Capitolul 3

Serii de puteri şi serii Taylor

3.1 Serii de puteri

3.1.1 Breviar teoretic

Fie $x_0 \in \mathbb{R}$ un număr real fixat. O serie de funcţii de forma

$$\sum_{n\geq 0} a_n(x-x_0)^n = a_0 + a_1(x-x_0) + \cdots + a_n(x-x_0)^n + \cdots, \; x \in \mathbb{R}, \tag{3.1}$$

unde $(a_n)_{n\geq 0}$ este un şir de numere reale, se numeşte *serie de puteri* (centrată în x_0), iar a_n se numeşte *coeficientul de rang n* al seriei, $n \in \mathbb{N}$. Considerând $x = x_0$ în seria de mai sus, vom face convenţia $0^0 = 1$, în acest caz seria va avea toţi termenii nuli, cu excepţia primului care va fi a_0.

Remarca 3.1.1 Coeficientul de rang n al unei serii de puteri se poate defini pentru orice număr natural $n \in \mathbb{N}$, chiar dacă nu toţi coeficienţii seriei apar în mod explicit. De exemplu, coeficientul de rang n al seriei $\sum\limits_{n\geq 0} \frac{x^n}{n!}$ este $a_n = \frac{1}{n!}$ pentru orice $n \in \mathbb{N}$, iar coeficienţii seriei $\sum\limits_{n\geq 1} \frac{(-1)^n}{n} x^{n-1}$ sunt $a_0 = -1$ (a_0 este coeficientul termenului liber, fără x, obţinut considerând $n = 1$), $a_1 = \frac{1}{2}, \ldots, a_n = \frac{(-1)^{n+1}}{n+1}$, $n \in \mathbb{N}$. În cazul seriei de puteri

$$\sum_{n\geq 0} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} x^{2n+1} = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \cdots$$

suntem tentaţi să considerăm $a_n = \frac{(-1)^n}{(2n+1)!}$ pentru orice număr natural n, ceea ce este fals, căci, de exemplu, $a_0 = 0 \neq \frac{(-1)^0}{1!}$ (a_0 este nul, căci seria de mai sus nu conţine termen liber, fără x), iar $a_1 = 1 \neq \frac{(-1)^1}{3!}$ (a_1 se obţine considerând $n = 0$). Se observă, de fapt, că orice coeficient de rang par al acestei serii este nul, adică $a_{2n} = 0$ pentru $n \in \mathbb{N}$ (în dezvoltarea seriei nu apar puteri pare ale lui x), iar orice coeficient de rang impar se poate scrie de forma $a_{2n+1} = \frac{(-1)^n}{(2n+1)!}$, $n \in \mathbb{N}$.

Notăm cu C mulţimea de convergenţă a seriei (3.1), adică mulţimea tuturor punctelor $x \in \mathbb{R}$ pentru care seria $\sum\limits_{n\geq 0} a_n(x-x_0)^n$ este convergentă. Se observă că orice serie de puteri (centrată în x_0) este convergentă în x_0, adică $x_0 \in C$. Mai mult, dacă

$$S(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n = a_0 + a_1(x-x_0) + \cdots + a_n(x-x_0)^n + \cdots,\ x \in C,$$

este suma seriei (3.1), atunci $S(x_0) = a_0$.

Exemplul 3.1.1 (Seria geometrică) Cel mai simplu exemplu de serie de puteri este seria geometrică, $\sum\limits_{n\geq 0} x^n$. Aceasta are mulţimea de convergenţă $C = (-1, 1)$ şi suma

$$\sum_{n=0}^{\infty} x^n = \frac{1}{1-x},\ \text{pentru orice } x \in (-1,1). \tag{3.2}$$

Plecând de la seria geometrică, se obţin următoarele relaţii:

$$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^n = \frac{1}{1+x},\ \text{pentru orice } x \in (-1,1); \tag{3.3}$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} x^{2n} = \frac{1}{1-x^2},\ \text{pentru orice } x \in (-1,1); \tag{3.4}$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^{2n} = \frac{1}{1+x^2},\ \text{pentru orice } x \in (-1,1). \tag{3.5}$$

Raza de convergenţă a seriei de puteri (3.1) este acel element $R \in [0, \infty]$ definit prin

$$R = \frac{1}{\limsup\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}}, \tag{3.6}$$

unde $\limsup\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}$ notează limita superioară a şirului $\left(\sqrt[n]{|a_n|}\right)$. Pentru a putea defini raza de convergenţă în ipoteza în care $\limsup\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = 0$ este nevoie să facem convenţia $\dfrac{1}{0} = \infty$.

Se observă că raza de convergenţă a unei serii de puteri $\sum\limits_{n\geq 0} a_n(x - x_0)^n$ nu depinde de x_0.

Dacă există $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}$, atunci raza de convergenţă este

$$R = \frac{1}{\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}}. \tag{3.7}$$

Mai mult, din criteriul rădăcinii pentru şiruri rezultă că dacă limita $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|}$ există, atunci există $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}$, deci raza de convergenţă a seriei (3.1) se poate calcula astfel:

$$\boxed{R = \lim_{n\to\infty} \frac{|a_n|}{|a_{n+1}|}.} \tag{3.8}$$

Propoziţia 3.1.1 *Raza de convergenţă a seriei de puteri*

$$\sum_{n\geq n_0} c_n(x - x_0)^{\alpha n+\beta}, \ \alpha \in \mathbb{N}, \ \alpha \geq 2, \ \beta \in \{0, 1, \ldots, \alpha - 1\}, \tag{3.9}$$

este acel element $R \in [0, \infty]$ care verifică relaţia

$$R^\alpha = \frac{1}{\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{|c_n|}} = \lim_{n\to\infty} \frac{|c_n|}{|c_{n+1}|}, \tag{3.10}$$

în ipoteza în care limitele de mai sus există.

