1. 交错级数

定理 (Lebnitz) 设 $\{a_n\} \to 0$ 单调减, 则 $\sum\limits_{i=1}^{\infty}(-1)^{n-1}a_n$ 收敛.

证明 记 $T_n = \sum\limits_{k=1}^{n}(a_{2k-1} - a_{2k})$, 则 T_n 是一正项级数.

而且更改求和顺序可以得到

$$T_n = a_1 - (a_2 - a_3) - ... - (a_{2n-2} - a_{2n-1}) - a_{2n} \leq a_1,$$

因而 T_n 收敛, 从而 $\sum(-1)^{n-1}a_n$ 收敛. □

例 讨论 $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^p \ln^q n}$ 的敛散性.

解 先看 $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n^p \ln^q n}$: 在 $p > 1$ 或 $p = 1, q > 1$ 时收敛, 其余情形发散.

再看 $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^p \ln^q n}$: 在前一正项级数发散的前提下, 在 $p = 0, q > 0$ 或 $p > 0$ 时收敛, 其余情形发散.

2. Dirichlet 判别法

定理 考虑级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n b_n$, 满足

- $\sum a_n$ 的部分和有界,
- $\{b_n\}$ 单调趋于 0,

则 $\sum a_n b_n$ 收敛.

证明 记 $A_n := \sum\limits_{k=1}^{n}a_k, \exists M > 0$ s.t. $\forall n \geq 1, |A_n| \leq M$.

$\forall \varepsilon > 0$, 来找 N s.t. $\forall n > N, \forall p > 0$, 都有 $\left|\sum\limits_{k=n+1}^{n+p}a_k b_k\right| < \varepsilon$.

$$\begin{aligned}\left|\sum_{k=n+1}^{n+p}a_k b_k\right| &= \left|\sum_{k=n+1}^{n+p}(A_k - A_{k-1})b_k\right| \\ &= \left|\sum_{k=n+1}^{n+p}A_k b_k - \sum_{k=n}^{n+p-1}A_k b_{k+1}\right| \\ &\leq \left|\sum_{k=n+1}^{n+p-1}A_k(b_k - b_{k+1})\right| + |A_{n+p}b_{n+p}| + |A_n b_{n+1}| \\ &\leq M\left(\sum_{k=n+1}^{n+p-1}|b_k - b_{k+1}| + |b_{n+p}| + |b_{n+1}|\right) \\ &= M(|b_{n+1} - b_{n+p-1}| + |b_{n+p}| + |b_{n+1}|) \\ &\leq 2M(|b_{n+1}| + |b_{n+p}|) < \varepsilon,\end{aligned}$$

由 b_n 单调趋于 $0, \exists N, \forall n > N, |b_n| < \frac{\varepsilon}{4M}$ 即可. □

定理 (Abel) 设 $\{a_n\}, \{b_n\}$ 满足

- $\sum a_n$ 收敛,

- $\{b_n\}$ 单调有界,

则 $\sum a_n b_n$ 收敛.

证明 设 $b_n \to b$.

$$\sum a_n b_n = \sum a_n(b + (b_n - b)) = b\sum a_n + \sum a_n(b_n - b).$$

由 Dirichlet 定理知后一级数收敛. □

事实上, Lebnitz 定理可视为 Dirichlet 定理的特殊情形: $(-1)^{n-1}$ 部分和有界.

例 讨论交错级数 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^{\alpha+\frac{1}{n}}}$, $\alpha > 0$.

解 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^\alpha}{n^\alpha}\cdot\frac{1}{n^{\frac{1}{n}}}$, 其中 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^\alpha}{n^\alpha}$ 收敛, $\dfrac{1}{n^{\frac{1}{n}}}$ 单调增且收敛于 1. 由 Abel 定理原级数收敛. □

例 (Fourier) 设 $\{a_n\}$ 单调趋于 0, 则

- 当 $\sum a_n$ 收敛时, $\sum a_n \sin nx, \sum a_n \cos nx$ 绝对收敛,
- 当 $\sum a_n$ 发散时, 当 $x \neq k\pi$ 时 $\sum a_n \sin nx$ 条件收敛, $x \neq 2k\pi$ 时 $\sum a_n \cos nx$ 条件收敛.

证明 不妨设 $a_n > 0$.

