Неделя I

№ 1.1

Дано:

$e = 1{,}6 \cdot 10^{-19}$ Кл

$m_p = 1{,}67 \cdot 10^{-27}$ кг

Найти:

$\frac{F_{эл}}{F_{гр}}$ – ?

1) $\begin{cases} F_{эл} = k\frac{e^2}{r^2} \\ F_{гр} = G\frac{m_p^2}{r^2} \end{cases} \Rightarrow \frac{F_{эл}}{F_{гр}} = \frac{k}{G}\frac{e^2}{m_p^2} \approx$ $\boxed{1{,}2 \cdot 10^{36}}$ / ОТВЕТ

№ 1.2

Дано:

$E_1 = 100$ В/м

$h = 1{,}5$ мм

$E_h = 25$ В/м

Найти:

$\frac{\rho}{e} = ?$

1) по т. Гаусса:

$\frac{dE}{dx} = 4\pi\rho \Rightarrow \frac{\Delta E}{h} = 4\pi\rho \Rightarrow \rho = \frac{E_h - E_0}{4\pi h} \approx 10^{-9}$ СГСЭ

2) $e \approx 5 \cdot 10^{-10}$ СГСЭ

$\rho \approx 10^{-9}$ СГСЭ

$\Rightarrow \boxed{\frac{\rho}{e} \approx 2}$ / ОТВЕТ

№ 1.3

Дано:

$\alpha_1 = 0$

$\alpha_2 = \frac{\pi}{2}$

Найти:

$E_0, E_{\frac{\pi}{2}}$ – ?

$E = \frac{3pr\cos\alpha}{r^4} - \frac{p}{r^3}$

$\boxed{E_0 = \frac{3pr}{r^4} - \frac{p}{r^3} = \frac{2p}{r^3}}$

$\boxed{E_{\frac{\pi}{2}} = 0 - \frac{p}{r^3} = 0}$ / ОТВЕТ

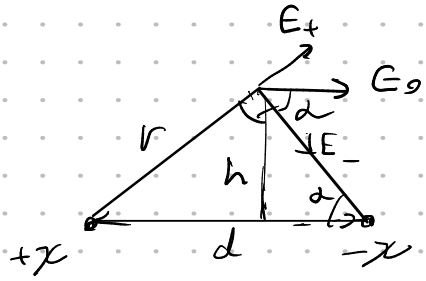
№ 1.14

Дано:

d, x, h

Найти:

E_0 – ?



1) по т. Гаусса:

$E(x)\, 2\pi x\, l = 4\pi \int_0^l \lambda\, dl \Rightarrow$

$\Rightarrow E(x) = \frac{2\lambda}{x}$

2) $\vec{E_0} = \vec{E_+} + \vec{E_-}$, $|E_+| = |E_-| = E$

3) $E_0^2 = E^2 + E^2 - 2E^2\cos(180 - 2\alpha) = 2E^2(1 + \cos 2\alpha) = 4E^2\cos^2\alpha \Rightarrow$

$\Rightarrow E_0 = 2E\cos\alpha = 2 \cdot \frac{2\lambda}{r} \cdot \frac{d}{\sqrt{4h^2 + d^2}} = \boxed{\frac{8\lambda d}{4h^2 + d^2}}$ / ОТВЕТ

№ 1.21

Дано:

$E_0 \parallel r$

$|E_0| = \text{const}$

Найти:

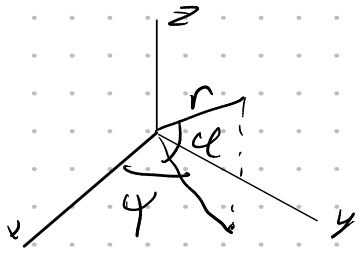
$\rho(r)$ – ?

1) $\operatorname{div} E = 4\pi\rho(r)$

2) В сфер. коорд.:

$E_r = E_0 = const$

$E_\varphi = E_\psi = 0$ $\Rightarrow$



$$\Rightarrow \operatorname{div} E = \frac{1}{H_r \cdot H_\varphi \cdot H_\psi}\left[\frac{d}{dr}(H_\varphi \cdot H_\psi E_r)\right] \Longrightarrow$$

$H_r = 1$

$H_\varphi = r$

$H_\psi = r\cos\psi$

$$\Rightarrow \operatorname{div} E = \frac{1}{r^2\cos\psi}\left[\frac{d}{dr}(r^2\cos\psi E_0)\right] =$$

$$= \frac{2rE_0}{r^2} = \frac{2E_0}{r} \Rightarrow \boxed{\rho(r) = \frac{E_0}{2\pi r}}$$ / ОТВЕТ

Т1

Дано:

$p = 1{,}84\,D$

$r = 35\,A$

а) $\alpha_1 = \frac{\pi}{2}$

$\alpha_2 = \pm\frac{\pi}{2}$

б) $\alpha_1 = 0$

$\alpha_2 = \pm\frac{\pi}{2}$

Найти:

F — ?

Найдем силу действ. на 1 диполь в неодн. поле

$$\bar{F} = (p_1\nabla)\bar{E}_2 = p_{1x}\frac{d\bar{E}_2}{dx} + p_{1y}\frac{dE_2}{dy}$$

Тогда:

$$\bar{E}_2 = \left(\frac{3(p_{2x}x + p_{2y}y)}{r^5}x - \frac{p_{2x}}{r^3}\right)\bar{i} +$$

$$+\left(\frac{3(p_{2x}x + p_{2y}y)}{r^5}y - \frac{p_{2y}}{r^3}\right)\bar{j} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{dE_{2x}}{dx} = \frac{-6p_{2x}}{r}; \quad \frac{dE_{2x}}{dy} = \frac{3p_{2y}}{r^4} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow F_x = -6\frac{p_{1x}p_{2x}}{r^4} + 3\frac{p_{1y}}{p_{2y}}r^4$$

Аналогично $F_y = 3\frac{p_{1x}p_{2y}}{r^4} + 3\frac{p_{1y}p_{2x}}{r^4}$

а) $F_x = \pm 3\frac{p^2}{r^4} = \pm 7\cdot 10^{-19}$ Дин

$F_y = 0$ Дин.

б) $F_x = 0$ Дин

$F_y = \pm 3\frac{p^2}{r^4} = \pm 7\cdot 10^{-19}$ Дин.

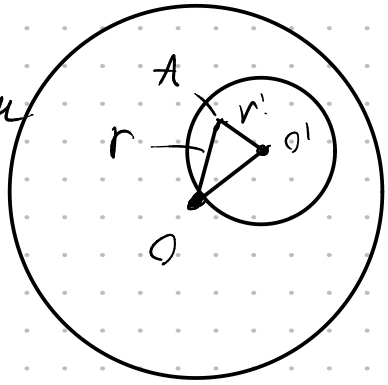
ОТВЕТ

№ 1.22

Дано: ρ, r

Найти: E – ?

1) Заполним полость электр. с ρ_+ и ρ_- и рассмотрим суперпоз 2 полей равномерно заряженных



$$\bar{E} = \bar{E}_0 + \bar{E}_{01} = \frac{4\pi}{3}(\rho\bar{r} + (-\rho)\bar{r}') = \frac{4\pi}{3}\rho(\bar{r} - \bar{r}') = \boxed{\frac{4\pi}{3}\rho\bar{\delta}}$$ / ОТВЕТ

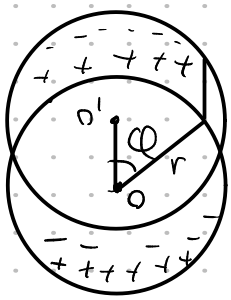
№ 1.23

Дано: R, E_0

$\sigma(\varphi)$ – ?

E – ?