Demonstraţie. Seria (3.9) se poate rescrie sub forma $\sum\limits_{n\geq 0} a_n(x-x_0)^n$, unde $a_n = c_k$, pentru $n = \alpha k + \beta$ cu $k \geq n_0$, respectiv $a_n = 0$, în rest. De exemplu, dacă se dă seria

$$\sum_{n\geq 1} c_n(x-x_0)^{2n+1} = c_1(x-x_0)^3 + c_2(x-x_0)^5 + \cdots ,$$

atunci

$$a_n = \begin{cases} c_k, & \text{pentru } n = 2k+1,\ k \in \mathbb{N}^*, \\ 0, & \text{pentru } n = 1 \text{ sau } n = 2k \text{ cu } k \in \mathbb{N}. \end{cases}$$

Revenind la demonstraţie, dacă presupunem că există $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{|c_n|}$, atunci

$$\begin{aligned} R^\alpha &= \frac{1}{\limsup\limits_{n\to\infty}\left(\sqrt[n]{|a_n|}\right)^\alpha} = \frac{1}{\lim\limits_{\substack{n\to\infty \\ n=\alpha k+\beta}}\left(\sqrt[n]{|c_k|}\right)^\alpha} = \frac{1}{\lim\limits_{k\to\infty}\left(\sqrt[\alpha k+\beta]{|c_k|}\right)^\alpha} \\ &= \frac{1}{\lim\limits_{k\to\infty}\left(\sqrt[k]{|c_k|}\right)^{\frac{\alpha k}{\alpha k+\beta}}} = \frac{1}{\lim\limits_{k\to\infty}\sqrt[k]{|c_k|}} = \frac{1}{\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{|c_n|}}. \end{aligned}$$

□

Teorema 3.1.1 (Teorema I a lui Abel) Fie $\sum\limits_{n\geq 0} a_n(x-x_0)^n$ o serie de puteri şi $R \in [0,\infty]$ raza sa de convergenţă.

(1) Dacă $R = 0$, atunci $C = \{x_0\}$, adică seria este convergentă doar în x_0.

(2) Dacă $R = \infty$, atunci $C = \mathbb{R}$, adică seria este convergentă în orice punct $x \in \mathbb{R}$.

(3) Dacă $R \in (0,\infty)$, atunci:

- seria este absolut convergentă pentru $x \in (x_0 - R, x_0 + R)$ şi nu este convergentă pentru $x \in (-\infty, x_0 - R) \cup (x_0 + R, \infty)$, ceea ce implică
$$(x_0 - R, x_0 + R) \subset C \subset [x_0 - R, x_0 + R];$$
- seria $\sum\limits_{n\geq 0} a_n(x-x_0)^n$ este uniform convergentă pe orice interval compact $[\alpha,\beta] \subset (x_0 - R, x_0 + R)$.

Dacă $R \in (0, \infty)$, atunci teorema precedentă nu oferă nici o informaţie privind convergenţa seriei de puteri $\sum\limits_n a_n(x - x_0)^n$ în punctele $x = x_0 \pm R$. În acest caz, convergenţa seriilor $\sum\limits_n a_n R^n$, $\sum\limits_n (-1)^n a_n R^n$ se va studia separat, folosind criteriile cunoscute pentru seriile de numere reale, deci mulţimea de convergenţă a unei serii de puteri poate să fie de forma $C = (x_0 - R, x_0 + R)$, $C = [x_0 - R, x_0 + R)$, $C = (x_0 - R, x_0 + R]$ sau $C = [x_0 - R, x_0 + R]$.

Teorema 3.1.2 (Teorema a II-a a lui Abel) Fie $\sum\limits_{n \geq 0} a_n(x - x_0)^n$ o serie de puteri având raza de convergenţă $R \in (0, \infty)$. Dacă seria este convergentă în $x_0 - R$, respectiv în $x_0 + R$, atunci suma seriei,

$$S(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(x - x_0)^n, \ x \in C, \tag{3.11}$$

este continuă în $x_0 - R$, respectiv în $x_0 + R$, adică

$$S(x_0 - R) = S(x_0 - R + 0) = \lim_{\substack{x \to x_0 - R \\ x > x_0 - R}} S(x), \tag{3.12}$$

respectiv

$$S(x_0 + R) = S(x_0 + R - 0) = \lim_{\substack{x \to x_0 + R \\ x < x_0 + R}} S(x). \tag{3.13}$$

Teorema a II-a a lui Abel permite determinarea sumei unei serii de puteri în punctele $x_0 \pm R$, dacă seria este convergentă în aceste puncte.

Teorema 3.1.3 *Fie*

$$\sum_{n \geq 0} a_n(x - x_0)^n \tag{3.14}$$

o serie de puteri având raza de convergenţă $R \in (0, \infty]$.

- *Seria derivatelor*

$$\sum_{n \geq 1} n a_n(x - x_0)^{n-1} \tag{3.15}$$

are aceeaşi rază de convergenţă ca şi seria (3.14) *şi derivata sumei seriei* (3.14) *este egală cu suma seriei derivatelor termenilor în orice punct din intervalul deschis* $(x_0 - R, x_0 + R)$*, adică are loc formula*

$$\left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n \right)' = \sum_{n=1}^{\infty} (a_n (x - x_0)^n)' = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n (x - x_0)^{n-1},$$

pentru orice $x \in (x_0 - R, x_0 + R)$.

- *Seria*

$$\sum_{n \geq 0} \frac{a_n}{n+1} (x - x_0)^{n+1}, \tag{3.16}$$

obţinută integrând termen cu termen seria de puteri (3.14)*, are raza de convergenţă* R *şi, în plus, se obţine*

$$\int_{x_0}^{x} \left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n (t - x_0)^n \right) dt = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \int_{x_0}^{x} (t - x_0)^n dt = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n+1} (x - x_0)^{n+1},$$

pentru orice $x \in (x_0 - R, x_0 + R)$.

> Din teorema precedentă rezultă că seria de puteri $\sum\limits_{n \geq 0} a_n (x - x_0)^n$, seria derivatelor $\sum\limits_{n \geq 1} n a_n (x - x_0)^{n-1}$ şi seria integralelor $\sum\limits_{n \geq 0} \frac{a_n}{n+1} (x - x_0)^{n+1}$ au aceeaşi rază de convergenţă.

Remarca 3.1.2 O serie de puteri $\sum\limits_{n \geq 0} a_n (x - x_0)^n$, având raza de convergenţă $R \in (0, \infty)$, poate fi derivată/integrată termen cu termen, în general, doar pe intervalul **deschis** $(x_0 - R, x_0 + R)$.

