Санкт–Петербургский политехнический университет
Петра Великого
Физико-механический институт
Кафедра «Прикладная математика»

Отчёт по лабораторной работе №2
по дисциплине
«Контроль надежности инженерных и научных вычислений»

Выполнил:
Турченко Михаил Константинович
группа: 5030102/90101

Проверил:
Репин Сергей Игоревич

Санкт-Петербург
2023г.

Оглавление

Задание №1

Для уравнения $x = \alpha x + \frac{1}{x^p}$ провести вычисление решения с гарантированной точностью для разных p и разных начальных приближений x_0 и построить графики оценок нормы вектора ошибки снизу и сверху, графики улучшенных оценок, используя для нахождения приближенного решение метод Ньютона.

Построение оценок основано на теореме о неподвижнной точке и q-сжимающем операторе.

Оператор T называется q-сжимающим, если ∃q > 0: d(Tx, Ty) <= q*d(x,y) ∀x,y

Теорема: если оператор T q-сжимающий, и q<1, то существует фиксированная точка: $x^* = Tx^*$

Для численных методов, основанных на теореме о сжимающем операторе, существуют полностью вычислимые и гарантированные оценки точности:

$$M_-^j = \frac{1}{1+q} d\left(x_{j+1}, x_j\right)$$

$$M_+^j = \frac{q}{1-q} d(x_j, x_{j-1})$$

$$M_+^{0j} = \frac{q^j}{1-q} d(x_0, x_1)$$

Если q близко к единице, то рассматривают улучшение фактора сжатия:

$$L = T \dots T \ (n \text{ раз})$$

Тогда можно рассмотреть улучшенные оценки:

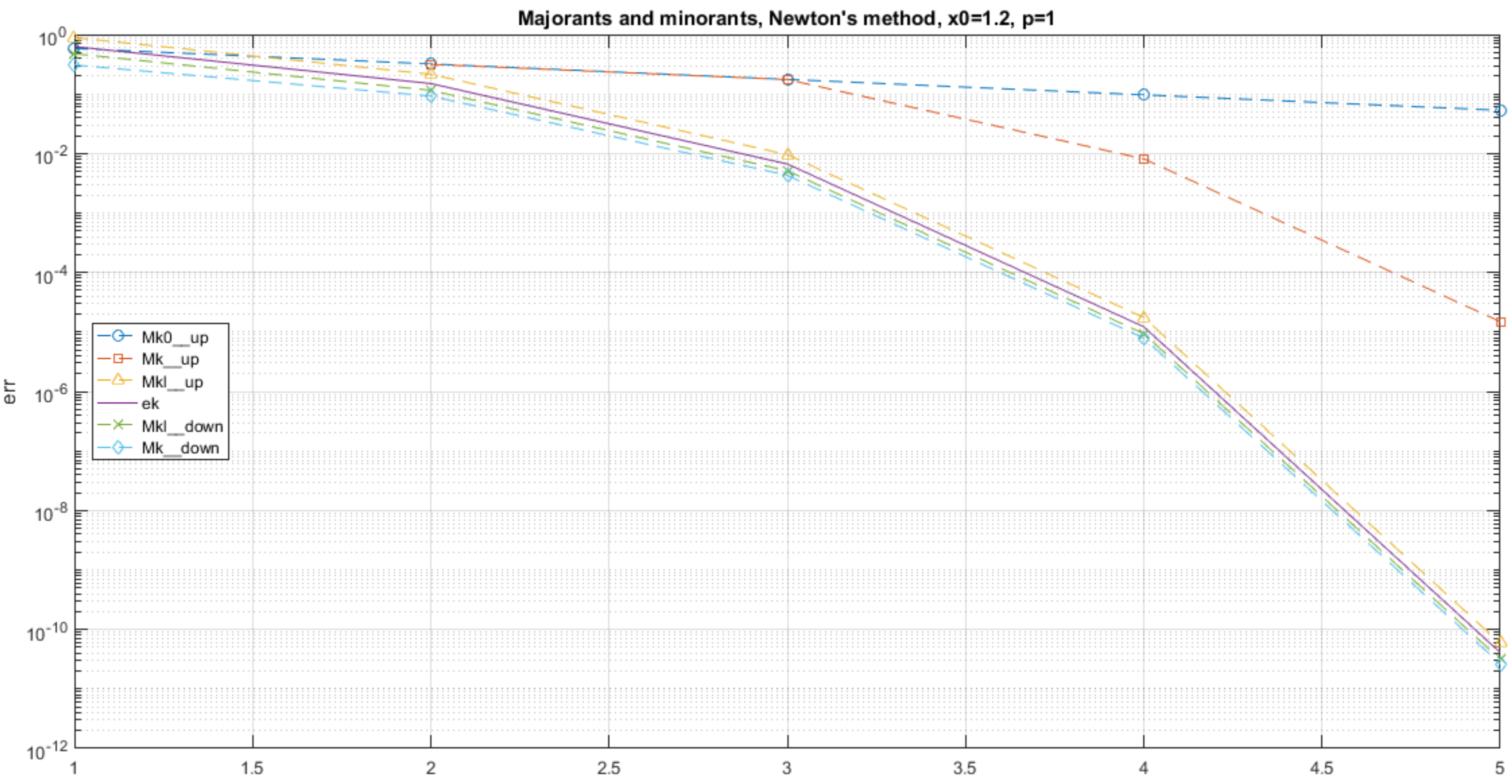
$$M_+^{j,l} = \frac{1}{1-q^l} d\left(x_{j+l}, x_j\right)$$

