

Question 1

1. 将问题转化为求 $\sum_{k=1}^n p_k$, 其中 p_i 表示所有事件中恰好有 i 个事件发生的概率, 可以写成

$$p_k = \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq n} P(A_{i_1} \dots A_{i_k})$$

于是只需要证明给出的公式中 $P(A_{i_1} \dots A_{i_k})$ 恰好被计算了一次. 实际上有

$$\binom{k}{1} - \binom{k}{2} + \dots + (-1)^{k-1} \binom{k}{k} = -(1+t)^k + 1, \quad t := -1$$

于是左式为 1, 明所欲证. □

2. 采用第一归纳法. $n = 1, 2$ 的情形不等式显然成立.

若 $n = k$ 时结论成立, 则 $n = k + 1$ 时有

$$\begin{aligned} P\left(\bigcup_{i=1}^{k+1} A_i\right) &= P\left(\left(\bigcup_{i=1}^k A_i\right) \cup A_{k+1}\right) \\ &\leq P\left(\bigcup_{i=1}^k A_i\right) + P(A_{k+1}) \\ &\leq \sum_{i=1}^{k+1} P(A_i). \end{aligned}$$

□

3. 采用第一归纳法. $n = 1, 2$ 的情形根据定义成立.

若 $n = k$ 时结论成立, 则 $n = k + 1$ 时有

$$\begin{aligned} P(A_1 \dots A_{k+1}) &= P(A_1 \dots A_k) P(A_{k+1} \mid A_1 \dots A_k) \\ &= P(A_1) P(A_2 \mid A_1) \dots P(A_{k+1} \mid A_1 \dots A_k). \end{aligned}$$

□

Question 2

- 构造如下反例: 现有随机变量 $X \in [0, 2\pi]$, $A : X \in [0, \frac{3}{2}\pi]$, $B : X \in [0, \pi] \cup [\frac{3}{2}\pi, 2\pi]$, $C : X \in [0, \pi]$. 此时 A, B 在条件 C 下独立, 在条件 \bar{C} 下互斥.
- 构造如下反例: X 构造同上, 令 $A : X \in [0, \pi]$, $B : X \in [\frac{1}{2}\pi, \frac{3}{2}\pi]$, $C : X \in [\frac{1}{2}\pi, \pi] \cup [\frac{3}{2}\pi, 2\pi]$. 此时 A, B 独立但在条件 C 下有 $P(A \mid C) = P(B \mid C) = P(AB \mid C) = \frac{1}{2}$.
- 该命题是正确的, 证明如下:

$$\begin{aligned} P(A\bar{B}) &= P(A) - P(AB) \\ &= P(A)(1 - P(B)) = P(A)P(\bar{B}). \end{aligned}$$

□

Question 3

已知

$$\begin{aligned}\ln P_{n,m} &= \ln\left(1 - \frac{1}{m}\right) + \dots + \ln\left(1 - \frac{n-1}{m}\right) \\&= \left(-\frac{1}{m} - \frac{1}{2m^2} + O\left(\frac{1}{m^3}\right)\right) + \dots + \left(-\frac{n-1}{m} - \frac{(n-1)^2}{2m^2} + O\left(\frac{n^2}{m^3}\right)\right) \\&= -\frac{n(n-1)}{2m} - \frac{(n-1)n(2n-1)}{12m^2} + O\left(\frac{n^3}{m^3}\right) \\&= -\frac{n(n-1)}{2m} + O\left(\frac{n^3}{m^2}\right).\end{aligned}$$

结合 $e^x = 1 + O(x)$, 明所欲证. □

Question 4

1. 对于给定的 k , 任意玩家有 $\frac{k}{n}$ 的概率在 k 人队伍中, $\frac{n-k}{n}$ 的概率在另一队中. 于是所求为

$$p_k = \frac{1}{n-1} \left(\frac{k}{n} + \frac{n-k}{n} \right) = \frac{1}{n-1}.$$