Teorema 3.1.4 *Fie* $\sum\limits_{n \geq 0} a_n (x - x_0)^n$ *o serie de puteri având raza de convergenţă* $R \in (0, \infty]$ *şi suma*

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n, \; x \in C. \tag{3.17}$$

Atunci funcţia f este indefinit derivabilă pe intervalul deschis $(x_0 - R, x_0 + R)$, iar derivata de ordinul $k \in \mathbb{N}^*$ este

$$f^{(k)}(x) = \sum_{n=k}^{\infty} a_n\, n(n-1)\cdots(n-k+1)(x-x_0)^{n-k}, \tag{3.18}$$

pentru orice $x \in (x_0 - R, x_0 + R)$. Mai mult, considerând $x = x_0$ în relaţiile (3.17) *şi* (3.18)*, se obţine*

$$a_k = \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!},\ k \in \mathbb{N},$$

deci

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n,\ \textit{pentru orice } x \in (x_0 - R, x_0 + R). \tag{3.19}$$

Operaţii cu serii de puteri

Propoziţia 3.1.2 *Dacă $\sum\limits_{n\geq 0} a_n(x-x_0)^n$ este o serie de puteri ce are mulţimea de convergenţă C, atunci $\sum\limits_{n\geq 0} \alpha a_n(x-x_0)^n$, $\alpha \in \mathbb{R}^*$, are aceeaşi mulţime de convergenţă şi*

$$\sum_{n=0}^{\infty} \alpha a_n(x-x_0)^n = \alpha \sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n,\ x \in C.$$

Propoziţia 3.1.3 *Fie $\sum\limits_{n\geq 0} a_n(x-x_0)^n$ şi $\sum\limits_{n\geq 0} b_n(x-x_0)^n$ două serii de puteri ce au raza de convergenţă R_1, respectiv R_2.*

- *Seria sumă*

$$\sum_{n\geq 0}(a_n+b_n)(x-x_0)^n$$

are raza de convergenţă $R \geq \min\{R_1, R_2\}$, iar dacă seriile $\sum\limits_{n\geq 0} a_n(x-x_0)^n$ şi $\sum\limits_{n\geq 0} b_n(x-x_0)^n$ sunt convergente simultan în x, atunci

$$\sum_{n=0}^{\infty}(a_n+b_n)(x-x_0)^n = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n + \sum_{n=0}^{\infty} b_n(x-x_0)^n.$$

- *Seria produs* $\sum_{n\geq 0} c_n(x-x_0)^n$, *unde*

$$c_n = \sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k} = a_0 b_n + a_1 b_{n-1} + \cdots + a_{n-1} b_1 + a_n b_0,$$

are raza de convergenţă $R \geq \min\{R_1, R_2\}$. *Mai mult, în orice punct* x *în care seriile* $\sum_{n\geq 0} a_n(x-x_0)^n$ *şi* $\sum_{n\geq 0} b_n(x-x_0)^n$ *sunt convergente, are loc formula:*

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n(x-x_0)^n = \left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n\right)\left(\sum_{n=0}^{\infty} b_n(x-x_0)^n\right).$$

3.1.2 Probleme rezolvate

Exerciţiul 1 Să se determine mulţimea de convergenţă şi suma seriilor de puteri:

a) $\displaystyle\sum_{n\geq 1} \frac{x^n}{n}$,

b) $\displaystyle\sum_{n\geq 1} n\, x^n$.

Soluţie. a) Fie $a_n = \frac{1}{n}$, $n \in \mathbb{N}^*$. Raza de convergenţă a seriei de puteri $\sum_{n\geq 1} \frac{x^n}{n}$ este

$$R = \lim_{n\to\infty} \frac{|a_n|}{|a_{n+1}|} = \lim_{n\to\infty} \frac{n+1}{n} = 1.$$

Din Teorema I a lui Abel se obţin următoarele cazuri:

- $\sum_{n\geq 1} a_n x^n$ este convergentă pentru orice $x \in (-1, 1)$, seria fiind chiar absolut convergentă pe intervalul $(-1, 1)$;

- $\sum_{n\geq 1} a_n x^n$ nu este convergentă pentru $x \in (-\infty, -1) \cup (1, \infty)$.

Rămâne să studiem separat cazurile $x = \pm 1$. Dacă $x = -1$, se obţine seria $\sum_{n\geq 1} \frac{(-1)^n}{n}$. Cum $a_n = \frac{1}{n} \searrow 0$ (descreşte la zero), din criteriul lui Leibniz pentru serii numerice rezultă că această serie este convergentă. Pentru $x = 1$ se obţine seria armonică, $\sum\limits_{n\geq 1} \frac{1}{n}$, care nu este convergentă. Deci, mulţimea de convergenţă a seriei de puteri $\sum\limits_{n\geq 1} \frac{x^n}{n}$ este $C = [-1, 1)$. Rămâne să determinăm suma sa,

$$S(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n},\ x \in [-1, 1).$$

Din Teorema 3.1.3, derivând termen cu termen, se obţine

$$S'(x) = \left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n}\right)' = \sum_{n=1}^{\infty} x^{n-1} = \sum_{k=0}^{\infty} x^k = \frac{1}{1-x},\ \text{pentru orice } x \in (-1, 1).$$

Cum

$$\int_0^x S'(t)\, dt = S(x) - S(0),\ x \in (-1, 1),$$

şi $S(0) = 0$, rezultă

$$S(x) = \int_0^x S'(t)\, dt = \int_0^x \frac{1}{1-t}\, dt = -\ln(1-t)\Big|_0^x = -\ln(1-x),\ x \in (-1, 1).$$

Rămâne să determinăm valoarea funcţiei S în punctul -1. Aplicând Teorema a II-a a lui Abel, care ne asigură continuitatea funcţiei S în punctul -1, rezultă

$$S(-1) = S(-1+0) = \lim_{\substack{x\to -1\\ x>-1}} S(x) = -\lim_{x\to -1} \ln(1-x) = -\ln 2.$$

Din cele de mai sus deducem că suma seriei este

$$S(x) = -\ln(1-x),\ \text{pentru orice } x \in [-1, 1).$$

b) Fie $a_n = n$, $n \in \mathbb{N}^*$. Raza de convergenţă a seriei de puteri $\sum\limits_{n\geq 1} nx^n$ este

$$R = \lim_{n\to\infty} \frac{|a_n|}{|a_{n+1}|} = \lim_{n\to\infty} \frac{n}{n+1} = 1,$$

deci $\sum\limits_{n\geq 1} a_n x^n$ este convergentă pentru orice $x \in (-1, 1)$ şi divergentă pentru orice $x \in (-\infty, -1) \cup (1, \infty)$. Rămâne să studiem cazurile $x = \pm 1$. Pentru $x = -1$ termenul general al seriei numerice asociate este $x_n = n(-1)^n$, care nu are limită, căci $x_{2n} = 2n \to +\infty$, iar $x_{2n+1} = -(2n+1) \to -\infty$, deci $x_n \nrightarrow 0$. Din criteriul de divergenţă pentru serii numerice rezultă că $\sum_{n\geq 1} x_n$ nu este convergentă. Analog, dacă $x = 1$, seria $\sum_{n\geq 1} n$ nu este convergentă, căci $x_n = n \to +\infty \neq 0$. Din cele de mai sus rezultă că mulţimea de convergenţă a seriei de puteri $\sum_{n\geq 1} nx^n$ este $C = (-1, 1)$. Vom arăta prin două metode că suma seriei de puteri $\sum_{n\geq 1} nx^n$ este

