第九章 数项级数

§1 数项级数的概念

设有序列 $\{a_n\}_{n=1}^{+\infty}$, 称表达式 $a_1 + a_2 + \ldots + a_n + \ldots$ 为数项级数, 记为 $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ 其中 a_n 称为级数的通项, 记 $S_n = a_1 + \ldots + a_n$ 为前 n 项的部分和.

定义 设有级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$.

- 若其前 n 项的部分和序列 $\{S_n\}_{n=1}^{+\infty}$ 收敛, 则称级数 $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ 收敛. 若 $S = \lim_{n\to\infty} S_n$, 则记 $S = \sum_{n=1}^{\infty} a_n$.
- 相应地若 $\{S_n\}$ 发散, 则称 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 发散. 特别地若 $\lim_{n\to\infty} S_n = \infty$, 则称 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 发散到 ∞, 记为 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \infty$.

经典的数项级数:

- **等比级数**: $q \in \mathbb{R}, \{q^n\}_{n=0}^{\infty}$ 是一等比数列. 讨论该数项级数的敛散性:

$$S_n = q^0 + \ldots + q^{n-1} = \begin{cases} \frac{1-q^n}{1-q}, & q \neq 1 \\ n, & q = 1 \end{cases}.$$

  - $q = 1$ 时 $S_n = n \to +\infty$ 发散.
  - $|q| < 1$ 时 $q^n \to 0, S_n \to \dfrac{1}{1-q}$ 收敛.
  - $q = -1$ 时 $S_n = \dfrac{1-(-1)^n}{2}$ 发散.
  - $|q| > 1$ 时 $q^n \to \infty, S_n \to \infty$ 发散.

例 求 $\sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n(n+2)}$.

解 $S_n = \sum_{k=1}^{n} \dfrac{1}{k(k+2)} = \dfrac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}\left(\dfrac{1}{k} - \dfrac{1}{k+2}\right) = \dfrac{1}{2}\left(1 + \dfrac{1}{2} - \dfrac{1}{n+1} - \dfrac{1}{n+2}\right) \longrightarrow \dfrac{3}{4}$.

例 证明 $\sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n!} = e$.

证明 根据定义 $e > \left(1 + \dfrac{1}{n}\right)^n = \sum_{k=0}^{n} \dbinom{n}{k} \dfrac{1}{n^k} = \sum_{k=0}^{n} \dfrac{1}{k!}\left(1 - \dfrac{1}{n}\right)\ldots\left(1 - \dfrac{k-1}{n}\right)$.

任意固定 k 并令 $n \longrightarrow \infty$ 即得

$$e \geq 1 + 1 + \frac{1}{2!} + \ldots + \frac{1}{k!}, \qquad \forall k \geq 1.$$

从通项公式可以看出

$$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n < \underbrace{1 + 1 + \frac{1}{2!} + \ldots + \frac{1}{n!}}_{S_n} \leq e,$$

利用夹逼定理即知 $S_n \to e$. □

基本性质

- **线性性**　若 $\sum a_n$ 与 $\sum b_n$ 都收敛, 则 $\forall\alpha,\beta\in\mathbb{R},\sum(\alpha a_n+\beta b_n)$ 也收敛, 且
$$\sum(\alpha a_n+\beta b_n)=\alpha\sum a_n+\beta\sum b_n.$$
另外当 $\alpha\neq 0$ 时 $\sum a_n$ 与 $\sum \alpha a_n$ 同时收敛或发散.
- **定理（级数收敛的 Cauchy 准则）**　$\sum a_n$ 收敛 $\Longleftrightarrow \forall\varepsilon>0,\exists N,\forall n>m>N,\left|\sum_{k=m}^{n}a_k\right|<\varepsilon.$
  - **例**　$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ 发散, 称为**调和级数**. 这是因为 $\sum_{k=n+1}^{2n}\frac{1}{k}\geq\frac{n}{2n}=\frac{1}{2}=\varepsilon_0$.
- **命题**　$\sum a_n$ 收敛 $\Longrightarrow \lim_{n\longrightarrow\infty}a_n=0$.

$\because \lim_{n\longrightarrow\infty}a_n=\lim_{n\longrightarrow\infty}(S_n-S_{n-1})=S-S=0.$

例　$\sum_{n=1}^{\infty}n\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)$ 发散, $\because n\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)=n\left(\frac{1}{n}+o\left(\frac{1}{n}\right)\right)=1+o(1)\longrightarrow 1.$

§2 正项级数

若 $\sum|a_n|$ 收敛, 则称 $\sum a_n$ 绝对收敛.

定理　若 $\sum a_n$ 绝对收敛, 则 $\sum a_n$ 收敛. $\because\left|\sum_{k=m}^{n}a_k\right|\leq\sum_{k=m}^{n}|a_k|<\varepsilon.$

若 $a_k\geq 0$, 则称 $\sum a_n$ 为**正项级数**. 此时
$$S_{n+1}=S_n+a_{n+1}\geq S_n.$$

命题　设 $\sum a_n$ 为正项级数, 则 $\sum a_n$ 收敛 $\Longleftrightarrow S_n$ 有界.

