例

- $f_n(x) = x^n, x \in [0,1]$.
  - 当 $0 \le x < 1, f_n(x) = x^n \to 0$,
  - 当 $x = 1, f_n(1) = 1^n = 1$.

  于是 $\lim\limits_{n\to\infty} f(x) = \begin{cases} 0, & 0 \le x < 1, \\ 1, & x = 1. \end{cases}$
- 记 $\{r_n\}_{n\ge1}$ 为 $[0,1]$ 上的全体有理数. 定义 $f_n(x) = \begin{cases} 1, & x = r_1,\ldots,r_n, \\ 0, & \text{otherwise}. \end{cases}$

  此时 $\forall x \in \mathbb{Q} \cap [0,1], f(x) \to 0$. 于是 $f_n(x) \to D(x)$.

  则 $f_n(x) \in R[0,1], \lim\limits_{n\to\infty} f_n(x) \notin R[0,1]$.
- $f_n(x) = nx(1-x^2)^n, x \in [0,1]$. $\forall x \in [0,1], f_n(x) \to 0$.

$$\begin{aligned} \int_0^1 f_n(x)\,\mathrm{d}x &= \int_0^1 nx(1-x^2)^n\,\mathrm{d}x = \frac{n}{2}\int_0^1 (1-x^2)^n\,\mathrm{d}x^2 \\ &= \frac{n}{2(n+1)}(1-x^2)^{n+1}\Big|_1^0 = \frac{n}{2(n+1)} \to \frac{1}{2}, \\ \int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x &= \int_0^1 0\,\mathrm{d}x = 0, \\ \lim_{n\to\infty}\int_0^1 f_n(x)\,\mathrm{d}x &\ne \int_0^1 \lim_{n\to\infty} f_n(x)\,\mathrm{d}x. \end{aligned}$$

§2 一致收敛的概念

定义 设 $f_n(x)\ (n \ge 1), f(x)$ 在 $x \in I$ 上有定义. 若 $\forall \varepsilon > 0, \exists N, \forall n > N, \forall x \in I$,

$$|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon,$$

则称函数项序列 $\{f_n(x)\}$ 在 I 上**一致收敛**到 $f(x)$, 记为

$$f_n(x) \rightrightarrows f(x), x \in I\ (n \to \infty).$$

不一致收敛的正面刻画: $\exists \varepsilon_0 > 0, \forall N, \exists n > N, \exists x \in I, |f_n(x) - f(x)| \ge \varepsilon_0$.

例

- $f_n(x) = x^n, x \in [0,1]$.

  $\forall q \in (0,1), f_n(x) \rightrightarrows 0, x \in [0,q], \quad \because \forall x \in [0,q], x^n \le q^n \to 0$.

  取 $\varepsilon_0 = \frac{1}{2}, x_n = \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{n}}$, 则 $|f_n(x_n) - f(x_n)| = \left|\frac{1}{2} - 0\right| = \frac{1}{2} = \varepsilon$.

  $\Longrightarrow f_n(x)$ 在 $[0,1]$ 上不一致收敛.

性质

- 设 $f_n(x) \rightrightarrows f(x), x \in I$. 则 $\forall J \subset I, f_n(x) \rightrightarrows f(x), x \in J$.
- 设 $f_n(x) \rightrightarrows f(x)$ 对 $x \in I_1, x \in I_2$ 均成立, 则对 $x \in I_1 \cup I_2$ 也成立.
- 设 $f_n(x) \rightrightarrows f(x), g_n(x) \rightrightarrows g(x), x \in I$. 则 $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}$,

$$\alpha f_n(x) + \beta g_n(x) \rightrightarrows \alpha f(x) + \beta g(x), x \in I.$$

问题: 是否有 $f_n(x)g_n(x) \rightrightarrows f(x)g(x), x \in I$?

例 $f_n(x) = (1-x)x^n, x \in [0,1]$. 有 $f_n(x) \to 0, \forall x \in [0,1]$.

