行列式

1.1 行列式的概念和基本性质

CONTENTS

PART ONE

1.1 行列式的定义

行列式的定义

回顾：用消元法解下列二元一次方程

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = b_2. \end{cases}$$

分子、分母都是四个数分两对相乘再相减，其中分母$a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$由方程的系数确定的。

当$a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} \neq 0$时，解得

$$x_1 = \frac{b_1a_{22} - a_{12}b_2}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}}, \quad x_2 = \frac{a_{11}b_2 - b_1a_{21}}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}}.$$

定义 二阶行列式

a_{ij}表示i行j列的元素

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}.$$

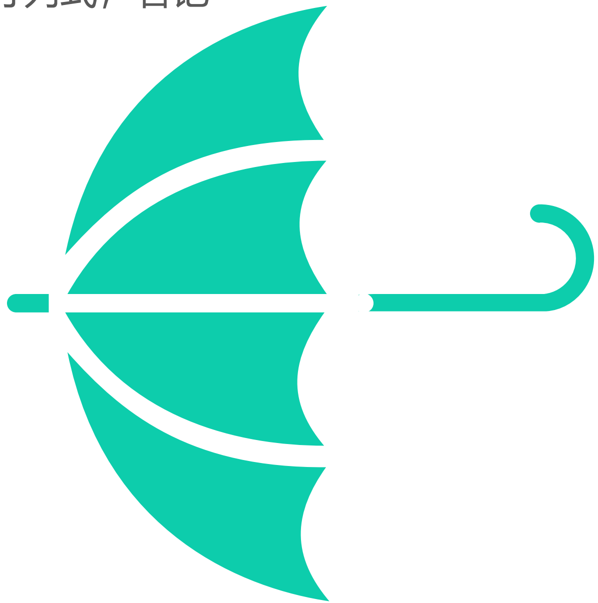
行列式的定义

利用二阶行列式的概念，上式的解的分子也可以写成二阶行列式，若记

$$D_1 = b_1 a_{22} - a_{12} b_2 = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix}$$

$$D_2 = a_{11} b_2 - b_1 a_{21} = \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix}$$

$$D = a_{11} a_{22} - a_{12} a_{21} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$$



则解可以写成

$$x_1 = \frac{D_1}{D}, \quad x_2 = \frac{D_2}{D}$$

行列式的定义

【练习】1.计算下列行列式

（1） $\begin{vmatrix} 3 & -2 \\ 4 & -7 \end{vmatrix}$

（2） $\begin{vmatrix} sin\partial & cos\partial \\ -cos\partial & sin\partial \end{vmatrix}$

2. 求解二元线性方程组

$$\begin{cases} 3x_1 - 2x_2 = 12, \\ 2x_1 + x_2 = 1. \end{cases}$$

行列式的定义

三阶行列式

排列的逆序数

偶排列，符号为正

基排列，符号为负

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \boxed{a_{11}a_{22}a_{33}+a_{12}a_{23}a_{31}+a_{13}a_{21}a_{32}}\boxed{-a_{13}a_{22}a_{31}-a_{12}a_{21}a_{33}-a_{11}a_{23}a_{32}}$$

【练习】计算下列行列式

（1）$\begin{vmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 1 & -4 & -1 \\ -1 & 8 & 3 \end{vmatrix}$

（2）$\begin{vmatrix} x & y & x+y \\ y & x+y & x \\ x+y & x & y \end{vmatrix} = -2x^3-2y^3$

行列式的定义

n阶行列式

由n^2个数组成的计算符号

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

称为n阶行列式，常用符号D， D_n， $det(a_{ij})$， $|a_{ij}|$.

PART TWO

1.2 行列式的性质

行列式的性质

定义（转置行列式）

将行列式 $$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

的各行改成同序号的列，所得到的新行列式称为D的转置行列式，记作D^T

$$D^T=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{n1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{n2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

行列式的性质

1

性质 1

行列式与它的转置行列式相等，即

$$D = D^T.$$

2

性质 2

交换行列式的两行（或两列），行列式变号.

推论

如果行列式的两行（或两列）对应元素相同，则此行列式的值为零.

3

性质 3

如果行列式的某一行（或列）有公因子k，则k可以提到行列式符号之外.

行列式的性质

推论

以数 $k \neq 0$ 乘行列式，等于以k乘行列式的某一行（或列）的各个元素.

4

性质 4

如果行列式有两行（或列）的对应元素成比例，则此行列式的值为零.

5

性质 5

把行列式的某一行（或列）乘以非零常数k，加到另一行（或列）的对应元素上，行列式的值不变.

