Capitolul 4[1]

DERIVATELE ŞI DIFERENŢIALELE FUNCŢIILOR DE MAI MULTE VARIABILE

Breviar teoretic

1. Derivata după o direcţie.

Fie $(X, K, \|\cdot||)$ si $(Y, K, ||\cdot||)$ două spaţii vectoriale normate peste acelaşi corp K. Orice vector $s \in X, ||s|| \neq 0$ se numeşte *direcţie în* X, iar vectorul $s_0 = \dfrac{1}{||s||} s$ se numeşte *versorul direcţiei* s ($||s_0||$=1).

Fie $f : D \subset X \to Y$, o funcţie, $s \in X$ o direcţie în X şi $a \in D$ un punct fixat interior lui D.

Spunem că funcţia f este *derivabilă în punctul* a *dupa direcţia versorului lui* $s \in X$ (sau în raport cu direcţia versorului lui $s \in X$), dacă există limita

$$\lim_{t \to 0} \frac{1}{t} \left(f\left(a + ts\right) - f(a) \right) \in Y, t \in K.$$

Valoarea limitei se notează cu $\frac{\partial f}{\partial s}(a)$ şi se numeşte *derivata funcţiei* f *în punctul* a *după direcţia versorului lui* s.

2. Derivabilitatea parţială a funcţiilor reale de variabile vectoriale.

Fie $X = \mathbf{R}^p, p > 1,\ Y = \mathbf{R}$. Funcţia $f : D \subset \mathbf{R}^p \to \mathbf{R}$, este o funcţie reală de variabilă vectorială $\overline{x} = (x_1, x_2, ..., x_p)$, sau de p variabile vectoriale $x_1, x_2, ..., x_p$. Dacă $\overline{a} = (a_1, a_2, ..., a_p) \in \overset{\circ}{D}$ şi $\overline{e}_1 = (1, 0, ..., 0), \overline{e}_2 = (0, 1, ..., 0), ..., \overline{e}_p =$

[1]Continutul acestui fişier este preluat din Cartea ”Probleme de matematică - calcul diferenţial”, autori P. Găvruţa, D. Dăianu, L. Cădariu, C. Lăzureanu, L. Ciurdariu, Editura Mirton 2004

$(0, 0, ..., 1)$ sunt versorii bazei canonice din $\mathbf{R}^p$, atunci derivata funcţiei f în raport cu variabila $\overline{x}_k$ după direcţia $\overline{e}_k$ în punctul $\overline{a}$ (daca există) este:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial f}{\partial \overline{e}_k}(\overline{a}) &= \lim_{t\to 0}\frac{1}{t}[f(\overline{a}+t\overline{e}_k)-f(\overline{a})] = \\
&= \lim_{t\to 0}\frac{1}{t}[f(a_1, ...a_{k-1}, a_k+t, a_{k+1}..., a_p)-f(a_1, ...a_{k-1}, a_k, a_{k+1}..., a_p)] \\
&= \lim_{t\to 0}\frac{\varphi_k(a_k+t)-\varphi_k(a_k)}{t} \overset{a_k+t=x_k}{=} \lim_{t\to 0}\frac{\varphi_k(x_k)-\varphi_k(a_k)}{x_k-a_k} = \\
&= \frac{d\varphi_k}{dx_k}(a_k) = \varphi_k'(a_k),
\end{aligned}$$

unde $k = 1, 2, ..., p$, iar φ_k este funcţia parţială în raport cu variabila x_k în punctul $\overline{a}$ al funcţiei f.

Rezultă că derivatele parţiale ale funcţiei f în raport cu vectorii bazei canonice din $\mathbf{R}^p$ în punctul $\overline{a}$ sunt derivatele parţiale ale funcţiilor parţiale. Aceste derivate se numesc *derivatele parţiale ale funcţiei f în punctul $\overline{a}$* şi se notează prin:

$$\frac{\partial f}{\partial \overline{e}_k}(\overline{a}) = \frac{\partial f}{\partial x_k}(\overline{a}) = f_k'(a_k).$$

Funcţia $f : D \subset \mathbf{R}^p \to \mathbf{R}$ se zice *derivabilă parţial pe D*, dacă pentru orice $\overline{a} \in \overset{\circ}{D}$, există $\frac{\partial f}{\partial x_k}(\overline{a})$, pentru orice $k = 1, 2, ..., p$.

Cele p functii $\frac{\partial f}{\partial x_k} : D \subset \mathbf{R}^p \to \mathbf{R}, \overline{x} \to \frac{\partial f}{\partial x_k}, (k = 1, 2, ..., p)$ se numesc *derivatele parţiale de ordinul întâi ale funcţiei f pe D.*

Funcţia f se zice de *clasa C^1 pe D* şi se scrie $f \in C^1(D)$, dacă f este continuă, derivabilă parţial pe D şi cu toate derivatele parţiale de ordinul unu $\frac{\partial f}{\partial \overline{e}_1}, \frac{\partial f}{\partial \overline{e}_2}, ..., \frac{\partial f}{\partial \overline{e}_p}$ continue pe D.

3. Derivabilitatea partială a funcţiilor vectoriale de variabile vectoriale.

Fie $f : D \subset \mathbf{R}^p \to \mathbf{R}^q, p \geq 1, q > 1$ o funcţie vectorială de p variabile reale. Dacă $f_i : \overset{\circ}{D} \subset \mathbf{R}^p \to \mathbf{R}, i = 1, 2, ..., q$, sunt componentele lui f, adică $f(\overline{x}) = (f_1(\overline{x}), f_2(\overline{x}), ..., f_q(\overline{x}))$, pentru orice $\overline{x} = (x_1, x_2, ..., x_p) \in D$, atunci derivata parţială $\frac{\partial f}{\partial x_k}$ va fi un vector din R^q, care are ca şi componente derivatele parţiale ale componentelor funcţiei vectoriale f :

$$\frac{\partial f}{\partial x_k}(\overline{x}) = \left(\frac{\partial f_1}{\partial x_k}(\overline{x}), \frac{\partial f_2}{\partial x_k}(\overline{x}), ..., \frac{\partial f_q}{\partial x_k}(\overline{x})\right), 1 \leq k \leq p.$$

4. Dacă $f : D \subset \mathbf{R}^p \to \mathbf{R}^q$ este o funcţie vectorială de variabile $x_1, x_2, ..., x_p$ şi de componente $f_1, f_2, ..., f_q$, iar $\overline{a} = (a_1, a_2, ..., a_p) \in \overset{\circ}{D}$, atunci matricea

$$J_f(\overline{a}) = \left(\frac{\partial f_i}{\partial x_j}(\overline{a})\right)_{1\leq i\leq q, 1\leq j\leq p} = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(\overline{a}) & \frac{\partial f_1}{\partial x_2}(\overline{a}) & ... & \frac{\partial f_1}{\partial x_p}(\overline{a}) \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1}(\overline{a}) & \frac{\partial f_2}{\partial x_2}(\overline{a}) & ... & \frac{\partial f_2}{\partial x_p}(\overline{a}) \\ ... & ... & ... & ... \\ \frac{\partial f_q}{\partial x_1}(\overline{a}) & \frac{\partial f_q}{\partial x_2}(\overline{a}) & ... & \frac{\partial f_q}{\partial x_p}(\overline{a}) \end{pmatrix}$$

se numeşte *matricea jacobiană a funcţiei* $f = (f_1, f_2, ..., f_q)$ în raport cu variabilele $x_1, x_2, ..., x_p$ în punctul $\overline{a}$.

Dacă $p = q$ matricea $J_f(\overline{a})$ este pătratică şi determinantul ei se numeşte *jacobianul (sau determinantul funcţional)* al funcţiilor $f_1, f_2, ..., f_q$ în raport cu variabilele $x_1, x_2, ..., x_p$ în punctul $\overline{a}$ şi are expresia:

$$det[J_f(\overline{a})] = \frac{D(f_1, f_2, ..., f_p)}{D(x_1, x_2, ..., x_p)}(\overline{a}).$$

Spunem că $f = (f_1, f_2, ..., f_q)$ este *de clasă* C^1 pe $D \in \mathbf{R}^p$, şi se scrie $f \in C^1(D)$, dacă $f_1, f_2, ..., f_q$ sunt de clasă C^1 pe D.

5. Derivabilitate de ordin superior

Fie $(X, K, ||\cdot||)$ şi $(Y, K, ||\cdot||)$ două spaţii vectoriale normate, $f : D \subset X \to Y$ o funcţie şi $s, u \in X, (||s|| \neq 0, ||u|| \neq 0)$ două direcţii din X.

Dacă funcţia f are derivată după direcţia s în toate punctele x din D , această derivată este la rândul ei o funcţie: $\frac{\partial f}{\partial s} : D \subset X \to Y$.

Derivata funcţiei $\frac{\partial f}{\partial s}$ în punctul $x \in D$, dupa direcţia u, dacă există, se numeşte *derivata de ordinul doi a funcţiei f în punctul x după direcţiile s şi u.*

Această derivată se notează prin: $\dfrac{\partial^2 f}{\partial s\partial u}(x)$ sau $f''_{su}(x)$.

Din definiţia de mai sus, putem scrie:

$\dfrac{\partial^2 f}{\partial s\partial u}(x) = \dfrac{\partial}{\partial u}\left(\dfrac{\partial f}{\partial s}\right)(x)$, respectiv $f''_{su}(x). = (f'_s)'_u(x)$

Dacă $s = u$ vom folosi notaţiile: $\frac{\partial^2 f}{\partial s\partial s}(x) = \frac{\partial^2 f}{\partial s^2}(x)$, respectiv $f''_{ss}(x) = f''_{s^2}(x)$. Similar se definesc derivatele de ordinul trei, patru, etc.

6. Derivabilitate de ordin superior pentru funcţii reale de variabile reale

Dacă $X = Y = \mathbf{R}, s = 1$ şi $f : D \subset \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ o funcţie reală de variabilă reală, *derivata de ordinul n funcţiei f* într-un punct $x \in \overset{\circ}{D}$ se defineşte prin recurenţă ca fiind derivata derivatei de ordinul $n-1$ a funcţiei f in punctul x:

$$f^{(n)}(x) = \left(f^{(n-1)}\right)'(x), n > 1.$$

Se spune ca funcţia $f : D \subset \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ este *de clasă* C^n *pe mulţimea* A, şi se notează $f \in C^n(A)$, dacă f are derivata $f^{(n)}(x), n \in N$, continuă în toate punctele unei mulţimi $A \subset \overset{\circ}{D}$. $C^0(A)$ sau $C(A)$ desemnează mulţimea funcţiilor continue pe A, iar $C^\infty(A)$ este *clasa funcţiilor indefinit derivabile* pe A.

Derivata de ordinul $n \in N^*(n < p)$ a produsului a două funcţii $f, g \in C^p(A), p \in N$, se calculează folosind *formula lui Leibnitz*:

$$(f \cdot g)^{(n)}(x) = \sum_{k=1}^{n} C_n^k \cdot f^{(n-k)}(x) \cdot g^{(k)}(x).$$

7. Derivabilitate de ordin superior pentru funcţii reale de variabile vectoriale

Fie $X = \mathbf{R}^p, p > 1, Y = \mathbf{R}$. Derivatele funcţiei $f : D \subset R^p \to R$, în punctul $\overline{x} = (x_1, x_2, ..., x_p) \in \overset{\circ}{D}$ după versorii bazei canonice $\overline{e}_1, \overline{e}_2, ..., \overline{e}_p$ sunr derivatele parţiale ale funcţiei f în punctul $\overline{x}$.

Derivatele parţiale de ordinul doi ale funcţiei f vor fi definite astfel:
$\dfrac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} = \dfrac{\partial}{\partial x_i}\left(\dfrac{\partial f}{x_j}\right)$, respectiv $f''_{x_i x_j} = \left(f'_{x_j}\right)'_{x_i}$,unde $i, j = \overline{1, p}$.

Dacă $i = j$ vom folosi notaţiile: $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_i} = \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_i^2}$, respectiv $f''_{x_i x_i} = f''_{x_i^2}$.

Similar se pot defini derivatele parţiale de ordinul trei, etc:

$$\frac{\partial^3 f}{\partial x_i \partial x_j \partial x_k} = \frac{\partial}{\partial x_i}\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_k}\right).$$

Derivatele parţilale de ordin superior în raport cu variabile distincte, adică derivatele parţiale de tipul $\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}, \frac{\partial^3 f}{\partial x_i \partial x_j^2}, ...(i \neq j)$, se numesc *derivate parţiale mixte*.

