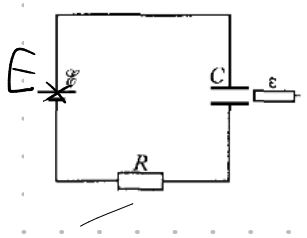
Физика X

№ 9.4

ε, C, E, R

$I(t) - ?$



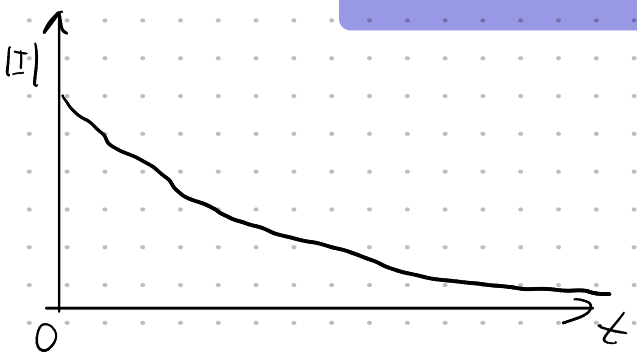
$$IR + \frac{q}{C} = E$$

$$\frac{dq}{dt} + \frac{q}{RC} = \frac{E}{R} \Rightarrow q = A e^{-\frac{t}{RC}} + CE$$

$$q(0) = E \cdot C \cdot \varepsilon$$

$$\Rightarrow q = CE \cdot \left(1 + (\varepsilon - 1) e^{-\frac{t}{RC}}\right)$$

$$I(t) = \dot{q}(t) = \boxed{-(\varepsilon - 1)\frac{E}{R} e^{-\frac{t}{RC}}}$$



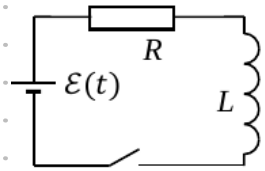
/ ОТВЕТ

№ 10.1

$\mathcal{E}(t) = At$

$t \ll \frac{L}{R}$

$I(t) - ?$



$$L\frac{dI}{dt} + IR = \mathcal{E}(t)$$

$$\frac{dI}{dt} + I\frac{R}{L} = \frac{At}{L} \Rightarrow \frac{dI}{dt} \approx \frac{At}{L} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow I = \frac{At^2}{2L} + C$$

$$I(0) = 0$$

$$\Rightarrow \boxed{I = \frac{At^2}{2L}}$$

/ ОТВЕТ

№ 9.33

$\frac{L'}{L} = \frac{1}{2}$

$\frac{C'}{C} = 2$

$\frac{N_e'}{N_e} - ?$

$$N_e = \frac{1}{R\pi}\sqrt{\frac{L}{C}}$$

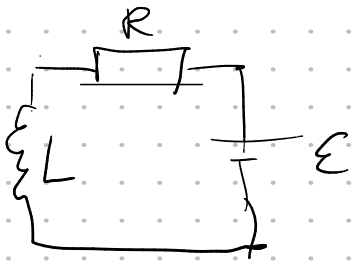
$$\boxed{\frac{N_e'}{N_e}} = \sqrt{\frac{L'C}{C'L}} = \boxed{\frac{1}{2}}$$

/ ОТВЕТ

№ 9.8

$L, \mathcal{E}, L_1, L_2, R$

$I(t) - ?$



$\Phi = const \Rightarrow I_1 L_1 = I_2 L_2$

$I_1 = \frac{\mathcal{E}}{R}$

$\mathcal{E} - \dot{I} L_2 = I R$

$$\frac{dI}{I} = -\frac{R}{L_2} dt \Rightarrow I = C \cdot e^{-\frac{tR}{L_2}}$$

$$C \cdot e^{-\frac{tR}{L_2}} = \mathcal{E} \Rightarrow C = \frac{\mathcal{E}}{R} \exp\left(-\frac{tR}{L_2}\right) + \tilde{C}$$

$t = 0$:

$$I_2 = \frac{\mathcal{E}}{R}(1 + \tilde{C}) \rightarrow \tilde{C} = \frac{L_1 - L_2}{L_1}$$

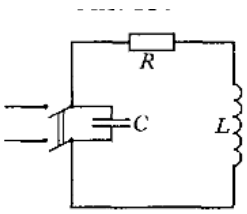
$$\boxed{I = \frac{\mathcal{E}}{R}\left(1 - \frac{L_2 - L_1}{L_1} \exp\left(-\frac{tR}{L_2}\right)\right)}$$ / ОТВЕТ

№ 9.15

R, L, V_0, C

$4L > CR^2$

$u(t)$



$\gamma = \frac{R}{2L}$

$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$

$\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2}$

$u_0 = I_0 R$

$q = u_0 C$

$$q = A e^{-\gamma t} \cos(\omega t + \varphi_0)$$

$$u_0 C = A \cos\varphi_0 \Rightarrow A = \frac{u_0 C}{\cos\varphi_0}$$

$$-\frac{1}{RC} = \omega \operatorname{tg}\varphi_0 + \gamma \Rightarrow \varphi_0 = -\operatorname{arctg}\frac{\gamma RC + 1}{RC}$$

Из всего вышe:

$$\boxed{u(t) = \frac{C u_0}{\cos\varphi_0} \cdot \cos(\omega t + \varphi_0)}$$

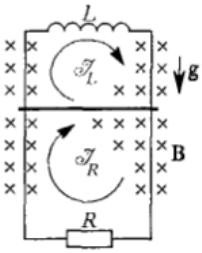
$$\omega = \sqrt{\frac{1}{LC} - \frac{R^2}{4L^2}} \qquad \varphi_0 = -\operatorname{arctg}\frac{R^2 C + 2L}{2RLC}$$ / ОТВЕТ

№ 9.48

m, l, L, R

B, P

$x_0 - ?$



$$m\ddot{x} = mg - (I_L + I_R)\,B\ell$$

$$\dot{I}_L L = \dot{x} B\ell$$

$$I_R R = \dot{x} B\ell$$

$$m\ddot{x} + B^2\ell^2\left(\frac{x}{L} + \frac{\dot{x}}{R}\right) - mg = 0$$

$$\ddot{x} + 2\gamma\dot{x} + \omega_0^2 x = 0$$

$$\gamma = \frac{B^2\ell^2}{2mR}$$

$$\omega_0 = \frac{B\ell}{\sqrt{mL}}$$

$$\omega^2 = \omega_0^2 - \gamma^2$$

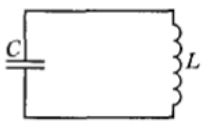
$$\Rightarrow x = \frac{g}{\omega_0^2}\left(1 - e^{-\gamma t}\left(\cos\omega t + \frac{\gamma}{\omega}\sin\omega t\right)\right)$$

$$\boxed{x_0} \to \frac{g}{\omega_0^2} = \boxed{\frac{mLg}{B^2\ell^2}}$$ /ОТВЕТ

№9.34

$\mathcal{E}_0, C, L$

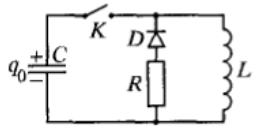
$I(t) - ?$



№ 9.27

C, q_0, L, R

$q_R - ?$



$$\frac{q_0^2}{2C} = \frac{LI_0^2}{2} \Rightarrow I_0 = \frac{q_0}{\sqrt{LC}}$$

$$IR = -\dot{I}L \Rightarrow I = \exp\left(-\frac{R}{L}t\right) I_0$$

$$q_R = \int_0^{+\infty} I\,dt = \frac{q_0}{\sqrt{LC}} \int_0^{+\infty} \exp\left(-\frac{R}{L}t\right) dt = \boxed{\frac{q_0}{R}\sqrt{\frac{L}{C}}}$$ / ОТВЕТ

№ 9.36

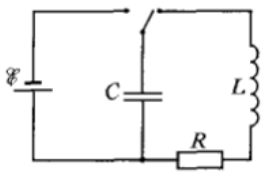
$C = 0{,}1\ \text{мкФ}$

$\mathcal{E} = 1\ \text{кВ}$

$L = 100\ \text{мГ}$

$t - ?$

для $I = max$



$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$$

$$\gamma = \frac{R}{2L}$$

$$\ddot{q} + 2\gamma\dot{q} + \omega_0^2 q = 0 \Rightarrow q = (A + Bt)e^{-\gamma t}$$

$$\dot{q}(0) = 0$$

$$q(0) = C\mathcal{E}$$

$\Rightarrow$

$$\Rightarrow A = C\mathcal{E}, \quad B = \omega_0 C\mathcal{E}$$

$$t = \frac{1}{\omega_0} = \boxed{\sqrt{LC} \approx 10^{-4}\ \text{с}}$$

$$\dot{q}(t) = \dot{q}(\sqrt{LC}) = \boxed{-\frac{C\mathcal{E}}{e\sqrt{LC}} \approx 0{,}37\ \text{А}}$$ / ОТВЕТ

№ 9.54

9.54. В момент времени $t = 0$ идеальный LC-контур с собственной частотой 100 Гц возбуждается периодической последовательностью импульсов с длительностью $\tau = 0{,}02$ с, изображенной на рис. 186 ($\mathscr{E}_0 = 5$ В). Найти период следования импульсов T, при котором среднее значение напряжения на конденсаторе $V_{ср} = 2$ В. Нарисуйте график зависимости $V_C(t)$.

$$\tau = 0{,}02\ \text{с} = \frac{2}{\omega_0} \Rightarrow \tau \text{ — два пер.}$$

$$U_C(t) = \mathcal{E}_0 + A\cos(\omega_0 t + \varphi_0)$$

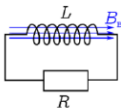
$$\left.\begin{aligned} 0 &= \mathcal{E}_0 + A\cos\varphi_0 \\ -A\sin\varphi_0 &= 0 \end{aligned}\right| \Rightarrow \begin{aligned} \varphi_0 &= 0 \\ A &= -\mathcal{E}_0 \end{aligned}$$

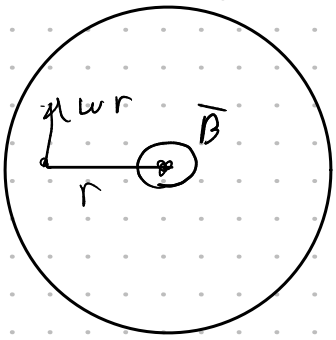
$$U_C(t) = \mathcal{E}_0(1 - \cos\omega_0 t)$$

$$\bar{U}\Big|_0^{\tau} = \mathcal{E}_0 \Rightarrow \bar{U}T = \mathcal{E}_0\tau \Rightarrow \boxed{T = 0{,}05\ \text{с}}$$ / ОТВЕТ

T 12

T12. (2020-3А) Переменное однородное внешнее магнитное поле $B_{вн}(t) = B_0 \cos \omega t$ пронизывает катушку индуктивности вдоль её оси (см. рис.). Катушка имеет индуктивность L и замкнута на сопротивление $R = \omega L$. Найдите амплитуду и сдвиг фазы (относительно $B_{вн}$) установившихся колебаний суммарного магнитного поля внутри катушки.





$$F(r) = eE(r)$$

$$E(r) = \frac{\rho \omega r B}{c} = \frac{2\varkappa \omega^2 r}{c^2} \Bigg| \Rightarrow$$

$$I = \frac{\omega \varkappa}{2\pi}$$

$$\Rightarrow B = \frac{4\pi}{c} = \frac{2\omega\varkappa}{c} = \frac{B_0}{\sqrt{2}}$$

$$\Delta\varphi = \int_0^R E\,dr = \varkappa\left(\frac{\omega R}{c}\right)^2 = -\frac{\pi}{4}$$

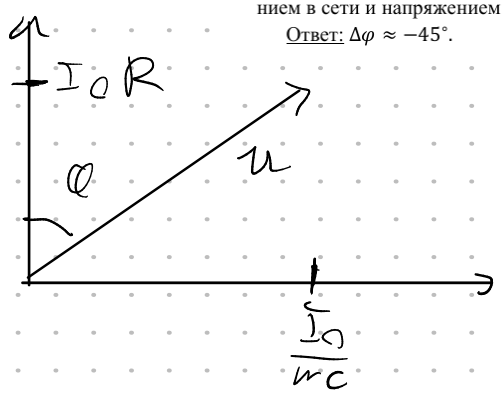
/ ОТВЕТ

Неделя XI

№ 11.1

⁰11.1. К последовательно соединенным резистору с сопротивлением $R = 3{,}2$ кОм и конденсатору ёмкостью $C = 1$ мкФ приложено сетевое напряжение с частотой $f = 50$ Гц. Найдите сдвиг фаз $\Delta\varphi$ между напряжением в сети и напряжением на резисторе.

Ответ: $\Delta\varphi \approx -45°$.



$$tg\,\varphi = \frac{Im\,Z}{Re\,Z} = \frac{-\frac{1}{\omega C}}{R} = \frac{1}{2\pi f_0 R}$$

$$\varphi = arctg\left(-\frac{1}{2\pi f_0 R}\right) \approx -45°$$

/ ОТВЕТ

№ 11.2

⁰11.2. Некоторый двухполюсник, имеющий импеданс $Z = 3 + i\sqrt{3}$ [Ом], подключён к идеальному источнику переменной ЭДС с амплитудой $\mathcal{E}_0 = 2$ В. Найдите среднюю мощность, потребляемую двухполюсником.

Ответ: $P = 0{,}5$ Вт.

$$\hat{I}\hat{Z} = \hat{\mathcal{E}}_0 \Rightarrow I = \frac{\mathcal{E}_0}{2\sqrt{3}}$$

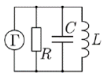
$$\bar{P} = \frac{I_0^2 R}{2} = \frac{\mathcal{E}_0^2}{12} \cdot \frac{3}{2}\,Ом = \frac{\mathcal{E}_0^2}{8}\,Ом = 0{,}5\,Вт$$

/ ОТВЕТ

T 13

T13. (2023-1Б) В представленной на рисунке электрической схеме генератор Г создаёт переменный ток по закону $I(t) = I_0(\cos\omega_0 t + \cos 2\omega_0 t)$, где $\omega_0 = 1/\sqrt{LC}$. Определите выделяющуюся на сопротивлении R среднюю мощность, если $\sqrt{L/C} = 3/2\,R$.

