

第九章 数项级数

§1 数项级数的概念

设有序列 $\{a_n\}_{n=1}^{+\infty}$, 称表达式 $a_1 + a_2 + \dots + a_n + \dots$ 为数项级数, 记为 $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ 其中 a_n 称为级数的通项, 记 $S_n = a_1 + \dots + a_n$ 为前 n 项的部分和。

定义 设有级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$.

• 若其前 n 项的部分和序列 $\{S_n\}_{n=1}^{+\infty}$ 收敛, 则称级数 $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ 收敛。若 $S = \lim_{n \rightarrow \infty} S_n$, 则记 $S = \sum_{n=1}^{\infty} a_n$.

• 相应地若 $\{S_n\}$ 发散, 则称 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 发散。特别地若 $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \infty$, 则称 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 发散到 ∞ , 记为 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \infty$.

经典的数项级数:

• **等比级数:** $q \in \mathbb{R}, \{q^n\}_{n=0}^{\infty}$ 是一等比数列。讨论该数项级数的敛散性:

$$S_n = q^0 + \dots + q^{n-1} = \begin{cases} \frac{1-q^n}{1-q}, & q \neq 1 \\ n, & q = 1 \end{cases}.$$

▸ $q = 1$ 时 $S_n = n \rightarrow +\infty$ 发散。

▸ $|q| < 1$ 时 $q^n \rightarrow 0, S_n \rightarrow \frac{1}{1-q}$ 收敛。

▸ $q = -1$ 时 $S_n = \frac{1 - (-1)^n}{2}$ 发散。

▸ $|q| > 1$ 时 $q^n \rightarrow \infty, S_n \rightarrow \infty$ 发散。

例 求 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+2)}$.

解 $S_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k(k+2)} = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+2} \right) = \frac{1}{2} \left(1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2} \right) \rightarrow \frac{3}{4}$.

例 证明 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!} = e$.

证明 根据定义 $e > \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \frac{1}{n^k} = \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!} \left(1 - \frac{1}{n}\right) \dots \left(1 - \frac{k-1}{n}\right)$.

任意固定 k 并令 $n \rightarrow \infty$ 即得

$$e \geq 1 + 1 + \frac{1}{2!} + \dots + \frac{1}{k!}, \quad \forall k \geq 1.$$

从通项公式可以看出

$$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n < \underbrace{1 + 1 + \frac{1}{2!} + \dots + \frac{1}{n!}}_{S_n} \leq e,$$

利用夹逼定理即知 $S_n \rightarrow e$.

□

基本性质

• **线性性** 若 $\sum a_n$ 与 $\sum b_n$ 都收敛, 则 $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}, \sum(\alpha a_n + \beta b_n)$ 也收敛, 且

$$\sum(\alpha a_n + \beta b_n) = \alpha \sum a_n + \beta \sum b_n.$$

另外当 $\alpha \neq 0$ 时 $\sum a_n$ 与 $\sum \alpha a_n$ 同时收敛或发散。

• **定理 (级数收敛的 Cauchy 准则)** $\sum a_n$ 收敛 $\iff \forall \varepsilon > 0, \exists N, \forall n > m > N, \left| \sum_{k=m}^n a_k \right| < \varepsilon$.

• **例** $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ 发散, 称为**调和级数**。这是因为 $\sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{k} \geq \frac{n}{2n} = \frac{1}{2} = \varepsilon_0$.

• **命题** $\sum a_n$ 收敛 $\implies \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$.

$\because \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} (S_n - S_{n-1}) = S - S = 0$.

例 $\sum_{n=1}^{\infty} n \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right)$ 发散, $\because n \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) = n\left(\frac{1}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right)\right) = 1 + o(1) \rightarrow 1$.

§2 正项级数

若 $\sum |a_n|$ 收敛, 则称 $\sum a_n$ 绝对收敛。

定理 若 $\sum a_n$ 绝对收敛, 则 $\sum a_n$ 收敛。 $\because \left| \sum_{k=m}^n a_k \right| \leq \sum_{k=m}^n |a_k| < \varepsilon$.

