Question 1

1. 将问题转化为求 $\sum_{k=1}^{n} p_i$, 其中 p_i 表示所有事件中恰好有 i 个事件发生的概率, 可以写成

$$p_k = \sum_{1 \le i_1 < \ldots < i_k \le n} P\left(A_{i_1} \ldots A_{i_k}\right)$$

于是只需要证明给出的公式中 $P\left(A_{i_1} \ldots A_{i_k}\right)$ 恰好被计算了一次. 实际上有

$$\binom{k}{1} - \binom{k}{2} + \ldots + (-1)^{k-1}\binom{k}{k} = -(1+t)^k + 1, \quad t := -1$$

于是左式为 1, 明所欲证. □

2. 采用第一归纳法. $n = 1, 2$ 的情形不等式显然成立.

若 $n = k$ 时结论成立, 则 $n = k + 1$ 时有

$$\begin{aligned} P\left(\bigcup_{i=1}^{k+1} A_i\right) &= P\left(\left(\bigcup_{i=1}^{k} A_i\right) \cup A_{k+1}\right) \\ &\le P\left(\bigcup_{i=1}^{k} A_i\right) + P(A_{k+1}) \\ &\le \sum_{i=1}^{k+1} P(A_i). \end{aligned}$$

□

3. 采用第一归纳法. $n = 1, 2$ 的情形根据定义成立.

若 $n = k$ 时结论成立, 则 $n = k + 1$ 时有

$$\begin{aligned} P(A_1 \ldots A_{k+1}) &= P(A_1 \ldots A_k) P(A_{k+1} \mid A_1 \ldots A_k) \\ &= P(A_1) P(A_2 \mid A_1) \ldots P(A_{k+1} \mid A_1 \ldots A_k). \end{aligned}$$

□

Question 2

1. 构造如下反例: 现有随机变量 $X \in [0, 2\pi]$, $A : X \in \left[0, \frac{3}{2}\pi\right], B : X \in [0, \pi] \cup \left[\frac{3}{2}\pi, 2\pi\right]$, $C : X \in [0, \pi]$. 此时 A, B 在条件 C 下独立, 在条件 $\overline{C}$ 下互斥.

2. 构造如下反例: X 构造同上, 令 $A : X \in [0, \pi], B : X \in \left[\frac{1}{2}\pi, \frac{3}{2}\pi\right], C : X \in \left[\frac{1}{2}\pi, \pi\right] \cup \left[\frac{3}{2}\pi, 2\pi\right]$. 此时 A, B 独立但在条件 C 下有 $P(A \mid C) = P(B \mid C) = P(AB \mid C) = \frac{1}{2}$.

3. 该命题是正确的, 证明如下:

$$\begin{aligned} P\left(A\overline{B}\right) &= P(A) - P(AB) \\ &= P(A)(1 - P(B)) = P(A) P\left(\overline{B}\right). \end{aligned}$$

□

Question 3

已知

$$\begin{aligned}
\ln P_{n,m} &= \ln\left(1-\frac{1}{m}\right)+...+\ln\left(1-\frac{n-1}{m}\right)\\
&= \left(-\frac{1}{m}-\frac{1}{2m^2}+O\left(\frac{1}{m^3}\right)\right)+...+\left(-\frac{n-1}{m}-\frac{(n-1)^2}{2m^2}+O\left(\frac{n^2}{m^3}\right)\right)\\
&= -\frac{n(n-1)}{2m}-\frac{(n-1)n(2n-1)}{12m^2}+O\left(\frac{n^3}{m^3}\right)\\
&= -\frac{n(n-1)}{2m}+O\left(\frac{n^3}{m^2}\right).
\end{aligned}$$

