

# 信息学中的概率统计

王若松

前沿计算研究中心  
北京大学

# 尾不等式、大数定律与中心极限定理

1. 尾不等式
2. 大数定律
3. 中心极限定理
4. 应用举例

# 1. 尾不等式

- ▶ 古典概率模型  $\Rightarrow$  离散随机变量
- ▶ 几何概率模型  $\Rightarrow$  连续随机变量
- ▶ 概率和频率?
- ▶ 频率:  $n$ 次试验中事件发生的比例:  $f_n(A) = \frac{n_A}{n}$
- ▶  $n_A$ : 事件 $A$ 发生的次数,  $n$ : 总试验次数
- ▶ 频率 $f_n(A)$ 随着 $n$ 增大逐渐趋于一个稳定值, 也即是事件 $A$ 发生的概率
- ▶ 是否有  $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(A) = P(A)$ ?

# 1. 尾不等式

- ▶ 回顾：如果某个随机试验只有两个可能的结果 $A$ 和 $\bar{A}$ ，且 $P(A) = p$ ，将试验独立地重复进行 $n$ 次，称为 **$n$ 重伯努利试验**
- ▶  $n_A$ ：事件 $A$ 发生的次数,  $n$ ：总试验次数,  $f_n(A) = \frac{n_A}{n}$
- ▶ 令  $A_i$  表示第 $i$ 次试验中 $A$ 是否发生,  $n_A = \sum_{i=1}^n 1_{A_i}$
- ▶  $n_A \sim B(n, p), E(n_A) = np$
- ▶ 对于 $\epsilon > 0$ 
  - ▶ 给出  $P(|f_n(A) - p| \geq \epsilon) = P(|n_A - E(n_A)| \geq n\epsilon)$  的上界? **尾不等式/集中不等式**
  - ▶ 证明  $\lim_{n \rightarrow \infty} P(|f_n(A) - p| < \epsilon) = 1$ ? **大数定律**

# 1. 尾不等式

► 尾不等式：给定随机变量 $X$ ，给出  $P(X \geq k)$ 的上界

►  $X_i$ 表示球与桶模型中第 $i$ 个桶中球的数量，证明 $P(\max\{X_1, X_2, \dots, X_n\} \geq 4\log n) \leq 1/n$

►  $X \sim N(0, 1)$ ，证明 $P(X \geq x) \leq \frac{e^{-\frac{x^2}{2}}}{x\sqrt{2\pi}}$

► 集中不等式：给定随机变量 $X$ ，给出  $P(|X - E(X)| \geq k)$ 的上界

►  $X \sim N(\mu, \sigma^2)$ ，证明 $P(|X - \mu| \geq k\sigma) \leq 1 - \frac{e^{-\frac{k^2}{2}}}{k} \cdot \sqrt{\frac{2}{\pi}}$

►  $Y = \sum_{i=1}^n X_i^2$ ， $X_i \sim N(0, 1)$ 且相互独立，证明 $P(|Y - E(Y)| \geq \Delta n) \leq 2e^{-n\Delta^2/8}$

# 1. 尾不等式

- ▶ **马尔可夫不等式**:  $X$  为非负随机变量  $P(X \geq a \cdot E(X)) \leq \frac{1}{a}$
- ▶ **切比雪夫不等式**:  $P(|X - E(X)| \geq c \cdot \sigma(X)) \leq 1/c^2$
- ▶ 给出  $P(|f_n(A) - p| \geq \epsilon) = P(|n_A - E(n_A)| \geq n\epsilon)$  的上界?
- ▶  $n_A \sim B(n, p)$ ,  $\sigma(n_A) = \sqrt{np(1-p)}$
- ▶  $P(|n_A - E(n_A)| \geq n\epsilon) \leq \frac{p(1-p)}{n\epsilon^2}$
- ▶  $\lim_{n \rightarrow \infty} P(|f_n(A) - p| < \epsilon) = 1$

# 1. 尾不等式

- ▶  $n_A \sim B(n, p)$ ,  $\sigma(n_A) = \sqrt{np(1-p)}$
- ▶  $P(|n_A - E(n_A)| \geq n\epsilon) \leq \frac{p(1-p)}{n\epsilon^2}$
- ▶ 能否对  $P(|n_A - E(n_A)| \geq n\epsilon)$  给出更好的上界?
- ▶  $\text{Var}(\sum_{i=1}^n 1_{A_i}) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n E((1_{A_i} - p)(1_{A_j} - p)) = \sum_{i=1}^n \text{Var}(1_{A_i}) = np(1-p)$
- ▶ 仅需  $A_i$  两两独立
- ▶ 对于  $n$  重伯努利试验,  $A_i$  相互独立
- ▶ 如何利用到不同试验相互独立?

# 1. 尾不等式

- ▶ 给定随机变量 $X$ ，对于正整数 $k$ 
  - ▶ 定义 $E(X^k)$ 为 $X$ 的 $k$ 阶（原点）矩
  - ▶ 定义 $E((X - E(X))^k)$ 为 $X$ 的 $k$ 阶中心矩
- ▶ 数学期望：一阶矩
- ▶ 方差：二阶中心矩
- ▶  $E(X^2)$ ：二阶矩
  
- ▶ 切比雪夫不等式：对 $(X - E(X))^2$ 使用马尔可夫不等式
- ▶ 对 $(X - E(X))^3$ 使用马尔可夫不等式？
- ▶ 对 $(X - E(X))^4$ 使用马尔可夫不等式？



# 1. 尾不等式

- ▶ 给定随机变量  $X \sim B(n, p)$ , 如何计算  $E\left((X - E(X))^4\right)$ ?
- ▶  $E\left((X - E(X))^4\right) = E(X^4) - 4E(X)E(X^3) + 6E(X^2)(E(X))^2 - 3(E(X))^4$
- ▶ 如何计算  $E(X^4)$ ,  $E(X^3)$ ?
- ▶  $X = \sum_{i=1}^n X_i$ ,  $X_i$  独立同分布且  $X_i$  服从参数为  $p$  的伯努利分布
- ▶  $E\left((X - E(X))^4\right) = E\left(\left(\sum_{i=1}^n (X_i - p)\right)^4\right)$
- ▶  $= \sum_{1 \leq i_1, i_2, i_3, i_4 \leq n} E((X_{i_1} - p)(X_{i_2} - p)(X_{i_3} - p)(X_{i_4} - p))$
- ▶ 如何计算  $\sum_{1 \leq i_1, i_2, i_3, i_4 \leq n} E\left((X_{i_1} - p)(X_{i_2} - p)(X_{i_3} - p)(X_{i_4} - p)\right)$ ?