Teorema lui Schwarz. Dacă o funcţie $f : D \subset \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$, admite derivate parţiale mixte de ordinul doi într-o vecinătate V a lui $(x, y) \in \overset{\circ}{D}$ şi dacă f''_{xy} este continuă în (x, y), atunci are loc egalitatea:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(x, y) = \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}(x, y).$$

O funcţie $f : D \subset \mathbf{R}^p \to \mathbf{R}, p > 1$, se spune de *clasă* $C^n(A)$, unde $A \in \overset{\circ}{D}$ (sau ca este de n ori continuu derivabilă pe A), dacă f este continuă împreunau toate derivatele ei parţiale până la ordinul n inclusiv pe mulţimea A.

8. Derivabilitate de ordin superior pentru funcţii vectoriale de variabile vectoriale.

Fie $X = \mathbf{R}^p, p > 1, Y = \mathbf{R}^q, q > 1$. Dacă $f : D \subset \mathbf{R}^p \to \mathbf{R}^q$ este o funcţie vectorială de componente $f_i : D \subset \mathbf{R}^p \to \mathbf{R}, 1 \leq i \leq q$, atunci pentru punctul $\overline{x} = (x_1, x_2, ..., x_p) \in D, f(\overline{x})$ este un vector din R^q, de forma $f(\overline{x}) = (f_1(\overline{x}), f_2(\overline{x}), ..., f_q(\overline{x}))$.

Derivatele parţiale de ordin superior ale funcţiei f sunt vectori de componente derivatele parţiale de ordinul respectiv ale componentelor funcţiei f. De exemplu:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} = \left(\frac{\partial^2 f_1}{\partial x_i \partial x_j}, \frac{\partial^2 f_2}{\partial x_i \partial x_j}, ..., \frac{\partial^2 f_q}{\partial x_i \partial x_j} \right), i, j = 1, 2, ...p.$$

Funcţia $f = (f_1, f_2, ..., f_q)$ este *de clasă* C^n *pe mulţimea deschisă* $D \subset \mathbf{R}^p$, şi notăm $f \in C^n(D))$, dacă $f_1, f_2, ..., f_q$ sunt de clasă C^n pe D.

9. Derivarea funcţiilor compuse.

Fie I, J două intervale şi $u : I \to J,\ f : J \to \mathbf{R}$ două funcţii. Dacă u este derivabilă în punctul $x_0 \in I$ şi f este derivabilă în punctul $u_0 = u(x_0) \in J$, atunci funcţia compusă $F : I \to J, F(x) = (f \circ u)(x) = f(u(x))$ este derivabilă în x_0 şi $F'(x_0) = f'(x_0) \cdot u'(x_0)$. Dacă u este derivabilă pe I, f este derivabilă pe J, atunci $F = f \circ u$ este derivabilă pe I şi are loc formula:

$$\frac{dF}{dx}(x) = \frac{df}{du}(u) \cdot \frac{du}{dx}(x), x \in I.$$

Pentru calculul derivatelor de ordin superior ale funcţiei compuse $F = f \circ u$ se foloseşte operatorul de derivare

$$\frac{d\circ}{dx} = \frac{d\cdot}{du} \cdot \frac{du}{dx},$$

unde

$$\circ \longleftarrow F, \frac{dF}{dx}, \frac{d^2F}{dx^2}, ... \qquad \cdot \longleftarrow f, \frac{df}{dx}, \frac{d^2f}{dx^2}, ...$$

Aşadar derivata de ordinul 2 a funcţiei compuse F se va calcula astfel:

$$\frac{d^2F}{dx^2} = \frac{d}{dx}\left(\frac{dF}{dx}\right) = \frac{d}{dx}\left(\frac{d}{du}\cdot\frac{du}{dx}\right) = \frac{d}{dx}\left(\frac{df}{du}\right)\cdot\frac{du}{dx} + \frac{df}{dx}\cdot\frac{d^2u}{dx^2};$$

Aplicînd operatorul de derivare se obţine:

$$\frac{d^2F}{dx^2} = \left[\frac{d}{du}\left(\frac{df}{du}\right)\cdot\frac{du}{dx}\right]\cdot\frac{du}{dx} + \frac{df}{dx}\cdot\frac{d^2u}{dx^2} = \frac{d^2f}{du^2}\cdot\left(\frac{du}{dx}\right)^2 + \frac{df}{dx}\cdot\frac{d^2u}{dx^2}.$$

Rezultatele de mai sus se pot extinde şi pentru funcţii de mai multe variabile.

Cazul 1. (O variabilă independentă şi mai multe variabile intermediare).

Fie $g : A \subset \mathbf{R}' \to B \subset \mathbf{R}^2, g(x) = (u(x), v(x))$ o funcţie vectorială de variabilă reală şi $f : B \subset \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}', f(u,v)$, o funcţie reală de variabilă vectorială. Atunci funcţia compusă $F = f \circ g, F : A \subset \mathbf{R}' \to \mathbf{R}'$, este definită prin $F(x) = f(u(x), v(x))$.

Dacă funcţia g are derivate continue pe A, (u, v sunt continuu derivabile pe A) şi dacă f are derivate parţiale continue pe B, atunci funcţia compusă F are derivată continuă pe A dată de:

$$\frac{dF}{dx}(x) = \frac{\partial f}{\partial u}\cdot\frac{du}{dx} + \frac{\partial f}{\partial v}\cdot\frac{dv}{dx}.$$

Pentru calculul derivatelor de ordin superior ale funcţiei compuse $F = f \circ u$ se foloseşte operatorul de derivare:

$$\frac{d\circ}{dx} = \frac{\partial\cdot}{\partial u}\cdot\frac{du}{dx} + \frac{\partial\cdot}{\partial v}\cdot\frac{dv}{dx},$$

unde

$$\circ \longleftarrow F, \frac{dF}{dx}, \frac{d^2F}{dx^2}, \ldots \qquad \cdot \longleftarrow f, \frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}, \ldots.$$

Dacă $f(u,v)$ este continuu derivabilă de două ori, ca şi funcţiile $u(x)$, şi $v(x)$, derivata de ordinul 2 a funcţiei compuse F se va calcula astfel:

$$\begin{aligned}\frac{d^2F}{dx^2} &= \frac{d}{dx}\left(\frac{dF}{dx}\right) = \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial f}{\partial u}\cdot\frac{du}{dx} + \frac{\partial f}{\partial v}\cdot\frac{dv}{dx}\right) = \\ &= \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial f}{\partial u}\right)\cdot\frac{du}{dx} + \frac{\partial f}{\partial u}\cdot\frac{d}{dx}\left(\frac{du}{dx}\right) + \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial f}{\partial v}\right)\cdot\frac{dv}{dx} + \frac{\partial f}{\partial v}\cdot\frac{d}{dx}\left(\frac{dv}{dx}\right).\end{aligned}$$

Aplicînd operatorul de derivare se obţine:

$$\begin{aligned}\frac{d^2F}{dx^2} &= \left[\frac{\partial^2 f}{\partial u^2}\cdot\frac{du}{dx}+\frac{\partial^2 f}{\partial v\partial u}\cdot\frac{dv}{dx}\right]\cdot\frac{du}{dx}+\frac{\partial f}{\partial x}\cdot\frac{d^2u}{dx^2}+\\ &+ \left[\frac{\partial^2 f}{\partial u\partial v}\cdot\frac{du}{dx}+\frac{\partial^2 f}{\partial v^2}\cdot\frac{dv}{dx}\right]\cdot\frac{dv}{dx}+\frac{\partial f}{\partial x}\cdot\frac{d^2v}{dx^2}.\end{aligned}$$

Cazul 2. (Mai multe variabile independente şi o variabilă intermediară).

Fie $u : A \subset \mathbf{R}^2 \to B \subset \mathbf{R}, u(x,y)$ o funcţie reală de variabilă vectorială şi $f : B \subset \mathbf{R} \to \mathbf{R}, f(u)$ o funcţie reală de variabilă reală. Atunci funcţia compusă $F : A \subset \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^2$, este definită prin $F(x,y) = f(u(x,y))$.

Dacă funcţia u are derivate parţiale continue pe A, şi f are derivată continuă pe B, atunci funcţia compusă F are derivate parţiale continue pe A dat de relaţiile:

$$\frac{\partial F}{\partial x}=\frac{df}{du}\cdot\frac{\partial u}{\partial x}\qquad \frac{\partial F}{\partial y}=\frac{df}{du}\cdot\frac{\partial u}{\partial y}.$$

Pentru calculul derivatelor de ordin superior ale funcţiei compuse F se folosesc următorii operatori de derivare:

$$\frac{\partial\circ}{\partial x}=\frac{d\cdot}{du}\cdot\frac{\partial u}{\partial x};\qquad \frac{\partial\circ}{\partial y}=\frac{d\cdot}{du}\cdot\frac{\partial u}{\partial y}.,$$

unde

$$\circ \longleftarrow F, \frac{\partial F}{dx}, \frac{\partial F}{\partial y}, \ldots \qquad \cdot \longleftarrow f, \frac{df}{du}, \ldots.$$

Dacă $f(u,v)$ este continuu derivabilă de două ori, ca şi funcţiile $u(x), v(x)$, derivata de ordinul 2 a funcţiei compuse F se va calcula astfel:

$$\frac{\partial^2F}{\partial x^2}=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{df}{du}\cdot\frac{\partial u}{\partial x}\right)=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{df}{du}\right)\cdot\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{df}{du}\cdot\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right).$$

Aplicînd operatorul de derivare, obţinem:

$$\frac{\partial^2F}{\partial x^2}=\left[\frac{d^2f}{du^2}\cdot\frac{\partial u}{\partial x}\right]\cdot\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{df}{du}\cdot\frac{\partial^2u}{\partial x^2}=\frac{d^2f}{du^2}\cdot\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2+\frac{df}{du}\cdot\frac{\partial^2u}{\partial x^2};$$

$$\frac{\partial^2F}{\partial x\partial y}=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial F}{\partial y}\right)=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{df}{du}\cdot\frac{\partial u}{\partial y}\right)=\frac{d^2f}{du^2}\cdot\frac{\partial u}{\partial x}\cdot\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{df}{du}\cdot\frac{\partial^2u}{\partial x\partial y};$$

$$\frac{\partial^2F}{\partial y^2}=\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial F}{\partial y}\right)=\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{df}{du}\cdot\frac{\partial u}{\partial y}\right)=\frac{d^2f}{du^2}\cdot\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2+\frac{df}{du}\cdot\frac{\partial^2u}{\partial y^2}.$$

Cazul 3. (Mai multe variabile independente şi mai multe variabile intermediare).

Fie $g : A \subset \mathbf{R}^2 \to B \subset \mathbf{R}^2, g(x, y) = (u(x, y), v(x, y))$ o funcţie vectorială de variabilă vectorială şi $f : B \subset \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}, f(u, v)$ o funcţie reală de variabilă vectorială. Atunci funcţia compusă $F = f \circ g, F : A \subset \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$, este definită prin $F(x, y) = f(u(x, y), v(x, y))$.