$$\sum_{n=1}^{\infty} nx^n = \frac{x}{(1-x)^2},\ x \in (-1, 1).$$

Metoda 1. Din Teorema 3.1.3, derivând după x în relaţia

$$\sum_{n=0}^{\infty} x^n = \frac{1}{1-x},\ x \in (-1, 1),$$

obţinem

$$\left(\sum_{n=0}^{\infty} x^n\right)' = \sum_{n=1}^{\infty} nx^{n-1} = \frac{1}{(1-x)^2},\ x \in (-1, 1).$$

Înmulţind cu x relaţia precedentă, rezultă

$$x\sum_{n=1}^{\infty} nx^{n-1} = \sum_{n=1}^{\infty} nx^n = \frac{x}{(1-x)^2},\ x \in (-1, 1),$$

ceea ce trebuia să arătăm.
Metoda 2. Are loc

$$\sum_{n=1}^{\infty} nx^n = x\sum_{n=1}^{\infty} nx^{n-1},\ x \in (-1, 1).$$

Considerăm funcţia $g(t) = \sum_{n=1}^{\infty} nt^{n-1}$, pentru $t \in (-1, 1)$. Integrând pe intervalul $[0, x] \subset (-1, 1)$ funcţia g, se obţine

$$\begin{aligned}\int_0^x g(t)dt &= \int_0^x \left(\sum_{n=1}^{\infty} nt^{n-1}\right) dt = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\int_0^x nt^{n-1}dt\right) = \sum_{n=1}^{\infty} x^n \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} x^n - 1 = \frac{1}{1-x} - 1,\end{aligned}$$

deci

$$\int_0^x g(t)dt = \frac{1}{1-x} - 1,\ x \in (-1,1).$$

Derivând după x în relaţia precedentă, obţinem

$$g(x) = \frac{1}{(1-x)^2},\ x \in (-1,1),$$

de unde rezultă că

$$\sum_{n=1}^{\infty} nx^n = xg(x) = \frac{x}{(1-x)^2},\ x \in (-1,1).$$

$\square$

În cele ce urmează vom presupune cunoscute relaţiile demonstrate în exerciţiul precedent:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{y^n}{n} = -\ln(1-y),\ \text{pentru } y \in [-1,1); \tag{3.20}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} ny^n = \frac{y}{(1-y)^2},\ \text{pentru } y \in (-1,1). \tag{3.21}$$

Exerciţiul 2 Determinaţi mulţimea de convergenţă şi suma următoarelor serii de puteri:

$$\text{a)} \sum_{n\geq 1} \frac{x^n}{n\,2^n} \qquad \text{b)} \sum_{n\geq 1} (-1)^{n-1}\,\frac{n+1}{n}\,x^n \qquad \text{c)} \sum_{n\geq 0} (-1)^n\,\frac{n}{3^n}\,x^{2n+1}.$$

Soluţie. a) Fie $a_n = \frac{1}{n\,2^n}$, $n \geq 1$. Determinăm mai întâi raza de convergenţă a seriei:

$$R = \lim_{n\to\infty} \frac{|a_n|}{|a_{n+1}|} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n\,2^n}(n+1)2^{n+1} = \lim_{n\to\infty} \frac{2(n+1)}{n} = 2.$$

Din Teorema I a lui Abel se obţine că seria $\sum\limits_{n\geq 1} a_n x^n$ este convergentă pentru orice $x \in (-2,2)$ şi nu este convergentă pentru $x \in (-\infty,-2) \cup (2,\infty)$. Rămâne să studiem separat cazurile $x=-2$, respectiv $x=2$. Pentru $x=-2$ seria devine

$$\sum_{n\geq 1} a_n x^n = \sum_{n\geq 1} \frac{(-2)^n}{n2^n} = \sum_{n\geq 1} \frac{(-1)^n 2^n}{n2^n} = \sum_{n\geq 1} \frac{(-1)^n}{n}.$$

Cum $u_n = \frac{1}{n} \searrow 0$, din criteriul lui Leibniz pentru serii numerice rezultă că seria $\sum\limits_{n\geq 1} \frac{(-1)^n}{n}$ este convergentă. Dacă $x=2$, atunci

$$\sum_{n\geq 1} a_n x^n = \sum_{n\geq 1} \frac{2^n}{n2^n} = \sum_{n\geq 1} \frac{1}{n},$$

care este o serie divergentă (este seria armonică). Astfel, rezultă că mulţimea de convergenţă este $C=[-2,2)$. Suma seriei este

$$S(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n2^n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}\left(\frac{x}{2}\right)^n = -\ln\left(1-\frac{x}{2}\right),\ x \in [-2,2).$$

Am aplicat relaţia (3.20) pentru $y = \frac{x}{2} \in [-1,1)$.
b) Considerăm şirul $a_n = (-1)^{n-1}\frac{n+1}{n}$, $n \geq 1$. Raza de convergenţă a seriei de puteri asociate este

$$R = \lim_{n\to\infty} \frac{|a_n|}{|a_{n+1}|} = \lim_{n\to\infty} \frac{n+1}{n} \cdot \frac{n+1}{n+2} = 1.$$

Din Teorema I a lui Abel rezultă că

- $\sum\limits_{n\geq 1} a_n x^n$ este convergentă pentru orice $x \in (-1,1)$;
- $\sum\limits_{n\geq 1} a_n x^n$ nu este convergentă pentru $x \in (-\infty,-1) \cup (1,\infty)$.