- $|a_n \sin nx|, |a_n \cos nx| \leq a_n$.
- $$\begin{aligned} &2\sin\frac{x}{2}(\sin x + \sin 2x + \dots + \sin nx) \\ &= \left(\cos\frac{x}{2} - \cos\frac{3x}{2} + \cos\frac{3x}{2} - \cos\frac{5x}{2} + \dots + \cos\frac{2n-1}{2}x - \cos\frac{2n+1}{2}x\right) \\ &= \cos\frac{x}{2} - \cos\frac{2n+1}{2}x. \end{aligned}$$

  $$\left|\sum_{k=1}^{n}\sin kx\right| \leq \left|\frac{\cos\frac{x}{2} - \cos\frac{2n+1}{2}x}{2\sin\frac{x}{2}}\right| \leq \left|\frac{1}{\sin\frac{x}{2}}\right|, \quad x \neq 2k\pi.$$

  由 Dirichlet 定理可知 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n \sin nx$ 收敛, $\forall x \in \mathbb{R}$.

  而 $|a_n \sin nx| \geq a_n \sin^2 nx = \dfrac{a_n - a_n\cos 2nx}{2}$,

  其中 $\sum a_n \cos 2nx$ 在 $2x \neq 2k\pi$ 时收敛, 则此时 $\sum |a_n \sin nx|$ 发散, 结合 $\sum a_n \sin nx$ 收敛即得 $\sum a_n \sin nx$ 条件收敛.

  对于 cos 的情形,

  $$2\sin\frac{x}{2}(\cos x + \dots + \cos nx) = \sin\frac{2n+1}{2}x - \sin\frac{x}{2},$$

  $$\left|\sum_{k=1}^{n}\cos kx\right| = \left|\frac{\sin\frac{2n+1}{2}x - \sin\frac{x}{2}}{2\sin\frac{x}{2}}\right| \leq \left|\frac{1}{\sin\frac{x}{2}}\right|, \quad x \neq 2k\pi.$$

  由 Dirichlet 定理可知 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx$ 收敛, $\forall x \neq 2k\pi$.

  而 $|a_n \cos nx| \leq a_n \cos^2 nx = \dfrac{a_n + a_n\cos 2nx}{2}$,

  和 sin 相同的论述给出 $x \neq k\pi$ 时 $\sum a_n \cos nx$ 条件收敛.

对于 $x=(2k-1)\pi$ 的情形, $\sum a_n\cos(2k-1)n\pi=\sum(-1)^n a_n$ 条件收敛. $\square$

§4 数项级数的性质

1. 结合律

定理 设 $\sum a_n$ 收敛, 则 $\sum a_n$ 任意加括号后得到的级数都收敛.

证明 设 $\sum b_n$ 是 $\sum a_n$ 加括号后得到的级数, 其中 $b_k=\sum\limits_{i=n_{k-1}+1}^{n_k} a_i \quad (n_k>n_{k-1})$.

记 $S_n=\sum\limits_{k=1}^{n} a_k, \quad T_n=\sum\limits_{k=1}^{n} b_k$. 则 $\{T_n\}$ 是 $\{S_n\}$ 的一个子序列, 必然收敛到同一极限. $\square$

注 当 $\sum a_n$ 为正项级数时, $\sum a_n$ 以某种方式加括号后的级数收敛即可推出 $\sum a_n$ 收敛.

2. 交换律

称 $\mathbb{N}=\{1,2,...,\}$ 上的一个双射 f 为 $\mathbb{N}$ 的一个**重排** $f:\mathbb{N}\overset{1:1}{\longleftrightarrow}\mathbb{N}$.

定理 设 $\sum a_n$ 收敛, f 是 $\mathbb{N}$ 的一个重排且 $\exists M>0, \forall n, |f(n)-n|\le M$, 则 $\sum a_{f(n)}$ 收敛.

证明 由 $\sum a_n$ 收敛, 故 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n=0$, 从而

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{j=-M}^{M} a_{n+j}=0.$$

记 S_n, T_n 分别为 $a_n, a_{f(n)}$ 的部分和, 则

$$|S_n-T_n|\le\sum_{j=-M}^{M}|a_{n+j}|,$$

这是因为下标 $<n-M$ 的项同时出现在 S_n, T_n 中, 而下标 $>n+M$ 的项不在任一部分和中.

$\square$