1) Сфвинем сферу вверх на l



В области наложения заряды компенсируются

Т. о. толщина сдвинутого слоя:

$\delta = l\cos\varphi$

Тогда пов. плотность зарядов $\sigma(\varphi) = \rho l\cos\varphi$

$$E = \frac{4\pi}{3}\rho r \Rightarrow \rho = \frac{3E_0}{4\pi l} \Rightarrow \sigma(\varphi) = \rho l\cos\varphi = \frac{3E_0}{4\pi}\cos\varphi$$

2) Для нахождения поля вне сферы рассмотрим диполь

$\bar{p} = q\bar{l}$

$$\bar{p} = q\bar{l} = \rho\frac{4\pi}{3}R^3\bar{l} = \frac{3\bar{E}_0}{4\pi}\frac{4\pi}{3}R^3 = R^3\bar{E}_0$$

Ответ: $\sigma(\varphi) = \frac{3E_0}{4\pi}\cos\varphi$

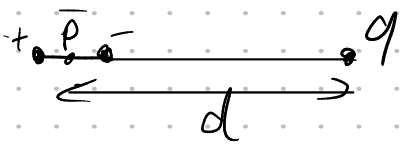
Поле вне сферы равносильно полю диполя $\bar{p} = R^3\bar{E}_0$

№ 1.7

Дано: q, d, p

Найти: F – ?

$$E = \frac{3pd}{d^4} - \frac{p}{d^3} = \frac{2p}{d^3} \Rightarrow$$



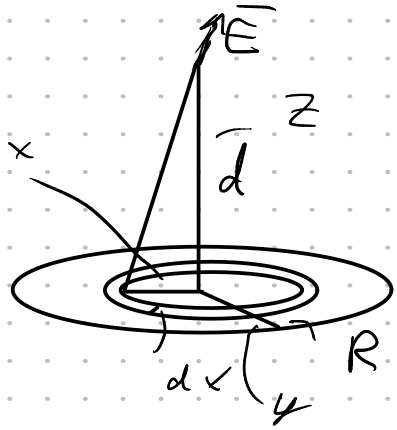
$$\Rightarrow \boxed{F = qE = \frac{2pq}{d^3}}$$ / ОТВЕТ

№1.10

Дано: R, σ, d

Найти: E -?

Найдем вклад кольца dx в $\bar{E}$ - $d\bar{E}$



$$d\bar{E} = \frac{dq}{r^2}\frac{\bar{r}}{r}$$

$$dq = \sigma dS = \sigma 2\pi x dx$$

$$\frac{\bar{r}}{r} = \frac{d \cdot \bar{e}_z}{\sqrt{d^2+x^2}} = \frac{d}{\sqrt{d^2+x^2}}$$

$$\Rightarrow dE = \frac{\sigma 2\pi x dx}{d^2+x^2} \cdot \frac{d}{\sqrt{d^2+x^2}} = 2\pi\sigma d \cdot \frac{x\,dx}{(d^2+x^2)^{\frac{3}{2}}} \Rightarrow$$

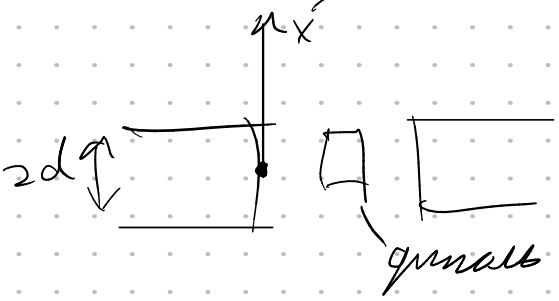
$$\Rightarrow E = 2\pi\sigma d \cdot \int_0^R \frac{x}{(d^2+x^2)^{\frac{3}{2}}}dx = \boxed{2\pi\sigma\left(1-\frac{d}{\sqrt{d^2+R^2}}\right)}$$

ОТВЕТ

№1.16

Дано: $d, \rho = \rho_0\frac{x}{d}$, $m, \bar{p}$

Найти: T -?



$$\operatorname{div} E = 4\pi\rho = 4\pi\rho_0\frac{x}{d} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{dE}{dx} = 4\pi\rho_0\frac{x}{d} \Rightarrow E(x) = \int 4\pi\rho_0\frac{x}{d}dx = 2\pi\rho_0\frac{x^2}{d} + C$$

Т.к. $E(0)=0$, то $C = -2\pi\rho_0 d \Rightarrow E = 2\pi\rho_0\frac{x^2-d}{d}$

Пусть $p = ql$, тогда: $F = qE = 2\pi q\frac{\rho_0}{d}\left[\left(\frac{l}{2}-x\right)^2 - d^2 - \left(\frac{l}{2}+x\right)^2 + d^2\right]$

$$= -4\pi q\frac{\rho_0}{d}lx = -4\pi\frac{\rho_0}{d}px$$

Из 2 з-на Ньютона $m\ddot{x} = F \Rightarrow m\ddot{x} + 4\pi\frac{\rho_0}{d}px = 0 \Rightarrow$

$$\ddot{x} + \frac{4\pi\rho_0 p}{md}x = 0 \Rightarrow T = \frac{2\pi}{\omega} = \boxed{2\sqrt{\frac{\pi m d}{p\rho_0}}}$$

ОТВЕТ

№ 1.17

Дано:
$R = 10^{-8}$ см
$e = 1{,}6 \cdot 10^{-12}$ эрг

Найти:
$\rho(r)$ – ?
w – ?

Т.к. колебания гарм., то

$$\left.\begin{aligned} m\ddot{r} &= -kr \\ w &= const \end{aligned}\right| \Rightarrow w = \sqrt{\frac{k}{m}} - const \Rightarrow k = const$$

$$F = kr = eE \Rightarrow E = \frac{kr}{e}$$

Теор. Гаусса:

$$\left.\begin{aligned} \operatorname{div}\bar{E} &= 4\pi\rho(r) \\ \operatorname{div}\bar{E} &= \frac{1}{r^2}\frac{d(r^2E)}{dr} = \frac{2E}{r} + \frac{k}{e} \end{aligned}\right| \Rightarrow 4\pi\rho(r) =$$

$$= \frac{2E}{r} + \frac{k}{e} = \frac{2k}{e} + \frac{k}{e} = \frac{3k}{e} \Rightarrow \rho = \frac{3k}{4\pi e} = const$$

Найдем заряд шара:

$$e = \int_V \rho\, dV = \int_0^R 4\pi r^2 \rho\, dr = \frac{4}{3}\pi R^3 \frac{3k}{4\pi e} = \frac{R^3 k}{e} \Rightarrow k = \frac{e^2}{R^3}$$

$$\boxed{\rho = \frac{3k}{4\pi e} = \frac{3e}{4\pi R^3} \qquad w = \sqrt{\frac{k}{m}} = \sqrt{\frac{e^2}{mR^3}}}$$

/ ОТВЕТ

Неделя 2

№ 2.1

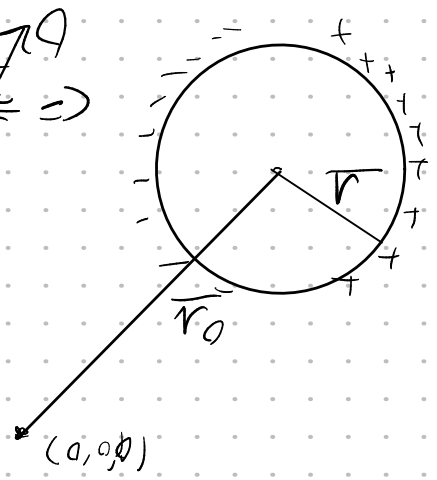
Дано:
$\varphi(\bar{r})$

Найти:
φ – ?

$$\varphi(r) = \varphi(r_0) + \sum \varphi_i = \varphi + \sum \cancel{\frac{q_i}{r}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{\varphi(\bar{r}) = \varphi(\bar{r}_0)}$$

/ ОТВЕТ



№ 2.2

Дано:
$W = 5$ МэВ
$q_1 = 2e$
$q_2 = 79e$
$e = 5 \cdot 10^{-10}$ СГС

Найти:
r_{min} – ?