Dacă $x=-1$, atunci seria devine

$$\sum_{n\geq 1} a_n\, x^n = \sum_{n\geq 1} (-1)^{n-1}\frac{n+1}{n}(-1)^n = \sum_{n\geq 1} (-1)^{2n-1}\frac{n+1}{n} = -\sum_{n\geq 1} \frac{n+1}{n},$$

care nu este convergentă, căci $\frac{n+1}{n} \to 1 \neq 0$ (criteriul de divergenţă). În cazul în care $x = 1$, avem

$$\sum_{n\geq 1} a_n x^n = \sum_{n\geq 1} (-1)^{n-1} \frac{n+1}{n}.$$

Cum şirul $x_n = (-1)^{n-1} \frac{n+1}{n}$ nu are limită ($x_{2n} \to -1$ şi $x_{2n+1} \to 1$), din criteriul de divergenţă rezultă că seria nu este convergentă, deci mulţimea de convergenţă este $C = (-1, 1)$. Rămâne să determinăm suma seriei. Utilizând formulele (3.3) şi (3.20) pentru $y = -x \in (-1, 1)$, obţinem

$$\begin{aligned}
S(x) &= \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{n+1}{n} x^n = -\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \left(1 + \frac{1}{n}\right) x^n \\
&= -\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n x^n - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n x^n}{n} = -\left(\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^n - 1\right) - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-x)^n}{n} \\
&= -\left(\frac{1}{1+x} - 1\right) + \ln(1+x) = \frac{x}{1+x} + \ln(1+x), \ x \in (-1, 1).
\end{aligned}$$

c) Fie $c_n = \dfrac{(-1)^n\, n}{3^n}$, $n \in \mathbb{N}$. Folosind Propoziţia 3.1.1, obţinem

$$R^2 = \lim_{n\to\infty} \frac{|c_n|}{|c_{n+1}|} = \lim_{n\to\infty} \frac{n}{3^n} \cdot \frac{3^{n+1}}{n+1} = \lim_{n\to\infty} \frac{3n}{n+1} = 3,$$

deci raza de convergenţă este $R = \sqrt{3}$. Din Teorema I a lui Abel deducem că seria $\sum\limits_{n\geq 0} c_n x^{2n+1}$ este convergentă pentru orice $x \in (-\sqrt{3}, \sqrt{3})$ şi nu este convergentă pentru $x \in (-\infty, -\sqrt{3}) \cup (\sqrt{3}, \infty)$. Dacă $x = \pm\sqrt{3}$, atunci seria devine

$$\begin{aligned}
\sum_{n\geq 0} \frac{(-1)^n\, n}{3^n} (\pm\sqrt{3})^{2n+1} &= \pm\sqrt{3} \sum_{n\geq 0} \frac{(-1)^n\, n}{3^n} (\pm\sqrt{3})^{2n} \\
&= \pm\sqrt{3} \sum_{n\geq 0} \frac{(-1)^n\, n}{3^n} 3^n \\
&= \pm\sqrt{3} \sum_{n\geq 0} (-1)^n\, n,
\end{aligned}$$

care este divergentă (se foloseşte criteriul de divergenţă, căci şirul $x_n = (-1)^n\, n$ nu are limită). Am obţinut că mulţimea de convergenţă a seriei de puteri este

$C = (-\sqrt{3}, \sqrt{3})$. Suma seriei este

$$S(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n n}{3^n} x^{2n+1} = x \sum_{n=0}^{\infty} n \left(-\frac{x^2}{3}\right)^n = x \frac{\left(-\frac{x^2}{3}\right)}{\left(1+\frac{x^2}{3}\right)^2} = -\frac{x^3}{3\left(1+\frac{x^2}{3}\right)^2},$$

pentru $x \in (-\sqrt{3}, \sqrt{3})$. Penultima egalitate de mai sus rezultă din relaţia (3.21) pentru $y = -\dfrac{x^2}{3} \in (-1, 0] \subset (-1, 1)$. De asemenea, am ţinut cont de faptul că $\sum\limits_{n=0}^{\infty} ny^n = \sum\limits_{n=1}^{\infty} ny^n$.

$\square$

Exerciţiul 3 (Seria binomială) Fie $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{N}$. Să se arate că seria

$$1 + \frac{\alpha}{1!} x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!} x^2 + \cdots + \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!} x^n + \cdots \tag{3.22}$$

este convergentă pentru orice $x \in (-1, 1)$ şi suma sa este

$$\boxed{(1+x)^\alpha = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!} x^n, \quad x \in (-1, 1). \qquad (3.23)}$$

Formula (3.23) este o generalizare a binomului lui Newton, caz în care α este un număr natural. Din acest motiv, seria (3.22) se numeşte *seria binomială.*

Soluţie. Raza de convergenţă a seriei este

$$\begin{aligned} R &= \lim_{n\to\infty} \frac{|\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)|}{n!} \cdot \frac{(n+1)!}{|\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)(\alpha-n)|} \\ &= \lim_{n\to\infty} \frac{n+1}{|\alpha-n|} = \lim_{n\to\infty} \frac{n+1}{n-\alpha} = 1. \end{aligned}$$

Din Teorema I a lui Abel rezultă că seria dată este convergentă pentru orice $x \in (-1, 1)$. Considerăm

$$S(x) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!} x^n,\ x \in (-1, 1).$$

Fie $x \in (-1, 1)$. Derivând termen cu termen suma seriei, se obţine

$$S'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{(n-1)!}\, x^{n-1}, \tag{3.24}$$

ceea ce este echivalent cu

$$\begin{aligned} S'(x) &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n)}{n!}\, x^{n} \\ &= \alpha + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)(\alpha-n)}{n!}\, x^{n}. \end{aligned} \tag{3.25}$$

Înmulţind cu x relaţia (3.24), rezultă

$$xS'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{(n-1)!}\, x^{n}. \tag{3.26}$$

Adunând relaţiile (3.25) şi (3.26), deducem

$$\begin{aligned} (1+x)S'(x) &= \alpha + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{(n-1)!} \left(\frac{\alpha-n}{n}+1\right) x^{n} \\ &= \alpha + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\alpha^2(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!}\, x^{n} = \alpha\, S(x), \end{aligned}$$

deci

$$(1+x)S'(x) - \alpha S(x) = 0.$$

Înmulţiind relaţia precedentă cu $(1+x)^{\alpha-1}$, se obţine

$$(1+x)^{\alpha} S'(x) - \alpha(1+x)^{\alpha-1} S(x) = 0,$$

ceea ce este echivalent cu

$$\frac{S'(x)(1+x)^{\alpha} - S(x)\alpha(1+x)^{\alpha-1}}{(1+x)^{2\alpha}} = 0 \iff \frac{d}{dx}\left[\frac{S(x)}{(1+x)^{\alpha}}\right] = 0.$$

De aici rezultă că $\frac{S(x)}{(1+x)^{\alpha}} = k,$ unde $k \in \mathbb{R}$. Cum $S(0) = 1$, se obţine $k = 1$, deci $S(x) = (1+x)^{\alpha},$ pentru orice $x \in (-1, 1)$, ceea ce trebuia să demonstrăm.