Ответ: $P = \frac{3}{4} I_0^2 R$.



$$\frac{1}{Z(\omega_0)} = \frac{1}{R} + j\omega C - \frac{j}{\omega_0 L} = \frac{1}{R} \Rightarrow Z(\omega_0) = R$$

$$\frac{1}{2Z(2\omega_0)} = \frac{1}{R} + 2j\sqrt{\frac{C}{L}} - j\frac{1}{2}\sqrt{\frac{C}{L}} = \frac{1}{R} + \frac{j}{R} \Rightarrow Z(2\omega_0) = \frac{R}{1+j} = R\left(\frac{1}{2} - \frac{j}{2}\right)$$

Первая гарм: $\omega = \omega_0$:

$$P_1 = \frac{1}{2}|I|^2 R = \frac{1}{2} I_0^2 R$$

Вторая — " — $\omega = 2\omega_0$:

$$\hat{\mathcal{E}} = \hat{I} \cdot Z$$

$$\hat{I} = I_0(\cos(2\omega_0 t) + i\sin(2\omega_0 t))$$

$$\Rightarrow \hat{\mathcal{E}} = I_0(\cos(2\omega_0 t) + i\sin(2\omega_0 t)) \cdot \left(\frac{1}{2} - \frac{j}{2}\right)R$$

$$Re(\hat{\mathcal{E}}) = \frac{1}{2} I_0 R(\cos(2\omega_0 t) + \sin(2\omega_0 t))$$

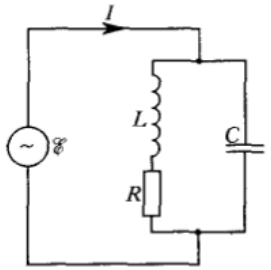
$$P_2 = \frac{1}{T}\int_0^T I_0 \cos(2\omega_0 t) \cdot Re(\hat{\mathcal{E}})\,dt = \frac{I_0^2 R}{2T}\int_0^T (\cos^2(2\omega_0 t) + \sin(2\omega_0 t) \cdot \cos(2\omega_0 t))\,dt =$$

$$= \frac{I_0^2 R}{2T}\left[\int_0^T \frac{1-\sin(4\omega_0 t)}{2}\,dt + \frac{1}{2}\int_0^T \sin(4\omega_0 t)\,dt\right] = \frac{I_0^2 R}{4} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow P_{общ} = P_1 + P_2 = \boxed{\frac{3}{4} I_0^2 R}$$ / ОТВЕТ

N 10.8

10.8. Источник переменного тока с циклической частотой ω и ЭДС $\mathcal{E}$ действует на колебательный контур (рис. 192). Определить силу тока I и сдвиг фазы φ между I и $\mathcal{E}$ при резонансе.



$$\ddot{q} + \frac{R}{L}\dot{q} + \frac{1}{LC}q = 0$$

$$\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2} = \omega = \frac{1}{\sqrt{LC}}$$ т.к. резон.

$$\frac{1}{Z} = \frac{1}{R + j\omega L} + j\omega C = \frac{j\omega RC - \omega^2 LC + 1}{R + j\omega L} \Rightarrow Z = \frac{L}{RC} - \frac{j}{\omega C}$$

$$\boxed{tg\,\varphi = -\frac{1}{\omega C} \cdot \frac{RC}{L} = -\frac{R}{\omega L}}$$

$$\boxed{I = \frac{\mathcal{E}}{|Z|} = \frac{\mathcal{E}}{\sqrt{\frac{L^2}{R^2C^2} + \frac{1}{\omega^2 C^2}}} = \frac{\mathcal{E}RC\omega}{\sqrt{L^2\omega^2 + R^2}}}$$ / ОТВЕТ

№10.6

10.6. С помощью схемы, показанной на рис. 191, требуется получить фазовый сдвиг на угол 90° между напряжением на входе

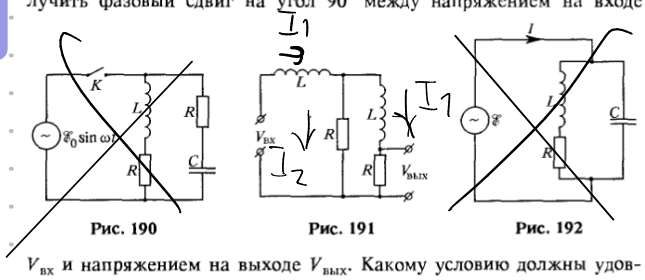


Рис. 190 Рис. 191 Рис. 192

$V_{вх}$ и напряжением на выходе $V_{вых}$. Какому условию должны удовлетворять параметры схемы R и L, если циклическая частота входного напряжения равна ω? Чему при этом будет равно отношение амплитуд входного и выходного напряжений?

$$Z_0 = j\omega L + \frac{1}{\frac{1}{R} + \frac{1}{R + j\omega L}} = \frac{3j\omega L R - \omega^2 L^2 + R^2}{2R + j\omega L}$$

$$I_0 = \frac{V_{вх}}{Z_0} = V_{вх} \frac{2R + j\omega L}{R^2 - \omega^2 L^2 + 3j\omega L R}$$

$$U = V_{вх} - I_0 \cdot j\omega L = V_{вх}\left(1 - \frac{2RZ + Z^2}{R^2 + Z^2 + 3ZR}\right) = \frac{R^2 + 2R}{R^2 + 3ZR + Z^2} V_{вх}$$

$$\underline{Z = j\omega L}$$

$$I_1 = \frac{U}{R + Z}$$

$$V_{вых} = U - I_1 Z = \frac{R^2}{\underbrace{R^2 + 3ZR + Z^2}_{Z_1}} V_{вх}$$

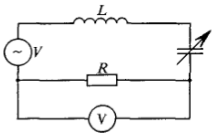
$$Z_1 = \frac{R^2}{R^2 - \omega^2 L^2 + 3j\omega L R} \xrightarrow[\text{сдвиг } \frac{\pi}{2}]{} Z_1 \in \mathrm{Im} \Rightarrow R^2 - \omega^2 L = 0 \Rightarrow \boxed{R = \omega L}$$

$$\Rightarrow Z_1 = \frac{-R}{3\omega L} = -\frac{1}{3} \Rightarrow \boxed{\left|\frac{V_{вых}}{V_{вх}}\right| = \frac{1}{3}}$$

ОТВЕТ

№10.23

10.23. Емкостный датчик — одно из наиболее чувствительных радиотехнических устройств для регистрации малых механических смещений. Обычно емкостный датчик представляет собой электрический колебательный контур с воздушным конденсатором (рис. 197), одна из пластин которого подвижна. Оценить минимальное измеряемое перемещение пластинки конденсатора Δd, если контур настроен в резонанс. Напряжение источника питания $V = 100$ В, минимальное измеряемое изменение напряжения на сопротивлении $\Delta V = 10$ мкВ, добротность контура $Q = 10^3$ и зазор между пластинами $d = 1$ мм.



1) $\omega = \frac{1}{\sqrt{LC}}$ $\quad Q = \frac{1}{R}\sqrt{\frac{L}{C}} = \frac{\omega L}{R} = \frac{1}{\omega C R}$

$$V = IR = \frac{u_0}{\sqrt{1+Q^2\left(\frac{2\Delta\omega}{\omega}\right)^2}}$$

$$2)\ \Delta\omega = \Delta\frac{1}{\sqrt{LC}} = \Delta\sqrt{\frac{d}{L\varepsilon_0 S}} = \frac{\Delta d}{2\sqrt{L\varepsilon_0 S d}} = \frac{\Delta d\,\omega}{d}$$

$$\left(\frac{2\Delta\omega}{\omega}\right)^2 = \left(\frac{\Delta d}{d}\right)^2$$

$$3)\ V = V\left(1 - \frac{Q^2\left(\frac{\Delta d}{d}\right)^2}{2}\right) \Rightarrow \Delta V = \frac{V Q^2\left(\frac{\Delta d}{d}\right)}{2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{\Delta d = \frac{d}{Q}\sqrt{\frac{2\Delta V}{V}} \approx 4{,}5\cdot 10^{-7}\ \text{см}}$$ / ОТВЕТ

N 10.59

10.59. К клеммам A и B (рис. 218) подводится произвольное переменное напряжение $V_{вх}(t)$, которое возбуждает между клеммами M и N напряжение $V_{вых}(t)$. Параметры R, L, C подобраны таким образом, что напряжение на выходе в каждый момент времени мало по сравнению с напряжением на входе в тот же момент. Показать, что при выполнении этого условия выходное напряжение на схемах *1* и *2* приблизительно пропорционально интегралу, а на схемах *3* и *4* — производной от входного напряжения по времени.

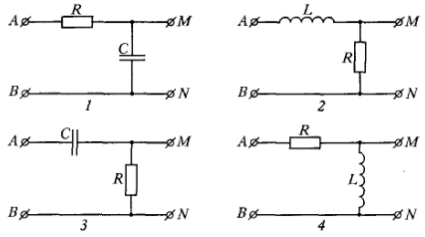


Рис. 218

$$1)\ I = \frac{V_{in} - V_{out}}{R} = C\frac{dV_{out}}{dt} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{V_{out} = \frac{1}{RC}\int V_{in}\,dt}$$

$$2)\ V_{in} - V_{out} = L\frac{dI}{dt} = L\frac{d\left(\frac{V_{out}}{R}\right)}{dt} = \frac{L}{R}\frac{dV_{out}}{dt} \Rightarrow$$

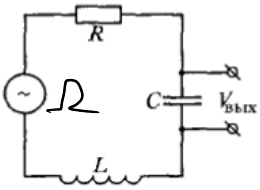
$$\Rightarrow \boxed{V_{out} = \frac{R}{L}\int V_{in}\,dt}$$

$$3)\ I = C\frac{dV_{in}}{dt} = \frac{I_{out}}{R} \Rightarrow \boxed{I_{out} = RC\cdot\frac{dV_{in}}{dt}}$$

$$4)\ V_{out} = L\frac{dI}{dt} = L\frac{d\left(\frac{V_{in}}{R}\right)}{dt} = \frac{L}{R}\frac{dV_{in}}{dt} \Rightarrow \boxed{V_{out} = \frac{L}{R}\frac{dV_{in}}{dt}}$$

N 10.20

10.20. При снятии резонансной кривой колебательного контура (рис. 194) с малым затуханием найдено: выходное напряжение максимально при частоте $f_0 = 1{,}6$ кГц; при частотах $f \ll f_0$ это напряжение равно $V_0 = 1$ В. Чему равно выходное напряжение V_1 при частоте $f_1 = 16$ кГц?



$$1)\ Z = R + j\left(\Omega L - \frac{1}{\Omega C}\right)$$

$$|Z| = \sqrt{R^2 + \left(\Omega L - \frac{1}{\Omega C}\right)^2} \qquad \gamma = \frac{R}{2L} \ll 1$$

$$|Z| = \sqrt{\underbrace{4\gamma^2 L^2}_{\approx 0} + L^2\left(\Omega - \frac{1}{\Omega C L^2}\right)^2} \underset{\omega^2 = \frac{1}{LC}}{=\!=\!=} \frac{L}{\Omega}\left|\Omega^2 - \omega^2\right|$$

2) $$V_{out} = \frac{\mathcal{E}}{|Z|} \cdot \frac{1}{j\Omega C} = \frac{\mathcal{E}\,\Omega}{L} \cdot \frac{1}{j\Omega C} \cdot \frac{1}{|\Omega^2 - \omega^2|} = -j\,\mathcal{E}\,\frac{\omega^2}{|\Omega^2 - \omega^2|}$$

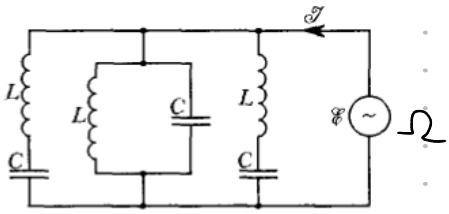
$$(V_{out})'_{\omega} = 0 \Leftrightarrow \Omega = \omega \Rightarrow f_0 = \frac{1}{2\pi\sqrt{LC}}$$

3) $$f \ll f_0 \Rightarrow |V_{out}| = \mathcal{E} = V_0$$

4) $$V_{f_1} = V_0 \frac{(2\pi f_0)^2}{\underbrace{|(2\pi f_1)^2 - (2\pi f_0)^2|}_{\neq 0}} = \boxed{V_0\left(\frac{f_0}{f_1}\right)^2 = 10\,\mu B}$$ ОТВЕТ

№ 19.25

10.25. Для схемы, изображенной на рис. 198, определить частоты источника ЭДС, соответствующие резонансам токов и напряжений. Построить график сдвига фазы тока $\mathcal{J}$ относительно ЭДС $\mathcal{E}$ в зависимости от частоты источника, считая внутреннее сопротивление последнего пренебрежимо малым.



$\alpha = \Omega^2 LC \quad \omega^2 = \frac{1}{LC}$

1) $$Z_{L\parallel C} = \frac{1}{\frac{1}{j\Omega L} + j\Omega C} = \frac{j\Omega L}{1-\alpha}$$

$$Z_{L\to C} = j\Omega L - \frac{1}{\Omega C} = j\,\frac{\Omega^2 LC - 1}{\Omega C} = j\,\frac{\alpha - 1}{\Omega C}$$

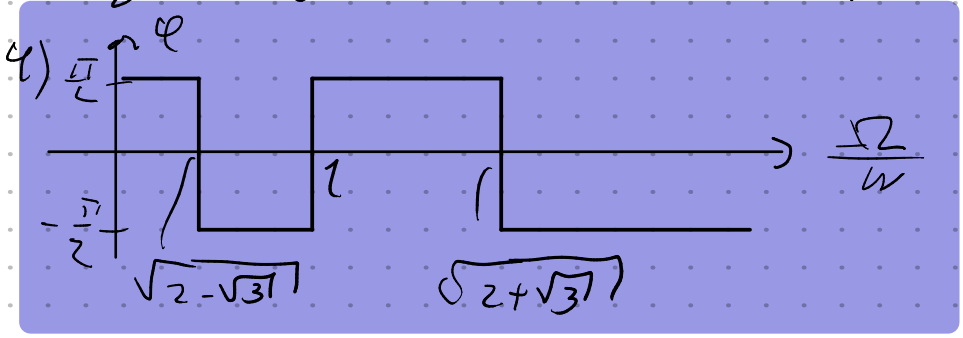
$$\frac{1}{Z_0} = \frac{2}{Z_{L\to C}} + \frac{1}{Z_{L\parallel C}} = \frac{-j\cdot 2\Omega C}{(\alpha-1)} + \frac{j(\alpha-1)}{\Omega L} = \frac{\alpha^2 - 4\alpha + 1}{(\alpha-1)\Omega L}\,j \Rightarrow$$

$$\Rightarrow Z_0 = \frac{(1-\alpha)\Omega L}{\alpha^2 - 4\alpha + 1}$$

2) Рез напр.: $Z_0 = 0 \Rightarrow \boxed{\omega^2 = \Omega^2 = \frac{1}{LC}}$

3) Рез токов: $Z_0 = \infty \Rightarrow \alpha^2 - 4\alpha + 1 = 0 \Rightarrow \boxed{\Omega^2 = (2 \pm \sqrt{3})\,\omega^2}$

4)



ОТВЕТ

№10.82

10.82. Две одинаковые катушки, намотанные на цилиндрический каркас, как показано на рис. 286, подключены последовательно с конденсатором емкостью $C = 0{,}1$ мкФ и резистором с сопротивлением $R = 10$ Ом к генератору синусоидального напряжения. При разомкнутом ключе K резонансная частота контура оказалась равной $f_1 = 1780$ Гц, а при замкнутом ключе — $f_2 = 1990$ Гц. Пренебрегая омическим сопротивлением катушек и подводящих проводов, определить:

1) добротность контуров Q_1 и Q_2 в обоих случаях;

2) коэффициенты самоиндукции L_1 и L_2 катушек и коэффициент взаимной индукции между ними.