来证 $f_n(x) \rightrightarrows 0, x \in [0,1]$:

- 当 $x \in (1-\varepsilon, 1], (1-x)x^n < 1-x < \varepsilon$,
- 对 $x \in [0, 1-\varepsilon]$, 来找 N s.t. $\forall n > N, (1-x)x^n < \varepsilon$.

$$(1-x)x^n \le x^n \le (1-\varepsilon)^n,$$

只要 $(1-\varepsilon)^n < \varepsilon, N = \left\lceil \dfrac{\ln \varepsilon}{\ln(1-\varepsilon)} \right\rceil$, 从而当 $n > N$ 时, $\forall x \in [0,1], (1-x)x^n < \varepsilon$.

显然的事实是一列相同的函数一致收敛到自身.

令 $g_n(x) = \dfrac{1}{1-x}$, 则 $f_n(x)g_n(x) = x^n$ 不一致收敛. 这就说明上述问题的答案是否定的.

定义 设 $\{f_n(x)\}$ 为 I 上的函数序列. 若 $\exists M > 0$ s.t. $\forall x \in I, \forall n \ge 1$,

$$|f_n(x)| \le M,$$

则称 $\{f_n(x)\}$ 在 I 上**一致有界**.

定义 设 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ 为 I 上的函数项级数, $S_n(x)$ 为其部分和. 若

$$S_n(x) \rightrightarrows S(x), x \in I,$$

则称 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ 在 I 上一致收敛到 S_n.

§3 一致收敛的判别法

1. Cauchy 准则

定理 设 $\{f_n(x)\}$ 为 I 上的函数序列, 则 $f_n(x)$ 在 I 上一致收敛 $\iff \forall \varepsilon > 0, \exists N, \forall n, m > N$,

$$|f_n(x) - f_m(x)| < \varepsilon, \forall x \in I.$$

证明 $\implies$: 设 $f = \lim\limits_{n \to \infty} f_n(x)$. 由一致收敛定义

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N, \forall n > N, \forall x \in I, |f_n(x) - f(x)| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

则 $\forall n, m > N$,

$$|f_n(x) - f_m(x)| \le |f_n(x) - f(x)| + |f_m(x) - f(x)| = \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

$\impliedby$: 由条件知 $\forall x \in I, \{f_n(x)\}$ 为 Cauchy 列, 于是 $f_n(x) \to f(x) \in \mathbb{R}$.

在条件中固定 n, 并令 $m \to \infty$ 即有 $|f_n(x) - f(x)| \le \varepsilon$.

定理 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ 在 I 上一致收敛 $\iff \forall \varepsilon > 0, \exists N, \forall n, m > N$,

$$|S_n(x) - S_m(x)| < \varepsilon.$$

推论 若 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ 在 I 上一致收敛, 则 $u_n(x) \rightrightarrows 0, x \in I$.

证明　$u_n(x) = S_n(x) - S_{n-1}(x) \rightrightarrows S(x) - S(x) = 0.$ □

例　设 $f_n(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续, 且 $f_n(x) \rightrightarrows f(x), x \in (a,b)$, 则 $f_n(x)$ 在 $[a,b]$ 上也一致收敛.

证明　由 Cauchy 准则 $\forall \varepsilon > 0, \exists N, \forall n, m > N, \forall x \in (a,b)$,

$$|f_n(x) - f_m(x)| < \varepsilon.$$

在上式中固定 n, m, 令 $x \to b - 0$, 由连续性有

$$|f_n(b) - f_m(b)| \le \varepsilon.$$

从而 $\{f_n(b)\}$ 是 Cauchy 列. 同理 $\{f_n(a)\}$ 也是 Cauchy 列. □

类似的, 若 $u_n(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续, $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ 在 (a,b) 上一致收敛, 则 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ 在 $[a,b]$ 上同样一致收敛.