定理 (Dini) 设 $f_n(x) \in C[a,b]$, 且 $\forall x \in [a,b], f_n(x) \le f_{n+1}(x)$, 且 $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x) = f(x)$. 则

$$f(x) \in C[a,b] \iff f_n(x) \rightrightarrows f(x), x \in [a,b].$$

定理' 设 $u_n(x) \in C[a,b]$, 且 $\forall x \in [a,b], u_n(x) \ge 0$, 且 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ 收敛，则

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x) \in C[a,b] \iff \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x) \rightrightarrows S(x), x \in [a,b].$$

例 证明 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} x^n \dfrac{\ln x}{1+\left|\ln\ln\frac{1}{x}\right|}$ 在 $x \in (0,1)$ 一致收敛。

证明 Dini 定理仅适用于闭区间，无法直接运用。

令 $u_n(x) = x^n \dfrac{\ln x}{1+\left|\ln\ln\frac{1}{x}\right|}$, $\lim\limits_{x\to 0^+} u_n(x) = 0$, $\lim\limits_{x\to 1^-} u_n(x) = 0$. 若补充定义 $u_n(0) = u_n(1) = 0$, 则 $u_n(x)$ 是 $(0,1)$ 上的连续函数。对于 $x \in (0,1)$, $\sum u_n(x)$ 收敛于

$$S(x) = \frac{x}{1-x} \cdot \frac{\ln x}{1+\left|\ln\ln\frac{1}{x}\right|},$$

补充定义 $S(0) = S(0+0) = 0, S(1) = S(1-0) = 0$. 此时 $\sum u_n(x) = S(x), x \in [0,1]$.

$u_n(x), S(x) \in C[0,1], u_n(x) \le 0$. 由 Dini 定理 $\sum u_n(x)$ 在 $[0,1]$ 一致收敛到 $S(x)$. □

注 不能用 M 判别法说明一致收敛性。

$x^n \dfrac{|\ln x|}{1+\left|\ln\ln\frac{1}{x}\right|} \le M_n \Longrightarrow M_n \ge \left|u_n\left(1-\dfrac{1}{n}\right)\right| = \left(1-\dfrac{1}{n}\right)^n \dfrac{\left|\ln\left(1-\frac{1}{n}\right)\right|}{1+\left|\ln\ln\left(1+\frac{1}{n-1}\right)\right|}$,

$\dfrac{u_n\left(1-\frac{1}{n}\right)}{\frac{1}{n\ln n}} = e^{-1}$, 于是 $\sum M_n$ 发散，无法使用 M 判别法判别一致收敛。

极限函数连续性为交换求极限顺序提供了通路：对于 $f_n, f \in C[a,b]$,

$$\lim_{x\to x_0}\lim_{n\to\infty} f_n(x) = \lim_{n\to\infty}\lim_{x\to x_0} f_n(x).$$

对于开区间的情形，设 $f_n(x) \rightrightarrows f(x), x \in [a,b)$, 则

$$\lim_{x\to b^-}\lim_{n\to\infty} f_n(x) = \lim_{n\to\infty}\lim_{x\to b^-} f_n(x).$$

例 设 $\{x_n\}$ 为互不相同的点列，则 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{\operatorname{sgn}(x-x_n)}{2^n}$ 在 $x \notin \{x_i\}$ 连续，在 $x \in \{x_i\}$ 间断。

证明 当 $x^* \notin \{x_i\}$, 则 x^* 为 $u_n(x)$ 的连续点，$\lim\limits_{x\to x^*} u_n(x) = u_n(x^*)$, 从而 $S(x^*) = \lim\limits_{x\to x^*} S(x)$.
否则设 $x = x_k$, 则 $S_k(x)$ 在 x_k 间断，$\sum\limits_{n=k+1}^{\infty} u_n(x)$ 在 x_k 连续。 □

*一类更强的连续性条件：

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0 \text{ s.t. } \forall x', x'', |x'-x''| < \delta, \forall n \ge 1, |f_n(x') - f_n(x'')| < \varepsilon,$$

则称 $\{f_n(x)\}$ 为等度连续和。(Arzene-Ascoli 定理)

极限函数的积分

定理 设 $f_n(x) \rightrightarrows f(x), x \in [a,b]$. 若 $f_n \in R[a,b]$, 则 $f \in R[a,b]$, 且

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \lim_{n\to\infty}\int_a^b f_n(x)\,\mathrm{d}x.$$

证明 为了证明 $f \in R[a,b]$, 只要证 $\forall \varepsilon > 0, \exists \Delta, \sum w_i(f)\Delta x_i < \varepsilon$.