□

Plecând de la suma seriei binomiale şi dând valori particulare parametrului $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{N}$ se obţin sumele unor serii uzuale:

- Pentru $\alpha = -1$ deducem

$$\begin{aligned}\frac{1}{1+x} &= 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)(-2)\cdots(-n)}{n!}\, x^n = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n x^n \\ &= 1 - x + x^2 - x^3 + \cdots + (-1)^n x^n + \cdots,\ x \in (-1,1).\end{aligned}$$

- Substituind x cu $-x$ în relaţia de mai sus, se obţine

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + \cdots + x^n + \cdots,\ x \in (-1,1),$$

  iar substituind x cu x^2, respectiv x cu $-x^2$, se obţine

$$\frac{1}{1+x^2} = 1 - x^2 + x^4 - x^6 + \cdots + (-1)^n x^{2n} + \cdots,\ x \in (-1,1),$$

  respectiv

$$\frac{1}{1-x^2} = 1 + x^2 + x^4 + x^6 + \cdots + x^{2n} + \cdots,\ x \in (-1,1).$$

- Pentru $\alpha = \frac{1}{2}$ deducem

$$\begin{aligned}\sqrt{1+x} &= 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\frac{1}{2}\left(-\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{3}{2}\right)\cdots\left(-\frac{2n-3}{2}\right)}{n!}\, x^n \\ &= 1 + \frac{x}{2} + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}(2n-3)!!}{(2n)!!}\, x^n,\ x \in (-1,1).\end{aligned} \tag{3.27}$$

  Reamintim că

$$(2n)!! = 2 \cdot 4 \cdots (2n) = 2^n\, n!,\ \text{pentru } n \in \mathbb{N}^*,$$

  iar $(2n-3)!! = 1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2n-3)$, pentru $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$.

  Relaţia (3.27) este adevărată chiar pe intervalul închis $[-1,1]$. Într-adevăr, o să arătăm că seria

$$\sum_{n\geq 2} \frac{(-1)^{n-1}(2n-3)!!}{(2n)!!}\, x^n \tag{3.28}$$

este convergentă şi în punctele $x = \pm 1$, adică mulţimea de convergenţă a acestei serii este $C = [-1, 1]$. Dacă $x = 1$, atunci termenul general al seriei devine

$$x_n = (-1)^{n-1} \frac{(2n-3)!!}{(2n)!!}, \ n \geq 2.$$

Cum

$$u_n = \frac{(2n-3)!!}{(2n)!!} = \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} \cdots \frac{2n-3}{2n-2} \cdot \frac{1}{2n} \leq \frac{1}{2n} \to 0,$$

din criteriul lui Leibniz pentru serii numerice rezultă că seria $\sum_{n \geq 2} (-1)^{n-1} u_n$ este convergentă. Dacă presupunem că $x = -1$, atunci termenul general al seriei devine $x_n = \frac{(2n-3)!!}{(2n)!!}, \ n \geq 2$. Cum

$$\frac{x_{n+1}}{x_n} = \frac{2n-1}{2n+2} \to 1,$$

vom aplica criteriul Raabe-Duhamel. Calculăm

$$R_n = n \left(\frac{x_n}{x_{n+1}} - 1 \right) = n \left(\frac{2n+2}{2n-1} - 1 \right) = \frac{3n}{2n-1} \to \frac{3}{2} > 1,$$

deci seria $\sum_{n \geq 2} x_n$ este convergentă.

Am arătat astfel că mulţimea de convergenţă a seriei de puteri (3.28) este $C = [-1, 1]$. Din Teorema a II-a a lui Abel rezultă

$$\sqrt{1+x} = 1 + \frac{x}{2} + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}(2n-3)!!}{(2n)!!} x^n, \ x \in [-1, 1].$$

- Pentru $\alpha = -\frac{1}{2}$ se obţine

$$\frac{1}{\sqrt{1+x}} = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\left(-\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{3}{2}\right)\left(-\frac{5}{2}\right) \cdots \left(-\frac{2n-1}{2}\right)}{n!} x^n$$
$$= 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n (2n-1)!!}{(2n)!!} x^n, \ x \in (-1, 1).$$

La fel ca mai sus, se poate arăta că relaţia precedentă este adevărată pentru $x \in (-1, 1]$, adică are loc formula:

$$\frac{1}{\sqrt{1+x}} = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n (2n-1)!!}{(2n)!!} x^n, \ \text{pentru } x \in (-1, 1].$$

3.1.3 Probleme propuse

Exerciţiul 1 Să se determine mulţimea de convergenţă pentru următoarele serii de puteri:

$$\text{a) } \sum_{n\geq 0} \frac{x^n}{n!} \quad \text{b) } \sum_{n\geq 0} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} \quad \text{c) } \sum_{n\geq 0} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}.$$

Exerciţiul 2 Să se determine mulţimea de convergenţă şi suma următoarelor serii de puteri:

$$\text{a) } \sum_{n\geq 0} \frac{3^n}{n+1}\, x^n \qquad \text{b) } \sum_{n\geq 1} \frac{1}{n(n+1)}\, x^n \qquad \text{c) } \sum_{n\geq 0} \frac{2^n n}{n+1}\, x^n$$

$$\text{d) } \sum_{n\geq 0} \frac{n+1}{2^n}\, (x+1)^n \quad \text{e) } \sum_{n\geq 1} \frac{(-1)^n}{n\, 4^n}\, x^{2n} \qquad \text{f) } \sum_{n\geq 1} (-1)^{n-1} n\, x^{2n+1}$$

$$\text{g) } \sum_{n\geq 1} (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n} \qquad \text{h) } \sum_{n\geq 1} n^2\, x^n \qquad \text{i) } \sum_{n\geq 0} \frac{(-1)^n}{2n+1}\, x^{2n+1}.$$

Exerciţiul 3 Să se determine mulţimea de convergenţă C a seriei de puteri

$$\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^2}\, x^{n-1}$$

şi apoi să se arate că suma sa,

$$S(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}\, x^{n-1},\ x \in C,$$

verifică relaţia

$$x^2 S'(x) + x S(x) = -\ln(1-x),\ \text{pentru orice } x \in (-1,1).$$

Exerciţiul 4 Folosind seria binomială, să se arate că

$$1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}\, x^{2n} = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}},\ \text{pentru orice } x \in (-1,1), \tag{3.29}$$

unde $(2n-1)!! = 1 \cdot 3 \cdots (2n-1)$, iar $(2n)!! = 2 \cdot 4 \cdots (2n)$, $n \in \mathbb{N}^*$.

