定理 设幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 在 $x_0 \neq 0$ 处收敛, 则 $\sum_{n=0}^{\infty}$ 在 $(-|x_0|, |x_0|)$ 内闭绝对一致收敛.

证明 任给 $r > 0, 0 < r < |x_0|$, 来证级数在 $[-r, r]$ 绝对一致收敛.

先由 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x_0^n$ 收敛可得 $a_n x_0^n \to 0$, 则 $\exists M > 0, |a_n x_0^n| < M, \forall n \geq 1$.

$\forall x \in [-r, r]$,

$$|a_n x^n| \leq |a_n| r^n \leq |a_n||x_0^n|\left(\frac{r}{|x_0|}\right)^n \leq M\left(\frac{r}{|x_0|}\right)^n$$

由 M 判别法可知 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 在 $[-r, r]$ 上绝对一致收敛, 再由 r 的任意性得证. □

推论 令 $R = \sup\left\{|x_0| : \sum_{n=0}^{\infty} a_n x_0^n \text{ 收敛}\right\}, C = \left\{|x_0| : \sum_{n=0}^{\infty} a_n x_0^n \text{ 收敛}\right\} \subset [0, +\infty)$.

- $R = 0, \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 收敛域为 $\{0\}$.
- $R = +\infty, \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 收敛域为 $(-\infty, +\infty)$.
- $0 < R < +\infty, \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 在 $(-R, R)$ 收敛, 且在 $(-\infty, -R) \cup (R, +\infty)$ 发散.

  在 $(-R, R)$ 内闭绝对一致收敛.

定义 上述推论中的 R 称为幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 的**收敛半径**.

定理 对于幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$, 定义

$$\rho = \varlimsup_{n \to +\infty} \sqrt[n]{|a_n|}$$

则幂级数的收敛半径为 $R = \rho^{-1}$. 特殊的 ρ, R 有自然的理解.

证明 $\varlimsup_{n \to +\infty} \sqrt[n]{|a_n x^n|} = \rho|x|$. 由 Cauchy 判别法可知当 $\rho|x| < 1$ 时收敛, 当 $\rho|x| > 1$ 时发散.

- 若 $\rho \in (0, +\infty)$, 则可得 $R = \rho^{-1}$.
- 若 $\rho = 0$ 则 $\rho|x|$ 恒成立, 于是收敛半径为 $+\infty$.
- 若 $\rho = +\infty, \forall |x| \neq 0, \rho|x| = +\infty > 1$ 发散, 收敛半径为 0. □

定理 对于幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$, 若极限

$$\rho = \lim_{n \to +\infty} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|}$$

存在 (容许 $+\infty$), 则 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 的收敛半径为 $R = \rho^{-1}$.

证明

$$\varliminf_{n \to \infty} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} \leq \varliminf_{n \to \infty} \sqrt[n]{|a_n|} \leq \varlimsup_{n \to \infty} \sqrt[n]{|a_n|} \leq \varlimsup_{n \to \infty} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|}.$$

□

例 $\sum_{n=1}^{\infty} n! x^{n^n}$ 的收敛半径.

解 $\rho = \overline{\lim_{n\to\infty}} \sqrt[n]{|a_n|} = \overline{\lim_{n\to\infty}} \sqrt[n^n]{n!} \le \overline{\lim_{n\to\infty}} \sqrt[n^n]{n^n} = 1 \Longrightarrow \rho = 1.$

对于幂级数 $\sum a_n (x-x_0)^n = \sum a_n t^n$, 若其收敛半径为 $R \in (0, +\infty)$, 则原级数在 $(x_0 - R, x_0 + R)$ 内收敛, 在 $(-\infty, x_0 - R) \cup (x_0 + R, +\infty)$ 发散.

§ 幂级数的性质

定理 (Abel) 设 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 的收敛半径为 $R \ge 0$, 则

- $\sum a_n x^n$ 在 $(-R, R)$ 内闭绝对一致收敛,
- 若 $\sum a_n R^n$ 收敛, 则 $\sum a_n x^n$ 在 $(-R, R]$ 内闭一致收敛,
- 若 $\sum a_n (-R)^n$ 收敛, 则 $\sum a_n x^n$ 在 $[-R, R)$ 内闭一致收敛.

也就是说, $\sum a_n x^n$ 在其收敛域内闭一致收敛.

证明 来证第 3 条结论. 只要证级数在 $[-R, 0]$ 一致收敛.

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (-R)^n \left(-\frac{x}{R}\right)^n,$$

其中 $\sum a_n (-R)^n$ 一致收敛, $\left(-\frac{x}{R}\right)^n$ 在 $[-R, 0]$ 一致有界且单调减. 由 Abel 判别法知幂级数在 $[-R, 0]$ 一致收敛.

推论 幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 在其收敛域内连续.

例

$$1 + x + x^2 + \ldots = \frac{1}{1-x},$$

$$\underbrace{x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \ldots}_{S(x)} = -\ln(1-x).$$

左端的收敛域为 $[-1, 1)$, 于是

$$S(-1) = \lim_{x\to -1} S(x) = \lim_{x\to -1} -\ln(1-x) = -\ln 2.$$

定理 设 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-x_0)^n$ 的收敛半径 $R > 0$, 则任给收敛域内的两个点 x_1, x_2, 有

$$\begin{aligned} \int_{x_1}^{x_2} \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-x_0)^n &= \sum_{n=0}^{\infty} \int_{x_1}^{x_2} a_n (x-x_0)^n \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n+1} \left[(x_2 - x_0)^{n+1} - (x_1 - x_0)^{n+1} \right]. \end{aligned}$$

取 $x_1 = x_0, x_2 = x$ 即得

$$\int_{x_0}^{x} \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-x_0)^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n+1} (x-x_0)^{n+1},$$

而

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} \sqrt[n]{\frac{|a_{n-1}|}{n}} = \overline{\lim_{n\to\infty}} \sqrt[n]{|a_n|}.$$

所以逐项积分得到的幂级数的收敛半径与原幂级数的收敛半径一致, 且收敛域不会变小.

对于幂级数 $\sum a_n x^n$ 和 $\sum \frac{a_n}{n+1} x^{n+1}$, 若 $\sum a_n R^n$ 收敛,

$$\sum \frac{a_n}{n+1} R^{n+1} = \sum a_n R^n \cdot \frac{R}{n+1}$$

可由 Abel 判别法得到收敛.

定理 设 $\sum a_n (x-x_0)^n$ 的收敛半径为 $R > 0$, 记和函数为 $f(x)$, 则 $f \in C^\infty(-R, R)$, 且 $\forall k \geq 1$,

$$f^{(k)}(x) = \sum_{n=k}^{\infty} a_n n(n-1)...(n-k+1)(x-x_0)^{n-k}.$$

证明

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} \sqrt[n]{|a_n| n...(n-k+1)} = \overline{\lim_{n\to\infty}} \sqrt[n]{|a_n|}.$$

于是求导后的幂级数在 $(-R, R)$ 内闭一致收敛, 因而可逐项求导. □

***生成函数** / Generating function

任给序列 $\{a_n\}$, 生成幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 称为序列的生成函数.

$\left\{\frac{1}{n}\right\}$ 的生成函数 $x + \frac{x^2}{2} + ... = -\ln(1-x)$.