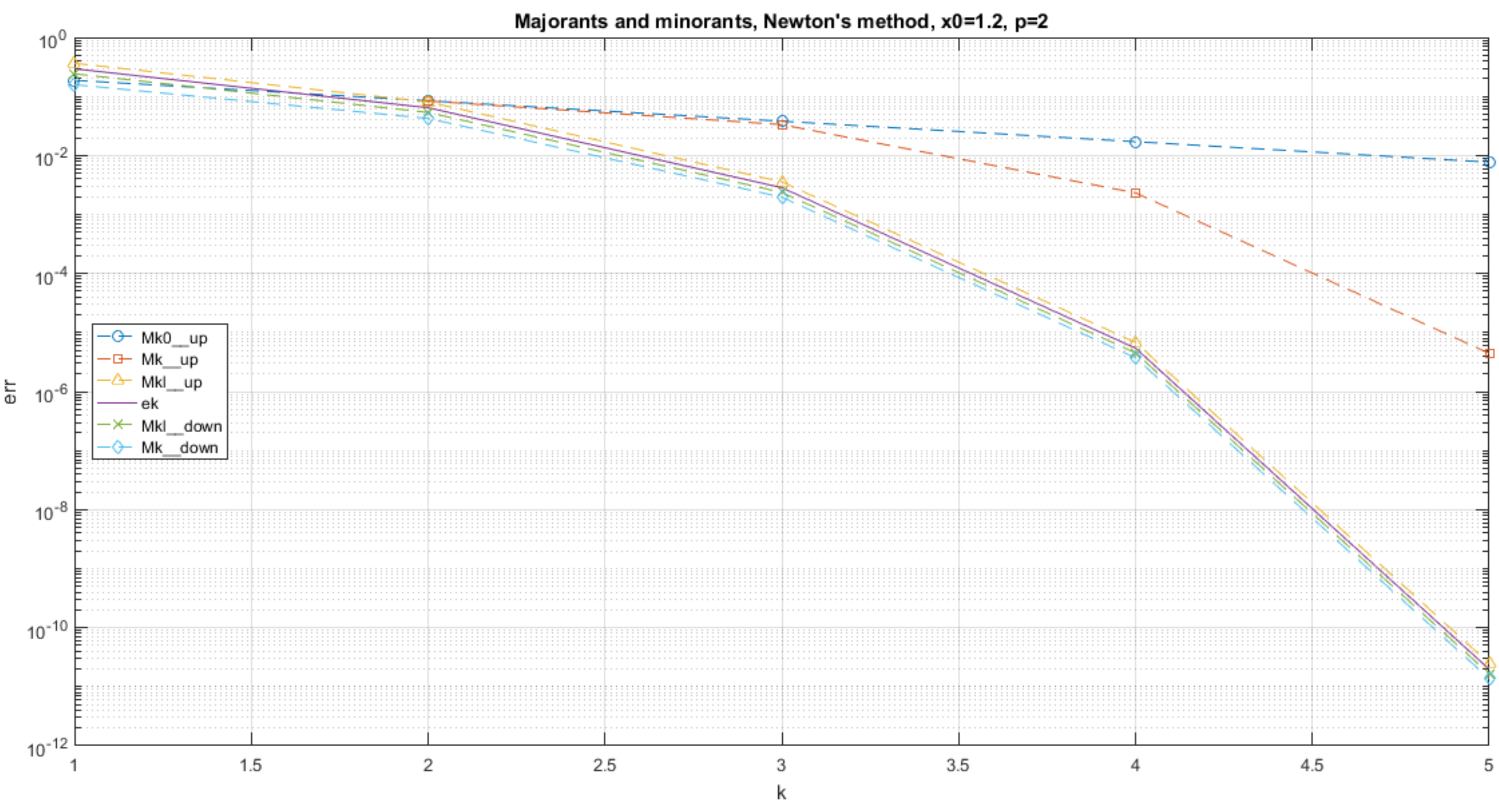
$$M_-^{j,l} = \frac{1}{1+q^l} d\left(x_{j+l}, x_j\right)$$

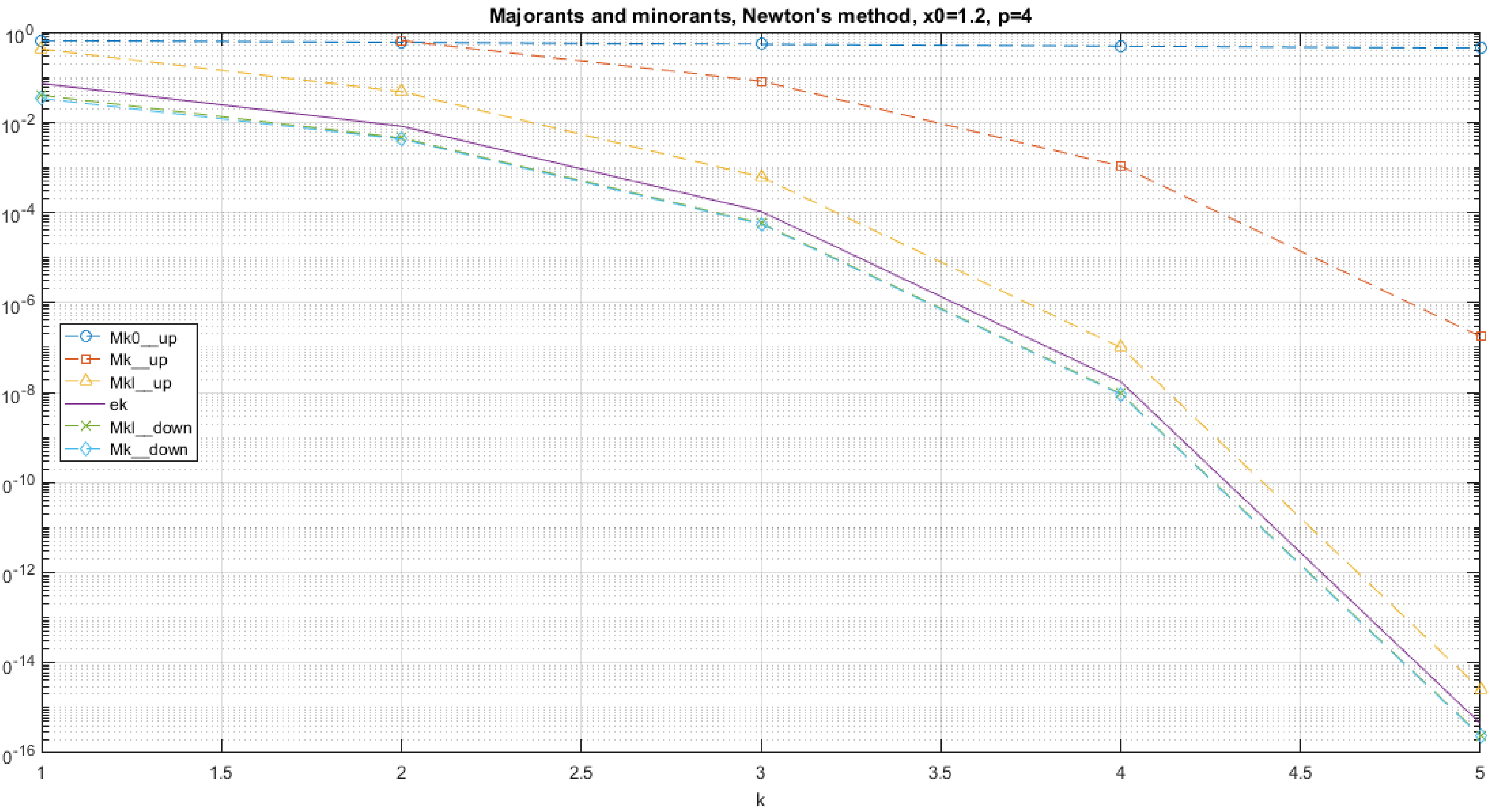
Построим графики зависимости нормы вектора ошибки от номера итерации при различных p и x_0. Также в тех же осях построим графики оценок нормы вектора ошибки снизу и сверху, а также графики улучшенных оценок при l=2:

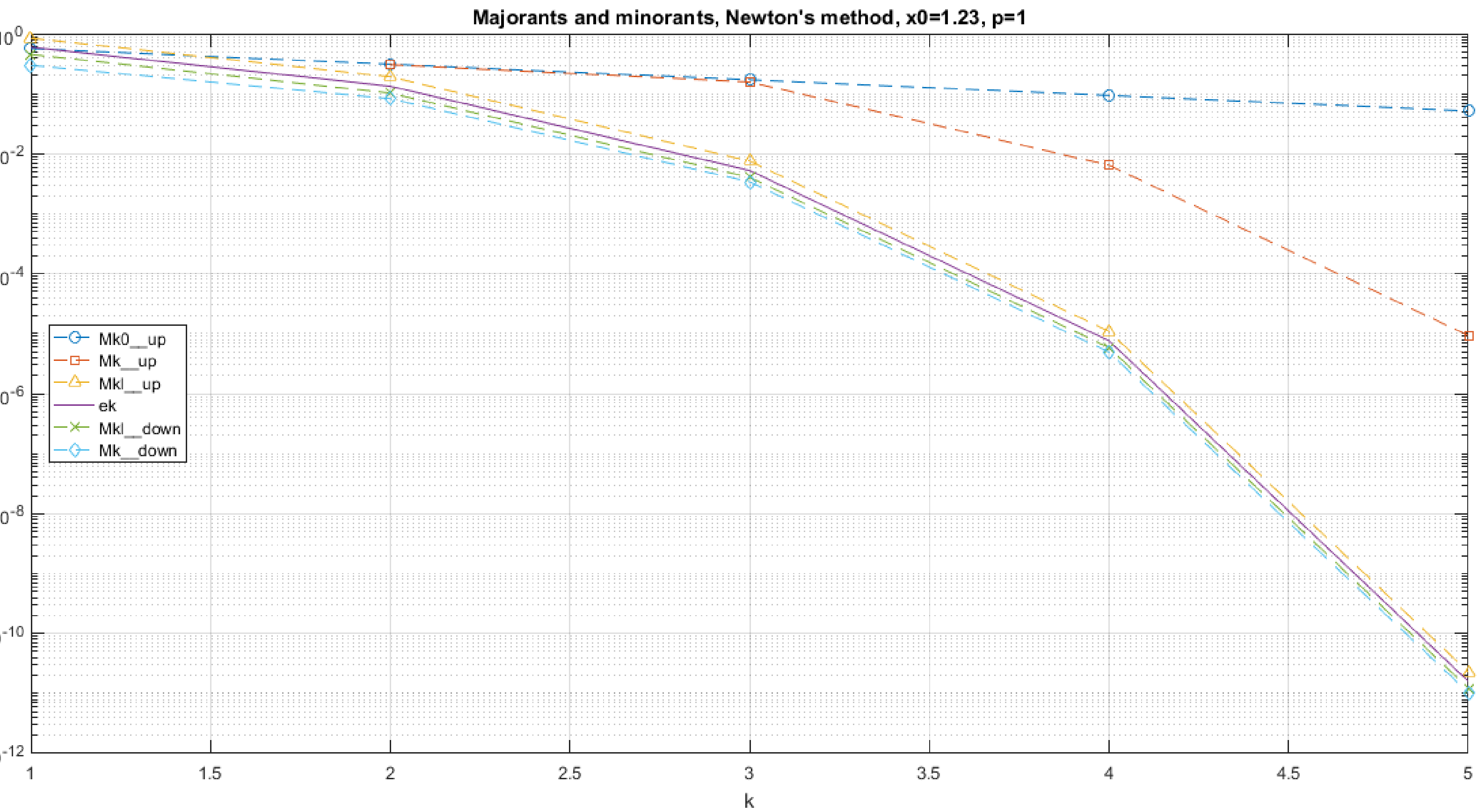
$x_0 = \{1.2, 1.23, 1.26\}$

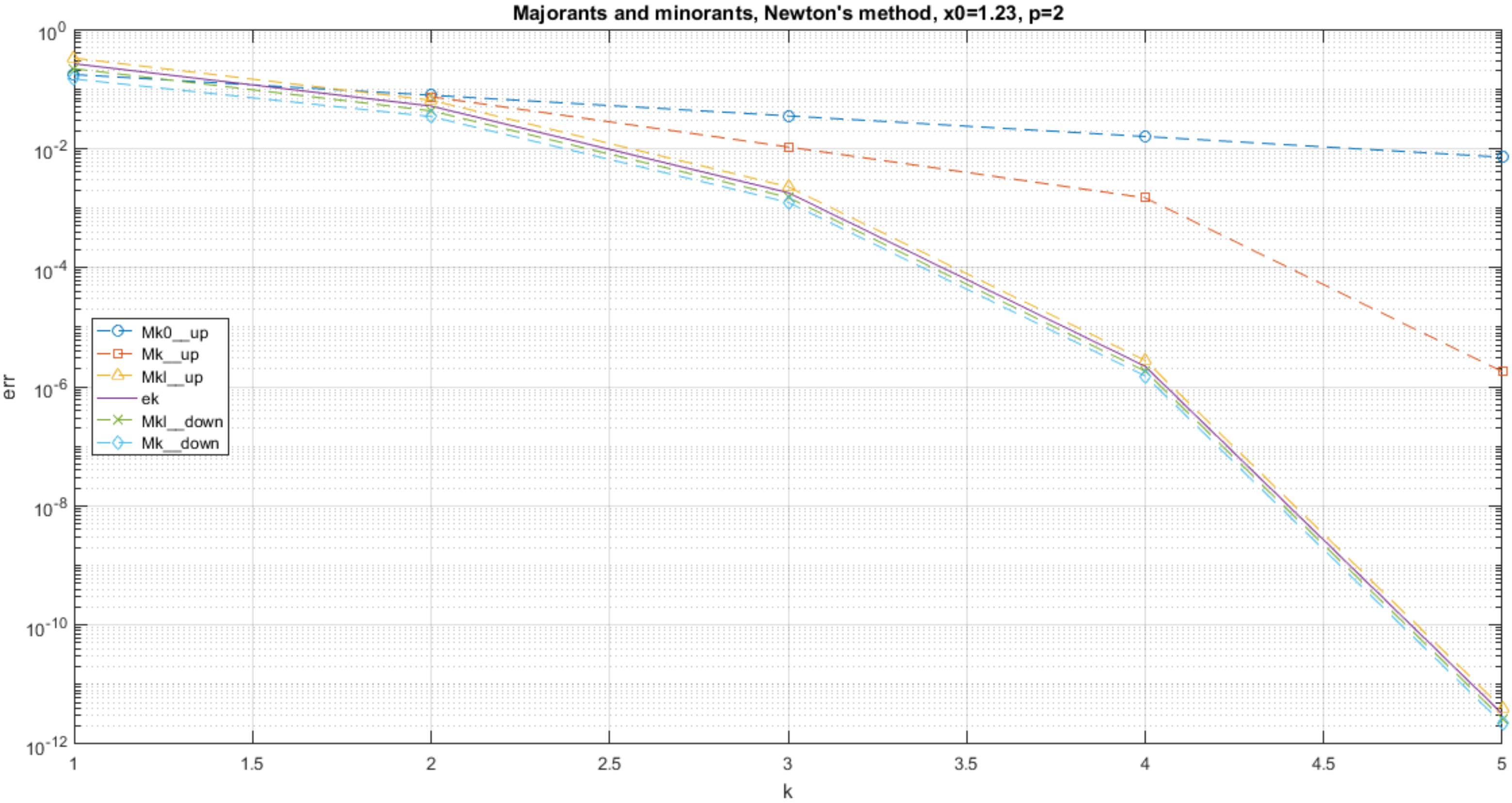
$p = \{1, 2, 4\}$

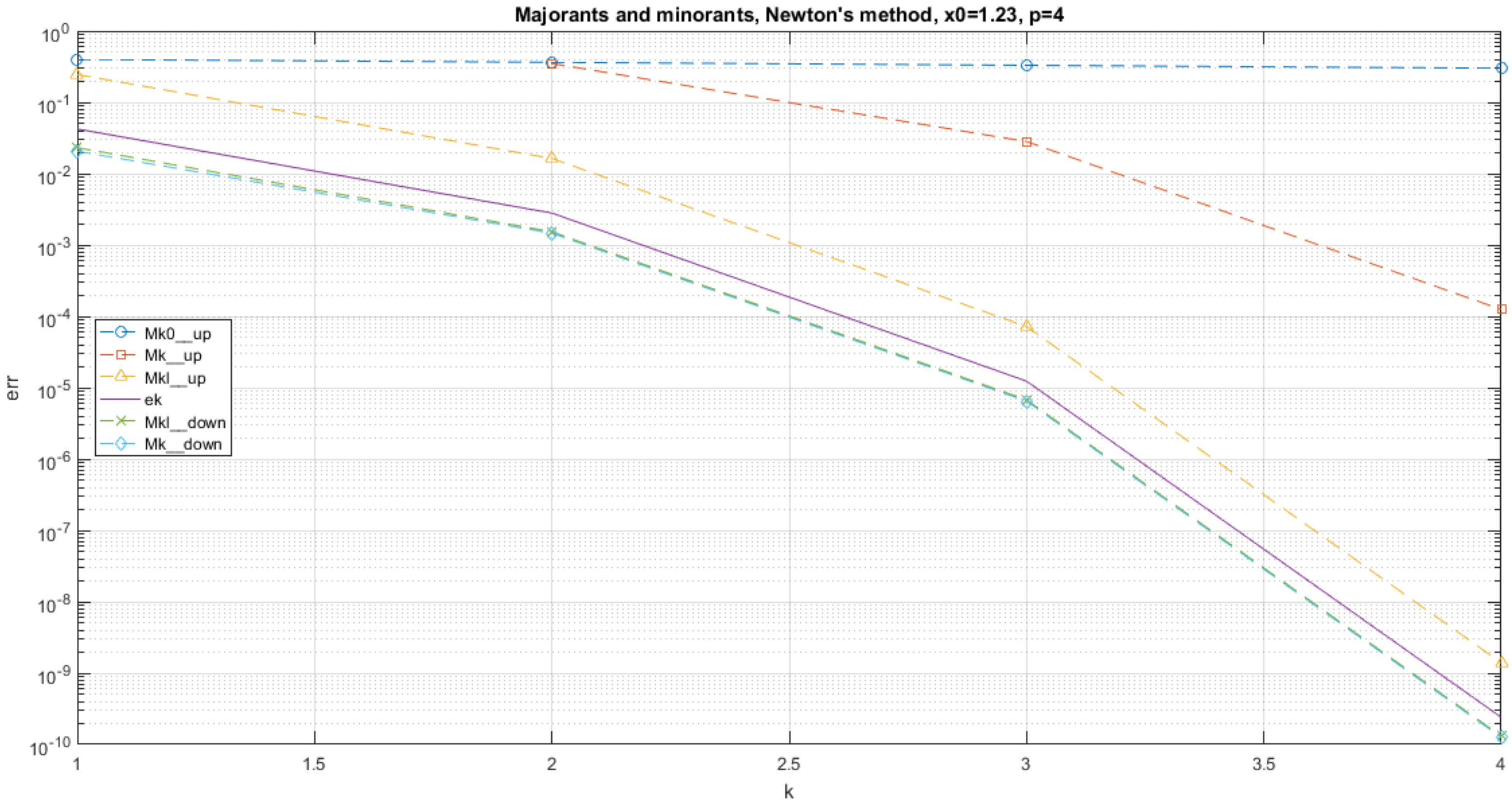