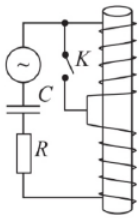


Рис. 286

1) $Q = \frac{1}{\omega RC} = \frac{1}{2\pi f RC} = Q(f)$

$Q(f_1) \approx 90$

$Q(f_2) \approx 80$

/ОТВЕТ1

2) K - разомкн.

$L_0 I = LI - MI + LI - MI \Rightarrow L_0 = 2(L - M)$

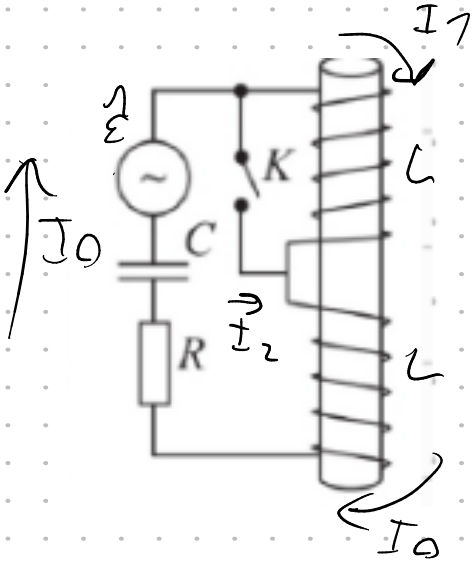
$(2\pi f_1)^2 = \frac{1}{L_0 C} \Rightarrow L_0 = \frac{1}{(2\pi f_1)^2 C}$

3) Ключ замкнут

$\hat{\mathcal{E}} = R\dot{q} + \frac{1}{C}q + L\frac{dI_0}{dt} + M\frac{dI_1}{dt}$

$0 = L\frac{dI_1}{dt} + M\frac{dI_0}{dt} \Rightarrow \frac{dI_1}{dt} = -\frac{M}{L}\frac{dI_0}{dt}$

$\Rightarrow \hat{\mathcal{E}} = RI_0 + \frac{q}{C} + \left(L - \frac{M^2}{L}\right)\frac{dI_0}{dt}$



4) $\mathcal{E}_0 = RI_0 + \frac{I_0}{C \cdot j\omega} + \left(L - \frac{M^2}{L}\right) I_0 \cdot j\omega$

$\mathcal{E}_0 = I_0 R + jI_0\left(\omega\left(L - \frac{M^2}{L}\right) - \frac{1}{\omega C}\right)$

$L_0' = \frac{1}{(2\pi f_2)^2 C}$

5) $\frac{L^2 - M^2}{L} = \frac{1}{(2\pi f_2)^2 C}$

$2(L - M) = \frac{1}{(2\pi f_1)^2 C}$

$\Rightarrow \frac{(L-M)(L+M)}{L} \cdot \frac{1}{2(L-M)} = \left(\frac{f_1}{f_2}\right)^2 = \frac{L+M}{2L} = \frac{1}{2} + \frac{M}{2L} \Rightarrow$

/ОТВЕТ2

$\Rightarrow \frac{M}{L} = 2\left(\frac{f_1}{f_2}\right)^2 - 1 = \frac{3}{5}$

6) $2\left(L - \frac{3}{5}L\right) = \frac{4}{5} = \frac{1}{(2\pi f_1)^2 C} \Rightarrow$

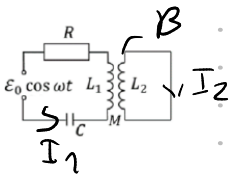
$L = \frac{5}{4} \cdot \frac{1}{(2\pi f_1)^2 C} \approx 0{,}1$ Гн

$M = \frac{3}{5}L = 0{,}06$ Гн

T14

T14. (2019-4Б) Определите коэффициент взаимной индукции катушек M в схеме, изображённой на рисунке, если ток в колебательном контуре отстаёт от входного напряжения по фазе на $\pi/4$. Параметры цепи: L_1 = 20 мГн, L_2 = 5 мГн, R = 5 Ом, C = 100 мкФ, $\omega = 10^3$ рад/с.

Ответ: M = 5 мГн.



1) $L_1 \dot{I}_1 + M\dot{I}_2 + RI_1 + \frac{q}{C} = \mathcal{E}_0 e^{i\omega t}$ - левый

2) $L_2 \dot{I}_2 + M\dot{I}_1 = 0 \Rightarrow \dot{I}_2 = -\frac{M}{L_2}\dot{I}$ - правый $\Rightarrow$

$\Rightarrow \left(L_1 - \frac{M^2}{L_2}\right)\dot{I}_1 + RI_1 + \frac{q}{C} = \mathcal{E}_0 e^{i\omega t}$

3) $L = L_1 - \frac{M^2}{L_2}$

$Z = R + \frac{1}{i\omega C} + i\omega L = R + i\left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)$

$\hat{I} = \frac{\mathcal{E}_0 e^{i\omega t}}{R + i\left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)} = \frac{R - i\left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)}{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)} \cdot \mathcal{E}_0 e^{i\omega t}$

$\operatorname{tg}\varphi = \frac{\frac{1}{\omega C} - \omega L}{R} = -1 \Rightarrow \omega L - \frac{1}{\omega C} = R$

$\omega L = R + \frac{1}{\omega C} \Rightarrow$

$\Rightarrow L = L_1 - \frac{M^2}{L_2} = \frac{\omega RC + 1}{\omega^2 C}$

4) $\frac{M^2}{L_2} = L_1 - \frac{\omega RC + 1}{\omega^2 C}$

$M = \sqrt{L_1 L_2 - L_2 \frac{\omega RC + 1}{\omega^2 C}} = 0{,}095$ Гн

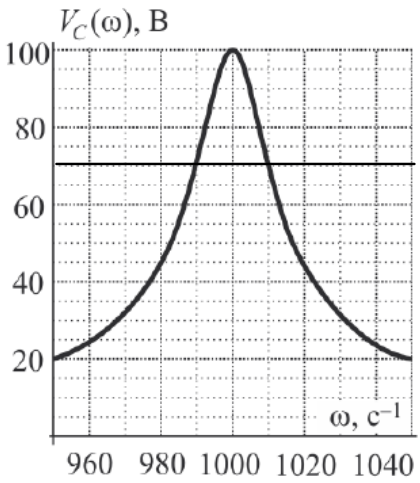
/от Вл Г

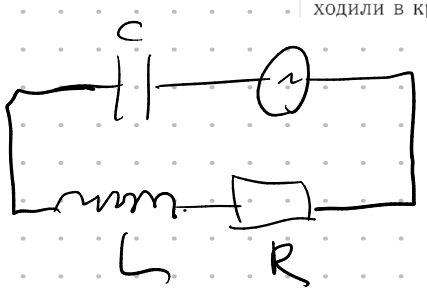
N10.92

Рис. 295

10.92. Последовательный колебательный контур состоит из конденсатора и неидеальной катушки, омическое сопротивление которой, измеренное на постоянном токе, оказалось равным $r = 2$ Ом. В эксперименте была получена зависимость амплитуды $V_C(\omega)$ напряжения на конденсаторе при неизменной амплитуде $\mathscr{E}$ сигнала генератора — источника напряжения. Используя прилагаемый график (рис. 296), определить:

1) индуктивность L катушки; 2) емкость C конденсатора; 3) коэффициент затухания δ; 4) добротность контура Q; 5) амплитуду $\mathscr{E}$ напряжения генератора; 6) сопротивление R, которое нужно включить в колебательный контур, чтобы свободные колебания контура происходили в критическом режиме.





1) $Z = R + j\left(wL - \frac{1}{wC}\right)$

$\hat{I} = \frac{\hat{\mathcal{E}}_0}{Z}$

$\hat{U}_C = \hat{I} \cdot \frac{1}{jwC}$

$$\Rightarrow \hat{U}_C = \frac{\hat{\mathcal{E}}_0}{(1 - w^2LC) + jwRC}$$

2) $$V_C(w) = |\hat{U}_C| = \frac{\mathcal{E}_0}{\sqrt{(1-w^2LC)^2 + w^2R^2C^2}}$$

$$V_C' = -\frac{1}{2}\frac{\mathcal{E}_0}{[(1-w^2LC)^2 + w^2R^2C^2]^{\frac{3}{2}}} \cdot [2(1-w^2LC)(-2wLC) + 2wR^2C^2] = 0$$

$$2(1-w^2LC)(-2wLC) + 2wR^2C^2 = 0$$

$$w^2 = w_0^2 - 2\gamma^2$$

$$2(w^2LC - 1)L + R^2C = 0$$

$$2w^2L^2C - 2L + R^2C = 0$$

$$2w^2L^2C = 2L - R^2C \Rightarrow w^2_{рез} = \frac{2L - R^2C}{2L^2C} = \frac{1}{LC} - \frac{R^2}{2L^2} =$$

$$= w_0^2 - 2\gamma^2$$

$$w^2_{рез} = 10^6 = \frac{1}{LC} - 2\gamma^2 \ldots$$

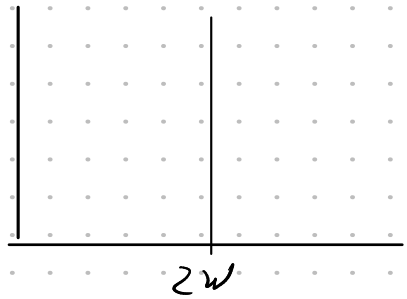
(потом формулою сим хватит времени...)

Неделя XII

N 11.1

11.1. Найти спектры следующих колебаний: 1) $f(t) = A\cos^2\omega_0 t$ (квадратичное преобразование монохроматического сигнала); 2) $f(t) = A(1 + m\cos\Omega t)\cos\omega_0 t$; $(\Omega \ll \omega_0;\ m < 1)$ (амплитудная модуляция); 3) $f(t) = A\cos(\omega_0 t + m\cos\Omega t)$; $(\Omega \ll \omega_0;\ m \ll 1)$ (фазовая модуляция).

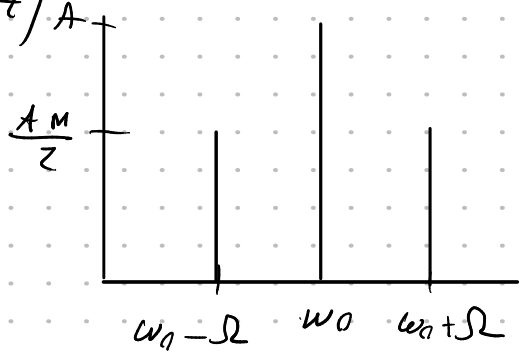
1) $f(t) = A\cos^2\omega_0 t = A\dfrac{1+\cos 2\omega t}{2} = \dfrac{A}{2} + \dfrac{A}{2}\cos 2\omega t$



2) $f(t) = A(1 + m\cos\Omega t)\cos\omega_0 t =$

$= A\cos\omega_0 t + Am\cos\Omega t\cos\omega_0 t =$

$= A\cos\omega_0 t + Am\cdot\frac{1}{2}\left(\cos(\Omega-\omega_0)t + \cos(\Omega+\omega_0)t\right)$

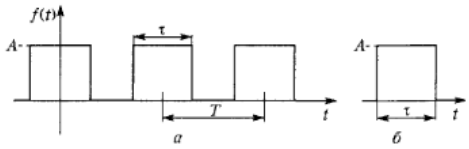


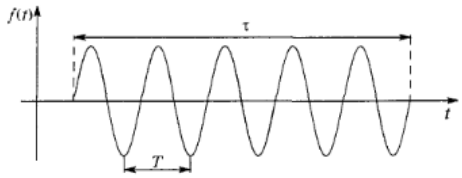
3) $f(t) = A\cos(\omega_0 t + m\cos\Omega t) =$

$= A\cos\omega_0 t\cdot\cos(\cos\Omega t) - A\sin\omega_0 t\cdot\sin(\cos\Omega t)$ – ?

N 11.3

11.3. Найти спектр следующих сигналов, изображенных на рис. 229: а) периодическая последовательность прямоугольных импульсов; б) прямоугольный импульс; в) прямоугольный цуг.





а) $f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n e^{jn\omega_0 t} \quad \Big| \cdot e^{-jm\omega_0 t}$

$f(t)\cdot e^{-jm\omega_0 t} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n e^{j(n-m)\omega_0 t}$

$\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t)\cdot e^{-jm\omega_0 t}\,dt = \sum_{n=-\infty}^{\infty}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} C_n e^{j(n-m)\omega_0 t}\,dt = C_m T$

$C_n = \frac{1}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t)e^{-jm\omega_0 t}\,dt = \frac{A}{T}\frac{1}{-jn\omega_0}\left[e^{-\frac{jn\omega_0 T}{2}} - e^{\frac{jn\omega_0 T}{2}}\right] =$

$= A\dfrac{\exp\left(\frac{jn\omega_0 T}{2}\right) - \exp\left(\frac{jn\omega_0 T}{2}\right)}{2j}\cdot\dfrac{2}{Tn\omega_0} = A\dfrac{2}{Tn\omega_0}\sin\dfrac{n\omega_0 T}{2} =$

$$= A\frac{\tau}{T}\,\frac{\sin\frac{n\omega_0\tau}{2}}{\frac{n\omega_0\tau}{2}} = \boxed{A\frac{\tau}{2}\,\frac{\sin\pi n\frac{\tau}{T}}{\pi n\frac{\tau}{T}}}$$ /ОТВЕТ

б) Также, но $T \to +\infty$

$\omega = n\omega_0$

$$\boxed{F(\omega)} = c_n T = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\, e^{-j\omega t}\, dt = \boxed{A\tau\,\frac{\sin\frac{\omega\tau}{2}}{\frac{\omega\tau}{2}}}$$ /ОТВЕТ

№ 12.1

[0]12.1. Найдите спектр модулированного по амплитуде сигнала вида $g(t) = f(t)\cdot\cos\omega_0 t$, если спектр сигнала $f(t)$ равен $F(\omega)$. Рассмотрите случай $f(t) = e^{-\gamma t}$ при $t \geq 0$.

Ответ: $G(\Omega) = \frac{\gamma + i\Omega}{(\gamma+i\Omega)^2+\omega_0^2}$

$$G(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} g(t)\, e^{-j\omega t}\, dt = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\,\frac{e^{j\omega_0 t} - e^{-j\omega_0 t}}{2j}\cdot e^{-j\omega t}\, dt =$$

$$= \frac{1}{2j}\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\, e^{-j(\omega-\omega_0)t}\, dt - \frac{1}{2j}\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\, e^{-j(\omega+\omega_0)t}\, dt =$$

$$= \frac{j}{2}\left(F(\omega+\omega_0) - F(\omega-\omega_0)\right) \sim \boxed{\frac{1}{2}\left(F(\omega+\omega_0) - F(\omega-\omega_0)\right)}$$

/ОТВЕТ

№ 11.26

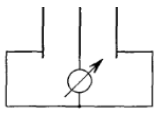
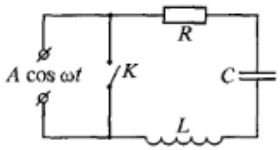


Рис. 231

приборе.

