1 Allgemeines

1.1 Gruppen

Brauchen:

- Assoziativität: $a \circ (b \circ c) = (a \circ b) \circ c$
- neutrales Element: $\exists e \in G, a \circ e = a$
- inverses Element: $\exists a^{-1} \in G, a \circ a^{-1} = e$
- Kommutativität: $a \circ b = b \circ a$

1.1.1 Untergruppen

Brauchen:

- $U \subseteq G$
- U ist eine Gruppe (siehe Gruppe)

1.2 Potenzgesetze

$a^m \cdot a^n = a^{m+n}$	$\frac{a^n}{b^n} = (\frac{a}{b})^n$
$a^n \cdot b^n = (ab)^n$	$(a^n)^m = a^{mn}$
$\frac{a^n}{a^m} = a^{n-m}$	$a^{-n} = \frac{1}{a^n}$
	$log_b(1) = 0$

1.3 Logarithmus-Gesetze

$x = log_a(y) \Leftrightarrow y = a^x$
$log(x) + log(y) = log(xy)$
$log(x) - log(y) = log(\frac{x}{y})$
$log_a(x) = \frac{log_b(x)}{log_b(a)}$
$log(u^r) = r \cdot ln(u)$

$ln(1) = 0$	$ln(e^x) = x$
$ln(e) = 1$	$e^{ln(x)} = x$

1.4 Komplexe Zahlen

$(a+bi) \pm (c+di) = (a \pm c) + (c \pm d)i$
$(a+bi) \cdot (c+di) = (ac-bd) + (ad+bc)i$

$$\frac{a+bi}{c+di} = \frac{ac+bd}{c^2+d^2} + \frac{cb-ad}{c^2+d^2}i$$

1.5 Nett to know

- e^x hat keine Nullstelle
- $\log(\sqrt{x}) = \frac{\log(x)}{2}$
- $\log_a(b) = c \rightarrow a^c = b$
- $\log_x(b^x) = x$

2 Permutationen

Ausführliche Darstellung: $\pi_1 = \binom{1\,2\,3\,4\,5}{3\,2\,1\,5\,4}$
Zyklische Darstellung: $\pi_1 = (13)(45)$
Komposition von Hinten anfangen:
e.g. $\pi_1 \circ \pi_2 = (13)(45) \circ (2534) = (34521)$
Bei π^{-1}: Zeilen vertauschen.

3 Determinanten, Eigenwerte, Eigenvektoren

3.1 Determinante

A = $\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 5 & 1 \end{pmatrix}$ $det(A) = (2*1) - (5*3) = -13$

3x3-Matrix:
$det(B) = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33}$

3.1.1 Gauss

Wenn eine Matrix in Dreiecksform ist, dann kann ihre Determinante an ihrer Hauptdiagonalen abgelesen werden.
Wenn eine Zeile der Matrix multipliziert wird, muss die Determinante mit dem Kehrwert multipliziert werden.

$G = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$ $G' = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 6 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$
$\rightarrow det(G) = \frac{1}{2} det(G')$

3.2 Eigenwert

$$det(A - E\lambda) = \begin{pmatrix} 2-\lambda & 3 \\ 5 & 1-\lambda \end{pmatrix} =$$
$(2-\lambda)(1-\lambda) - 5*3 = \lambda^2 - 3\lambda + 2 - 15$
pq-Formel und gib ihm: $-\frac{p}{2} \pm \sqrt{(\frac{p}{2})^2 - q}$

3.3 Eigenvektor

Für jeden Eigenwert kann man einen Eigenvektor aufstellen, indem man folgende Gleichung löst:
$(A - \lambda_i E) * \vec{x} = 0$
$\vec{x}$ ist der Eigenvektor.

3.4 Eigenraum

Die Kombination aller Eigenvektoren zu einer Matrix ergibt den Eigenraum.

