我们已经给出了 $\displaystyle\int_a^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x$ 和 $\displaystyle\int_{-\infty}^{a} f(x)\,\mathrm{d}x$ 的定义。

类似地可以定义 $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} = \int_{-\infty}^{a} + \int_{a}^{+\infty}$. 若两个反常积分均收敛则称 $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty}$ 收敛。

对于有原函数的 $f(x)$, 反常积分还有其他的表达方式。设 f 在 $[a,+\infty)$ 上有原函数 F, 则有

$$\int_a^x f(x)\,\mathrm{d}x = F(x) - F(a).$$

因而

$$\int_a^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x = \lim_{x\to\infty}\int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t = F(+\infty) - F(a).$$

例 求 $\displaystyle\int_1^{\infty} \frac{1}{x^p}\,\mathrm{d}x$.

解

- $p=1$ 时 $\displaystyle\int_1^{+\infty}\frac{1}{x}\,\mathrm{d}x = \ln(+\infty) - \ln(1)$ 发散。
- $p\neq 1$ 时 $\displaystyle\int_1^{+\infty}\frac{1}{x^p}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{1-p}x^{1-p}\Big|_1^{+\infty} \Longrightarrow \begin{cases}\frac{1}{1-p} & \text{if } p>1\\ +\infty & \text{otherwise}\end{cases}$.

在反常积分中还原法和分部积分同样可用。

- 换元法：

$$\int_a^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x = \int_\alpha^\beta f(\varphi(t))\varphi'(t)\,\mathrm{d}t \quad (\varphi\in C^1[\alpha,\beta), \varphi'\geq 0)$$

  其中 $\varphi(\alpha)=a, \varphi(\beta-0)=+\infty$. 注意等式右边可能是正常积分，也可能是瑕积分。

- 分部积分：对于 $u,v\in C^1$, $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}u(x)v(x)$ 存在，则

$$\int_a^{+\infty} u(x)v'(x)\,\mathrm{d}x = u(x)v(x)\Big|_a^{+\infty} - \int_a^{+\infty} u'(x)v(x)\,\mathrm{d}x.$$

例 $\displaystyle\int_1^{+\infty}\frac{\cos x}{x}\,\mathrm{d}x = \frac{\sin x}{x}\Big|_1^{+\infty} - \int_1^{+\infty} -\frac{\sin x}{x^2}\,\mathrm{d}x$. 由上一例知该反常积分收敛。

例 计算 $\displaystyle I=\int_0^{+\infty} e^{-ax}\sin bx\,\mathrm{d}x$, $\displaystyle J=\int_0^{+\infty} e^{-ax}\cos bx\,\mathrm{d}x$ $(a>0)$. 假定 I,J 确实收敛。

解

$$I = -\frac{e^{-ax}}{a}\sin bx\Big|_0^{+\infty} - \frac{1}{a}\int_0^{+\infty} be^{-ax}\cos bx\,\mathrm{d}x = \frac{b}{a}J,$$

$$J = -\frac{e^{-ax}}{a}\cos bx\Big|_0^{+\infty} + \frac{1}{a}\int_0^{+\infty} be^{-ax}\sin bx\,\mathrm{d}x = \frac{1}{a}+\frac{b}{a}I.$$

联立即可解出 I,J.

§2 无穷积分敛散性的判别法

$f:[a,+\infty)\to\mathbb{R}$. $\forall x\geq a, f$ 在 $[a,x]$ 上可积，且有原函数 $F(x)=\displaystyle\int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t$, $\displaystyle\int_a^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x=F(+\infty)-F(a)$.

