Санкт–Петербургский политехнический университет
Петра Великого
Физико-механический институт
Кафедра «Прикладная математика»

Отчёт по лабораторной работе №4
по дисциплине
«Контроль надежности инженерных и научных вычислений»

Выполнил:
Турченко Михаил Константинович
группа: 5030102/90101

Проверил:
Репин Сергей Игоревич

Санкт-Петербург
2023г.

Оглавление

Постановка задачи

Необходимо решить краевую задачу методом конечных элементов:

$$\begin{cases} -\Delta u = 1 \text{ в } S \in R^2 \\ u = 0 \text{ на } \partial S \end{cases}$$

S – окружность радиуса 1 с центром в (0, 0)

и показать эффективность индикатора ошибки градиента для галеркинского решения:

$\varepsilon_i = \|G\nabla u_h - \nabla u_h\|_{T_i}$, где

∇u_h- градиент численного решения задачи

$G\nabla u_h$-осредненный по всем соседним элементам градиент численного решения:

$g_j = \sum_{i=0}^{M_j} \frac{|T_{ij}|}{|S_j|} (\nabla u_h)_{ij}$, где

$|T_{ij}|$ – площадь i-го соседнего элемента, $S_j = \bigcup T_{ij}$

$(\nabla u_h)_{ij} \in P^0(S_j, R^2)$ – константа, значение градиента на элементе T_{ij}

Маркером будет выступать следующий признак: 30% элементов с наибольшей погрешностью будут маркироваться.

Также необходимо применить данный маркер и индикатор для не-галеркинского решения и показать, что в этом случае они неэффективны.

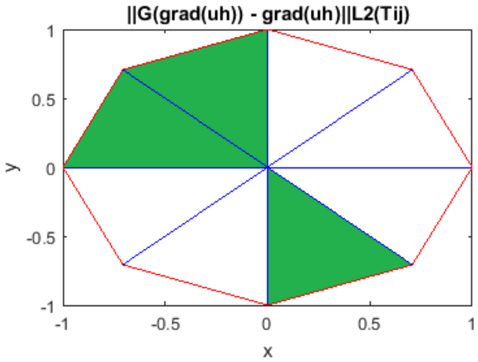
Для демонстрации необходимо показать картину разбиения области на треугольники с маркированными элементами.

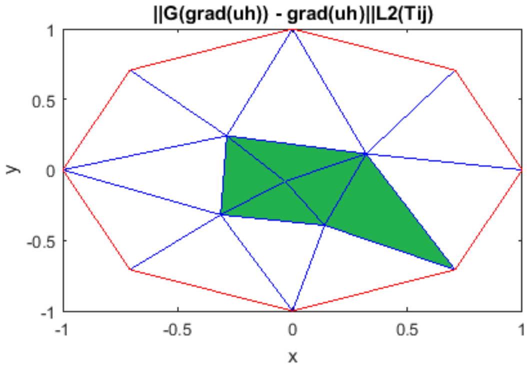
Точное решение краевой задачи: $u(x,y) = -\frac{1}{4}(x^2 + y^2 \text{ - } 1)$

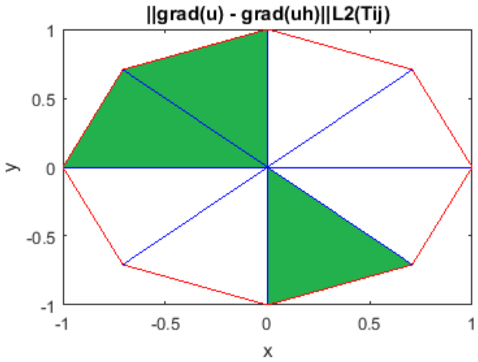
Задача была решена с помощью средств языка программирования MATLAB. Выбранное негалеркинское решение:

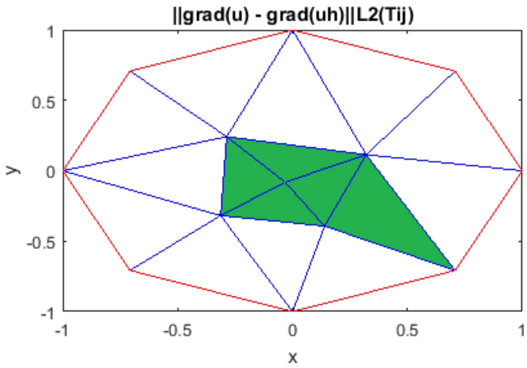
$\hat{u}(x,y) = -\frac{1}{2}(x^2 - \frac{1}{2}x + y^2 - \frac{1}{2}y \text{ - } -\frac{1}{2})(x^2 + y^2 \text{ - } 1)$

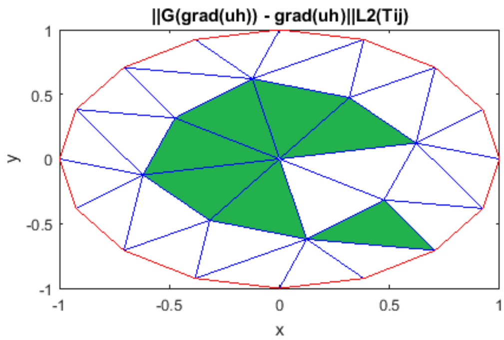
Галеркинское решение

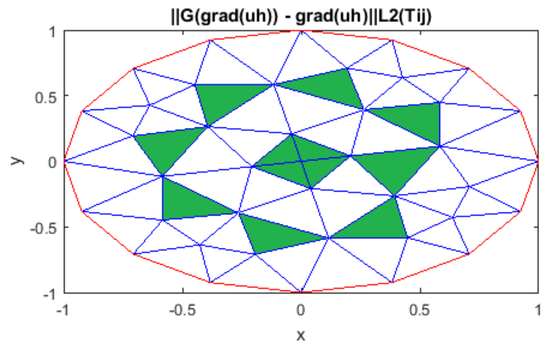


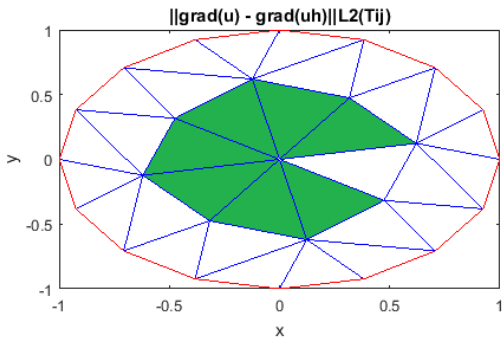


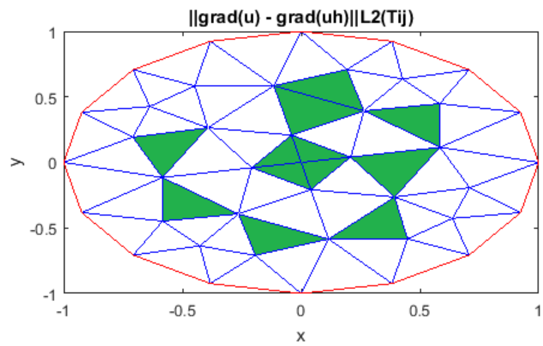


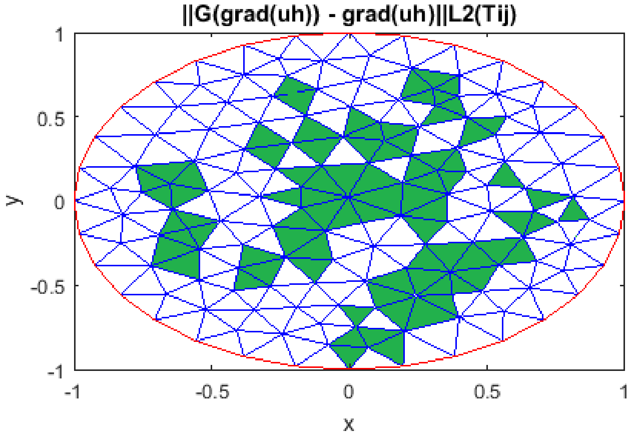


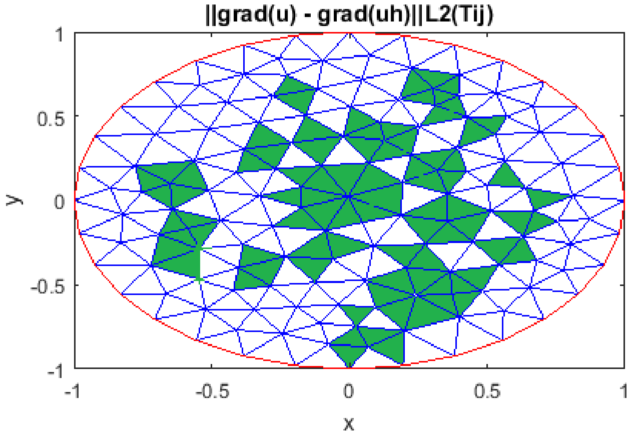






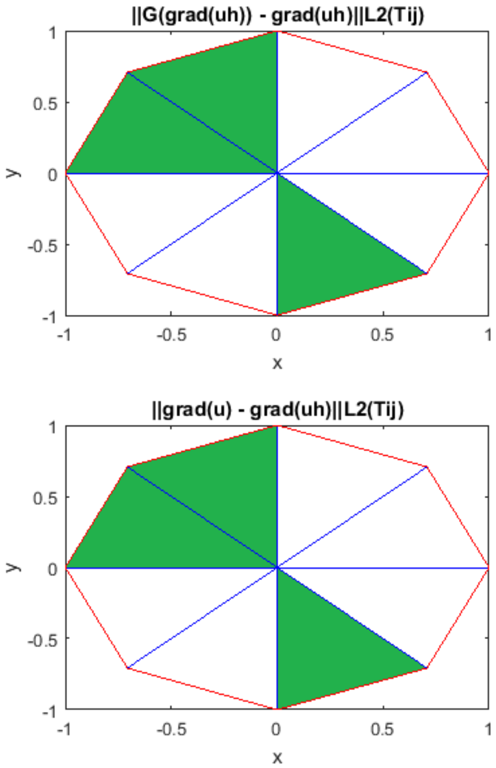


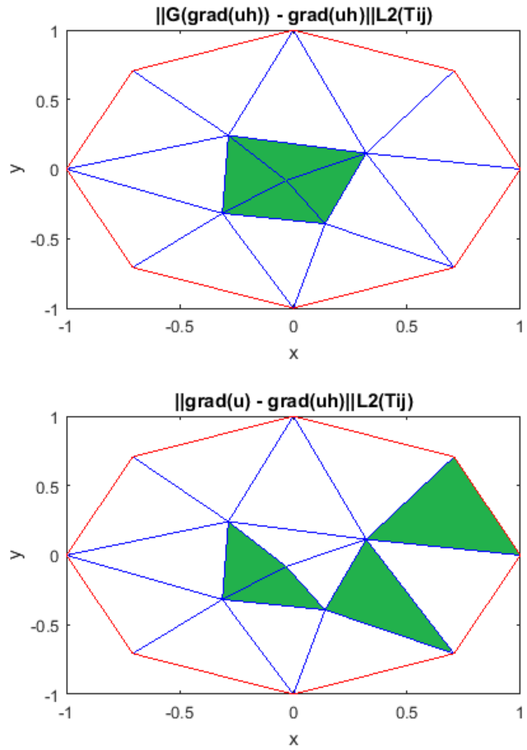


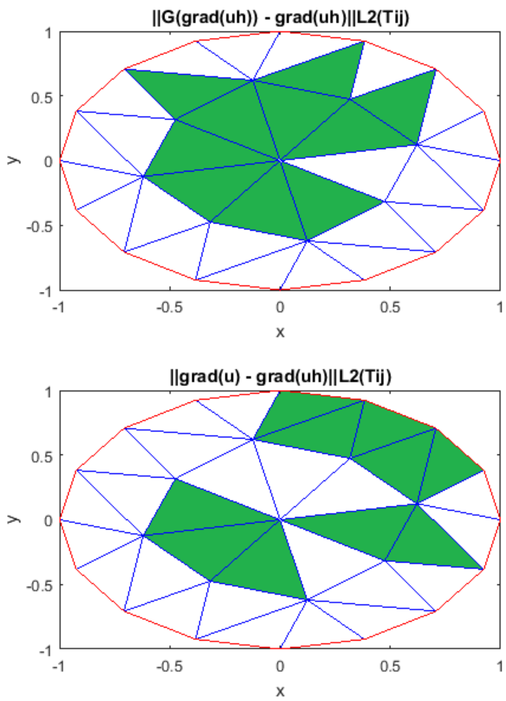


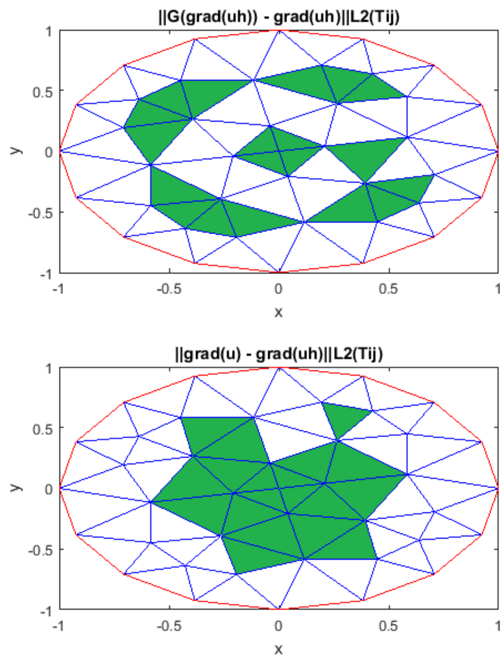