行列式的定义

【练习】1. 用行列式的性质求行列式的值

（1）$\begin{vmatrix} a & a^2 \\ b & b^2 \end{vmatrix}$

（2）$\begin{vmatrix} -ab & ac & ae \\ bd & -cd & de \\ bf & cf & -ef \end{vmatrix} = 4abcdef$

PART THREE

1.3 三角行列式与对角行列式

三角行列式与对角行列式

上三角行列式

主对角线左下方的元素全是零的行列式称为上三角行列式.

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}=a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}=\prod_{i=1}^{n} a_{ii}$$

三角行列式与对角行列式

下三角行列式

主对角线右上方的元素全是零的行列式称为下三角行列式.

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}=a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}=\prod_{i=1}^{n}a_{ii}$$

三角行列式与对角行列式

对角行列式

主对角线上元素不全是零，其他元素全是零的行列式称为对角行列式.

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}=a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}=\prod_{i=1}^{n}a_{ii}$$

三角行列式与对角行列式

次三角行列式和次对角行列式

次对角线右下方（或左上方）的元素全为零的行列式称为次三角行列式.

$$\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1(n-1)} & a_{1n} \\ a_{21} & \cdots & a_{2(n-1)} & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & 0 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & \cdots & 0 & a_{1n} \\ 0 & \cdots & a_{2(n-1)} & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{n(n-1)} & a_{nn} \end{vmatrix} = (-1)^{\frac{1}{2}n(n-1)} a_{1n}a_{2(n-1)}\cdots a_{n1}$$

三角行列式与对角行列式

次三角行列式和次对角行列式

次对角线上的元素不全为零，其他元素全是零的行列式称为次对角行列式.

$$\begin{vmatrix} 0 & \cdots & 0 & a_{1n} \\ 0 & \cdots & a_{2(n-1)} & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & 0 & 0 \end{vmatrix} = (-1)^{\frac{1}{2}n(n-1)} a_{1n}a_{2(n-1)}\cdots a_{n1}$$

PART FOUR

1.4 三角化行列式

三角化行列式

行列式的运算符号及书写规则

交换运算

交换第i行与第j行：$r_i \leftrightarrow r_j$

交换第i列与第j列：$c_i \leftrightarrow c_j$

倍加运算

第i行的k倍加到第j行上：$kr_i + r_j$

第i列的k倍加到第j列上：$kc_i + c_j$

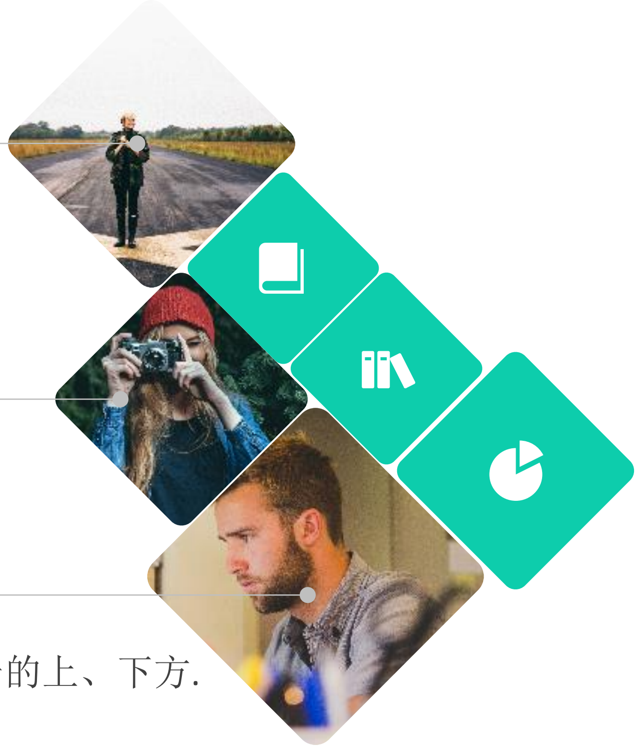
书写规则

按照运算的先后次序，按竖式的运算符号写在拉长的等号的上、下方.

先做交换运算，后做倍加运算.

同列上的倍加运算按次序先后一步完成.

不可以按横式排序书写运算符号.



三角化行列式

三角化行列式的运算程序

01

如果 $a_{11} = 1$

则用倍加运算把第1列$a_{11} = 1$下方的元素全化为0.

02

如果 $a_{11} \neq 1$

若行列式的第1行（或列）中有1，则用加法运算使$a_{11} = 1$.

03

如果 $a_{11} \neq 1$

若行列式的第1行（或列）中有没有1，则用性质3从第1行中提取公因子a，使$a_{11} = 1$.

04

从a_{22}开始重复以上步骤，直至把行列式化为三角行列式.