3.5 Diagonalmatrix

$$D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{pmatrix}$$

3.6 Ähnliche Matrizen

Zwei Matrizen A, B sind sich ähnlich, wenn es eine Matrix Sgibt, dass gilt:
$S \cdot B = A \cdot S$

4 Folgen

$a_n < a_(n+1) \rightarrow$ streng monoton steigend.
$a_n > a_(n+1) \rightarrow$ streng monoton fallend.

Wenn es ein $C \in \mathbb{R}$ gibt, für das gilt, dass $a_n < C$, dann ist die Funktion nach Oben beschränkt.
Wenn es ein $c \in \mathbb{R}$ gibt, für das gilt, dass $a_n > c$, dann ist die Funktion nach Unten beschränkt.
Wenn es ein $m \in \mathbb{R}$ gibt, für das gilt, dass $|a_n| < m$, dann ist die Funktion beschränkt.

4.1 Konvergenz und Divergenz

Eine Folge a_n gilt als konvergent gegen $a \in \mathbb{R}$, wenn es für eine reelle Zahl $\varepsilon > 0$ einen Folgeindex n_0 gibt, so dass die Folgeglieder $n > n_0$ in dem Intervall $[a - \varepsilon, a + \varepsilon]$ liegt.
$\rightarrow |a_n - a| < \varepsilon$

Eine Folge heißt konvergent, wenn es einen eindeutigen Grenzwert gibt.
Eine Folge heißt divergent, wenn sie nicht konvergiert.
Eine Folge heißt bestimmt divergent, wenn für die Folge a_n gilt, dass $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{a_n} = 0$ gilt. In diesem Fall konvergiert die Folge gegen ∞.

4.2 l'Hospital

Hospital kann angewendet werden bei:
$\frac{0}{0}, 0 \cdot \infty, \infty - \infty, \frac{\infty}{\infty}, 0^0, \infty^0, 1^\infty$
Wenn kein Quotient gegeben ist, muss dieser durch Umformung erreicht werden - in Übung nicht behandelt.
$\lim_{x\to x0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = c \rightarrow \lim_{x\to x0} \frac{f(x)}{g(x)} = c$

5 Reihen

5.1 Partialsumme

$\sum_{k=0}^{\infty} a_k = a_0 + a_1 + ...$

5.2 Konvergenzkriterium

5.2.1 Leibnitz-Kriterium

$\sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k a_k$ konvergiert, wenn a_k eine konvergierende Nullfolge, also gegen 0 konvergiert.

5.2.2 Majoranten- und Minoranten-Kriterium

Wenn es eine konvergente Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} b_k$ gibt und $a_k \leq b_k$ für alle $k \geq k_0$ gilt, dann ist die Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ ebenfalls eine konvergente Reihe.

Wenn es eine divergente Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} b_k$ gibt, und $|a_k| \geq b_k \geq 0$ gilt, dann ist die Reihe $\sum_{k=0}^{\infty}$ ebenfalls eine divergente Reihe.
$\frac{1}{2}$ ist divergent.
$\frac{1}{k^x}$ ist konvergent.

5.2.3 Quotientenkriterium

Wenn es eine Zahl $q < 1$ und ein $k_0 \geq \mathbb{N}_0$ gibt, so dass $\left|\frac{a_{k+1}}{a_k}\right| \leq q$ für alle $k > k_0$.
Wenn unter den gleichen Vorraussetzungen $\left|\frac{a_{k+1}}{a_k}\right| > 1$ gilt, dann ist die Reihe divergent.

6 Differenzialrechnung

6.1 Differenzierbarkeit

Eine Funktion $f(x)$ ist differenzierbar an der Stelle $x*$, wenn der Grenzwert von $\lim_{x\to x*} \frac{f(x)-f(x*)}{x-x*}$ existiert.