Dacă funcţia g are derivate parţiale continue pe A, (u, v au derivate parţiale continue pe A) şi dacă f are derivate parţiale continue pe B, atunci funcţia compusă F are derivate parţiale continue pe A date de:

$$\frac{dF}{dx} = \frac{\partial f}{\partial u} \cdot \frac{du}{dx} + \frac{\partial f}{\partial v} \cdot \frac{dv}{dx}; \qquad \frac{dF}{dy} = \frac{\partial f}{\partial u} \cdot \frac{du}{dy} + \frac{\partial f}{\partial v} \cdot \frac{dv}{dy}.$$

Pentru calculul derivatelor de ordin superior ale funcţiei compuse F se consideră operatorii de derivare:

$$\frac{\partial \circ}{\partial x} = \frac{\partial \cdot}{\partial u} \cdot \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial \cdot}{\partial v} \cdot \frac{\partial v}{\partial x}; \qquad \frac{\partial \circ}{\partial y} = \frac{\partial \cdot}{\partial u} \cdot \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial \cdot}{\partial v} \cdot \frac{\partial v}{\partial y}.$$

unde

$$\circ \longleftarrow F, \frac{\partial F}{dx}, \frac{\partial F}{\partial y}, ...; \qquad \cdot \longleftarrow f, \frac{\partial f}{\partial u}, \frac{\partial f}{\partial v}, ...$$

Derivata de ordinul 2 a funcţiei compuse $F(x, y) = f(u(x, y), v(x, y))$ se va calcula astfel:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} &= \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial F}{\partial x}\right) = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial u} \cdot \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial v} \cdot \frac{\partial v}{\partial x}\right) = \\ &= \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial u}\right) \cdot \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial u} \cdot \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial v}\right) \cdot \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial v} \cdot \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial v}{\partial x}\right). \end{aligned}$$

Aplicînd operatorii de derivare, rezultă:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} &= \left[\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{\partial f}{\partial u}\right) \cdot \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{\partial f}{\partial u}\right) \cdot \frac{\partial v}{\partial x}\right] \cdot \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial u} \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \\ &+ \left[\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{\partial f}{\partial v}\right) \cdot \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{\partial f}{\partial v}\right) \cdot \frac{\partial v}{\partial x}\right] \cdot \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial v} \cdot \frac{\partial^2 f}{\partial u \partial v}, \end{aligned}$$

adică

$$\frac{\partial^2 F}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 f}{\partial u^2} \cdot \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \frac{\partial^2 f}{\partial u \partial v} \cdot \frac{\partial u}{\partial x} \cdot \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial^2 f}{\partial v^2} \cdot \left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)^2 + \frac{\partial f}{\partial u} \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial f}{\partial v} \cdot \frac{\partial^2 v}{\partial x^2}.$$

Similar se obţin

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 F}{\partial y^2} &= \frac{\partial^2 f}{\partial u^2}\cdot\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2+\frac{\partial^2 f}{\partial u\partial v}\cdot\frac{\partial u}{\partial y}\cdot\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{\partial^2 f}{\partial v^2}\cdot\left(\frac{\partial v}{\partial y}\right)^2+\\ &+ \frac{\partial f}{\partial u}\cdot\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial f}{\partial v}\cdot\frac{\partial^2 v}{\partial y^2};\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 F}{\partial x\partial y} &= \frac{\partial^2 f}{\partial u^2}\cdot\frac{\partial u}{\partial x}\cdot\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial^2 f}{\partial u\partial v}\cdot\left(\frac{\partial u}{\partial x}\cdot\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{\partial u}{\partial y}\cdot\frac{\partial v}{\partial x}\right)+\\ &+ \frac{\partial^2 f}{\partial v^2}\cdot\frac{\partial v}{\partial x}\cdot\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{\partial f}{\partial u}\cdot\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}+\frac{\partial f}{\partial v}\cdot\frac{\partial^2 v}{\partial x\partial y}.\end{aligned}$$

10. Calculul derivatei după o direcţie în $\mathbf{R}^p$.

Fie $f : D \subset \mathbf{R}^p \to \mathbf{R}$, $f(x_1, x_2, ..., x_p)$ o funcţie derivabilă în punctul $\overline{a} \in D$ după orice direcţie. Atunci pentru orice versor $\overline{s} = (s_1, s_2, ..., s_p) \in \mathbf{R}^p$ avem:

$$\frac{\partial f}{\partial \overline{s}}(\overline{a}) = s_1\cdot\frac{\partial f}{\partial x_1}(\overline{a}) + s_2\cdot\frac{\partial f}{\partial x_2}(\overline{a}) + ... + s_p\cdot\frac{\partial f}{\partial xp}(\overline{a}).$$

Dacă $p = 3$, versorul $\overline{s}$ are expresia $\overline{s} = \cos\alpha\cdot\overline{i} + \cos\beta\cdot\overline{j} + \cos\gamma\cdot\overline{k}$, unde α, β, γ sunt unghiurile pe care versorul $\overline{s}$ le face cu axele de coordonate, iar $\overline{a} = (a_1, a_2, a_3)$, atunci:

$$\frac{\partial f}{\partial \overline{s}}(\overline{a}) = \frac{\partial f}{\partial x_1}(\overline{a})\cdot\cos\alpha + \frac{\partial f}{\partial x_2}(\overline{a})\cdot\cos\beta + \frac{\partial f}{\partial x_3}(\overline{a})\cdot\cos\gamma.$$

11. Funcţii omogene. Teorema lui Euler.

Funcţia $f : X \subset \mathbf{R}^p \longrightarrow \mathbf{R}$, se numeşte *omogenă de grad* n ($n \in \mathbf{R}$) dacă pentru orice $t > 0$ şi orice $\overline{x} = (x_1, ..., x_p) \in X$, avem $t\cdot\overline{x} \in X$ şi :

$$f(tx_1, ..., tx_p) = t^n f(x_1, ..., x_p).$$

Teorema lui Euler. Dacă funcţia $f : X \subset \mathbf{R}^p \longrightarrow \mathbf{R}$ este omogenă de grad n şi are derivatele parţiale continue in $\overline{x} = (x_1, ..., x_p) \in X$, atunci are loc relaţia lui Euler:

$$x_1\cdot\frac{\partial f(\overline{x})}{\partial x_1} + x_2\cdot\frac{\partial f(\overline{x})}{\partial x_2} + ... + x_p\cdot\frac{\partial f(\overline{x})}{\partial x_p} = nf(\overline{x}).$$

Relaţia lui Euler poate fi scrisă sub forma

$$\left(x_1\frac{\partial\cdot}{\partial x_1} + x_2\frac{\partial\cdot}{\partial x_2} + ... + x_p\frac{\partial\cdot}{\partial x_p}\right)^{(1)} f = n\cdot f,$$

care pune în evidenţă *operatorul lui Euler de ordinul întâi*:

$$\left(x_1\frac{\partial\cdot}{\partial x_1}+x_2\frac{\partial\cdot}{\partial x_2}+...+x_p\frac{\partial\cdot}{\partial x_p}\right)^{(1)}.$$

Cu ajutorul *operatorului lui Euler de ordinul* k:

$$\left(x_1\frac{\partial\cdot}{\partial x_1}+x_2\frac{\partial\cdot}{\partial x_2}+...+x_p\frac{\partial\cdot}{\partial x_p}\right)^{(k)},$$

Teorema lui Euler se poate formula astfel: Dacă funcţia $f : X \subset \mathbf{R}^p \longrightarrow \mathbf{R}$ este omogenă de grad n şi de clasa C^k, atunci are loc *relaţia lui Euler de ordinul* k:

$$\left(x_1\frac{\partial\cdot}{\partial x_1}+x_2\frac{\partial\cdot}{\partial x_2}+...+x_p\frac{\partial\cdot}{\partial x_p}\right)^{(k)} f=n(n-1)\cdot...(n-k+1)\cdot f.$$

12. Diferenţiabilitatea funcţiilor reale de variabile vectoriale.

Fie $X=\mathbf{R}^p, p>1,\ Y=\mathbf{R}$, funcţia $f(x_1,x_2,...,x_p), f:\mathbf{R}^p\to\mathbf{R}$, şi fie $\overline{a}\in(a_1,a_2,....,a_p)$ un punct interior lui A.

Dacă funcţia f este diferenţiabilă în punctul $\overline{a}$, atunci ea are derivate parţiale în acest punct şi diferenţiala ei în punctul $\overline{a}$ este:

$$df(\overline{a})=\sum_{k=1}^{p}\frac{\partial f}{\partial x_k}(\overline{a})\cdot pr_k,$$

unde aplicaţiile liniare $pr_k:\mathbf{R}^p\to\mathbf{R}, pr_k(\overline{x})=pr_k(x_1,x_2,...,x_p)=x_k, k=\overline{1,p}$, sunt funcţiile proiecţii.

Diferenţiala funcţiei proiecţie de coordonată k, $pr_k(\overline{x})=x_k$, se notează cu $dx_k:\mathbf{R}^p\to\mathbf{R}$, este definită prin $dx_k(\overline{h})=h_k$ sau $dx_k=h_k$ şi se numeşte *diferenţiala argumentului* x_k, (de fapt diferenţiala funcţiei proiecţie pr_k coincide cu această proiecţie: $dpr_k=pr_k$). Cu notaţiile de mai sus, formula de calcul a diferenţialei funcţiei f în punctul $\overline{a}$ devine:

$$df(\overline{a})=\sum_{k=1}^{p}\frac{\partial f}{\partial x_k}(\overline{a})\cdot dx_k.$$

Funcţia $f : D \subset \mathbf{R}^p \to \mathbf{R}$ este *diferenţiabilă* în punctul $\overline{a} = (a_1, a_2, ..., a_p)$ ce aparţine interiorului multimii D dacă există o funcţie $\omega_{\overline{a}} : D \subset \mathbf{R}^p \to \mathbf{R}$, continuă şi nulă în $\overline{a}$, astfel încât pentru orice $\overline{x} = (x_1, x_2, ..., x_p) \in D$ să avem

$$f(\overline{x}) - f(\overline{a}) = \sum_{k=1}^{p} \frac{\partial f}{\partial x_k}(\overline{a}) \cdot (x_k - a_k) + \omega_{\overline{a}}(\overline{x}) \cdot ||\overline{x} - \overline{a}||,$$

unde $\lim\limits_{\overline{x} \to \overline{a}} \omega_{\overline{a}}(\overline{x}) = \omega_{\overline{a}}(\overline{a})$.

Criteriu de diferenţiabilitate. Dacă funcţia $f : D \subset \mathbf{R}^p \to \mathbf{R}, p > 1$ are derivate parţiale continue pe D, atunci f este diferenţiabilă pe orice mulţime deschisă conţinută în domeniul ei de definiţie.

13. Diferenţialele funcţiilor vectoriale. Fie $f : D \subset \mathbf{R}^p \to \mathbf{R}^q, p \geq 1, q > 1$ şi $\overline{a} = (a_1, a_2, ..., a_p)$ un punct aparţînind interiorului mulţimii D. Dacă notăm $f = (f_1, f_2, ..., f_p)$, unde $f_i : \overset{\circ}{D} \subset \mathbf{R}^p \to \mathbf{R}, i = 1, 2, ..., q$, atunci f este *diferenţiabilă în punctul* $\overline{a}$ dacă şi numai dacă funcţiile componente $f_i : \overset{\circ}{D} \subset \mathbf{R}^p \to \mathbf{R}, (i = 1, 2, ..., q)$, sunt diferenţiabile în punctul $\overline{a}$. *Diferenţiala lui* f *în* $\overline{a}$ este vectorul

$$df(\overline{a}) = (df_1(\overline{a}), df_2(\overline{a}), ..., df_q(\overline{a})),$$

unde

$$df_i(\overline{a}) = \sum_{j=1}^{p} \frac{\partial f_i}{\partial x_j}(\overline{a}) \cdot dx_j.$$

Utilizînd vectorii bazei canonice $\{\overline{e}_1, \overline{e}_2, ..., \overline{e}_q\}$ ai spaţiului $\mathbf{R}^q$, obţinem

$$df(\overline{a}) = \sum_{j=1}^{p} df_i(\overline{a}) \cdot \overline{e}_i = \sum_{i=1}^{q} \sum_{j=1}^{p} \frac{\partial f_i}{\partial x_j}(\overline{a}) \cdot dx_j \cdot \overline{e}_i.$$

Matricea diferenţialei $df(\overline{a})$ în bazele canonice ale spaţiului $\mathbf{R}^p$ şi $\mathbf{R}^q$ se numeşte *matricea jacobiană asociată funcţiei* f şi are expresia

$$J_f(\overline{a}) = \left(\frac{\partial f_i(\overline{a})}{\partial x_j} \right)_{1 \leq i \leq q, 1 \leq j \leq p}.$$

Dacă funcţiile $f, g : D \subset \mathbf{R}^p \to \mathbf{R}^q$ sunt diferenţiabile pe D, atunci:

(i) $d(f + g) = df + dg$;

(ii) $d(\alpha f) = \alpha \cdot df, \alpha \in \mathbf{R}$;

(iii) $d(f \circ u) = f'(u)du$.

