§3 定积分的性质

定理 设 $f,g\in R[a,b]$ 且 $f(x)\le g(x),\forall x\in[a,b]$, 则

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x\le\int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x.$$

$\forall\Delta,\xi,\sum\limits_{i=1}^n f(\xi_i)\Delta x_i\le\sum\limits_{i=1}^n g(\xi_i)\Delta x_i$. 特别的 $f(x)\ge 0\Longrightarrow\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x\ge 0$.

类似的可由 $-|f(x)|\le f(x)\le|f(x)|$ 推出

$$-\int_a^b|f(x)|\,\mathrm{d}x\le\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x\le\int_a^b|f(x)|\,\mathrm{d}x.$$

推论 设 $f\in C[a,b]$, 则 $\exists\xi\in[a,b]$,

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x=f(\xi)(b-a).$$

证明 因为

$$m\le\frac{\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x}{b-a}\le M,$$

由介值定理得证.

定理 $f,g\in R[a,b]\Longrightarrow f(x)g(x)\in R[a,b]$.

证明 $\forall\varepsilon>0,\exists\Delta,\text{s.t.}$

$$\sum_{i=1}^n w_i(f)\Delta x_i<\varepsilon,\qquad\sum_{i=1}^n w_i(g)\Delta x_i<\varepsilon.$$

$w_i(fg)=\sup\limits_{x',x''\in[x_{i-1},x_i]}\{(fg)(x')-(fg)(x'')\}$, 其中

$$\begin{aligned}f(x')g(x')-f(x'')g(x'')&=f(x')(g(x')-g(x''))+g(x'')(f(x')-f(x''))\\&\le f(x')w_i(g)+g(x'')w_i(f).\end{aligned}$$

由 f,g 可导知 f,g 有界, $\exists M>0$ s.t. $|f(x)|,|g(x)|<M,\forall x\in[a,b]$.

此时 $w_i(fg)\le M(f(x')+g(x''))$,

$$\sum_{i=1}^n w_i(fg)\Delta x_i\le M\sum_{i=1}^n(w_i(f)+w_i(g))\Delta x_i<2M\varepsilon.\blacksquare$$

对于一般的可积函数, 将其"取倒数"后未必可积：例如 $f(x)=x,x\in[0,1],f^{-1}(x)$ 无界. 函数的复合运算也是类似的：令

$$f(x)=\begin{cases}1,&x>0\\0,&x\le 0\end{cases},\qquad g(x)=\begin{cases}q^{-1},&x=\frac{p}{q}\\0,x\notin\mathbb{Q}\end{cases}$$

则 $f,g\in R[0,1]$ 且 $f\circ g=D(x)\notin R[0,1]$.

定理

$$f \in R[a,b], c \in [a,b] \iff f \in R[a,c] \cap R[c,b] \wedge \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^c f(x)\,\mathrm{d}x + \int_b^c f(x)\,\mathrm{d}x.$$

证明 首先来证明两侧的可积性是等价的.

$(\Longrightarrow)$ 来证 $\forall [a_1,b_1] \subset [a,b], f \in R[a_1,b_1]$.

$\forall \varepsilon > 0, f \in R[a,b] \Longrightarrow \exists \Delta \text{ s.t.} \sum\limits_{i=1}^{n} w_i \Delta x_i < \varepsilon$. 向 Δ 中加入 $\{a_1,b_1\}$ 两个分点并且只取在 $[a_1,b_1]$ 中的分点, 所得的和式仍然 $< \varepsilon$. 故 $f \in R[a_1,b_1]$.

$(\Longleftarrow)$ 合并两个 $< \frac{\varepsilon}{2}$ 的和式, 结合相同的论述即可证明.

至于证明两侧积分结果相同, 取 Δ 为 $[a,b]$ 的 n 等分 $\cup \{c\}, \Delta_1 = \Delta \cap [a,c], \Delta_2 = \Delta \cap [c,b]$,

$$S(\Delta) = S(\Delta_1) + S(\Delta_2), \quad n \to \infty, \lambda(\Delta) \to 0.$$

等式两侧取极限即可证明结论成立. ■

可积函数的性质有时候还不够强. 为了解决问题的方便, 可以利用两类特殊函数——阶梯函数和连续函数——来拟合可积函数. 下面形式化地给出阶梯函数的定义:

定义 给定 $[a,b]$ 的一个分割 $\Delta, [a,b] = \bigcup\limits_{i=1}^{n} [x_{i-1}, x_i] = \bigcup\limits_{i=1}^{n} I_i$. 令 $g(x) = a_i, x \in I_i$, 则称 g 为**阶梯函数**.

