例 讨论级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{1+nx}$ 在

- $[a,+\infty)$ 上的一致收敛性 $(a>0)$,
- $(0,+\infty)$ 上的一致收敛性.

证明

1.

$S_n(x)=\sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k-1}}{1+kx}$, 由 $\frac{1}{1+kx}$ 关于 k 单调减知原级数收敛. 记和函数为 $S(x)$.

当 $x \geq a$, $|S_n(x)-S(x)|=\left|\sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{1+kx}\right| \leq \frac{1}{1+(n+1)x} \leq \frac{1}{1+(n+1)a}$.

$\forall \varepsilon>0$, 由 $\frac{1}{1+(n+1)a}<\varepsilon \Longrightarrow$ 取 $N=\left\lceil\frac{\varepsilon^{-1}-1}{a}\right\rceil$, 当 $n>N$ 时有

$$|S_n(x)-S(x)|<\varepsilon, \quad \forall x \geq a.$$

故原级数在 $[a,+\infty)$ 上一致收敛.

2.

若原级数在 $(0,+\infty)$ 上一致收敛, 则它在 $(0,1]$ 上同样一致收敛.

由于 $\frac{(-1)^{n-1}}{1+nx}$ 在 $[0,1]$ 上连续, $\forall n \geq 1$, 由柯西准则知该级数在 $[0,1]$ 上一致收敛.

注 这一结论可以在

$$\left|\sum_{k=n+1}^{n+p} u_k(x)\right|<\varepsilon, \forall x \in (a,b)$$

中令 $x \to a$ 并将不等式改为 $\leq \varepsilon$ 得到.

此时级数在 $x=0$ 处发散, 矛盾. 于是级数在 $(0,+\infty)$ 上不一致收敛.

另法 若原级数在 $(0,+\infty)$ 上一致收敛, 则通项

$$\frac{(-1)^{n-1}}{1+nx} \rightrightarrows 0, \quad \forall x \in (0,+\infty).$$

由于在 $x=n^{-1}$ 时 $u_n(x)=\frac{(-1)^{n-1}}{1+1} \nrightarrow 0$, 故原级数不一致收敛. □

一致收敛的判别法

定理 设 $f(x), \{f_n(x)\}$ 在 $I \subset \mathbb{R}$ 上有定义, 则 $f_n(x) \rightrightarrows f(x)$ $(x \in I)$ 的充分必要条件是

$$\lim_{n\to\infty} \sup_{x \in I} |f_n(x)-f(x)|=0.$$

证明

必要性 由 $f_n(x) \rightrightarrows f(x)$ $(x \in I)$,

$$\forall \varepsilon>0, \exists N, \forall n>N, \forall x \in I, |f_n(x)-f(x)|<\frac{\varepsilon}{2}.$$

于是 $\sup_{x\in I}|f_n(x)-f(x)| \leq \frac{\varepsilon}{2} \Longrightarrow \lim_{n\to\infty}\sup_{x\in I}|f_n(x)-f(x)| \leq \frac{\varepsilon}{2}<\varepsilon$. 令 $\varepsilon \to 0$ 即证.

充分性 反之亦然. □

例 $f_n(x) = \dfrac{x}{1+n^2x^2}, x \in (-\infty, +\infty)$.

解 $\forall x \in \mathbb{R}, f_n(x) \to 0 \ (n \to \infty)$.

当 $x \neq 0$ 时 $1 + n^2x^2 \geq 2n|x|$

$$|f_n(x) - f(x)| = |f_n(x)| = \left|\frac{x}{1+n^2x^2}\right| \leq \frac{1}{2n},$$

上式对 $x = 0$ 也成立. 于是

$$\sup_{x\in\mathbb{R}} |f_n(x) - f(x)| \leq \frac{1}{2n} \longrightarrow 0,$$

由此可知 $f_n(x) \rightrightarrows 0 \ (x \in \mathbb{R})$. □

上述定理对于函数项级数有类似的表述, 将不等式改写即可:

$$\lim_{n\to\infty} \sup_{x\in I} \left|\sum_{k=n+1}^{\infty} u_k(x)\right| < \varepsilon.$$

定理 (Weierstrass M 判别法) 设 $\sum u_n(x)$ 在 I 上有定义. 若有正数序列 $\{M_n\}$ 使得

$$|u_n(x)| \leq M_n, \forall x \in I,$$

且 $\sum M_n$ 收敛, 则 $\sum |u_n(x)|$ 在 I 上一致收敛（即 $\sum u_n(x)$ 在 I 上绝对一致收敛）.

定义 若 $\sum |u_n(x)|$ 在 I 上一致收敛, 称 $\sum u_n(x)$ 在 I 上**绝对一致收敛**.

注 绝对一致收敛一般来说强于一致收敛和绝对收敛.

