§ D'Alambert 与 Cauchy 判别法

定理 (Cauchy, 根式) 设 $\sum a_n$ 为正项级数, $r = \overline{\lim\limits_{n\to\infty}} \sqrt[n]{a_n}$.

- 当 $r < 1$ 时, $\sum a_n$ 收敛.
- 当 $r > 1$ 时, $\sum a_n$ 发散.

证明

- 取 $q \in (r, 1)$, 从而 $\exists N, \forall n > N$, $\sqrt[n]{a_n} < q$, 即 $a_n < q^n$. 由 $\sum q^n$ 收敛即知 $\sum a_n$ 收敛.
- 取 $q \in (1, r)$, $\exists \{n_k\} \to \infty$ s.t. $\lim\limits_{k\to\infty} \sqrt[n_k]{a_{n_k}} = r$.

  从而 $\exists N, \forall k > N$, $\sqrt[n_k]{a_{n_k}} > q$, 即 $a_{n_k} > q^{n_k} > q^k$. 由 $\sum q^n$ 发散即知 $\sum a_n$ 发散.

例 设 $0 < a < b < 1, a_{2n} = b^n, a_{2n-1} = a^n$.

$\overline{\lim} \sqrt[n]{a_n} = \sqrt{b} < 1$ 收敛. 而 $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}} \dfrac{a_{n+1}}{a_n} = \infty$, $\underline{\lim\limits_{n\to\infty}} \dfrac{a_{n+1}}{a_n} = 0$, 因此无法用 D'Alambert 判别法判断级数是否收敛.

Raabe 判别法

在比较 $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_n$ 和 $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \dfrac{1}{n^p}(p > 0)$ 时考察 $\dfrac{a_n}{a_{n+1}}$ 的取值, 可以观察到如下的结论:

定理 (Raabe) 设有正项级数 $\sum a_n$.

- 若 $r = \underline{\lim\limits_{n\to\infty}}\, n\left(\dfrac{a_n}{a_{n+1}} - 1\right) > 1$, 则 $\sum a_n$ 收敛.
- 若 $r' = \overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\, n\left(\dfrac{a_n}{a_{n+1}} - 1\right) < 1$, 则 $\sum a_n$ 发散.

证明

- 取 $q \in (1, r), \exists N, \forall n \geq N, n\left(\dfrac{a_n}{a_{n+1}} - 1\right) > q, \dfrac{a_n}{a_{n+1}} > 1 + \dfrac{q}{n}$.

  取定 $p \in (1, p)$, 则当 N 充分大时, 当 $n \geq N$ 时

  $$\frac{a_{n+1}}{a_n} = 1 + \frac{q}{n} > \left(1 + \frac{1}{n}\right)^p = \frac{b_{n+1}}{b_n}, \quad \left[\left(1 + \frac{1}{n}\right)^p = 1 + \frac{p}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right)\right]$$

  其中 $b_n = \dfrac{1}{n^p}$. 连乘可得 $\dfrac{a_{n+1}}{a_N} < \dfrac{b_{n+1}}{b_N}$, 从而由 $\sum b_n$ 收敛可得 $\sum a_n$ 收敛.
- 取 $q \in (r', 1), \exists N, \forall n \geq N, n\left(\dfrac{a_n}{a_{n+1}} - 1\right) < q, \dfrac{a_n}{a_{n+1}} < 1 + \dfrac{q}{n}$.

  取定 $p' \in (q', 1)$, $\dfrac{a_n}{a_{n+1}} < 1 + \dfrac{q}{n} < \left(1 + \dfrac{1}{n}\right)^p = \dfrac{b_n}{b_{n+1}}(n \to \infty) \Longrightarrow \sum a_n$ 发散. □

例 判定 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{n^{n-2}}{e^n n!}$ 的敛散性.

解 $\dfrac{a_n}{a_{n+1}} = \dfrac{n^{n-2}}{e^n n!} \cdot \dfrac{e^{n+1}(n+1)!}{(n+1)^{n-1}} = \dfrac{e}{\left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n-1}}$.

$$\begin{aligned}\ln \frac{a_n}{a_{n+1}} &= 1 - (n-1)\ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) = 1 - (n-1)\left(\frac{1}{n} - \frac{1}{2n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)\right) \\ &= \frac{1}{n} + \frac{n-1}{2n^2} + o\left(\frac{1}{n}\right) \sim \frac{3}{2n} + o\left(\frac{1}{n}\right).\end{aligned}$$

$n\ln\dfrac{a_n}{a_{n+1}}\to\dfrac{3}{2},\left(\dfrac{a_n}{a_{n+1}}-1\right)\to\dfrac{3}{2}(n\to\infty)\Longrightarrow$ 原级数收敛.

