LIMITA ŞI CONTINUITATEA FUNCŢIILOR DE MAI MULTE VARIABILE

§1. Limita unei funcţii într-un punct

1. Definiţia şi unele caracterizări ale limitei

În studiul limitei unei funcţii într-un punct x_0, ne interesează ce se întâmplă cu valorile funcţiei într-un punct x, atunci când "x se apropie de x_0"; cu alte cuvinte, aceste valori în orice punct x apropiat de x_0, se apropie de un anumit punct l?

Pentru a răspunde riguros la această problemă formulată intuitiv, cadrul natural este cel al spaţiilor metrice. De aceea vom considera (X, d) şi (Y, ρ) două spaţii metrice, funcţia (legea) $f : \mathrm{A} \subset X \to Y$ şi x_0 un punct de acumulare al mulţimii A $(x_0 \in \mathrm{A}')$. Având în vedere că $x_0 \in \mathrm{A}'$, rezultă că ne putem apropia oricât de mult de punctul x_0, cu puncte $x \neq x_0$ din mulţimea A, deci are sens studiul valorilor funcţiei în orice vecinătate a punctului x_0.

Definiţia 1.1. Se spune că funcţia $f : \mathrm{A} \subset X \to Y$ are limită în punctul $x_0 \in \mathrm{A}'$, dacă există un element $l \in Y$, astfel încât pentru orice vecinătate U a lui l, există o vecinătate V a lui x_0, astfel ca pentru orice $x \in (V \setminus \{x_0\}) \cap \mathrm{A}$ să rezulte că $f(x) \in U$.

Elementul $l \in Y$ se numeşte limita funcţiei f în punctul de acumulare $x_0 \in \mathrm{A}'$ şi se notează $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = l$. Geometric, Def. 1.1 este ilustrată în figura 4.1.

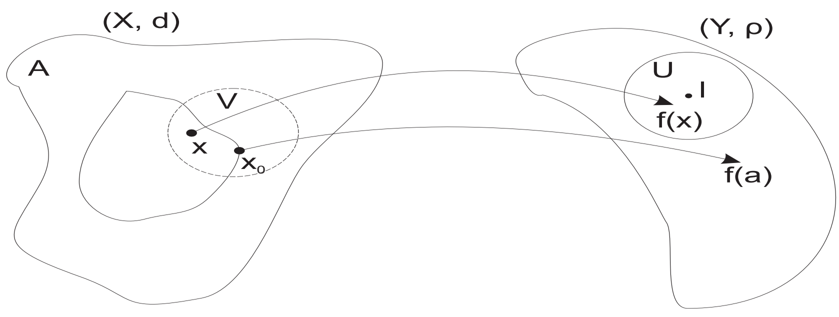

Figura 4.1

În cazul **funcţiilor reale de mai multe variabile reale**,
$f : \mathrm{A} \subset \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}$, $p > 1$, o clasă importantă de funcţii o constituie **funcţiile elementare**; aceste funcţii sunt funcţiile polinomiale, raţionale, exponenţiale, logaritmice, trigonometrice (directe şi inverse), funcţia putere şi orice funcţie care se obţine din acestea prin operaţii algebrice, operaţii de compunere sau inversare aplicate de un număr finit de ori. Aceste funcţii se dau prin formule în care **domeniile lor de definiţie** sunt acele mulţimi (maxime) pentru care operaţiile între variabile au sens. Dacă f este funcţie de una, două sau trei variabile, atunci domeniul A este respectiv o submulţime a lui $\mathbb{R}$, $\mathbb{R}^2$, sau $\mathbb{R}^3$ delimitată de curbe sau suprafeţe care reprezintă frontiera mulţimii A, aşa cum se prezintă în exemplul următor.

Exemplul 1. Să se determine şi apoi să se figureze domeniile maxime de definiţie ale următoarelor funcţii elementare:

i) $f(x,y) = \sqrt{6-(2x+3y)}$ **ii)** $f(x,y) = \ln\left(16-x^2-y^2\right)\left(x^2+y^2-4\right)$

iii) $f(x,y) = \arcsin \dfrac{x}{y^2} + \arccos(1-y)$.

Soluţie. În fiecare caz se impun condiţiile de existenţă ale expresiilor analitice. Corespunzător, avem:

i) $6-(2x+3y) \geq 0 \Longleftrightarrow 2x+3y \leq 6$

Domeniul de definiţie $\mathrm{A} \subset \mathbb{R}^2$ este ilustrat în figura 4.2. a).

