§4 级数的运算性质

2. 交换律

定理 设 $\sum a_n$ 绝对收敛, 则对于任意重排 $f:\mathbb{N}\to\mathbb{N}, \sum a_{f(n)}$ 也收敛, 且 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_{f(n)} = \sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$.

证明 先看 $\sum |a_n|$, 来证 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |a_n| = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \left|a_{f(n)}\right|$.

$$\sum_{k=1}^{n} \left|a_{f(k)}\right| \le \sum_{k=1}^{M} |a_k| \le \sum_{n=1}^{\infty} |a_n|,$$

其中令 $M = \max\{f(k) \mid 1 \le k \le n\}$. 于是 $\sum \left|a_{f(n)}\right| \le \sum |a_n|$. 由于重排总是可逆, 反向的大小关系也成立, 因而

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left|a_{f(n)}\right| = \sum_{n=1}^{\infty} |a_n|.$$

由上述论证 $\sum a_{f(n)}$ 确实收敛, 来证 $\sum a_n = \sum a_{f(n)}$. $\forall a \in \mathbb{R}$, 记

$$a^+ = \frac{a+|a|}{2} = \begin{cases} a & \text{if } a \ge 0 \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

$$a^- = \frac{|a|-a}{2} = \begin{cases} -a & \text{if } a \le 0 \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

则 $a = a^+ - a^-$. 由于 $\sum \left|a_n^{+/-}\right| \le \sum |a_n|$ 知 $a^{+/-}$ 均收敛, 从而有

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_{f(n)}^+ = \sum_{n=1}^{\infty} a_n^+, \quad \sum_{n=1}^{\infty} a_{f(n)}^- = \sum_{n=1}^{\infty} a_n^-.$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_{f(n)} = \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_{f(n)}^+ - a_{f(n)}^-\right) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n^+ - \sum_{n=1}^{\infty} a_n^- = \sum_{n=1}^{\infty} a_n.$$

□

例 考虑级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{(-1)^{n-1}}{n} = 1 - \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{3} - \dfrac{1}{4} + \dots$

引理 $1 + \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{3} + \dots + \dfrac{1}{n} = \ln n + c + \varepsilon_n, \quad \varepsilon_n > 0, \varepsilon_n = o(1).$

证明 令 $a_n = 1 + \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{3} + \dots + \dfrac{1}{n} - \ln n > 0.$

$\ln n = \ln\left(\dfrac{n}{n-1} \cdot \dfrac{n-1}{n-2} \cdot \dots \cdot \dfrac{2}{1}\right) = \ln\left(1 + \dfrac{1}{n-1}\right) + \ln\left(1 + \dfrac{1}{n-2}\right) + \dots + \ln\left(1 + \dfrac{1}{1}\right).$

由于 $x > 0$ 时 $\ln(1+x) < x$, 故

$$\ln n < \frac{1}{n-1} + \frac{1}{n-2} + \dots + 1.$$

且 $a_n > a_{n+1}$:

$a_n - a_{n+1} = \ln(n+1) - \ln n - \dfrac{1}{n+1} = \displaystyle\int_0^{\frac{1}{n}} \frac{\mathrm{d}x}{1+x} - \frac{1}{n+1} > \frac{1}{n} \cdot \frac{1}{1+\frac{1}{n}} - \frac{1}{n+1} = 0.$

令 $c = \lim\limits_{n\to\infty} a_n \ge 0, \varepsilon_n = a_n - c$. 对 $\sum \dfrac{(-1)^{n-1}}{n}$ 重排: 先排两个正数, 再排一个负数.

记上述级数的部分和为 T_n, 则

$$
\begin{aligned}
T_{3n} &= 1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\dots+\frac{1}{4n}-\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\dots+\frac{1}{2n}\right)-\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\dots+\frac{1}{4n}\right)\\
&= 1+\dots+\frac{1}{4n}-\frac{1}{2}\left(1+\dots+\frac{1}{2n}\right)-\frac{1}{2}\left(1+\dots+\frac{1}{n}\right)\\
&= \ln 4n+c+\varepsilon_{4n}-\frac{1}{2}(\ln 2n+c+\varepsilon_{2n})-\frac{1}{2}(\ln n+c+\varepsilon_n)\\
&\longrightarrow \ln 4-\frac{1}{2}\ln 2=\frac{3}{2}\ln 2.
\end{aligned}
$$

令 S_n 为原级数的部分和, 则

$$
\begin{aligned}
S_{2n} &= 1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\dots-\frac{1}{2n}\\
&= (\ln 2n+c+\varepsilon_{2n})-(\ln n+c+\varepsilon_n)\\
&\longrightarrow \ln 2.
\end{aligned}
$$

注意到两个级数不收敛到同一极限!