# 1. 尾不等式

▶ 给定随机变量 $X$ , 定义 $M_X(t) = E(e^{tX})$ 为 $X$ 的**矩生成函数**

▶ 作业二第二题:  $M_X(t) = \sum_{i=0}^{+\infty} \frac{t^i}{i!} E(X^i)$

▶  $E(X^4) = \frac{d^4 M_X(t)}{dt^4} \Big|_{t=0}$

▶ 令  $Y = X - E(X)$ ,  $E\left((X - E(X))^4\right) = E(Y^4) = \frac{d^4 M_Y(t)}{dt^4} \Big|_{t=0}$

▶  $M_Y(t) = E(e^{t(X-E(X))}) = M_X(t) \cdot e^{-tE(X)}$

▶ 作业二:  $M_X(t) = (1 - p + pe^t)^n$ ,  $e^{-tE(X)} = e^{-t \cdot np}$

▶  $E(Y^4) = \frac{d^4 M_Y(t)}{dt^4} \Big|_{t=0} = np(1-p)^4 + n(1-p)p^4 + 3n(n-1)p^2(1-p)^2$

# 1. 尾不等式

- ▶  $E\left((X - E(X))^4\right) = np(1-p)^4 + n(1-p)p^4 + 3n(n-1)p^2(1-p)^2$
- ▶ 当  $p = 1/2$ ,  $E\left((X - E(X))^4\right) = \frac{n(3n-2)}{16} = O(n^2)$
- ▶  $P(|X - E(X)| \geq n\epsilon) = P\left((X - E(X))^4 \geq (n\epsilon)^4\right) \leq \frac{O(n^2)}{(n\epsilon)^4} = O\left(\frac{1}{n^2\epsilon^4}\right)$ 
  - ▶ 对比切比雪夫不等式:  $P(|X - E(X)| \geq n\epsilon) \leq O\left(\frac{1}{n\epsilon^2}\right)$
- ▶  $E\left((X - E(X))^4\right) = \sum_{1 \leq i_1, i_2, i_3, i_4 \leq n} E((X_{i_1} - p)(X_{i_2} - p)(X_{i_3} - p)(X_{i_4} - p))$
- ▶ 仍然无法完全利用  $n$  重伯努利试验不同试验相互独立
- ▶ 计算六阶中心矩, 八阶中心矩?

# 1. 尾不等式

- ▶ Chernoff bound: 对 $e^{tX}$  使用马尔可夫不等式, 而 $M_X(t) = E(e^{tX})$
- ▶ 给定随机变量 $X$ 
  - ▶ 对于任意 $t > 0$ ,  $P(X \geq k) \leq M_X(t) \cdot e^{-tk}$
  - ▶ 对于任意 $t < 0$ ,  $P(X \leq k) \leq M_X(t) \cdot e^{-tk}$
- ▶ 证明
  - ▶  $P(X \geq k) = P(e^{tX} \geq e^{tk}) \leq E(e^{tX}) \cdot e^{-tk}$
  - ▶  $P(X \leq k) = P(e^{tX} \geq e^{tk}) \leq E(e^{tX}) \cdot e^{-tk}$
- ▶ 使用时, 选择最优的 $t$

# 1. 尾不等式

- ▶ 例:  $X \sim \pi(\lambda)$ , 给出  $P(X \geq x)$  的上界
- ▶ 作业二第六题:  $M_X(t) = E(e^{tX}) = e^{\lambda(e^t-1)}$
- ▶ 对于  $t > 0$ ,  $P(X \geq x) = P(e^{tX} \geq e^{tx}) \leq e^{\lambda(e^t-1)-tx}$
- ▶ 如何最小化  $e^{\lambda(e^t-1)-tx}$ ?
  - ▶ 求导, 得到  $\lambda e^t - x = 0 \Rightarrow t = \ln(x/\lambda)$
  - ▶ 因此, 当  $x > \lambda$ ,  $P(X \geq x) \leq e^{\lambda(\frac{x}{\lambda}-1)-x \cdot \ln(\frac{x}{\lambda})} = \frac{e^{-\lambda}(e\lambda)^x}{x^x}$

# 1. 尾不等式

► 例:  $X \sim N(\mu, \sigma^2)$ , 给出  $P(X - E(X) \geq k\sigma)$  的上界

$$\text{► } E(e^{tX}) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2} + tx} dx = e^{\mu t + \frac{\sigma^2 t^2}{2}}$$

$$\text{► } P(X \geq k\sigma + \mu) \leq e^{\mu t + \frac{\sigma^2 t^2}{2}} \cdot e^{-t(\mu + k\sigma)} = e^{\frac{\sigma^2 t^2}{2} - k\sigma t}$$

$$\text{► 最小化 } e^{\frac{\sigma^2 t^2}{2} - k\sigma t} \Rightarrow t = \frac{k}{\sigma}$$

$$\text{► } P(X - E(X) \geq k\sigma) \leq e^{-\frac{k^2}{2}}$$

$$\text{► 对比作业三第五题: } P(X - E(X) \geq k\sigma) \leq \frac{e^{-\frac{k^2}{2}}}{k\sqrt{2\pi}}$$

# 1. 尾不等式

- ▶  $X \sim B(n, p), \quad M_X(t) = (1 - p + pe^t)^n$
- ▶  $P(X - E(X) \geq n\epsilon) \leq M_X(t) \cdot e^{-t(E(X) + n\epsilon)}$
- ▶  $= (1 - p + pe^t)^n \cdot e^{-nt(p+\epsilon)} = e^{-tn\epsilon} \cdot \left( (1 - p)e^{-tp} + p \cdot e^{t(1-p)} \right)^n$
  
- ▶ 结论:  $(1 - p)e^{-tp} + p \cdot e^{t(1-p)} \leq e^{t^2/8}$
- ▶  $P(X - E(X) \geq n\epsilon) \leq e^{-tn\epsilon + \frac{nt^2}{8}}$ 
  - ▶ 最小化  $-tn\epsilon + \frac{nt^2}{8} \Rightarrow t = 4\epsilon$
  - ▶  $P(X - E(X) \geq n\epsilon) \leq e^{-2n\epsilon^2}$