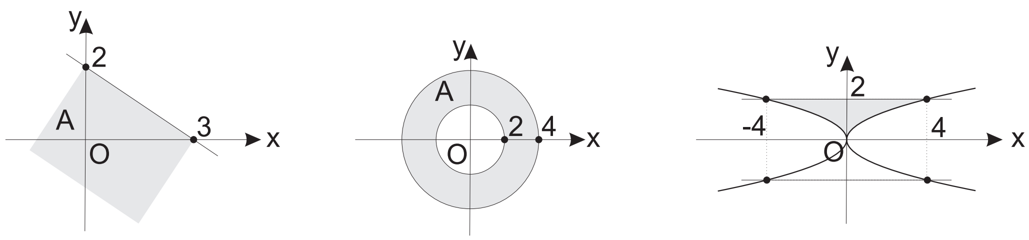

Figura 4.2

ii) Domeniul maxim de definiţie este coroana circulară determinată de exteriorul cercului cu centrul în origine de rază 2 şi interiorul cercului cu centrul în origine de rază 4, coroană ilustrată în figura 4.2. b).

iii) Domeniul maxim de definiţie este mulţimea

$$\mathrm{A} = \left\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; \left|\frac{x}{y^2}\right| \leq 1, y \neq 0, |1-y| \leq 1 \right\}$$

$$= \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid -y^2 \leq x \leq y^2, 0 < y \leq 2\}.$$

Geometric mulţimea este ilustrată în figura 4.2. c).

Ca şi în cazul funcţiilor reale de o variabilă reală şi în cazul funcţiilor reale de mai multe variabile reale, adică în cazul funcţiilor $f : \mathrm{A} \subset \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}$, mulţimea punctelor $G_f \subset \mathbb{R}^{p+1}$, definită prin relaţia

$$G_f = \{(x_1, x_2, ..., x_p, f(x_1, x_2, ..., x_p)) \mid (x_1, x_2, ..., x_p) \in \mathrm{A}\},$$

se numeşte **graficul funcţiei** $f : \mathrm{A} \subset \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}$. Aşadar, punctele graficului sunt puncte din spaţiul cu $p+1$ dimensiuni şi geometric, ele reprezintă punctele unei hipersuprafeţe din acest spaţiu. Astfel, funcţia $z = \sqrt{1 - (x^2 + y^2)}$ are ca grafic emisfera cu centrul în origine şi de rază 1.

Propoziţia 1.1 (Unicitatea limitei). Dacă funcţia $f : \mathrm{A} \subset X \to Y$ are limită în punctul $x_0 \in \mathrm{A}'$, atunci limita sa este unică.

Demonstraţie. Admitem, prin reducere la absurd, că funcţia f are în punctul $x_0 \in \mathrm{A}'$ două limite $l_1, l_2 \in Y$, cu $l_1 \neq l_2$. Dacă $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = l_1$, atunci pentru $U_1 = D_\rho(l_1, r) \in \mathcal{V}(l_1)$, cu $r = \dfrac{1}{2}\rho(l_1, l_2)$, există o vecinătate $V_1 \in \mathcal{V}(x_0)$ astfel încât pentru orice $x \in (V_1 \setminus \{x_0\}) \cap \mathrm{A}$ avem $f(x) \in U_1$. Analog, dacă $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = l_2$, atunci pentru orice $U_2 = D_\rho(l_2, r) \in \mathcal{V}(l_2)$, există $V_2 \in \mathcal{V}(x_0)$ astfel încât pentru orice $x \in (\mathrm{A} \setminus \{x_0\}) \cap V_2$, avem $f(x) \in U_2$. Atunci $V_1 \cap V_2 \overset{not}{=} V \in \mathcal{V}(x_0)$ şi pentru orice element $x \in (\mathrm{A} \setminus \{x_0\}) \cap V$, avem $f(x) \in U_1 \cap U_2$, ceea ce este absurd deoarece U_1 şi U_2 au fost alese vecinătăţi disjuncte, aşa cum se vede şi în figura 4.3. Contradicţia obţinută demonstrează **unicitatea limitei**, dacă aceasta există.

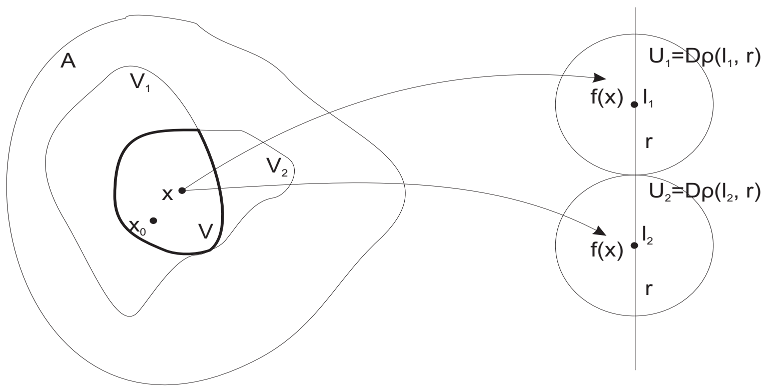

Figura 4.3

În cele ce urmează vom prezenta **exprimări echivalente ale limitei** unei funcţii într-un punct în spaţii metrice.