6.2 typische Ableitungen

$(x)' = 1$	$(e^x)' = e^x$
$(ax)' = a$	$(a^x)' = a^x * log(a)$
$(ax^2)' = 2ax$	$ln(x)' = \frac{1}{x}$
$(\frac{1}{x})' = -\frac{1}{x^2}$	$(\sin x) = \cos x$
$(\sqrt{x})' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$	$(\cos x) = -\sin x$
$(ax^b)' = abx^(b-1)$	$(\tan x) = \frac{1}{(\cos x)^2}$

6.3 Verknüpfungsfunktionen

Summenregel: $(f(x) + g(x))' = f(x)' + g(x)'$

Produktregel: $(f(x)g(x))' = f(x)'g(x) + g(x)'f(x)$
Quotientenregel: $(\frac{f(x)}{g(x)})' = \frac{f(x)'g(x) - g(x)'f(x)}{g(x)^2}$
Kettenregel: $(f(g(x)))' = f(g(x))'g(x)'$

7 Funktionen

7.1 Monotonie

Wenn $f(x) > f(y)$ für alle $x > y$ gilt, dann ist die Funktion monoton wachsend.
Wenn $f(x) < f(y)$ für alle $x < y$ gilt, dann ist die Funktion monoton fallend.
Wenn eine Bedingung nur "$\leq$" oder "$\geq$" ist, dann fällt das monoton weg.

7.2 Ungerade und gerade Funktionen

Wenn gilt, dass $f(x) = f(-x)$ ist, dann ist die Funktion gerade.
Daraus folgt, dass die Funktion achsensymetrisch zur y-Achse ist.
Wenn gilt, dass $f(-x) = -f(x)$ ist, dann ist die Funktion ungerade.
Daraus folgt, dass die Funktion punktsymetrisch zum Ursprung ist.

7.3 Grenzwerte

Grenzwerte von Funktionen werden über den lim gebildet. Rechtsseitiger Grenzwert wird über die rechte Seite angenährt.
Notierung: $\lim\limits_{x \to x*^+}$

Linksseitiger Grenzwert wird über die linke Seite angenährt.
Notierung: $\lim\limits_{x \to x*^-}$

Asymptotisches Verhalten wird als Grenzwert einer Funktion gegen $\pm\infty$ definiert.

7.4 Stetigkeit

Eine Funktion ist an der Stelle $x*$ stetig, wenn gilt:
$\lim\limits_{x \to x*+} f(x) = \lim\limits_{x \to x*-} f(x) = f(x*)$

Wird eine stetige Funktion mit einer anderen stetigen Funktion addiert, subtrahiert, multipliziert oder diviert, dann ist die resultierende Funktion ebenfalls stetig.
Wenn eine stetige Funktion vervielfacht wird, dann ist die resultierende Funktion wieder stetig.

Jedes Polynom ist stetig und alle rationalen Funktionen in ihrem Definitionsbereich sind stetig.

7.5 Kurvendiskussion

Schnittpunkt x-Achse: $f(x) = 0$
Schnittpunkt y-Achse: $f(0) = ...$
•Def.bereich z.B. $f(x) = \frac{1}{x} \to D_f = \mathbb{R} \backslash \{0\}$
•Nullstellen: pq-Formel (bei 3 unbek. Raten.)
• Extremstellen: $f'(x) = 0$
$f''(x_i) > 0 \to$ Tiefpunkt.
$f''(x_i) < 0 \to$ Hochpunkt.
Wendepunkt: $f''(x) = 0$ und $f'''(x_i) \neq 0$.
Sattelpunkt: $f''(x) = 0$ und $f'''(x) = 0$.
•Verhalten im Unendlichen $\to$ lim für + und - Unendlich.
Monoton steigend: $f'(x) > 0$
Monoton fallend: $f'(x) < 0$
Konkav: $f''(x) < 0$.
Konvex: $f''(x) > 0$.
Positiv Definit: $\forall \lambda > 0 \to$ Minimum
Negativ Definit: $\forall \lambda < 0 \to$ Maximum
indefinit $\to$ Sattelpunkt
semidefinit $\to$ B um A

8 Taylor-Reihe

Die allgemeine Form der Taylor-Reihe einer Funktion $f(x)$, welche mindestens n-mal differenzierbar ist, ist:
$T_n(x, x_e) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_e)}{k!}(x - x_e)^k$.