证明 $\forall \varepsilon > 0$, 由 $\sum M_n$ 收敛 $\exists N, \forall n > N, \forall p \geq 1$,

$$\sum_{k=n+1}^{n+p} M_k < \varepsilon.$$

从而

$$\sum_{k=n+1}^{n+p} |u_k(x)| \leq \sum_{k=n+1}^{n+p} M_k < \varepsilon, \quad \forall x \in I.$$

□

例 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} x^k e^{-nx}$ $(k > 1)$ 在 $[0, +\infty)$ 上的一致收敛性.

解 $u_n(x) = x^k e^{-nx}$. 来求 $u_n(x)$ 的最大值:

$$u_n'(x) = kx^{k-1}e^{-nx} - nx^k e^{-nx},$$

于是 $u_n(x)$ 在 $x = \dfrac{k}{n}$ 处取最大值 $M_n = \dfrac{k^k}{n^k}e^{-k}$.

在 $k > 1$ 时 $\sum M_n$ 收敛, 因而原级数一致收敛. □

注 对于上一例中 $k=1$ 的情形,

$$S_n(x)-S(x)=\sum_{m=n+1}^{\infty} xe^{-mx}=\frac{xe^{-(n+1)x}}{1-e^{-x}}.$$

$$\sup_{x\geq 0}|S_n(x)-S(x)|\geq \frac{\frac{1}{n+1}e^{-1}}{1-e^{-\frac{1}{n+1}}}\longrightarrow e^{-1},\quad \left(x=\frac{1}{n+1}\right)$$

因而原级数不一致收敛.

对 $(k,x)\in D\subset(1,+\infty)\times[0,+\infty)$ 上的一致收敛性,

$$\forall\varepsilon>0,\exists N,\forall n>N,\forall(k,x)\in D,|S_n(k,x)-S(k,x)|<\varepsilon,$$

则称 $\sum u_n(k,x)$ 在 D 上一致收敛.

Weierstrass M 判别法仅适用于判断绝对一致收敛函数. 对于条件一致收敛函数, Dirichlet 判别法和 Abel 判别法同样有类似的表述.

定理 (Dirichlet) 设 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)v_n(x),\ x\in I$ 满足

- $S_n(x)=\sum_{k=1}^{n} u_k(x)$ 在 I 上一致有界,
- $\forall x\in I,\{v_n(x)\}$ 单调且 $v_n(x)\rightrightarrows 0,\ x\in I$,

则 $\sum u_n(x)v_n(x)$ 在 I 上一致收敛.

证明 $\forall\varepsilon>0$, 由 $v_n(x)\rightrightarrows 0,\exists N,\forall n>N,\ |v_n(x)|<\dfrac{\varepsilon}{6M}$.

此时 $\forall n>N,\forall p\geq 1$,

$$\begin{aligned}
\left|\sum_{k=n+1}^{n+p} u_k(x)v_k(x)\right| &= \left|\sum_{k=n+1}^{n+p}(S_k(x)-S_{k-1}(x))v_k(x)\right|\\
&= \left|\sum_{k=n+1}^{n+p}S_k(x)v_k(x)-\sum_{k=n+1}^{n+p}S_{k-1}(x)v_k(x)\right|\\
&= \left|S_{n+p}(x)v_{n+p}(x)+\sum_{k=n+1}^{n+p-1}S_k(v_{k+1}(x)-v_k(x))-S_n(x)v_{n+1}(x)\right|\\
&\leq \left|S_{n+p}(x)v_{n+p}(x)\right|+\left|\sum_{k=n+1}^{n+p-1}S_k(v_{k+1}(x)-v_k(x))\right|+\left|S_n(x)v_{n+1}(x)\right|\\
&\leq M\cdot\frac{\varepsilon}{6M}+M\sum_{k=n+1}^{n+p-1}\left|v_{k+1}(x)-v_k(x)\right|+M\cdot\frac{\varepsilon}{6M}\\
&= \frac{\varepsilon}{3}+M\cdot\left|\sum_{k=n+1}^{n+p-1}(v_{k+1}(x)-v_k(x))\right|\\
&= \frac{\varepsilon}{3}+M\cdot\left(\left|v_{n+1}(x)\right|+\left|v_{n+p}(x)\right|\right)<\varepsilon.
\end{aligned}$$

□

定理 (Abel) 设 $\sum u_n(x)v_n(x), x \in I$ 满足

- $\sum u_n(x)$ 在 I 上一致收敛,
- $\forall x \in I, \{v_n(x)\}$ 单调且 $\{v_n(x)\}$ 在 I 上一致有界,

则 $\sum u_n(x)v_n(x)$ 在 I 上一致收敛.

注 此时不能采用如下方法证明:

$$v_n \to v, \quad \sum u_n v_n = \sum u_n(v_n - v) + v \sum u_n.$$

其中 $v_n - v \to 0$, 但是不能保证 $v_n - v \rightrightarrows 0$. 典型的反例是 x^n $(x \in (0,1))$.