定理 (Riemann) 设 $\sum a_n$ 条件收敛, 则 $\forall S\in[-\infty,+\infty], \exists$ 重排 $f:\mathbb{N}\to\mathbb{N}$ s.t. $\sum a_{f(n)}=S$.

证明 先设 $S\geq 0$. 由已知 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=0$ 且 $\sum|a_n|=+\infty$, 从而 $\sum a_n^+,\sum a_n^-$ 都发散到 $+\infty$.

取 $p_1\geq 1$ s.t. $\sum\limits_{k=1}^{p_1-1}a_k^+\leq S<\sum\limits_{k=1}^{p_1}a_k^+$, 再取 $q_1\geq 1$ s.t. $S-a_{q_1}^-\leq\sum\limits_{k=1}^{p_1}a_k^+-\sum\limits_{k=1}^{q_1}a_k^-<S$.

类似的 $\forall k\geq 1,\exists p_k,q_k$ s.t.

$$
\begin{aligned}
S < &\sum_{i=1}^{p_k}a_i^+-\sum_{i=1}^{q_{k-1}}a_i^- \leq S+a_{p_k}^+,\\
S-a_{q_k}^- \leq &\sum_{i=1}^{p_k}a_i^+-\sum_{i=1}^{q_k}a_i^- < S.
\end{aligned}
$$

这样就得到了 $\sum a_n$ 的一个重排在加括号后收敛到 S. 习题中已经证明, 若每个括号中的项的符号相同, 则当加括号的级数收敛 $\Longrightarrow$ 原级数收敛, 且和相同.

对于 $S=+\infty$ 的情形, 将上述 p_k,q_k 对应的 S 设为 k 即可. □

3. 分配律

$\sum a_n$ 与 $\sum b_n$ 相乘, 会出现 $a_kb_j,\forall k,j\geq 1.\{a_kb_j\}_{k,j}$ 的任一排列都会给出级数相乘的定义.

- 正方形排列:

$$
\begin{aligned}
d_1 &= a_1b_1,\\
d_2 &= a_2b_1+a_2b_2+a_1b_2,\\
d_3 &= a_3b_1+a_3b_2+a_3b_3+a_2b_3+a_1b_3 \quad \dots
\end{aligned}
$$

  用部分和可表示为

$$
D_n=\sum_{k=1}^{n}d_k=\left(\sum_{k=1}^{n}a_k\right)\left(\sum_{j=1}^{n}b_j\right)=A_nB_n.
$$

  若 $\sum a_n$ 与 $\sum b_n$ 收敛, 则 $\sum d_n$ 收敛, 且 $\sum d_n=\sum a_n\sum b_n$.

- Cauchy 乘积:

$$\begin{aligned}
&c_1 = a_1 b_1,\\
&c_2 = a_2 b_1 + a_1 b_2,\\
&c_3 = a_1 b_3 + a_2 b_2 + a_3 b_1 \quad \ldots
\end{aligned}$$

通项即为

$$c_n = \sum_{k+j=n+1} a_k b_j.$$

$\sum c_n$ 称为 $\sum a_n$ 与 $\sum b_n$ 的 Cauchy 乘积.

定理　若 $\sum a_n, \sum b_n$ 都绝对收敛, 则乘积矩阵的任一排列构成的级数均收敛, 且和为 $(\sum a_n)(\sum b_n)$.

证明　任给一排列 $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, 其生成的级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \left| a_{k_n} b_{j_n} \right|$ 前 n 项的部分和为

$$\sum_{i=1}^{n} \left| a_{k_i} b_{j_i} \right| \leq \left(\sum_{i=1}^{M} |a_i| \right) \left(\sum_{i=1}^{M} |b_i| \right) \leq \left(\sum |a_i| \right) \left(\sum |b_i| \right).$$