11.6. Колебательный контур возбуждается переменной ЭДС, частота которой ω отличается от собственной частоты ω_0, причем расстройка $\Delta\omega = \omega_0 - \omega$ больше ширины резонансной кривой ($|\Delta\omega| > \delta$). Можно ли «раскачать» колебания в контуре (рис. 232) периодическим замыканием и размыканием ключа K? При какой частоте переключений амплитуда колебаний в контуре будет максимальной?



1) $$Z = R + \frac{X_L X_C}{X_L + X_C} + r = R + r - \frac{L}{C}\,\frac{j}{\omega L\left(1 - \frac{1}{\omega^2 LC}\right)} =$$

$$= R + r - \frac{L}{C}\,\frac{j}{\omega L\left(1 - \frac{\omega_0^2}{\omega^2}\right)}$$

2) $$\hat{u}_R = \frac{\hat{u}R}{R + r - \frac{L}{C}\,\frac{j}{\omega L\left(1 - \frac{\omega_0^2}{\omega^2}\right)}} = \frac{\hat{u}R}{R + r - \frac{j\omega_0 L}{\frac{\omega}{\omega_0}\left(1 - \frac{\omega_0^2}{\omega^2}\right)}}$$

При $\omega = n\omega_0$
$\omega_0 L \ll R < R + r$: $u_R \simeq \frac{\hat{u}R}{R+r} \approx \hat{u} \Rightarrow$

$\Rightarrow V_R(t) = V(t) - f(t)$

$b_1 = 0$ (т.к. $f(t)$ четн.)

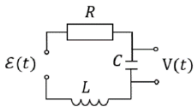
$$a_2 = \frac{2}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} \cos\omega_0 t \cdot \cos\omega_1 t\, dt = \frac{2}{T}\int_{-\frac{T}{4}}^{\frac{T}{4}} \cos^2\omega_0 t\, dt = \frac{1}{T}\left(t + \frac{1}{2}\sin 2\omega_0 t\right)\Big|_{-\frac{T}{4}}^{\frac{T}{4}} =$$

$$= \frac{1}{T}\left(\frac{T}{2} + 0\right) = \frac{1}{2} \Rightarrow V_R(t) = V(t) - \frac{1}{2}\cos\omega_0 t = \boxed{\frac{1}{2}|\cos\omega_0 t|}$$

ОТВЕТ

Т15

Т15. (2019-5А) Вынужденные колебания напряжения на конденсаторе высокодобротного колебательного контура возбуждаются внешней ЭДС $\mathcal{E}(t) = \mathcal{E}_0(1 + m\cos\Omega t)\cos\omega_0 t$, где частота модуляции $\Omega = \omega_0/2$, $m < 1$. При резонансной частоте контура $\omega_p = \omega_0/2$ оказалось, что две гармоники из спектра колебаний напряжения на конденсаторе $V(t)$ имеют одинаковые амплитуды. Определите глубину модуляции m, если добротность контура $Q = 25$.



Ответ: $m = \frac{2}{3Q} = \frac{2}{75}$.

1) $Z = R + i\left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)$

Если $e^{i\omega_p t}$, то: $\hat{u}_{out} = \hat{u}_{in} \cdot \dfrac{\frac{1}{i\omega C}}{R + i\omega L + \frac{1}{i\omega C}} =$

$$= \frac{\hat{u}_{in}}{1 - \omega^2 LC + i\omega RC}$$

2) $Q = \frac{1}{R}\sqrt{\frac{L}{C}} \Rightarrow Q^2 = \frac{L}{R^2 C} = \frac{L^2}{R^2}\cdot\omega_p^2 \Rightarrow R^2C^2 = \frac{LC}{Q^2} = Q\,u_{out} = \frac{1}{\omega_p^2 Q^2}$

3) $|u_{out}| = \dfrac{|u_{in}|}{\sqrt{(1-\omega^2 LC)^2 + \omega^2 R^2 C^2}} = \dfrac{|u_{in}|\,Q}{\sqrt{Q^2\left(1 - \frac{\omega^2}{\omega_p^2}\right)^2 + \frac{\omega^2}{\omega_p^2}}}$

4) $\mathcal{E}(t) = \mathcal{E}_0(1 + m\cos\Omega t)\cos\omega_0 t = \mathcal{E}_0\cos\omega_0 t + \mathcal{E}_0 m\cos\Omega t\cos\omega_0 t =$

$$= \underbrace{\mathcal{E}_0}_{C_2}\cos\omega_0 t + \underbrace{\frac{\mathcal{E}_0 m}{2}}_{C_1}\cos(\omega_0 - \Omega)t + \underbrace{\frac{\mathcal{E}_0 m}{2}}_{C_3}\cos(\omega_0 + \Omega)t$$

$C_{1\,in} = \frac{\mathcal{E}_0 m}{2}$ $\quad C_{1\,out} = \frac{\mathcal{E}_0 m}{2}Q$

$C_{2\,in} = \mathcal{E}_0$; $\quad C_{2\,out} = \dfrac{\mathcal{E}_0 Q}{\sqrt{Q^2\left(1 - \frac{4\omega_p^2}{\omega_p^2}\right)^2 + 4}} = \dfrac{\mathcal{E}_0 Q}{\sqrt{9Q^2 + 4}}$

По усл. $\frac{\mathcal{E}_0 m}{2}Q = \frac{\mathcal{E}_0 Q}{\sqrt{9Q^2+4}} \Rightarrow m = \frac{2}{\sqrt{4Q^2+4}} \approx \frac{2}{3Q} = \boxed{\frac{2}{75}}$

N 11.2

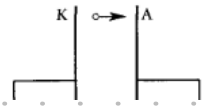
ОТВЕТ

зовая модуляция).

11.2. В приемниках радиоизлучения обычно осуществляется квадратичное преобразование принимаемого сигнала с последующим усреднением за некоторое время Δt, подчиняющееся условию

Рис. 229

$2\pi/\omega_0 \ll \Delta t \ll 2\pi/\Omega$, где ω_0 — радиочастота, Ω — частота модуляции ($\omega_0 \gg \Omega$). Что зарегистрирует такой приемник в следующих случаях: 1) на вход поданы амплитудно-модулированные колебания (задача 11.1, п. 2); 2) на вход поданы колебания, модулированные по фазе (задача 11.1, п. 3); 3) на вход поданы колебания, модулированные по фазе с отфильтрованной (т. е. несущей) частотой ω_0; 4) на вход поданы колебания модулированные по фазе, в которых фаза спектральной компоненты частоты ω_0 изменена на $\pi/2$ (т. е. фаза несущей изменена на $\pi/2$)?



$$T = \frac{2\pi}{\omega_0} \ll \Delta t \ll \frac{2\pi}{\Omega} = T_{мод}$$

1) АМ $f(t) = A_0(1 + m\cos\Omega t)\cos\omega_0 t = A(t)\cos\omega_0 t$

$$g(t) = \overline{f^2(t)} = \frac{1}{\Delta t}\int_0^{\Delta t} f^2(t)\,dt \approx \frac{A^2(t)}{\Delta t}\int_0^{\Delta t}\cos^2\omega_0 t\,dt =$$

$$= \frac{A^2(t)}{2\Delta t}\left(\Delta t + \frac{1}{2\omega_0}\sin 2\omega_0 \Delta t\right) \underset{\Delta t \gg T_0}{\approx} \frac{A^2(t)}{2} = \frac{A_0^2}{2}(1 + m^2\cos^2\Omega t +$$

$$+ 2m\cos\Omega t) \approx \boxed{\frac{A_0^2}{2}(1 + 2m\cos\Omega t)}$$ ОТВЕТ 1

2) $f(t) = A\cos(\omega_0 t + m\cos\Omega t)$

$$g(t) = \overline{f^2(t)} = \frac{A^2}{\Delta t}\int_0^{\Delta t}\cos^2(\omega_0 t + m\cos\Omega t)\,dt \approx \frac{A^2}{\Delta t}\int_0^{\Delta t}\cos^2\omega_0 t\,dt =$$

$$= \boxed{\frac{A^2}{2}}$$ ОТВЕТ 2

3) $f_1(t) = A\cos(\omega_0 t + m\cos\Omega t) = A\cos\omega_0 t\cdot\cos(m\cos\Omega t) -$

$- A\sin\omega_0 t\cdot\sin(m\cos\Omega t)$

После фильтра: $f_2(t) = f_1(t) - A\cos\omega_0 t = -Am\sin\omega_0 t\cdot$

$\cos\Omega t$

$$g(t) = \overline{f_2^2(t)} = \frac{1}{\Delta t}\int_0^{\Delta t}(A^2m^2\sin^2\omega_0 t\cdot\cos^2\Omega t)\,dt \approx \frac{A^2m^2\cos^2\Omega t}{\Delta t}\cdot$$

$$\cdot\int_0^{\Delta t}\sin^2\omega_0 t\,dt \approx \frac{A^2m^2\cdot(1+\cos 2\Omega t)}{4} = \boxed{\frac{A^2m^2}{4}(1+\cos 2\Omega t)}$$

ОТВЕТ 3

4) $f(t) = A\cos(\omega_0 t + \frac{\pi}{2}) - Am\sin\omega_0 t\cos\Omega t =$

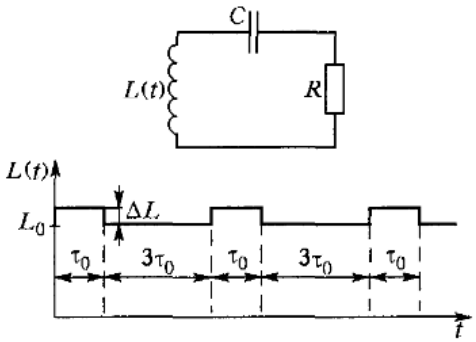
$= -A\sin\omega_0 t - Am\sin\omega_0 t\cos\Omega t = -A(1 + m\cos\Omega t)\sin\omega_0 t$

$$g(t) = \frac{1}{\Delta t}\int_0^{\Delta t}A^2(1+m\cos\Omega t)^2\sin^2\omega_0 t\,dt \approx \boxed{\frac{A^2}{2}(1+2m\cos\Omega t)}$$

№11.35

/ОТВЕТУ

11.35. Индуктивность колебательного контура периодически изменяется во времени по закону, указанному на рис. 254. При каком значении емкости колебательного контура возможен параметрический резонанс? При каком максимальном значении активного сопротивления контура произойдет возбуждение параметрических колебаний? Выполнить числовой расчет для $L_0 = 4\cdot10^{-4}$ Г, $\Delta L = 4\cdot10^{-5}$ Г, $\tau_0 = 10^{-6}$ с.



1) $\delta W_L = \delta\left(\frac{\Phi^2}{2L}\right) = \frac{\Phi^2}{2L^2}\delta L =$

$= -W\cdot\frac{\delta L}{L}$

2) $\delta W_R = -\frac{R}{L}TW$ – потери за пер.

3) $T = 4\tau_0 = 2\pi\sqrt{LC} \Rightarrow \boxed{C = \frac{4\tau_0^2}{\pi^2 L} \approx 10^{-9}\,Ф}$

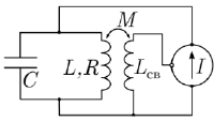
4) $\delta W_L + \delta W_R \geq 0$

/ОТВЕТ

$\frac{\delta L}{L} \geq \frac{RT}{T} \Rightarrow \boxed{R \leq \frac{\delta L}{4\tau_0} = 10\,Ом}$

Т17

Т17. (2023-6А) Колебательный контур подключён к источнику тока (показан на схеме символом «I», стрелка указывает направление протекания тока). Величина тока источника регулируется напряжением $U_{св}$ на «катушке обратной связи» $L_{св}$ по закону $I = I_0 + SU_{св}$, где I_0, S — константы. При каком наибольшем сопротивлении R катушки контура будет возможна генерация автоколебаний в контуре? Каким при этом должен быть коэффициент M взаимной индукции катушек L и $L_{св}$? Параметры цепи: $S = 2$ мА/В, $C = 10$ нФ, $L = 10$ мГн, $L_{св} = 0{,}01L$. Ток в катушке связи считать пренебрежимо малым.



Ответ: $R_{max} = \sqrt{LL_{св}}\,S/C = 200$ Ом, $|M| \leq \sqrt{LL_{св}} = 1$ мГн.

1) $\frac{dI}{dt} = \frac{dI}{dU_{св}}\cdot\frac{dU_{св}}{dt} = S\frac{dU_{св}}{dt}$

$M \leq \sqrt{LL_{св}} = 1\,мГн$

2) $\mathcal{E}_i = -M\frac{dI}{dt} = -MS\frac{dU_{св}}{dt} = -\frac{MS}{C}\frac{dq}{dt} = -\frac{MS}{C}I_C$

По 2 з-ну Кирхгофа:

$L\dot{I}_C + RI_C + \frac{q}{C} = -\frac{MS}{C}I_C$

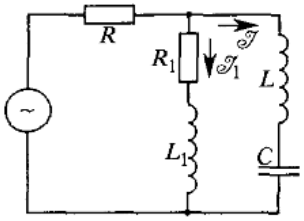
$L\ddot{I}_C + \left(R + \frac{MS}{C}\right)\dot{I}_C + \frac{I_C}{C} = 0$

$\gamma = \frac{R}{2L} + \frac{MS}{2LC} \Rightarrow I_C = I_0 e^{-\gamma t} A\cos(\omega t + \varphi_0)$

3) Усл. автоколеб: $\gamma < 0$

$$R + \frac{MS}{C} < 0 \Rightarrow R < -\frac{MS}{C} = \frac{|M|S}{C} \le \frac{\sqrt{L_k C}\,S}{C} = 200\,\Omega м \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{R_{max} = 200\,\Omega м,\ \text{дост. при } M = \sqrt{L_k C}}$$



N 11,10

11.10. В схеме, изображенной на рис. 235, действует переменная ЭДС, изменяющаяся по закону $\mathscr{E}(t) = \mathscr{E}_0 \cos^2 \Omega t$. Определить токи $\mathcal{J}$ и $\mathcal{J}_1$, если известно, что параметры цепи удовлетворяют соотношению $\Omega^2 = 1/(4LC)$.

