在上一次课上我们证明了条件加强的第二中值定理. 接下来我们利用 Abel 变化和 Riemann 和的手段来证明原命题.

定理 设 $g \in R[a,b]$, f 在 $[a,b]$ 上单调递增, $f(a) \geq 0$, 则 $\exists \xi \in [a,b]$ s.t.

$$\int_a^b (f \cdot g)(x)\,\mathrm{d}x = f(b)\int_\xi^b g(x)\,\mathrm{d}x.$$

证明 取一列分割 $\Delta : a = x_0 < \ldots < x_n = b, \lambda(\Delta) \to 0$. 则

$$\int_a^b (f \cdot g)(x)\,\mathrm{d}x = \lim_{\lambda(\Delta)\to 0}\sum_{k=1}^n (f \cdot g)(x_k)\Delta x_k.$$

我们断言: 上式 $= \lim\limits_{\lambda(\Delta)\to 0}\sum\limits_{k=1}^n f(x_k)\int_{x_{k-1}}^{x_k} g(x)\,\mathrm{d}x$.

两者作差可得

$$\begin{aligned}
&\sum_{k=1}^n f(x_k)\left(g(x_k)\Delta x_k - \int_{x_{k-1}}^{x_k} g(x)\,\mathrm{d}x\right) \\
\leq &\sum_{k=1}^n f(x_k) w_k(g)\Delta x_k \to 0, \lambda(\Delta) \to 0,
\end{aligned}$$

其中 f 有界且 $g \in R[a,b]$.

于是令 $G(x) := \int_x^b g(x)\,\mathrm{d}x$, $\int_{x_{k-1}}^{x_k} g(x)\,\mathrm{d}x = G(x_{k-1}) - G(x_k)$. 由 Abel 变换知上式

$$\begin{aligned}
&= \sum_{k=1}^n f(x_k)(G(x_{k-1}) - G(x_k)) \\
&= \sum_{k=1}^n f(x_k)G(x_{k-1}) - \sum_{k=1}^n f(x_k)G(x_k) \\
&= f(x_1)G(a) + \sum_{k=1}^{n-1}(f(x_{k+1}) - f(x_k))G(x_k) \qquad \left(G(x_n) = \int_b^b g(x)\,\mathrm{d}x = 0\right) \\
&\in [mf(b), Mf(b)].
\end{aligned}$$

其中 $m := \min G, M := \max G$.

令 $\lambda(\Delta) \to 0$, 可得 $mf(b) \leq \int_a^b (f \cdot g)(x)\,\mathrm{d}x \leq Mf(b)$.

$f(b) = 0$ 时可任选 $\xi \in [a,b]$. $f(b) > 0$ 时 $\exists \xi \in [a,b]$,

$$G(\xi) = \frac{\int_a^b (f \cdot g)(x)\,\mathrm{d}x}{f(b)}.$$

$\square$

例 设 f 在 $[a,b]$ 上单调递增, 则

$$\int_a^b x f(x)\,\mathrm{d}x \geq \frac{a+b}{2}\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x.$$

证明

$$
\begin{aligned}
\int_a^b \left(x-\frac{a+b}{2}\right) f(x)\,\mathrm{d}x &= f(a)\int_a^\xi \left(x-\frac{a+b}{2}\right)\mathrm{d}x + f(b)\int_\xi^b \left(x-\frac{a+b}{2}\right)\mathrm{d}x \\
&= (f(b)-f(a))\int_\xi^b \left(x-\frac{a+b}{2}\right)\mathrm{d}x \geq 0.
\end{aligned}
$$

□

例 求 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\int_0^x \sin\frac{1}{t}\,\mathrm{d}t}{x}$.

解 如果直接适用洛必达法则会得到 $\frac{\sin\frac{1}{x}}{1}$, 该极限不存在, 但这无法说明原极限是否存在.

对于 $\forall\delta>0$,

$$
\int_0^x \sin\frac{1}{t}\,\mathrm{d}t = \int_0^\delta \sin\frac{1}{t}\,\mathrm{d}t + \int_\delta^x \sin\frac{1}{t}\,\mathrm{d}t.
$$

其中前一积分是一常数, 且随着 $\delta\to 0$ 而 $\to 0$.