14. Diferenţiale de ordin superior. Fie $f : D \subset \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}$, o funcţie diferenţiabilă pe mulţimea deschisă D. fiecărui $\overline{x} \in D$ i se poate asocia o funcţie liniară $df(\overline{x}) : R^n \to R$, diferenţiala lui f în punctul x. Pentru fiecare $\overline{h} \in \mathbf{R}^n$, fixat considerăm funcţia

$$\overline{x} \to d(f(\overline{x}))\overline{h}, \tag{1}$$

definită pe D cu valori în $\mathbf{R}$.

Se spune că funcţia f este *diferenţiabilă de două ori în punctul* $\overline{a} \in \mathbf{R}^n$, dacă aplicaţia (1) este diferenţiabilă în $\overline{a}$ pentru orice $\overline{h} \in \mathbf{R}^n$.

Funcţia f este diferenţiabilă de două ori în punctul $\overline{a} \in D$ dacă şi numai dacă derivatele parţiale de ordinul întâi sunt diferenţiabile în punctul $\overline{a}$.

Se numeşte *diferenţiala de ordinul doi a funcţiei f în punctul* $\overline{a}$, forma biliniară

$$\begin{aligned} d^2f(\overline{a})(\overline{h},\overline{k}) &= \frac{\partial}{\partial x_1}(df(\overline{x}))(\overline{h})(\overline{a})k_1 + ... + \frac{\partial}{\partial x_n}(df(\overline{x}))(\overline{h})(\overline{a})k_n = \\ &= \sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial^2 f(\overline{a})}{\partial x_i \partial x_j} h_i k_j, \end{aligned}$$

unde $\overline{h}, \overline{k} \in \mathbf{R}^n$.

Dacă formei biliniare de mai sus îi asociem forma pătratică corespunzătoare, considerînd $\overline{h} = \overline{k}$, şi notînd prin dx_i diferenţialele funcţiilor proiecţie $dx_i(\overline{h}) = h_i$, putem identifica diferenţiala de ordinul doi cu o formă patratica pe $\mathbf{R}^n$:

$$d^2f(\overline{a}) = \sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial^2 f(\overline{a})}{\partial x_i \partial x_j} dx_i dx_j$$

Matricea asociată acestei forme pătratice într-un punct curent $\overline{x}$ se numeşte *hessiana funcţiei f în punctul* $\overline{x}$ şi are expresia:

$$H(\overline{x}) = \begin{pmatrix} f''_{x_1^2}(\overline{x}) & f''_{x_1x_2}(\overline{x}) & ... & f''_{x_1x_p}(\overline{x}) \\ f''_{x_2x_1}(\overline{x}) & f''_{x_2^2}(\overline{x}) & ... & f''_{x_2x_p}(\overline{x}) \\ ... & ... & ... & ... \\ f''_{x_px_1}(\overline{x}) & f''_{x_px_2}(\overline{x}) & ... & f''_{x_p^2}(\overline{x}) \end{pmatrix}.$$

Se poate da o regulă formală pentru operatorul diferenţial de ordinul doi:

$$d^2 \cdot = \left(\frac{\partial \cdot}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial \cdot}{\partial x_2} dx_2 + ... + \frac{\partial \cdot}{\partial x_n} dx_n \right)^{(2)},$$

care este pătratul operatorului diferenţial de ordinul unu

$$d\cdot = \left(\frac{\partial \cdot}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial \cdot}{\partial x_2} dx_2 + ... + \frac{\partial \cdot}{\partial x_n} dx_n \right).$$

Aşadar diferenţiala de ordinul 2 a funcţiei f în punctul $\overline{x}$ este:

$$df^2(\overline{x}) = \left(\frac{\partial \cdot}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial \cdot}{\partial x_2} dx_2 + ... + \frac{\partial \cdot}{\partial x_n} dx_n \right)^{(2)}.$$

Procedînd prin recurenţă, dacă $f \in C^n(D)$, diferenţiala de ordinul n a funcţiei f în punctul $\overline{x}$ se poate scrie astfel:

$$df^n(\overline{x}) = \left(\frac{\partial \cdot}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial \cdot}{\partial x_2} dx_2 + ... + \frac{\partial \cdot}{\partial x_n} dx_n \right)^{(n)} f(\overline{x}) =$$

$$= \sum_{\alpha_i \in N} \frac{n!}{\alpha_1! \cdot \alpha_2! \cdot ... \cdot \alpha_n!} \cdot \frac{\partial^n f(\overline{x})}{\partial x_1^{\alpha_1} \partial x_2^{\alpha_2} .... \partial x_n^{\alpha_n}} dx_1^{\alpha_1} dx_2^{\alpha_2} .... dx_n^{\alpha_n},$$

cu $\sum\limits_{i=1}^{n} \alpha_i = n$.

15. Diferenţialele funcţiilor compuse.

Fie $(X, K, ||\cdot||), (Y, K, ||\cdot||), (Z, K, ||\cdot||)$ trei spaţii vectoriale normate peste acelaşi corp K şi funcţiile $f : A \subset X \to B \subset Y, g : B \subset Y \to Z$, precum şi funcţia compusă $F = f \circ g, F : A \subset X \to Z$.

Dacă funcţia g este diferenţiabilă în punctul $\overline{a}$ (ce aparţine interiorului mulţimii A), avînd diferenţiala $dg(\overline{a})$ şi funcţia f este diferenţiabilă în punctul $\overline{b} = g(\overline{a})$ (ce aparţine interiorului mulţimii B), avînd diferenţiala $dg(\overline{b})$, atunci funcţia compusă $F = f \circ g$ este diferenţiabilă în punctul $\overline{a}$ şi diferentîala ei este dată de relaţia:

$$dF(\overline{a}) = df(\overline{b}) \circ dg(\overline{a}).$$

Considerînd spaţiile finit dimensionale $X = \mathbf{R}^p$, $Y = \mathbf{R}^q$ şi $Z = \mathbf{R}^m$, $p, q, m \in \mathbf{N}$, formula $dF(\overline{a}) = d(f \circ g)(\overline{a}) = df(\overline{b}) \circ dg(\overline{a})$, conduce la următoarea egalitate între matricile jacobiene $J_g(\overline{a}), J_f(\overline{b})$ şi $J_F(\overline{a})$:

$$J_{f\circ g}(\overline{a}) = J_f(\overline{b}) \cdot J_g(\overline{a}), \tag{2}$$

unde $\overline{a} = (a_1, a_2, ..., a_p) \in A$ şi $\overline{b} = (b_1, b_2, ..., b_q) \in B$. Dacă $p = q = m$, obţinem, din relaţia (2), o relaţie între determinanţii funcţionali ai componentelor funcţiilor:$F = (F_1, F_2, ..., F_p), f = (f_1, f_2, ..., f_p)$ şi $g = (g_1, g_2, ..., g_q)$ în raport cu variabilele repective: $F(x_1, x_2, ..., x_p), f(u_1, u_2, ..., u_p)$ şi $g(x_1, x_2, ..., x_p)$:

$$\frac{D(F_1, F_2, ..., F_p)}{D(x_1, x_2, ..., x_p)} = \frac{D(f_1, f_2, ..., f_p)}{D(u_1, u_2, ..., u_p)} \cdot \frac{D(g_1, g_2, ..., g_p)}{D(x_1, x_2, ..., x_p)}.$$

Probleme rezolvate

1. Să se calculeze derivata funcţiei $f(x, y, z) = xy + yz + zx, (x, y, z) \in \mathbf{R}^3$, în punctul $M(2, 1, 3)$, după direcţia versorului $\overline{s} = \dfrac{\overline{MN}}{||\overline{MN}||}$, unde $N(5, 5, 15)$.

Soluţie. $\dfrac{df}{d\overline{s}} = f_x' \cdot \cos\alpha + f_y' \cdot \cos\beta + f_z' \cdot \cos\gamma$, unde α, β, γ sunt unghiurile pe care vectorul $\overline{MN}$ le face cu axele de coordonate.

Calculăm

$$\cos\alpha = \frac{\left\langle \overline{MN}, \overline{OX} \right\rangle}{||\overline{MN}|| \cdot ||\overline{OX}||} = \frac{3}{13}, \cos\beta = \frac{\left\langle \overline{MN}, \overline{OY} \right\rangle}{||\overline{MN}|| \cdot ||\overline{OY}||} = \frac{4}{13},$$

$$\cos\gamma = \frac{\left\langle \overline{MN}, \overline{OZ} \right\rangle}{||\overline{MN}|| \cdot ||\overline{OZ}||} = \frac{12}{13}.$$

Cum $f'_x(2,1,3) = 4$, $f'_y(2,1,3) = 5$ şi $f'_z(2,1,3) = 3$, obţinem că

$$\frac{df}{d\overline{s}} = \frac{68}{13}.$$

2. Fie $f : (\mathbf{R}_+^* - \{1\}) \times \mathbf{R} \longrightarrow \mathbf{R}^2, f(x,y) = \left(e^{x^y}, \log_{x^2}\sqrt{1+y^2}\right)$. Să se calculeze $df(e,1)$.

Soluţie. Din proprietăţile logaritmilor, obţinem

$$f(x,y) = \left(e^{x^y}, \frac{\ln\sqrt{1+y^2}}{\ln x^2}\right) = \left(e^{x^y}, \frac{\ln(1+y^2)}{4\cdot\ln x}\right).$$

Calculînd derivatele parţiale ale componentelor funcţiei f, avem:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \left(e^{x^y}\cdot y\cdot x^{y-1}, -\frac{\frac{1}{x}\cdot\ln(1+y^2)}{4\cdot\ln^2 x}\right) = \left(e^{x^y}\cdot y\cdot x^{y-1}, -\frac{\ln(1+y^2)}{4x\cdot\ln^2 x}\right)$$

şi

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \left(e^{x^y}\cdot x^y\cdot\ln x, \frac{\frac{2y}{1+y^2}}{4\cdot\ln x}\right) = \left(e^{x^y}\cdot x^y\cdot\ln x, \frac{y}{2\cdot(1+y^2)\cdot\ln x}\right).$$

Cum derivatele parţiale ale lui f sunt continue pe tot domeniul de definiţie al funcţiei f, deducem că f este diferenţiabila în punctul $(e,1)$. Pentru calculul diferenţialei, folosim formula

$$df(e,1) = \frac{\partial f}{\partial x}(e,1)\cdot dx + \frac{\partial f}{\partial y}(e,1)\cdot dy.$$

Deci

$$\begin{aligned} df(e,1) &= (e^e, -\frac{\ln 2}{4\cdot e})\cdot dx + (e^{e+1}, \frac{1}{4})\cdot dy = \\ &= (e^e\cdot dx + e^{e+1}\cdot dy, -\frac{\ln 2}{4\cdot e}\cdot dx + \frac{1}{4}\cdot dy). \end{aligned}$$

3. Calculaţi matricea jacobiană pentru funcţia $f : \mathbf{R}^3 \longrightarrow \mathbf{R}^2, f(x,y,z) = (x+y+z, xy+yz+zx)$.

Soluţie:

$$J_f = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x} & \frac{\partial f_1}{\partial y} & \frac{\partial f_1}{\partial z} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x} & \frac{\partial f_2}{\partial y} & \frac{\partial f_2}{\partial z} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ y+z & z+x & x+y \end{pmatrix}.$$

4. Calculaţi jacobianul functiilor u, v, w, definite prin:

$$u = xyz; /v = xy - xyz; /w = y - xy.$$

Soluţie:

$$\frac{D(u,v,z)}{D(x,y,z)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y} & \frac{\partial u}{\partial z} \\ \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial y} & \frac{\partial v}{\partial z} \\ \frac{\partial w}{\partial x} & \frac{\partial w}{\partial y} & \frac{\partial w}{\partial z} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} yz & xz & xy \\ y - yz & x - xz & -xy \\ -y & 1 - x & 0 \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} yz & xz & xy \\ y & x & 0 \\ -y & 1 - x & 0 \end{vmatrix} = xy \cdot \begin{vmatrix} y & x \\ -y & 1 - x \end{vmatrix} =$$

$$= xy \cdot (y - xy + xy) = xy^2.$$

5. Folosind diferenţiala unei funcţii într-un punct, să se calculeze valoarea aproximativă a expresiei $E = \sin 33^\circ \cdot \operatorname{tg} 43^\circ$, ştiind că $1^\circ = 0,01745$ radiani.

Soluţie. Alegem funcţia $f(x, y) = \sin x \cdot \operatorname{tg} y$ şi transformăm gradele în radiani:

$x = 33^\circ = \frac{\pi}{6} + 0,05235$ radiani, $y = 43^\circ = \frac{\pi}{4} - 0,03490$.