ЗСЭ для переноса част. с бесконечн.

$$0 + W = A + 0 \Rightarrow W = A_{max} = q_1\varphi = \frac{q_1 q_2}{r_{min}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{r_{min} = \frac{q_1 q_2}{W} = 4{,}6 \cdot 10^{-12} \text{ см}}$$

/ ОТВЕТ

№ 2.3

Дано:

$E_0 = 130 \frac{В}{м}$

$\bar{E}_0 \uparrow\uparrow \bar{g}$

$S = 1 м^2$

Найти:

q — ?

теор. Гаусса

$SE_0 = 4\pi q \Rightarrow q = \frac{SE_0}{4\pi} = 3{,}45$ СГС / ОТВЕТ

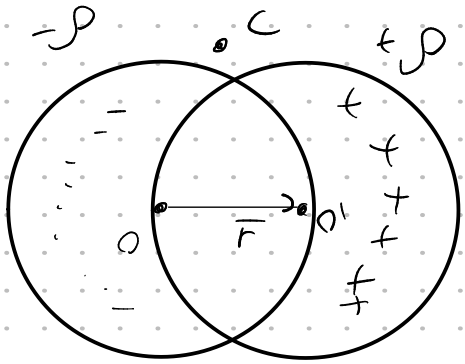
№ 1.24

Дано:

E_0

Найти:

$\sigma(\varphi)$ — ?



1) Сдвинем провольку ⊥ её оси на $\bar{r}$, тогда:

$E_C = 2\pi\rho\,\overline{O'C} + 2\pi(-\rho)\overline{OC} = 2\pi\rho\bar{r}$

2) По опр. объемн. плотн. заряда

$dq = \rho dV = \rho h(\varphi)\,dS = \rho\cos\varphi\,dS$

$E_C + E_0 = 0 \Rightarrow E_0 = 2\pi\rho r \Rightarrow \rho = \frac{E_0}{2\pi r}$

$\Rightarrow \sigma = \frac{dq}{dS} = \rho r\cos\varphi = r\cos\varphi \cdot \frac{E_0}{2\pi r} = \frac{E_0\cos\varphi}{2\pi}$ / ОТВЕТ

№ 2.3

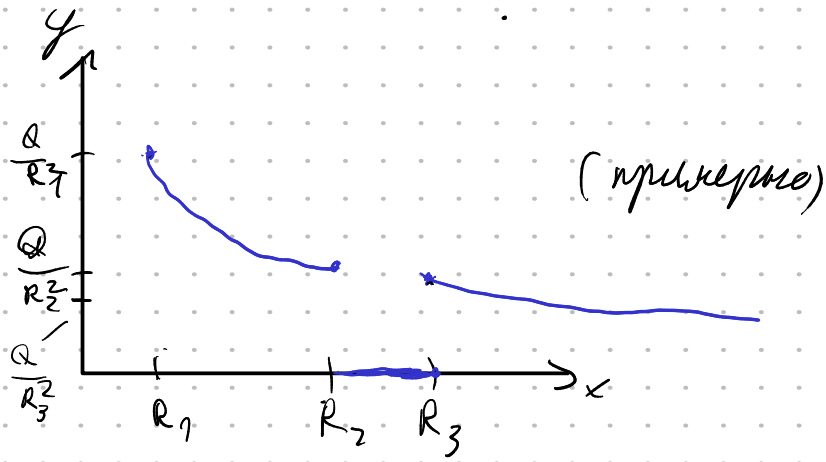
R_1, R_2, R_3, Q

$E(r)$ — ? φ_{out} — ?

При $r \in [R_3; +\infty)$: $E_3 = \frac{Q}{r^2}$

$r \in [R_2; R_3]$: $E_2 = 0$

$r \in [R_1; R_2]$: $E_1 = \frac{Q}{r^2}$



До заземления:

$\varphi_{in} = \frac{Q}{R_1} - \frac{Q}{R_2} + \frac{Q}{R_3}$

$\varphi_{out} = \frac{Q}{r}$, $r \geq R_3$

После:

$\varphi_{in} = \varphi_1 - \varphi_2 = \frac{Q}{R_1} - \frac{Q}{R_2}$

$\varphi_{out} = 0$

№2.20

q, d

1) шар заземл.

2) шар изол, $q=0$

$F - ?$

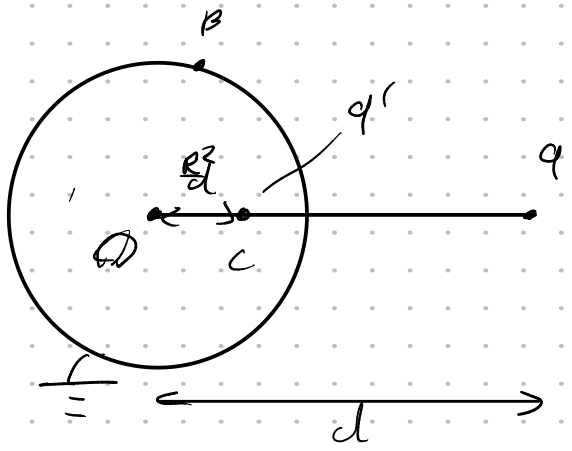
1) $\varphi_{пл} = 0$

$\varphi_B = \frac{q}{AB} + \frac{q'}{CB} \Rightarrow$

$\Rightarrow q' = -\frac{R}{d} q$

из подобия Δ

$F = \frac{q q'}{(d - \frac{R^2}{d})R} = \boxed{\frac{q^2 R d}{(d^2 - R^2)^2}}$



ОТВЕТ

2) шар изолирован

Введем $q_1 = R q_0$ в т. O в дополн. к q'

$F = \frac{q q'}{(d - \frac{R^2}{d})^2} - \frac{q q_0}{d^2}$

$q_1 = \frac{q}{d}$

$\Rightarrow \boxed{F = q^2 \left(\frac{Rd}{(d^2 - R^2)^2} - \frac{R}{d^3} \right)}$

№2.22

$OA = d$

q, r, R

$\sigma_{вн} - ?$

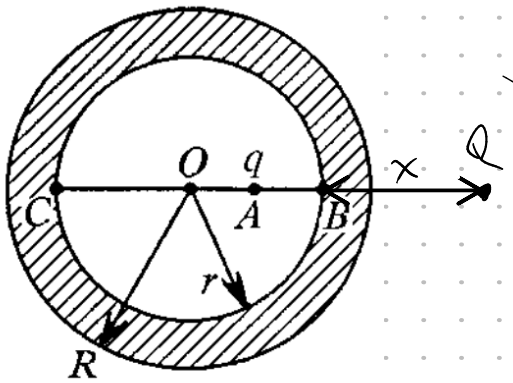
$\varphi_{обол.} - ?$

$\sigma_B - ?$

$\sigma_C - ?$

1) На внешн. пов. заряд распред. равномерно т.к. внутри оболочки $E = 0$

$\sigma_{вн} = \frac{q}{4\pi R^2}$; $\varphi = \frac{q}{R}$



2) Поместим Q так, что $\varphi_B = \varphi_C = 0$

$\boxed{QB = x}$

$\begin{cases} \varphi_B = \frac{q}{r-d} + \frac{Q}{x} = 0 \\ \varphi_C = \frac{q}{r+d} + \frac{Q}{x+2r} = 0 \end{cases}$; $\begin{cases} qx = -Q(r-d) \\ qx + 2qr = -Q(r+d) \end{cases}$;

$\begin{cases} Q = -q\frac{r}{d} \\ x = r\frac{r-d}{d} \end{cases}$

$E_B = E_q + E_Q = \frac{q}{(r-d)^2} + \frac{q r d^2}{d r^2 (r-d)^2} = \frac{q(1 + \frac{d}{r})}{(r-d)^2}$