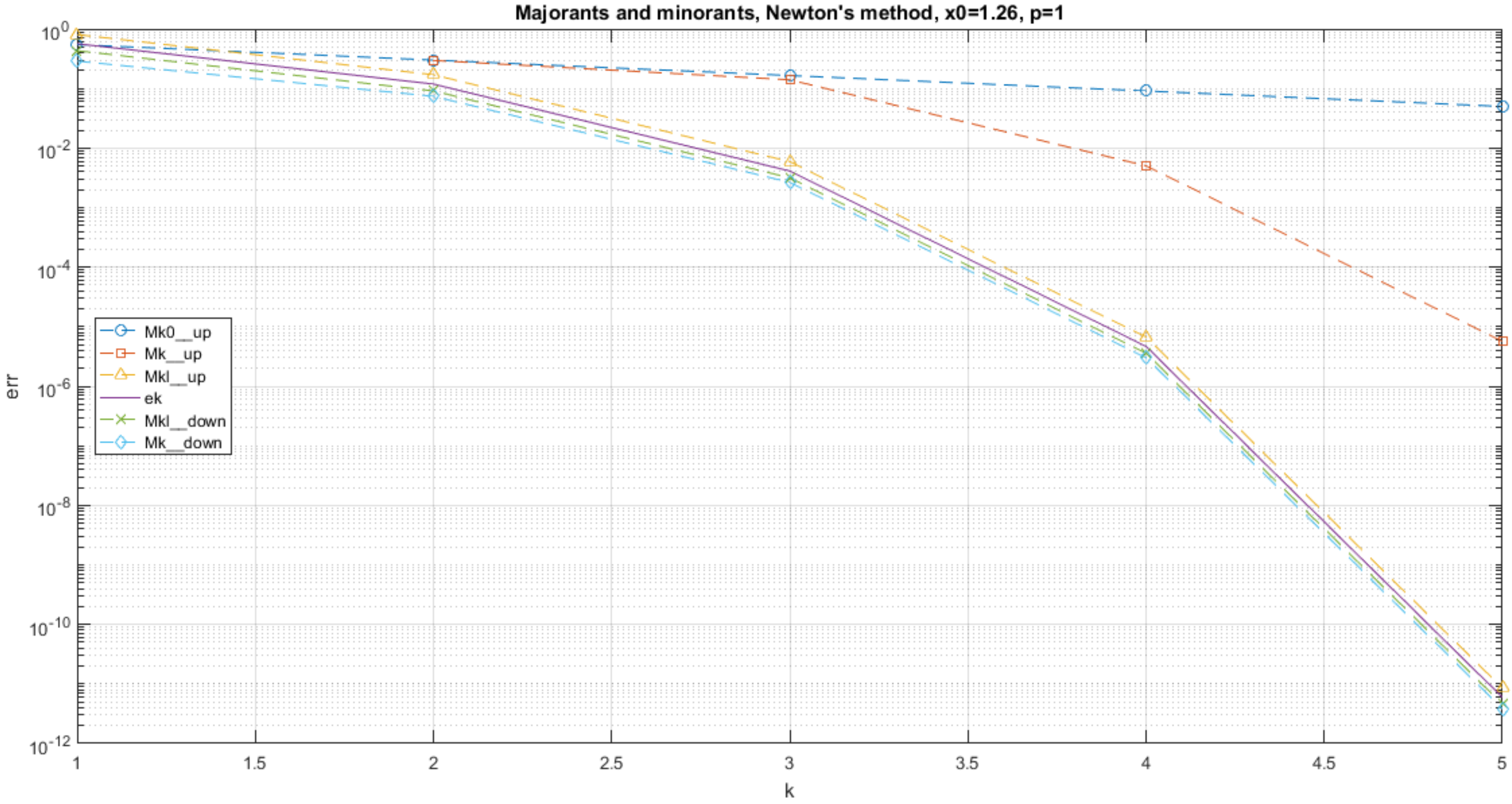


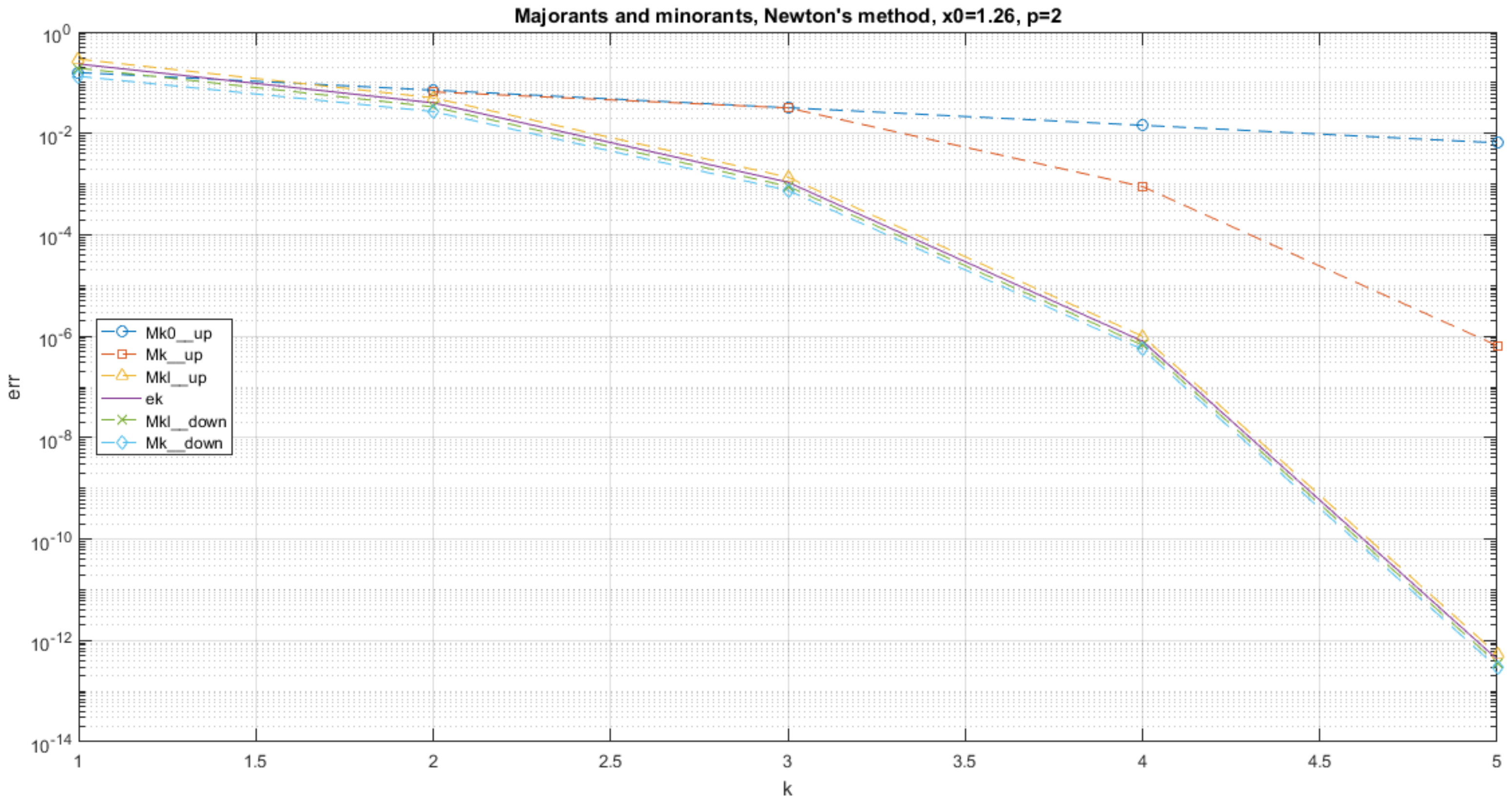

Majorants and minorants, Newton's method, x0=1.2, p=4
Mk0__up
Mk__up
Mkl__up
ek