定理　设 $\sum a_n,\sum b_n$ 为正项级数, 且 $a_n\leq b_n,\forall n\geq 1$. 则 $\sum b_n$ 收敛 $\Longrightarrow\sum a_n$ 收敛.

若 $\lim_{n\longrightarrow\infty}\frac{a_n}{b_n}=c\geq 0,\begin{cases}c=0, & \sum b_n\text{ 收敛 }\Longrightarrow\sum a_n\text{ 收敛},\\ 0<c<\infty, & \text{同时敛散},\\ c=\infty, & \sum b_n\text{ 发散 }\Longrightarrow\sum a_n\text{ 发散}.\end{cases}$

例　讨论 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^p}$ $(p>0)$ 的敛散性.

- $p=1$ 时 $\sum\frac{1}{n}$ 发散.
- $0<p<1$ 时 $\frac{1}{n^p}>\frac{1}{n},\sum\frac{1}{n}$ 发散 $\Longrightarrow\sum\frac{1}{n^p}$ 发散.
- $p>1$ 时
$$\begin{aligned}S_{2^p-1}&=1+\left(\frac{1}{2^p}+\frac{1}{3^p}\right)+...+\left(\frac{1}{(2^{p-1})^p}+...+\frac{1}{(2^p-1)^p}\right)\\&\leq 1+\frac{2}{2^p}+...+\frac{2^{p-1}}{(2^{p-1})^p}\leq\frac{1}{1-q},\end{aligned}$$
其中 $q=\frac{1}{2^{p-1}}<1$. 故此时正项级数收敛.

例　$\sum_{n=1}^{\infty}\ln\cos\frac{\pi}{n}$.

其中

$$\ln\cos\frac{\pi}{n}\sim\cos\frac{\pi}{n}-1\sim-\frac{1}{2}\frac{\pi^2}{n^2},$$

即 $\lim\dfrac{-\ln\cos\frac{\pi}{n}}{\frac{1}{2}\frac{\pi^2}{n^2}}=1$. 由 $\sum\dfrac{1}{n^2}$ 收敛可知 $\sum\ln\cos\dfrac{\pi}{n}$ 收敛.

例 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\left(1-\left(\frac{n-1}{n+1}\right)^k\right)^p$.

其中

$$\begin{aligned}\left(1-\left(\frac{n-1}{n+1}\right)^k\right)^p&=\left(1-\left(1-\frac{2}{n+1}\right)^k\right)^p\\&=\left(1-\left(1-\frac{2k}{n+1}+o\Big(\frac{1}{n}\Big)\right)\right)^p\\&=\left(\frac{2k}{n+1}\right)^p+o\Big(\frac{1}{n^p}\Big).\end{aligned}$$

于是归结为讨论 $\sum\dfrac{1}{n^p}$ 的敛散性.

例 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^{n-2}}{e^n n!}$. 这里可以利用 Stirling 公式 $n!\sim\sqrt{2\pi n}\Big(\dfrac{n}{e}\Big)^n$.

例 设 $a_n\in(0,1)$, 且 $\sum na_n$ 收敛. 证明: $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}a_n\ln a_n$ 收敛.

观察两个级数, 猜测要比较 n 和 $-\ln a_n$, 即验证 $a_n\sim e^{-n}$.

$$\begin{aligned}\sum-a_n\ln a_n&=\sum_{a_n\ge e^{-n}}a_n(-\ln a_n)+\sum_{a_n<e^{-n}}-a_n\ln a_n\\&\le\sum_{a_n\ge e^{-n}}na_n+\sum_{a_n<e^{-n}}-a_n\ln a_n,\end{aligned}$$

其中

$$\begin{aligned}\sum_{a_n<e^{-n}}-a_n\ln a_n&=\sum_{a_n<e^{-n}}\sqrt{a_n}\sqrt{a_n}(-\ln a_n)\\&\le\sum_{a_n<e^{-n}}e^{-\frac{n}{2}}(-\sqrt{a_n}\ln a_n)\quad(x^p\ln x\longrightarrow 0)\end{aligned}$$

两个求和式均收敛.

下面介绍两个正项级数敛散性的判别法:

定理 (D'Alambert) 设有正项级数 $\sum a_n$ $(a_n\ge 0)$,

- $r=\overline{\lim}\dfrac{a_{n+1}}{a_n}<1$ 时, $\sum a_n$ 收敛.
- $r'=\underline{\lim}\dfrac{a_{n+1}}{a_n}>1$ 时, $\sum a_n$ 发散.

证明 取 $r_1\in(r,1)$, 则 $\exists N,\forall n\ge N,\dfrac{a_{n+1}}{a_n}\le r_1$. 此时 $\dfrac{a_{n+1}}{a_N}\le r_1^{N-n+1}$, 即 $a_{n+1}\le r_1^{N-n+1}a_N$. 由比较判别法知 $\sum a_n$ 收敛. $r'>1$ 时的证明几乎一致. □