$E_C = \frac{q(1 - \frac{d}{r})}{(r+d)^2}$

Т. Гаусса найдем σ_B и σ_C

$E_i S = 4\pi \sigma_i S \Rightarrow \sigma_i = \frac{E_i}{4\pi} \Rightarrow \begin{cases} \sigma_B = \frac{q(1+\frac{d}{r})}{4\pi(r-d)^2} \\ \sigma_C = \frac{q(1-\frac{d}{r})}{4\pi(r+d)^2} \end{cases}$

Ответ: $\sigma_{сфер} = \frac{q}{4\pi R^2}$ $\varphi_{сфер} = \frac{q}{R}$

$\sigma_B = \frac{q(1+d/r)}{4\pi(r-d)^2}$ $\sigma_C = \frac{q(1-d/r)}{4\pi(r-d)^2}$

№1.26

$\bar{E}_0$

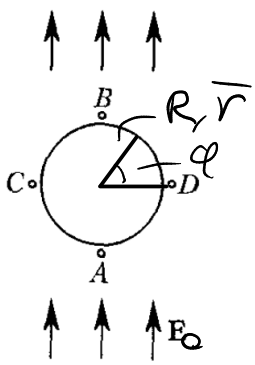
$E_{A,B,C,D} - ?$

Напряженность эл. поля вблизи шара:

$\bar{E} = \bar{E}_0 + 3R^3(\bar{E}_0, \bar{r})\frac{\bar{r}}{r^5} - R^3\frac{\bar{E}_0}{r^3} \Rightarrow$

$\Rightarrow \bar{E}(R) = 3E_0\cos\varphi\,\frac{\bar{R}}{R}$

вблизи шара



Тогда:

$E_A = 3E_0\cos\frac{3\pi}{2} = 0$

$E_B = 3E_0\cos\frac{\pi}{2} = 0$

$E_C = 3E_0\cos\pi = -3E_0$

$E_D = 3E_0\cos 0 = 3E_0$

/ ОТВЕТ

№2.11

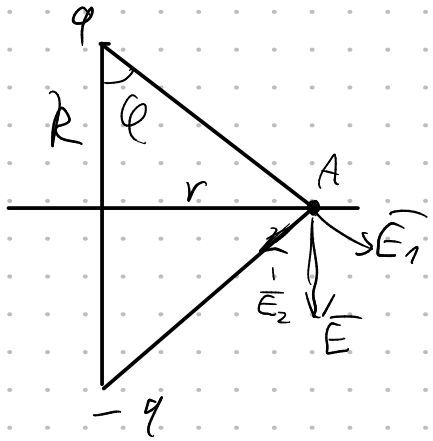
q, R

$\sigma - ?$

$-q$ - мнимый заряд по методу изобр.

1) $E_1 = E_2 = \frac{q}{R^2+r^2} \Rightarrow$

$\Rightarrow E = 2E_1\cos\alpha = 2E_1\frac{R}{\sqrt{R^2+r^2}} = \frac{2qR}{(R^2+r^2)^{\frac{3}{2}}}$



Т. Гаусса:

$E dS = 4\pi\sigma dS \Rightarrow \sigma = \frac{E}{4\pi} = \frac{qR}{2\pi(R^2+r^2)^{\frac{3}{2}}}$ / ОТВЕТ

№2.15

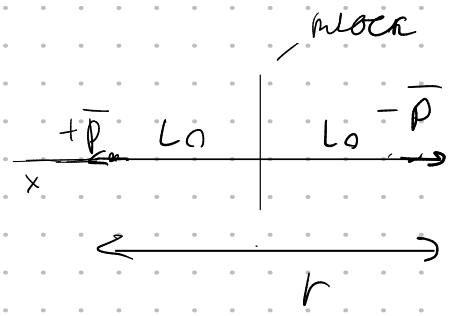
$p = 4\cdot10^{-19}$ Кл·см $= 1{,}2$ СГС·см

$L_0 = 1$ см, $L = 2$ см

$F - ?$

$A - ?$

По методу изобр.



$$\begin{cases} E = 2\dfrac{p}{r^3} \\ F = p\dfrac{dE}{dr} \end{cases} \Rightarrow F = 2p\frac{(-3)p}{r^4} = \boxed{-6\frac{p^2}{r^4}\Big|_{r=2L_0} = -0{,}54\ \text{дин}}$$

/ОТВЕТ

$$A = -6p^2\int_{L_0}^{L}\frac{dx}{r^4} = -6p^2\int_{L_0}^{L}\frac{dx}{16x^4} = \boxed{\frac{p^2}{8}\left(\frac{1}{L^3}-\frac{1}{L_0^3}\right) = -0{,}167p^2}$$

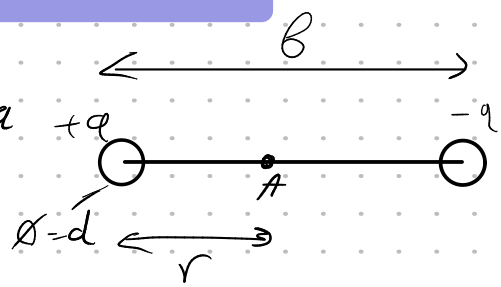
№2.48

$E_{max} = 30\ \frac{кВ}{см}$

$d = 1$ см

$b = 500$ см

Δq – ?



x – лин. пл заряда провода

$$E = \frac{2x}{r} + \frac{2x}{b-r}$$

$$\frac{dE}{dr} = 0 = -\frac{2x}{r^2} + \frac{2x}{(b-r)^2} \Rightarrow$$

$\Rightarrow r = \frac{b}{2}$ – мин. напр. E

$r = \frac{d}{2}$ – макс. напр. E

$$E_{max} = \frac{4xb}{d(b-\frac{d}{2})} \Rightarrow x = \frac{E_{max}\,d(b-\frac{d}{2})}{4b}$$

Найдем разн. потенциалов.

$$\Delta q = 2x\int_{\frac{d}{2}}^{b-\frac{d}{2}}\left(\frac{1}{r}+\frac{1}{b-r}\right)dr = 4xd\ln\left(\frac{2b}{d}-1\right) = \boxed{\frac{E_{max}\cdot d(b-\frac{d}{2})}{b}\ln\left(\frac{2b}{d}-1\right) =}$$

$\boxed{\simeq 207\ кВ}$ /ОТВЕТ

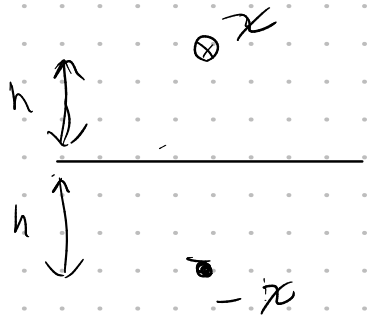
Т.2

$R = 1$ см

$E_0 = 750\ \frac{В}{м}$

$h = 4$ м

q – ?