1) $\mathcal{E}_0 \cos^2 \Omega t = \mathcal{E}_0 \dfrac{\cos 2\Omega t + 1}{2}$

2) $Z_1 = R_1 + i \cdot 2\Omega L_1$

$Z = i 2\Omega L + \dfrac{1}{i 2\Omega C} = 0$

$Z_\Sigma = R$

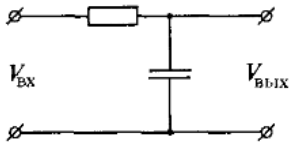
акт. г: $\boxed{I_1(t) = \dfrac{\mathcal{E}_0}{2(R + R_1)}}$

реакт г: $\boxed{I(t) = \dfrac{\mathcal{E}}{Z_\Sigma} = \dfrac{\mathcal{E}_0 \cos 2\Omega t}{2R}}$

/ ОТВЕТ

N 11,13

11.13. На RC-цепочку (рис. 238) подается синусоидальное напряжение $V_{вх} = V_0 \cos \omega t$. Параметры цепочки подобраны так, что сдвиг фаз между $V_{вых}$ и $V_{вх}$ составляет $-45°$. Определить спектральный состав выходного напряжения и фазовые сдвиги между спектральными компонентами для случая, когда расстояние между пластинами плоского конденсатора изменяется по закону $d = d_0(1 + a \cos \Omega t)$, причем $\Omega \ll \omega$ и $a \ll 1$.



1) $\hat{V}_{out} = I X_C = \dfrac{\hat{V}_{in}}{R + X_C} X_C = \dfrac{\hat{V}_{in}}{1 + i\omega RC} = \dfrac{\hat{V}_{in}(1 - i\omega RC)}{1 + \omega^2 R^2 C^2}$

$tg\,\varphi = -\omega R C_0 = tg\left(-\frac{\pi}{4}\right) = -1 \Rightarrow \omega R C_0 = 1$

2) $\mathfrak{Z}C = C(t) = \dfrac{\varepsilon S}{4\pi d} = \dfrac{\varepsilon S}{4\pi d_0(1 + a\cos\Omega t)} = \dfrac{C_0}{1 + a\cos\Omega t}$

$C_0 = \dfrac{\varepsilon S}{4\pi d_0}$ – пост. равн. $\Rightarrow$

$$\Rightarrow \hat{V}_{out} = \frac{\hat{V}_{in}}{1 + \dfrac{i\omega R C_0}{1 + a\cos\Omega t}} \approx \frac{\hat{V}_{in}}{1 + \dfrac{i}{1 + a\cos\Omega t}} = \frac{\hat{V}_{in}(1 + a\cos\Omega t)}{i + 1 + a\cos\Omega t} =$$

$$= \hat{V}_{in} \frac{(1 + a\cos\Omega t)(1 + a\cos\Omega t - i)}{(1 + a\cos\Omega t)^2 + 1} = \hat{V}_{in} \frac{1 + 2a\cos\Omega t - i(1 + a\cos\Omega t)}{2(1 + a\cos\Omega t)} =$$

$$= \hat{V}_{in}\frac{-1+2(1+a\cos\Omega t)-i(1+a\cos\Omega t)}{2(1+a\cos\Omega t)} = \frac{\hat{V}_{in}}{2}\left(-\frac{1}{1+a\cos\Omega t}+2-i\right) \approx$$

$$\approx \frac{\hat{V}_{in}}{2}(-1+a\cos\Omega t+2-i) = \frac{\hat{V}_{in}}{2}(1-i+a\cos\Omega t) =$$

$$= \frac{\hat{V}_{in}}{2}\left(e^{-i\frac{\pi}{4}}+\frac{a}{2}e^{i\Omega t}+\frac{a}{2}e^{-i\Omega t}\right) = \frac{V_0}{2}e^{i\omega t}\left(\sqrt{2}\,e^{-i\frac{\pi}{4}}+\right.$$

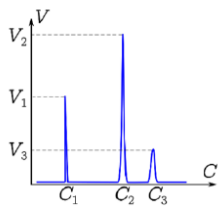
$$\left.+\frac{a}{2}e^{i\Omega t}+\frac{a}{2}e^{-i\Omega t}\right) =$$

$$= \boxed{\frac{V_0}{\sqrt{2}}e^{i(\omega t-\frac{\pi}{4})}+\frac{aV_0}{4}e^{i(\omega+\Omega)t}+\frac{aV_0}{4}e^{-i\Omega t}}$$

/ ОТВЕТ

T16

T16. (2020-1Б) Вынужденные колебания в высокодобротном RLC-контуре возбуждаются последовательно включённой внешней ЭДС $\mathcal{E} = \mathcal{E}_0\cos(\omega_0 t + \varphi(t))$ с законом фазовой модуляции $\varphi(t) = m\cos\Omega t$, где $m = \frac{1}{9}$ и $\Omega = \frac{4}{5}\omega_0$. Зависимость амплитуды напряжения V на конденсаторе от его ёмкости C схематично показана на рисунке. Найдите отношения V_2/V_1 и V_1/V_3.



Ответ: $\frac{V_2}{V_1} = 10$, $\frac{V_1}{V_3} = 9$.

$$\mathcal{E} = \mathcal{E}_0\cos(\omega_0 t + m\cos\Omega t) = \mathcal{E}_0\cos\omega_0 t\cos(m\cos\Omega t) -$$

$$- \mathcal{E}_0\sin\omega_0 t\cdot\sin(m\cos\Omega t) =$$

$$= \mathcal{E}_0\cos\omega_0 t - \mathcal{E}_0\sin\omega_0 t\cdot m\cos\Omega t = \mathcal{E}_0\cos\omega_0 t +$$

$$+\frac{\mathcal{E}_0}{2}m\left(\cos\left((\omega_0-\Omega)t+\frac{\pi}{2}\right)+\cos\left((\omega_0+\Omega)t+\frac{\pi}{2}\right)\right)$$

$$V_1 = \frac{(\omega_0-\Omega)\mathcal{E}_0 m}{4\gamma} = \frac{\omega_0\mathcal{E}_0 m}{20\gamma}$$

$$V_2 = \frac{\omega_0\mathcal{E}_0}{2\gamma}$$

$$V_3 = \frac{(\omega_0+\Omega)\mathcal{E}_0 m}{4\gamma} = \frac{9\omega_0\mathcal{E}_0 m}{20\gamma}$$

$$\Rightarrow \boxed{\frac{V_2}{V_1} = 10 \qquad \frac{V_3}{V_1} = 9}$$

/ ОТВЕТ

N 11.36

11.36. Для поддержания незатухающих колебаний в LCR-контуре ($L = 4\cdot10^{-3}$ Г, $C = 10^{-10}$ Ф, $R = 1$ Ом) емкость конденсатора быстро изменяют на величину ΔC каждый раз, когда напряжение на нем равно нулю, а через время $\tau = 6{,}4\cdot10^{-8}$ с возвращают в исходное состояние. Определить величину и знак ΔC.

$$\Delta W_R = -\frac{R}{L} T W$$

$$T = 2\pi\sqrt{LC} \gg \tau$$

$$\Delta W_C = -\frac{q^2}{2C}\frac{\delta C}{C} = \frac{I_m^2 \tau^2}{2C^2} = \frac{W\tau^2}{LC^2}\delta C \quad \Rightarrow$$

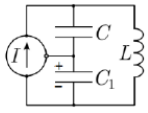
$$\Rightarrow 2\frac{W\tau^2}{LC^2}\Delta C = \frac{R}{L} T W \Rightarrow |\Delta C| = 5\cdot 10^{-12}\,Ф$$

$$\Delta C < 0$$

/ОТВЕТ

Т18

Т18. (2023-6Б) Колебательный контур подключён к источнику тока (показан на схеме символом «I», стрелка указывает направление протекания тока). Контур содержит «конденсатор связи» C_1, напряжение $U1$ на котором регулирует величину тока источника по закону $I = I_0 + SU_1$, где I_0, S — константы. Определите минимальное отношение C_1/C, при котором изменение напряжения на конденсаторе C будет иметь *колебательный* характер с нарастающей амплитудой. Параметры цепи: S = 20 мА/В, C = 1 нФ, L = 1 мГн. Потерями пренебречь. Токи через C и C_1 считать одинаковыми.



Примечание: знаками «+/−» на схеме показано состояние конденсатора связи, когда U_1 считается положительным.

Ответ: $\frac{C_1}{C} \geq \frac{1}{2}\left(\sqrt{1+\frac{S^2L}{C}}-1\right) \approx 9.5.$

$$1)\ \frac{dI}{dt} = \frac{dI}{du_1}\cdot\frac{du_1}{dt} = S\frac{du_1}{dt} = \frac{S}{C_1} I_{C_1}$$

$$I_C = I_{C_1} = I_1 = \frac{C_1}{S}\frac{dI}{dt}$$

$$I_L = I_2 = I - I_1 = I - \frac{C_1}{S}\frac{dI}{dt}$$

$$2)\ \mathcal{E}_{инд.} = -L\dot{I}_L = -L\dot{I} + L\frac{C_1}{S}\ddot{I} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow u_L = -\mathcal{E}_{инд.} = L\dot{I} - L\frac{C_1}{S}\ddot{I} = L\frac{S}{C_1}I_1 - L\frac{C_1}{S}\frac{S}{C_1}\dot{I}_1 = \frac{LS}{C_1}I_1 - L\dot{I}_1$$

$$u_L = u_C + u_{C_1}:\ \frac{LS}{C_1}I_1 - L\dot{I}_1 = \frac{q_C}{C} + \frac{q_{C_1}}{C_1}$$

$$3)\ \frac{LS}{C_1}\dot{I}_1 - L\ddot{I}_1 = I_1\left(\frac{1}{C}+\frac{1}{C_1}\right)$$

$$L\ddot{I}_1 - \frac{LS}{C_1}\dot{I}_1 + I_1\left(\frac{1}{C}+\frac{1}{C_1}\right) = 0$$

$$\ddot{I}_1 - \frac{S}{C_1}\dot{I}_1 + I_1\left(\frac{1}{LC}+\frac{1}{LC_1}\right) = 0 \Rightarrow \gamma = -\frac{S}{2C_1} < 0 \quad \omega_0^2 = \frac{1}{LC}+\frac{1}{LC_1}$$

$$4)\ \omega_0^2 > \gamma^2 =$$

$$\frac{1}{LC}+\frac{1}{LC_1} > \frac{S^2}{4C_1^2}$$

$$\frac{4C_1^2}{C} + 4C_1 > S^2L$$

$$4\frac{C_1^2}{C^2} + 4\frac{C_1}{C} > \frac{S^2L}{C}$$

$$2\frac{C_1}{C} = x \Rightarrow x^2 + 2x - \frac{s^2 L}{C} > 0$$

$$\frac{D}{4} = 1 + \frac{s^2 L}{C} \qquad \sqrt{\frac{D}{4}} = \sqrt{1 + \frac{s^2 L}{C}}$$

$$\left(x + 1 - \sqrt{1 + \frac{s^2 L}{C}}\right)\underbrace{\left(x + 1 + \sqrt{1 + \frac{s^2 L}{C}}\right)}_{>0} > 0$$

$$x + 1 - \sqrt{1 + \frac{s^2 L}{C}} > 0$$

$$2\frac{C_1}{C} > \sqrt{1 + \frac{s^2 L}{C}} - 1$$

$$\boxed{\frac{C_1}{C} > \frac{1}{2}\left[\sqrt{1 + \frac{s^2 L}{C}} - 1\right]}$$ / ОТВЕТ

Неделя XIII

№ 13.1

Семинар 13

[0]13.1. Напряжение в плоском конденсаторе меняется по гармоническому закону $U = U_0 \sin \omega t$. Пластины имеют форму дисков радиуса R, расстояние между которыми $h \ll R$, между пластин — среда с проницаемостью ε. Пренебрегая краевыми искажениями поля, найдите магнитное поле на краю конденсатора (на расстоянии R от оси). Частоту считать малой: $\omega \ll c/R$.

Ответ: $B = \frac{\omega R}{2c} \cdot \frac{\varepsilon U_0}{h} \cos \omega t$.

1) $\oint \bar{B}\, d\bar{l} = \int \frac{1}{c} \frac{\partial D}{\partial t} dS$

2) $B \cdot 2\pi R = \frac{1}{c} \cdot \frac{\partial D}{\partial t} \cdot \pi R^2 \Rightarrow$

$\Rightarrow B = \frac{R}{2c} \cdot \frac{\partial D}{\partial t}$

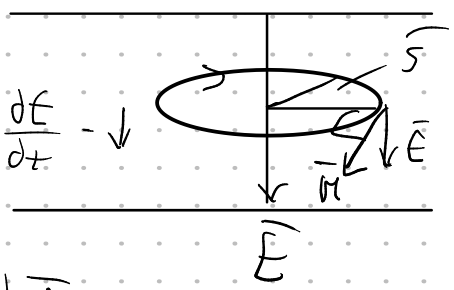
3) $E = \frac{U}{h} = \frac{U_0 \sin \omega t}{h} \Rightarrow D = \frac{\varepsilon U_0 \sin \omega t}{h}$ / $\Rightarrow$

$$\Rightarrow B = \frac{R}{2c} \cdot \frac{\varepsilon U_0}{h} \cdot \omega \cos \omega t = \boxed{\frac{\omega R}{2c} \cdot \frac{\varepsilon U_0}{h} \cdot \cos \omega t}$$ / ОТВЕТ

№ 13.2

[0]13.2. Используя выражение для вектора Пойнтинга S, в условиях предыдущей задачи найдите полный поток электромагнитной энергии из конденсатора и сравните его с выражением для скорости изменения энергии, запасённой в конденсаторе dW/dt.

Ответ: $S \cdot 2\pi R h = \frac{dW}{dt} = \frac{\varepsilon \pi R^2}{h} \sin 2\omega t$.



1) $\bar{j} = \bar{0}$

$$\bar{S} = \frac{c}{4\pi}[\bar{E}, \bar{H}] \Rightarrow S = \frac{c}{4\pi} E H = \frac{c}{4\pi} \frac{U_0 \sin \omega t}{h} \cdot \frac{\omega R}{2c} \cdot \frac{\varepsilon U_0 \cdot \cos \omega t}{h} =$$

$$= \frac{\varepsilon u_0^2}{16\pi h^2} \omega R \sin 2\omega t$$

2) $$\oint_{\sigma} (\bar{S}, d\bar{\sigma}) = S \cdot 2\pi R h = \frac{\varepsilon u_0}{16\pi h^2} \omega R \sin 2\omega t \cdot 2\pi R h =$$

$$= \frac{\varepsilon u_0^2 \omega R^2}{8h} \sin 2\omega t$$

3) $$W = \frac{C u^2}{2} = \frac{\varepsilon \pi R^2}{8\pi h} \cdot u_0^2 \sin^2 \omega t = \frac{\varepsilon u_0^2 R^2}{8h} \sin^2 \omega t$$

$$C = \frac{\varepsilon S}{4\pi h}$$

$$\frac{\partial W}{\partial t} = \boxed{\frac{\varepsilon u_0^2 \omega R^2}{8h} \sin 2\omega t} = \oint_{\sigma_{бок}} (\bar{S}, d\vec{\sigma}) = S \cdot 2\pi R h$$

/ОТВЕТ

№8.51

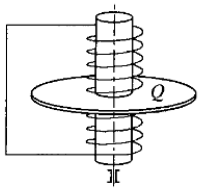


Рис. 147

(рис. 146). Оценить скорость, с которой масло будет выбрасываться из зазора между полосами в момент протекания максимального тока.