Mkl__down
Mk__down
k

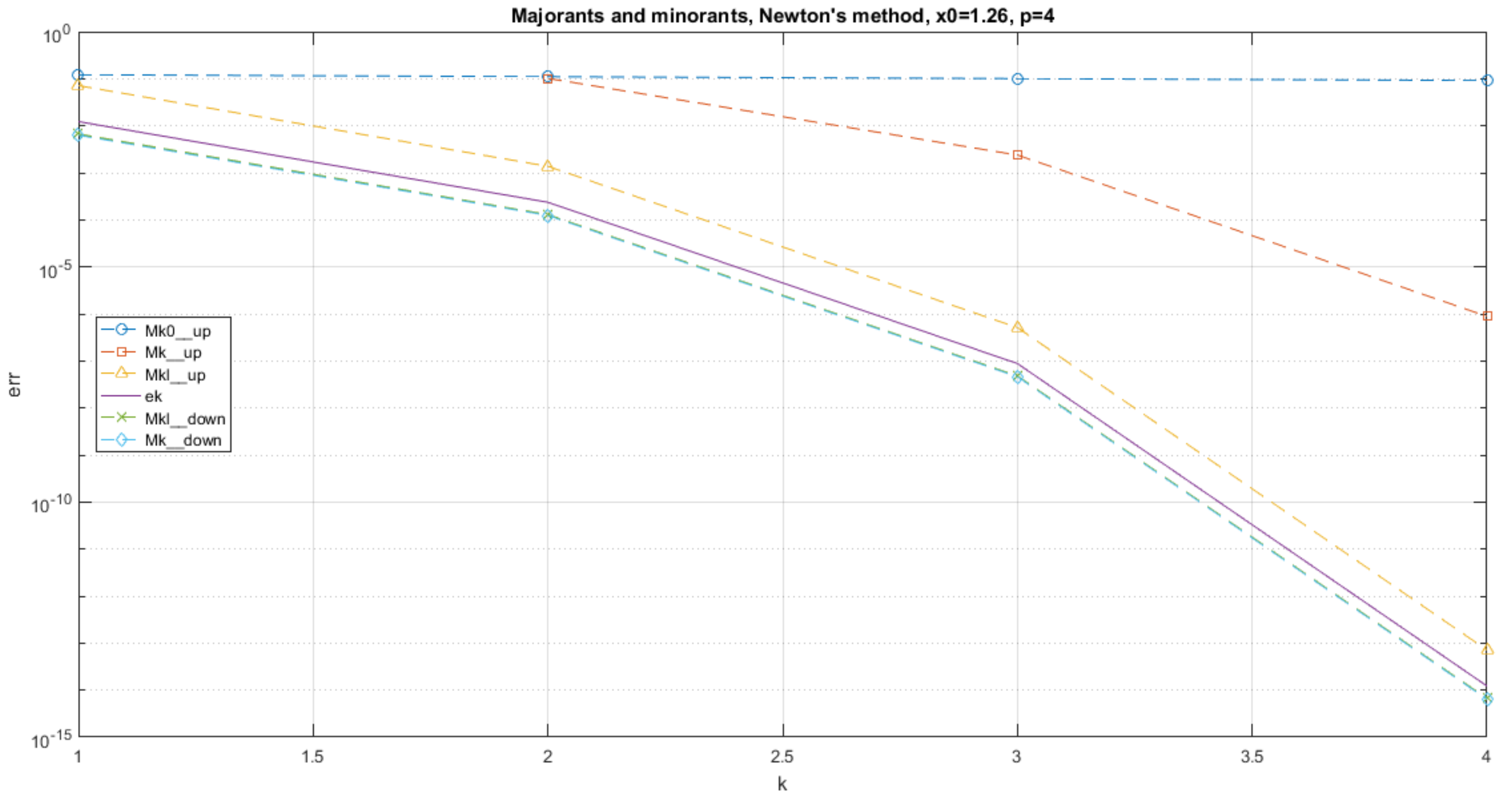

Majorants and minorants, Newton's method, x0=1.23, p=1
Mk0__up
Mk__up
Mkl__up
ek
Mkl__down
Mk__down
k