Поле цилиндра: $E = \frac{2x}{r} \Rightarrow$

$$\Rightarrow E_0 = \frac{4x}{h} \Rightarrow x = E_0\frac{h}{4}$$

В произв. точке между зарядами:

$$E = \frac{2x}{r} + \frac{2x}{h-r}$$

$$\Delta q = q - \cancel{q_0}^{\,0} = \int_R^h\left(\frac{2x}{r}+\frac{2x}{h-r}\right)dr = 2x\left(\ln\frac{h}{R} - \ln\frac{h}{2h-R}\right) =$$

$$= 2x\ln\frac{2h-R}{R} \simeq 2x\ln\frac{2h}{R} = \boxed{\frac{E_0 h}{2}\ln\frac{2h}{R} \simeq 10\ нКл}$$ /ОТВЕТ

Неделя 3

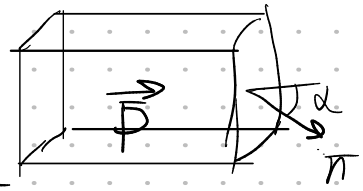
№ 3.1

p, α

$\sigma - ?$

$$\bar{P} = \frac{\bar{p}}{V} = \frac{\sigma}{sL\cos\alpha} sL \Rightarrow \boxed{\sigma = P\cos\alpha}$$

/ ОТВЕТ



№ 3.2

R_0, q, ε, R

$\varphi - ?$

По т. Гаусса:

$r \in [R_0, R]$:

$$\begin{cases} D \cdot 4\pi r^2 = 4\pi q \\ E = \frac{D}{\varepsilon} \end{cases} \Rightarrow E = \frac{q}{\varepsilon r^2}$$

$r = R_0$: $E = \frac{q}{r^2}$

$r < R_0$: $E = 0$

Найдем потенциал:

$$\boxed{\varphi} = \frac{q}{R} + \int_{R_0}^{R} \frac{q}{\varepsilon r^2} dr = \frac{q}{R} + \frac{q}{\varepsilon}\left(\frac{1}{R_0} - \frac{1}{R}\right) = \boxed{\frac{q}{R}\left(1 + \frac{R - R_0}{\varepsilon R_0}\right)}$$

/ ОТВЕТ

№ 3.1

$r, n, r^3 n \ll 1$

$(\varepsilon - 1) - ?$

Пусть $\bar{P} = \alpha \bar{E}$ ($\bar{P} = 3q\bar{l}$ - в 3D)

$q = V\rho n = \frac{4}{3}\pi r^3 \rho n \Rightarrow \bar{P} = 4\pi r^3 \rho n \bar{l}$

По т. Гаусса:

$d: V\bar{E} = 4\pi\rho \Rightarrow \frac{dE}{dx} = 4\pi\rho \Rightarrow \bar{E} = 4\pi\rho\bar{l}$

Тогда:

$$\begin{cases} \bar{P} = \alpha\bar{E} \\ \bar{P} = 4\pi r^3 \rho n \bar{l} \\ \bar{E} = 4\pi\rho\bar{l} \end{cases} \Rightarrow \alpha 4\pi\rho\bar{l} = 4\pi r^3 \rho n \bar{l} \Rightarrow \alpha = n r^3$$

Из выраж. вектора эл. инд.

$\bar{D} = \bar{E} + 4\pi\bar{P}$
$D = \varepsilon\bar{E}$ $\Rightarrow \varepsilon\bar{E} = \bar{E} + 4\pi\chi\bar{E} \Rightarrow$ $\boxed{\varepsilon - 1 = 4\pi n r^3 \to 0}$ т.к. $nr^3 \ll 1$

/ ОТВЕТ

№ 3.8

$E_A = 300\,\frac{В}{см}$
$h = 2\cdot 10^{-2}\,D$

$E_C = ?$

Напр. поля на торце $E = 2\pi\sigma$

$E_A = 2\pi\sigma$
$\sigma_A = P_A = npD$ $\Rightarrow E_A = 2\pi npD$

$E_C = 4\pi\sigma_C$
$\sigma_C = P_C = nph$ $\Rightarrow E_C = 4\pi nph$

$\frac{E_C}{E_A} = \frac{4\pi nph}{2\pi npD} = \frac{2h}{D} \Rightarrow$ $\boxed{E_C = E_A \cdot \frac{2h}{D} \approx 12\,\frac{В}{см}}$ / ОТВЕТ

№ 3.26

$\varepsilon_1, \varepsilon_2 < \varepsilon_1$
d, S

$C - ?$

Найдем $\varepsilon(x)$ т.к. завис. линейна

$\varepsilon(x) = \varepsilon_1 + \frac{\varepsilon_2 - \varepsilon_1}{d}x$

В плоск. конд:

$D = 4\pi\sigma = 4\pi\frac{q}{S}$
$E(x) = \frac{D}{\varepsilon(x)}$ $\Rightarrow \Delta\varphi = \int_0^d E(x)\,dx = \frac{4\pi q d}{S} \cdot$

$\cdot \int_0^d \frac{dx}{\varepsilon_1 d + (\varepsilon_2 - \varepsilon_1)x} = \frac{4\pi q d}{(\varepsilon_2 - \varepsilon_1)S} \ln\frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1}$

Тогда: $\boxed{C = \frac{q}{\Delta\varphi} = \frac{(\varepsilon_2 - \varepsilon_1)S}{4\pi q d \ln\frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1}}}$ / ОТВЕТ

№ 3.39

r_0, R, q
$\varepsilon - 1 \ll 1$

$F - ?$

Дипольн. момент шара:

$p = r_0^3 \frac{\varepsilon - 1}{\varepsilon + 2} E_0$

Из-за большого удаления $E_0 = \frac{q}{R^2}$

$\bar{F} = \bar{p}\,\mathrm{div}\,\bar{E} = r_0^3 \frac{\varepsilon - 1}{\varepsilon - 2} E_0 \cdot \frac{-q}{R^3}$

Т.к. $\varepsilon - 1 \ll 1$, то $\varepsilon + 2 \approx 3 \Rightarrow$ $\boxed{\bar{F} \approx -\frac{2}{3}\frac{q^2 r_0^3}{R^5}(\varepsilon - 1)}$ / ОТВЕТ

№3.77

$l_0, \bar{P}, V$

$\oint_L \bar{D}\, d\bar{l}$ – ?

по т. Гаусса:

$$\boxed{\oint_L \bar{D}\, d\bar{l}} = \oint_L \bar{E}\, d\bar{l} + \oint_L 4\pi \bar{P}\, d\bar{l} = \boxed{4\pi P L_0}$$ / ОТВЕТ

Т3

$\bar{P}(x) = \bar{P}_0\left(1 + \frac{x^2}{d^2}\right)$

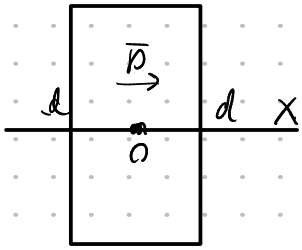
U – ?

Т.к. концы пластины незаряж., то

$D = E + 4\pi P = 0 \Rightarrow E = -4\pi P$

Тогда:

$$\Delta\varphi = \int_{-d}^{d} E\, dx = -8\pi \int_0^d \left(P_0\left(1 + \frac{x^2}{d^2}\right)\right) dx =$$



$$= \boxed{-\frac{32}{3}\pi P_0 d = U}$$ / ОТВЕТ

№3.30

$\varepsilon = 200$

$S_1 = 1\,м^2$

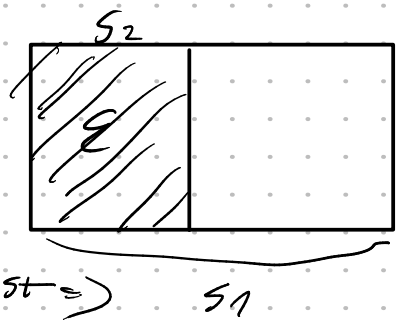
$n = 40$

S_2 – ?

$D = \varepsilon E$

$\frac{D_2}{D_1} = n$

$\Rightarrow \frac{\varepsilon E_2}{E_1} = n$



Т.к. $q = C\Delta\varphi = CEd$, то $E = \frac{q}{Cd}$, $q = const \Rightarrow$

$\Rightarrow \frac{E_2}{E_1} = \frac{C_1}{C_2}$

Найдем C_1, C_2:

$C_1 = \varepsilon_0 \frac{S_1}{d}$ $\qquad C_2 = C_2' + C_2'' = \frac{\varepsilon_0}{d}\left((S_1 - S_2) + \varepsilon S_2\right)$

Тогда:

$$\frac{E_2}{E_1} = \frac{S_1}{S_1 - S_2 + \varepsilon S_2} = \frac{n}{\varepsilon} \Rightarrow \boxed{S_2 = \frac{S_1(\varepsilon - n)}{(\varepsilon - 1)n} \approx 0{,}02\,м^2}$$ / ОТВЕТ

Т4

$\varepsilon = \frac{2}{1 + \frac{x}{h}}$

q, S, h

ρ_{max} – ?

