第七章 定积分

§1 定积分的概念

设 $y=f(x),x\in[a,b]$ 且在 $[a,b]$ 上连续，$f(x)\geq 0$. 则由

$$y=f(x),y=0,x=a,x=b$$

围成的图形 S 称为**曲边梯形**，其面积亦记为 S.

设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上的最大值和最小值分别为 M 和 m, 那么图形

$$S=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2|0\leq y\leq f(x)\}$$

满足

$$\begin{gathered}[a,b]\times[0,m]\subset S\subset[a,b]\times[0,M]\\ m(b-a)\leq S\leq M(b-a)\\ m\leq\frac{S}{a-b}\leq M\end{gathered}$$

由连续函数的介值定理，

$$\exists c\in[a,b],f(c)=\frac{S}{b-a},S=f(c)(b-a).$$

此时任取 $\xi\in[a,b]$,

$$\begin{aligned}|S-f(\xi)(b-a)|&=|f(\xi)-f(c)|(b-a)\\&\leq(M-m)(b-a)\end{aligned}$$

考虑将曲边梯形分割成两部分。取定 $x_1\in[a,b]$，再任取 $\xi_1\in[a,x_1],\xi_2\in[x_1,b]$, 有

$$\begin{aligned}|S_1-f(\xi_1)(x_1-a)|\leq(M_1-m_1)(x_1-a)\\|S_2-f(\xi_2)(b-x_1)|\leq(M_2-m_2)(b-x_1)\end{aligned}$$

即

$$\begin{aligned}|S-(f(\xi_1)(x_1-a)+f(\xi_2)(b-x_1))|&\leq(M_1-m_1)(x_1-a)+(M_2-m_2)(b-x_1)\\&\leq(M-m)(b-a)\end{aligned}$$

这里不加证明地利用了 $S=S_1+S_2$ 这一符合直观的事实。

于是我们可以直观地认为，将曲边梯形分割后，估算面积的误差也减小了。将分割的过程一般化，在 $[a,b]$ 中插入 $n-1$ 个点，将 $[a,b]$ 分成 n 个小区间。记

$$\Delta:a=x_0<x_1<...<x_{n-1}<x_n=b$$

为 $[a,b]$ 的一个分割，其中 $\Delta x_i=x_i-x_{i-1}$. 再记

$$\lambda(\Delta)=\max_i\Delta x_i$$

称为分割 Δ 的**直径**。

$x=x_i$ 将 S 分成 n 个小曲边梯形。取 由 f 的一致连续性，

$$\forall\varepsilon>0,\exists\delta>0,\forall|x'-x''|<\delta,|f(x')-f(x'')|<\varepsilon.$$

于是 $\lambda(\Delta)<\varepsilon \Rightarrow \left|S-\hat{S}\right|<\varepsilon \sum\limits_{i=1}^{n} \Delta x_i=\varepsilon(b-a)$.

变速直线运动

考虑运动 $v=v(t), t\in[a,b]$ 连续。

- 分割 $\Delta: a=t_0<t_1<\ldots<t_{n-1}<t_n=b$.
- 近似：取 $\tau_i\in[t_{i-1},t_i]$, 将 $[t_{i-1},t_i]$ 的路程近似为 $v(t_i)\Delta t_i$.
- 求和：$\sum\limits_{i=1}^{n} v(\tau_i)\Delta t_i$ 为总路程的近似。
- 取极限：$\lim\limits_{\lambda(\Delta)\to 0}\sum\limits_{i=1}^{n} v(\tau_i)\Delta t_i$ 为总路程 S.

定积分定义（分割、近似、求和、取极限）

设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上均有定义. 给定 $[a,b]$ 的一个分割

$$\Delta: a=x_0<x_1<\ldots<x_{n-1}<x_n=b$$

任取 $\xi_i\in[x_{i-1},x_i]$. 作和式

$$\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i (\text{Riemann 和})$$

若当 $\lambda(\Delta)\to 0$ 时，上式极限存在，且不依赖于 $\Delta, \{\xi_i\}_i$ 的选取，则称 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上 Riemann 可积，上述极限称为 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上的定积分，记为 $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$.

