§4 原函数与定积分的计算

已知 $f \in C[a,b] \Longrightarrow \exists \Phi(x) = \int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t, \Psi(x) = \int_x^b f(t)\,\mathrm{d}t, \forall x \in [a,b]$. 但是有些函数的原函数存在.按照黎曼积分的定义却不可积:

例

$$F(x) = \begin{cases} x^2 \sin \frac{1}{x^2}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}, \quad f(x) = F'(x) = \begin{cases} 2x \sin \frac{1}{x^2} - \frac{2}{x} \cos \frac{1}{x^2}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}.$$

f 在 $x = 0$ 附近无界.按照黎曼积分的定义不存在定积分.但是确实存在相应的原函数.

另外 Φ, Ψ 满足 $\Phi'(x) = f(x), \Psi'(x) = -f(x)$. 对于变上限积分是关于 f 的函数的情形, 应用复合函数求导公式即得

$$(\Phi(f(x)))' = \Phi'(f(x)) \cdot f'(x).$$

变上下限积分也总能写成 Φ 或 Ψ 做差的结果.

例 $\left(\int_x^{x^2} e^{t^2}\,\mathrm{d}t\right)' = \left(\int_0^{x^2} e^{t^2}\,\mathrm{d}t - \int_0^x e^{t^2}\,\mathrm{d}t\right)' = 2xe^{x^2} - e^{x^2}.$

2. 定积分的计算

不定积分中的换元法和分部积分法依然有效, 其表述也是类似的.

定理（换元法） 设 $f \in C[a,b], \varphi$ 在 $[\alpha,\beta]$ 上有连续导数且 $\varphi(\alpha) = a, \varphi(\beta) = b, \varphi([\alpha,\beta]) \subset [a,b]$, 则

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \int_\alpha^\beta f(\varphi(t))\varphi'(t)\,\mathrm{d}t.$$

式子中向左推导为第一换元法, 向右推导即为第二换元法.

证明 令 $\Phi(x) = \int_a^x f(x)\,\mathrm{d}x, (\Phi(\varphi(t)))' = \Phi'(\varphi(t))\varphi'(t) = f(\varphi(t))\varphi'(t)$.
于是 $\text{LHS} = \Phi(b) - \Phi(a) = \Phi(\varphi(\beta)) - \Phi(\varphi(\alpha)) = \text{RHS}$. ■

推论

1. f 是偶函数 $\Longrightarrow \int_{-a}^a f(x)\,\mathrm{d}x = 2\int_0^a f(x)\,\mathrm{d}x$.

   $\because \int_{-a}^a f(x)\,\mathrm{d}x = \int_{-a}^0 f(x)\,\mathrm{d}x + \int_0^a f(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^0 f(t)(-\mathrm{d}t) + \int_0^a f(x)\,\mathrm{d}x = 2\int_0^a f(x)\,\mathrm{d}x.$
2. f 是奇函数 $\Longrightarrow \int_{-a}^a f(x)\,\mathrm{d}x = 0$.

   $\because \int_{-a}^a f(x)\,\mathrm{d}x = \int_{-a}^0 f(x)\,\mathrm{d}x + \int_0^a f(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^0 f(-t)(-\mathrm{d}t) + \int_0^a f(x)\,\mathrm{d}x = 0.$

例 求

$$\int_{-a}^a \sqrt{a^2 - x^2}\,\mathrm{d}x.$$

解

$$
\begin{aligned}
\int_{-a}^{a} \sqrt{a^2-x^2}\,\mathrm{d}x &= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} a^2\cos^2 t\,\mathrm{d}t \\
&= 2a^2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 t\,\mathrm{d}t \\
&= 2a^2\int_{\frac{\pi}{2}}^{0} \sin^2 t(-\mathrm{d}t) \\
&= 2a^2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 t\,\mathrm{d}t \\
&= \frac{1}{2}\cdot 2a^2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \mathrm{d}t \\
&= \frac{\pi a^2}{2}.
\end{aligned}
$$

定义 若 $f \in C(-\infty,\infty), \exists T>0, \forall a, f(a+T)=f(a)$, 则称 f 为**周期函数**, 并称 T 为 f 的一个**周期**.

命题 沿用定义中的符号.有

$$
\int_a^{a+T} f(x)\,\mathrm{d}x = \int_0^T f(x)\,\mathrm{d}x.
$$

证明

$$
\int_a^{a+T} f(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^T f(x)\,\mathrm{d}x + \int_T^{a+T} f(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^T f(x)\,\mathrm{d}x + \int_0^a f(x)\,\mathrm{d}x = \int_0^T f(x)\,\mathrm{d}x. \blacksquare
$$

例 求

$$
I = \int_0^{\pi} \frac{x\sin x}{1+\cos^2 x}\,\mathrm{d}x.
$$

解

$$
\begin{aligned}
I &= \int_0^{\pi} \frac{x\sin x}{1+\cos^2 x}\,\mathrm{d}x \\
&= \int_{\pi}^{0} \frac{(\pi-x)\sin x}{1+\cos^2 x}(-\mathrm{d}x) \\
&= \frac{\pi}{2}\cdot\int_0^{\pi} \frac{\sin x}{1+\cos^2 x}\,\mathrm{d}x \\
&= -\frac{\pi}{2}\cdot \arctan(\cos x)\ |_0^{\pi} \\
&= \frac{\pi^2}{4}.
\end{aligned}
$$

定理（分部积分法） 设 u, v 在 $[a,b]$ 可导.$u', v' \in R[a,b]$, 则

$$
\int_a^b (u'v)(x)\,\mathrm{d}x = (uv)|_a^b - \int_a^b (uv')(x)\,\mathrm{d}x.
$$

证明 利用 $(uv)' = u'v + uv'$ 和牛顿-莱布尼茨公式即证. ■