Teorema 1.1 (Caracterizarea limitei punctuale) Fie $(X,d),(Y,\rho)$ spaţii metrice, $\mathrm{A} \subset X$, $x_0 \in \mathrm{A}'$ şi funcţia $f : \mathrm{A} \to Y$. Următoarele afirmaţii sunt echivalente:

i) $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = l$, (caracterizarea limitei cu vecinătăţi);

ii) $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta_\varepsilon > 0$ astfel încât $\forall x \in \mathrm{A} \setminus \{x_0\}$ cu $d(x,x_0) < \delta_\varepsilon \Longrightarrow \delta(f(x),l) < \varepsilon$ (caracterizarea limitei în limbajul $\varepsilon - \delta$).

iii) $\forall x_n \in \mathrm{A} \setminus \{x_0\}, x_n \overset{(X,d)}{\longrightarrow} x_0 \Longrightarrow f(x_n) \overset{(Y,\rho)}{\longrightarrow} l$ (caracterizarea limitei cu şiruri sau **teorema lui Heine**).

Observaţia 1.1. Dacă pentru funcţia $f : \mathrm{A} \subset X \to Y$ şi $x_0 \in \mathrm{A}'$ există un şir $x_n \in \mathrm{A}\setminus\{x_0\}$, $x_n \overset{(X,d)}{\longrightarrow} x_0$ astfel încât şirul $f(x_n)$ este divergent, atunci funcţia f nu are limită în punctul x_0.

Observaţia 1.2. Dacă pentru funcţia $f : \mathrm{A} \subset X \to Y$ şi $x_0 \in \mathrm{A}'$ există două şiruri $x_n', x_n'' \in \mathrm{A}\setminus\{x_0\}$, cu $x_n', x_n'' \overset{(X,d)}{\longrightarrow} x_0$,iar $f(x_n') \overset{(Y,\rho)}{\longrightarrow} l'$ şi $f(x_n'') \overset{(Y,\rho)}{\longrightarrow} l''$, cu $l' \neq l''$, atunci funcţia f nu are limită în punctul $x_0 \in \mathrm{A}'$.

Exemplul 2. Demonstraţi că funcţia $f : \mathbb{R}\setminus\{0\} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \sin \dfrac{1}{x}$ nu are limită în punctul $x_0 = 0$.

Soluţie. Vom folosi Obs.1.2. Considerăm şirul $x_n = \dfrac{1}{(2n+1)\frac{\pi}{2}}$; se observă că $x_n \overset{(\mathbb{R},|\cdot|)}{\longrightarrow} 0$, iar şirul valorilor funcţiei este $f(x_n) = \sin(2n+1)\dfrac{\pi}{2}$ este divergent având două puncte limită, +1 sau -1. Acelaşi rezultat se obţine şi folosind Obs.1.2.

Teorema 1.2 (Cauchy-Bolzano). Fie (X,d) spaţiu metric, iar (Y,ρ) spaţiu metric complet. Condiţia necesară şi suficientă pentru ca funcţia $f : \mathrm{A} \subset X \to Y$ să aibă limită în $x_0 \in \mathrm{A}'$ este ca pentru orice $\varepsilon > 0$ să existe o vecinătate $V \in \mathcal{V}(x_0)$ astfel încât oricare ar fi $x', x'' \in V \cap \mathrm{A}\setminus\{x_0\}$ să avem $\rho(f(x'), f(x'')) < \varepsilon$.

Demonstraţie. Condiţia necesară. Presupunem că $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = l$; atunci pentru orice $\varepsilon > 0$ şi pentru orice vecinătate $U = D_\rho\left(l, \dfrac{\varepsilon}{2}\right) \in \mathcal{V}(l)$ există

$V \in \mathcal{V}(x_0)$ astfel încât oricare ar fi $x', x'' \in V \cap \mathrm{A} \setminus \{x_0\}$ rezultă

$$\rho\left(f\left(x'\right), f\left(x''\right)\right) \leq \rho\left(f\left(x'\right), l\right) + \rho\left(f\left(x''\right), l\right) < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon,$$

ceea ce înseamnă că necesitatea are loc.

Condiţia suficientă. Presupunem că pentru orice puncte $x', x'' \in V \cap \mathrm{A} \setminus \{x_0\}$ avem $\rho\left(f\left(x'\right), f\left(x''\right)\right) < \varepsilon$.

Considerăm un şir $x_n \in \mathrm{A} \setminus \{x_0\}$ cu $x_n \overset{(X,d)}{\longrightarrow} x_0$. Atunci există un rang $n_0 \in \mathbb{N}$ astfel încât $x_n \in V$, oricare ar fi $n \geq n_0$. Rezultă că pentru orice $m, n \geq n_0$ avem $x_m, x_n \in V$ şi conform ipotezei $\rho\left(f\left(x_n\right), f\left(x_m\right)\right) < \varepsilon$. Aceasta înseamnă că şirul $f\left(x_n\right)$ este un şir fundamental în spaţiul metric complet (Y, ρ), deci el este convergent şi potrivit Teor.1.1 **iii)** (teorema lui Heine), rezultă că f are limită în punctul x_0 şi astfel teorema este demonstrată.