定理 反常积分收敛 $\iff \forall\varepsilon>0,\exists M>a,\forall x_1,x_2>M,\left|\displaystyle\int_{x_1}^{x_2} f(x)\,\mathrm{d}x\right|<\varepsilon$. (Cauchy 准则)

定理 $\displaystyle\int_a^{+\infty}|f|\,\mathrm{d}x$ 收敛 $\Longrightarrow \displaystyle\int_a^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x$ 收敛。由上一定理即证。

定义 若 f 满足 $\displaystyle\int_a^{+\infty}|f(x)|\,\mathrm{d}x$ 收敛，则称 f **绝对收敛**。

若 $\displaystyle\int_a^{+\infty}|f(x)|\,\mathrm{d}x$ 发散但 $\displaystyle\int_a^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x$ 收敛，则称 f **条件收敛**。

下面先讨论 $f(x)\geq 0$ 的情形，此时 $F(x)$ 关于 x 单调增。

定理 设 $f\geq 0$, 则 $\displaystyle\int_a^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x$ 收敛 $\iff F(x)$ 在 $[a,+\infty)$ 有界。证明显然。

定理 (比较判别法) 设 $\exists c\geq 0$ s.t. $0\leq f(x)\leq c\cdot g(x),\forall x\geq a$. 则

- 若 $\displaystyle\int_a^{+\infty} g(x)\,\mathrm{d}x$ 收敛，则 $\displaystyle\int_a^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x$ 也收敛。
- 若 $\displaystyle\int_a^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x$ 发散，则 $\displaystyle\int_a^{+\infty} g(x)\,\mathrm{d}x$ 也发散。

证明

- $\displaystyle\int_a^{+\infty} g(x)\,\mathrm{d}x$ 收敛 $\Longrightarrow \exists M,\displaystyle\int_a^{+\infty} g(x)\,\mathrm{d}x<M$. 则 $\displaystyle\int_a^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x<cM$.
- 发散的情形同理。 □

定理 (比较判别法的极限形式) 设 $f\geq 0, g>0, \displaystyle\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{g(x)}=c\in[0,+\infty]$.

- $0<c<+\infty$ 时 f,g 的反常积分同时敛散。
- $0\leq c<+\infty$ 时若 $\displaystyle\int_a^{+\infty} g(x)\,\mathrm{d}x$ 收敛，则 $\displaystyle\int_a^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x$ 也收敛。
- $0<c\leq+\infty$ 时若 $\displaystyle\int_a^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x$ 收敛，则 $\displaystyle\int_a^{+\infty} g(x)\,\mathrm{d}x$ 也收敛。

利用比较判别法我们可以判定 f 是否绝对收敛。若 f 不绝对收敛，我们可以采取以下的判别法来判断 f 是否为条件收敛。

定理 (Dirichlet) 设 $f,g:[a,+\infty)\to\mathbb{R}$ 有定义。若

- $\exists M>0$ s.t. $\forall x,\left|\displaystyle\int_a^x g(t)\,\mathrm{d}t\right|<M$,
- $f(x)$ 单调趋于 0,

则 $\displaystyle\int_a^{+\infty} f(x)g(x)\,\mathrm{d}x$ 收敛。注意这里不要求 g 的正负性。

证明

$$
\begin{aligned}
\left|\int_{x_1}^{x_2} f(x)g(x)\,\mathrm{d}x\right| &\le \left|f(x_1)\int_{x_1}^{\xi} g(x)\,\mathrm{d}x\right| + \left|f(x_2)\int_{\xi}^{x_2} g(x)\,\mathrm{d}x\right| \\
&\le 2M(|f(x_1)| + |f(x_2)|) \to 0.
\end{aligned}
$$

□

定理 (Abel) 设 f, g 满足

- $\displaystyle\int g(x)\,\mathrm{d}x$ 收敛，
- $f(x)$ 单调有界，

则 $\displaystyle\int_a^{+\infty} f(x)g(x)\,\mathrm{d}x$ 收敛。

证明 令 $f(+\infty) = c$.

$$
\int fg\,\mathrm{d}x = \int (f-c)g\,\mathrm{d}x + c\cdot\int g\,\mathrm{d}x.
$$

前一项由 Dirichlet 定理收敛. □