Fie

$x_0 = 30^\circ = \dfrac{\pi}{6}$, $y_0 = 45^\circ = \dfrac{\pi}{4}$.

Deoarece creşterea unei funcţii se poate aproxima cu valoarea diferenţialei sale, avem:

$$E = f(x, y) \cong f(x_0, y_0) + f'_x(x_0, y_0) \cdot (x - x_0) + f'_y(x_0, y_0) \cdot (y - y_0).$$

Cum $f'_x(x, y) = \cos x \cdot \operatorname{tg} y$ şi $f'_y(x, y) = \sin x \cdot \dfrac{1}{\cos^2 y}$, obţinem:

$f'_x(x_0, y_0) = \cos 30^\circ \cdot tg45^\circ = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$; $f'_y(x_0, y_0) = \sin 30^\circ \cdot \dfrac{1}{\cos^2 45^\circ} = 1.$

Deci

$$\begin{aligned} E &= \sin 33^\circ \cdot \operatorname{tg} 43^\circ = \sin 30^\circ \cdot \operatorname{tg} 45^\circ + \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot 0,05235 + 1 \cdot (-0,03490) = \\ &= 0,5 + 0,01044 = 0,51044. \end{aligned}$$

6. Fie funcţia $f : \mathbf{R}^2 \longrightarrow \mathbf{R}$,

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^a \cdot y}{\sqrt{x^2+y^2}}, & x^2+y^2 \neq 0 \\ 0, & x^2+y^2 = 0 \end{cases}, a \geq 1.$$

Să se arate că:

(i) f este continuă în origine;

(ii) f are derivate parţiale în origine;

(iii) pentru $a = 1$, f nu este diferenţiabilă în origine, iar pentru orice $a > 1$, f este diferenţiabilă în origine.

Soluţie. (i) Din $\left|\dfrac{x^a \cdot y}{\sqrt{x^2+y^2}}\right| \leq \left|\dfrac{x^a \cdot y}{y}\right| = |x^a| \longmapsto 0$, pentru $(x,y) \longmapsto (0,0)$, deducem, pe baza criteriului majorării, că

$$\lim_{(x,y)\longmapsto(0,0)} f(x,y) = 0 = f(0,0),$$

deci f este continuă în origine.

(ii) Folosind definiţia, calculăm derivatele parţiale în origine:

$$f'_x(0,0) = \lim_{x\to 0} \frac{f(x,0)-f(0,0)}{x} = \lim_{x\longmapsto 0} \frac{0}{x} = 0;$$
$$f'_y(0,0) = \lim_{y\to 0} \frac{f(0,y)-f(0,0)}{y} = \lim_{y\longmapsto 0} \frac{0}{y} = 0;$$

Dacă f este diferenţiabila în punctul (0,0), atunci

$$f(x,y) = f(0,0) + (x-0)\cdot f'_x(0,0) + (y-0)\cdot f'_x(0,0) + \omega(x,y)\cdot\sqrt{x^2+y^2},$$

cu

$$\lim_{(x,y)\longmapsto(0,0)} \omega(x,y) = 0.$$

Înlocuind, obţinem că

$$\omega(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^a \cdot y}{x^2+y^2}, & x^2+y^2 \neq 0 \\ 0, & x^2+y^2 = 0 \end{cases}, a \geq 1.$$

Pentru $a = 1$, funcţia ω nu are limită în $(0,0)$. Într-adevăr , luînd un şir (x_n, y_n) de pe dreapta reală $y = m\cdot x, m \neq 0$, cu proprietatea $(x_n, y_n) \longmapsto (0,0)$ pentru $n \longmapsto \infty$, obţinem:

$$\omega(x_n,y_n) = \frac{x_n \cdot y_n}{x_n^2+y_n^2} = \frac{m\cdot x_n^2}{x_n^2+m^2\cdot x_n^2} = \frac{m}{1+m^2} \to \frac{m}{1+m^2}.$$

Cum limita funcţiei ω nu există în $(0,0)$, obţinem că f nu este diferenţiabilă în $(0,0)$.

Fie $a>1$. Folosind inegalitatea $(|x|-|y|)^2 \geq 0$, adică

$$x^2+y^2 \geq 2\cdot|x|\cdot|y| \Leftrightarrow \frac{1}{x^2+y^2} \leq \frac{1}{2\cdot|x|\cdot|y|},$$

deducem că

$$|\omega(x,y)| = |\frac{x^a\cdot y}{x^2+y^2}| \leq |\frac{x^a\cdot y}{2xy}| = \frac{1}{2}\cdot|x^{a-1}| \longmapsto 0,$$

pentru $(x,y)\longmapsto(0,0)$.

Conform criteriului majorării, $\lim\limits_{(x,y)\longmapsto(0,0)} \omega(x,y)=0$, şi deci funcţia f este diferenţiabilă în $(0,0)$, pentru $a>1$.

7. Calculaţi $\dfrac{\partial^{m+n} f}{\partial x^m \partial y^n}$ pentru funcţia $f:\mathbf{R}^2\to\mathbf{R}, f(x,y)=\dfrac{x+y}{x-y}, x\neq y;$

Soluţie. Se ştie că $\dfrac{\partial^{m+n} f}{\partial x^m\partial y^n} = \dfrac{\partial^m f}{\partial x^m}\left(\dfrac{\partial^n f}{\partial y^n}\right)$.

Se calculează mai intâi $\dfrac{\partial^n f}{\partial y^n}$, folosind formula lui Leibnitz:

$$\begin{aligned}\frac{\partial^n f}{\partial y^n} &= \frac{\partial^n}{\partial y^n}\left(\frac{1}{x-y}\cdot(x+y)\right) = C_n^0\cdot\frac{\partial^n}{\partial y^n}\left(\frac{1}{x-y}\right)\cdot(x+y)+C_n^1\cdot\\ &\cdot \frac{\partial^{n-1}}{\partial y^{n-1}}\left(\frac{1}{x-y}\right)\cdot\frac{\partial}{\partial y}(x+y)+\ldots+C_n^{n-1}\cdot\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{1}{x-y}\right)\cdot\\ &\cdot \frac{\partial^{n-1}}{\partial y^{n-1}}(x+y)+C_n^n\cdot\left(\frac{1}{x-y}\right)\cdot\frac{\partial^n}{\partial y^n}(x+y).\end{aligned}$$

Dar $\dfrac{\partial^n}{\partial y^n}(x+y)=0$ dacă $n\geq 2$, iar

$$\frac{\partial^p}{\partial y^p}\left(\frac{1}{x-y}\right) = (-1)\cdot\frac{\partial^p}{\partial y^p}\left(\frac{1}{y-x}\right) = (-1)\cdot\frac{(-1)^p\cdot p!}{(y-x)^{p+1}} = \frac{(-1)^{p+1}\cdot p!}{(y-x)^{p+1}}.$$

Atunci

$$\begin{aligned}\frac{\partial^n f}{\partial y^n} &= \frac{(-1)^{n+1}\cdot n!}{(y-x)^{n+1}}\cdot(x+y)+\frac{(-1)^n\cdot(n-1)!}{(y-x)^n}\cdot n=\\ &= \frac{(-1)^{n+1}\cdot n!}{(y-x)^{n+1}}\cdot(x+y-y+x) = \frac{2\cdot n!\cdot x}{(x-y)^{n+1}}.\end{aligned}$$

Deci $\dfrac{\partial^{m+n}f}{\partial x^m \partial y^n} = 2\cdot n!\cdot \dfrac{\partial^m f}{\partial x^m}\left(\dfrac{x}{(x-y)^{n+1}}\right)$, şi, folosind din nou formula lui Leibnitz, obţinem:

$$\frac{\partial^m f}{\partial x^m}\left(\frac{x}{(x-y)^{n+1}}\right) = C_m^0\cdot\frac{\partial^m}{\partial x^m}\left(\frac{1}{(x-y)^{n+1}}\right)\cdot x + C_m^1\cdot\frac{\partial^{m-1}}{\partial x^{m-1}}\left(\frac{1}{(x-y)^{n+1}}\right)\cdot\frac{\partial}{\partial x}(x).$$

Cum $\dfrac{\partial^p}{\partial y^p}\left(\dfrac{1}{(x-y)^q}\right) = \dfrac{(-1)^p\cdot q\cdot(q+1)\cdot(q+2)\cdot\ldots\cdot(q+p-1)}{(x-y)^{p+q}}$, atunci

$$\frac{\partial^m}{\partial x^m}\left(\frac{x}{(x-y)^{n+1}}\right) = \frac{(-1)^m\cdot(n+1)\cdot(n+2)\cdot\ldots\cdot(n+m)}{(x-y)^{n+m+1}}\cdot x +$$

$$+m\cdot\frac{(-1)^{m-1}\cdot(n+1)\cdot(n+2)\cdot\ldots\cdot(n+m-1)}{(x-y)^{n+m}} =$$

$$\frac{(-1)^m\cdot(n+1)\cdot\ldots\cdot(n+m-1)}{(x-y)^{n+m+1}}\cdot((n+m)\cdot x - m\cdot(x-y)) =$$

$$= \frac{(-1)^m\cdot(n+1)\cdot(n+2)\cdot\ldots\cdot(n+m-1)}{(x-y)^{n+m+1}}\cdot(n\cdot x + m\cdot y).$$

Înlocuind, obţinem

$$\frac{\partial^{m+n}f}{\partial x^m\partial y^n} = 2\cdot(-1)^m\cdot(n+m-1)!\cdot\frac{n\cdot x+m\cdot y}{(x-y)^{n+m+1}}.$$

8. Să se calculeze d^4f, dacă $f:\mathbf{R}_+^3\to\mathbf{R}$, $f(x,y,z)=\ln\left(x^x\cdot y^y\cdot z^z\right)$.

Soluţie. Evident $f(x,y,z) = x\cdot\ln x + y\cdot\ln y + z\cdot\ln z$. Folosind operatorul de diferenţiere de ordinul 4, $d^4f = \left(\dfrac{\partial}{\partial x}dx + \dfrac{\partial}{\partial y}dy + \dfrac{\partial}{\partial z}dz\right)^{(4)}(f)$, a cărui expresie se obţine după regula de dezvoltare a unui polinom, avem:

$$d^4f = \frac{2}{x^3}dx^4 + \frac{2}{y^3}dy^4 + \frac{2}{z^3}dz^4,$$

deoarece toate derivatele parţiale mixte de forma $\dfrac{\partial^4 f}{\partial x^i\partial y^j\partial z^k}$ sunt nule, pentru $i+j+k=4$, iar

$$\frac{\partial^4 f}{\partial x^4} = \frac{\partial^3 f}{\partial x^3}(1+\ln x) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{2}{x^3};\ \frac{\partial^4 f}{\partial y^4} = \frac{2}{y^3};\ \frac{\partial^4 f}{\partial z^4} = \frac{2}{z^3}.$$

9. Fie $n\in\mathbf{N}$. Considerăm funcţia $f_n:\mathbf{R}^2-\{(0,0)\}\to\mathbf{R}^2$,

$$f_n(x,y) = \frac{x^2y^3}{(x^4+y^4)^n}.$$

Să se arate că are loc relaţia:

$$\frac{\partial^2 f_n(1,1)}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 f_n(1,1)}{\partial x\partial y}+\frac{\partial^2 f_n(1,1)}{\partial y^2}=\frac{4n^2-9n+5}{2^{n-2}}.$$

Soluţie. Funcţia f_n este omogenă, cu gradul de omogenitate $r=5-4n$, deoarece

$$f_n(tx,ty)=\frac{(tx)^2(ty)^3}{\left((tx)^4+(ty^4)\right)^n}=t^{5-4n}\cdot\frac{x^2y^3}{(x^4+y^4)^n}=t^{5-4n}\cdot f_n(x,y).$$

Scriem relaţia lui Euler de ordinul 2 pentru funcţia f_n :

$$x^2\cdot\frac{\partial^2 f_n(x,y)}{\partial x^2}+2xy\cdot\frac{\partial^2 f_n(x,y)}{\partial x\partial y}+y^2\cdot\frac{\partial^2 f_n(x,y)}{\partial y^2}=r(r-1)f_n(x,y),$$

Pentru $(x,y)=(1,1)$ avem

$$\frac{\partial^2 f_n(1,1)}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 f_n(1,1)}{\partial x\partial y}+\frac{\partial^2 f_n(1,1)}{\partial y^2}=(5-4n)(4-4n)\cdot\frac{1}{2^n}=\frac{4n^2-9n+5}{2^{n-2}}.$$

10. Se consideră funcţia

$$\varphi(x,y)=(x-y)\cdot f\left(\frac{\sqrt{xy}(x^2+xy+y^2)}{x^3-y^3}\right),\ f\in C^2(\mathbf{R}).$$

Calculaţi valoarea expresiei

$$E=x\cdot\frac{\partial^2\varphi(x,y)}{\partial x^2}+(x+y)\cdot\frac{\partial^2\varphi(x,y)}{\partial x\partial y}+y\cdot\frac{\partial^2\varphi(x,y)}{\partial y^2}.$$

Soluţie. Se observă că funcţia φ este omogenă, cu gradul de omogenitate $r=1$.