Exerciţiul 5 Folosind, eventual, relaţia (3.29), să se arate că

$$1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}\, \frac{x^{2n+1}}{2n+1} = \arcsin x,\ \text{pentru orice } x \in [-1,1]. \tag{3.30}$$

3.2 Serii Taylor

3.2.1 Breviar teoretic

Fie $I \subset \mathbb{R}$ un interval (nedegenerat) şi $x_0 \in I$. Presupunem că $f : I \to \mathbb{R}$ este o funcţie derivabilă de n ori în x_0. Aceasta înseamnă că primele $n-1$ derivate există nu doar în x_0, ci pe o întreagă vecinătate $(x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon) \subset I$ a lui x_0; în cazul în care x_0 este una din extremităţile intervalului I, adică $I = (a, x_0]$, $a \in \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$, sau $I = [x_0, b)$, $b \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$, vom considera vecinătăţi unilaterale de forma $(x_0 - \varepsilon, x_0] \subset I$, respectiv $[x_0, x_0 + \varepsilon) \subset I$.

Funcţia polinomială

$$T_n f(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n,$$

definită pentru orice $x \in \mathbb{R}$, se numeşte *polinomul Taylor de ordinul* n asociat funcţiei f în punctul x_0, iar funcţia

$$R_n f(x) = f(x) - T_n f(x), \ x \in I,$$

definită pe I, ca şi f, se numeşte *restul Taylor de ordinul* n asociat funcţiei f în punctul x_0.

Orice egalitate de forma

$$f(x) = T_n f(x) + R_n f(x), \ x \in I,$$

unde pentru $R_n f$ este dată o formulă de calcul, se numeşte *formulă de tip Taylor*.

Se poate demonstra că

$$\lim_{x \to x_0} R_n f(x) = 0.$$

De aici deducem că pentru x suficient de aproape de x_0, valoarea funcţiei f în punctul x poate fi aproximată prin $T_n f(x)$. Pe de altă parte, cu cât n este mai mare, cu atât aproximarea este mai bună.

De asemenea, se poate demonstra că restul Taylor de ordinul n asociat funcţiei f în punctul x_0 verifică următoarea relaţie, utilă în calculul unor limite:

$$\lim_{x \to x_0} \frac{R_n f(x)}{(x - x_0)^n} = 0. \tag{3.31}$$

Teorema 3.2.1 (Teorema Taylor-Lagrange) Fie $f : I \to \mathbb{R}$ şi $x_0 \in I$. Dacă f este derivabilă de $n+1$ ori pe intervalul I, atunci pentru orice $x \in I$ cu $x \neq x_0$ există un punct $c = c(x_0, x, n)$ cuprins între x_0 şi x (c depinde atât de x_0 şi x, cât şi de n) astfel încât restul Taylor de ordinul n asociat funcţiei f în punctul x_0 se scrie sub forma

$$R_n f(x) = \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}\,(x - x_0)^{n+1}, \tag{3.32}$$

numit *restul lui Lagrange*. Punctul $c = c(x_0, x, n)$ considerat mai sus poate fi luat de forma

$$c = (1 - t_n)x_0 + t_n x, \text{ unde } t_n \in (0, 1).$$

În particular, dacă $0 \in I$ şi $x_0 = 0$, formula lui Taylor cu restul lui Lagrange se numeşte *formula lui Mac-Laurin*:

$$f(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}\,x + \frac{f''(0)}{2!}\,x^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}\,x^n + \frac{f^{(n+1)}(t_n x)}{(n+1)!}\,x^{n+1},$$

unde $t_n \in (0, 1)$ depinde de n.

Fie $f : I \to \mathbb{R}$ o funcţie indefinit derivabilă pe I şi $x_0 \in I$. **Seria Taylor** centrată în x_0 asociată funcţiei f este o serie de puteri, definită astfel:

$$\sum_{n\geq 0} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n =$$

$$f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n + \cdots$$

În cazul particular în care $x_0 = 0 \in I$, seria de mai sus devine:

$$\sum_{n\geq 0} \frac{f^{(n)}(0)}{n!}\,x^n = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}\,x + \frac{f''(0)}{2!}\,x^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}\,x^n + \cdots$$

şi se numeşte **seria Mac-Laurin** asociată funcţiei f.

În continuare ne punem următoarea întrebare:

Care este legătura dintre funcţia f şi suma seriei Taylor centrată în x_0 asociată acestei funcţii?

Orice serie Taylor este, în caz particular, o serie de puteri, pentru care putem să determinăm mulţimea de convergenţă, notată în continuare cu C. Remarcăm faptul că mulţimea C nu este neapărat o submulţime a intervalului I pe care este definită funcţia f, seria Taylor fiind definită pentru orice $x \in \mathbb{R}$. Astfel, suma seriei Taylor centrată în x_0 asociată funcţiei f este

$$S(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n, \quad x \in C.$$

În general, suma seriei Taylor centrată într-un punct $x_0 \in I$ asociată funcţiei f nu coincide cu funcţia f pe mulţimea $C \cap I$. Chiar dacă seria Taylor este convergentă, aceasta poate să conveargă la o funcţie diferită de f.

Mulţimea punctelor $x \in C \cap I$ pentru care suma seriei Taylor centrată în x_0 asociată funcţiei f coincide cu funcţia f, adică

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n, \tag{3.33}$$

se numeşte *domeniul de dezvoltabilitate* al funcţiei f în serie Taylor (în jurul punctului x_0), mulţime pe care o vom nota în continuare cu D. Vom spune că f este dezvoltabilă în serie Taylor (în jurul punctului x_0) pe D. În cazul particular în care $x_0 = 0 \in I$, se obţine conceptul de dezvoltabilitate al unei funcţii în serie Mac-Laurin.

Remarcăm faptul că domeniul de dezvoltabilitate al unei funcţii f în serie Taylor este o submulţime atât a intervalului de definiţie al funcţiei f, cât şi a mulţimii de convergenţă a seriei Taylor asociate funcţiei f.