8.51. Длинный сверхпроводящий соленоид радиусом $r_0 = 2$ см укреплен по центру диска из изолятора, который может свободно вращаться вокруг своей оси (рис. 147). Соленоид замкнут накоротко, и в нем циркулирует ток, создающий в центре соленоида индукцию $B_0 = 10^4$ Гс. На диск вне соленоида нанесены заряды, суммарная величина которых составляет $Q = 4 \cdot 10^{-6}$ Кл. Соленоид разогревается, и ток в нем прекращается. Найти момент импульса L, который получает в результате этого вся система.

1) $$\oint E dl = \frac{1}{c} \int \frac{\partial B}{\partial t} dS$$

$$2\pi r_i E_i = \frac{1}{c} \frac{dB}{dt} \pi r_0^2 \Rightarrow E_i dt = \frac{r_0^2}{2c r_i} dB$$

2) $$dM = E_i \, dQ \, r_i$$

$$dL_i = dM dt = E_i \cdot dQ \cdot r_i \cdot dt = \frac{dQ \, r_0^2 dB}{2c}$$

3) $$L = \int dB \int dQ \frac{r_0^2}{2c} = \frac{B_0 Q r_0^2}{2c} \approx \boxed{8 \cdot 10^{-3} \frac{г \cdot см^3}{с}}$$

/ОТВЕТ

№12.3

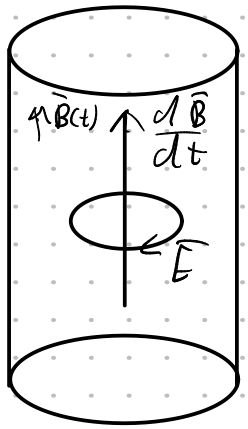
12.3. Пространство внутри длинного соленоида, состоящего из N витков проволоки, заполнено однородным веществом с диэлектрической проницаемостью ε и магнитной проницаемостью μ. Длина соленоида равна l, радиус R. По обмотке соленоида течет переменный ток $\mathcal{J} = \mathcal{J}_0 \cos \omega t$. Пренебрегая краевыми эффектами, вычислить магнитную и электрическую энергии, локализованные внутри соленоида, и найти отношение максимальных значений этих энергий. Провести числовой расчет для $R = 5$ см, $\varepsilon = \mu = 1$ и частоты $\nu = 100$ Гц.

1) $$\oint_L (\bar{H}, d\bar{l}) = H \cdot l = \frac{4\pi}{c} I N \Rightarrow$$

$$\Rightarrow H = \frac{4\pi}{c} i = \frac{4\pi}{c} \frac{IN}{l} =$$

$$= \frac{4\pi N}{lc} I_0 \cos \omega t = B_0 \cos \omega t \Rightarrow \frac{dB}{dt} = -\omega B_0 \sin \omega t$$

2) $\oint_L (\bar{E}, d\bar{l}) = 2\pi r E = \int_S \left(-\frac{1}{c}\frac{\partial \bar{B}}{\partial t}, d\bar{S}\right) = \frac{1}{c}\pi r^2 \frac{dB}{dt} \Rightarrow$



$\Rightarrow E(r) = \frac{r}{2c}\frac{dB}{dt} = \mu\frac{r}{2c}\cdot\omega\cdot\frac{4\pi N}{lc} I_0 \sin\omega t =$

$= \frac{2\pi r \omega N \mu}{lc^2} I_0 \sin\omega t$

$B(t) = \mu H = \frac{4\pi\mu N}{lc} I_0 \cos\omega t$

3) Магн. эн.:

$w_M = \frac{(\bar{B},\bar{H})}{8\pi} = \frac{\mu H^2}{8\pi} = \frac{\mu\cdot 16\pi^2 N^2}{8\pi l^2 c^2} I_0^2 \cos^2\omega t = \frac{2\pi\mu N^2}{l^2c^2} I_0^2\cos^2\omega t =$

$= \frac{\pi\mu N^2}{l^2c^2} I_0^2 (1+\cos 2\omega t) = \frac{dW}{dV}$

4) $W_M = \iiint_V w_M dV = w_M \iiint_V dV = w_M\cdot V = w_M\cdot \pi R^2 l = \frac{2\pi\mu N^2}{lc^2} I_0^2\cos^2\omega t \cdot$

$\cdot \pi R^2 l = \frac{2\pi^2 R^2 \mu N^2}{lc^2} I_0^2 \cos^2\omega t$ /ОТВЕТ 1

$W_{M\,max} = \frac{2\pi^2 R^2 \mu N^2}{lc^2} I_0^2$

5) Энергия ЭМ: $w_Э = \frac{(\bar{E},\bar{D})}{8\pi} = \frac{\varepsilon E^2}{8\pi} = \frac{\varepsilon}{8\pi}\frac{4\pi^2 r^2\omega^2 N^2\mu^2}{l^2c^4} I_0^2 \sin^2\omega t =$

$= \frac{\pi r^2 \varepsilon\omega^2 N^2\mu^2}{2l^2c^4} I_0^2 \sin^2\omega t$

$W_Э = \iiint_V w_Э(r) dV = l\cdot \iint_S w_Э(r)\cdot dS = l\int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^R r\, w_Э(r) dr =$

$= 2\pi l \int_0^R r \frac{\pi r^2 \varepsilon\omega^2 N^2\mu^2}{2l^2c^4} I_0^2 \sin^2\omega t\, dr =$

$= 2\pi l\cdot\frac{\pi\varepsilon\omega^2 N^2\mu^2}{2l^2c^4} I_0^2 \sin^2\omega t \int_0^R r^3 dr = \frac{\pi^2 R^4 \varepsilon\omega^2 N^2\mu^2}{4lc^4} I_0^2 \sin^2\omega t$

/ОТВЕТ 2

$W_{Э\,max} = \frac{\pi^2 R^4 \varepsilon\omega^2 N^2\mu^2}{4lc^4} I_0^2$

6) $\frac{W_{M\,max}}{W_{Э\,max}} = \frac{2\pi^2 R^2\mu N^2}{lc^2} I_0^2 \cdot \frac{4lc^4}{\pi^2 R^4 \varepsilon\omega^2 N^2\mu^2 I_0^2} =$

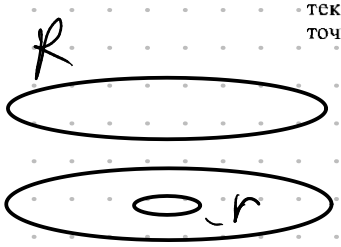
$$= \frac{8c^2}{R^2 \varepsilon \omega^2 \mu} \Rightarrow \boxed{\frac{W_{э\,max}}{W_{m\,max}} = \frac{\mu\varepsilon}{2}\left(\frac{\omega R}{2c}\right)^2 = 1{,}37\cdot 10^{-15}}$$

/ ОТВЕТ 3

N12.518

12.5. Заряженный и отключенный от источника электричества плоский конденсатор, состоящий из двух одинаковых дисков радиусом R, пробивается электрической искрой вдоль своей оси. Считая разряд квазистационарным и пренебрегая краевыми эффектами, вычислить мгновенное значение напряженности магнитного поля H внутри конденсатора (в зависимости от расстояния r до его оси), если сила тока в электрической искре в рассматриваемый момент времени равна $\mathcal{I}$.

12.8. Плоский воздушный конденсатор, обкладками которого являются два одинаковых диска, заряжен до высокой разности потенциалов и затем отключен от источника напряжения. В центре конденсатора происходит пробой (проскакивает электрическая искра), в результате чего конденсатор разряжается. Считая разряд квазистационарным и пренебрегая неоднородностью поля на краях конденсатора, определить полный поток электромагнитной энергии, вытекающий из пространства между обкладками. Обсудить явление с точки зрения сохранения и превращения энергии.



$$1)\ \oint H\,dl = 2\pi r H = \frac{4\pi I}{c} + \frac{1}{c}\oint \dot{D}\,dS \Rightarrow$$

$$\dot{D} = 4\pi\dot{\sigma} = -\frac{4\pi I}{\pi R^2}$$

$$\frac{1}{c}\oint \dot{D}\,dS = \frac{\dot{D}\pi r^2}{c}$$

$$\Rightarrow 2\pi r H = \frac{4\pi}{c} I\left(1 - \frac{r^2}{R^2}\right) \Rightarrow \boxed{H = \frac{2I}{cr}\left(1 - \frac{r^2}{R^2}\right)}$$

$$2)\ S = \frac{c}{4\pi}[\vec{E}\times\vec{H}] = \frac{c}{4\pi}EH = \frac{2I\sigma}{r}\left(1 - \frac{r^2}{R^2}\right)$$

/ РЕЗУЛЬТАТ

$$P_S(r) = \frac{2I\sigma}{r}\left(1 - \frac{r^2}{R^2}\right) 2\pi r d = \boxed{IU\left(1 - \frac{r^2}{R^2}\right)}$$

N12.9

12.9. Плоскому конденсатору емкостью C, обкладками которого являются два одинаковых диска, сообщен заряд Q. Затем конденсатор отключают от источника электричества. После этого пластины соединяют длинным цилиндрическим проводом, проходящим вне конденсатора, и конденсатор разряжается. Пренебрегая неоднородностью поля на краях конденсатора, показать непосредственным расчетом, что полный поток электромагнитной энергии из конденсатора равен полному потоку электромагнитной энергии, втекающему внутрь провода. Проанализировать явление с точки зрения представления о движении, превращении и сохранении энергии.

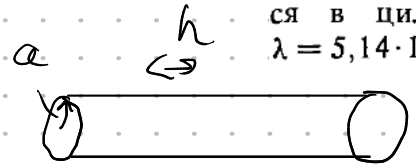
$$1)\ H_2 \cdot 2\pi R = \frac{1}{c}\frac{4\pi I}{\pi R^2}\pi R^2 \Rightarrow C = \frac{R^2}{4d}$$

$$2)\ H = \frac{2I}{cR} \qquad U = Ed$$

$$P_C = S\cdot M = \frac{c}{4\pi}EH\,2\pi R d = IU \ldots \ldots \text{ладно}\ldots$$

N12.22

12.22. Медный цилиндр радиусом $a = 1$ см и высотой $h = 10$ см помещен в переменное однородное магнитное поле $B = B_0 \cos \omega t$ параллельное оси цилиндра. Амплитуда поля $B_0 = 100$ Гс, частота $\nu = 50$ Гц. Определить среднюю мощность тепла Q, выделяющегося в цилиндре из-за токов Фуко. Электропроводность меди $\lambda = 5{,}14\cdot 10^{17}$ с$^{-1}$ (СГСЭ).



1) $Q = \int_0^a h \rho j^2 \, 2\pi r dr$

$\rho = \frac{1}{\lambda}$

$j = \lambda E$

$\Rightarrow Q = \int_0^a h \frac{1}{\lambda} \lambda^2 E^2 \cdot 2\pi r dr = 2\pi h \lambda \int_0^a E^2 r dr =$

$E \cdot 2\pi r = -\frac{1}{c}(-B_0 \sin \omega t)\, \omega \pi r^2 \Rightarrow E = \frac{B_0 r \omega}{2c} \sin \omega t$

$= 2\pi h \lambda \int_0^a \frac{B_0^2 \omega^2}{4c^2} r^3 dr = \frac{\pi \lambda h}{2} \left(\frac{\pi B_0 \nu a^3}{c} \right)^2 \sin^2 \omega t \Rightarrow$

$\Rightarrow \boxed{\overline{Q} = \pi \lambda h \left(\frac{\pi B_0 \nu a^3}{2c} \right)^2}$ /ОТВЕТ

№ 12.27

12.27. Постоянный ток $\mathcal{I}$ течет по цепи, состоящей из резистора сопротивлением R и длинной катушки радиусом r_2 и плотностью намотки витков n [см$^{-1}$] и соосного с катушкой прямого провода радиусом r_1 (рис. 258). Пренебрегая сопротивлением катушки и провода, найти аксиальную S_z и азимутальную S_φ компоненты вектора Пойнтинга внутри катушки вдали от ее торцов. Вычислить поток энергии через сечение катушки.

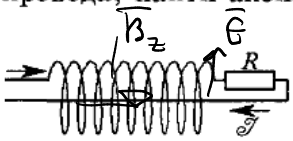


Рис. 258

~~**12.28.** Длинный соленоид (длина l, радиус r, число витков N) подключается к источнику постоянной ЭДС $\mathcal{E}$ через сопротивле-~~

1) $E = \frac{2k}{r}$

$U = IR = \int_{I_1}^{I_2} \frac{2k}{r} dr = 2k \ln \frac{r_2}{r_1}$ $\Rightarrow E = \frac{IR}{r \ln \frac{r_2}{r_1}}$

2) $H_z = B_z = \frac{4\pi}{c} n I$

$H_\varphi = B_\varphi = \frac{2I}{cr}$

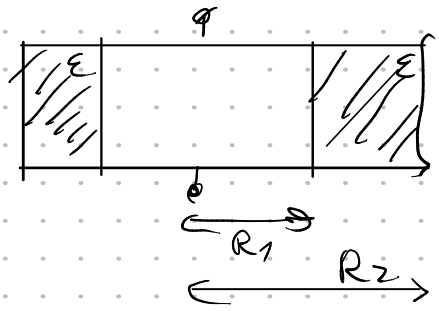
3) $\boxed{S_z} = \frac{c}{4\pi} B_\varphi E = \frac{c}{4\pi} \frac{2I}{cr} \cdot \frac{IR}{r \ln \frac{r_2}{r_1}} = \boxed{\frac{I^2 R}{2\pi r^2 \ln \frac{r_2}{r_1}}}$

$\boxed{S_\varphi} = \frac{c}{4\pi} B_z E = \frac{c}{4\pi} B_z E = \boxed{\frac{n I^2 R}{r \ln \frac{r_2}{r_1}}}$

$\boxed{P} = \int_{r_1}^{r_2} S_z 2\pi r dr = \boxed{I^2 R}$

№ 12.81

12.81. Заряженный плоский конденсатор с круглыми пластинами радиусом R_2, отключённый от внешней цепи, постепенно разряжается через слабо проводящий диэлектрик с диэлектрической проницаемостью ε, вставленный между пластинами (рис. 357). Диэлектрик имеет форму кольца с внутренним радиусом R_1 и наружным радиусом R_2, ток через него в данный момент равен $\mathcal{I}$. Пренебрегая краевыми эффектами для электрического поля в конденсаторе, определить распределение магнитного поля внутри и вне диэлектрика в конденсаторе. Магнитная проницаемость $\mu = 1$.



