## §3 级数的乘法

已经定义了 $\sum a_n$ 和 $\sum b_n$ 的乘积矩阵.

**定理** 设 $\sum a_n, \sum b_n$ 均绝对收敛, 则 $\sum a_n$ 与 $\sum b_n$ 的乘积矩阵任一排列构成的级数都绝对收敛., 并且和为 $(\sum a_n)(\sum b_n)$.

**证明** 已经证明了绝对收敛性. 来证和为 $(\sum a_n)(\sum b_n)$. 由于任一排列构成的级数都绝对收敛, 只要求其中一种排列加括号之后的级数之和. 因而

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_{kn} b_{jn} = \sum_{n=1}^{\infty} d_n = \left(\sum_{n=1}^{\infty} a_n\right)\left(\sum_{n=1}^{\infty} b_n\right).$$

**例** $\alpha > 0$, 考虑级数 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^\alpha}$ 自乘的 Cauchy 乘积.

**解** $\displaystyle c_n = \sum_{k=1}^{n} a_k a_{n+1-k} = \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k-1}}{k^\alpha} \cdot \frac{(-1)^{n-k}}{(n-k+1)^\alpha} = (-1)^{n-1} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{(k \cdot (n-k+1))^\alpha}.$

- $\alpha \le \dfrac{1}{2}$ 时

$$|c_n| \ge \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k(n+1-k)}} \ge \frac{2n}{n+1} \to 2.$$

  因此 $\sum c_n$ 发散.

- $\alpha = 1$ 时

$$c_n = \frac{(-1)^{n-1}}{n+1} \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{1}{k} + \frac{1}{n-k+1}\right) = \frac{2 \cdot (-1)^{n-1}}{n+1} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k},$$

  事实上此时 $\sum c_n$ 收敛, 且收敛到 $\left(\sum a_n\right)^2 = (\ln 2)^2$.

**定理 (Mertens)** 设 $\sum a_n$ 绝对收敛, $\sum b_n$ 收敛, 则 Cauchy 乘积收敛到 $(\sum a_n)(\sum b_n)$.

**证明** 记 $A_n, B_n, C_n$ 分别表示 $a_n, b_n, c_n$ 的部分和, 且 $A_n \to A, B_n \to B$. 要证 $C_n \to AB$.

$$C_n - AB = C_n - A_n B + A_n B - AB,$$

$$C_n = \sum_{k=1}^{n} c_k = \sum_{k=1}^{n} \sum_{i=1}^{k} a_i b_{k-i+1} = \sum_{k=1}^{n} a_k B_{n-k+1},$$

$$C_n - AB = \sum_{k=1}^{n} a_i (B_{n-k+1} - B).$$

考虑在 $k$ 较小时用 $B_n \to B$ 控制, $k$ 较大时用 $a_n \to 0$ 控制.

记 $M = \sup\left\{\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|, |B_i - B|\right\}$. $\forall \varepsilon > 0, \exists N$ s.t. $\forall n > N, |B_n - B| < \varepsilon$.

另外由 $a_n \to 0, \exists N', \forall k \ge N', |a_k| < \dfrac{\varepsilon}{N}$. 当 $n - N + 1 \ge N'$ 时

$$a_1 (B_n - B) + \ldots + a_{n-N} (B_{N+1} - B) < \varepsilon \sum_{k=1}^{n-N} a_n,$$

$$a_{n-N+1} (B_N - B) + \ldots + a_n (B_1 - B) < \frac{\varepsilon}{N} \cdot N \cdot 2M.$$

因而 $\lim\limits_{n \to \infty} (C_n - A_n B) = 0.$ □

## §5 无穷乘积

设 $a_n \in \mathbb{R}, n \geq 1$. $a_1 \cdot a_2 \cdot \ldots =: \prod_{n=1}^{\infty} a_n$. 类似的有前 $n$ 项部分积 $P_n = \prod_{k=1}^{n} a_k$.

**定义** 设 $\{a_n\}$ 为一序列, $P_n$ 为其部分积. 若 $\lim_{n\to\infty} P_n = a \neq 0$, 则称无穷乘积收敛, 且记 $a = \prod_{n=1}^{\infty} a_n$. 若 $\lim P_n = 0$ 或 $\lim P_n$ 不存在, 则称无穷乘积发散.

**定理** 若 $\prod_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛, 则 $\lim_{n\to\infty} a_n = 1$.

**证明** 记 $P_n = \prod_{k=1}^{n} a_k$. 令 $P_n \to a \neq 0$. 由 $P_{n+1} = P_n \cdot a_{n+1}$ 有 $a_{n+1} = \dfrac{P_{n+1}}{P_n} \to 1$. □

下面考虑无穷乘积的形式为 $\prod_{n=1}^{\infty}(1+a_n), |a_n| < 1$.

