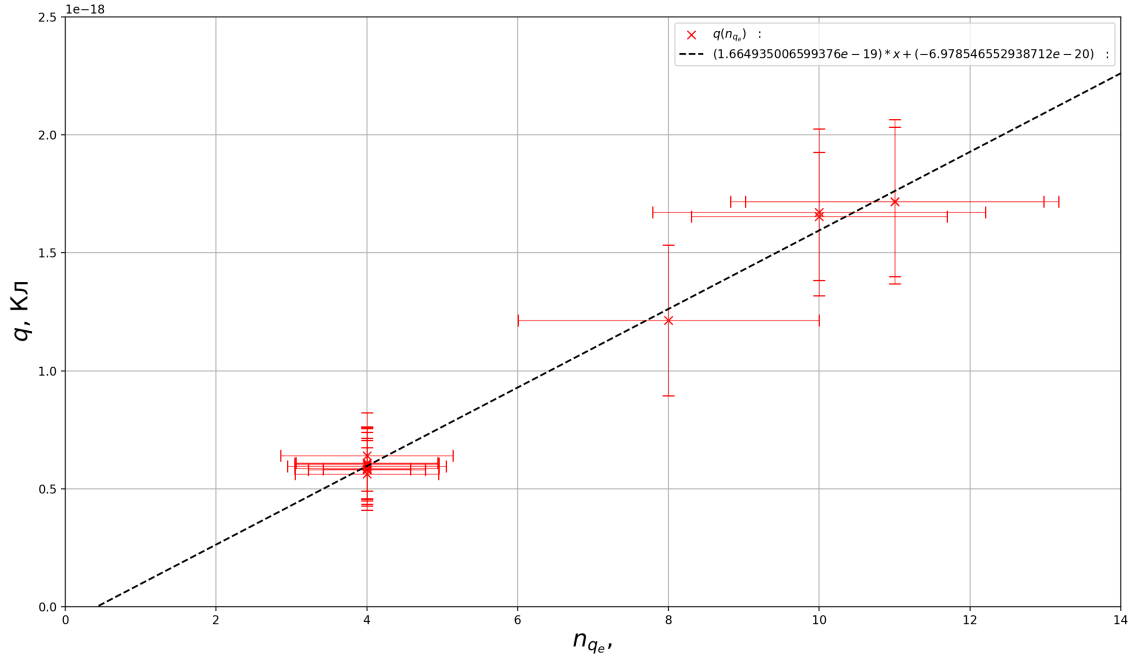


Рис. 2: График зависимости заряда капли масла от кол-ва элементарных зарядов

По наклону графика можно определить элементарный заряд электрона  $|e^-| = (1.67 \pm 0.06) \cdot 10^{-19}$  Кл.

## 4. Сравнение с опытом Толмена

Пусть в единице объёма металла  $n$  свободных электронов. Так как движение зарядов хаотично и равновероятно, то их плотность тока равна 0. Пусть в какой-то момент возникло упорядоченное движение электронов со средней скоростью  $u$ . Тогда плотность возникшего тока через единицу площади равна:

$$j = enu$$

Рассмотрим неравномерное вращение металлического кольца вокруг своей оси (линейная скорость равна  $v$ ). Если бы свободные электроны были крепко связаны с атомами и двигались совместно, то движение положительных и отрицательных зарядов создавало бы токи равные и противоположно направленные. Если же электроны были неподвижны, то ток определялся бы только движением положительных зарядов:

$$j = -env = enu$$

Однако в действительности, неравномерное движение кристаллической решётки увлекает за собой часть электронов, вследствие чего будет возникать переменный ток. Уравнение движения электронов примет вид:

$$m \frac{d}{dt}(v_w + u) = F$$

Где  $v_w + u$  - полная скорость электрона, а  $F$  - сила, характеризующаяся параметрами проводника  $(R, L)$ . И сила сопротивления и сила порождаемая индуктивностью зависят от  $u$ , а не от полной скорости электрона. Учитывая это получим:

$$m \frac{du}{dt} = F(u) - m \frac{dv_w}{dt}$$

где последнее слагаемое представляет собой силу инерции относительно движущейся системы. Воспользуемся общим уравнением переменных токов.

$$\frac{1}{c} L \frac{dJ}{dt} + RI = \oint E_s^{\text{суп}} dS,$$

приравняв сторонней силе  $eE_s^{\text{суп}}$  силу инерции  $\frac{dv_w}{dt}$  получим:

$$\frac{1}{c} L \frac{dJ}{dt} + RI = -\frac{m}{e} \oint \frac{dv_w}{dt} dS = -\frac{ms}{e} \frac{dv_w}{dt}$$

где  $s$  -длина кольца. Проинтегрировав по времени, от  $t = t_1$  до  $t = t_2$  полагая, что в эти моменты времени ток обращается в 0, получим:

$$R \int_{t_2}^{t_1} J dt = -\frac{ms}{e} (v_w(t_2) - v_w(t_1))$$

Этим соотношением Толмен воспользовался для определения отношения  $e/m$  в металле. Круглая проволочная катушка приводилась в движение и затем (в момент времени  $t_1$ ) и приводилась в состояние покоя ( $v_w(t_2) = 0$ ) в течение доли секунды. В течение этого промежутка времени по катушке тек ток, измеряемый неподвижным гальванометром. Измерив  $R \int_{t_2}^{t_1} J dt$  и  $v_w(t_1)$  и учтя все побочные эффекты, можно рассчитать отношение  $m/e$  для носителей тока в металле.

полученное экспериментальное значение в опытах Толмена оказалось равным:

$$m/e = 4,58 \cdot 10^{-9} \text{Г/Кл} = 1,53 \cdot 10^{-18} \text{абс. ед. СГС},$$

$$e = 1,986 \cdot 10^{-19} \text{Кл}$$

Что согласуется по порядку величины со значением, полученным при измерениях над свободными электронами в катодных лучах

$$m/e = 5,66 \cdot 10^{-9} \text{Г/Кл} = 1,9 \cdot 10^{-18} \text{абс. ед. СГС},$$

$$e = 1,608 \cdot 10^{-19} \text{Кл}$$

## 5. Вывод

### 1. Результат опыта Милликена

В данном опыте мы определили значение элементарного заряда методом Милликена  $e^- = (1.67 \pm 0.06) \cdot 10^{-19}$  Кл, что в пределах относительной погрешности в 3.6% сходится с табличным значением.

### 2. Погрешности

Относительная погрешность определения элементарного заряда  $\sigma_q/q$  связана с задержкой реакции экспериментатора – средняя реакция человека составляет приблизительно 0.2 с, а так же неточностью показателей вольтметра, что на данной установке составило  $\pm 20$  В.

### 3. Сравнение с опытом Толмена

Сравнив с методом получения элементарного заряда по Толмену, мы пришли к выводу, что в нашей работе табличный заряд электрона  $e^-$  определяется точнее; относительная погрешность в опыте Милликена равняется 4.4 %, в опыте Толмена она равна 23.05 %.