# 1. 尾不等式

- ▶  $X \sim B(n, p), \quad M_X(t) = (1 - p + pe^t)^n$
- ▶  $P(X - E(X) \leq -n\epsilon) \leq M_X(t) \cdot e^{-t(E(X) - n\epsilon)}$
- ▶  $= (1 - p + pe^t)^n \cdot e^{-nt(p - \epsilon)} = e^{tn\epsilon} \cdot \left( (1 - p)e^{-tp} + p \cdot e^{t(1-p)} \right)^n$
- ▶  $P(X - E(X) \leq -n\epsilon) \leq e^{tn\epsilon + \frac{nt^2}{8}}$ 
  - ▶ 最小化  $tn\epsilon + \frac{nt^2}{8} \Rightarrow t = -4\epsilon$
  - ▶  $P(X - E(X) \leq -n\epsilon) \leq e^{-2n\epsilon^2}$
- ▶  $P(|X - E(X)| \geq n\epsilon) \leq 2 \cdot e^{-2n\epsilon^2}$ 
  - ▶ 对比切比雪夫不等式:  $P(|X - E(X)| \geq n\epsilon) \leq O\left(\frac{1}{n\epsilon^2}\right)$
  - ▶ 对比四阶中心矩给出的上界:  $P(|X - E(X)| \geq n\epsilon) \leq O\left(\frac{1}{n^2\epsilon^4}\right)$



# 1. 尾不等式

- ▶ Hoeffding引理：若实数随机变量  $a \leq X \leq b$ ，则  $E(e^{t(X-E(X))}) \leq e^{\frac{t^2(b-a)^2}{8}}$ 
  - ▶  $X \sim B(1, p) \Rightarrow E(e^{t(X-E(X))}) = (1-p)e^{-tp} + p \cdot e^{t(1-p)} \leq e^{t^2/8}$
- ▶ Chernoff-Hoeffding不等式：若  $X = \sum_{i=1}^n X_i$ ， $X_i$ 相互独立且  $a \leq X_i \leq b$ ， $k \geq 0$ 
  - ▶  $P(X \geq E(X) + k) \leq e^{-\frac{2k^2}{n(b-a)^2}}$
  - ▶  $P(X \leq E(X) - k) \leq e^{-\frac{2k^2}{n(b-a)^2}}$
- ▶ 若  $X \sim B(n, p)$ ，则有
  - ▶  $P(X \geq n(p + \epsilon)) \leq e^{-2n\epsilon^2}$
  - ▶  $P(X \leq n(p - \epsilon)) \leq e^{-2n\epsilon^2}$

# 1. 尾不等式

- ▶ Hoeffding引理：若实数随机变量  $a \leq X \leq b$ ，则  $E(e^{t(X-E(X))}) \leq e^{\frac{t^2(b-a)^2}{8}}$
- ▶ Chernoff-Hoeffding不等式：若  $X = \sum_{i=1}^n X_i$ ， $X_i$ 相互独立且  $a \leq X_i \leq b$ 
  - ▶  $P(X \geq E(X) + t) \leq e^{-\frac{2t^2}{n(b-a)^2}}$
  - ▶  $P(X \leq E(X) - t) \leq e^{-\frac{2t^2}{n(b-a)^2}}$
- ▶ 由 Chernoff bound,  $P(X \geq E(X) + k) \leq M_{X-E(X)}(t)e^{-kt}$
- ▶  $M_{X-E(X)}(t) = E\left(e^{t(X-E(X))}\right) = \prod_{i=1}^n E\left(e^{t(X_i-E(X_i))}\right) \leq e^{\frac{nt^2(b-a)^2}{8}}$
- ▶ 最小化  $e^{\frac{nt^2(b-a)^2}{8}} \cdot e^{-kt} \Rightarrow t = \frac{4k}{n(b-a)^2}$
- ▶  $P(X \geq E(X) + k) \leq e^{\frac{nt^2(b-a)^2}{8}} e^{-kt} = e^{-\frac{2k^2}{n(b-a)^2}}$

# 1. 尾不等式

- ▶ 证明尾不等式的手段
- ▶ 直接对  $P(X \geq k)$  进行缩放
  - ▶  $X \sim N(0, 1), P(X \geq x) \leq e^{-\frac{x^2}{2}} \cdot \frac{1}{x\sqrt{2\pi}}$
- ▶ 计算偶数阶中心矩, 使用马尔可夫不等式
  - ▶  $X \sim B(n, p), P(|X - E(X)| \geq n\epsilon) \leq \frac{p(1-p)}{n\epsilon^2}$
  - ▶  $X \sim B\left(n, \frac{1}{2}\right), P(|X - E(X)| \geq n\epsilon) \leq O\left(\frac{1}{n^2\epsilon^4}\right)$

# 1. 尾不等式

## ► 计算矩生成函数，使用Chernoff bound

►  $X \sim \pi(\lambda)$  ,  $P(X \geq x) \leq \frac{e^{-\lambda}(e\lambda)^x}{x^x}$

►  $X \sim N(\mu, \sigma^2)$  ,  $P(X - E(X) \geq k\sigma) \leq e^{-\frac{k^2}{2}}$

► Chernoff-Hoeffding不等式：若 $X = \sum_{i=1}^n X_i$  ,  $X_i$ 相互独立且  $a \leq X_i \leq b$

–  $P(X \geq E(X) + k) \leq e^{-\frac{2k^2}{n(b-a)^2}}$

–  $P(X \leq E(X) - k) \leq e^{-\frac{2k^2}{n(b-a)^2}}$

## 2. 大数定律

- ▶ **伯努利大数定律**：在 $n$ 重伯努利试验中，令 $n_A$ 为事件 $A$ 发生的次数， $P(A) = p$
- ▶ 对于任意 $\epsilon > 0$ ,  $\lim_{n \rightarrow \infty} P\left(\left|\frac{n_A}{n} - p\right| < \epsilon\right) = 1$
- ▶ 大数定律的一般形式：对于随机变量 $\{X_n\}$ ，对于任意 $\epsilon > 0$ ,  
$$\lim_{n \rightarrow \infty} P\left(\left|\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i - \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n E(X_i)\right| < \epsilon\right) = 1$$
- ▶ 其他大数定律？

## 2. 大数定律

- ▶ **马尔可夫大数定律**: 若  $\frac{1}{n^2} \text{Var}(\sum_{i=1}^n X_i) \rightarrow 0$ , 则  $\{X_n\}$  服从大数定律
- ▶ 也即对于任意  $\epsilon > 0$ ,  $\lim_{n \rightarrow \infty} P\left(\left|\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i - \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n E(X_i)\right| < \epsilon\right) = 1$
- ▶ 证明: 由切比雪夫不等式
- ▶  $P\left(\left|\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i - \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n E(X_i)\right| < \epsilon\right) \geq 1 - \frac{\text{Var}\left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i\right)}{\epsilon^2}$
- ▶  $\text{Var}\left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i\right) = \frac{1}{n^2} \text{Var}(\sum_{i=1}^n X_i) \rightarrow 0$