1) $E_{in} = E_{out}$

$D_{in} = \frac{D_{out}}{\varepsilon}$

$D_{in} = 4\pi\sigma_{in} = \frac{4q_{in}}{R_1^2}$

$D_{out} = 4\pi\sigma_{out} = \frac{4q_{out}}{R_2^2 - R_1^2}$

$\Rightarrow \frac{4q_{in}}{R_1^2} = \frac{4q_{out}}{\varepsilon(R_2^2-R_1^2)} \Rightarrow$

$\Rightarrow q_{in} = q_{out} = \frac{R_1^2}{\varepsilon(R_2^2-R_1^2)}$

2) $I = \dot{q}_{in} + \dot{q}_{out} \Rightarrow \dot{q}_{in} = \frac{R_1^2 I}{\varepsilon R_2^2 - (\varepsilon-1)R_1^2}$

$H_1 \cdot 2\pi r = \frac{4\pi}{c} \cdot \frac{I\pi r^2}{\pi(\varepsilon R_2^2 - (\varepsilon-1)R_1^2)} \Rightarrow$

$\Rightarrow H_1 = \boxed{\frac{2Ir}{c(\varepsilon R_2^2 - (\varepsilon-1)R_1^2)}}$

3) $\dot{q}_{out} = \frac{\varepsilon(R_2^2-R_1^2)}{\varepsilon R_2^2 - (\varepsilon-1)R_1^2} I$

ОТВЕТ

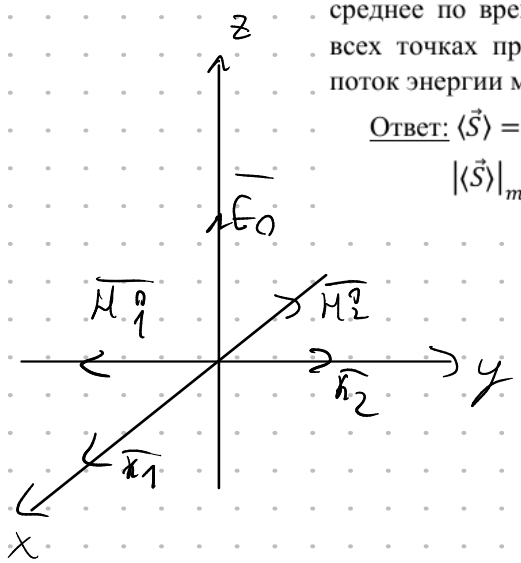
$$\boxed{H_2 = \frac{2I}{cr}\left(\frac{r^2-R_1^2}{R_2^2-R_1^2} - \frac{\varepsilon(r^2-R_1^2)+\varepsilon R_1^2}{\varepsilon R_2^2-(\varepsilon-1)R_1^2}\right)}$$

T19

T19. (2016-6Б) В вакууме распространяются две плоские электромагнитные волны одинаковой частоты и амплитуды: одна вдоль оси x, а другая — вдоль оси y. Вектор **E** обеих волн направлен по оси z. Найдите среднее по времени значение вектора плотности потока энергии $\langle \boldsymbol{S} \rangle$ во всех точках пространства. Укажите плоскости, вдоль которых средний поток энергии максимален.

Ответ: $\langle \vec{S} \rangle = \frac{c}{4\pi} E_0^2 \cos^2\left[\frac{k}{2}(x-y)\right](\vec{e}_x + \vec{e}_y)$,

$|\langle \vec{S} \rangle|_{max} = \sqrt{2}\frac{c}{4\pi}E_0^2$ при $y = x + \lambda\, m$.



1) $\vec{E}_1 = \vec{E}_0 \cos(\omega t - (\vec{k}_1 \vec{r}))$ k_x

$\vec{E}_2 = \vec{E}_0 \cos(\omega t - (\vec{k}_2, \vec{r}))$ k_y

$\vec{H}_1 = \vec{H}_1^0 \cos(\omega t - (\vec{k}_1, \vec{r}))$

$\vec{H}_2 = \vec{H}_2^0 \cos(\omega t - (\vec{k}_2, \vec{r}))$

2) $\mathrm{rot}\,\vec{E} = -\frac{1}{c}\vec{H} \Rightarrow -\frac{\partial E_1}{\partial x} = -\frac{1}{c}H = -E_0 k$

$|H_0| = \frac{cE_0 k}{\omega} = E_0$

3) $\vec{S}_0 = \frac{c}{4\pi}\left[(\vec{E}_1 + \vec{E}_2)(\vec{H}_1 + \vec{H}_2)\right] = \frac{c}{4\pi}\begin{pmatrix}(E_1+E_2)H_1 \\ (E_1+E_2)H_2 \\ 0\end{pmatrix}$

$$E_1+E_2=2E_0\cos\left(\omega t-\frac{k(x+y)}{2}\right)\cos\left(\frac{k}{2}(x-y)\right)\Rightarrow$$

$$\Rightarrow(E_1+E_2)H_1=E_0^2\cos\left(\frac{k}{2}(x+y)\right)\left(\cos(2\omega t-k(3x+y))+\cos\left(\frac{k}{2}(x-y)\right)\right)\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\overline{(E_1+E_2)H_1}=E_0^2\cos^2\left(\frac{k}{2}(x-y)\right)=\overline{(E_1+E_2)H_2}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\overline{\bar{S}}=\frac{c}{4\pi}E_0^2\cos^2\left(\frac{k}{2}(x-y)\right)\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}$$

$$|\bar{S}|_{max}=\sqrt{2}\,\frac{E_0c}{4\pi}\quad\text{при }\frac{k}{2}(x-y)=\pi n$$

/ОТВЕТ

Неделя XIV

№ 24.1

$E_x(z,t)$

$B_y(z,t)$

v

Доказ:

$E_x=\frac{v}{c}B_y$

$$E_x(z,t)\sqrt{\varepsilon}=H(z,t)\sqrt{\mu}=\frac{B_y(z,t)}{\mu}\sqrt{\mu}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow E_x=\frac{B_y}{\sqrt{\mu\varepsilon}}=\frac{v}{c}B_y\quad\text{ч.т.д.}$$

№ 24.2

Дано: ν проводу

$l_{мин}$ - ? при кот. фиол. мм

$$l_{2T}c\approx\frac{c}{\nu}=6\cdot10^3\text{ км}$$

№ 24.3

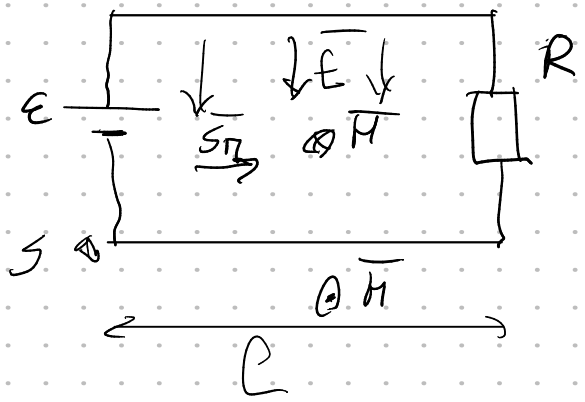
$V=1\times2\times3$ см

$\nu_{мин}$ - ?

$$\nu_{min}=\frac{\omega_{min}}{2\pi}=\frac{c}{2\pi}\sqrt{\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}}\approx9\text{ ГГц}$$

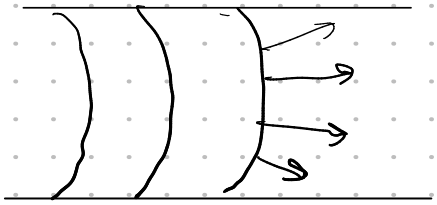
№ 12.25

12.25. Имеется двухпроводная линия из идеального проводника (без тепловых потерь). Одна пара концов линии присоединена к генератору постоянного тока, другая — к некоторому сопротивлению (нагрузке). Показать, что если падение напряжения в проводах не учитывать, то вектор потока энергии (вектор Пойнтинга) **S** в пространстве между проводами направлен вдоль проводов от генератора к нагрузке. Как изменится картина, если учесть сопротивление проводов?



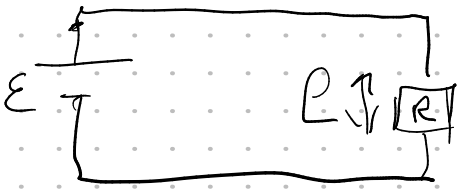
1) если $R_{пр} = 0$, то $\bar{E} \perp$ проводам и $S_{пр}$ - как на рис.

2) если $R_{пр} \neq 0$, то $\bar{E}$ будет вблизи к проводу искриваться:



Следовательно, вектор. Пойнтинга будет менять напр в завис. от удаления от проводов...

№12.40



1) $\bar{S} = \frac{c}{4\pi}[\bar{E} \times \bar{H}]$

$U = U_0 \cos(\omega t) = El$

$I = I_0 \sin(\omega t) \Rightarrow$

$\Rightarrow H = \frac{2I}{cr} = \frac{2 I_0 \sin(\omega t)}{cr}$

$\Rightarrow$

$$\Rightarrow S = \frac{c}{4\pi}\left|[\bar{E} \times \bar{H}]\right| = \frac{U_0 I_0 \cos(\omega t)\sin(\omega t)}{2\pi r l} =$$

$$= \boxed{\frac{U_0 I_0 \sin(2\omega t)}{4\pi r l}}$$ ЮТ ВЕТ

Т.к. $\sin(2\omega t)$, то каждые $\frac{T}{4}$ пер. будет меняться напр

№12.42

12.42. Провода системы Лехера находятся в емкостной связи с генератором синусоидальных колебаний, который поддерживает между концами A и B переменное напряжение $V_0 \cos \omega t$, где V_0 и ω — постоянные. Концы C и D закорочены (рис. 260). Длина лехеровой системы $AC = BD = l$. Найти распределение напряжения $V(x, t)$ между проводами как функцию координаты x и времени t, предполагая, что колебания установились, а активное сопротивление всех проводов равно нулю. Исследовать амплитуду A установившихся колебаний напряжения в пучностях в зависимости от длины l лехеровой системы.

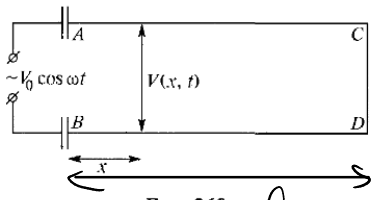


Рис. 260

1) $u_{пад} = a_0 \cos(\omega t - kx - \delta)$

$u_{отр} = a_0 \cos(\omega t + kx - \delta)$

$\Rightarrow u(x,t) = 2a_0 \cos(\omega t) \cos(kx + \delta)$

2) $u(l,t) = 0 \Rightarrow \cos(kl + \delta) = 0 \Rightarrow \delta = \pi(n + \frac{1}{2}) - kl$

$u(0,t) = V_0 \cos(\omega t) = 2a_0 \cos(\omega t) \cos\delta \Rightarrow 2a_0 = \frac{u_0}{\cos\delta}$

$\Rightarrow$

$$\Rightarrow u(x,t) = \frac{u_0 \cos(\omega t) \cos(kx + \delta)}{\cos\delta}, \quad \delta = \pi(n + \frac{1}{2}) - kl$$

№12.46

12.46. В волноводе квадратного сечения со стороной $a = 5$ см с металлическими стенками возбуждаются колебания электрического поля $E_x = E_0 \cos 2\pi\nu_0 t$ с частотой $\nu_0 = 2998$ МГц (поле $\mathbf{E}$ перпендикулярно оси волновода z и параллельно одной из стенок) (рис. 261). При какой минимальной частоте амплитудной модуляции ν_{min} в волноводе возникнет бегущая волна? Чему равна фазовая скорость волны при частоте модуляции $\nu = 3$ МГц?

12.47. В резонаторе, который представляет собой кубик со стороной a, с идеально проводящими стенками и на-

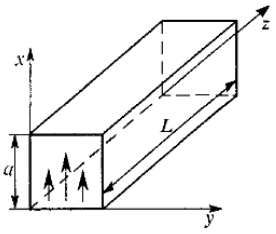


Рис. 261

1) $\nu_{min} \geq \nu_{кр} = \frac{2\pi c}{\lambda_{кр} \cdot 2\pi} = \frac{c}{2a} = 2998$ МГц $< \nu_0$

2) $E_x = E_0 \sin(k_y \cdot y) \cos(\omega t - k_z z)$

3) $E_\tau = 0 \Rightarrow y = 0,\ y = a \Rightarrow k_y a = \pi n \Rightarrow k_y = \frac{\pi n}{a}$

4) $\omega^2 = c^2(k_y^2 + k_z^2) \Rightarrow k_z = \sqrt{\left(\frac{\omega}{c}\right)^2 - \left(\frac{\pi n}{a}\right)^2}$

5) $V_\varphi = \frac{\omega}{k_z} = \frac{\omega}{\sqrt{\left(\frac{\omega}{c}\right)^2 - \left(\frac{\pi n}{a}\right)^2}} = \frac{c}{\sqrt{1 - \left(\frac{\nu_{кр}}{\nu}\right)^2}}$

Для АМ: $A = A\cos(\omega_0 t) + \frac{mA}{2}\cos((\omega_0 + \Omega)t) + \frac{mA}{2}\cos((\omega_0 - \Omega)t)$

$2\pi\nu = \omega_0 + \Omega = 3000$ МГц

$V_\varphi = 27{,}4$ с /ОТВЕТ

N 12,52

12.52. Мощный СВЧ-генератор через волновод питает нагрузку, посылая в волновод мощность $N_0 = 100$ кВт. Часть этой мощности поглощается в нагрузке ($N_н = 75$ кВт), а часть отражается. В результате в волноводе возникает суперпозиция прямой и отраженной волн, распространяющихся во встречных направлениях. Найти коэффициент стоячей волны в волноводе, т. е. отношение максимальной напряженности поля (в пучности) к минимальной (в узле).

1) $E = A\cos(\omega t + kz + \varphi) \sim \sqrt{N_0 - N_н}$

2) $E_0 = A_0 \cos(\omega t - kz) \sim \sqrt{N_0}$

3) $k = \frac{A_{max}}{A_{min}} = \frac{A_0 + A}{A_0 - A} = \frac{1+\rho}{1-\rho}$

КСВ

$\rho^2 = \left(\frac{A}{A_0}\right)^2 = \frac{N_0 - N_н}{N_0} = 0{,}25$

$\Rightarrow k = \frac{1+0{,}5}{1-0{,}5} = 3$ /ОТВЕТ

N 12,67

12.67. Для передачи электромагнитной энергии от генератора высокочастотных колебаний к нагрузке используется длинная линия, состоящая из двух плоских шин, расположенных параллельно друг другу (рис. 349). Ширина шин $l = 10$ см, расстояние между ними $d = 1$ см. Оценить скорость распространения электромагнитных волн в такой линии, а также импеданс $Z_н$ нагрузки, при которой в линии устанавливается чисто бегущая волна. Считать, что длина волны $\lambda \gg d, l$.