Для галеркинских решений маркер оказался эффективным, поскольку достаточно точно были определены элементы конечно-элементной сетки, на которых ошибка градиента велика.

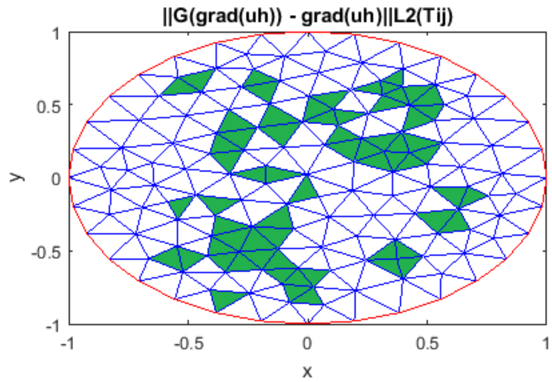
Негалеркинское решение

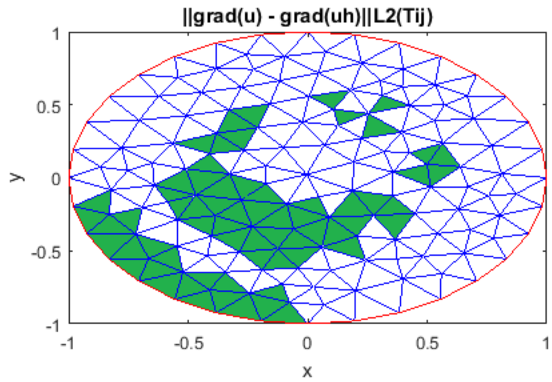












Для негалерскинского решения данный маркер оказался неэффективным, потому что маркером были плохо определены элементы с наибольшей ошибкой градиента решения.

Вывод

В ходе лабораторной работы была решена краевая задача на плоскости методом Галеркина-Бубнова с помощью средств языка программирования MATLAB, а также были построены оценки нормы ошибки градиента численного решения, основанные на осреднении градиента по всем соседним элементам.

Эти оценки оказались достаточно точными для галеркинского решения. Таким образом, индикатор $\varepsilon_i = \|G\nabla u_h - \nabla u_h\|_{T_i}$ удобно использовать для определения элементов с наибольшими ошибками градиента решения.

Однако этот индикатор оказался неэффективным для негалеркинского решения, поскольку неправильно маркировал элементы с наибольшей ошибкой градиента. Таким образом, данный индикатор нельзя использовать для негалеркинских решений.