$\forall \varepsilon > 0$, 由 $f_n(x) \rightrightarrows f(x), x \in [a,b]$ 知 $\exists N, \forall n \geq N, |f_n(x) - f(x)| < \frac{\varepsilon}{4(b-a)}$, 取 $n = N$ 时也成立。又 $f_N \in R[a,b], \exists \Delta$ s.t. $\sum w_i(f_N)\Delta x_i < \frac{\varepsilon}{4}$. 此时 $w_i(f) \leq w_i(f_N) + \frac{\varepsilon}{2(b-a)}$, 于是

$$\sum w_i(f)\Delta x_i \leq \sum \left(w_i(f) + \frac{\varepsilon}{2(b-a)} \right) \Delta x_i < \frac{\varepsilon}{4} + \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon.$$

$\forall \varepsilon > 0$, 对于上述 $N, \forall n > N$,

$$\left| \int_a^b f_n(x)\,\mathrm{d}x - \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \right| \leq \int_a^b |f_n(x) - f(x)|\,\mathrm{d}x \leq \frac{\varepsilon}{4(b-a)} \int_a^b \mathrm{d}x = \frac{\varepsilon}{4}.$$

□

定理' 设 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ 在 $[a,b]$ 上一致收敛，且 $u_n(x) \in R[a,b]$, 则 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(x) \in R[a,b]$, 且

$$\int_a^b \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)\,\mathrm{d}x = \sum_{n=1}^{\infty} \int_a^b u_n(x)\,\mathrm{d}x.$$

例 $\forall x \in (-1,1), \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n} = -\ln(1-x)$.

证明 $\forall x_0 \in (-1,1)$, 取 $r \in (0,1)$ s.t. $x_0 \in [-r,r]$. 则 $\sum x^n$ 在 $x \in [-r,r]$ 一致收敛到 $\frac{1}{1-x}$,

$$\int_0^{x_0} \sum_{n=0}^{\infty} x^n\,\mathrm{d}x = \sum_{n=0}^{\infty} \int_0^{x_0} x^n\,\mathrm{d}x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x_0^{n+1}}{n+1} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x_0^n}{n} = \int_0^{x_0} \frac{1}{1-x}\,\mathrm{d}x = -\ln(1-x_0).$$

□

极限函数的导数

定理 设 $f_n(x)$ 在 $[a,b]$ 上有定义，且

- $\exists x_0 \in [a,b]$ s.t. $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x_0)$ 存在,
- f_n 在 $[a,b]$ 上可导，且 $f_n(x) \rightrightarrows g(x), x \in [a,b]$,

则 $\exists [a,b]$ 上的函数 f s.t. $f_n(x) \rightrightarrows f(x), x \in [a,b]$, 且 $f'(x) = g(x), \forall x \in [a,b]$.

证明 首先证 $\forall \varepsilon > 0, \exists N, \forall n, m > N, |f_n(x) - f_m(x)| < \varepsilon, \forall x \in [a,b]$.

令 $\varphi_{n,m}(x) = f_n(x) - f_m(x)$, 则

$$\varphi_{n,m}(x) = \varphi_{n,m}(x_0) + \varphi'_{n,m}(\xi)(x - x_0).$$

由条件 $\exists N, \forall n, m > N$,

$$|\varphi_{n,m}(x_0)| = |f_n(x_0) - f_m(x_0)| < \frac{\varepsilon}{2},$$
$$|\varphi'_{a,b}(x)| = |f'_n(x) - f'_m(x)| < \frac{\varepsilon}{2(b-a)}.$$

此时

$$|f_n(x) - f_m(x)| = |\varphi_{n,m}(x)| \leq |\varphi_{n,m}(x_0)| + |\varphi'_{n,m}(\xi)(x - x_0)| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

下一性质留待下节课证明。