例 求 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\cdot\frac{1}{2n+1}$.

解 令 $f(x)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(2n+1)}x^{2n+1}, x\in[-1,1]$, 归结为求 $f(1)$. 有 $f'(x)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}x^{2n}$, $f''(x)=2\sum\limits_{n=1}^{\infty}x^{2n-1}=\frac{2x}{1-x^2}$. 积分可得 $f'(x)=\int_0^x f''(x)\,\mathrm{d}x=-\ln(1-x^2)$, $f(x)=(1-x)\ln(1-x)+2x-(1+x)\ln(1+x)$. 于是所求为 $f(1-0)=2-2\ln 2$.

另外也可做裂项 $\frac{1}{n}\cdot\frac{1}{2n+1}=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2n}-\frac{1}{2n+1}\right)$.

§3 初等函数的幂级数展式

设 $f(x)$ 在 x_0 的某个邻域内有定义, 且 $\exists\delta>0,\text{s.t.}$ 在 $(x_0-\delta,x_0+\delta)$ 内有

$$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}a_n(x-x_0)^n$$

则称 f 可在 x_0 处展成幂级数. 若 f 在区间 I 的每个点都可以展成幂级数, 则称 f 在 I 上**实解析**.

若 f 在 x_0 处可展成幂级数, 则 f 在 x_0 的某个邻域内无穷次可导, 反之不是. 对于 $f(x)=\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_n(x-x_0)^n$ 逐项求导有

$$f^{(k)}(x)=a_n n...(n-k+1)(x-x_0)^{n-k},$$

令 $x=x_0$ 即有 $f^{(k)}(x_0)=k!a_k$.

定理 若 $f(x)$ 在 x_0 处可展成幂级数 $f(x)=\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_n(x-x_0)^n$, 则 $a_n=\frac{1}{n!}f^{(n)}(x)$. □

例 $f(x)=\begin{cases}e^{-\frac{1}{x^2}}, & x\neq 0\\ 0, & x=0\end{cases}$, $f^{(n)}(0)=0,\forall n\geq 0$. 若 $f(x)$ 在 0 处能展成幂级数, 则 $f(x)=\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}f^{(n)}(0)x^n=0$, 矛盾.

设 $f(x)$ 在 x_0 的某个邻域内无穷次可导, 称

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}f^{(n)}(x_0)(x-x_0)^n$$

为 f 在 x_0 处的 Taylor 级数, 在 $x_0=0$ 时称为 Maclarin 级数.

回忆 Taylor 公式

$$f(x)=\sum_{n=0}^{n}f^{(k)}(x_0)(x-x_0)^k+R_n(x,x_0)$$

f 在 x_0 处可展成幂级数当且仅当 $\exists\delta>0$ s.t. 在 $x\in(x_0-\delta,x_0+\delta)$ 时 $R_n(x,x_0)\to 0$.

例

- $f(x)=e^x, f^{(n)}(x)=e^x$. $R_n(x)=\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}x^{n+1}=\frac{e^{\xi}}{(n+1)!}x^{n+1},\xi\in[0,x]$.
  $\forall x\in\mathbb{R},|R_n(x)|\leq\frac{e^{|x|}}{(n+1)!}|x|^n\to 0$. 于是 $e^x=\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}x^n,x\in(-\infty,+\infty)$.
- $\ln(1+x)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n}x^n,x\in(-1,1]$.

- $f(x)=\sin x, \left|f^{(n)}(x)\right| \leq 1. R_n(x)=\dfrac{\left|f^{(n+1)}(\xi)\right|}{(n+1)!}|x|^{n+1} \leq \dfrac{|x|^{n+1}}{(n+1)!} \to 0.$

  于是 $\sin x=\sum_{n=0}^{\infty}\dfrac{(-1)^n}{(2n+1)!}x^{2n+1}, \cos x=\sum_{n=0}^{\infty}\dfrac{(-1)^n}{(2n)!}x^{2n}, \forall x \in(-\infty,+\infty).$
- $f(x)=(1+x)^\alpha$. 其 Taylor 级数的收敛半径为 1, 故只讨论 $|x|<1$ 的情形.
  - $\alpha=0,(1+x)^\alpha=1.$
  - $\alpha=n \in \mathbb{N},(1+x)^n=\sum_{n=0}^{\infty}\binom{n}{k}x^k.$
  - $\alpha \in \mathbb{R}, R_n(x)=\dfrac{1}{n!}\int_0^x(x-t)^n f^{(n+1)}(t)\,\mathrm{d}t,$