2. Limita relativă la o mulţime, limita după o direcţie, limite parţiale şi limite iterate

Fie $(X, d), (Y, \rho)$ spaţii metrice, $f : \mathrm{A} \subset X \to Y$, $x_0 \in \mathrm{A}'$ şi $\mathrm{B} \subset \mathrm{A}$ cu proprietatea că $x_0 \in \mathrm{B}'$. Mai considerăm funcţia $f_{\mathrm{B}} : \mathrm{B} \subset X \to Y$, în care $f_{\mathrm{B}}(x) = f(x)$, numită **restricţia funcţiei** f **la mulţimea** B.

Definiţia 1.2. Se spune că funcţia f are limită relativă la mulţimea B în punctul $x_0 \in \mathrm{B}'$ dacă restricţia sa f_{B} are limită în punctul x_0.

Elementul $l \in Y$, unic determinat, cu proprietatea că el este limită a funcţiei f_{B} în $x_0 \in \mathrm{B}'$, se numeşte **limită relativă** la mulţimea B a funcţiei f în x_0 şi se notează $\lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ x \in \mathrm{B}}} f(x) = l$.

Limitele relative ale unei funcţii într-un punct se folosesc pentru a arăta că funcţia nu are limită în acel punct. În acest sens se pot face următoarele precizări importante.

Observaţia 1.3. Dacă funcţia $f : \mathrm{A} \subset X \to Y$, $x_0 \in \mathrm{A}'$ şi $\mathrm{B} \subset \mathrm{A}$, $x_0 \in \mathrm{B}'$, are proprietatea că limita relativă $\lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ x \in \mathrm{B}}} f(x)$ nu există, atunci f nu are limită în x_0.

Observaţia 1.4. Fie $f : \mathrm{A} \subset X \to Y$, $x_0 \in \mathrm{A}'$ şi $\mathrm{B} \subset \mathrm{A}$, $x_0 \in \mathrm{B}'$. Dacă există limitele relative,

$$\lim_{\substack{x\to x_0\\ x\in \mathrm{B}_1}} f(x)=l_1,\ \lim_{\substack{x\to x_0\\ x\in \mathrm{B}_2}} f(x)=l_2, l_1\neq l_2,$$

atunci f nu are limită în punctul x_0.

Exemplul 3. Fie $f:\mathbb{R}^2\backslash\{(0,0)\}\to\mathbb{R}$, $f(x,y)=\dfrac{xy}{x^2+y^2}$. Să se arate că $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} f(x,y)$ nu există.

Vom folosi Obs.1.4 şi considerăm submulţimile B_1 şi B_2 definite prin:

$$\mathrm{B}_1=\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2\mid x=y\right\}, \mathrm{B}_2=\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2\mid x=-y\right\},$$

care sunt respectiv situate pe prima, respectiv a doua bisectoare a axelor de coordonate din planul xOy. Atunci

$$\begin{aligned}
\lim_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\ (x,y)\in \mathrm{B}_1}} f(x,y) &= \lim_{\substack{x\to 0\\ y=x}} f(x,y)=\lim_{x\to 0}\frac{x^2}{x^2+x^2}=\frac{1}{2},\\
\lim_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\ (x,y)\in \mathrm{B}_2}} f(x,y) &= \lim_{\substack{x\to 0\\ y=-x}} f(x,y)=\lim_{x\to 0}\frac{-x^2}{x^2+x^2}=-\frac{1}{2},
\end{aligned}$$

deci limitele relative la mulţimile B_1 şi B_2 sunt respectiv $\dfrac{1}{2}$ şi $-\dfrac{1}{2}$ ceea ce înseamnă că f nu are limită în origine.

În cele ce urmează vom defini **limita după o direcţie**. Pentru aceasta fie $f:\mathrm{A}\subset\mathbb{R}^p\to\mathbb{R}$, $x_0\in\mathrm{A}'$, $\overline{h}\in\mathbb{R}^p$, $\overline{h}\neq\theta_{\mathbb{R}^p}$ (vectorul nul din $\mathbb{R}^p$) şi considerăm mulţimea

$$\mathrm{A}_{\overline{h}}=\{x=x_0+th\mid\ t\in\mathbb{R}\}\cap\ \mathrm{A}$$

pentru care mai presupunem că vectorul $x_0\in\mathrm{A}'_h$.

Definiţia 1.3. Se spune că funcţia $f:\mathrm{A}\subset\mathbb{R}^p\to\mathbb{R}$, are limită în punctul x_0 după direcţia h, dacă funcţia f are limită relativă la mulţimea A_h în punctul x_0.

Prin definiţie, aşadar, $\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\ x\in\mathrm{A}_h}} f(x)$ se numeşte **limita funcţiei f în punctul x_0 după direcţia h**.

Observaţia 1.5. Dacă funcţia $f : \mathrm{A} \subset \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}$, are limită în punctul $x_0 \in \mathrm{A}'$, atunci f are limită după orice direcţie în punctul $x_0 \in \mathrm{A}'_h$ şi are loc egalitatea

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = \lim_{\substack{x \to x_0 \\ x \in \mathrm{A}_h}} f(x).$$

Reciproca acestei observaţii nu are loc, aşa cum se poate constata în exemplul următor.