Atunci scriem relaţia lui Euler de ordinul unu pentru φ :

$$x\cdot\frac{\partial\varphi(x,y)}{\partial x}+y\cdot\frac{\partial\varphi(x,y)}{\partial y}=r\cdot\varphi(x,y)=\varphi(x,y).$$

Derivînd ultima relaţie în raport cu x, respectiv cu y, obţinem:

$$(1)\quad \frac{\partial\varphi(x,y)}{\partial x}+x\cdot\frac{\partial^2\varphi(x,y)}{\partial x^2}+y\cdot\frac{\partial^2\varphi(x,y)}{\partial x\partial y}=\frac{\partial\varphi(x,y)}{\partial x},$$

respectiv

$$(2)\quad x\cdot\frac{\partial^2\varphi(x,y)}{\partial x\partial y}+\frac{\partial\varphi(x,y)}{\partial y}+y\cdot\frac{\partial^2\varphi(x,y)}{\partial y^2}=\frac{\partial\varphi(x,y)}{\partial y},$$

Adunînd relaţiile (1) şi (2), rezultă că $E = 0$.

11. Fie funcţiile $f, g : \mathbf{R} - \{0\} \to \mathbf{R}$, de două ori derivabile pe domeniul lor de definiţie. Să se arate că funcţia $h : \mathbf{R}^2 - \{(x, y) : |x| = |y|\} \to \mathbf{R}$,

$$h(x, y) = f(x - y) - (x + y) \cdot g(x^2 - y^2)$$

este soluţie a ecuaţiei

$$y \cdot \frac{\partial^2 h}{\partial x^2} + (x + y) \cdot \frac{\partial^2 h}{\partial x \partial y} + x \cdot \frac{\partial^2 h}{\partial y^2} = 0.$$

Soluţie. Fie $u(x, y) = x - y; v(x, y) = x^2 - y^2$.
Se observă că $\frac{\partial u}{\partial x} = 1, \frac{\partial u}{\partial y} = -1, \frac{\partial v}{\partial x} = 2x, \frac{\partial v}{\partial y} = -2y$.
Folosind formulele de derivare ale funcţiilor compuse, obţinem:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial h}{\partial x} &= \frac{\partial f}{\partial u} \cdot \frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial}{\partial x}(x + y) \cdot g(v) - (x + y) \cdot \frac{\partial g}{\partial v} \cdot \frac{\partial v}{\partial x} = \\
&= f'_u - g(v) - (x + y) \cdot 2x \cdot g'_v;
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial h}{\partial y} &= \frac{\partial f}{\partial u} \cdot \frac{\partial u}{\partial y} - \frac{\partial}{\partial y}(x + y) \cdot g(v) - (x + y) \cdot \frac{\partial g}{\partial v} \cdot \frac{\partial v}{\partial y} = \\
&= -f'_u - g(v) + (x + y) \cdot 2y \cdot g'_v.
\end{aligned}$$

Derivatele parţiale de ordinul doi ale functiei h se obţin astfel

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 h}{\partial x^2} &= \frac{\partial}{\partial x}(f'_u - g(v) - (x + y) \cdot 2x \cdot g'_v) = \\
&= \frac{\partial^2 f}{\partial u^2} \cdot \frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial g}{\partial v} \cdot \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial}{\partial x}((x + y) \cdot 2x) \cdot g'_v - \\
&- (x + y) \cdot 2x \cdot \frac{\partial^2 g}{\partial v^2} \cdot \frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial^2 f}{\partial u^2} - \frac{\partial g}{\partial v} \cdot 2x - (4x + 2y) \cdot \frac{\partial g}{\partial v} - \\
&- (2x^2 + 2xy) \cdot \frac{\partial^2 g}{\partial v^2} \cdot 2x = f''_{u^2} - (6x + 2y) \cdot g'_v - 4x^2(x + y) \cdot g''_{v^2};
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 h}{\partial x \partial y} &= \frac{\partial}{\partial x}(-f'_u - g(v) + (x + y) \cdot 2y \cdot g'_v) = \\
&= -\frac{\partial^2 f}{\partial u^2} \cdot \frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial g}{\partial v} \cdot \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial x}(2xy + 2y^2) \cdot \frac{\partial g}{\partial v} + \\
&+ (x + y) \cdot 2y \cdot \frac{\partial^2 g}{\partial v^2} \cdot \frac{\partial v}{\partial x} = -\frac{\partial^2 f}{\partial u^2} - \frac{\partial g}{\partial v} \cdot 2x + 2y \cdot \frac{\partial g}{\partial v} + \\
&+ (2y^2 + 2xy) \cdot \frac{\partial^2 g}{\partial v^2} \cdot 2x = -f''_{u^2} + 2(y - x) \cdot g'_v + 4xy(x + y) \cdot g''_{v^2};
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 h}{\partial y^2} &= \frac{\partial}{\partial y}(-f'_u - g(v) + (x+y)\cdot 2y \cdot g'_v) = \\
&= \frac{\partial^2 f}{\partial u^2}\cdot\frac{\partial u}{\partial y} - \frac{\partial g}{\partial v}\cdot\frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial y}(2xy+2y^2)\cdot\frac{\partial g}{\partial v} + 2y\cdot(x+y)\cdot\frac{\partial^2 g}{\partial v^2}\cdot\frac{\partial v}{\partial y} = \\
&= \frac{\partial^2 f}{\partial u^2} + \frac{\partial g}{\partial v}\cdot 2y + (4y+2x)\cdot\frac{\partial g}{\partial v} + (2y^2+2xy)\cdot\frac{\partial^2 g}{\partial v^2}\cdot(-2y) = \\
&= f''_{u^2} + (6y+2x)\cdot g'_v - 4y^2(x+y)\cdot g''_{v^2};
\end{aligned}$$

Înlocuind în ecuaţia dată, rezultă
$y\cdot\frac{\partial^2 h}{\partial x^2} + (x+y)\cdot\frac{\partial^2 h}{\partial x\partial y} + x\cdot\frac{\partial^2 h}{\partial y^2} = y\cdot f''_{u^2} - y\cdot(6x+2y)\cdot g'_v - 4x^2y(x+y)\cdot g''_{v^2} - (x+y)\cdot f''_{u^2} + 2(y^2-x^2)\cdot g'_v + 4xy(x+y)^2\cdot g''_{v^2} + x\cdot f''_{u^2} + x\cdot(6y+2x)\cdot g'_v - 4xy^2(x+y)\cdot g''_{v^2} = 0.$

12. Calculaţi diferenţialele de ordinul unu şi doi pentru funcţia:

$$\varphi(x,y) = f(x^2+y^2, xy), f\in C^2(\mathbf{R}^2);$$

Soluţie. Dacă notăm $u(x,y) = x^2+y^2$ şi $v(x,y) = xy$, folosind formulele de derivare ale funcţiilor compuse şi definiţia diferenţialei unei funcţii, obţinem:

$$d\varphi(x,y) = \frac{\partial f}{\partial u}du + \frac{\partial f}{\partial v}dv;$$

$$d^2\varphi(x,y) = \frac{\partial^2 f}{\partial u^2}du^2 + 2\frac{\partial^2 f}{\partial u\partial u}dudv + \frac{\partial^2 f}{\partial v^2}dv^2;$$

$$du = 2x\cdot dx + 2y\cdot dy; dv = x\cdot dy + y\cdot dx;$$

$$d^2u = 2\cdot dx^2 + 2\cdot dy^2; dv^2 = 2\cdot dxdy;$$

Deci

$$\begin{aligned}
d\varphi(x,y) &= \frac{\partial f}{\partial u}\cdot(2x\cdot dx + 2y\cdot dy) + \frac{\partial f}{\partial v}\cdot(x\cdot dy + y\cdot dx) = \\
&= (2x\cdot\frac{\partial f}{\partial u} + y\cdot\frac{\partial f}{\partial v})dx + (2y\cdot\frac{\partial f}{\partial u} + x\cdot\frac{\partial f}{\partial v})dy.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
d^2\varphi(x,y) &= \frac{\partial^2 f}{\partial u^2}\cdot(2\cdot dx^2 + 2\cdot dy^2) + 2\frac{\partial^2 f}{\partial u\partial u}\cdot(2x\cdot dx + 2y\cdot dy)\cdot \\
&\cdot\ (x\cdot dy + y\cdot dx) + \frac{\partial^2 f}{\partial v^2}\cdot 2\cdot dxdy = 2\cdot\left(\frac{\partial^2 f}{\partial u^2} + 2xy\cdot\frac{\partial^2 f}{\partial u\partial u}\right)\cdot \\
&\cdot\ dx^2 + 2\cdot\left(2(x^2+y^2)\cdot\frac{\partial^2 f}{\partial u\partial u} + \frac{\partial^2 f}{\partial v^2}\right)\cdot dxdy + \\
&+\ 2\cdot\left(\frac{\partial^2 f}{\partial u^2} + 2xy\cdot\frac{\partial^2 f}{\partial u\partial u}\right)\cdot dy^2.
\end{aligned}$$

Probleme propuse

1. Să se calculeze derivata funcţiei

$$f(x,y,z) = \left(\frac{x}{y}\right)^{1/z}, (x,y,z) \in \mathbf{R}^3, xy \neq 0$$

după direcţia versorului $\overline{s} = \dfrac{\overline{AB}}{||AB||}$, unde $A(1,1,1)$ şi $B(4,5,2)$.

Răspuns: $\dfrac{df}{d\overline{s}} = \dfrac{1}{\sqrt{26}} \cdot \left(\dfrac{x}{y}\right)^{1/z} \cdot \left(\dfrac{3}{xz} - \dfrac{4}{yz} - \dfrac{1}{z^2}\ln\dfrac{x}{y}\right)$.

2. Să se calculeze derivata funcţiei $f(x,y) = \ln(x+2y), x+2y > 0$, în punctul $A(2,1)$ după un versor ce formează cu axa Ox un unghi de $60°$.

Răspuns: $\dfrac{df}{d\overline{s}} = \dfrac{1+2\sqrt{3}}{8}$.

3. Calculaţi derivatele parţiale ale funcţiilor $f_i, i = \overline{1,5}$ si scrieţi apoi diferenţialele de ordinul unu corespunzătoare:

(i) $f_1 : D_1 \subset \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}, f_1(x,y,z) = x^{\frac{z}{y}} + 2 \cdot \sqrt{x^2+y^2}$;

(ii) $f_2 : D_2 \subset \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}, f_2(x,y,z) = x^{y^z}$;

(iii) $f_3 : D_3 \subset \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}, f_3(x,y,z) = \ln((x^y \cdot y^z \cdot z^x)$;

(iv) $f_4 : D_4 \subset \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}, f_4(x,y) = (x^2+y^2) \cdot \mathrm{arctg}\dfrac{x}{y}$;

(v) $f_5 : D_5 \subset \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}, f_5(x,y,z) = e^{x^2+y^2} \cdot \sin(z^2)$;

(vi) $f_6 : D_6 \subset \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}, f_5(x,y) = \ln\left(\dfrac{x+\sqrt{x^2+y^2}}{x-\sqrt{x^2-y^2}}\right)$.