    其中 $\left((1+x)^\alpha\right)^{(n+1)}=\alpha(\alpha-1)\ldots(\alpha-n)(1+x)^{\alpha-n-1}.$

$$
\begin{aligned}
\left|R_n(x)\right| &\leq \frac{|\alpha\ldots(\alpha-n)|}{n!}\left|\int_0^x(x-t)^n(1+t)^{\alpha-n-1}\,\mathrm{d}t\right| \\
&=\frac{|\alpha\ldots(\alpha-n)|}{n!}\left|\int_0^x\left(\frac{x-t}{1+t}\right)^n(1+t)^{\alpha-1}\,\mathrm{d}t\right| \\
&=\frac{|\alpha\ldots(\alpha-n)|}{n!}|x|^n\left|\int_0^x\left(\frac{1-\frac{t}{x}}{1+t}\right)^n(1+t)^{\alpha-1}\,\mathrm{d}t\right| \\
&\leq \frac{|\alpha\ldots(\alpha-n)|}{n!}|x|^n\left|\int_0^x(1+t)^{\alpha-1}\,\mathrm{d}t\right| \qquad \left(\frac{1-\frac{t}{x}}{1+t}<1\right) \\
&\leq \frac{|(\alpha-1)\ldots(\alpha-n)|}{n!}|x|^n(1+x)^\alpha \to 0.
\end{aligned}
$$

  于是 $(1+x)^\alpha=\sum_{n=0}^{\infty}\dfrac{\alpha\ldots(\alpha-n+1)}{n!}x^n, x\in(-1,1).$
  - $\alpha>0, n\left(\dfrac{|a_n|}{|a_{n+1}|}-1\right)=\dfrac{n}{n-\alpha}(1+\alpha) \to 1+\alpha>1, \sum|a_n|$ 收敛, 故此时收敛域为 $[-1,1]$.
  - $\alpha \leq -1, \dfrac{|a_n|}{|a_{n+1}|}=\dfrac{n+1}{n-\alpha} \leq 1, \lim\limits_{n\to\infty} a_n \neq 0$, 收敛域为 $(-1,1)$.
  - $-1<\alpha<0$, 在 $x=-1$ 不收敛. $\dfrac{|a_n|}{|a_{n+1}|}=\dfrac{n+1}{n-\alpha}>1.$

$$
\begin{aligned}
\frac{|\alpha\ldots(\alpha-n+1)|}{n!} &=\left|\frac{n-(\alpha+1)}{n}\right|\left|\frac{n-1-(\alpha+1)}{n-1}\right|\ldots\left|\frac{\alpha}{1}\right| \\
&=\left|1-\frac{\alpha+1}{n}\right|\left|1-\frac{\alpha+1}{n-1}\right|\ldots\left|1-\frac{\alpha+1}{1}\right| \\
&=\exp\left(\sum_{k=1}^{n}\ln\left(1-\frac{\alpha+1}{k}\right)\right) \to 0 \quad (n\to\infty)
\end{aligned}
$$

    从而 $x=1$ 处收敛.

  记 $\dbinom{\alpha}{n}:=\dfrac{\alpha(\alpha-1)\ldots(\alpha-n+1)}{n!}$, 约定 $\dbinom{\alpha}{0}=1$. 则 $(1+x)^\alpha=\sum_{n=0}^{\infty}\dbinom{\alpha}{n}x^n, x\in(-1,1).$

  综上所述,
  - $\alpha \geq 0$, 收敛域为 $[-1,1]$,

- $\alpha \le -1$, 收敛域为 $(-1,1)$,
- $-1 < \alpha < 1$, 收敛域为 $(-1,1]$.

对于 $\alpha = \frac{1}{2}$,

$$\binom{\alpha}{n} = \frac{\frac{1}{2}\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)\cdot\left(\frac{3}{2}-n\right)}{n!} = \frac{(-1)^{n-1}(2n-3)!!}{(2n)!!}$$
$$= (-1)^{n-1}\frac{(2n-3)!!}{(2n-2)!!}\cdot\frac{1}{2n} \sim n^{-\frac{3}{2}}.$$

对于 $\alpha = -\frac{1}{2}$,

$$\binom{\alpha}{n} = \frac{(-1)^n(2n-1)!!}{(2n)!!}, x \in (-1,1].$$

回忆若 $S(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n, x \in (-R,R)$ 在 $x = R$ 收敛, 则 $\lim_{x\to R^-} S(x)$ 存在. 其逆命题则一般不真, 即 $\lim_{x\to R^-} S(x)$ 存在不能推出 $x = R$ 处收敛, 反例有 $\dfrac{1}{1+x}$ $(R=1)$.

*Tauber 定理: 若 $\lim_{n\to\infty} na_n = 0$ 且 $S(R-0)$ 存在, 则 $\sum a_n R^n$ 收敛.

$$\frac{1}{1+x^2} = 1 - x^2 + x^4 - ..., \quad x \in (-1,1)$$
$$\arctan x = x - \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{5}x^5 - ..., x \in [-1,1].$$
$$\Rightarrow \frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - ...$$

$$(\arcsin x)' = (1-x^2)^{-\frac{1}{2}} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}x^{2n}$$
$$\Rightarrow \arcsin x = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}\frac{1}{2n+1}x^{2n+1}, \quad x \in [-1,1].$$
$$\Rightarrow \frac{\pi}{2} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}\frac{1}{2n+1}.$$

以上均为 Maclaurin 级数. 若要处理 $x_0 \ne 0$ 的情形, 可以转化到 Maclarin 级数来解决.

$$\sin x = \sin((x-x_0)+x_0) = \sin(x-x_0)\cos x_0 + \cos(x-x_0)\sin x_0$$
$$= \cos x_0 \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n+1)!}(x-x_0)^{2n+1} + \sin x_0 \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n)!!}(x-x_0)^{2n}.$$