于是可以认为

$$
\int_0^x \sin\frac{1}{t}\,\mathrm{d}t = \lim_{\delta\to 0}\int_\delta^x \sin\frac{1}{t}\,\mathrm{d}t.
$$

而具体计算给出

$$
\begin{aligned}
\int_\delta^x \sin\frac{1}{t}\,\mathrm{d}t &= \int_{\delta^{-1}}^{x^{-1}} \sin t\left(-\frac{1}{t^2}\right)\mathrm{d}t \\
&= \int_{x^{-1}}^{\delta^{-1}} \frac{\sin t}{t^2}\,\mathrm{d}t \\
&= x^2\int_{x^{-1}}^{\xi} \sin t\,\mathrm{d}t \\
&= x^2\left(\cos\frac{1}{x}-\cos\xi\right).
\end{aligned}
$$

于是

$$
\left|\int_\delta^x \sin\frac{1}{t}\,\mathrm{d}t\right| \leq 2x^2 \implies \left|\frac{\int_\delta^x \sin\frac{1}{t}\,\mathrm{d}t}{x}\right| \leq 2x \to 0.
$$

□

§6 定积分的几何应用

1. 直角坐标系

首先给出如下假设:

1. $f\in R[a,b]$ 时, 由 f 确定的平面图形面积定义为 $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$.
2. 采用小正方形覆盖的方式合理定义面积.

X 型区域: 由 $y=f(x), y=g(x)$ 所围成的图形. 具体来说,

$$
X: D=\{(x,y)\mid a\leq x\leq b, f(x)\leq y\leq g(x)\}.
$$

此时

$$S(D) = \int_a^b (g(x) - f(x))\,\mathrm{d}x = \int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x - \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x.$$

Y 型区域的定义和面积计算方式都是类似的.

例 (Young 不等式) 设 f 在 $[a,b]$ 上严格单调递增, $f(0)=0$, 则 $\forall a,b>0$, 有

$$ab \le \int_0^a f(x)\,\mathrm{d}x + \int_0^b f^{-1}(x)\,\mathrm{d}x,$$

且等号成立 $\iff f(a)=b$.

证明 利用几何直观即可说明. □

特例 $f(x)=x^\alpha, f^{-1}(y)=y^{\frac{1}{\alpha}} \implies \forall a,b>0, ab \le \frac{a^{\alpha+1}}{\alpha+1} + \frac{b^{\frac{1}{\alpha}+1}}{\frac{1}{\alpha}+1} = \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q}$,

其中 $p = 1+\alpha, q = \frac{1}{\alpha}+1, \frac{1}{p}+\frac{1}{q} = 1 \implies ab \le \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q}$.

2. 参数方程

设 γ 由参数方程 $\begin{cases} x=x(t) \\ y=y(t) \end{cases}, \alpha \le t \le \beta$ 决定, $x(t), y(t) \in R[\alpha,\beta]$, 且为封闭曲线 (姑且按照直观理解, 首尾相连且除此以外没有交点). Jordan 曲线定理告诉我们, 简单闭曲线将平面分成两个区域, 这里要求 $x(t), y(t) \in C^1[\alpha,\beta]$.

下面来计算 Jordan 曲线所围成的区域 D 的面积. 我们规定当 t 增加时若 D 始终在左手边, 则称其为**正向**, 否则称之为**反向**. 设 $\gamma(t) = (x(t), y(t))$ 为正向的 Jordan 曲线, 围成和 $\begin{cases} y=f(x) \\ y=g(x) \end{cases}$ 相同的 X 型区域.

此时

$$S(D) = \int_a^b (f(x) - g(x))\,\mathrm{d}x.$$

假设 $x(t)$ 在 $[\alpha,\tau]$ 上单调递减并且在 $[\tau,\beta]$ 上单调递增, 则这两段曲线分别对应 f 和 g. 于是有

$$\begin{aligned} S(D) &= \int_\alpha^\tau y(t(x))\,\mathrm{d}x(t) - \int_\tau^\beta y(t(x))\,\mathrm{d}x(t) \\ &= \int_\alpha^\tau y(t)x'(t)\,\mathrm{d}t - \int_\tau^\beta y(t)x'(t)\,\mathrm{d}t = -\int_\alpha^\beta y(t)x'(t)\,\mathrm{d}t. \end{aligned}$$

对于 Y 型区域则有

$$S(D) = \int_\alpha^\beta x(t)y'(t)\,\mathrm{d}t.$$

例 求椭圆盘 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \le 1$ 的面积.

解

$$S(D) = -\int_0^{2\pi} b\sin t(-a\sin t)\,\mathrm{d}t = ab\int_0^{2\pi} \sin^2 t\,\mathrm{d}t = \pi ab.$$