三角化行列式

【练习】1.利用三角化行列式的方法，计算下列行列式

（1）

$$D=\begin{vmatrix} 1 & 3 & -1 & 2 \\ 1 & -5 & 3 & -4 \\ 0 & 2 & 1 & -1 \\ -5 & 1 & 3 & -3 \end{vmatrix}$$

（2）

$$D=\begin{vmatrix} 0 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 0 & -5 \\ 3 & 4 & 1 & 0 \\ 4 & 6 & 8 & 5 \end{vmatrix}$$

三角化行列式

【练习】1.利用三角化行列式的方法，计算下列行列式

（3）
$$\begin{vmatrix} 3 & 1 & -1 & 2 \\ -5 & 1 & 3 & -4 \\ 1 & 3 & -2 & 2 \\ 1 & -5 & 3 & -3 \end{vmatrix}$$

2. 行列式$\begin{vmatrix} 2 & 3 & -2x \\ 0 & x & -2 \\ -7 & x^2 & 6 \end{vmatrix}$展开式中$x^2$项的系数为?

三角化行列式

3. 已知$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = m$，则

$$\begin{vmatrix} a_1 + 2b_1 & b_1 - c_1 & c_1 + 3a_1 \\ a_2 + 2b_2 & b_2 - c_2 & c_2 + 3a_2 \\ a_3 + 2b_3 & b_3 - c_3 & c_3 + 3a_3 \end{vmatrix} =$$

三角化行列式

【作业】1. 计算下列行列式

（1）$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 1 \end{vmatrix}$

（2）$\begin{vmatrix} 1 & a & a^2 \\ 1 & b & b^2 \\ 1 & c & c^2 \end{vmatrix}$

（3）$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 4 \\ 8 & 9 & 5 \end{vmatrix}$

（4）$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \\ 4 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}$

三角化行列式

2. 利用三角化行列式的方法，计算下列行列式

（1）

$$D=\begin{vmatrix}1 & 1 & 1 & 1\\ -1 & 1 & 1 & 1\\ -1 & -1 & 1 & 1\\ -1 & -1 & -1 & 1\end{vmatrix}$$

（2）

$$D=\begin{vmatrix}1 & 2 & 3 & -1\\ 1 & -1 & 0 & 2\\ 0 & 1 & 0 & 1\\ 0 & 0 & -1 & 2\end{vmatrix}$$

行列式

1.2 行列式按行（列）展开

CONTENTS

- 行列式按一行（列）展开
- 行列式的计算方法

PART ONE

2.1 行列式按一行（列）展开

行列式按一行（或列）展开

定义 3 （余子式、代数余子式）

在n阶行列式中，划去元素a_{ij}所在的第i行第j列，所余的n-1阶行列式，称为元素a_{ij}的余子式，记为M_{ij}，称

$$A_{ij}=(-1)^{i+j}M_{ij}$$

为元素a_{ij}的代数余子式.

【练习】1. 设

$$D=\begin{vmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 1 & -4 & -1 \\ -1 & 8 & 3 \end{vmatrix}$$

则$M_{11},A_{11},M_{12},A_{12},M_{13},A_{13}$为?

行列式按一行（或列）展开

2. 设$D=\begin{vmatrix}1 & 2 & 3\\ a & 1 & b\\ 3 & 1 & 2\end{vmatrix}$，已知$D=0$且$M_{11}+M_{12}+M_{13}=11$，求$a,b$.

行列式按一行（或列）展开

引理

如果n阶行列式D的第i行除a_{ij}外，其他元素全为0，则D等于a_{ij}与它的代数余子式的乘积，即

$$D = a_{ij}A_{ij}.$$

行列式按一行（或列）展开

定理 1　（行列式按行（列）展开法则一）

n阶行列式等于它的任意一行（或列）的各元素与其对应的代数余子式乘积的和，把行列式D按第i行展开，有

$$D = a_{i1}A_{i1} + a_{i2}A_{i2} + \cdots + a_{in}A_{in} = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}A_{ij}$$

把行列式D按第j列展开，有

$$D = a_{1j}A_{1j} + a_{2j}A_{2j} + \cdots + a_{nj}A_{nj} = \sum_{i=1}^{n} a_{ij}A_{ij}$$

行列式按一行（或列）展开

定理 2 （行列式按行（列）展开法则二）

n阶行列式的任意一行（或列）的各元素与另一行（或列）对应元素的代数余子式乘积的和等于零，即$i \neq j$时，有

$$a_{i1}A_{j1} + a_{i2}A_{j2} + \cdots + a_{in}A_{jn} = 0,$$

$$a_{1i}A_{1j} + a_{2i}A_{2j} + \cdots + a_{ni}A_{nj} = 0.$$

综上所述，有

$$\sum_{k=1}^{n} a_{ik}A_{jk} = \begin{cases} 0, i \neq j \\ D, i = j \end{cases}, \quad \sum_{k=1}^{n} a_{ki}A_{kj} = \begin{cases} 0, i \neq j \\ D, i = j \end{cases}.$$

行列式按一行（或列）展开

【练习】1.利用行列式的展开计算下列行列式

$$D=\begin{vmatrix}2 & -1 & 0\\ 1 & 1 & 2\\ 3 & -1 & 2\end{vmatrix}\qquad D=\begin{vmatrix}1 & -5 & 1 & 3\\ 1 & 1 & 3 & 4\\ 1 & 1 & 2 & 3\\ 2 & 2 & 3 & 4\end{vmatrix}$$

行列式按一行（或列）展开

2. 设

$$D=\begin{vmatrix} -2 & 2 & -2 & 2 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 3 & 5 \end{vmatrix}，计算$$

（1）$A_{41}+A_{42}+A_{43}+A_{44}$；

（2）$M_{41}+M_{42}+M_{43}+M_{44}$.