Majorants and minorants, Newton's method, x0=1.23, p=2
err
k
Mk0__up
Mk__up
Mkl__up
ek
Mkl__down
Mk__down


Majorants and minorants, Newton's method, x0=1.23, p=4
err
k
Mk0__up
Mk__up
Mkl__up
ek
Mkl__down
Mk__down


Majorants and minorants, Newton's method, x0=1.26, p=1
err
k
Mk0__up
Mk__up
Mkl__up
ek
Mkl__down
Mk__down


Majorants and minorants, Newton's method, x0=1.26, p=2
err
k
Mk0__up
Mk__up
Mkl__up
ek
Mkl__down
Mk__down



По результатам исследования можно сделать вывод, что оценки величины нормы вектора ошибки, основанные на теореме о неподвижной точке, надежно оценивают величину норму вектора ошибки снизу и сверху.

Задание №2

Необходимо решить составить и решить СЛАУ, показав гарантированные оценки нормы вектора ошибки решения СЛАУ.

Положим N = 10

Составим следующую матрицу СЛАУ: $a_{ij} = \begin{cases} \frac{0.93}{ij}, i \neq j \\ i, \ i = j \end{cases}, i = 1, \dots, N$

Выберем вектор решения: $x_i^* = 1 + \frac{1}{i}, i = 1, \dots, N$

Вектор правой части $f = A * x^*$

Так была составлена СЛАУ с заранее известным точным решением.

Необходимо перевести СЛАУ в форму, удобную для итераций:

$Ax = f \leftrightarrow x = Lx + b;$

$$L = (I - B^{-1}A); I = diag(1), B^{-1} = \begin{cases} 0, i \neq j \\ \dfrac{1}{a_{ii}}, i = j \end{cases}, i = 1, \dots, N$$

$b = B^{-1} * f$

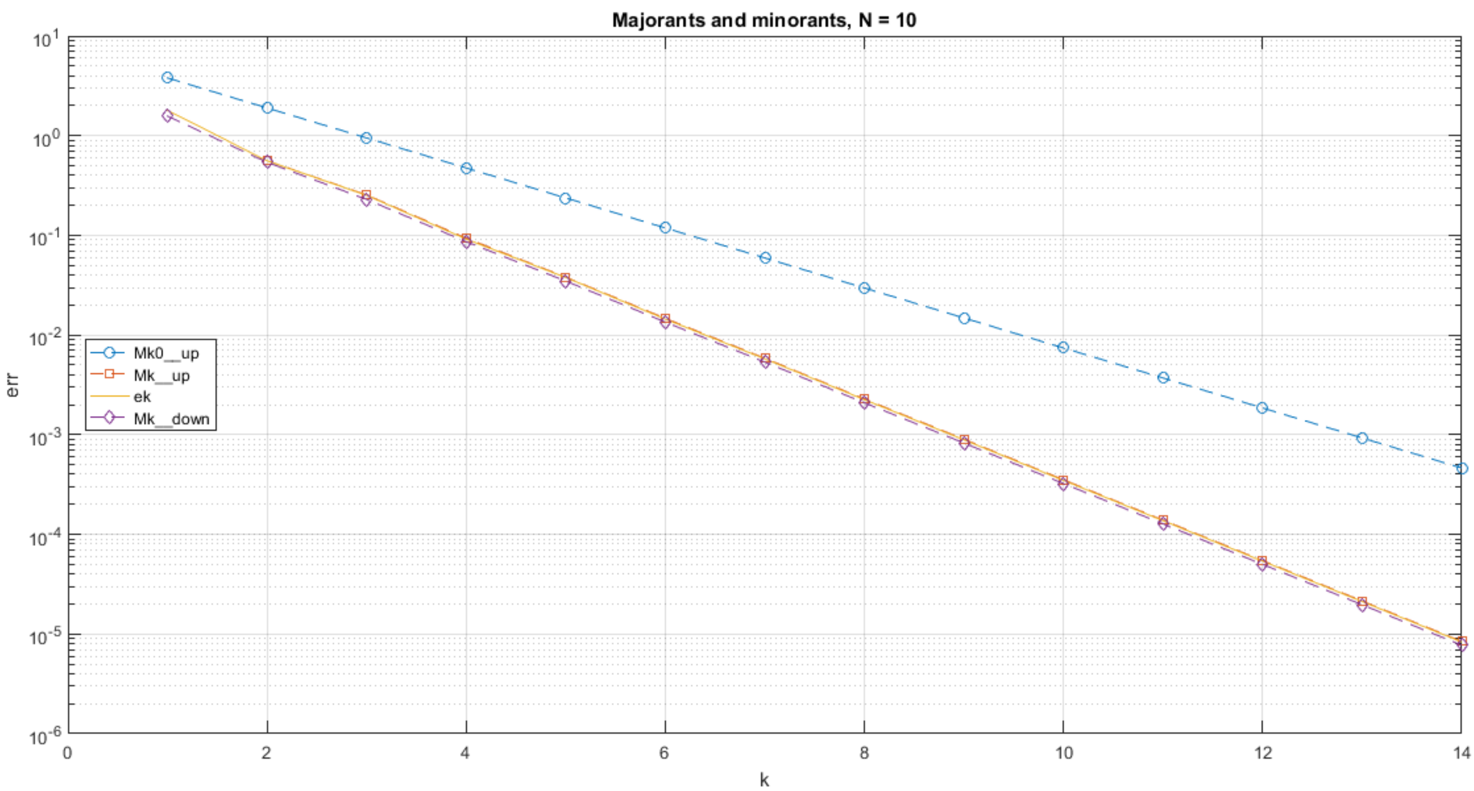
Тогда $\|L\| = q = 0.5 < 1$, и по теореме о неподвижной точке можно построить гарантированные оценки точности:

$$M_+^j = \frac{q}{1-q}\|R(x_{j-1})\|$$

$$M_+^{0j} = \frac{q^j}{1-q}\|R(x_0)\|$$

$$M_-^j = \frac{1}{1+q}\|R(x_j)\|$$

где $R(z) = Lz - z + b$ – вектор ошибки



Из данного графика видно, что гарантированные оценки точности хорошо оценили норму вектора ошибки для нашей СЛАУ.