例 设 $\sum a_n$ 为正项级数, $\xi_n>0$. 证明若

$$\varliminf_{n\to\infty}\left(\xi_n\frac{a_n}{a_{n+1}}-\xi_{n+1}\right)>0$$

则 $\sum a_n$ 收敛.

证明 $\exists c>0,\exists N,\forall n>N,\xi_n\dfrac{a_n}{a_{n+1}}-\xi_{n+1}>c$, 即

$$0<ca_{n+1}<\xi_n a_n-\xi_{n+1}a_{n+1}.$$

从而 $\xi_n a_n$ 严格单调减, 因而有极限.

$$\sum_{k=1}^{n}(\xi_k a_k-\xi_{k+1}a_{k+1})=\xi_1 a_1-\xi_{n+1}a_{n+1}<\xi_1 a_1,$$

由比较判别法 $\sum ca_n$ 收敛 $\Longrightarrow\sum a_n$ 收敛. □

Cauchy 积分判别法

定理 (积分判别法) 设 $f:[1,+\infty)\to\mathbb{R},f(x)$ 单调减. 令 $a_n=f(n)$, 则 $\sum a_n$ 与 $\displaystyle\int_1^{+\infty}f(x)\,\mathrm{d}x$ 同时敛散.

证明

$$\int_1^{n+1}f(x)\,\mathrm{d}x=\sum_{k=1}^{n}\int_k^{k+1}f(x)\,\mathrm{d}x,$$

而

$$a_{k+1}\le\int_k^{k+1}f(x)\,\mathrm{d}x\le a_k,$$

$$a_2+\ldots+a_{n+1}\le\int_1^{n+1}f(x)\,\mathrm{d}x\le a_1+\ldots+a_n=S_n.$$

若 $\sum a_n$ 收敛, 则 $\{S_n\}_{n\ge1}$ 有界, 从而 $\left\{\displaystyle\int_1^{n+1}f(x)\,\mathrm{d}x\right\}_{n\ge1}$ 单调有界. 故 $\displaystyle\int_1^{X}f(x)\,\mathrm{d}x$ 作为 X 的函数有界, 从而 $\displaystyle\int_1^{+\infty}f(x)\,\mathrm{d}x$ 收敛, 反之亦然. □

例 设 $\sum a_n$ 为正项级数且收敛. 记 $r_n=\displaystyle\sum_{k=n}^{\infty}a_k$, 则当 $p>1$ 时, $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_n}{r_n^p}$ 收敛.

证明 $\dfrac{a_n}{r_n^p}=\dfrac{r_n-r_{n+1}}{r_n^p}\le\displaystyle\int_{r_{n+1}}^{r_n}\frac{\mathrm{d}x}{x^p},\quad\sum_{k=1}^{n}\frac{a_k}{r_k^p}\le\int_{r_{n+1}}^{r_1}<\int_0^{r_1}\frac{\mathrm{d}x}{x^p}\Longrightarrow\sum\frac{a_n}{r_n^p}$ 收敛. □

注 $\left\{\dfrac{a_n}{r_n^p}\right\}$ 对任意收敛的正项级数 $\sum a_n$ 给出了一个同样收敛的正项级数 $\sum b_n$ 满足

$$\lim_{n\to\infty}\frac{b_n}{a_n}=\infty.$$

定义

$$\ell^1 = \left\{ (a_1, ..., a_n, ...) \mid \sum |a_n| < +\infty \right\},$$
$$\ell^2 = \left\{ (a_1, ..., a_n, ...) \mid \sum a_n^2 < +\infty \right\}.$$

§ 任意项级数

定理 设 $\sum a_n$ 为任意项级数, 且满足

- $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$,
- $\exists N > 0$ s.t. 在 $\sum a_n$ 中加上一些括号 (括号里的元素个数均不超过 N) 后得到的级数收敛,

则 $\sum a_n$ 收敛.

证明 记 $S_n = \sum\limits_{k=1}^{n} a_k$, 再记 $\sum b_k$ 为打括号后的级数, 其前 k 项部分和记为 S_{n_k}, $n_{k+1} - n_k \leq N$. 于是由 (2) 知 $\lim\limits_{n\to\infty} S_{n_k}$ 收敛. 又

$$\forall n_{k-1} \leq n \leq n_k, \quad S_n - S_{n_{k-1}} = \underbrace{a_{n_{k-1}+1} + ... + a_n}_{\leq N \text{项}},$$

由 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$ 有 $\lim S_n = \lim S_{n_k}$. □

设 $\sum a_n$ 为正项级数, 则称 $\sum\limits_{k=1}^{\infty} (-1)^{n-1} a_n$ 为**交错级数**.

定理 (Lebnitz) 设 a_n 单调减且趋向于 0, 则 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} a_n$ 收敛.