注：$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ 与积分变量符号的选取没有关系，即 $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x=\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$.

定积分的 $\varepsilon-\delta$ 描述

$f(x)$ 在 $[a,b]$ 上有定义。若有常数 $I\in\mathbb{R}$ 使得

$$\forall\varepsilon>0, \exists\delta>0, \forall\Delta, \xi_i, \lambda(\Delta)<\varepsilon, \left|\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i-I\right|<\delta$$

则称 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上 **Riemann 可积**，称为 $f(x)$ 的**定积分**。

注：
1. 上述 $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ 存在则唯一（本课程仅讨论 Riemann 积分）
2. $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ 代表曲边梯形的面积.

记 $R[a,b]$ 表示 $[a,b]$ 上全体 Riemann 可积函数构成的空间。

定理： $C[a,b]\subset R[a,b]$.

证： 考虑确定 Δ 和 ξ_i 的一种选取方式. 取 Δ 使之 n 等分 $[a,b], \xi_i=x_i$ 即右端点，可得和式

$$S_n=\frac{b-a}{n}\sum_{i=1}^{n} f(x_i)$$

记 M, m 为 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上的最大值和最小值, 则

$$(b-a)m\le S_n\le(b-a)m,$$

因而 $\exists$ 子列 $n_k\to\infty, \lim\limits_{k\to+\infty} S_{n_k}=: I$.

来证 $\forall\Delta, a=y_0<\ldots<y_n=b, \lambda(\Delta)<\delta, \forall\xi_i\in[y_{i-1},y_i], \left|\sum\limits_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta y_i-I\right|<\varepsilon$.

考虑替换 I 为上述特殊的 Δ 和 ξ_i 所决定的和式极限. 已知

$$\exists k_0 \in \mathbb{N}, \left|S_{n_k} - I\right| < \frac{\varepsilon}{2}$$

于是只需证明

$$\left|\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta y_i - \sum_{i=1}^{n} f\left(x_j\right)\Delta x_j\right| < \frac{\varepsilon}{2} \qquad (*)$$

合并两个分割，记为

$$\Gamma : a = \zeta_0 < \dots < \zeta_m = b$$

引理 设 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上有界， $m := \inf f(x), n := \sup f(x), \forall c \in [a, b]$, 对任一分割 Δ 和相应的 ξ_i 都有

$$\left|\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i - f(c)(b-a)\right| \leq (M-m)(b-a)$$

证明略去.

于是对于每一组相邻的 y_{i-1}, y_i 应用引理可得

$$\begin{aligned}
&\left|\sum_{k=1}^{m} f(\xi_k)\Delta\zeta_k - \sum_{i=1}^{m} f(\xi_i)\Delta y_i\right| \\
\leq &\sum_{i=1}^{n}(M_i - m_i)\Delta y_i \\
< &\frac{\varepsilon}{4(b-a)}\sum_{i=1}^{n}\Delta y_i \\
= &\frac{\varepsilon}{4}.
\end{aligned}$$

类似的

$$\left|\sum_{k=1}^{m} f(\xi_i)\Delta\zeta_k - \sum_{i=1}^{n} f(x_i)\Delta x_i\right| < \frac{\varepsilon}{4}$$

应用三角不等式即知 $(*)$ 成立.

回到变速直线运动。对于运动 $v = v(t), t \in [a, b]$ 连续，已知

$$\begin{cases} S(b) - S(a) = \int_a^b v(t)\,\mathrm{d}t \\ v(t) = \frac{\mathrm{d}S(t)}{\mathrm{d}t} = S'(t) \end{cases}$$

我们观察到定积分和微分之间存在类似于“逆运算”的关系.

定理（微积分基本定理） $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上有定义，且 $f \in R[a, b], f$ 有原函数 F, 则

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = F(b) - F(a) = F\mid_a^b$$

证 由于 $f(x) \in R[a, b]$, 取 Δ_n 使之 n 等分 $[a, b]$.

$$F\ \big|_a^b = \sum_{i=1}^{n} F(x_i) - F(x_{i-1}) = \sum_{i=1}^{n} F'(\xi_i)\Delta x_i = \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i$$

令 $n \to \infty$ 即得 $F\ \big|_a^b = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$.