考虑 $F'(x)=f(x)$, 有

$$\left(\int f(x)\,\mathrm{d}x\right)\Big|_a^b=\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x=F(x)|_a^b$$

$$\int_a^b F'(x)\,\mathrm{d}x=F(x)|_a^b=\int_a^b \mathrm{d}F(x)$$

某种意义上，可以认为积分和微分是“逆运算”，两者可以互相抵消。

另外，如果已知 $f(x)\in R[a,b]$, 要计算 $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$, 只需要取特定的一系列分割构成一列特定的 Riemann 和，其极限即为所求的定积分. 例如取 n 等分点构成的分割 Δ_n, 中间点可以取 $x_{i-1}, x_i, \frac{x_{i-1}+x_i}{2}$, 如果取 $\xi_i=x_i$ 就能得到

$$S_n(f)=\sum_{i=1}^n f(\xi_i)\Delta x_i=\frac{b-a}{n}\sum_{i=1}^n f(x_i)$$

在 $n\to\infty$ 时 $S_n(f)\to\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$. 这类求法在原函数难以写出解析式式十分有效。

例　计算 $\int_0^1 x^\alpha\,\mathrm{d}x$.

利用 Newton-Lebnitz 公式有

$$\int_0^1 x_\alpha\,\mathrm{d}x=\frac{1}{1+\alpha}x^{1+\alpha}|_0^1=\frac{1}{1+\alpha}.$$

或者利用定义写出

$$\int_0^1 x_\alpha\,\mathrm{d}x=\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^n\left(\frac{i}{n}\right)^\alpha=\lim_{n\to\infty}\frac{1^\alpha+...+n^\alpha}{n^{1+\alpha}}=\frac{1}{1+\alpha}.\quad \text{(Stolz)}$$

§2 可积性

我们在前文中对积分的直观定义依赖于函数的连续性，但 Riemann 可积的函数不都是连续的。下面就来讨论函数可积的条件。

1. 可积的必要条件

定理　若 $f(x)\in R[a,b]$, 则 f 有界。

证　反设 f 无界，无妨设 f 无上界。由 $f(x)\in R[a,b]$, 对于 $\varepsilon=1, \exists\delta>0$, 对于任意 n 等分 $\frac{b-a}{n}<\delta$, 取 $\xi_i=x_i$, 有 $\left|\frac{b-a}{n}\sum\limits_{i=1}^n f(x_i)-I\right|<1$, 其中 $I=\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$.

设 $f(x)$ 在 $[x_{j-1},x_j]$ 上无上界。对 $i\neq j$ 取 $\xi_i=x_i, \forall\xi_j\in[x_{j-1},x_j]$ 构造 Riemann 和 $S_n(\xi_j)$

$$S_n(\xi_j)=\frac{b-a}{n}\sum_{i=1}^n f(\xi_i)=\frac{b-a}{n}\left(\sum_{i=1,i\neq j}^n f(x_i)+f(\xi_j)\right)$$

由于 $|S_n(\xi_j)|<1$, 有

$$|S_n-S_n(\xi_j)|\le|S_n-I|+|S_n(\xi_j)-I|\le 2$$

$$\Rightarrow\left|\frac{b-a}{n}\big(f(\xi_j)-f(x_j)\big)\right|<2,\quad \forall\xi_j\in[x_{j-1},x_j].$$

这与 f 在 $[x_{j-1},x_j]$ 上无上界矛盾。∎

上面的定理说明有界是可积的必要条件，但有界却不是可积的充分条件。考虑 Dirichlet 函数

$$D(x)=\begin{cases}1, x\in\mathbb{Q}\\ 0, x\notin\mathbb{Q}\end{cases},\quad x\in[0,1]$$

设 Δ_n 为 $[0,1]$ 的 n 等分。取 $\xi_i\in[x_{i-1},x_i]\cap\mathbb{Q},\eta_i\in[x_{i-1},x_i]\setminus\mathbb{Q}$, 则 $S_n(\xi)=0,S_n(\eta)=1$. 故 $\lim\limits_{\lambda(\Delta)\to 0}\sum\limits_{i=1}^{n}f(\xi_i)\Delta x_i$ 不存在，因此 Dirichlet 函数不可积。

2. Darboux 理论

$$f:[a,b]\to\mathbb{R},\Delta:a=x_0<..<x_n=b,\xi_i\in[x_{i-1},x_i],S(\Delta,\xi)=\sum_{i=1}^{n}f(\xi_i)\Delta x_i.$$

观察上式我们发现影响 S 的因素太多，难以具体分析。为了简化问题，考虑消除 ξ 的具体取法对 S 的影响。

今令 $m_i:=\inf\limits_{x\in[x_{i-1},x_i]}f(x),M_i:=\sup\limits_{x\in[x_{i-1},x_i]}f(x)$. 则 $\forall\xi_i\in[x_{i-1},x_i],m_i\le f(\xi_i)\le M_i$.