Exemplul 4. Să se demonstreze că funcţia $f : \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\} \to \mathbb{R}$,

$$f(x,y) = \frac{x^2 y}{x^4 + y^2}$$

are limită în origine după orice direcţie $h = (h_1, h_2) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$, dar limita lui f în origine nu există.

Soluţie. Într-adevăr, considerând mulţimea

$$\mathrm{A}_h = \left\{ \overline{x} = \overline{x_0} + t\overline{h} \mid \ t \in \mathbb{R} \right\} \cap D_f = \{ (x,y) = t\,(h_1,h_2) \mid t \in \mathbb{R} \} \cap D_f,$$

în care D_f este domeniul maxim de definiţie al funcţiei f, este uşor de constatat că

$$\lim_{\substack{(x,y) \to (0,0) \\ (x,y) \in \mathrm{A}_h}} f(x,y) = \lim_{t \to 0} \frac{t^3 h_1^2 h_2}{t^4 h_1^4 + t^2 h_2^2} = \lim_{t \to 0} \frac{t h_1^2 h_2}{t^2 h_1^4 + h_2^2} = 0,$$

pentru orice h_1, h_2 cu $h_1^2 + h_2^2 \neq 0$, ceea ce înseamnă că f are limită în origine după orice direcţie $h \in \mathrm{A}_h$.

Pe de altă parte, dacă considerăm mulţimea arbitrară

$$\mathrm{B} \ = \left\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 \,\middle|\, y = mx^2 \right\} \subset \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\},$$

atunci,

$$\lim_{\substack{(x,y) \to (0,0) \\ (x,y) \in \mathrm{B}}} f(x,y) = \lim_{\substack{x \to 0 \\ y = mx^2}} f(x, mx^2) = \lim_{x \to 0} \frac{mx^4}{x^4 + m^2 x^4} = \frac{m}{1 + m^2} \in \mathbb{R},$$

care potrivit Obs.1.4 demonstrează că $\lim\limits_{(x,y) \to (0,0)} f(x,y)$ nu există.

În continuarea acestui paragraf vom defini **limita parţială a unei funcţii** într-un punct. Pentru aceasta fie $\mathcal{B}_c = \{e_1, e_2, ..., e_p\}$ baza canonică din spaţiul euclidian p-dimensional $\mathbb{R}^p$ şi $f : \mathrm{A} \subset \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}$, cu $x_0 \in \mathrm{A}'$. Dacă $e_i \in \mathcal{B}_c$, atunci notăm

$$\mathrm{A}_{e_i} = \{x = x_0 + te_i \mid \ t \in \mathbb{R}\} \cap \ \mathrm{A}.$$

Definiţia 1.4. Se numeşte limita parţială a funcţiei f în punctul x_0 în raport cu variabila x_i, limita funcţiei f în punctul x_0 după direcţia e_i.

Vom da în cele ce urmează o justificare a acestei denumiri.Pentru aceasta fie $x = (x_1, x_2, ..., x_p) \in \overset{\circ}{\mathrm{A}} \subset \mathbb{R}^p$ punct arbitrar, iar $x_0 = (a_1, a_2, ..., a_p) \in$ $\in \mathrm{A}' \cap \ \mathrm{A}'_{e_i}$ punct fixat. Atunci este uşor de văzut că

$$\begin{aligned} \lim_{\substack{x \to x_0 \\ x \in \mathrm{A}_{e_i}}} f(x) &= \lim_{t \to 0} f\left(x_0 + te_i\right) = \lim_{t \to 0} f\left(a_1, ..., a_{i-1}, a_i + t, a_{i+1}, ..., a_p\right) \\ &= \lim_{x_i \to a_i} f\left(a_1, ..., a_{i-1}, x_i, a_{i+1}, ..., a_p\right), \end{aligned}$$

rezultat care arată că limita parţială în raport cu variabila x_i a funcţiei f în x_0 este limita lui f în x_0 după direcţia de versor e_i.

Observaţia 1.6.

1) Dacă $x_0 \in \mathrm{A}'_{e_i}$ şi nu există $\lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ x \in \mathrm{A}_{e_i}}} f(x)$, atunci f nu are limită în x_0.

2) Dacă $e_i \neq e_j, x_0 \in \mathrm{A}'_{e_i} \cap \ \mathrm{A}'_{e_j}$ şi dacă $\lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ x \in \mathrm{A}_{e_i}}} f(x) \neq \lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ x \in \mathrm{A}_{e_j}}} f(x)$, atunci $\lim\limits_{x \to x_0} f(x)$ nu există.

Exemplul 5. Să se arate că funcţia $f : \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\} \to \mathbb{R}$, $f(x,y) = \dfrac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}$ nu are limită în origine, arătând că limitele parţiale în origine sunt diferite.