## 2. 大数定律

- ▶ **马尔可夫大数定律**: 若  $\frac{1}{n^2} \text{Var}(\sum_{i=1}^n X_i) \rightarrow 0$ , 则  $\{X_n\}$  服从大数定律
- ▶ 也即对于任意  $\epsilon > 0$ ,  $\lim_{n \rightarrow \infty} P\left(\left|\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i - \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n E(X_i)\right| < \epsilon\right) = 1$
- ▶ 例1:  $\{X_n\}$  两两不相关, 且对于任意  $i$ , 有  $\text{Var}(X_i) \leq c$ 。证明  $\{X_n\}$  服从大数定律。
- ▶  $\frac{1}{n^2} \text{Var}(\sum_{i=1}^n X_i) = \frac{c}{n} \rightarrow 0$
- ▶ 例2:  $\{X_n\}$  为一列同分布且标准差  $\sigma = \sigma(X_i)$  存在的随机变量。  $X_i$  仅与  $X_{i-1}$  和  $X_{i+1}$  相关。证明  $\{X_n\}$  服从大数定律。
- ▶  $\text{Cov}(X_i, X_{i+1}) \leq \sigma^2$
- ▶  $\text{Var}(\sum_{i=1}^n X_i) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \text{Cov}(X_i, X_j) \leq n \cdot \sigma^2 + 2(n-1)\sigma^2$
- ▶  $\frac{1}{n^2} \text{Var}(\sum_{i=1}^n X_i) \rightarrow 0$

## 2. 大数定律

- ▶ **辛钦大数定律**:  $\{X_n\}$ 独立同分布, 且数学期望 $\mu = E(X_i)$ 存在, 则 $\{X_n\}$ 服从大数定律
- ▶ 也即对于任意 $\epsilon > 0$ ,  $\lim_{n \rightarrow \infty} P\left(\left|\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i - \mu\right| < \epsilon\right) = 1$
- ▶ 对比马尔可夫大数定律
- ▶ 需要独立同分布的假设, 不需要对方差进行假设



## 2. 大数定律

- ▶ 随机变量序列的收敛性
- ▶ 令 $\{Y_n\}$ 为一系列随机变量,  $Y$ 为随机变量。若对于任意 $\epsilon > 0$ ,  $\lim_{n \rightarrow \infty} P(|Y_n - Y| < \epsilon) = 1$ , 则称 $\{Y_n\}$ **依概率收敛**于 $Y$ , 记为 $Y_n \xrightarrow{P} Y$
- ▶ 独立同分布情况的大数定律:  $Y_n = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i, Y = \mu = E(X_i)$
- ▶ 思考:  $\{X_n\}$ 独立同分布,  $X_i$ 服从柯西分布, 也即 $X_i$ 的概率密度函数为  $f(x) = \frac{1}{\pi(x^2+1)}$ ,  $Y_n = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i$ 是否依概率收敛?

## 2. 大数定律

- ▶ 随机变量序列的收敛性
- ▶ 通过分布函数来定义收敛性?
- ▶ 要求函数序列 $F_n$ 点点收敛于 $F$ ?
  - ▶ 对于任意 $x$ ,  $F_n(x) \rightarrow F(x)$
- ▶ 例: 设 $\{X_n\}$ 为一列随机变量,  $P\left(X_n = \frac{1}{n}\right) = 1$ .  $P(X = 0) = 1$ . 是否有 $F_n$ 点点收敛于 $F_X$ ?

## 2. 大数定律

- ▶  $\{X_n\}$  为一系列随机变量, 分布函数为  $\{F_n(x)\}$ 。  $X$  为随机变量, 分布函数为  $F(x)$ 。对于  $F(x)$  的任意**连续点**  $x$ , 均有  $\lim_{n \rightarrow \infty} F_n(x) = F(x)$ , 则称  $\{X_n\}$  **依分布收敛**于  $X$ , 记为  $X_n \xrightarrow{d} X$ 。
- ▶ **定理**: 依概率收敛  $\Rightarrow$  依分布收敛
- ▶ 依分布收敛  $\Rightarrow$  依概率收敛?
  - ▶  $P(X = +1) = P(X = -1) = \frac{1}{2}, Y = -X$
- ▶  $X$  服从单点分布, 则  $X_n \xrightarrow{P} X$  等价于  $X_n \xrightarrow{d} X$

## 2. 大数定律

- ▶ 给定随机变量 $X$ , 定义 $\phi_X(t) = E(e^{itX})$ 为  $X$ 的特征函数
  - ▶  $\phi_X(-it) = M_X(t) = E(e^{tX})$
- ▶  $P(X = c) = 1, \quad \phi_X(t) = e^{itc}$
- ▶  $X \sim \pi(\lambda), \quad M_X(t) = e^{\lambda(e^t-1)}, \quad \phi_X(t) = e^{\lambda(e^{it}-1)}$
- ▶  $X \sim N(\mu, \sigma), \quad M_X(t) = e^{\mu t + \frac{\sigma^2 t^2}{2}}, \quad \phi_X(t) = e^{i\mu t - \frac{\sigma^2 t^2}{2}}$
- ▶  $X \sim B(n, p), \quad M_X(t) = (1 - p + pe^t)^n, \quad \phi_X(t) = (1 - p + pe^{it})^n$
- ▶  $X$ 服从柯西分布,  $f(x) = \frac{1}{\pi(x^2+1)}, \quad M_X(t) = ?$ 
  - ▶  $\phi_X(t) = e^{-|t|}$

## 2. 大数定律

- ▶ 给定随机变量 $X$ , 定义 $\phi_X(t) = E(e^{itX})$ 为 $X$ 的特征函数
- ▶ 性质:
- ▶  $E(e^{itX})$ 对于任意实数 $t$ 均存在:  $|e^{itx}| \leq 1$
- ▶  $\phi_{aX+b}(t) = E(e^{it(aX+b)}) = \phi_X(at) \cdot e^{itb}$
- ▶  $X_1, X_2, \dots, X_n$ 相互独立,  $X = \sum_{i=1}^n X_i$ ,  $\phi_X(t) = \prod_{i=1}^n \phi_{X_i}(t)$
- ▶  $\phi_X^{(k)}(0) = E(X^k) \cdot i^k$