命题 设 $f \in R[a,b]. \forall \varepsilon > 0, \exists$ 阶梯函数 g s.t. $\int_a^b |f-g|(x)\,\mathrm{d}x < \varepsilon$.

证明 $f \in R[a,b] \Longrightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists \Delta, \sum\limits_{i=1}^{n} (M_i - m_i) \Delta x_i < \varepsilon$.

延续阶梯函数定义中的符号, 令 $g(x) = \sup\limits_{x \in [x_{i-1}, x_i]} f(x), x \in I_i$, 再令

$$\hat{f}(x) = \begin{cases} M_i, & x \in (x_{i-1}, x_i) \\ f(x), & x = x_i \end{cases}$$

则 $\left\{x \mid g(x) \neq \hat{f}(x)\right\} \subset \Delta \Longrightarrow \int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^b \hat{f}(x)\,\mathrm{d}x$.

$$\begin{aligned} \int_a^b |f-g|(x)\,\mathrm{d}x &\le \int_a^b \left|f-\hat{f}\right|(x)\,\mathrm{d}x + \underbrace{\int_a^b \left|\hat{f}-g\right|(x)\,\mathrm{d}x}_{=0} \\ &= \sum_{i=1}^{n} \int_{x_{i-1}}^{x_i} \underbrace{\left(\hat{f}(x) - f(x)\right)}_{\ge 0} \mathrm{d}x \\ &\le \sum_{i=1}^{n} w_i \Delta x_i \\ &< \varepsilon. \blacksquare \end{aligned}$$

命题 设 $f \in R[a,b]$, 则 $\forall \varepsilon > 0, \exists h \in C[a,b], \int_a^b |f-h|(x)\,\mathrm{d}x < \varepsilon$.

证明 $\forall \varepsilon > 0, \exists \Delta \text{ s.t.} \sum\limits_{i=1}^{n} w_i \Delta x_i < \varepsilon$. 令 h 的图象为 $(x_{i-1}, f(x_{i-1}), (x_i, f(x_i)))$ 的连线首尾相连, 此时有

$$\int_a^b |f-h|(x)\,\mathrm{d}x = \sum_{i=1}^{n} \int_{x_{i-1}}^{x_i} |f-h|\,\mathrm{d}x \le \sum_{i=1}^{n} w_i \Delta x_i < \varepsilon. \blacksquare$$

注 另外设 $|f| \le M$, 则 $|h| \le M$, 且

$$\int_a^b (f-h)^2 \,\mathrm{d}x \le 2M \int_a^b |f-h| \,\mathrm{d}x \le 2M\varepsilon.$$

例　设 $f \in C[a,b]$.

1. $\forall [a_1,b_1] \subset [a,b], \int_{a_1}^{b_1} f(x) \,\mathrm{d}x = 0$, 则 $f(x) \equiv 0, \forall x \in [a,b]$.

   反证, 找到一个 $f(x) > 0$ 的点, 利用邻域内的连续性即可推出矛盾.

2. $f \ge 0$, 则 $\int_a^b f(x) \,\mathrm{d}x = 0 \Longrightarrow f(x) \equiv 0$.

§4 原函数的存在性与定积分的计算

1. 变上限定积分

设 $f \in R[a,b], \forall x \in [a,b], \Phi(x) \coloneqq \int_a^x f(t) \,\mathrm{d}t, \Psi(x) \coloneqq \int_x^b f(t) \,\mathrm{d}t$.

定理　设 $f \in R[a,b]$.

1. $\Phi(x) \in C[a,b]$,
2. $f \in C[a,b] \Longrightarrow \Phi'(x) = f(x)$.

证明　$f \in R[a,b] \Longrightarrow \exists M, |f(x)| \le M$.

1. $|\Phi(x) - \Phi(x')| = \left|\int_{x'}^x f(x) \,\mathrm{d}x\right| \le \left|\int_{x'}^x M \,\mathrm{d}x\right| = M|x - x'|$, 由 Lipschitz 条件知 $\Phi(x) \in C[a,b]$.
2. $\forall x_0, x \in [a,b], x_0 < x$

$$\Phi'(x) = \lim_{x \to x_0^+} \frac{\Phi(x) - \Phi(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \to x_0^+} \frac{\int_{x_0}^x f(x) \,\mathrm{d}x}{x - x_0} = \lim_{x \to x_0^+} f(\xi_x) = f(x_0). \blacksquare$$