Рис. 349

1) $C = \frac{S}{4\pi d} \Rightarrow C_{уд} = \frac{l}{4\pi d}$

2) $\Phi = BS_\perp = \frac{4\pi i}{c} S_\perp = \frac{4\pi I}{lc} S_\perp \Rightarrow \Phi_{уд} = \frac{I L_{уд}}{c} = \frac{4\pi I d}{lc}$

3) $\frac{\partial^2 V}{\partial t^2} = \frac{c^2}{L_{уд} C_{уд}} \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} \Rightarrow V = \frac{c}{\sqrt{C_{уд} \cdot L_{уд}}} = c$, $R = \frac{1}{c}\sqrt{\frac{L_{уд}}{C_{уд}}} = 2$ м

N 12,48

12.48. Генератор электромагнитного излучения с длиной волны $\lambda = 8$ мм и мощностью $N = 1$ Вт настроен на основную моду прямоугольного резонатора с металлическими стенками, объем которого $V = 0{,}2$ см^3 и добротность $Q = 10^3$. Система соединения генератора и резонатора обеспечивает полное поглощение энергии генератора внутри резонатора. Определить максимальную напряженность E_0 электрического поля в резонаторе.

1) $Q = 2\pi \frac{P}{N} = \frac{2\pi}{T} \cdot \frac{W_{max}}{N} = \frac{2\pi c}{\lambda} \cdot \frac{W_{max}}{N} \Rightarrow W_{max} = \frac{\lambda N Q}{2\pi c}$

$W_{max} = \frac{E_{max}^2}{8\pi} V \Rightarrow E_{max} = \sqrt{\frac{W_{max} \cdot 8\pi}{V}}$

$\Rightarrow$

$\Rightarrow E_{max} = \sqrt{\frac{16 Q N \lambda}{Vc}} \approx 1{,}4 \frac{кВ}{см}$

Т20

Т20. (2018-4А) В прямоугольном резонаторе с хорошо проводящими стенками размерами $a \times a \times b$, где $a > b$, две наименьшие резонансные частоты равны $\nu_1 = 10$ ГГц и $\nu_2 = 11$ ГГц соответственно. Найдите следующую разрешенную частоту резонатора.

Ответ: $\nu_3 \approx 13$ ГГц.

1) $k_x = \frac{\pi n}{a}$

$k_y = \frac{\pi m}{b}$

$k_z = \frac{\pi l}{c}$

$$\Rightarrow \frac{\varepsilon \omega^2}{c^2} = k_x^2 + k_y^2 + k_z^2 = \left(\frac{\pi n}{a}\right)^2 + \left(\frac{\pi m}{a}\right)^2 + \left(\frac{\pi l}{b}\right)^2$$

2) ω - мин, $a > b$:

$$(1,0,1): \left(\frac{\pi}{a}\right)^2 + \left(\frac{\pi}{b}\right)^2 = \frac{\varepsilon \cdot 4\pi^2 \cdot \nu_1^2}{c^2} \Rightarrow \left(\frac{1}{a}\right)^2 + \left(\frac{1}{b}\right)^2 = \frac{4\varepsilon \nu_1^2}{c^2}$$

$$(1,0,2): \left(\frac{\pi}{a}\right)^2 + \left(\frac{2\pi}{b}\right)^2 = \frac{\varepsilon \cdot 4\pi^2 \nu_2^2}{c^2} \Rightarrow \left(\frac{1}{b}\right)^2 = \frac{4\varepsilon}{3c^2}\left(\nu_2^2 - \nu_1^2\right)$$

$$(1,0,3): \left(\frac{\pi}{a}\right)^2 + \left(\frac{3\pi}{b}\right)^2 = \frac{\varepsilon \cdot 4\pi^2 \cdot \nu_3^2}{c^2} \Rightarrow \nu_3^2 = \nu_1^2 + \frac{8}{3}\left(\nu_2^2 - \nu_1^2\right) = \frac{8}{3}\nu_2^2 - \frac{5}{3}\nu_1^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \nu_3 \approx 1{,}3 \text{ ГГц}$$

Неделя XV

№ 15.1

$T_e \sim 10^4$ K

$n_e \sim 10^9$ см$^{-3}$

r_{min} - ?

квазинейтр. разр.

$$r_{min} \simeq \sqrt{\frac{kT}{8\pi n_e e^2}}$$

$$r_{min} = \sqrt{\frac{1{,}36 \cdot 10^{-16} \cdot 10^4}{8 \cdot 3{,}14 \cdot 10^9 \cdot (4{,}8 \cdot 10^{-10})^2}} \approx 2{,}7 \text{ см}$$

№ 15.2

$T_e \sim 10^4$ K

$n_e \sim 10^9$ см$^{-3}$

$W_{кул}$ - ?

$$W_{кул} \sim \frac{e^2}{n_e^{-\frac{1}{3}}} \simeq e^2 \cdot n^{\frac{1}{3}} \approx 10^{-4} \text{ эВ}$$

$$W_{кин} \sim kT_e \simeq 1 \text{ эВ}$$

$W_{кул} \ll W_{кин}$ $\Rightarrow$ можно считать ид. газом

№15.3

$\nu = 4\cdot 10^6$ Гц

$n_e \sim ?$

$$n_e = \frac{m\omega^2}{4\pi e^2} = \frac{4\pi^2\nu^2 m}{4\pi e^2} = \frac{\pi \nu^2 m}{e^2} = 2\cdot 10^5\ \text{см}^{-3}$$

№12.55

12.55. Плоский конденсатор заполнен плазмой со средней концентрацией электронов и ионов n_0 и температурой T. Расстояние между пластинами конденсатора a, разность потенциалов V. Пренебрегая током через плазму и считая $eV \ll kT$, определить пространственную зависимость потенциала в плазме между пластинами конденсатора.

1) $n_e = n_0 \cdot \exp\left(\frac{e\varphi}{kT}\right) \approx n_0\left(1 + \frac{e\varphi}{kT}\right)$

$n_i = n_0\left(1 - \frac{e\varphi}{kT}\right)$

2) $4\pi\rho = 4\pi e(n_i - n_e) = -8\pi n_0 \cdot e^2 \frac{\varphi}{kT} \Rightarrow \rho = -\frac{2e^2 n_0}{kT}\varphi$

3) $\Delta\varphi = -4\pi\rho$

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2} = \frac{8\pi n_0 e^2}{kT}\varphi = \frac{1}{r_D^2}\varphi$$

$$\lambda^2 = \frac{1}{r_D^2} \Rightarrow \lambda = \pm\frac{1}{r_D} \Rightarrow \varphi = A\exp\left(\frac{x}{r_D}\right) + B\exp\left(-\frac{x}{r_D}\right)$$

4) Гр. усл: $\varphi(0) = 0$, $\varphi(a) = V$

$$\varphi(0) = A + B = 0 \Rightarrow B = -A \Rightarrow \varphi = 2A\,\mathrm{sh}\left(\frac{x}{r_D}\right)$$

$$\varphi(a) = V = 2A\,\mathrm{sh}\left(\frac{a}{r_D}\right) \Rightarrow A = \frac{V}{2\,\mathrm{sh}\frac{a}{r_D}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{\varphi(x) = V\frac{\mathrm{sh}\left(\frac{x}{r_D}\right)}{\mathrm{sh}\left(\frac{a}{r_D}\right)}, \text{ где } r_D = \sqrt{\frac{kT}{8\pi n_0 e}}}$$

№12.58

№12.96

12.96. Плоская электромагнитная волна с частотой $\omega = 10^{11}$ с$^{-1}$ падает нормально на поверхность плазмы. Уменьшение частоты на $\Delta\omega = 10^{10}$ с$^{-1}$ приводит к росту амплитудного коэффициента отражения на 0,01. Определить концентрацию электронов плазмы, полагая $\omega_p \ll \omega$.

1) $\varepsilon = 1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2}$, $\omega_p = \sqrt{\frac{4\pi N e^2}{m}}$

2) коэф отр. из Френеля:

$$r_\perp = -\frac{\sin(\varphi-\psi)}{\sin(\varphi+\psi)}$$

$$r_\parallel = -\frac{tg(\varphi-\psi)}{tg(\varphi+\psi)}$$

3) При $\varphi \to 0$, $\psi \to 0$ $\Rightarrow r_\perp = r_\parallel = \frac{\psi-\varphi}{\psi+\varphi}$ (−)

$n_1 \sin\varphi = n_2 \sin\psi \Rightarrow n_1\varphi \approx n_2\psi \Rightarrow \frac{\varphi}{\psi} = n_2$ т.к. $n_1 = 1$

4) (−) $\frac{1-n_2}{1+n_2} = \frac{1-n}{1+n}$

$n = \sqrt{\varepsilon} = \sqrt{1-\frac{\omega_p^2}{\omega^2}} \approx 1$ при $\omega_p \ll \omega \Rightarrow r \approx \frac{1}{4}\left(\frac{\omega_p}{\omega}\right)^2$

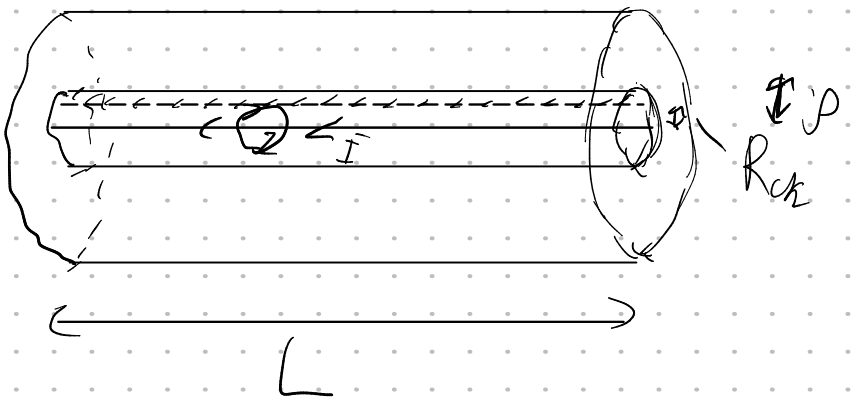
5) $\Delta r \approx \frac{1}{2}\frac{\omega_p}{\omega}\Delta\left(\frac{\omega_p}{\omega}\right) \approx -\frac{\omega_p^2}{2\omega^3}\Delta\omega \Rightarrow \omega_p^2 = -2\omega^3\frac{\Delta r}{\Delta\omega}$

6) $\frac{4\pi N e^2}{m} = -2\omega^3\frac{\Delta r}{\Delta\omega} \Rightarrow N = \frac{-2m\omega^3}{4\pi e^2}\frac{\Delta r}{\Delta\omega} \approx 6\cdot 10^{11}\ см^{-3}$

Т22

Т22. Оцените относительное уменьшение амплитуды сигнала из-за скин-эффекта в телевизионном коаксиальном кабеле длиной $L = 10$ м на частоте $f = 1$ ГГц (приблизительно верхняя граница дециметрового диапазона). Считать, что потери обусловлены в основном токами в центральном медном проводнике диаметром $D = 0{,}6$ мм (потери в экране малы ввиду его большой площади). Удельная проводимость меди $\sigma = 5{,}8 \cdot 10^7$ См/м, волновое сопротивление кабеля $\rho = 75$ Ом.

Ответ: $\Delta U/U \sim 0{,}4$.



1) $U = I\rho$ – без

$U_{ск} = IR_{ск} < I\rho$

$$R_{ск} = \frac{L\sqrt{2\pi\sigma \cdot 2\pi\nu}}{\pi D \cdot \sigma C} = \frac{2L\sqrt{\sigma\nu}}{\sigma D C} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{\frac{\Delta U}{U}} = \frac{U - U_{ск}}{U} = 1 - \frac{R_{ск}}{\rho} \approx \boxed{0{,}4}$$

№ 12.53

12.53. В прямоугольном объемном резонаторе СВЧ-диапазона со сторонами $a < b < l$ возбуждают низшую моду колебаний. После накопления в резонаторе плазмы, образующейся в результате ионизации оставшегося после откачки воздуха, частота этой моды колебаний удваивается. По этим данным определить концентрацию электронов плазмы.

1) $\left(\frac{\pi n}{a}\right)^2 + \left(\frac{\pi m}{b}\right)^2 + \left(\frac{\pi k}{l}\right) = \frac{\varepsilon \omega^2}{c^2}$

Осн. част: $n = 0$, $m = k = 1 \Rightarrow$

$$\Rightarrow \left(\frac{\pi}{b}\right)^2 + \left(\frac{\pi}{l}\right)^2 = \frac{\varepsilon \omega^2}{c^2} \underset{\text{Без плазмы}}{=} \frac{\omega_0^2}{c^2}$$

2) $n_{плазмы} \uparrow \Rightarrow \varepsilon \downarrow$

$$\varepsilon = 1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2} \Rightarrow \left(\frac{\pi}{b}\right)^2 + \left(\frac{\pi}{l}\right)^2 = \frac{\omega^2 - \omega_p^2}{c^2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \omega_p^2 = \omega^2 - \omega_0^2$$

$$\omega_p^2(0) = 0$$

$$\omega_p^2(N_e) = (2\omega_0)^2 - \omega_0^2 = 3\omega_0^2 = \frac{4\pi N e^2}{m} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow N = \frac{3 m \omega_0^2}{4\pi e^2} = \frac{3\pi m}{4\pi e^2} \cdot e^2 \left(\left(\frac{\pi}{b}\right)^2 + \left(\frac{\pi}{l}\right)^2\right) = \boxed{\frac{3\pi m e^2}{4c^2}\left(\frac{1}{b^2} + \frac{1}{l^2}\right)}$$

T21

T21. Оцените омические потери в медном проводе длиной $l = 1$ м сечением $S = 4$ мм^2 при протекании через него синусоидального тока с амплитудой $I = 20$ А и частотой $\nu = 13{,}56$ МГц. Удельная проводимость меди $\sigma = 5{,}2 \cdot 10^{17}$ с$^{-1}$. Сравните результат с потерями при $\nu_0 \lesssim 50$ Гц.

Ответ: $Q \approx \frac{I_0^2 l}{2cr}\sqrt{\frac{\nu}{\sigma}}$ [ед. СГС] ≈ 30 Вт (при 50 Гц $Q \approx 0{,}9$ Вт).

1) Для оценки – весь ток в скин. слое

$$\delta_{ск} \sim \frac{c}{\sqrt{2\pi\sigma\omega}}$$

2) При низкой ω ток течет по всему сечению

$$R = \frac{l}{\sigma S} \text{ и } \boxed{\overline{Q}} = \overline{I^2 R} = \frac{I_0 l}{2\sigma S} \approx \boxed{0{,}9\text{ Вт}} - \nu \leq 50\text{ Гц}$$

При выс. ω:

$$R = \frac{l}{\sigma \cdot 2\pi r l_{ск.}} \approx \frac{l}{\sigma c}\sqrt{\frac{\nu}{\sigma}} \Rightarrow \overline{Q} = \overline{I^2 R} = \frac{I_0^2 R}{2} = \frac{I_0 l}{2rc}\sqrt{\frac{\nu}{\sigma}} \approx$$

$$\approx 30\ \text{Вт} \quad (\nu = 13{,}56\ \text{МГц})$$

Т23

Т23. Плазма имеет проводимость $\sigma \sim 10^{14}$ с$^{-1}$. Оцените коэффициент диффузии магнитного поля в плазме и глубину проникновения магнитного поля за время $\tau = 1$ мкс.

Ответ: $D_М \approx 70$ м^2/с, $\delta \sim 1$ см.