Soluţie. Fie $x_0 = (0,0)\,, \mathcal{B}_c = \{e_1 = (1,0)\,, e_2 = (0,1)\}$ baza canonică din $\mathbb{R}^2$ şi submulţimile lui $\mathbb{R}^2$ definite prin

$$\mathrm{A}_{e_1} = \{te_1 = (t,0) \mid t \in \mathbb{R}^*\}\,, \mathrm{A}_{e_2} = \{te_2 = (0,t) \mid t \in \mathbb{R}^*\}\,.$$

În acest caz limitele parţiale în origine sunt

$$\begin{aligned} \lim_{\substack{(x,y) \to (0,0) \\ (x,y) \in \mathrm{A}_{e_1}}} f(x,y) &= \lim_{t \to 0} (t,0) = \lim_{t \to 0} \frac{t^2}{t^2} = 1, \\ \lim_{\substack{(x,y) \to (0,0) \\ (x,y) \in \mathrm{A}_{e_2}}} f(x,y) &= \lim_{t \to 0} (0,t) = \lim_{t \to 0} -\frac{t^2}{t^2} = -1 \end{aligned}$$

care fiind diferite, conform Obs.1.6, 2) demonstrează că f nu are limită în origine.

Pentru a defini **limitele iterate ale unei funcţii** $f : \mathrm{A} \subset \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}$ într-un punct $x_0 \in \mathrm{A}'$ vom considera mulţimea

$$\mathrm{A}_i = pr_i\mathrm{A} \ = \{a_i \in \mathbb{R}\,|(a_1, ..., a_{i-1}, a_i, a_{i+1}, ..., a_p) \in \mathrm{A} \ \}, i = \overline{1,p},$$

numită proiecţia de rang i a mulţimii A. Presupunem că $a_i^0 \in \mathrm{A}_i'$, $i = \overline{1,p}$ şi considerăm funcţia $f : \mathrm{A} \subset \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}$. Fie de asemenea $\sigma \in \sigma_n$ o permutare oarecare a mulţimii $\{1, 2, 3, ..., p\}$.

Definiţia 1.5. Se spune că funcţia $f : \mathrm{A} \subset \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}$, are limite iterate (succesive) în punctul $x_0 \in \mathrm{A}'$, dacă există limitele succesive

$$\lim_{x_{\sigma(p)} \to a^0_{\sigma(p)}} \left(... \lim_{x_{\sigma(1)} \to a^0_{\sigma(1)}} f\left(x_1, x_2, ..., x_p\right) ... \right) = l_\sigma$$

Elementul $l_\sigma \in \mathbb{R}$ se numeşte limita iterată a funcţiei f în punctul $x_0 = \left(a_1^0, a_2^0, ..., a_p^0\right)$. Este evident că funcţia f poate avea cel mult $p!$ limite iterate. În cazul particular $p = 2$, limitele iterate sunt $\lim\limits_{y \to a_2^0} \left(\lim\limits_{x \to a_1^0} f\left(x, y\right) \right) = l_{12}$ şi $\lim\limits_{x \to a_1^0} \left(\lim\limits_{y \to a_2^0} f\left(x, y\right) \right) = l_{21}$. Limitele iterate l_{12} şi l_{21} nu sunt neapărat egale, iar dacă sunt egale nu rezultă existenţa limitei funcţiei în ansamblul variabilelor, aşa cum rezultă şi din exemplul următor.

Exemplul 6. Fie $f : \mathbb{R}^2 \backslash \{(0,0)\} \to \mathbb{R}$, $f(x,y) = \dfrac{xy}{x^2+y^2}$. Să se arate că limitele iterate există şi sunt egale, deşi limita în origine nu există.

Soluţie. Se constată fără dificultate că avem

$$\begin{aligned} l_{12} &= \lim_{y\to 0}\left(\lim_{x\to 0}\frac{xy}{x^2+y^2}\right) = \lim_{y\to 0}\frac{0}{y^2} = 0; \\ l_{21} &= \lim_{x\to 0}\left(\lim_{y\to 0}\frac{xy}{x^2+y^2}\right) = \lim_{x\to 0}\frac{0}{x^2} = 0, \end{aligned}$$

deci $l_{12} = l_{21}$, însă $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$ nu există.

Se poate şi ca una din limitele iterate să existe, cealaltă să nu existe, iar limita în ansamblul variabilelor să existe, aşa cum rezultă din exemplul următor.

Exemplul 7. Să se studieze existenţa limitelor iterate şi limita în origine a funcţiei $f : \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\} \to \mathbb{R}$, $f(x,y) = x \sin \dfrac{1}{x} \cos \dfrac{1}{y}$.

Soluţie. Prin calcul direct se deduce uşor că $\lim\limits_{y \to 0} \left(\lim\limits_{x \to 0} f(x,y) \right) = 0$ şi $\lim\limits_{x \to 0} \left(\lim\limits_{y \to 0} f(x,y) \right)$ nu există. Totuşi, fără dificultate, limita funcţiei f în punctul $(0,0)$ este egală cu zero, adică $\lim\limits_{(x,y) \to (0,0)} f(x,y) = 0$.

Observaţia 1.7. Dacă există două limite iterate ale funcţiei f în punctul $x_0 \in \mathrm{A}'$ şi dacă ele sunt diferite, atunci funcţia f nu are limită în punctul x_0.