C – ?

$D = 4\pi\sigma = 4\pi\frac{q}{S}$

$D = 4\pi P + E$

$E(x) = \frac{D}{\varepsilon(x)}$

$$\Rightarrow P = \frac{D - E}{4\pi} = \frac{q}{S}\left(1 - \frac{1}{2}\cdot\left(1 + \frac{x}{h}\right)\right) = \frac{q}{2S}\left(1 - \frac{x}{h}\right)$$

$$\rho_{пол} = -\operatorname{div}\bar{P} = -\frac{dP}{dx} = \frac{q}{2Sh}$$ — ОТВЕТ

$$C = \frac{q}{U}$$

$$U = \int_0^h E(x)dx = \frac{D}{2}\int_0^h \left(1+\frac{x}{h}\right)dx = \frac{3}{4}Dh = \frac{3}{4}\frac{4\pi q}{S}h = \frac{3\pi q h}{S} \Bigg| \Rightarrow$$

$$\Rightarrow C = \frac{q}{U} = \frac{S}{3\pi h}$$ — ОТВЕТ

N 3.79

$E_0, \varepsilon > 1, \theta$

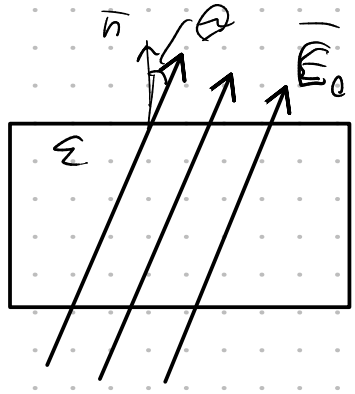
$\sigma_{пол} - ?\ \bar{P} - ?$

По граничн. усл.

$D_{1n} - D_{2n} = 4\pi\sigma_{своб} = 0 \Rightarrow D_{1n} = D_{2n}$

вектор инд. в вакууме и в ε

$$E_0\cos\theta = \frac{E_0\cos\theta}{\varepsilon} + 4\pi P_n \Rightarrow$$



$$\Rightarrow P_n = \sigma_{пол} = \frac{E_0\cos\theta(\varepsilon-1)}{4\pi\varepsilon}$$ / ОТВЕТ

По граничн. усл.: $E_{t1} = E_{t2}$, $E_{n1} = E_{n2}$; α - угол $\bar{P} \wedge \bar{n}$, тогда:

$$\operatorname{tg}\theta = \frac{E_{t1}}{E_{n1}}, \quad \operatorname{tg}\alpha = \frac{E_{t2}}{E_{n2}} \Bigg| \Rightarrow \frac{\operatorname{tg}\alpha}{\operatorname{tg}\theta} = \frac{E_{n1}}{E_{n2}} = \varepsilon$$

$$P = \frac{P_n}{\cos\alpha} = \frac{E_0\cos\theta(\varepsilon-1)}{4\pi\varepsilon}\sqrt{1+\operatorname{tg}^2\alpha} = \frac{E_0\cos\theta(\varepsilon-1)}{4\pi\varepsilon}\sqrt{1+\varepsilon^2\operatorname{tg}^2\theta} =$$

$$\frac{E_0(\varepsilon-1)}{4\pi\varepsilon}\sqrt{\cos^2\alpha+\varepsilon\sin^2\alpha}$$ / ОТВЕТ

Неделя 4

N°4.1

$\varepsilon, \pm\sigma$

$w - ?$

$f - ?$

$$w = \frac{\varepsilon E^2}{8\pi} = \frac{D^2}{8\pi\varepsilon} \Bigg| \Rightarrow w = \frac{2\pi\sigma^2}{\varepsilon}$$ / ОТВЕТ

$D = 4\pi\sigma$

$$f = \frac{E^2_{возд.}}{8\pi} = \frac{D^2}{8\pi} = 2\pi\sigma^2$$ / ОТВЕТ

№ 3.50

R, Q

$F - ?$

$$F = \frac{E^2}{8\pi} - 2\pi\sigma^2$$

$$\sigma = \frac{Q}{4\pi R}$$

$$\Rightarrow \boxed{F = \frac{Q^2}{8\pi R^4}}$$ / ОТВЕТ

№ 9.2

$C = 20$ см

$\lambda = 10^{-6}$ Ом$^{-1}\cdot$см$^{-1}$

$a = 2$

$R - ?$

По уже известной формуле

$$\boxed{R = \frac{\varepsilon}{4\pi\lambda C} \approx 8 \text{ кОм}}$$ / ОТВЕТ

№ 1.5

$\bar{E}, \bar{p}$

$W - ?$

1) Жесткий диполь

$$dW = -dA_{эл} = -(q\bar{E}d\bar{r}_+ - q\bar{E}d\bar{r}_-) = -q\bar{E}d(\bar{r}_+ - \bar{r}_-) = \bar{E}d\bar{p} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow W = p\bar{E}$$

2) Упругий диполь

$$dW = -\bar{E}d\bar{p} = -Edp = -\alpha E dE \Rightarrow W = -\alpha\int_0^E E dE = -\frac{\alpha E^2}{2} = -\frac{\bar{p}\bar{E}}{2}$$

т.к. $p \parallel E$

Ответ: 1) $W = p\bar{E}$ 2) $W = -\frac{\bar{p}\bar{E}}{2}$

№ 3.44

$W = mc^2$

$R - ?$

1) Заряд распр с $\rho = const$

$$W = \int_0^R \frac{E^2}{8\pi}\cdot 4\pi r^2 dr + \int_R^\infty \frac{E^2}{8\pi} 4\pi r^2 dr = \frac{q^2}{2R^6}\int_0^R r^4 dr +$$

$$+ \frac{q^2}{2}\int_R^\infty \frac{dr}{r^2} = \frac{q^2}{10R} + \frac{q^2}{2R} = \frac{3}{5}\frac{q^2}{R} = mc^2 \Rightarrow \boxed{R = \frac{3q^2}{5mc^2} \approx 1{,}7\cdot 10^{-13} \text{ см}}$$

ОТВЕТ

2) Заряд распр. по поверхности

$$W = \int_R^\infty \frac{E^2}{8\pi} 4\pi r^2 dr = \frac{q^2}{2R} = mc^2 \Rightarrow \boxed{R = \frac{q^2}{2mc^2} = 1{,}4\cdot 10^{-13} \text{ см}}$$

№ 3.67 + 68

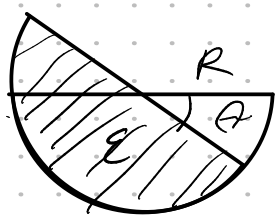
d, R, U, ε

$M - ?$

Рассмотрим случай $U = const$

Будет две работы:

$A_1 = M d\theta$ – внеш. момент.



$$M d\theta = \delta A_{ист} = dW$$

$$\delta A_{ист} = U dq = U^2 dC$$

$$W = \frac{CU^2}{2} \Rightarrow dW = \frac{U^2}{2} dC$$

$$\Rightarrow M = -\frac{U^2 dC}{2 d\theta}$$

C_1 – емк. с ε $= \frac{\varepsilon S}{4\pi d} = \frac{\varepsilon(\pi - \theta)}{2} R^2$

C_2 – емк. без ε $= \frac{S}{4\pi d} = \frac{\theta R^2}{2 \cdot 4\pi d}$

$$C = C_1 + C_2 = \frac{R^2}{8\pi d} \cdot (\theta(1-\varepsilon) + \pi\varepsilon) \Rightarrow \frac{dC}{d\theta} = \frac{R^2}{8\pi d}(1-\varepsilon) \Rightarrow$$

(т.к. парал. соед.)