4. Să se arate că funcţiile următoare verifică ecuaţiile scrise în dreptul lor:

(i) $f(x,y) = \sqrt{x^2+y^2} - \sin\dfrac{y}{x}$;

$x \cdot \dfrac{\partial f}{\partial x} + y \cdot \dfrac{\partial f}{\partial y} = \sqrt{x^2+y^2}$;

(ii) $g(x,y) = \dfrac{xy}{x^2-y^2}$; $\quad xy^2 \cdot \dfrac{\partial g}{\partial x} + x^2y \cdot \dfrac{\partial g}{\partial y} = (x^2+y^2) \cdot z$;

(iii) $i(x,y) = xy + \arcsin\frac{y}{x}$; $\quad x \cdot \dfrac{\partial i}{\partial x} + y \cdot \dfrac{\partial i}{\partial y} = 2xy$;

(iv) $j(x,y,z) = \ln(x^3+y^3+z^3-3xyz)$; $\quad \dfrac{\partial j}{\partial x} + \dfrac{\partial j}{\partial y} + \dfrac{\partial j}{\partial z} = \dfrac{3}{x+y+z}$;

(v) $h(x,y,z) = 2yz + 3x \cdot (y + \sqrt{1-y^2}) - 2xe^{\arcsin y}$;

$$xy\cdot\frac{\partial h}{\partial x}-\sqrt{1-y^2}\cdot\left(y\frac{\partial h}{\partial y}-z\frac{\partial h}{\partial z}\right)=3xy\cdot\frac{\partial h}{\partial z};$$

(vi) $k(x,y,z)=2yz+3x\cdot(y+\sqrt{1-y^2})-2xe^{\arcsin y}$;

$$xy\cdot\frac{\partial k}{\partial x}-\sqrt{1-y^2}\cdot\left(y\frac{\partial k}{\partial y}-z\frac{\partial k}{\partial z}\right)=3xy\cdot\frac{\partial f}{\partial z}.$$

(vii) $k(x,y)=e^y\cdot\ln\left(y\cdot e^{\frac{x2}{2y^2}}\right)$; $\quad(x^2-y^2)\cdot f'_x+xy\cdot f'_y=xy\cdot f$;

5. Să se calculeze diferenţialele funcţiilor vectoriale:

(i) $f_1: D_1\subset\mathbf{R}^2\to\mathbf{R}^2, f_1(x,y)=\left(\frac{x-y}{x^2y},\ln\frac{x-\sqrt{x^2-y^2}}{x+\sqrt{x^2+y^2}}\right)$.

(ii) $f_2: D_2\subset\mathbf{R}^3\to\mathbf{R}^2, f_2(x,y,z)=\left(x\cdot\mathrm{arctg}\frac{y}{z},\cosh\sqrt{z}\cdot\sinh^2(x^2yz)\right)$, unde $D_i, i=1,2$ sunt domeniile maxime de definitie al functiilor $f_i, i=1,2$.

Răspuns: (i) $df(x,y)=\left(\frac{1}{x^2y}\cdot dx+\frac{y-2x}{xy^3}\cdot dy,\frac{2}{y\sqrt{x^2-y^2}}(x\cdot dy-y\cdot dx)\right)$;

(ii) $df(x,y,z)=\left(arctg\frac{y}{z}\cdot dx+\frac{xz}{z^2+y^2}\cdot dy-\frac{xz}{z^2+y^2}\cdot dz, 2xyz\cdot ch\sqrt{z}\cdot sh(2x^2yz)\cdot dx+\right.$ $\left.x^2z\cdot ch\sqrt{z}\cdot sh(2x^2yz)\cdot dy+\left(\frac{1}{2\sqrt{z}}\cdot sh\sqrt{z}\cdot sh^2(x^2yz)+x^2y\cdot ch\sqrt{z}\cdot sh(2x^2yz)\right)\cdot dz\right)$.

6. Calculaţi matricile jacobiene pentru funcţiile:

(i) $f:\mathbf{R}^2\to\mathbf{R}^3, f(x,y)=(xy,x+y,x-y)$;

(ii) $g:\mathbf{R}^2\to\mathbf{R}^2, g(x,y)=\left(\frac{x-y}{xy^2},\ln\frac{x-\sqrt{x^2-y^2}}{x+\sqrt{x^2-y^2}}\right)$;

(iii) $h:\mathbf{R}^2\to\mathbf{R}, h(x,y)=xy^2-x^2y+xy$.

Răspuns: (i) $J_f=\begin{pmatrix} y & x\\ 1 & 1\\ 1 & -1\end{pmatrix}$; (ii) $J_g=\begin{pmatrix}\frac{1}{x^2y} & \frac{y-2x}{xy^3}\\ \frac{-2}{\sqrt{x^2-y^2}} & \frac{2x}{y\sqrt{x^2-y^2}}\end{pmatrix}$; (iii) $J_h=(y^2-2xy+y, 2xy-x^2+x)$.

7. Calculaţi determinanţii funcţionali (jacobienii):

(i) $\frac{D(u,v)}{D(x,y)}$, unde $u(x,y)=\frac{x}{\sqrt{1-x^2-y^2}},\ v(x,y)=\frac{y}{\sqrt{1-x^2-y^2}}$;

(ii) $\frac{D(u,v)}{D(x,y)}$, unde $u(x,y)=xy,\ v(x,y)=\frac{y}{x^2}, xy\neq 0$;

(iii) $\frac{D(x,y)}{D(\rho,\varphi)}$, unde $x(\rho,\varphi)=\rho^2\cos^2\varphi,\ y(\rho,\varphi)=\rho^2\sin^2\varphi$;

(iv) $\frac{D(x,y,z)}{D(u,v,w)}$, pentru funcţiile definite prin $x=u\cdot chv\cdot shw,\ y=u\cdot shv\cdot shw;\ z=u\cdot chw$.

(v) $\frac{D(x,y,z)}{D(\rho,\varphi,z)}$, unde $x=\rho^3ch^3\varphi,\ y=\rho^3sh^3\varphi,\ z=z$.

Răspuns: (i) $\dfrac{D(u,v)}{D(x,y)} = (1-x^2-y^2)^{-2}$; (ii) $\dfrac{D(u,v)}{D(x,y)} = \dfrac{3y}{x^2}$; (iii) $\dfrac{D(x,y)}{D(\rho,\varphi)} = 4\rho^3 \sin 2\varphi$; (iv) $\dfrac{D(x,y,z)}{D(u,v,w)} = -u^2 \cdot shw$.

8. Fie funcţiile $u = \dfrac{x}{\sqrt{r^2+1}}, v = \dfrac{y}{\sqrt{r^2+1}}, w = \dfrac{z}{\sqrt{r^2+1}}$, unde $r = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$. Arătaţi că $\dfrac{D(u,v,w)}{D(x,y,z)} = \left(r^2+1\right)^{-\frac{5}{2}}$.

9. Fie funcţia $f : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$,

$$f(x,y) = \begin{cases} y^2 \sin\dfrac{1}{x}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}.$$

(i) Să se calculeze derivata funcţiei f în punctul $(0,0)$ după direcţia versorilor $\bar{i}$ şi $\bar{j}$.

(ii) Să se studieze continuitatea derivatelor parţiale $\dfrac{\partial f}{\partial x}, \dfrac{\partial f}{\partial y}$ în punctul $(0,0)$.

(iii) Să se calculeze derivata funcţiei f în punctul $\left(\dfrac{4}{\pi}, 1\right)$ după versorul $\bar{s} = \dfrac{1}{2}\bar{i} - \dfrac{\sqrt{3}}{2}\bar{j}$.

Răspuns: (i) $\dfrac{\partial f}{\partial \bar{i}}(0,0) = \dfrac{\partial f}{\partial \bar{j}}(0,0) = 0$; (ii) $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ nu este continuă în (0,0); $\dfrac{\partial f}{\partial y}$ este continuă în $(0,0)$; (iii) $\dfrac{\partial f}{\partial \bar{v}}\left(\dfrac{4}{\pi}, 1\right) = \dfrac{\pi^2 \cdot \sqrt{2}}{64} - \dfrac{\sqrt{6}}{2}$.

10. Folosind diferenţiala unei funcţii într-un punct, să se calculeze valoarea aproximativă a expresiilor:

(i) $E_1 = \sqrt[3]{3,998^2 + 7,001^2 - 1} + \sin 31^\circ$, ştiind ca $1^\circ = 0,01745$ radiani;

(ii) $E_2 = \dfrac{1}{\sqrt{4,006^2 + 2,96^2}}$;

(iii) $E_3 = 1,002 \cdot 2,003^2 \cdot 3,004^3$;

(iv) $E_4 = \sqrt{1,02^3 + 1,97^3}$;

(v) $E_5 = \sin 29^\circ \cdot \mathrm{tg} 46^\circ$, ştiind ca $1^\circ = 0,01745$ radiani;

(vi) $E_6 = \lg(10,01)^{4,98}$.

Răspuns: (i) $E_1 \cong 4,515$;(ii) $E_2 = 0,2008$;(iii) $E_3 \cong 108,972$;(iv) $E_4 \cong 2,95$; (v) $E_5 \cong 0,5024$.

11. Fie funcţia $f : \mathbf{R}^2 \longrightarrow \mathbf{R}$, $f(x,y) = \begin{cases} x^2 \sin\dfrac{1}{y}, & y \neq 0 \\ 0, & y = 0 \end{cases}$.

(i) Studiaţi continuitatea derivatelor parţiale în (0,0);

(ii) Studiaţi diferenţiabilitatea funcţiei f în punctul (0,0);

Indicaţie: (i) $\frac{\partial f}{\partial x}$ este continuă în (0,0); $\frac{\partial f}{\partial y}$ nu este continuă în (0,0) deoarece nu are limită în origine; (ii) se foloseşte definiţia şi se obţine că f este diferenţiabilă în $(0,0)$.

12. Fie funcţia $f : \mathbf{R}^2 \longrightarrow \mathbf{R}$, $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x \cdot y^2}{x^2+y^2}, & (x,y) \neq (0,0) \\ 0, & (x,y) = (0,0) \end{cases}$.

(i) Să se arate că f este continuă în origine;

(ii) Să se arate că f nu este diferenţiabilă în origine;

(iii) Să se calculeze derivata lui f după versorul $\overline{s} = \frac{-1}{\sqrt{2}}\overline{i} + \frac{1}{\sqrt{2}}\overline{j}$ în punctul $(0,0)$.

13. Fie funcţia $f : \mathbf{R}^2 \longrightarrow \mathbf{R}$,

$$f(x,y) = \begin{cases} (x^2+y^2) \cdot \sin \dfrac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}, & (x,y) \neq (0,0) \\ 0, & (x,y) = (0,0) \end{cases}.$$

Să se arate că:

(i) f nu are derivate parţiale continue în origine;

(ii) f este diferenţiabilă în origine; calculaţi apoi $df(0,0)$;

Indicaţie: (i) Se arată că nu există $\lim\limits_{(x,y)\longmapsto(0,0)} \frac{\partial f}{\partial x}$ si $\lim\limits_{(x,y)\longmapsto(0,0)} \frac{\partial f}{\partial y}$; (ii) se foloseşte definiţia diferenţiabilităţii într-un punct.

14. Calculaţi:

(i) $\dfrac{\partial^{13} f}{\partial x^6 \partial y^7}$ pentru funcţia $f : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$, $f(x,y) = (x+y) \cdot \sin(x+y)$;

(ii) $\dfrac{\partial^{14} f}{\partial x^6 \partial y \partial x^7}$ pentru funcţia $f : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}$,
$f(x,y,z) = (x+y^2+z) \cdot e^{x+y+z}$;

(iii) $\dfrac{\partial^{m+n} f}{\partial x^m \partial y^n}$ pentru funcţia $f : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$, $f(x,y) = x \cdot e^{5x+8y}$;

(iv) $\dfrac{\partial^{p+q} f}{\partial x^p \partial y^q}$ pentru funcţia $f : \mathbf{R}^2 - \{(1,0)\} \to \mathbf{R}$, $f(x,y) = \dfrac{1}{(1+x) \cdot y}$;

(v) $\dfrac{\partial^{20} f}{\partial x^9 \partial y^4 \partial x^7}(-9,2,4)$ pentru funcţia $f : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}$,
$f(x,y,z) = xy^2z^3 \cdot e^{x-y+z}$;

(vi) $\dfrac{\partial^{10} f}{\partial x^2 \partial y^3 \partial x^5}$ pentru funcţia $f : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}$, $f(x,y,z) = \dfrac{x-y+3z+1}{(x+y+z)^7}$;

(vii) $\dfrac{\partial^{10} f}{\partial x^5 \partial y^5}$ pentru functia $f : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$, $f(x,y) = (x+y) \cdot \ln(x+y)$;

(viii) $\dfrac{\partial^{11} f}{\partial x^6 \partial y^5}\left(\dfrac{\pi}{2}, 0\right)$ pentru funcţia $f : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$,
$f(x,y) = (-x+3y^2) \cdot \sin(x-y)$.