§2. Funcţii continue

1. Funcţii continue pe spaţii metrice

Fie (X,d), (Y,ρ) spaţii metrice şi funcţia $f : \mathrm{A} \subset X \to Y$, iar $x_0 \in \mathrm{A}$.

Definiţia 2.1. Se spune că funcţia f **este continuă** în punctul x_0, dacă pentru orice vecinătate $U \in \mathcal{V}_{f(x_0)}$ există o vecinătate $V \in \mathcal{V}_{x_0}$ astfel încât pentru orice $x \in V \cap \mathrm{A}$, $f(x) \in U$.

Dacă f nu este continuă în punctul $x_0 \in \mathrm{A}$, atunci se spune că funcţia f este discontinuă în punctul x_0, sau că punctul x_0 este punct de discontinuitate al funcţiei f. Intuitiv, definiţia continuităţii unei funcţii într-un punct este ilustrată în figura 4.4.

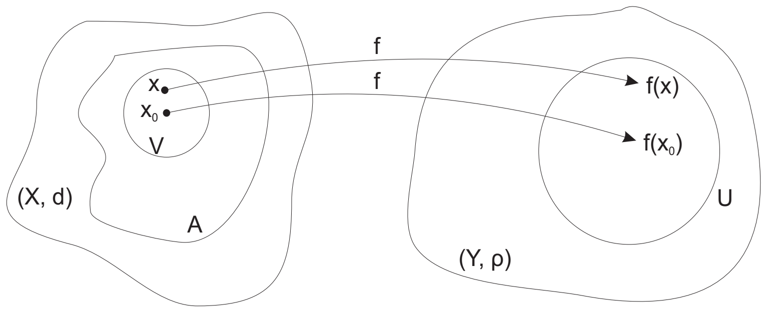

Figura 4.4

Din Def.2.1 a continuităţii unei funcţii într-un punct se observă că noţiunea de continuitate are caracter local. De aceea, în cele ce urmează, vom preciza un prim rezultat.

Teorema 2.1 (Caracterizarea continuităţii punctuale). Fie funcţia $f : \mathrm{A} \subset X \to Y$ şi $x_0 \in \mathrm{A} \cap \mathrm{A}'$. Următoarele afirmaţii sunt echivalente:

1) f este continuă în x_0 (definiţia cu vecinătăţi);

2) $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$ (definiţia cu ajutorul limitei);

3) Pentru orice $\varepsilon > 0$, există $\delta > 0$ astfel încât oricare ar fi $x \in \mathrm{A}$ cu $d(x, x_0) < \delta$, să rezulte $\rho(f(x), f(x_0)) < \varepsilon$ (definiţia în limbaj $\varepsilon - \delta$);

4) Pentru orice şir $x_n \in \mathrm{A}$, cu $x_n \overset{(X,d)}{\longrightarrow} x_0$, rezultă $f(x_n) \overset{(Y,\rho)}{\longrightarrow} f(x_0)$ (caracterizarea continuităţii cu teorema lui Heine).

În vederea caracterizării continuităţii pe o mulţime $\mathrm{A} \subset (X, d)$, vom considera doar funcţii $f : X \to Y$ deoarece mulţimea $\mathrm{A} \subset X$ poate fi privită ca spaţiu metric (A, d).

Definiţia 2.2. Se spune că funcţia $f : \mathrm{A} \subset X \to Y$ este continuă pe mulţimea A, dacă f este continuă în orice punct din A.

2. Continuitate parţială

Fie $f : \mathrm{A} \subset \mathbb{R}^p \longrightarrow \mathbb{R}$ şi $x_0 \in \mathrm{A}$. Considerăm un vector arbitrar $h \in \mathbb{R}^p$, $h \neq \theta_{\mathbb{R}^p}$ şi fie mulţimea vectorilor ce trec prin x_0 având direcţia h, adică

$$\mathrm{A}_h = \{x = x_0 + th \mid t \in \mathbb{R}\} \cap \mathrm{A}.$$

Cu acestea se poate defini **continuitatea în x_0 după direcţia** h.

Definiţia 2.3. Se spune că f este continuă în $x_0 \in \mathbb{R}^p$ după direcţia $h \in \mathbb{R}^p, h \neq \theta_{\mathbb{R}^p}$, dacă restricţia lui f la mulţimea A_h este continuă în x_0.

Observaţia 2.3. Din Def.1.3 a limitei după direcţie şi din Teor.2.1 rezultă că funcţia $f : \mathrm{A} \subset \mathbb{R}^p \longrightarrow \mathbb{R}$ este continuă în $x_0 \in \mathrm{A} \cap \mathrm{A}'_h$ dacă şi numai dacă $\lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ x \in \mathrm{A}_h}} f(x) = f(x_0)$.

În cele ce urmează vom considera ca direcţie h, direcţiile versorilor din baza canonică $\mathcal{B}_c$ din $\mathbb{R}^p$, adică $\mathcal{B}_c = \{e_1, e_2, ..., e_p\}$ şi vom defini **continuitatea parţială a lui f în punctul** x_0.