Задание №3

Необходимо решить ОДУ первого порядка методом Пикара-Линделефа и показать гарантированные оценки точности нормы вектора ошибки:

$$\begin{cases} \dfrac{dy}{dx} = \varphi\big(x, y(x)\big); x \in [a, b] \\ \qquad y(0) = y_0 \end{cases}$$

$\varphi\big(x, y(x)\big) = 100\sin(x) - 75y$; - удовлетворяет условию Липшица с константой L = 75

$[a, b] = [0, \frac{1}{76}];$

$y_0 = 0;$

Точное решение: $y = \frac{50}{2813}(e^{-75x} + 75\sin(x) - \cos(x))$

Гарантированные оценки точности, так же как и в заданиях №1 и №2, следуют из теоремы о неподвижной точке и q-сжимающем операторе интегрирования:

$$y = \int_a^b \varphi\big(x, y(x)\big)dx + y_0 =: Ty$$

Легко показать, что

$$\big||Ty - Tz|\big| \leq L(b-a)\big||y - z|\big| \ \forall y, z$$

$$q = L(b-a) = \frac{75}{76} < 1$$

Таким образом, получится построить такие же гарантированные оценки точности, как и в заданиях №1 и №2. Улучшенные оценки точности построим при l = 2.

Будет построен следующий итерационный процесс:

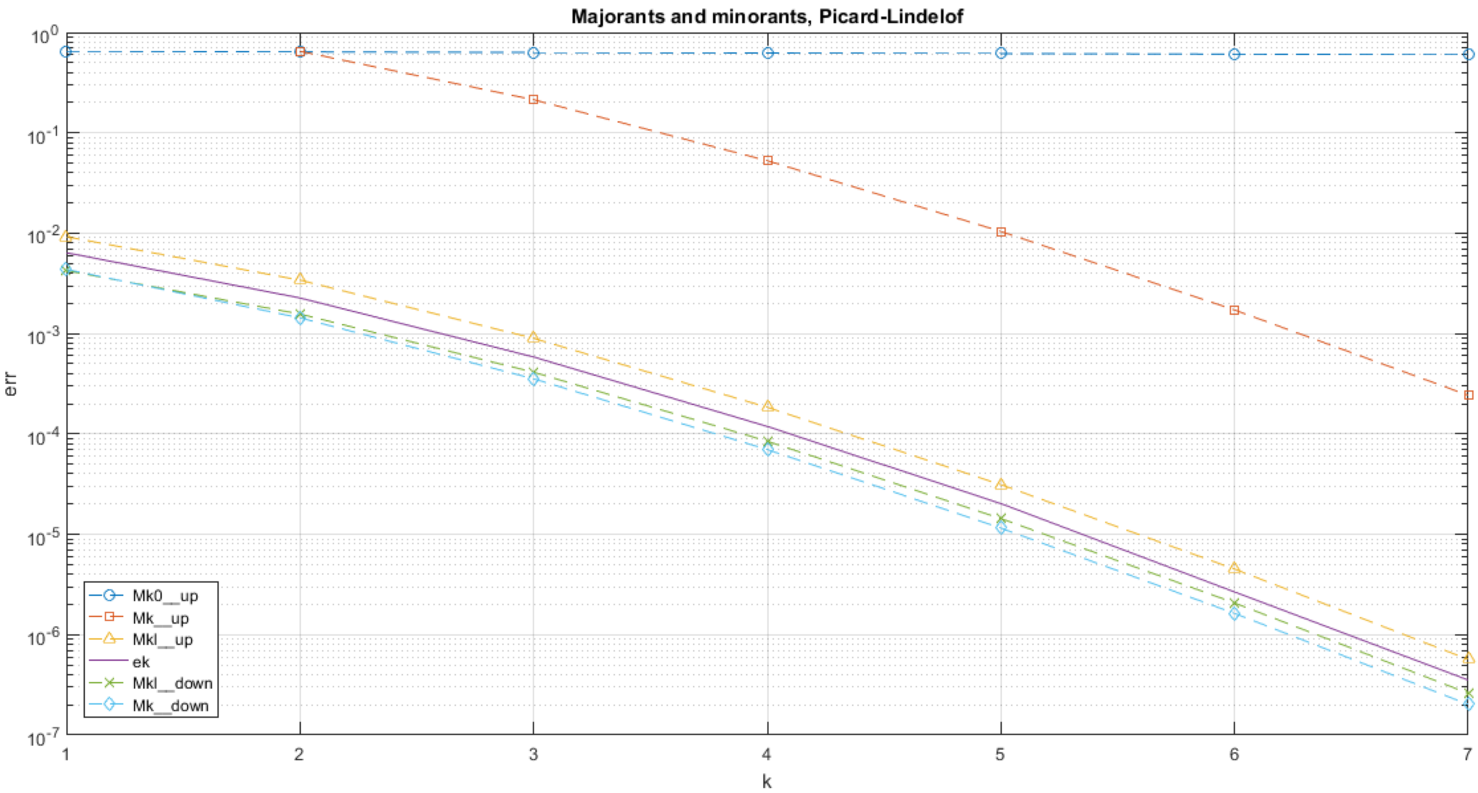
$$y_k(x) = \int_a^x \varphi(x, y_{k-1}(x))dx + y_0$$

$y_k(x)$ представляет собой сеточную функцию $\{y_k^i\}$, построенную на узлах сетки $\{x^i |\, x^i = a + hi, h = \frac{b-a}{n}, n = 50, i = 0, \dots, n\}$. Между узлами сетки функция линейно интерполируется.

Рассмотрим одну итерацию:

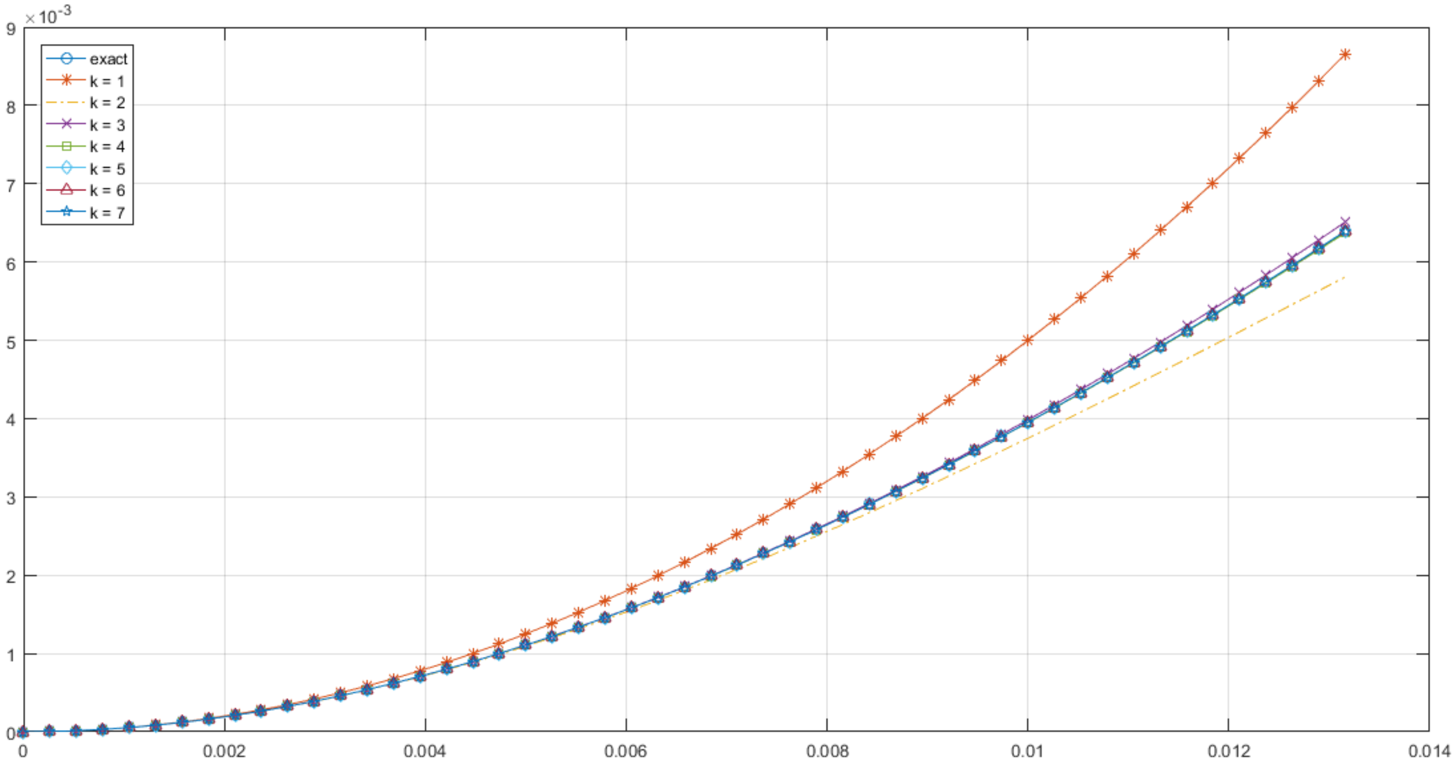
$$y_k(x^i) = \int_a^{x^i} \varphi\big(x, y_{k-1}(x)\big)dx + y_0 = \int_0^{x^i} (100\sin(x) - 75y_k(x))dx$$
$$= 100\big(1 - \cos(x^i)\big) - 75\int_0^{x^i} y_k(x)dx$$

Интеграл $\int_0^{x^i} y_k(x)dx$ будет браться численно по схеме средних прямоугольников. Данная схема проста в реализации и имеет алгебраический порядок точности 1, то есть интегрирование точное для линейных функций.

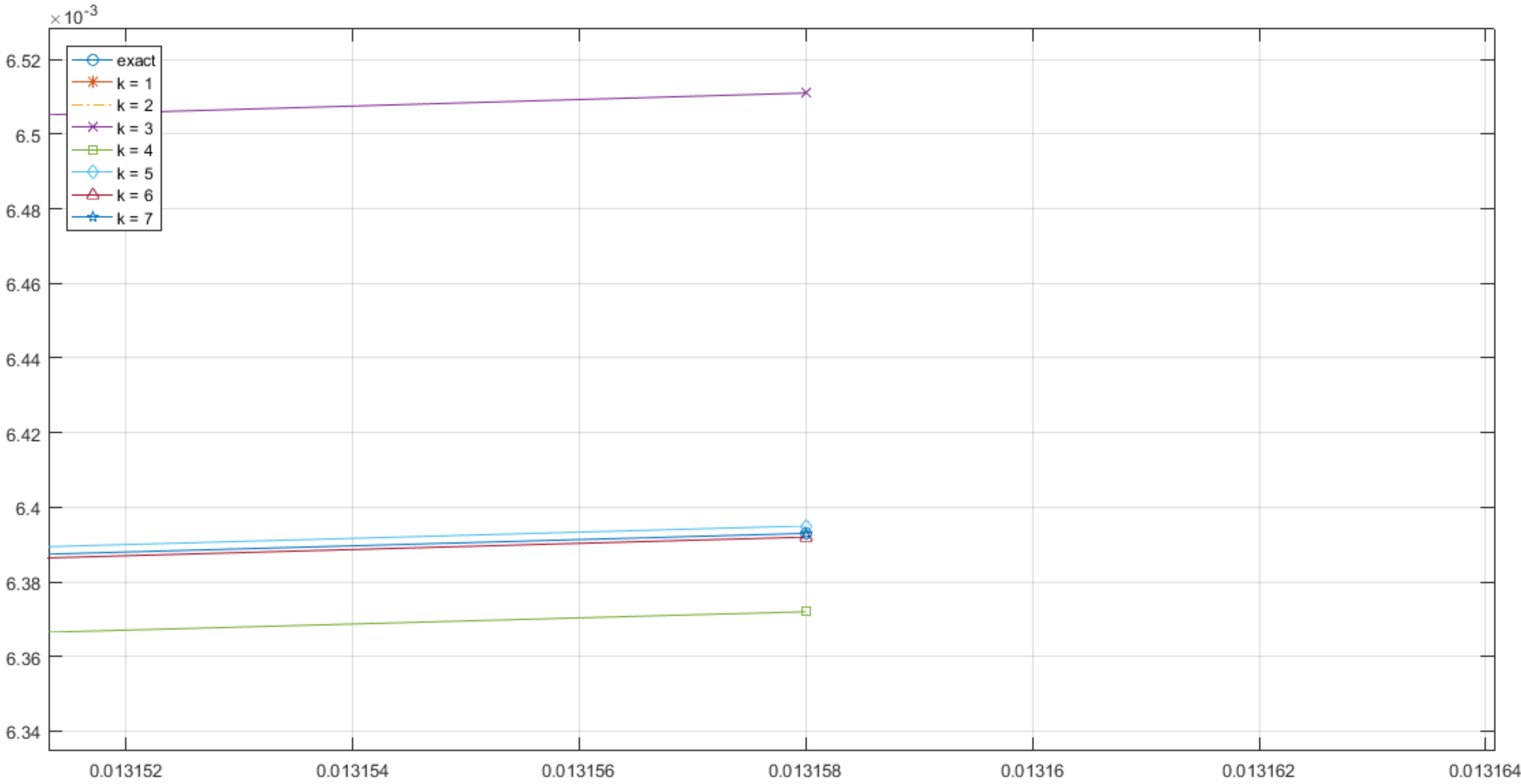


На графике видно, что гарантированные оценки точности достоверно оценивают норму вектора ошибки решения ОДУ первого порядка методом Пикара-Линделефа. Также стоит отметить, что улучшенные оценки качественнее оценивают ошибку.

Графики решений на каждой итерации:



Графики решений на каждой итерации на правом конце отрезка в увеличенном масштабе:



По графикам можно сделать вывод, что с каждой итерацией отклонение численного решения от точного решения уменьшается. Таким образом, итерационный процесс монотонно сходится к точному решению в смысле нормы в пространстве C[a, b]: $||y||_{C[a,b]} = \max_{x\in[a,b]} |y(x)|$

Вывод

В данной лабораторной работе были построены гарантированные оценки точности решения, основанные на теореме о неподвижной точке и q-сжимающем операторе. Также были построены улучшенные оценки точности, основанные на применении сжимающего оператора n раз. Все оценки оказались достоверными, а улучшенные оценки лучше описали ошибку решения.