$T_1(x)$ ist die Tangente an der Stelle $x*$.
Das Restglied R_n wird durch Differenz der Funktion und dem Taylorpolynom gebildet. $R_n(x) = f(x) - T_n(x)$
$R_n(x, x_ne) = \frac{f^{n+1}(c)}{(n+1)!} * (x - x_e)^{n+1}$

9 Integralrechnung

$\int_a^b f(x)dx = [F(x)]_a^b = F(b) - F(a)$
$F'(x) = f(x)$
e^{Foo} u.ä. muss vorher substituiert werden!

Funktion	Aufleitung
c	$c \cdot x$
$x^a, a \neq -1$	$\frac{x^{a+1}}{a+1}$
$x^{-1}, x \neq 0$	$ln(\|x\|)$
e^x	e^x
a^x	$\frac{a^x}{ln(a)}$
$sin(x)$	$-cos(x)$
$cos(x)$	$sin(x)$

9.1 Partielle Integration

Wenn u und v zwei differenzierbare Funktionen sind, dann gilt:
$\int u' * v = (u * v) - \int u * v'$

9.2 Substitutionsregel

$\int f(g(x)) * g'(x)dx = \int f(y)dy$

$$\int \frac{1}{5x-7}dx = ? \tag{1}$$
$$z = 5x - 7 \tag{2}$$
$$\frac{dz}{dx} = 5 \tag{3}$$
$$\frac{dz}{5} = dx \tag{4}$$
$$\int \frac{1 * dz}{z * 5} = \frac{1}{5}\int \frac{1}{z}dz \tag{5}$$
$$= \frac{1}{5}ln(z) \tag{6}$$
$$= \frac{1}{5}ln(5x-7) \tag{7}$$

10 Multidimensionale Funktionen

Eine multidimensionale Funktion ist eine Funktion mit mehr als einer Variable.
$f(x, y) = x^2 + 3xy$

10.1 Partielle Ableitung

Eine partielle Ableitung ist die Ableitung zu einer Variablen.
$f_x(x, y) = 2x + 3y$
$f_y(x, y) = 3$
Zweite partielle Ableitung:
$f_{xx}(x, y) = 2$, $f_{xy}(x, y) = 3$
$f_{yx}(x, y) = 0$, $f_{yy}(x, y) = 0$

10.2 Gradient

Gradient besteht aus der ersten Ableitung. $grad_f(x, y) = ((2x + 3y), (3))$
Man kann eine Stelle einsetzen für x und y:
$grad_f(3, 2) = (12, 3)$.

10.3 Extremstellen mehrdimen. Funkt.

Zum Bestimmen der Extremstellen ist das Aufstellen der Hesse-Matrix notwendig. Dazu sind die Stellen, an den der Gradient 0 wird, die sogenannten kritischen Stellen. Wir setzen die kritischen Stellen in die Hesse-Matrix ein und bestimmen die Bestimmtheit der Matrix. Dazu bilden wir die Eigenwerte (über Determinante).

$(\det > 0) \wedge (W_{xx} \vee W_{yy}) < 0 \to$ Max.
$(\det > 0) \wedge (W_{xx} \vee W_{yy}) > 0 \to$ Min.
$\det < 0 \to$ Sattelp.
$\det = 0 \to$ k.A.

10.4 Hesse-Matrix - tolles Ding..

$$H_f(x) = \begin{pmatrix} f_{xx}(x) & f_{xy}(x) \\ f_{yx}(x) & f_{yy}(x) \end{pmatrix}$$

11 Sin. Cos. Tan. Tabelle

x	0	$\frac{1}{6}\pi$	$\frac{1}{4}\pi$	$\frac{1}{3}\pi$	$\frac{1}{2}\pi$	$\frac{2}{3}\pi$	$\frac{3}{4}\pi$	$\frac{5}{6}\pi$	π	$\frac{7}{6}\pi$
Grad	0	30	45	60	90	120	135	150	180	210
sin	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$
cos	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	-1	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$
tan	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	$\pm\infty$	$-\sqrt{3}$	-1	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$