PART TWO

2.2 行列式的计算方法

行列式的计算方法

1、降阶法

应用行列式按行（列）展开法则计算行列式的方法称为降阶法. 运算诀窍“找1，0多”的行、列.

【练习】计算下列行列式

$$D=\begin{vmatrix} 2 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 4 & -1 \\ 0 & 2 & 4 & 1 \\ -2 & 0 & 3 & 2 \end{vmatrix}$$

$$D=\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & -1 \\ 1 & -1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 3 & -4 & -1 & -2 \end{vmatrix}$$

行列式的计算方法

2、叠加法

行列式的各行（列）对应元素之和是同一个常数$k(k \neq 0)$

【练习】计算下列行列式

$$D_n = \begin{vmatrix} a & b & \cdots & b \\ b & a & \cdots & b \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ b & b & \cdots & a \end{vmatrix}$$

方法归纳

（1）把第$2,3,\cdots n$行（列）加到第1行（列）上;

（2）用-1乘以第1列（行）加到其他各列（行）上;

（3）按第1列（行）展开.

行列式的计算方法

【练习】计算下列行列式

（1）$D=\begin{vmatrix} 0 & a & b & c \\ a & 0 & b & c \\ a & b & 0 & c \\ a & b & c & 0 \end{vmatrix}$

（2）$D=\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 1 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \\ 4 & 1 & 2 & 3 \end{vmatrix}$

（3）$D=\begin{vmatrix} a & b & c & d \\ a & a+b & a+b+c & a+b+c+d \\ a & 2a+b & 3a+2b+c & 4a+3b+2c+d \\ a & 3a+b & 6a+3b+c & 10a+6b+3c+d \end{vmatrix}$

行列式

1.3 克莱姆法则

克莱姆法则

含有n个未知函数的n个线性方程的方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \cdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n = b_n \end{cases}$$

如果上述线性方程组的系数行列式不等于零，那么方程组有唯一解

$$x_1 = \frac{D_1}{D}, x_2 = \frac{D_2}{D}, \cdots, x_n = \frac{D_n}{D}$$

其中系数行列式$D = \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$，$D_j = \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1,j-1} & b_1 & a_{1,j+1} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{n,j-1} & b_n & a_{n,j-1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$

克莱姆法则

【练习】1.利用克莱姆法则解线性方程组

$$(1)\quad \begin{cases} 3x_1 + x_2 + 4x_3 = 8 \\ -2x_1 + 3x_2 - x_3 = 9 \\ x_1 - x_2 + x_3 = -2 \end{cases}$$

$$(2)\quad \begin{cases} 2x_1 + x_2 - 5x_3 + x_4 = 8 \\ x_1 - 3x_2 - 6x_4 = 9 \\ 2x_2 - x_3 + 2x_4 = -5 \\ x_1 + 4x_2 - 7x_3 + 6x_4 = 0 \end{cases}$$

克莱姆法则

定理 1

如果线性方程组的系数行列式$D \neq 0$，则该方程组一定有唯一解

如果线性方程组无解或有多解，则它的系数行列式的值为零。

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \cdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n = b_n \end{cases}$$

如果b_1，b_2，$\cdots$，b_n全为零，该线性方程组称为**齐次线性方程组**；反之，称为**非齐次线性方程组**。

齐次线性方程组一定有一个零解，

即$x_1 = x_2 = \cdots = x_n = 0$。

定理 2

如果齐次线性方程组的系数行列式 $D \neq 0$ ，则该方程组没有非零解。逆否定理：

如果齐次线性方程组有非零解，则它的系数行列式值为零。

克莱姆法则

【练习】2.问λ,μ为何值时，齐次线性方程组有非零解

(1) $$\begin{cases}(5-\lambda)x_1+2x_2+2x_3=0\\ 2x_1+(6-\lambda)x_2=0\\ 2x_1+(4-\lambda)x_3=0\end{cases}$$

(2) $$\begin{cases}\lambda x_1+x_2+x_3=0\\ x_1+\mu x_2+x_3=0\\ x_1+2\mu x_2+x_3=0\end{cases}$$

THANKS