若 $a_k \geq 0$, 则称 $\sum a_n$ 为**正项级数**。此时

$$S_{n+1} = S_n + a_{n+1} \geq S_n.$$

命题 设 $\sum a_n$ 为正项级数, 则 $\sum a_n$ 收敛 $\iff S_n$ 有界。

定理 设 $\sum a_n, \sum b_n$ 为正项级数, 且 $a_n \leq b_n, \forall n \geq 1$. 则 $\sum b_n$ 收敛 $\implies \sum a_n$ 收敛。

若 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} = c \geq 0$, $\begin{cases} c = 0, & \sum b_n \text{ 收敛} \implies \sum a_n \text{ 收敛}, \\ 0 < c < \infty, & \text{同时敛散}, \\ c = \infty, & \sum b_n \text{ 发散} \implies \sum a_n \text{ 发散}. \end{cases}$

例 讨论 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$ ($p > 0$) 的敛散性。

• $p = 1$ 时 $\sum \frac{1}{n}$ 发散。

• $0 < p < 1$ 时 $\frac{1}{n^p} > \frac{1}{n}$, $\sum \frac{1}{n}$ 发散 $\implies \sum \frac{1}{n^p}$ 发散。

• $p > 1$ 时

$$\begin{aligned} S_{2^p-1} &= 1 + \left(\frac{1}{2^p} + \frac{1}{3^p}\right) + \dots + \left(\frac{1}{(2^{p-1})^p} + \dots + \frac{1}{(2^p-1)^p}\right) \\ &\leq 1 + \frac{2}{2^p} + \dots + \frac{2^{p-1}}{(2^{p-1})^p} \leq \frac{1}{1-q}, \end{aligned}$$

其中 $q = \frac{1}{2^{p-1}} < 1$. 故此时正项级数收敛。

例 $\sum_{n=1}^{\infty} \ln \cos \frac{\pi}{n}$.

其中

$$\ln \cos \frac{\pi}{n} \sim \cos \frac{\pi}{n} - 1 \sim -\frac{1}{2} \frac{\pi^2}{n^2},$$

即 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{-\ln \cos \frac{\pi}{n}}{\frac{1}{2} \frac{\pi^2}{n^2}} = 1$. 由 $\sum \frac{1}{n^2}$ 收敛可知 $\sum \ln \cos \frac{\pi}{n}$ 收敛。

例 $\sum_{n=1}^{\infty} \left(1 - \left(\frac{n-1}{n+1} \right)^k \right)^p$.

其中

$$\begin{aligned} \left(1 - \left(\frac{n-1}{n+1} \right)^k \right)^p &= \left(1 - \left(1 - \frac{2}{n+1} \right)^k \right)^p \\ &= \left(1 - \left(1 - \frac{2k}{n+1} + o\left(\frac{1}{n}\right) \right) \right)^p \\ &= \left(\frac{2k}{n+1} \right)^p + o\left(\frac{1}{n^p}\right). \end{aligned}$$

于是归结为讨论 $\sum \frac{1}{n^p}$ 的敛散性。

例 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^{n-2}}{e^n n!}$. 这里可以利用 Stirling 公式 $n! \sim \sqrt{2\pi n} \left(\frac{n}{e}\right)^n$.

例 设 $a_n \in (0, 1)$, 且 $\sum n a_n$ 收敛. 证明: $\sum_{n=1}^{\infty} a_n \ln a_n$ 收敛。

观察两个级数, 猜测要比较 n 和 $-\ln a_n$, 即验证 $a_n \sim e^{-n}$.

$$\begin{aligned} \sum -a_n \ln a_n &= \sum_{a_n \geq e^{-n}} a_n (-\ln a_n) + \sum_{a_n < e^{-n}} -a_n \ln a_n \\ &\leq \sum_{a_n \geq e^{-n}} n a_n + \sum_{a_n < e^{-n}} -a_n \ln a_n, \end{aligned}$$

其中

$$\begin{aligned} \sum_{a_n < e^{-n}} -a_n \ln a_n &= \sum_{a_n < e^{-n}} \sqrt{a_n} \sqrt{a_n} (-\ln a_n) \\ &\leq \sum_{a_n < e^{-n}} e^{-\frac{n}{2}} (-\sqrt{a_n} \ln a_n) \quad (x^p \ln x \rightarrow 0) \end{aligned}$$

两个求和式均收敛。

下面介绍两个正项级数敛散性的判别法:

定理 (D'Alembert) 设有正项级数 $\sum a_n$ ($a_n \geq 0$),

• $r = \overline{\lim} \frac{a_{n+1}}{a_n} < 1$ 时, $\sum a_n$ 收敛。

• $r' = \underline{\lim} \frac{a_{n+1}}{a_n} > 1$ 时, $\sum a_n$ 发散。

证明 取 $r_1 \in (r, 1)$, 则 $\exists N, \forall n \geq N, \frac{a_{n+1}}{a_n} \leq r_1$. 此时 $\frac{a_{n+1}}{a_N} \leq r_1^{N-n+1}$, 即 $a_{n+1} \leq r_1^{N-n+1} a_N$.

由比较判别法知 $\sum a_n$ 收敛. $r' > 1$ 时的证明几乎一致。□