初等幂级数展式

- $e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} x^n, \quad x \in (-\infty, +\infty)$,
- $\sin x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} x^{2n+1}, \quad x \in (-\infty, +\infty)$,
- $\cos x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} x^{2n}, \quad x \in (-\infty, +\infty)$,
- $\ln(1+x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n} x^n, x \in (-1, 1]$,
- $(1+x)^\alpha = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{\alpha}{n} x^n, \quad \binom{\alpha}{n} = \frac{\alpha ... (\alpha - n + 1)}{n!}, \binom{\alpha}{0} = 1.$
  - $\alpha \in \mathbb{N}, x \in (-\infty, +\infty)$,
  - $\alpha > 0, x \in [-1, 1]$,
  - $-1 \leq \alpha < 0, x \in (-1, 1]$,
  - $\alpha \leq -1, x \in (-1, 1)$.

命题　设 f, g 分别有幂级数展式

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n, \quad x \in (-R_1, R_1),$$

$$g(x) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n, \quad x \in (-R_2, R_2),$$

则 fg 在 $(-R, R), R := \min(R_1, R_2)$ 上能展成幂级数, 且

$$f(x)g(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n, \quad c_n = \sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k}.$$

证明　幂级数在其收敛域内为内闭绝对一致收敛. □

例　设级数 $\sum a_n, \sum b_n$ 收敛且 Cauchy 乘积 $\sum c_n$ 收敛, 则 $(\sum a_n)(\sum b_n) = \sum c_n$.

证明　令 $f(x) = \sum a_n x^n, g(x) = \sum b_n x^n, x \in [0, 1]$. 于是 $f(x)g(x) = \sum c_n x^n, x \in [0, 1)$. 由于 $\sum c_n$ 收敛, 上式右端的和函数在 $[0, 1]$ 上连续, 令 $x \to 1^-$ 即有 $f(1)g(1) = \sum c_n$. □

例　求 $\ln^2(1+x)$ 的幂级数展式.

解　$\ln(1+x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} x^n, x \in (-1, 1]$.

$$c_n = \sum_{k=1}^{n-1} a_k a_{n-k} = \frac{2(-1)^n}{n} \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k}.$$

§4 连续函数的多项式逼近

给定 $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n, x \in (-R, R)$, 则 $\forall [a, b] \subset (-R, R), \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 在 $[a, b]$ 上一致收敛到 $f(x)$.

令 $S_n(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k$, 则 $\forall \varepsilon > 0, \exists N, \forall n \geq N, |S_n(x) - f(x)| < \varepsilon, \forall x \in [a, b]$.

定义　设 f 在 $[a, b]$ 上定义. 若 $\forall \varepsilon > 0$, 都有多项式 $P(x)$ s.t.

$$|f(x) - P(x)| < \varepsilon, \quad \forall x \in [a, b],$$

则称 f 在 $[a,b]$ 上可被**多项式逼近**. 解析函数在任何闭区间上可被多项式逼近.

f 在 $[a,b]$ 上可被多项式逼近 $\iff \exists P_n(x)$ s.t. $P_n(x) \rightrightarrows f(x), x \in [a,b]$.

推论 若 f 在 $[a,b]$ 上可被多项式逼近, 那么 $f \in C[a,b]$.

定理 (Weierstrass) 若 $f \in C[a,b]$, 则 f 在 $[a,b]$ 上可被多项式逼近.

引理 $f \in C[a,b]$ 可以被分段线性函数逼近.

定义 设 g 在 $[a,b]$ 上有定义, 若有 $[a,b]$ 的分割 Δ s.t. $g\mid_{[x_{i-1},x_i]}$ 为线性的, 则称 g 在 $[a,b]$ 上为分段线性函数. 记 $H(x)=\frac{x+|x|}{2}$.

引理 设 g 为 $[a,b]$ 上的分段线性函数, 则 $\exists c_i$ s.t. $g(x)=c_0+\sum_{i=1}^{n} c_i H(x-x_0)$. □

定理 $\forall c \in \mathbb{R}, \forall [A,B] \subset \mathbb{R}, |x-c|$ 可在 $[A,B]$ 上被多项式逼近.

证明 先看 $c=0,[A,B]=[-1,1]$.

$$|x|=\sqrt{x^2}=\sqrt{1+x^2-1}=(1+(x^2-1))^{\frac{1}{2}},$$

令 $t=x^2-1, |x| \le 1 \Longrightarrow |t| \le 1$. 结合 $(1+t)^{\frac{1}{2}}=\sum_{n=0}^{\infty}\binom{\frac{1}{2}}{n}t^n, \quad t \in (-1,1]$, 记

$$S_n(t)=\sum_{k=0}^{n}\binom{\frac{1}{2}}{k}x^k, \quad S_n(t) \rightrightarrows (1+t)^{\frac{1}{2}}, t \in [-1,1],$$

即

$$\forall \varepsilon>0, \exists N, \forall n>N, \left|S_n(t)-(1+t)^{\frac{1}{2}}\right|<\varepsilon, \forall t \in [-1,1].$$

特别的对 $x \in [-1,1], t=x^2-1 \in [-1,1]$, 故

$$\begin{aligned}\left|S_n(x^2-1)-(1+x^2-1)^{\frac{1}{2}}\right|&<\varepsilon,\\ \left|S_n(x^2-1)-|x|\right|&<\varepsilon.\end{aligned}$$

于是取 $\varepsilon=\frac{1}{n^2}$, $\exists$ 多项式 $Q_n(x)$ s.t.

$$|Q_n(x)-|x||<\frac{1}{n^2}, \quad \forall |x| \le 1.$$

令 $P_n(x)=nQ_n\left(\frac{x-c}{n}\right)$, 则

$$\begin{aligned}|P_n(x)-|x-c||&=\left|nQ_n\left(\frac{x-c}{n}\right)-|x-c|\right|\\ &=n\left|Q_n\left(\frac{x-c}{n}\right)-\left|\frac{x-c}{n}\right|\right|\\ &<\frac{1}{n^2}, \quad \forall\left|\frac{x-c}{n}\right| \le 1.\end{aligned}$$

□

另法 $|x| \le 1$. 令 $a_0(x) \equiv 0$, 令

$$a_{n+1}(x)=a_n(x)+\frac{1}{2}(x^2-a_n^2(x))$$

则 $a_{n+1}(x) \geq a_n(x)$, 且 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n(x) = |x|$. 由 Dini 定理知一致收敛性, 且 $a_n(x)$ 均为多项式.