Răspuns: (i) $\dfrac{\partial^{13} f}{\partial x^6 \partial y^7} = (x^2+y^2-60) \cdot \cos(x+y) + (12x+14y) \cdot \sin(x+y)$; (ii) $\dfrac{\partial^{14} f}{\partial x^6 \partial y \partial x^7} = (x+y^2+$
(iii) $\dfrac{\partial^{m+n} f}{\partial x^m \partial y^n} = 5^{m-1} \cdot 8^n \cdot (5x+m) \cdot e^{5x+8y}$; (iv) $\dfrac{\partial^{p+q} f}{\partial x^p \partial y^q} = (-1)^{p+q} \dfrac{p! \cdot q!}{(1+x)^{p+1} \cdot y^{q+1}}$; (v) $\dfrac{\partial^{20} f}{\partial x^9 \partial y^4 \partial x^7}(-9,2,4) = 0$;
(vi) $\dfrac{\partial^{10} f}{\partial x^2 \partial y^3 \partial x^5} = 2^8 \cdot 3^4 \cdot 5^2 \cdot 11 \cdot 13 \cdot (x-15y+17z+8) \cdot (x+z+y)^{-17}$;
(vii) $\dfrac{\partial^{10} f}{\partial x^5 \partial y^5} = 40320 \cdot (x+y)^{-9}$; (viii) $\dfrac{\partial^{11} f}{\partial x^6 \partial y^5}\left(\dfrac{\pi}{2}, 0\right) = 6$.

15. Fie expresia

$$E = \frac{D\left(u, \frac{\partial u}{\partial x}\right)}{D(x,y)} + \frac{D\left(u, \frac{\partial u}{\partial t}\right)}{D(t,z)} + \frac{D\left(\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}\right)}{D(t,z)},$$

unde $u(x,y,z,t) = \arcsin(x+y^2) - \ln(t-z)$. Să se arate că $E = 0$.

16. Să se calculeze:

(i) $d^2 f(1,1)$, dacă $f : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$, $f(x,y) = 3x^2 y + y^3$;

(ii) $d^3 f$, dacă $f : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}$, $f(x,y,z) = xyz$;

(iii) $d^{10} f$ dacă $f : \mathbf{R}^3_+ \to \mathbf{R}$, $f(x,y) = \ln(x+y)$;

(iv) $d^n f$, dacă $f : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}$, $f(x,y,z) = e^{ax+by+cz}$;

(v) $d^n f$, dacă $f : \mathbf{R}^p \to \mathbf{R}$,
$f(x_1, x_2, ..., x_p) = \ln\left((x+a_1) \cdot (x+a_1) \cdot ... \cdot (x+a_1)\right)$;

(vi) $d^2 f(0,0)$, dacă $f : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^2$, $f(x,y) = (e^{x^2+y^2}, \sin(xy))$.

Răspuns: (i) $d^2 f(1,1) = 6 \cdot dx^2 + 12 \cdot dx \cdot dy + 6 \cdot dx^2$; (ii) $d^3 f = 6 \cdot dxdydz$; (iii) $d^{10} f = \dfrac{9!(dx+dy)^{10}}{(x+y)^{10}}$; (iv) $d^n f = (a \cdot dx + b \cdot dy + c \cdot dz)^n \cdot e^{ax+by+cz}$;
(v) $d^n f = (-1)^{n-1} \cdot (n-1)! \cdot \displaystyle\sum_{i=1}^{p} \frac{dx^i}{(x_i+a_i)^n}$; (vi) $d^2 f(0,0) = (2 \cdot dx^2 + 2 \cdot dy^2, 2 \cdot dxdy)$.

17. Să se arate că funcţiile următoare verifică relaţiile scrise în dreptul lor:

(i) $f(x,y) = arctg\dfrac{2xy}{x^2-y^2}$; $\Delta f = \dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 0$;

(ii) $g(x,y,z) = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$; $\Delta g = \dfrac{2}{g}$;

(iii) $h(x,y) = \arcsin(x + y\ln y)$; $\dfrac{\partial h}{\partial x} \cdot \dfrac{\partial^2 h}{\partial x \partial y} = \dfrac{\partial^2 h}{\partial x^2} \cdot \dfrac{\partial^2 h}{\partial y}$;

(iv) $a(x,y) = y\sin\dfrac{x}{y} + \dfrac{xy}{x+y}$; $x^2 \cdot a''_{x^2} + 2xy \cdot a''_{xy} + y^2 \cdot a''_{y^2} = 0$;

(v) $b(x,y) = x \cdot \arcsin(x+y)$; $b''_{x^2} - 2 \cdot b''_{xy} + b''_{y^2} = 0$;

(v) $c(x,y) = \ln\sqrt{x^2+y^2}$; $\Delta c = 0$;

(vii) $u(x,t) = e^{x-at} + arctg(x+at)$, a este o constantă reală;

$u''_{t^2} = a^2 \cdot u''_{x^2}$ (numită ecuaţia coardei vibrante).

18. Pentru funcţiile de mai jos, calculaţi expresiile cerute:

(i) $\varphi(x,y) = (x^2+y^2) \cdot f\left(\dfrac{x-y}{x}\right), f \in C^3(\mathbf{R})$;

$E = x^3 \cdot \dfrac{\partial^3 \varphi(x,y)}{\partial x^3} + y^3 \cdot \dfrac{\partial^3 \varphi(x,y)}{\partial y^3}$;

(ii) $z(x,y) = (x+y) \cdot f\left(\dfrac{x-y}{x+y}\right), f \in C^2(\mathbf{R})$; $E = x \cdot z''_{x^2} + y \cdot z''_{xy}$;

(iii) $\varphi(x,y) = xy \cdot f\left(\dfrac{x^2+y^2)}{xy}\right), f \in C^3(\mathbf{R})$;

$E = x \cdot \dfrac{\partial^3 \varphi(x,y)}{\partial x^2 \partial y} + y \cdot \dfrac{\partial^3 \varphi(x,y)}{\partial x \partial y^2}$;

(iv) $z(x,y) = \dfrac{x^2}{y} \cdot g\left(\dfrac{xy}{x^2+y^2}\right), g \in C^2(\mathbf{R})$; $E = x \cdot z''_{xy} + y \cdot z''_{y^2}$;

(v) $z(x,y) = f\left(\dfrac{y}{x}\cdot, \ln x - \ln y\right), f \in C^2(\mathbf{R})$;

$E_1 = x^2 \cdot (z'_x)^2 + 2xy \cdot z'_x \cdot z'_y + y^2 \cdot (z'_y)^2$; $E_2 = x^2 \cdot z''_{x^2} + 2xy \cdot z''_{xy} + y^2 \cdot z''_{y^2}$;

(vi) $z(x,y) = g\left(\sqrt{x^3+y^3}, x\sqrt{y}\right), g \in C^3(\mathbf{R})$, g este omogenă, de grad $r = \dfrac{4}{3}$; $E = x^3 \cdot z'''_{x^3} + 3x^2y \cdot z'''_{x^2y} + 3xy^2 \cdot z'''_{xy^2} + y^3 \cdot z'''_{y3}$;

(vii) $f(x,y,z) = \sqrt{x} \cdot \ln(\dfrac{x+y}{z}) + \sqrt{y+z}, f : (0,\infty)^3 \to \mathbf{R}$;

$E = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \left(x \cdot \frac{\partial}{\partial x} + y \cdot \frac{\partial}{\partial y} + z \cdot \frac{\partial}{\partial z}\right)^{(k)} f$;

(viii) $z(x,y) = e^{x/y} \cdot \sqrt[3]{\dfrac{u(x,y)}{x}}, u \in C^2(\mathbf{R})$ şi omogenă de gradul 5;

$E = x \cdot z'_x + y \cdot z'_y$.

Răspuns: (i) E=0; (ii) E=0; (iii) E=0; (iv) E=0; (v) $E_1 = E_2 = 0$; (vi) $E = 0$, f fiind omogenă de grad $r = 2$; (vii) deoarece f este omogenă de grad $r = \frac{1}{2}$, obţinem $E = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^k \cdot (2k-1)!!}{2^k} f$; (viii) $E = \frac{4}{3}z$.

19. Fie $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, $g : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$, două funcţii derivabile. Să se arate că fiecare functie u, definită mai jos, satisface relaţia indicată pe domeniul ei de definiţie:

(i) $u(x,y) = f(\sqrt{x^2+y^2})$; $y \cdot u'_x - x \cdot u'_y = 0$;

(ii) $u(x,y) = xy \cdot f(x^2-y^2)$; $\dfrac{1}{x} \cdot u'_x + \dfrac{1}{y} \cdot u'_y = \left(\dfrac{1}{x^2} + \dfrac{1}{y^2}\right) u$;

(iii)) $u(x,y) = y \cdot f(\dfrac{x}{y^2})$; $2x \cdot u'_x + y \cdot u'_y = u$;

(iv)) $u(x,y,z) = g(xy, x^2+y^2-z^2)$; $xz \cdot u'_x - yz \cdot u'_y + (x^2-y^2) \cdot u'_y = u$;

20. Să se arate că oricare ar fi funcţiile f si g, de două ori derivabile, următoarele funcţii verifică ecuaţiile scrise în dreptul fiecăreia:

(i) $z(x,y) = \sqrt[4]{xy^2} \cdot f\left(\dfrac{x}{y^2}\right) + g(xy^2), x > 0, y \neq 0$;

$4x^2 \cdot z''_{x^2} - y^2 \cdot z''_{y^2} + 2x \cdot z'_x = 0$;

(ii) $z(x,y) = f(x-at) + g(x+at),$; $a^2 \cdot z''_{x^2} = z''_{t^2}$ (ecuaţia coardei vibrante);

(iii) $z(x,y) = f(3x + g(y))$; $z'_x \cdot z''_{xy} = z'_y \cdot z''_{x^2}$.

21. Pentru funcţiile de mai jos, calculaţi expresiile cerute:

(i) $\varphi(x,y) = f(x^2y) + xy^2 \cdot g\left(\dfrac{x^2}{y}\right), f, g \in C^2(\mathbf{R})$;

$E = x^2 \cdot \varphi''_{x^2} - 4y^2 \cdot \varphi''_{xy} - 6y \cdot \varphi''_{y^2}$;

(ii) $z(x,y) = f(x+y) + (x-y) \cdot g(x^2-y^2), f, g \in C^2(\mathbf{R})$;

$E = y \cdot z''_{x^2} + (x-y) \cdot z''_{xy} - x \cdot z''_{y^2}$;

(iii) $\varphi(x,y,z) = \dfrac{xy}{z^3} \cdot g\left(\dfrac{x^2}{y^2+z^2}, \dfrac{y^2}{x^2+z^2}\right), g \in C^3(\mathbf{R}^2)$;

$E = x \cdot \varphi'''_{x^2z} + y \cdot \varphi'''_{xyz} + z \cdot \varphi''_{xz^2}; +3 \cdot \varphi''_{xz}$.

Răspuns: (i) $E = 0$; (ii) $E = 0$; (iii) $E = 0$.

22. Calculaţi diferenţialele de ordinul unu şi doi pentru funcţiile de mai jos:

(i) $\varphi(x,y) = f(x^2+y^2, (x-y)^3), f \in C^2(\mathbf{R}^2)$;

(ii)) $\varphi(x,y) = \sin(u(x,y) - v(x,y))$, cu $u, v \in C^2(\mathbf{R}^2)$;

(iii) $\varphi(x,y) = f(x \cdot arctg\ y, 2x-3y))$, $f \in C^2(\mathbf{R}^2)$;

(iv) $\varphi(x,y) = f\left(\dfrac{1}{x} \cdot \cos y, y \cdot \ln x\right)$, $f \in C^2(\mathbf{R}^2)$;

(v) $\varphi(x,y) = f(\arcsin y, x\sqrt{y}))$, $f \in C^2(\mathbf{R}^2)$.