记

$$\underline{S}(\Delta)=\sum_{i=1}^{n}m_i\Delta x_i,\quad \overline{S}(\Delta)=\sum_{i=1}^{n}M_i\Delta x_i$$

两者分别被称为 **Darboux 小和** 和 **Darboux 大和**，根据定义可知

$$\underline{S}(\Delta)\le S(\Delta,\xi)\le\overline{S}(\Delta),$$

其中等号未必可以成立。

将分割 Δ 记为 $\{x_0,..,x_n\},\Delta_1,\Delta_2$ 为 $[a,b]$ 的两个分割。若上述分割记法下$\Delta_1\subset\Delta_2$, 则称 Δ_2 是 Δ_1 的**细分**。此时有

$$\underline{S}(\Delta_1)\le\underline{S}(\Delta_2)\le\overline{S}(\Delta_2)\le\overline{S}(\Delta_1).$$

证明上述不等式只需要证明 $\Delta_1=\{a,b\},\Delta_2=\{a,c,b\},a<c<b$ 的情形，其余可以递归地得到证明。在上述特殊情形下，

$$\begin{aligned}\underline{S}(\Delta_2)&=m_1(c-a)+m_2(b-c)\\&\ge m(c-a)+m(b-c)\\&=\underline{S}(\Delta_1).\end{aligned}$$

$\overline{S}$ 的证明是类似的。

推论　$\forall\Delta_1,\Delta_2,\underline{S}(\Delta_1)\le\overline{S}(\Delta_2)$.

证　取 $\Delta=\Delta_1\cup\Delta_2,\underline{S}(\Delta_1)\le\underline{S}(\Delta)\le\overline{S}(\Delta)\le\overline{S}(\Delta_2)$.■

定义

$$\underline{\int_a^b}f(x)\,\mathrm{d}x=\sup_{\Delta}\underline{S}(\Delta),$$

$$\overline{\int_a^b}f(x)\,\mathrm{d}x=\inf_{\Delta}\overline{S}(\Delta),$$

分别称为 $f(x)$ 的下积分和上积分。根据推论有

$$\underline{\int_a^b} f(x)\,\mathrm{d}x \leq \overline{\int_a^b} f(x)\,\mathrm{d}x.$$

定理(Darboux) $\overline{\int_a^b} f(x)\,\mathrm{d}x = \lim\limits_{\lambda(\Delta)\to 0} \overline{S}(\Delta).$

将上述命题转化成 $\varepsilon - \delta$ 语言来表述: $\forall\varepsilon > 0, \exists\delta > 0, \forall\lambda(\Delta) < \delta, \overline{S}(\Delta) < \overline{\int_a^b} f(x)\,\mathrm{d}x + \varepsilon$. 可以去掉绝对值的原因是始终有 $\overline{\int_a^b} f(x)\,\mathrm{d}x \leq \overline{S}(\Delta)$.

证 由 $\overline{\int_a^b} f(x)\,\mathrm{d}x = \inf\limits_{\lambda(\Delta)\to 0} \overline{S}(\Delta)$ 知 $\forall\varepsilon > 0, \exists\Gamma : a = y_0 < .. < y_N = b, \text{s.t.}$

$$\overline{S}(\Gamma) < \overline{\int_a^b} f(x)\,\mathrm{d}x + \frac{\varepsilon}{2}.$$

为了证明该定理，要找 $\delta > 0, \text{s.t. } \lambda(\Delta) < \delta, \overline{S}(\Delta) < \overline{\int_a^b} f(x)\,\mathrm{d}x + \varepsilon$. 而在给出上面的分割 Γ 后，只需要限制 $\overline{S}(\Delta)$ 和 $\overline{S}(\Gamma)$ 相差不超过 $\frac{\varepsilon}{2}$ 即可。

