例 计算 $I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x \,\mathrm{d}x$.

解

$$\begin{aligned}
I_n &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x \,\mathrm{d}x = -\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{n-1} x \,\mathrm{d}\cos x \\
&= -(\sin^{n-1} x \cos x)\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} + (n-1)\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{n-2} x \cos^2 x \,\mathrm{d}x \\
&= (n-1)\int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin^{n-2} x - \sin^n x)\,\mathrm{d}x \\
&= (n-1)(I_{n-2} - I_n). \\
\Longrightarrow I_n &= \frac{n-1}{n} I_{n-2}, \qquad n \geq 2.
\end{aligned}$$

于是

$$\begin{aligned}
I_{2k} &= \frac{(2k-1)!!}{(2k)!!} I_0 = \frac{\pi}{2} \cdot \frac{(2k-1)!!}{(2k)!!}, \\
I_{2k+1} &= \frac{(2k)!!}{(2k+1)!!} I_1 = \frac{(2k)!!}{(2k+1)!!}.
\end{aligned}$$

推论 (Wallis) 证明

$$\lim_{n\to\infty} \left(\frac{(2n)!!}{(2n-1)!!} \right)^2 \frac{1}{2n+1} = \frac{\pi}{2}.$$

证明

$$\begin{aligned}
& \sin^{2n+1} x < \sin^{2n} x < \sin^{2n-1} x \\
\Longrightarrow & \frac{(2n)!!}{(2n+1)!!} < \frac{\pi}{2} \cdot \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} < \frac{(2n-2)!!}{(2n-1)!!} \\
\Longrightarrow & \left(\frac{(2n)!!}{(2n-1)!!} \right)^2 \frac{1}{2n+1} < \frac{\pi}{2} < \left(\frac{(2n)!!}{(2n-1)!!} \right)^2 \frac{1}{2n}.
\end{aligned}$$

不等式两端之差 $\to 0, n \to \infty \Longrightarrow$ 两端均收敛于 $\frac{\pi}{2}$.■

这个极限的另一个推论是 $I_n \to 0, I_n \sim n^{-\frac{1}{2}}$.

§5 积分中值定理

从几何图形面积的角度看, 一个直观的事实是

$$f \in C[a,b] \overset{\xi\in[a,b]}{\Longrightarrow} \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = f(\xi)(b-a).$$

定理 设 $f \in C[a,b], g \in R[a,b]$ 且不变号, 则 $\exists \xi \in [a,b]$,

$$\int_a^b f(x)g(x)\,\mathrm{d}x = f(\xi)\int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x.$$

$g \equiv 1$ 的特殊情形对应最初的事实。

证明 设 $m := \min f, M := \max f, m \leq f(x) \leq M$. 下面不妨设 $g \geq 0$, 则

$$mg(x) \le f(x)g(x) \le Mg(x),$$
$$m\int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x \le \int_a^b f(x)g(x)\,\mathrm{d}x \le M\int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x.$$

当 $\int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x = 0$ 时 $\int_a^b f(x)g(x)\,\mathrm{d}x = 0$, 任取 $\xi \in [a,b]$ 均可;
当 $\int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x > 0$ 时

$$m \le \frac{\int_a^b f(x)g(x)\,\mathrm{d}x}{\int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x} \le M.$$

由连续函数的介值定理 $\exists\xi \in [a,b], f(\xi) = \frac{\int_a^b f(x)g(x)\,\mathrm{d}x}{\int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x}$.■

例 设 $f \in C[0,1]$, 证明

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^1 \frac{nf(x)}{n^2x^2+1}\,\mathrm{d}x = \frac{\pi}{2}f(0).$$

证明

$$\int_0^1 \frac{nf(0)}{n^2x^2+1}\,\mathrm{d}x = f(0)\int_0^1 \frac{\mathrm{d}nx}{n^2x^2+1} = f(0)\cdot\arctan(nx)|_0^1 = f(0)\arctan n \to \frac{\pi}{2}f(0).$$

于是要证

$$\int_0^1 \frac{n(f(x)-f(0))}{n^2x^2+1}\,\mathrm{d}x = 0.$$

令 $g(x) = f(x) - f(0), g \in C[0,1], g(0) = 0$.

感性分析: 随着 $n \to \infty, g(x)$ 靠近 1 的部分对积分的影响趋近于 0, 而靠近 0 的部分也因为连续性而趋近于零. 考虑将积分拆成两部分计算.

$$\int_0^1 \frac{ng(x)}{n^2x^2+1}\,\mathrm{d}x = \int_0^{n^{-\frac{1}{3}}} \frac{ng(x)}{n^2x^2+1}\,\mathrm{d}x + \int_{n^{-\frac{1}{3}}}^1 \frac{ng(x)}{n^2x^2+1}\,\mathrm{d}x,$$

其中

$$\left|\int_{n^{-\frac{1}{3}}}^1 \frac{ng(x)}{n^2x^2+1}\,\mathrm{d}x\right| \le M\cdot\frac{n}{n^2n^{-\frac{2}{3}}+1} \longrightarrow 0,$$
$$\int_0^{n^{-\frac{1}{3}}} \frac{ng(x)}{n^2x^2+1}\,\mathrm{d}x = g(\xi)\int_0^{n^{-\frac{1}{3}}} \frac{n}{n^2x^2+1}\,\mathrm{d}x = g(\xi_n)\arctan\left(n^{\frac{2}{3}}\right) < \frac{\pi}{2}\cdot n^{-\frac{1}{3}} \longrightarrow 0.■$$

