定理 设 $f_n(x)$ 在 $[a,b]$ 上可导, 且

- $\exists x_0 \in [a,b], \lim\limits_{n\to\infty} f_n(x_0)$ 收敛,
- $f_n'(x) \rightrightarrows g(x), x \in [a,b]$,

则

- $\exists f(x)$ s.t. $f_n(x) \rightrightarrows f(x), x \in [a,b]$,
- $f'(x) = g(x)$, i.e. $(\lim f_n(x))' = \lim f_n'(x)$.

证明 已经证明了第一个结论. 若 $f_n'(x) \in R[a,b]$, 则

$$f_n(x) - f_n(x_0) = \int_{x_0}^{x} f_n'(t)\,\mathrm{d}t$$

$$\Longrightarrow g(x) - g(x_0) = \int_{x_0}^{x} f'(t)\,\mathrm{d}t \overset{?}{\Longrightarrow} f'(x) = g(x)$$

任取 $x_1 \in [a,b]$, 要证 $\lim\limits_{x\to x_1} \dfrac{f(x)-f(x_1)}{x-x_1} = g(x_1)$.

$$\lim_{x\to x_1}\lim_{n_{>}\infty} \frac{f_n(x)-f_n(x_1)}{x-x_1} \overset{?}{=} \lim_{n\to\infty}\lim_{x\to x_1} \frac{f_n(x)-f_n(x_1)}{x-x_1}$$

令

$$h_n(x) = \begin{cases} \frac{f_n(x)-f_n(x_1)}{x-x_1}, & x \neq x_1 \\ f'(x), & x = x_1 \end{cases},$$

在 $n\to\infty$ 时

$$h_n(x) \to \begin{cases} \frac{f(x)-f(x_1)}{x-x_1}, & x \neq x_1 \\ g(x_1), & x = x_1 \end{cases}$$

只需证明 $\{h_n(x)\}$ 一致收敛, 从而得到极限函数的连续性.

对于 $x \neq x_1$,

$$\begin{aligned} |h_m(x) - h_n(x)| &= \frac{|(f_m(x) - f_n(x) - (f_m(x_1) - f_n(x_1)))|}{|x-x_1|} \\ &= \frac{|\varphi_{m,n}(x) - \varphi_{m,n}(x_1)|}{|x-x_1|} = \varphi_{m,n}'(\xi) = |f_m'(\xi) - f_n'(\xi)| < \varepsilon. \end{aligned}$$

由 $\{f_n'(x)\}$ 的一致收敛性可得 $\{h_n(x)\}$ 在 $[a,b]\setminus\{x_1\}$ 的一致收敛性, 由此有 $\{h_n(x)\}$ 在 $[a,b]$ 一致收敛, 从而极限函数连续, 特别的 $\lim h_n(x)$ 在 x_1 处连续:

$$g(x_1) = \lim_{x\to x_1} \frac{f(x)-f(x_1)}{x-x_1}$$

明所欲证. □

定理 (逐项求导) 设 $u_n(x)$ 在 $[a,b]$ 内可导, 且
- $\exists x_0 \in [a,b], \sum u_n(x_0)$ 收敛,
- $\sum u_n'(x)$ 在 $[a,b]$ 一致收敛,

则
- $\sum u_n(x)$ 在 $[a,b]$ 上一致收敛,
- $(\sum u_n(x))' = \sum u_n'(x)$.

例 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^x}$ 在 $(1,+\infty)$ 可微.

证明 $\forall x_0 > 1$, 任取 $1 < x_1 < x_0 < x_2$,

$$\sum u_n'(x) = -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln n}{n^x} \geq -\sum \frac{\ln n}{n^{x_1}},$$

由 $x_1 > 1$ 知该级数一致收敛, 于是和函数在 x_1 处可导. □

我们已经知道闭区间上的一致收敛性可以推出可积性, 这一结论对于瑕积分或反常积分也成立吗? 来看下面的例子:

例 若 $f_n(x)$ 在 $(a,b]$ 有定义, 且 $\forall \delta > 0, f_n \in R[a+\delta, b], \int_a^b f_n(x)\,\mathrm{d}x$ 收敛. 若 $f_n(x) \rightrightarrows f(x), x \in (a,b]$, 则
- $\displaystyle\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ 收敛,
- $\displaystyle\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \lim_{n\to\infty} \int_a^b f_n(x)\,\mathrm{d}x$.