先取 $\delta_0 = \min\limits_{1\leq i\leq n} \Delta y_i > 0$. 限制分割 Δ 满足 $\lambda(\Delta) < \delta_0$, 则 $[x_{i-1}, x_i]$ 中之多有一个 Γ 中的分点。此时仍然不好直接比较 $\overline{S}(\Gamma)$ 和 $\overline{S}(\Delta)$, 考虑转化为估计 $\overline{S}(\Delta)$ 和 $\overline{S}(\Gamma \cup \Delta)$ 的差异。由于 $\overline{S}\Big(\int_a^b\Big) f(x)\,\mathrm{d}x \leq \overline{S}(\Delta \cup \Gamma) \leq \overline{S}(\Gamma) < \overline{\int_a^b} f(x)\,\mathrm{d}x + \frac{\varepsilon}{2}$, 只需要保证 $\overline{S}(\Delta) - \overline{S}(\Delta \cup \Gamma) < \frac{\varepsilon}{2}$ 即可。

下面估计每一个 Δ 的小区间里 $\overline{S}(\Delta)$ 和 $\overline{S}(\Delta \cup \Gamma)$ 的误差大小。对于 $y_j \in [x_{i-1}, x_i]$,

$$\begin{aligned}
&\underbrace{M_i(x_i - x_{i-1})}_{\overline{S}(\Delta)} - \underbrace{\big(M_i'\big(y_j - x_{i-1}\big) + M_i''\big(x_i - y_j\big)\big)}_{\overline{S}(\Delta\cup\Gamma)} \\
&\leq M(x_i - x_{i-1}) - m(x_i - x_{i-1}) \\
&\leq (M - m)\lambda(\Delta).
\end{aligned}$$

存在误差的小区间数不超过 Δ 的分点数 $n - 1$, 因而总误差 $\leq N(M - m)\lambda(\Delta)$.

要使 $N(M - m)\lambda(\Delta) < \frac{\varepsilon}{2}$, 可令 $\delta \leq \frac{\varepsilon}{2N(M-m)}$.

于是取 $\delta = \min\Big\{\frac{\varepsilon}{2N(M-m)}, \delta_0\Big\}$ 即可。此时

$$\overline{S}(\Delta) < \overline{S}(\Delta \cup \Gamma) + \frac{\varepsilon}{2} \leq \overline{S}(\Gamma) + \frac{\varepsilon}{2} < \overline{\int_a^b} f(x)\,\mathrm{d}x + \varepsilon. \blacksquare$$

完全相同的论述给出

$$\underline{\int_a^b} f(x)\,\mathrm{d}x = \lim_{\lambda(\Delta)\to 0} \underline{S}(\Delta).$$

定理 $f \in R[a, b] \Longleftrightarrow \underline{\int_a^b} f(x)\,\mathrm{d}x = \overline{\int_a^b} f(x)\,\mathrm{d}x.$

证 $(\Longleftarrow)$ 令 $I = \underline{\int_a^b} f(x)\,\mathrm{d}x = \overline{\int_a^b} f(x)\,\mathrm{d}x$. 有

$$\forall\varepsilon > 0, \exists\delta > 0, \text{ s.t. } \lambda(\Delta) < \delta, I - \varepsilon < \underline{S}(\Delta) \leq S(\Delta, \xi) \leq \overline{S}(\Delta) < I + \varepsilon.$$

即 $|I - S(\Delta, \xi)| < \varepsilon$. 于是 $f(x)$ 可积且 $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = I$.

$(\Longrightarrow)$ 由 $f(x) \in R[a, b]$ 有

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, \forall \lambda(\Delta) < \delta, |S(\Delta, \xi) - I| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

又由 $S(\Delta, \xi)$ 的取值范围 $\subset \left[\underline{S}(\Delta), \overline{S}(\Delta)\right]$ 可知

$$I - \frac{\varepsilon}{2} < \underline{S}(\Delta) \leq \overline{S}(\Delta) \leq I + \frac{\varepsilon}{2}.$$

所以 $\overline{\int_a^b} f(x)\,\mathrm{d}x - \underline{\int_a^b} f(x)\,\mathrm{d}x \leq \overline{S}(\Delta) - \underline{S}(\Delta) \leq \varepsilon \Longrightarrow \underline{\int_a^b} f(x)\,\mathrm{d}x = \overline{\int_a^b} f(x)\,\mathrm{d}x.$ ■