## 2. 大数定律

- ▶ 给定随机变量 $X$ , 定义 $\phi_X(t) = E(e^{itX})$ 为 $X$ 的**特征函数**
- ▶ 唯一性定理: 随机变量的分布函数由其特征函数唯一决定。
- ▶ 例1:  $X \sim N(\mu_1, \sigma_1^2), Y \sim N(\mu_2, \sigma_2^2)$ ,  $X, Y$ 相互独立。证明 $X + Y \sim N(\mu_1 + \mu_2, \sigma_1^2 + \sigma_2^2)$ 。
- ▶ 
$$\phi_{X+Y}(t) = e^{i\mu_1 t - \frac{\sigma_1^2 t^2}{2}} \cdot e^{i\mu_2 t - \frac{\sigma_2^2 t^2}{2}} = e^{i(\mu_1 + \mu_2)t - \frac{(\sigma_1^2 + \sigma_2^2)t^2}{2}}$$
- ▶ 唯一性定理:  $X + Y \sim N(\mu_1 + \mu_2, \sigma_1^2 + \sigma_2^2)$

## 2. 大数定律

- ▶ 给定随机变量 $X$ , 定义 $\phi_X(t) = E(e^{itX})$ 为 $X$ 的**特征函数**
- ▶ 唯一性定理: 随机变量的分布函数由其特征函数唯一决定。
- ▶ 例2:  $X_1, X_2, \dots, X_n$ 独立同分布,  $X_i$ 服从柯西分布。计算 $X = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i$ 的分布函数。
  - ▶  $\phi_{X_i}(t) = e^{-|t|}$
  - ▶ 令 $Y = \sum_{i=1}^n X_i$ ,  $\phi_Y(t) = e^{-n|t|}$ ,  $\phi_X(t) = \phi_Y\left(\frac{t}{n}\right) = e^{-|t|}$
- ▶ 推广:  $X_1, X_2, \dots, X_n$ 独立同分布,  $X_i$ 服从柯西分布。  $\sum_{i=1}^n a_i \cdot X_i \sim |a|_1 \cdot X$ ,  $X$ 服从柯西分布,  $|a|_1 = \sum_{i=1}^n |a_i|$ 。

## 2. 大数定律

- ▶ 给定随机变量 $X$ , 定义 $\phi_X(t) = E(e^{itX})$ 为 $X$ 的特征函数
- ▶ 连续性定理:  $X_n \xrightarrow{d} X$ 等价于  $\phi_{X_n}(t) \rightarrow \phi_X(t)$
- ▶ 例:  $X_n \sim \pi(n), Y_n = \frac{X_n - n}{\sqrt{n}}$ , 证明 $X_n \xrightarrow{d} X \sim N(0,1)$
- ▶  $\phi_{X_n}(t) = e^{n(e^{it} - 1)}, \phi_{Y_n}(t) = \phi_{X_n}\left(\frac{t}{\sqrt{n}}\right) \cdot e^{-it\sqrt{n}} = e^{n(e^{it/\sqrt{n}} - 1) - it\sqrt{n}}$
- ▶  $e^{it/\sqrt{n}} = 1 + \frac{it}{\sqrt{n}} - \frac{t^2}{2n} + o(1/n)$
- ▶  $\phi_{X_n}(t) = e^{n\left(\frac{it}{\sqrt{n}} - \frac{t^2}{2n} + o(1/n)\right) - it\sqrt{n}} \rightarrow e^{-\frac{t^2}{2}}$



## 2. 大数定律

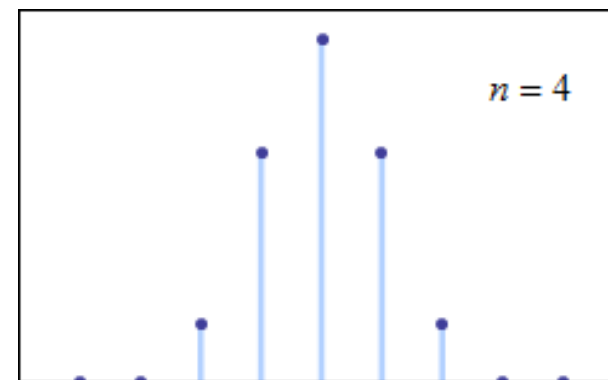
- ▶ **辛钦大数定律**:  $\{X_n\}$ 独立同分布, 且数学期望 $\mu = E(X_i)$ 存在, 则 $\{X_n\}$ 服从大数定律
- ▶ 也即对于任意 $\epsilon > 0$ ,  $\lim_{n \rightarrow \infty} P\left(\left|\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i - \mu\right| < \epsilon\right) = 1$
- ▶ 令  $Y_n = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i$ .  $\phi_{X_i}(t) = 1 + i\mu t + o(t)$
- ▶  $\phi_{Y_n}(t) = \left(1 + \frac{i\mu t}{n} + o\left(\frac{t}{n}\right)\right)^n \rightarrow e^{i\mu t}$

### 3. 中心极限定理

- ▶ 考虑独立同分布随机变量 $\{X_n\}$ ,  $E(X_n) = \mu$ ,  $\text{Var}(X_n) = \sigma^2$
- ▶ 大数定律:  $\frac{\sum_{i=1}^n X_n}{n} \xrightarrow{P} \mu$ , 也即  $\frac{\sum_{i=1}^n (X_n - \mu)}{n} \xrightarrow{P} 0$
- ▶ 令  $Y_n = \sum_{i=1}^n X_n$ ,  $Y_n$  的极限分布是什么?
- ▶ 令  $\tilde{Y}_n = \frac{Y_n - E(Y_n)}{\sigma(Y_n)} = \frac{\sum_{i=1}^n (X_n - \mu)}{\sqrt{n}\sigma}$  为  $Y_n$  的标准化
- ▶ 是否也有  $\tilde{Y}_n \xrightarrow{P} 0$ ?

### 3. 中心极限定理

- ▶ De Moivre-Laplace定理:
- ▶  $\{X_n\}$  为独立同分布, 服从参数为 $p$ 的伯努利分布的随机变量
- ▶  $Y_n = \sum_{i=1}^n X_n \sim B(n, p), \tilde{Y}_n = \frac{Y_n - E(Y_n)}{\sigma(Y_n)} = \frac{\sum_{i=1}^n (X_n - p)}{\sqrt{np(1-p)}}$  为  $Y_n$  的标准化
- ▶  $\tilde{Y}_n \xrightarrow{d} Z \sim N(0, 1)$
- ▶  $Y_n$  近似服从  $\pi(\lambda), \lambda = np$
- ▶ 若  $Y_n \sim \pi(\lambda), \tilde{Y}_n = \frac{Y_n - \lambda}{\sqrt{\lambda}} \xrightarrow{d} Z \sim N(0, 1)$