2. 令事件 A 表示“第一个玩家成为队长”, 事件 B 表示“第一个玩家所在队伍有 k 个人”, 则

$$\begin{aligned}p(AB) &= p_k \cdot \frac{1}{k} = \frac{1}{k(n-1)}, \\p(A) &= \frac{1}{n-1} \sum_{k=1}^{n-1} \left(\frac{k}{n} \cdot \frac{1}{k} + \frac{n-k}{n} \cdot \frac{1}{n-k} \right) = \frac{2}{n}.\end{aligned}$$

于是所求为

$$P(B | A) = \frac{P(AB)}{P(A)} = \frac{n}{2k(n-1)}.$$

Question 5

设事件 A 为“两次检验至少有一次为阳性”, 事件 B 为“该受检者患病”. 则

$$P(B | A) = \frac{P(AB)}{P(AB) + P(\overline{AB})}$$

其中

$$\begin{aligned}
P(AB) &= P(B)P(A \mid B) \\
&= p(1 - (1 - p_1)(1 - p_2)) \\
&= p(p_1 + p_2 - p_1p_2), \\
P(A\bar{B}) &= P(\bar{B})P(A \mid \bar{B}) \\
&= (1 - p)(1 - (1 - q_1)(1 - q_2)) \\
&= (1 - p)(q_1 + q_2 - q_1q_2).
\end{aligned}$$

于是所求即为

$$P(B \mid A) = \frac{p(p_1 + p_2 - p_1p_2)}{p(p_1 + p_2 - p_1p_2) + (1 - p)(q_1 + q_2 - q_1q_2)}.$$

Question 6

1. 各场比赛之间的胜负情况相互独立, 于是所求即为 $\prod_{v \in V} \frac{1}{2} = \frac{1}{2^k}$.
2. 由上一问可知 $P(\overline{A_{V,v}}) = 1 - \frac{1}{2^k}$, 所求即为

$$\begin{aligned}
P(B_V) &= 1 - P(\overline{B_V}) \\
&= 1 - \prod_{v \notin V} P(\overline{A_{V,v}}) \\
&= 1 - \left(1 - \frac{1}{2^k}\right)^{n-k}.
\end{aligned}$$

3. 直接写出

$$\begin{aligned}
P(C) &= 1 - P(\overline{C}) = 1 - P\left(\bigcup_{|V|=k} \overline{B_V}\right) \\
&\geq 1 - \sum_{|V|=k} P(\overline{B_V}) \\
&= 1 - \binom{n}{k} \left(1 - \frac{1}{2^k}\right)^{n-k}.
\end{aligned}$$

明所欲证. □

4. 沿用上一问的结论, 我们的目标是证明 $n \sim O(k^2 \cdot 2^k)$ 时 $P(C) > 0$. 令 $n := \alpha \cdot k^2 \cdot 2^k$, 有

$$\begin{aligned}
A &:= \ln \left(\binom{n}{k} \left(1 - \frac{1}{2^k}\right)^{n-k} \right) = \ln \binom{n}{k} + (n - k) \ln \left(1 - \frac{1}{2^k}\right) \\
&\leq k \ln n + (n - k) \left(-\frac{1}{2^k}\right) \\
&= k(2 \ln k + k \ln 2 + \ln \alpha) + (\alpha \cdot k^2 \cdot 2^k) \left(-\frac{1}{2^k}\right) + \frac{k}{2^k} \\
&= 2k \ln k + k^2 \ln 2 + k \ln \alpha - \alpha \cdot k^2 + \frac{k}{2^k} \\
&\rightarrow -\infty \quad (\alpha > \ln 2, k \rightarrow +\infty)
\end{aligned}$$

于是对于充分大的 k , 总能取 $\alpha = 10086$ 总使得

$$\begin{aligned} P(C) &\geq 1 - \binom{n}{k} \left(1 - \frac{1}{2^k}\right)^{n-k} \\ &= 1 - \exp(A) \geq 1 - \exp\left(\frac{1}{2}\right) > 0. \end{aligned}$$

明所欲证.

□