$$\Rightarrow M = \frac{U^2 R^2}{16\pi d}(\varepsilon - 1)$$

$q = const \Rightarrow A_{ист} = 0 \Rightarrow$

$$\Rightarrow M d\theta = d\frac{q^2}{2C} = -\frac{q^2}{2C^2} dC = -\frac{U^2}{2} dC \Rightarrow M = -\frac{U^2}{2}\frac{dC}{d\theta} = \frac{U^2}{2}\frac{R^2}{8\pi d}(\varepsilon - 1) =$$

(из пункта)

$$= \frac{U^2 R^2}{16\pi d}(\varepsilon - 1)$$

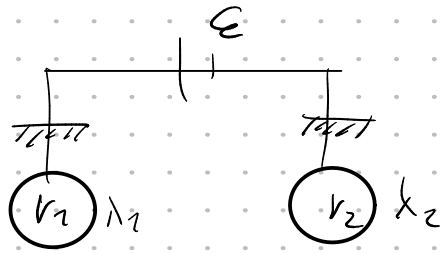
Ответ: $M = \frac{U^2 R^2}{16\pi d}(\varepsilon - 1)$

№ 4.36

$\varepsilon, r_1, r_2, \lambda_1, \lambda_2$

$q_1 - ?$ $q_2 - ?$

Найдем напр. поля для шара



$I = jS = 4\pi r^2 j$

$j = \lambda E$

$$\Rightarrow E = \frac{I}{4\pi r^2 \lambda} = \frac{q}{r^2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow q = \frac{I}{4\pi\lambda}$$

$$U = \int_{r_1}^{\infty} \frac{I dr}{4\pi r^2 \lambda_1} + \int_{r_2}^{\infty} \frac{I dr}{4\pi r^2 \lambda_2} = \frac{I}{4\pi}\left(\frac{1}{\lambda_1 r_1} + \frac{1}{\lambda_2 r_2}\right) = RI \Rightarrow$$

$$\Rightarrow R = \frac{1}{4\pi}\left(\frac{1}{\lambda_1 r_1} + \frac{1}{\lambda_2 r_2}\right)$$

С другой стороны $I = \frac{\varepsilon}{R}$

тогда:

$$q_1 = \frac{\varepsilon \lambda_2 r_1 r_2}{\lambda_1 r_1 + \lambda_2 r_2}$$

$$q_2 = \frac{\varepsilon \lambda_1 r_1 r_2}{\lambda_1 r_1 + \lambda_2 r_2}$$

/ОТВЕТ

Т5

R, q

$A - ?$

$\Delta W_{инд} - ?$

По формулам для инд. зарядов

$$q' = -q\frac{R}{x} \quad l = \frac{R^2}{x}$$

$$F = \frac{qq'}{(x-l)^2} = \frac{-q^2 R}{x\left(x - \frac{R^2}{x^2}\right)^2} = \frac{-q^2 R x}{(x^2 - R^2)^2}$$

$$A = -q^2 R \int_{2R}^{4R} \frac{x\,dx}{(x^2 - r^2)^2} = -\frac{2}{15}\frac{q^2}{r}$$

ОТВЕТ

Найдем изм. энергии взаим. инд. зарядов

$$-A = \Delta W + \Delta W_{инд}$$

$$W_1 = \frac{qq'}{x-l} = -\frac{q^2}{3R}$$

$$W_2 = -\frac{q^2}{15R}$$

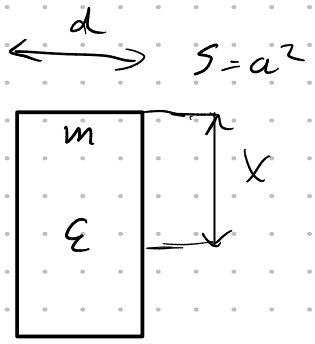
$$\Rightarrow \Delta W = \frac{4q^2}{15R}$$

$$\Rightarrow \Delta W_{инд} = \frac{2q^2}{15R} - \frac{4q^2}{15R} = -\frac{2q^2}{15R}$$

№3.73

$a, d, \rho, \varepsilon, m$

$x_0 - ?$



Энергия системы когда пластина втянется в конденсатор:

$$W(x) = \frac{q^2}{2C(x)} + mgx$$

$$C(x) = \frac{\varepsilon x a}{4\pi d} + \frac{(a-x)a}{4\pi d} \Rightarrow$$

$$W(x) = \frac{2\pi d q^2}{xa(\varepsilon - 1) + a^2} + mgx$$

Т.к. в полож. равновесия W – min, то:

$$\frac{dW}{dx} = -\frac{2\pi d q^2 a(\varepsilon - 1)}{(x_0 a(\varepsilon - 1) + a^2)^2} + mg = 0 \Rightarrow x_0 = \frac{1}{\varepsilon - 1}\left(\sqrt{\frac{2\pi d q^2(\varepsilon - 1)}{mga}} - a\right)$$

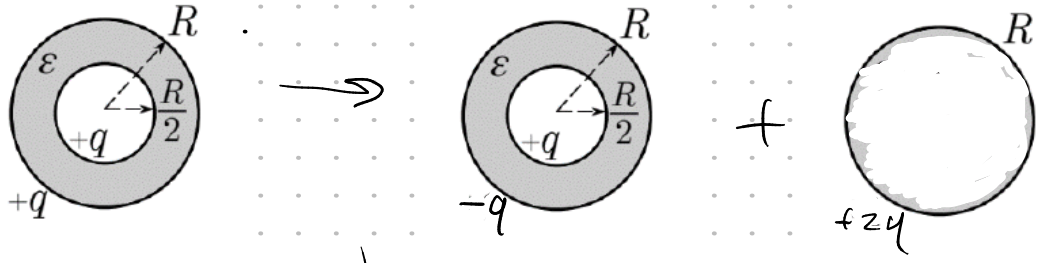
ОТВЕТ

Т6

$q_1 = q_2 = q$, R

$\varepsilon = 2$

$W - ?$



$$W = \frac{q^2}{2C} + \frac{4q^2}{2R}$$

$$C = \varepsilon \frac{R_2 R_1}{R_2 - R_1} = \varepsilon R$$

$$\Rightarrow \boxed{W = \frac{q^2}{4R} + \frac{2q^2}{R} = \frac{9q^2}{4R}}$$

/ ОТВЕТ

N 4.23

$\varepsilon_1 = 4 \quad \varepsilon_2 = 3$

$\lambda_1 = 10^{-9} \frac{1}{\text{Ом}\cdot\text{см}}$

$\lambda_2 = 10^{-12} \frac{1}{\text{Ом}\cdot\text{см}}$

$I = 10^{-7}$ A

$q - ?$

По т. Гаусса:

$$\operatorname{div} D = 4\pi\rho \Rightarrow \rho = \frac{dD}{dx}\frac{1}{4\pi} = \frac{d\left(\varepsilon \frac{I}{S\lambda}\right)}{dx}\frac{1}{4\pi}$$

$$j = \frac{I}{S} = \lambda E = \lambda D \Rightarrow D = \frac{I}{S\lambda}$$

Проинтегр. чтобы найти полный заряд.

$$\boxed{q = \int_0^d \rho S\, dx = \frac{1}{4\pi}\int_1^2 d\left(\frac{\varepsilon}{\lambda}\right) = \frac{1}{4\pi}\left(\frac{\varepsilon_2}{\lambda_2} - \frac{\varepsilon_1}{\lambda_1}\right) \approx 74 \text{ СГСЭ}}$$

/ ОТВЕТ

Неделя 5

N°5.1

n, ℓ

$B - ?$

$$dB = \frac{In}{c} d\Omega \Rightarrow \boxed{B} = \frac{In}{c}\int_0^{2\pi} d\Omega = \boxed{\frac{2\pi In}{c}}$$