### 3. 中心极限定理

- ▶ Lindeberg-Lévy定理:
- ▶  $\{X_n\}$  独立同分布,  $E(X_n) = \mu$ ,  $\text{Var}(X_n) = \sigma^2$
- ▶  $Y_n = \sum_{i=1}^n X_n$ ,  $\tilde{Y}_n = \frac{Y_n - E(Y_n)}{\sigma(Y_n)} = \frac{\sum_{i=1}^n (X_n - \mu)}{\sqrt{n}\sigma}$  为  $Y_n$  的标准化
- ▶  $\tilde{Y}_n \xrightarrow{d} Z \sim N(0, 1)$
- ▶  $\phi_{X_n - \mu}(t) = 1 - \frac{\sigma^2}{2} t^2 + o(t^2)$
- ▶  $\phi_{\tilde{Y}_n}(t) = \left( \phi_{X_n - \mu} \left( \frac{t}{\sqrt{n}\sigma} \right) \right)^n = \left( 1 - \frac{t^2}{2n} + o \left( \frac{t^2}{n} \right) \right)^n \rightarrow e^{-\frac{t^2}{2}}$

### 3. 中心极限定理

- ▶ Berry-Esseen定理:
- ▶  $\{X_n\}$  独立同分布,  $E(X_n) = \mu$ ,  $\text{Var}(X_n) = \sigma^2$ ,  $E(|X_n - \mu|^3)$  有限
- ▶  $Y_n = \sum_{i=1}^n X_n$ ,  $\tilde{Y}_n = \frac{\sum_{i=1}^n (X_n - \mu)}{\sqrt{n}\sigma}$  为  $Y_n$  的标准化,  $Z \sim N(0, 1)$
- ▶ 对于任意  $x$ ,  $|P(\tilde{Y}_n \leq x) - P(Z \leq x)| \leq O(1) \cdot \frac{E(|X_n - \mu|^3)}{\sigma^3 \sqrt{n}}$
- ▶ 例:  $X_n \sim B(1, p)$ ,  $Y_n \sim B(n, p)$ ,  $\tilde{Y}_n = \frac{\sum_{i=1}^n (X_n - p)}{\sqrt{np(1-p)}}$ ,  $Z \sim N(0, 1)$
- ▶  $E(|X_n - \mu|^3) = p(1-p)(p^2 + (1-p)^2)$
- ▶ 对于任意  $x$ ,  $|P(\tilde{Y}_n \leq x) - P(Z \leq x)| \leq O(1) \cdot \frac{p^2 + (1-p)^2}{\sqrt{np(1-p)}}$

## 4. 应用举例

- ▶ 思考：使用随机数生成器的计算机程序的样本空间
  - ▶ 无限长的0/1随机序列
- ▶ 问题一：某计算机程序有1/3的概率崩溃，有2/3的概率返回正确的结果
- ▶ 如何通过重复运行提高得到正确结果的概率？
- ▶ 独立地重复运行 $T$ 次，成功概率为 $1 - \frac{1}{3^T}$
- ▶  $T = O(\log(1/\delta)) \Rightarrow$ 成功概率至少为 $1 - \delta$

## 4. 应用举例

- ▶ 问题二：某计算机程序有 $1/3$ 的概率返回错误的结果，有 $2/3$ 的概率返回正确的结果。假设只有一种正确的结果，错误的结果可能有多种。
- ▶ 如何通过重复运行来提高得到正确结果的概率？
- ▶ 独立地重复运行 $T$ 次，设返回的结果为 $\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_T$
- ▶ 输出 $\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_T$ 中**出现频率最高的结果**
- ▶ 事件 $A_i$ 表示第 $i$ 次运行返回错误的结果， $P(A_i) = 1/3$ ， $E(1_{A_i}) = 1/3$
- ▶ 出现频率最高的结果为错误结果 $\Rightarrow X = \sum_{i=1}^n 1_{A_i} \geq \frac{T}{2}$

## 4. 应用举例

- ▶ 问题二：某计算机程序有 $1/3$ 的概率返回错误的结果，有 $2/3$ 的概率返回正确的结果。假设只有一种正确的结果，错误的结果有多种。
- ▶ 如何通过重复运行来提高得到正确结果的概率？
- ▶ 事件 $A_i$ 表示第 $i$ 次运行返回错误的结果， $P(A_i) = 1/3$ ， $E(1_{A_i}) = 1/3$
- ▶ 出现频率最高的结果为错误结果  $\Rightarrow X = \sum_{i=1}^n 1_{A_i} \geq \frac{T}{2}$
- ▶  $X \sim B(T, 1/3)$ ， $E(X) = T/3$
- ▶ Chernoff bound:  $P(X - E(X) \geq T\epsilon) \leq e^{-2T\epsilon^2}$
- ▶  $\epsilon = 1/6 \Rightarrow P(X \geq T/2) \leq e^{-\frac{T}{18}}$
- ▶  $T = O(\log(1/\delta))$ ，成功概率至少为 $1 - \delta$



## 4. 应用举例

- ▶ 随机快速排序
- ▶ 假设：输入是 $(1, 2, \dots, n)$ 的排列
- ▶ 算法
  - ▶ 在当前数组中随机选择一个主元 (pivot)  $x$
  - ▶ 根据元素与  $x$  大小的关系，将其余元素分为  $L$  和  $R$
  - ▶ 递归处理  $L$  和  $R$
- ▶ 令随机变量  $T$  为算法的时间复杂度。如何计算  $E(T)$ ?
- ▶  $T = O\left(\sum_{i < j} 1_{C_{i,j}}\right)$ , 其中事件  $C_{i,j}$  为是否比较过  $i$  与  $j$

## 4. 应用举例

### ▶ 算法

- ▶ 在当前数组中随机选择一个主元 (pivot)  $x$
- ▶ 根据元素与  $x$  大小的关系, 将其余元素分为  $L$  和  $R$
- ▶ 递归处理  $L$  和  $R$

▶  $T = O\left(\sum_{i < j} 1_{C_{i,j}}\right)$ , 其中事件  $C_{i,j}$  为是否比较过  $i$  与  $j$

▶ 算法比较过  $i$  与  $j$ , 当且仅当  **$i$  或  $j$**  是  $\{i, i + 1, \dots, j\}$  中**首个**被选为主元的元素

▶ 
$$P(C_{i,j}) = \frac{2}{j-i+1}$$

▶ 
$$E(T) = \sum_{i < j} \frac{2}{j-i+1} = O(n \log n)$$

▶ 马尔可夫不等式:  $P(T \geq c \cdot E(T)) \leq 1/c$

## 4. 应用举例

### ► 算法

- 在当前数组中随机选择一个主元 (pivot)  $x$
- 根据元素与  $x$  大小的关系, 将其余元素分为  $L$  和  $R$
- 递归处理  $L$  和  $R$