证明 $\forall \delta > 0, f_n \rightrightarrows f, x \in [a+\delta, b] \Longrightarrow f \in R[a+\delta, b]$. 由 $\{f_n(x)\}$ 一致收敛的 Cauchy 准则, 取 $\varepsilon = 1, \exists N, \forall n, m > N, |f_n(x) - f_m(x)| < 1, \forall x \in (a,b]$. 取 $m = N$ 即有 $|f_n(x) - f_N(x)| < 1$. 令 $n \to \infty, |f(x) - f_N(x)| < 1, \forall x \in (a,b]$, 即 $f(x) = f_N(x) + (f(x) - f_N(x))$.

$\Longrightarrow \displaystyle\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ 收敛, 且

$$\begin{aligned}
\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x &= \int_a^b f_N(x)\,\mathrm{d}x + \int_a^b (f(x) - f_N(x))\,\mathrm{d}x \\
&= \int_a^b f_N(x)\,\mathrm{d}x + \lim_{n\to\infty} \int_a^b (f_n(x) - f_N(x))\,\mathrm{d}x \\
&= \lim_{n\to\infty} \int_a^b f_n(x)\,\mathrm{d}x.
\end{aligned}$$

□

注 函数在 $(a,b]$ 上一致收敛是一较强条件, 可否弱化为内闭一致收敛? 另外瑕积分的结论能否推广到反常积分?

例 设 $f_n(x)$ 在 $[a,+\infty)$ 有定义, 且 $\forall A > a, f_n \in R[a, A]$, 且 $\displaystyle\int_a^{+\infty} f_n(x)\,\mathrm{d}x$ 收敛.

若 $f_n \rightrightarrows f, x \in [a,+\infty)$, 是否有
- $\displaystyle\int_a^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x$ 收敛,

- $\displaystyle\int_a^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x = \lim_{n\to\infty}\int_a^{+\infty} f_n(x)\,\mathrm{d}x$?

$a>0$ 时可作换元

$$\int_a^{+\infty} f_n(x)\,\mathrm{d}x = \int_0^{a^{-1}} \frac{f_n\left(\frac{1}{t}\right)}{t^2}\,\mathrm{d}t,$$

然而 $f_n(x) \rightrightarrows f(x), f_n\left(\frac{1}{t}\right) \rightrightarrows f\left(\frac{1}{t}\right)$ 无法推出 $\dfrac{f_n\left(\frac{1}{t}\right)}{t^2} \rightrightarrows \dfrac{f\left(\frac{1}{t}\right)}{t^2}$.

一个例子是 $f_n(x)=\dfrac{1}{x^{1+\frac{1}{n}}}, x\in[1,+\infty), f_n(x)\to f(x)=\frac{1}{x}$. 可以证明 $f_n(x)\rightrightarrows f(x), x\in[1,+\infty)$. 这就说明例子中的第一个猜测是错误的.

另一个例子是

$$f_n(x)=\begin{cases}\frac{n}{x^3}e^{-\frac{n}{2x^2}}, & x>0\\ 0, & x=0\end{cases}\quad f_n(x)\to 0, n\to\infty.$$

可以证明 $\sup f_n(x)\sim C\cdot n^{-\frac{1}{2}}, f_n(x)\rightrightarrows 0$.

又 $f_n(x)=\left(e^{-\frac{n}{2x^2}}\right)'$, 则 $\displaystyle\int_0^{+\infty} f_n(x)\,\mathrm{d}x = e^{-\frac{n}{2x^2}}\Big|_0^{+\infty}=1$. 于是第二个猜测也是错误的.

原则上来说, 交换求极限顺序需要保证两个极限的一致性, 即两个变元不互相依赖.

第十一章 幂级数

§1 幂级数的收敛域与收敛半径

形如 $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n$ 的级数称为**幂级数**, 其中 $a_n\in\mathbb{R}, x_0\in\mathbb{R}$.

先设 $x_0=0$, 此时形式为 $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$. 分情况讨论此时的收敛域:

例

- $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} n!x^n$. 在 $x\neq 0$ 时 $n!x^n\to\infty$, 于是级数发散.
- $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} x^n$. 在 $(-1,1)$ 上收敛.
- $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n}$. 收敛域为 $[-1,1), x=-1$ 时为交错级数.
- $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n^2}$. 收敛域为 $[-1,1]$.
- $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$. 收敛域为 $(-\infty,+\infty)$.