例 讨论 $\displaystyle\int_2^{+\infty} \ln\left(1+\frac{\sin x}{x^p}\right)\mathrm{d}x$ 的敛散性.

解 $\displaystyle\ln(1+t)=t-\frac{t^2}{2}+o(t^2), \ln\left(1+\frac{\sin x}{x^p}\right)=\frac{\sin x}{x^p}-\frac{\sin^2 x}{2x^{2p}}+o\left(\frac{1}{x^{2p}}\right) \quad (x\to+\infty).$
于是

$$\int_2^{+\infty} \ln\left(1+\frac{\sin x}{x^p}\right)\mathrm{d}x=\int_2^{+\infty}\left(\frac{\sin x}{x^p}-\frac{\cos 2x}{4x^{2p}}+\left(o(1)-\frac{1}{4}\right)\frac{1}{x^{2p}}\right)\mathrm{d}x.$$

其中 $\displaystyle\int_2^{+\infty}\frac{\sin x}{x^p}\mathrm{d}x$ 由 Dirichlet 定理收敛. 关于绝对收敛性:

- $p>1$ 时 $\displaystyle\left|\frac{\sin x}{x^p}\right|\le\frac{1}{x^p}$ 收敛,
- $p\le 1$ 时 $\displaystyle\left|\frac{\sin x}{x^p}\right|\ge\frac{\sin^2 x}{x^p}=\frac{1-\cos 2x}{2x^p}=\frac{1}{2x^p}-\frac{\cos 2x}{2x^p}$,

后一项收敛, 因此该项发散.

对其他几项进行讨论即得

- $0<p\le\dfrac{1}{2}$ 时 I_1, I_2 条件收敛, I_3 发散 $\Longrightarrow I$ 发散,
- $\dfrac{1}{2}<p\le 1$ 时 I_1 条件收敛, I_2, I_3 绝对收敛 $\Longrightarrow I$ 条件收敛,
- $p>1$ 时 I_1, I_2, I_3 均绝对收敛 $\Longrightarrow I$ 绝对收敛.

注意到 $\displaystyle\ln\left(1+\frac{\sin x}{x^p}\right)\sim\frac{\sin x}{x^p}$, 但两者敛散性不完全一致, 因此不能对可正可负的函数应用比较判别法.

§3 瑕积分

定义 设 f 在 $(a,b]$ 上有定义, 且 $\forall\delta>0, f$ 在 $[a+\delta,b]$ 上 Riemann 可积. 若极限 $\displaystyle\lim_{\delta\to0^+}\int_{a+\delta}^b f(x)\,\mathrm{d}x$ 存在, 则称积分 $\displaystyle\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ 收敛, 且记

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x=\lim_{\delta\to0^+}\int_{a+\delta}^b f(x)\,\mathrm{d}x.$$

瑕积分和反常积分敛散性的判别标准是类似的.

定理 (Cauchy)

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \text{ 收敛} \iff \forall\varepsilon>0, \exists\delta>0 \text{ s.t. } \forall x', x''\in(a,a+\delta), \left|\int_{x_1}^{x_2} f(x)\,\mathrm{d}x\right|<\varepsilon.$$

定理 $\displaystyle\int_a^b |f(x)|\,\mathrm{d}x$ 收敛 $\Longrightarrow \displaystyle\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ 收敛.

绝对/条件收敛的定义, 非负函数的比较判别法, 以及 Dirichlet/Abel 判别法的表述都是类似的.

定义 设 $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\int_{-x}^x f(x)\,\mathrm{d}x$ 存在, 则称其为 **Cauchy 主值积分**, 记为

$$\text{V.P.}\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x.$$

若 f 有原函数 F, 则瑕积分也可以写成 F 的形式:

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \lim_{x\to b^-} F(x) - F(a) = F(b-0) - F(a).$$

例 $F(x) = x\sin\dfrac{1}{x}, x\in(0,1]$. 则 $f(x) = F'(x) = \sin\dfrac{1}{x} - \dfrac{1}{x}\cos\dfrac{1}{x}, x\in(0,1]$.
此时 $\displaystyle\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x = F(1) - F(0+0) = \sin 1$.

例 求 $\displaystyle\int_{-1}^1 \frac{\arccos x}{\sqrt{1-x^2}}\,\mathrm{d}x$.

解 $\dfrac{\arccos x}{\sqrt{1-x^2}}$ 在 $x=1$ 处是 $\dfrac{0}{0}$ 型极限, $\displaystyle\lim_{x\to1^-}\frac{\arccos x}{\sqrt{1-x^2}} = \lim_{x\to1^-}\frac{-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}}{\frac{1}{2}\frac{2x}{\sqrt{1-x^2}}} = 1$, 因而是正常积分.
而在 $x=-1$ 时确为瑕点. 计算本身并不复杂,

$$I = -\int_{-1}^1 \arccos x\,\mathrm{d}\arccos x = -\frac{1}{2}(\arccos x)^2\bigg|_{-1}^1 = \frac{\pi^2}{2}.$$

例 讨论 $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{x^p}\,\mathrm{d}x\ (p>0)$ 的敛散性.

- $0<p<1$ 时 $I = \dfrac{1}{1-p}x^{1-p}\bigg|_0^1 = \dfrac{1}{1-p}$,
- $p=1$ 时 $I = \ln x\Big|_0^1 = +\infty$,
- $p>1$ 时 $I = \dfrac{1}{1-p}x^{1-p}\bigg|_0^1 = +\infty$.

例 讨论 $\displaystyle\int_0^1 \frac{\sin\frac{1}{x}}{x^p}\,\mathrm{d}x$ 的敛散性.

解

$$\int_0^1 \frac{\sin\frac{1}{x}}{x^p}\,\mathrm{d}x = \int_{+\infty}^1 \frac{\sin t}{t^{-p}}\left(-\frac{1}{t^2}\right)\mathrm{d}t = \int_1^{+\infty}\frac{\sin t}{t^{2-p}}\,\mathrm{d}t.$$

于是 $p<1$ 时绝对收敛, $1\le p<2$ 时条件收敛.

定理 (Riemann-Lebesgue) 设 f 在 $[a,b]$ 上可积（或 f 有瑕点时要求 $|f|$ 可积）, 则

$$\lim_{n\to+\infty}\int_a^b f(x)\sin nx\,\mathrm{d}x = 0.$$

证明 先讨论 $f\in C^1[a,b]$ 的情形.

$$\int_a^b f(x)\sin nx\,\mathrm{d}x = -\frac{1}{n}f(x)\cos nx\bigg|_a^b - \frac{1}{n}\int_a^b f'(x)\cos nx\,\mathrm{d}x,$$

其中 $f'(x)$ 和 $\cos nx$ 均有界, 故 $n\to+\infty$ 时积分项 $\to 0$.

对于一般情形, 总能用连续可微函数 g 近似 f 并使得误差 $<\varepsilon$.

$$\left|\int_a^b f(x)\sin nx\,\mathrm{d}x\right| \le \left|\int_a^b g(x)\sin nx\,\mathrm{d}x\right| + \left|\int_a^b (f(x)-g(x))\sin nx\,\mathrm{d}x\right| \le 2\varepsilon.$$