**定理** $\prod(1+a_n)$ 收敛 $\iff \sum \ln(1+a_n)$ 收敛.

**证明** 令 $P_n, S_n$ 分别为部分积/和, 则 $S_n = \ln P_n$, $P_n = e^{S_n}$. 由指数函数和对数函数的连续性知两者敛散性一致. □

**推论** 若 $a_n > 0, \forall n \geq 1$, $\prod_{n=1}^{\infty}(1+a_n)$ 收敛 $\iff \sum a_n$ 收敛.

**证明** 若 $a_n \to 0$, 则 $\dfrac{\ln(1+a_n)}{a_n} \to 1 \implies (\sum \ln(1+a_n)$ 收敛 $\iff \sum a_n$ 收敛). □

**例**

- $\prod_{n=1}^{\infty}\left(1+\dfrac{1}{n^p}\right)$ $(p>0)$ 收敛 $\iff \sum \dfrac{1}{n^p}$ 收敛.
- $a_1 = \sqrt{\dfrac{1}{2}}, a_{n+1} = \sqrt{\dfrac{1+a_n}{2}} \implies a_n = \cos\dfrac{\pi}{2^{n+1}}$. 此时

$$\prod_{k=1}^{n} a_k = \cos\frac{\pi}{4} \cdot \ldots \cdot \cos\frac{\pi}{2^{n+1}},$$

$$2^n \sin\frac{\pi}{2^{n+1}} \prod_{k=1}^{n} a_k = \sin\frac{\pi}{2} = 1 \implies P_n = 2^{-n}\sin\frac{\pi}{2^{n+1}} \to \frac{\pi}{2}.$$

- $\prod_{n=1}^{\infty}\left(1-\dfrac{1}{(2n)^2}\right)$ 收敛.

$$\prod_{k=1}^{n}\left(1-\frac{1}{(2k)^2}\right) = \prod_{k=1}^{n}\frac{(2k-1)(2k+1)}{(2k)^2} = \left(\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}\right)^2 \cdot (2n+1) \to \frac{2}{\pi} \text{ (Wallis)}.$$

$\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n^s}, s > 1$. (Riemann $\zeta$ 函数)

$$\left(1-\frac{1}{2^s}\right)\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^s} - \frac{1}{2^s}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^s} = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^s} - \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n)^s} = \sum_{n\in M_1}\frac{1}{n^s},$$

$$\left(1-\frac{1}{3^s}\right)\left[\left(1-\frac{1}{2^s}\right)\zeta(s)\right] = \sum_{n\in M_1}\frac{1}{n^s} - \sum_{n\in M_1}\frac{1}{(3n)^s} = \sum_{n\in M_2}\frac{1}{n^s}.$$

其中 $M_i$ 表示不能被前 $i$ 个质数中的任意一个整除的正整数. 以此类推,

$$0 \leftarrow \zeta(s)\prod_{k=1}^{m}\left(1-\frac{1}{p_k^s}\right)=\sum_{n\in M_m}\frac{1}{n^s}\leq 1+\sum_{n>p_m}\frac{1}{n^s},$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^s}=\frac{1}{\prod_{n=1}^{\infty}\left(1-\frac{1}{p_n^k}\right)}.$$

上述无穷乘积在 $s\leq 1$ 时发散, 在 $s>1$ 时收敛, 从而 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{p_n^s}$ 也是如此.

$p_n\geq n$, "由此可得" $p_n<n\ln n\Longrightarrow\frac{p_n}{n}\sim\ln n$.

# 第十章 函数项序列与函数项级数

## §1 基本概念

设有一列函数 $\{f_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$, 在 $x\in I_0\subset\mathbb{R}$ 上有定义. 取定 $x_0\in I_0,\{f_n(x_0)\}_{n=1}^{\infty}$ 为一序列. 若 $\lim\limits_{n\to\infty}f_n(x_0)$ 收敛, 则称 $x_0$ 为 $\{f_n(x)\}$ 的**收敛点**. 记 $I$ 为 $\{f_n(x)\}_{n\geq 1}$ 的全体收敛点构成的集合, 称为**收敛域**. $\forall x\in I$, 记 $f(x)=\lim\limits_{n\to\infty}f_n(x)$, 称为**极限函数**.

类似于部分和, 定义**和函数** $S_n(x)=\sum\limits_{k=1}^{n}f_n(x)$.

三个基本问题: $f_n$ 在 $I$ 上连续/可导/可积, $f$ 是否连续/可导/可积? 另外若保持可导/可积, $f$ 的导函数/积分是否是 $f_n$ 导函数/积分的极限?

直观来说, 这是求极限能否与求导/求积分交换顺序的问题, 或者进一步归结为求极限能否交换顺序的问题.

$$\lim_{n\to\infty}\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f_n(x+\Delta x)-f_n(x)}{\Delta x}=\lim_{n\to\infty}f_n'(x)\overset{?}{=}\left(\lim_{n\to\infty}f_n\right)'(x)=\lim_{\Delta x\to 0}\lim_{n\to\infty}\frac{f_n(x+\Delta)-f_n(x)}{\Delta x},$$

$$\lim_{n\to\infty}\int f_n(x)\,\mathrm{d}x\overset{?}{=}\int\left(\lim_{n\to\infty}f_n(x)\right)\mathrm{d}x.$$