定理 (带积分余项的 Taylor 公式) 设 f 在 $U(x_0,h)$ 上有 $(n+1)$ 阶导数, 则 $\forall x \in U(x_0,h)$,

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0) + \ldots + \frac{1}{n!}f^{(n)}(x_0)(x-x_0)^n + R(x,x_0),$$
$$R_n(x) = \frac{1}{n!}\int_{x_0}^x f^{(n+1)}(t)(x-t)^n\,\mathrm{d}t.$$

证明 对于 $n = 0$ 的情形,

$$f(x)=f(x_0)+\int_{x_0}^{x}f'(t)\,\mathrm{d}t=f(x_0)+\int_{x_0}^{x}f'(t)(x-t)^0\,\mathrm{d}t.$$

对积分进行分部积分有

$$\int_{x_0}^{x}f'(t)(x-t)^0\,\mathrm{d}t=\frac{1}{1!}\cdot f'(t)(x-t)|_{x_0}^{x}-\int_{x_0}^{x}f^{(2)}(t)(x-t)\,\mathrm{d}t.$$

对积分项递推进行分部积分即可. ■

Peano 余项仅要求 $R_n=o\big((x-x_0)^n\big)$. 而 Lagrange 余项是上述带积分余项 Taylor 公式应用第一中值定理的直接推论, 不过仅要求 $f^{(n+1)}(x)$ 存在而不必连续.

另外令 $\xi=x_0+\theta(x-x_0),\theta\in[0,1]$. 改写上述积分余项得

$$\begin{aligned}R_n(x)&=\frac{1}{n!}\int_{x_0}^{x}f^{(n+1)}(t)(x-t)^n\,\mathrm{d}t\\&=\frac{1}{n!}\cdot f^{(n+1)}[x_0+\theta(x-x_0)](1-\theta)^n(x-x_0)^{n+1}.\end{aligned}$$

这就是**带 Cauchy 积分余项的泰勒公式**.

定理 (微积分第二中值定理) 设 $g\in R[a,b]$.

1. 若 f 在 $[a,b]$ 上单调递增, 且 $f(x)\geq 0$, 则 $\exists\xi_1\in[a,b],\int_a^b f(x)g(x)\,\mathrm{d}x=f(b)\int_{\xi_1}^b g(x)\,\mathrm{d}x$.
2. 若 f 在 $[a,b]$ 上单调递减, 且 $f(x)\geq 0$, 则 $\exists\xi_2\in[a,b],\int_a^b f(x)g(x)\,\mathrm{d}x=f(a)\int_a^{\xi_2} g(x)\,\mathrm{d}x$.
3. 若 f 在 $[a,b]$ 上单调, 则 $\exists\xi\in[a,b]$,

$$\int_a^b f(x)g(x)\,\mathrm{d}x=f(a)\int_a^{\xi}g(x)\,\mathrm{d}x+f(b)\int_{\xi}^{b}g(x)\,\mathrm{d}x.$$

证明

(1) + (2) $\Longrightarrow$ (3): 不妨设 f 单调递减, 则 $f(x)=\underbrace{(f(x)-f(b))}_{\overline{f}(x)\leq 0}+f(b)$.

对 $\int_a^b\overline{f}\cdot g\,\mathrm{d}x$ 应用 (2) 有

$$\begin{aligned}\int_a^b f(x)g(x)\,\mathrm{d}x&=\int_a^b\overline{f}(x)g(x)\,\mathrm{d}x+f(b)\int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x\\&=(f(a)-f(b))\int_a^{\xi}g(x)\,\mathrm{d}x+f(b)\int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x\\&=f(a)\int_a^{\xi}g(x)\,\mathrm{d}x+f(b)\int_{\xi}^b g(x)\,\mathrm{d}x.\end{aligned}$$

接下来证明 (1). (2) 的证明和 (1) 仅相差一个换元 $t=(a+b)-x$.

首先来证明一个条件加强后的命题 (1): 设 $f\in C^1[a,b],g\in C[a,b]$. 此时 $f'\geq 0$.

令 $G(x)=\int_x^b g(x)\,\mathrm{d}x$. 有

$$
\begin{aligned}
\int_a^b f(x)g(x)\,\mathrm{d}x &= -fG\ \big|_a^b + \int_a^b f'(x)G(x)\,\mathrm{d}x \\
&= f(a)G(a) + G(\xi)\int_a^b f'(x)\,\mathrm{d}x.
\end{aligned}
$$

令 $m \coloneqq \min G, M \coloneqq \max G$, 则

$$
mf(b) \le f(a)G(a) + G(\xi)(f(b)-f(a)) \le Mf(b).
$$

$f(b)=0$ 的情形下可任取 $\xi \in [a,b]$. $f(b)>0$ 时在 g 上应用介值定理有

$$
\exists \xi_1 \in [a,b], G(\xi_1) = \frac{\int_a^b f(x)g(x)\,\mathrm{d}x}{f(b)} \Longrightarrow \int_a^b f(x)g(x)\,\mathrm{d}x = f(b)G(\xi_1).
$$

至此证明了加强条件后命题.

引理 (Abel 变换) 设 $\{a_i\}_{i=1}^n, \{b_i\}_{i=1}^n$ 为两组实数, 则

$$
\sum_{i=1}^n a_i b_i = \sum_{i=1}^{n-1}(a_i - a_{i-1})B_i + a_n B_n, \qquad B_k = \sum_{i=1}^k b_i.
$$

从直观角度或者直接验证即可证明. ■