### ► 令 $D_i$ 为元素 $i$ 被比较的次数。如何给出 $D_i$ 的尾不等式?

### ► 观察:

- 若某次选择的主元落在  $[0.25n, 0.75n]$ , 则元素  $i$  所在数组大小至少减少  $1/4$ 。
- 主元落在  $[0.25n, 0.75n]$  之间的概率为  $1/2$
- 若选择的主元落在  $[0.25n, 0.75n]$  的次数至少有  $3 \log n$ , 则  $i$  完成排序

$$- (3/4)^{3 \log n} \leq 1/n$$

### ► $P(D_i > 20 \log n) \leq P(X_i < 3 \log n)$ , 其中 $X_i \sim B(20 \log n, 1/2)$

## 4. 应用举例

### ▶ 算法

- ▶ 在当前数组中随机选择一个主元 (pivot)  $x$
- ▶ 根据元素与  $x$  大小的关系, 将其余元素分为  $L$  和  $R$
- ▶ 递归处理  $L$  和  $R$

### ▶ 令 $D_i$ 为元素 $i$ 被比较的次数

### ▶ $P(D_i > 20 \log n) \leq P(X_i < 3 \log n)$ , 其中 $X_i \sim B(20 \log n, 1/2)$

### ▶ Chernoff-Hoeffding不等式: 若 $X = \sum_{i=1}^n X_i$ , $X_i$ 相互独立且 $a \leq X_i \leq b$

- ▶  $P(X \geq E(X) + k) \leq e^{-\frac{2k^2}{n(b-a)^2}}$

- ▶  $P(X \leq E(X) - k) \leq e^{-\frac{2k^2}{n(b-a)^2}}$

### ▶ $P(X_i \leq 3 \log n) \leq e^{-4 \log n} \leq 1/n^4$

## 4. 应用举例

### ▶ 算法

- ▶ 在当前数组中随机选择一个主元 (pivot)  $x$
- ▶ 根据元素与  $x$  大小的关系, 将其余元素分为  $L$  和  $R$
- ▶ 递归处理  $L$  和  $R$

### ▶ 令 $D_i$ 为元素 $i$ 被比较的次数

▶  $P(D_i > 20 \log n) \leq P(X_i \leq 3 \log n)$ , 其中  $X_i \sim B(20 \log n, 1/2)$

▶  $P(X_i \leq 3 \log n) \leq e^{-4 \log n} \leq 1/n^4$

▶  $P(D_i > 20 \log n) \leq 1/n^4$

▶ Union Bound:  $P\left(\max_i D_i > 20 \log n\right) \leq 1/n^3$

▶  $P(T > 20 \cdot n \log n) \leq 1/n^3$

## 4. 应用举例

- ▶ 有 $n$ 个学生，每次选出一些学生进行拔河比赛，共进行 $m$ 次比赛
  - ▶ 将全部 $n$ 个学生分为固定的两组，使得 $m$ 次比赛尽量公平
- 
- ▶ 给定  $S_1, S_2, \dots, S_m \subseteq \{1, 2, \dots, n\}$
  - ▶ 对于  $\chi: \{1, 2, \dots, n\} \rightarrow \{-1, 1\}$ ，定义  $\text{disc}_\chi(S_i) = |\sum_{j \in S_i} \chi(j)|$
  - ▶ 找到  $\chi$  使得  $\max\{\text{disc}_\chi(S_1), \text{disc}_\chi(S_2), \dots, \text{disc}_\chi(S_m)\}$  尽量小

## 4. 应用举例

- ▶ 给定  $S_1, S_2, \dots, S_m \subseteq \{1, 2, \dots, n\}$
- ▶ 对于  $\chi: \{1, 2, \dots, n\} \rightarrow \{-1, +1\}$ , 定义  $\text{disc}_\chi(S_i) = |\sum_{j \in S_i} \chi(j)|$
- ▶ 找到  $\chi$  使得  $\max\{\text{disc}_\chi(S_1), \text{disc}_\chi(S_2), \dots, \text{disc}_\chi(S_m)\}$  尽量小
  
- ▶ 将  $\chi(j)$  独立等概率设为  $-1$  或  $+1$
- ▶ 如何给出  $\max\{\text{disc}_\chi(S_1), \text{disc}_\chi(S_2), \dots, \text{disc}_\chi(S_m)\}$  的上界?
  
- ▶ 考虑固定的  $i \in \{1, 2, \dots, m\}$ , 给出  $\text{disc}_\chi(S_i)$  的上界
- ▶ 对  $i \in \{1, 2, \dots, m\}$  使用 Union bound

## 4. 应用举例

- ▶ 对于  $\chi: \{1, 2, \dots, n\} \rightarrow \{-1, +1\}$ , 定义  $\text{disc}_\chi(S_i) = |\sum_{j \in S_i} \chi(j)|$
- ▶ 对于固定的  $i \in \{1, 2, \dots, m\}$
- ▶  $E\left(\sum_{j \in S_i} \chi(j)\right) = \sum_{j \in S_i} E(\chi(j)) = 0$
- ▶ Chernoff-Hoeffding不等式: 若  $X = \sum_{i=1}^n X_i$ ,  $X_i$  相互独立且  $a \leq X_i \leq b$ 
  - ▶  $P(X \geq E(X) + k) \leq e^{-\frac{2k^2}{n(b-a)^2}}$
  - ▶  $P(X \leq E(X) - k) \leq e^{-\frac{2k^2}{n(b-a)^2}}$
- ▶  $P\left(\sum_{j \in S_i} \chi(j) \geq k\right) \leq e^{-\frac{k^2}{2n}}, \quad P\left(\sum_{j \in S_i} \chi(j) \leq -k\right) \leq e^{-\frac{k^2}{2n}}$
- ▶  $P(\text{disc}_\chi(S_i) \geq k) \leq 2 \cdot e^{-\frac{k^2}{2n}}$



## 4. 应用举例

- ▶ 给定  $S_1, S_2, \dots, S_m \subseteq \{1, 2, \dots, n\}$
- ▶ 对于  $\chi: \{1, 2, \dots, n\} \rightarrow \{-1, +1\}$ , 定义  $\text{disc}_\chi(S_i) = |\sum_{j \in S_i} \chi(j)|$
- ▶ 找到  $\chi$  使得  $\max\{\text{disc}_\chi(S_1), \text{disc}_\chi(S_2), \dots, \text{disc}_\chi(S_m)\}$  尽量小
- ▶ 将  $\chi(j)$  独立等概率设置为  $-1$  或  $+1$
- ▶ 对于固定的  $i \in \{1, 2, \dots, m\}$ ,  $P(\text{disc}_\chi(S_i) \geq k) \leq 2e^{-\frac{k^2}{2n}}$
- ▶  $P(\max\{\text{disc}_\chi(S_1), \text{disc}_\chi(S_2), \dots, \text{disc}_\chi(S_m)\} \geq k) \leq 2m \cdot e^{-\frac{k^2}{2n}}$
- ▶  $P(\max\{\text{disc}_\chi(S_1), \text{disc}_\chi(S_2), \dots, \text{disc}_\chi(S_m)\} \geq \sqrt{n \log m}) \leq \frac{1}{2}$
- ▶ 如何设计成功概率至少为  $1 - \delta$  的算法?