结合 $e^x = 1 + O(x)$, 明所欲证. □

Question 4

1. 对于给定的 k, 任意玩家有 $\frac{k}{n}$ 的概率在 k 人队伍中, $\frac{n-k}{n}$ 的概率在另一队中. 于是所求为

$$p_k = \frac{1}{n-1}\left(\frac{k}{n}+\frac{n-k}{n}\right) = \frac{1}{n-1}.$$

2. 令事件 A 表示“第一个玩家成为队长”, 事件 B 表示“第一个玩家所在队伍有 k 个人”, 则

$$p(AB) = p_k \cdot \frac{1}{k} = \frac{1}{k(n-1)},$$

$$p(A) = \frac{1}{n-1}\sum_{k=1}^{n-1}\left(\frac{k}{n}\cdot\frac{1}{k}+\frac{n-k}{n}\cdot\frac{1}{n-k}\right) = \frac{2}{n}.$$

于是所求为

$$P(B \mid A) = \frac{P(AB)}{P(A)} = \frac{n}{2k(n-1)}.$$

Question 5

设事件 A 为“两次检验至少有一次为阳性”, 事件 B 为“该受检者患病”. 则

$$P(B \mid A) = \frac{P(AB)}{P(AB)+P\left(A\overline{B}\right)}$$

其中

$$
\begin{aligned}
P(AB) &= P(B)P(A \mid B) \\
&= p(1-(1-p_1)(1-p_2)) \\
&= p(p_1+p_2-p_1p_2), \\
P\left(A\overline{B}\right) &= P\left(\overline{B}\right)P\left(A \mid \overline{B}\right) \\
&= (1-p)(1-(1-q_1)(1-q_2)) \\
&= (1-p)(q_1+q_2-q_1q_2).
\end{aligned}
$$

于是所求即为

$$
P(B \mid A) = \frac{p(p_1+p_2-p_1p_2)}{p(p_1+p_2-p_1p_2)+(1-p)(q_1+q_2-q_1q_2)}.
$$

Question 6

1. 各场比赛之间的胜负情况相互独立, 于是所求即为 $\prod_{v\in V}\frac{1}{2}=\frac{1}{2^k}$.
2. 由上一问可知 $P\left(\overline{A_{V,v}}\right)=1-\frac{1}{2^k}$, 所求即为

$$
\begin{aligned}
P(B_V) &= 1-P\left(\overline{B_V}\right) \\
&= 1-\prod_{v\notin V} P\left(\overline{A_{V,v}}\right) \\
&= 1-\left(1-\frac{1}{2^k}\right)^{n-k}.
\end{aligned}
$$

3. 直接写出

$$
\begin{aligned}
P(C) = 1-P\left(\overline{C}\right) &= 1-P\left(\bigcup_{|V|=k}\overline{B_V}\right) \\
&\geq 1-\sum_{|V|=k} P\left(\overline{B_V}\right) \\
&= 1-\binom{n}{k}\left(1-\frac{1}{2^k}\right)^{n-k}.
\end{aligned}
$$

明所欲证. □

4. 沿用上一问的结论, 我们的目标是证明 $n\sim O\left(k^2\cdot 2^k\right)$ 时 $P(C)>0$. 令 $n:=\alpha\cdot k^2\cdot 2^k$, 有

$$
\begin{aligned}
A := \ln\left(\binom{n}{k}\left(1-\frac{1}{2^k}\right)^{n-k}\right) &= \ln\binom{n}{k}+(n-k)\ln\left(1-\frac{1}{2^k}\right) \\
&\leq k\ln n+(n-k)\left(-\frac{1}{2^k}\right) \\
&= k(2\ln k+k\ln 2+\ln\alpha)+\left(\alpha\cdot k^2\cdot 2^k\right)\left(-\frac{1}{2^k}\right)+\frac{k}{2^k} \\
&= 2k\ln k+k^2\ln 2+k\ln\alpha-\alpha\cdot k^2+\frac{k}{2^k} \\
&\to -\infty \quad (k \text{ fixed}, \alpha\to+\infty)
\end{aligned}
$$

于是对于任意的 k, 总存在 α 使得

$$\begin{aligned}P(C) &\geq 1-\binom{n}{k}\left(1-\frac{1}{2^k}\right)^{n-k}\\&=1-\exp(A)\geq 1-\exp\left(\frac{1}{2}\right)>0.\end{aligned}$$

明所欲证. $\square$