/ ОТВЕТ

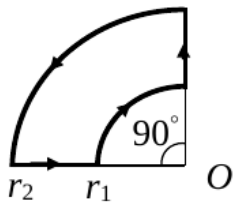
N°5.2

I, r_1, r_2

$B - ?$

$$dB_1 = \frac{I}{c}\frac{d\ell}{r^2} \Rightarrow B_1 = \frac{I}{cr^2}\frac{1}{4}2\pi r_1 = \frac{\pi I}{2cr_1}$$

Аналогично: $B_2 = -\frac{\pi I}{cr_2}$



$$\boxed{B = B_1 - B_2 = \frac{\pi I}{2c}\left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2}\right)}$$

/ ОТВЕТ

№ 5.3

r, R, l

$B - ?$

Т. о. цирк.:

$$B \cdot 2\pi r = \int_{\Sigma_i I_i} B\,dl = \frac{4\pi}{c}\sum_i I_i = \frac{4\pi}{c} I \frac{\pi r^2}{\pi R^2} \Rightarrow \boxed{B = \frac{2Ir}{cR^2}}$$

ОТВЕТ

№ 5.5

α, β, N, l, I

$B - ?$

$dB = \frac{i}{c} d\Omega$

$i = \frac{IN}{l}$

$\Omega = 2\pi(1-\cos\varphi)$

$$\Rightarrow dB = \frac{2\pi I N}{lc} d(1-\cos\varphi) =$$

$$= \frac{2\pi I n}{lc}\sin\varphi\, d\varphi \Rightarrow \boxed{B} = \frac{2\pi I n}{lc}\int_\alpha^\beta \sin\varphi\, d\varphi = \boxed{\frac{2\pi I n}{lc}(\cos\beta - \cos\alpha)}$$

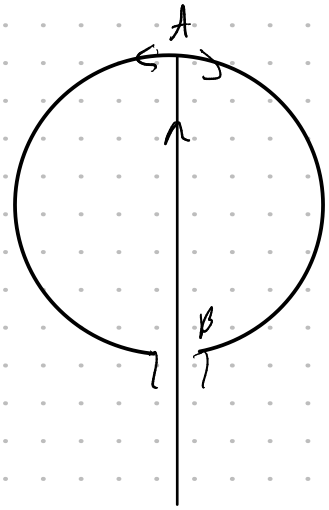
ОТВЕТ

№ 5.19

I

$B - ?$

Теор. о цирк. для малого круглого контура внутри сферы



$$\int_L B\,dl = \frac{4\pi}{c} I \Rightarrow 2\pi R B = \frac{4\pi}{c} I \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{B_{вн} = \frac{2I}{cR}}$$ – ОТВЕТ

Вне сферы поля от провода и сферы взаимно уничтожаются

$\boxed{B_{out} = 0}$ – ОТВЕТ

№ 5.17

R, Ω, q

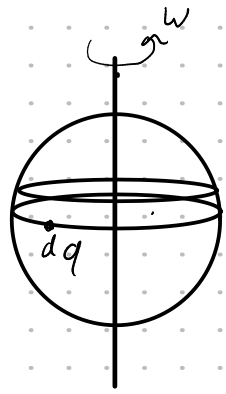
$r \gg R$

$B - ?$

1) q – на пов.

2) q – по объему

1) Рассмотрим элем. слой



$q = \sigma S = \sigma 4\pi R^2 \Rightarrow \sigma = \frac{q}{4\pi R^2}$

$dS = l\,dr = l R\,d\varphi = 2\pi R^2 \cos\varphi\, d\varphi$

$$dI = \frac{dq}{dt} = \frac{\sigma dS}{T} = \frac{\sigma \cdot 2\pi R^2 \cos\varphi\, d\varphi}{T} =$$

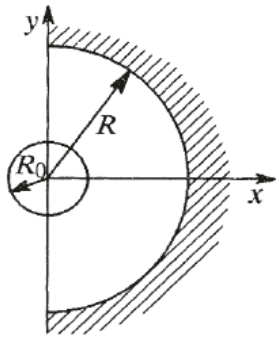
$$= \frac{q \cdot \cancel{2\pi R^2} \cos\varphi\, d\varphi}{4\pi R^2 \cdot \cancel{2\pi} R} \cdot \Omega = \frac{q \cos\varphi\, d\varphi}{4\pi R} \cdot \Omega$$

Доделаю потом (обещаю честно)

№5.26

$I, R_0, R = 10R_0$

$\Phi - ?$



Магн. момент витка с током

$$m = \frac{I}{c} S = \frac{I}{c} \pi R_0^2$$

$$B = -\frac{m}{r^3} = -\frac{I \pi R_0^2}{c r^3}$$

$$\boxed{\Phi} = \int_R^\infty B\, dS = \frac{I \pi R_0^2}{c} \int_R^\infty \frac{d(\pi r^2)}{r^3} = \frac{I \pi^2 R_0^2}{cR} = \boxed{\frac{I \pi^2 R_0}{10c}}$$ / ОТВЕТ

№5.12

$i, S = \pi r^2, R$

$B - ?$

Выберем участок длиной dl с углом $d\varphi$

$$dm = \frac{I}{c} S$$

$$I = i\, dl = i R\, d\varphi$$

$$d\bar{B} = -\frac{d\bar{m}}{r^3}$$

$$\Rightarrow d\bar{B} = -\frac{iS}{cR^2} d\varphi$$

$dB_x = 0$, т.к. горизонт. сост. комп.

$dB_y = B \sin\varphi$

$$\boxed{B} = -\frac{iS}{cR^2} \int_0^\pi \sin\varphi\, d\varphi = \frac{2iS}{cR^2} = \boxed{\frac{2i\pi}{c} \frac{r^2}{R^2}}$$ / ОТВЕТ

№5.14

$\varkappa = 1$ СГСЭ

$\Omega = 1000 \frac{\text{рад}}{c}$

$\varepsilon = 3$

$B - ?$

Из з-на сохр заряда $q_\Sigma = 0 \Rightarrow I_\Sigma = 0$

В полости и вне цил. $B_{out} = 0$

Для металла

$$E = \frac{2\varkappa}{R}$$

$$\sigma = \frac{E}{4\pi}$$

$$\Rightarrow \sigma = \frac{\varkappa}{2\pi R}$$

Для диэлектр:

$$E = D = \varepsilon E_d + 4\pi P \Rightarrow \sigma_d = \frac{\varepsilon - 1}{\varepsilon} \frac{E}{4\pi} = \frac{\varepsilon - 1}{\varepsilon} \frac{\varkappa}{2\pi R}$$

Ток на ед. длины цил.: $I = \sigma \Omega R$

$$\boxed{B_d} = \frac{4\pi I}{c} = \frac{4\pi \varkappa}{2\pi R c} \frac{\varepsilon - 1}{\varepsilon} \Omega R = \boxed{\frac{2\varkappa\Omega}{c} \frac{\varepsilon - 1}{\varepsilon}} \approx 0{,}44 \cdot 10^{-7}\ \text{Гс}$$

$$B_н = \frac{2\varkappa\Omega}{c} \approx 0{,}67\cdot 10^{-7}\ Гс$$ — ОТВЕТ

№5.23

$j = 1000\ \frac{А}{см^2}$

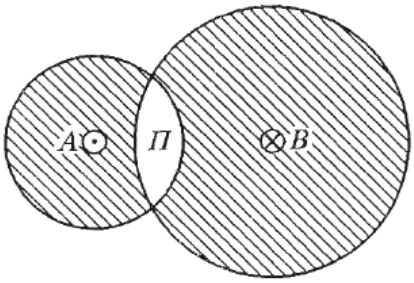
$d = 5\ см$

$B - ?$

$$\bar{B} = \frac{2\pi}{c}[\bar{j}, \bar{r}] = \bar{B}_A + \bar{B}_B =$$

$$= \frac{2\pi}{c}[\bar{j}, \bar{r}_A - \bar{r}_B] = \frac{2\pi}{c}[j, d] =$$

$$= \frac{2\pi}{c} j d = 3{,}14\ нГс$$ / ОТВЕТ



+7

Неделя 6

N 6.3