## 4. 应用举例

- ▶ 给定数据  $x_1, x_2, \dots, x_n \in \mathbb{R}^d$
- ▶ 设计映射  $F: \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^k$ , 使得对于任意  $1 \leq i, j \leq n$ ,
  - ▶  $(1 - \epsilon)|x_i - x_j|_2^2 \leq |F(x_i) - F(x_j)|_2^2 \leq (1 + \epsilon)|x_i - x_j|_2^2$
- ▶ 应用: 压缩高维数据到低维 ( $k$  尽量小), 保留距离信息
- ▶ 构造随机映射  $F: \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^k$ , 对固定的  $i, j$  证明  $|F(x_i) - F(x_j)|_2^2 \in (1 \pm \epsilon)|x_i - x_j|_2^2$
- ▶ 对全部  $i, j$  使用 Union bound
- ▶ 回顾: 若  $X_i$  独立同分布, 且  $X_i \sim N(0, 1)$ , 则  $\sum_{i=1}^d a_i X_i \sim N(0, |a|_2^2)$
- ▶ 考虑  $k \times d$  矩阵  $A$ ,  $A$  每个元素均服从  $N(0, 1)$ , 且不同元素相互独立
- ▶ 对于固定向量  $x \in \mathbb{R}^d$ , 向量  $Ax$  服从何种分布?

## 4. 应用举例

- ▶ 考虑  $k \times d$  矩阵  $A$ ,  $A$  每个元素均服从  $N(0,1)$ , 且不同元素相互独立
- ▶ 对于固定向量  $x \in \mathbb{R}^d$ , 向量  $y = Ax$  服从何种分布?
  - ▶  $y_i \sim N(0, |x|_2^2)$ , 且  $y$  不同元素相互独立
- ▶ 令  $z = \frac{y}{|x|_2}$ , 则  $z_i \sim N(0,1)$ , 且  $z$  的不同元素相互独立
- ▶  $|z|_2^2 = z_1^2 + z_2^2 + \cdots + z_k^2 = |y|_2^2 / |x|_2^2$
- ▶  $E(|z|_2^2) = k$ ,  $P(|z|_2^2 \geq (1 + \epsilon) \cdot k) \leq e^{-k\epsilon^2/8}$ ,  $P(|z|_2^2 \leq (1 - \epsilon) \cdot k) \leq e^{-k\epsilon^2/8}$
- ▶  $P(|z|_2^2 \notin (1 \pm \epsilon)k) \leq 2e^{-k\epsilon^2/8} \Rightarrow P(|y|_2^2 / |x|_2^2 \notin (1 \pm \epsilon)k) \leq 2e^{-k\epsilon^2/8}$
- ▶  $P(|y|_2^2 \notin (1 \pm \epsilon) \cdot k \cdot |x|_2^2) \leq 2e^{-k\epsilon^2/8} \Rightarrow P(|Ax|_2^2 \notin (1 \pm \epsilon) \cdot k \cdot |x|_2^2) \leq 2e^{-k\epsilon^2/8}$
- ▶  $P\left(\left|\frac{1}{\sqrt{k}}Ax\right|_2^2 \notin (1 \pm \epsilon)|x|_2^2\right) \leq 2e^{-k\epsilon^2/8}$
- ▶ 定义  $F(x) = \frac{1}{\sqrt{k}}Ax$

## 4. 应用举例

- ▶ 定义  $F(x) = \frac{1}{\sqrt{k}} Ax$ ,  $F(x_i) - F(x_j) = \frac{1}{\sqrt{k}} A(x_i - x_j)$
- ▶ 对固定的  $1 \leq i, j \leq n$ , 令  $x = x_i - x_j$ ,
  - ▶  $P\left(\left|\frac{1}{\sqrt{k}} Ax\right|_2^2 \notin (1 \pm \epsilon)|x|_2^2\right) \leq 2e^{-k\epsilon^2/8}$
  - ▶  $P\left(\left|\frac{1}{\sqrt{k}} A(x_i - x_j)\right|_2^2 \notin (1 \pm \epsilon)|x_i - x_j|_2^2\right) \leq 2e^{-k\epsilon^2/8}$
- ▶ 事件  $E$  表示:  $|F(x_i) - F(x_j)|_2^2 \in (1 \pm \epsilon)|x_i - x_j|_2^2$  对全部  $1 \leq i, j \leq n$  成立
- ▶  $P(\overline{E}) \leq 2e^{-\frac{k\epsilon^2}{8}} \cdot \frac{n(n-1)}{2} \leq e^{-\frac{k\epsilon^2}{8}} \cdot n^2$
- ▶  $k = O\left(\frac{\log n}{\epsilon^2}\right) \Rightarrow P(E) \geq \frac{1}{2}$

## 4. 应用举例

- ▶ Johnson-Lindenstrauss Lemma
- ▶ 给定  $x_1, x_2, \dots, x_n \in \mathbb{R}^d$ , 存在  $F: \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^k$ ,  $k = O\left(\frac{\log n}{\epsilon^2}\right)$
- ▶ 对于任意  $1 \leq i, j \leq n$ ,  $(1 - \epsilon)|x_i - x_j|_2^2 \leq |F(x_i) - F(x_j)|_2^2 \leq (1 + \epsilon)|x_i - x_j|_2^2$
- ▶  $F = \frac{1}{\sqrt{k}}Ax$ ,  $A$  每个元素均服从  $N(0,1)$ , 且不同元素相互独立
- ▶ 等价形式:  $F = Ax$ ,  $A$  每个元素均服从  $N(0,1/k)$ , 且不同元素相互独立
- ▶  $F$  与数据  $x_1, x_2, \dots, x_n$  无关, 可被高效构造
- ▶  $F$  是一个线性变换
- ▶ 最终维度与初始维度  $d$  无关, 与数据数量  $n$  仅为对数关系