定理　设 f 在 $[a,b]$ 上有界，则以下相互等价：

1. $f\in R[a,b]$,
2. $\forall\varepsilon>0,\exists[a,b]$ 的分割 Δ, s.t. $\sum\limits_{i=1}^{n}w_i\Delta x_i<\varepsilon$,
3. $\forall\varepsilon>0,\sigma>0,\exists[a,b]$ 的分割 Δ, s.t. $\sum\limits_{w_i>\varepsilon}\Delta x_i<\sigma$.

证明　已知 $f\in R[a,b]\Longleftrightarrow \underline{\int_a^b} f(x)\,\mathrm{d}x=\overline{\int_a^b} f(x)\,\mathrm{d}x$.

$(1)\Longrightarrow(2)$　设 $f\in R[a,b]$, 上下积分相等且均为 I. 由 $\lim\limits_{\lambda(\Delta)\to 0}\underline{S}(\Delta)=\underline{\int_a^b}f(x)\,\mathrm{d}x$ 有

$\forall\varepsilon>0,\exists\Delta_1,\Delta_2$ s.t. $\underline{S}(\Delta_1)>I-\frac{\varepsilon}{2},\overline{S}(\Delta_2)<I+\frac{\varepsilon}{2}$. 此时取 $\Delta=\Delta_1\cup\Delta_2$, 有

$$\sum_{i=1}^{n}w_i\Delta x_i=\overline{S}(\Delta)-\underline{S}(\Delta)\le\overline{S}(\Delta_2)-\underline{S}(\Delta_1)<\varepsilon.$$

$(2)\Longrightarrow(1)$　$\sum\limits_{i=1}^{n}w_i\Delta x_i<\varepsilon\Longrightarrow\overline{S}(\Delta)-\underline{S}(\Delta)<\varepsilon$.

$$\forall\varepsilon,0\le\overline{\int_a^b}f(x)\,\mathrm{d}x-\underline{\int_a^b}f(x)\,\mathrm{d}x\le\overline{S}(\Delta)-\underline{S}(\Delta)<\varepsilon.\Longrightarrow\overline{\int_a^b}f(x)\,\mathrm{d}x=\underline{\int_a^b}f(x)\,\mathrm{d}x.$$

$(2)\Longrightarrow(3)$　$\forall\varepsilon,\sigma>0,\exists\Delta,$ s.t. $\sum\limits_{i=1}^{n}w_i\Delta x_i<\varepsilon\sigma$. 此时有

$$\varepsilon\sum_{w_i\ge\varepsilon}\Delta x_i\le\sum_{w_i\ge\varepsilon}w_i\Delta x_i\le\sum_{i=1}^{n}w_i\Delta x_i<\varepsilon\sigma\Longrightarrow\sum_{w_i\ge\varepsilon}\Delta x_i<\sigma.$$

$(3)\Longrightarrow(2)$　$\forall\varepsilon>0$, 取 $\sigma=\frac{\varepsilon}{2w}$, 其中 $w=M-m$. 此时 $\exists\Delta,$ s.t. $\sum\limits_{w_i\ge\hat{\varepsilon}}\Delta x_i<\sigma,\hat{\varepsilon}=\frac{\varepsilon}{2(b-a)}$. 有

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{n}w_i\Delta x_i&=\sum_{w_i<\hat{\varepsilon}}w_i\Delta x_i+\sum_{w_i\ge\hat{\varepsilon}}w_i\Delta x_i\\&<\frac{\varepsilon}{2(b-a)}\sum_{w_i<\hat{\varepsilon}}\Delta x_i+w\sum_{w_i\ge\hat{\varepsilon}}\Delta x_i\\&<\frac{\varepsilon}{2(b-a)}(b-a)+w\frac{\varepsilon}{2w}\\&=\frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon.\end{aligned}$$

至此我们证明了 (1)(2)(3) 相互等价。■

可积函数类

定理　设 f 在 $[a,b]$ 上有界，且只有有限个间断点，则 $f\in R[a,b]$.