Definiţia 2.4. Se spune că funcţia $f : \mathrm{A} \subset \mathbb{R}^p \longrightarrow \mathbb{R}$ este continuă parţial în raport cu variabila x_i $(1 \leq i \leq p)$ în punctul $x_0 \in \mathrm{A}$ dacă f este continuă în x_0 după direcţia versorului $\overline{e_i} \in \mathcal{B}_c$.

Ca şi în cazul continuităţii după direcţie şi în cazul continuităţii parţiale se poate preciza următoarea remarcă.

Observaţia 2.4. Fie $f : \mathrm{A} \subset \mathbb{R}^p \longrightarrow \mathbb{R}$ şi $x_0 = (a_1, a_2, ..., a_p) \in \mathrm{A} \cap \mathrm{A}'_{e_i}$, cu $1 \leq i \leq p$. Funcţia f este continuă parţial în x_0 în raport cu variabila x_i dacă şi numai dacă

$$\lim_{x_i \to a_i} f(a_1, ..., a_{i-1}, x_i, a_{i+1}, ..., a_p) = f(a_1, ..., a_i, ..., a_p) = f(x_0).$$

Cu privire la continuitatea lui f într-un punct x_0 şi continuitatea sa parţială în acel punct are loc următoarea aserţiune.

Propoziţia 2.8. Dacă funcţia $f : \mathrm{A} \subset \mathbb{R}^p \longrightarrow \mathbb{R}$ este continuă în $x_0 \in \mathrm{A}$, atunci f este continuă parţial în x_0 în raport cu fiecare variabilă $x_i, i = \overline{1,p}$.

Demonstraţie. Fie f continuă în x_0; atunci oricare ar fi $\varepsilon > 0$ există $\delta > 0$ astfel încât oricare ar fi $x \in \mathrm{A}$, cu $|x_i - a_i| < \delta, (1 \leq i \leq p)$, rezultă că

$$|f(x_1, x_2, ..., x_p) - f(a_1, a_2, ..., a_p)| < \varepsilon.$$

Atunci în particular, considerând $x = (a_1, ..., a_{i-1}, x_i, a_{i+1}, ..., a_p) \in \mathrm{A}$, cu $|x_j - a_j| < < \delta, (1 \leq j \leq p)$, rezultă că

$$|f(a_1, ..., a_{j-1}, x_j, a_{j+1}, ..., a_p) - f(a_1, a_2, ..., a_p)| < \varepsilon,$$

ceea ce înseamnă că f este continuă parţial în x_0 în raport variabila x_j, $1 \leq j \leq p$.

Reciproca Prop.2.8 nu este adevărată, aşa cum se va vedea şi în exemplul următor.

Exemplul 8. Fie $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$,

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^2 y}{x^4 + y^2}, & \text{dacă } (x,y) \neq (0,0) \\ 0, & \text{dacă } (x,y) = (0,0) \end{cases}.$$

Să se arate că f este continuă parţial atât în raport cu x, cât şi în raport cu y, dar nu este continuă în origine, neavând limită în origine.

Soluţie. Într-adevăr, calculând limitele parţiale în origine rezultă,

$$\begin{aligned} \lim_{x \to 0} f(x,0) &= \lim_{x \to 0} \frac{x^2 \cdot 0}{x^4 + 0} = 0 = f(0,0); \\ \lim_{y \to 0} f(0,y) &= \lim_{y \to 0} \frac{0 \cdot y}{0 + y^2} = 0 = f(0,0), \end{aligned}$$

deci f este continuă parţial în origine atât în raport cu x, cât şi în raport cu y. Pentru studiul limitei în origine a funcţiei f, calculăm limita lui f relativă la mulţimea $A_m = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 | y = mx^2\}$.

$$\lim_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\(x,y)\in A_m}} f(x,y) = \lim_{\substack{x\to 0\\y=mx^2}} f(x,y) = \lim_{x\to 0} \frac{m^2x^4}{x^4\left(1+m^2\right)} = \frac{m^2}{1+m^2} \in \mathbb{R},$$

deci f nu are limită în origine, deci nu poate fi continuă în origine.

Observaţia 2.5. Dacă funcţia $f : \mathrm{A} \subset \mathbb{R}^p \longrightarrow \mathbb{R}$ nu este continuă parţial în x_0 în raport cu una din variabile, atunci f nu e continuă în x_0.

Exemplul 9. Fie $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$,

$$f\left(x,y\right) = \begin{cases} \dfrac{x^2-y^2}{x^2+y^2}, & \text{dacă } (x,y) \neq (0,0) \\ 1, & \text{dacă } (x,y) = (0,0) \end{cases}.$$

Să se arate că f nu este continuă parţial în origine în raport cu variabila y, deci f nu este continuă în origine.

Soluţie. Într-adevăr,

$$\lim_{y\to 0} f(0,y) = \lim_{y\to 0} \frac{-y^2}{y^2} = -1 \neq f\left(0,0\right) = 1,$$

deci f nu este continuă parţial în origine în raport cu variabila y şi atunci potrivit Obs.2.5. f nu este continuă în origine.