5. 已知截面面积的立体体积

已知过 $x = x_0$ 的平面截立体的截面面积为 $A(x)$, 记立体 Ω 在 $x \in [a,x]$ 部分的体积为 $V(x)$. 此时近似有

$$V(x+\Delta x) - V(x) = A(x)\Delta x,$$
$$\Longrightarrow V'(x) = A(x), \quad V = V(b) - V(a) = \int_a^b A(x)\,\mathrm{d}x.$$

祖暅原理是这个公式的直接推论：$A(x)$ 相同的立体体积均相等.

6. 旋转体的体积

将曲边梯形 $S : x \in [a,b], 0 \le y \le f(x)$ 绕 x 周旋转一周得到的立体称为旋转体 Ω. 根据上一节的结论有

$$A(x) = \pi f^2(x), \quad V = \pi \int_a^b f^2(x)\,\mathrm{d}x.$$

例 求椭球体 $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} + \dfrac{z^2}{c^2} = 1$ 的体积.

解 可以将上述椭球体看成曲边梯形

$$\frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} \le 1 - \frac{x^2}{a^2}$$

所对应的旋转体, 相应地其截面积和体积为

$$A(x) = \pi bc\left(1 - \frac{x^2}{a^2}\right),$$
$$V = \int_{-a}^{a} A(x)\,\mathrm{d}x = \pi bc \int_{-a}^{a}\left(1 - \frac{x^2}{a^2}\right)\mathrm{d}x = \pi bc\left(x - \frac{x^3}{3a^2}\right)\Bigg|_{-a}^{a} = \frac{4}{3}\pi abc.$$

7. 曲线弧长

给定参数方程决定的曲线 $\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases}, \alpha \le t \le \beta, x(t), y(t) \in C[\alpha,\beta]$. 利用分割 Δ 近似曲线弧长为

$$\ell(\Delta) = \sum_{i=1}^{n} \left|\overline{M_{i-1}M_i}\right|, \quad M_i = (x(t_i), y(t_i)).$$

若 $\sup\limits_{\Delta} \ell(\Delta) < \infty$, 则称曲线 γ 是可求长的. 不可求长曲线的例子包括

$$y = x\sin\frac{1}{x}, x \in [0,1]; \quad \text{Koch 雪花曲线}.$$

记 $L(t)$ 为曲线在 $[\alpha, t]$ 之间的长度, 则

$$
\begin{aligned}
L(t+\Delta t)-L(t) &= \left|\overline{M_{t+\Delta t}M_t}\right| = \sqrt{(x(t+\Delta t)-x(t))^2+(y(t+\Delta t)-y(t))^2} \\
&\approx \sqrt{(x'(t)\Delta t)^2+(y'(t)\Delta t)^2} \\
&= \sqrt{x'(t)^2+y'(t)^2}\Delta t \quad (\text{默认 } \Delta t>0, \text{注意积分上下限带来的正负号问题}) \\
&\Longrightarrow L'(t)=\sqrt{x'(t)^2+y'(t)^2}, L(t)=\int_a^t L'(t)\,\mathrm{d}t.
\end{aligned}
$$

对于以 $y=f(x)$ 形式给出的曲线, 可以取参数方程 $\begin{cases} x=t \\ y=f(t) \end{cases}$, 其弧长公式即为

$$
L(t)=\int_a^b \sqrt{1+(y')^2}\,\mathrm{d}x.
$$

类似地, 对于极坐标系曲线 $r=r(\theta)$, 取参数方程 $\begin{cases} x=r(\theta)\cos\theta \\ y=r(\theta)\sin\theta \end{cases}$ 即得

$$
\begin{cases} x'(\theta)=r'(\theta)\cos\theta-r(\theta)\sin\theta \\ y'(\theta)=r'(\theta)\sin\theta+r(\theta)\cos\theta \end{cases}
$$

$$
x'(\theta)^2+y'(\theta)^2=r'(\theta)^2+r(\theta)^2,
$$

$$
\Longrightarrow L=\int_\alpha^\beta \sqrt{r'(\theta)^2+r(\theta)^2}\,\mathrm{d}\theta.
$$

8. 旋转体的侧面积

采取微元法分析一小段 Δx 对应的侧面积:

$$
\Delta S(x)=2\pi f(x)\Delta s=2\pi f(x)\sqrt{1+(f')^2}\Delta x,
$$

$$
\Longrightarrow S=\int_a^b 2\pi f\sqrt{1+(f')^2}\,\mathrm{d}x,
$$

相应的参数方程版本即为

$$
S=\int_a^b 2\pi y\sqrt{(x')^2+(y')^2}\,\mathrm{d}t.
$$

例 求球面 $x^2+y^2+z^2=r^2$ 的表面积.

解 相应的曲边梯形为

$$
\begin{cases} x=r\cos\theta \\ y=r\sin\theta \end{cases}, \quad \theta\in[0,\pi].
$$

于是表面积为

$$
S=\int_0^\pi 2\pi y\sqrt{(x')^2+(y')^2}\,\mathrm{d}\theta=\int_0^\pi 2\pi r^2\sin\theta\,\mathrm{d}\theta=4\pi r^2.
$$

第八章 广义积分

在应用的定积分的换元法时, 经常会出现积分上下限异常的情形, 例如

$$
\int_0^1 \sin\frac{1}{t}\,\mathrm{d}t \overset{u=\frac{1}{t}}{=} \int_1^{+\infty}\frac{\sin u}{u^2}\,\mathrm{d}u.
$$

这不是我们已经定义的闭区间上的定积分, 因此我们需要拓展我们的定义来研究这类积分.

定义 设 f 在 $[a,+\infty)$ 上有定义且 $\forall x>a, f\in R[a,x]$.

若 $\lim\limits_{x\to+\infty}\displaystyle\int_a^x f(x)\,\mathrm{d}x$ 存在, 则称 f 在 $[a,+\infty)$ 上的广义积分收敛, 记

$$\int_a^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x=\lim_{x\to+\infty}\int_a^x f(x)\,\mathrm{d}x,$$

否则称 $\displaystyle\int_a^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x$ 发散.