证明　设 f 在 $[a,b]$ 上有 N 个间断点，$\forall\varepsilon>0$, 可以取 N 个长度 $<\frac{\varepsilon}{2Nw}$ 的闭区间覆盖这些间断点，其中不包括 $\{a,b\}$. 剩余的若干区间加上端点后分别连续，因而一致连续。故 $\exists\delta>0,\forall x',x''$ 在同一闭区间内，$|x'-x''|<\delta,|f(x')-f(x'')|<\varepsilon$. 将每个小区间等分使长度均 $<\delta$, 将这些分点和原来的 N 个区间端点合并为分割 Δ, 对此

$$\sum_{i=1}^{n}w_i\Delta x_i<\frac{\varepsilon}{2Nw}N\varepsilon+\frac{\varepsilon}{2(b-a)}(b-a)=\varepsilon.■$$

定理（习题七第 5 题）　若 $f\in R[a,b],g$ 在 $[a,b]$ 上有定义且 $\#\{x\in[a,b]|f(x)\ne g(x)\}<\infty$, 则 $g\in R[a,b]$ 且 $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x=\int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x$.（证略）

定理 若 f 在 $[a,b]$ 上单调，则 $f \in R[a,b]$.

证明 不妨设 f 单调增。此时 $w_i = f(x_i) - f(x_{i-1})$,

$$\sum_{i=1}^{n} w_i \Delta x_i = \sum_{i=1}^{n} (f(x_i) - f(x_{i-1}))\Delta x_i \leq \lambda(\Delta) \sum_{i=1}^{n} (f(x_i) - f(x_i - 1)) \leq w\lambda(\Delta).$$

$\forall \varepsilon > 0$, 取 $\lambda(\Delta) < \frac{\varepsilon}{w}$ 即可。■

例 考虑黎曼函数

$$R(x) = \begin{cases} p^{-1}, & x = qp^{-1}, (p,q) = 1 \\ 0, & x \notin \mathbb{Q} \\ 0, & x = 0 \end{cases}$$

证明 $R(x) \in R[0,1], \int_0^1 R(x)\,\mathrm{d}x = 0$.

证明 $\forall \varepsilon > 0, \sigma > 0, R(x) > \varepsilon$ 的 x 仅有有限个 $x_1, .., x_n$. 取 n 个长度 $< \frac{\sigma}{n}$ 的闭区间覆盖这 n 个点，同时不覆盖 $\{0,1\}$, 此时 $w_i \geq \varepsilon$ 的小区间长度之和 $< \sigma \Longrightarrow R(x) \in R[0,1]$.

此时任取一分割 Δ, 在 $[x_{i-1}, x_i]$ 内总 $\exists \xi_i \notin \mathbb{Q}, \sum\limits_{i=1}^{m} f(\xi_i)\Delta x_i = 0$.■

定理 (Lebesgue) 设 f 在 $[a,b]$ 上有界。记 D 为间断点集，则

$$f \in R[a,b] \Longleftrightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists (x_i', x_i''), i = 1, 2, ..\ \text{s.t.}\ D \in \bigcup_{i=1}^{\infty} (x_i', x_i''), \sum_{i=1}^{\infty} |x_i'' - x_i'| < \varepsilon.$$

这一定理暂时不能给出证明，但是可以给出几个有助于部分证明该定理的概念和定理：

对于 $f : [a,b] \to \mathbb{R}, I \subset [a,b]$ 且不退化为单点集，定义

$$w(I) = \sup_{x \in I} f(x) - \inf_{x \in I} f(x),$$
$$w(x) = \lim_{\delta \to 0^+} w([x - \delta, x + \delta]).$$

由单调性可知 $w(x)$ 是良定义的，我们将 $w(x)$ 称为 f 在 x 处的振幅，并且 f 在 x 处不连续 $\Longleftrightarrow$ $w(x) > 0$.

定理 $\forall \varepsilon > 0, \forall \delta > 0, D_\varepsilon := \{x \in [a,b] | w(x) \geq \varepsilon\}$ 可被总长 $< \varepsilon$ 的有限个开区间覆盖。

其中 D_ε 是紧的。

§3 定积分的性质

我们已经知道 $f \in R[a,b] \Longrightarrow f$ 有界，若 $\#\{g \neq f\}$ 有限则 $g \in R[a,b]$.

在讨论前预先规定

1. $\int_a^a f(x)\,\mathrm{d}x = 0$,
2. $\int_b^a f(x)\,\mathrm{d}x = -\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$.

定理 $f, g \in R[a,b]$, 则 $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}, \alpha f + \beta g \in R[a,b]$ 且

$$\int_a^b (\alpha f + \beta g)(x)\,\mathrm{d}x = \alpha \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x + \beta \int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x.$$

证明 利用 $w(f+g) \leq w(f) + w(g)$.

定理 $f \in R[a,b]$, 则 $|f| \in R[a,b]$ 且 $\left|\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x\right| \leq \int_a^b |f(x)|\,\mathrm{d}x$.

证明 利用 $w(|f|) \leq w(f)$, $\left|\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i\right| \leq \sum_{i=1}^{n}|f(\xi_i)|\Delta x_i$.