În continuare prezentăm criteriul general de dezvoltabilitate al unei funcţii în serie Taylor:

Teorema 3.2.2 *Funcţia $f : I \to \mathbb{R}$ este dezvoltabilă în serie Taylor în jurul punctului $x_0 \in I$ pe o mulţime $D \subset C \cap I$ dacă şi numai dacă şirul de funcţii $(R_n f)$, unde $R_n f$ este restul Taylor de ordinul n asociat funcţiei f în punctul x_0, converge punctual la 0 pe D, adică*

$$\lim_{n\to\infty} R_n f(x) = 0, \text{ pentru orice } x \in D.$$

Estimând restul Taylor de ordinul n cu formula (3.32), se obţine următoarea condiţie suficientă de dezvoltabilitate în serie Taylor:

Teorema 3.2.3 *Dacă există $M > 0$ astfel încât*

$$|f^{(n)}(x)| \leq M, \ \textit{pentru orice } n \in \mathbb{N} \textit{ şi orice } x \in I, \tag{3.34}$$

atunci f este dezvoltabilă în serie Taylor în jurul oricărui punct $x_0 \in I$ pe I, adică pentru orice $x_0 \in I$ are loc relaţia

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n, \quad x \in I.$$

Dezvoltarea în serie Taylor a unor funcţii elementare

În acest paragraf vom dezvolta în serie Mac-Laurin principalele funcţii elementare.

1) **Funcţia exponenţială**

Funcţia $f : \mathbb{R} \to (0, \infty)$, $f(x) = e^x$, este indefinit derivabilă pe $\mathbb{R}$ şi

$$f^{(n)}(x) = e^x, \text{ pentru orice } x \in \mathbb{R} \text{ şi orice } n \in \mathbb{N}.$$

Restul Taylor de ordinul n asociat funcţiei f în punctul $x_0 = 0$ dat cu formula lui Lagrange, adică restul lui Lagrange, este

$$R_n f(x) = \frac{e^{t_n x}}{(n+1)!}\, x^{n+1}, \text{ unde } t_n \in (0, 1).$$

De aici deducem

$$|R_n f(x)| = \frac{e^{t_n x}}{(n+1)!}\, |x|^{n+1} \leq \frac{e^x}{(n+1)!}\, |x|^{n+1}.$$

Aplicând criteriul raportului pentru şiruri de numere reale, rezultă că

$$\lim_{n\to\infty} \frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!} = 0, \text{ pentru orice } x \in \mathbb{R},$$

deci $\lim\limits_{n\to\infty} R_n f(x) = 0$, pentru orice $x \in \mathbb{R}$. Astfel, din criteriul general de dezvoltabilitate al unei funcţii în serie Taylor (Teorema 3.2.2) se obţine că funcţia exponenţială este dezvoltabilă în serie Mac-Laurin pe $\mathbb{R}$, adică

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!}\, x^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + \cdots, \forall\, x \in \mathbb{R}.$$

2) **Funcţia sinus**

Funcţia sinus,

$$f:\mathbb{R}\to[-1,1],\ f(x)=\sin x,$$

este indefinit derivabilă pe $\mathbb{R}$ şi

$$\begin{aligned}
f'(x) &= \cos x = \sin\left(x+\frac{\pi}{2}\right),\\
f''(x) &= -\sin x = \sin(x+\pi) = \sin\left(x+\frac{2\pi}{2}\right),\\
f'''(x) &= -\cos x = \sin\left(x+\frac{3\pi}{2}\right),\\
f^{(4)}(x) &= \sin x = \sin(x+2\pi) = \sin\left(x+\frac{4\pi}{2}\right).
\end{aligned}$$

Inductiv, se arată că

$$\sin^{(n)}(x)=\sin\left(x+\frac{n\pi}{2}\right),\ \text{pentru orice } x\in\mathbb{R} \text{ şi orice } n\in\mathbb{N}.$$

În particular, se obţine

$$\sin^{(n)}(0)=\sin\frac{n\pi}{2}=\begin{cases}0, & \text{dacă } n=2k,\\ \sin\left(k\pi+\frac{\pi}{2}\right)=\cos(k\pi)=(-1)^k, & \text{dacă } n=2k+1,\end{cases}$$

pentru $k\in\mathbb{N}$, adică

$$f(0)=0,\ f'(0)=1,\ f''(0)=0,\ f'''(0)=-1,\dots$$

Cum

$$|f^{(n)}(x)|=\left|\sin\left(x+\frac{n\pi}{2}\right)\right|\le 1,\ \text{pentru orice } n\in\mathbb{N} \text{ şi orice } x\in\mathbb{R},$$

din Teorema 3.2.3 rezultă că f este dezvoltabilă în serie Mac-Laurin pe $\mathbb{R}$, adică

$$\begin{aligned}
\sin x &= \sum_{n=0}^{\infty}\frac{\sin\frac{n\pi}{2}}{n!}x^n=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{(2k+1)!}x^{2k+1}\\
&= x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-\dots+(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}+\cdots,\forall x\in\mathbb{R}.
\end{aligned}$$

3) **Funcţia cosinus**

La fel ca în cazul funcţiei sinus, se poate demonstra că funcţia cosinus, $f : \mathbb{R} \to [-1, 1]$, $f(x) = \cos x$, este indefinit derivabilă pe $\mathbb{R}$ şi

$$\cos^{(n)}(x) = \cos\left(x + \frac{n\pi}{2}\right), \text{ pentru orice } x \in \mathbb{R} \text{ şi orice } n \in \mathbb{N}.$$

În particular,

$$\cos^{(n)}(0) = \cos\frac{n\pi}{2} = \begin{cases} 0, & \text{dacă } n = 2k+1, \\ \cos(k\pi) = (-1)^k, & \text{dacă } n = 2k, \end{cases}$$

pentru $k \in \mathbb{N}$, adică

$$f(0) = 1,\ f'(0) = 0,\ f''(0) = -1,\ f'''(0) = 0, \ldots$$

Cum

$$|f^{(n)}(x)| = \left|\cos\left(x + \frac{n\pi}{2}\right)\right| \le 1, \text{ pentru orice } n \in \mathbb{N} \text{ şi orice } x \in \mathbb{R},$$

din Teorema 3.2.3 rezultă că f este dezvoltabilă în serie Mac-Laurin pe $\mathbb{R}$, deci, are loc relaţia

$$\begin{aligned} \cos x &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\cos\frac{n\pi}{2}}{n!} x^n = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k)!} x^{2k} \\ &= 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + \cdots, \forall x \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

4) **Funcţia logaritmică**

Considerăm funcţia $f : (-1, \infty) \to \mathbb{R}$, $f(x) = \ln(1 + x)$.

Funcţia f este indefinit derivabilă pe $(-1, \infty)$ şi

$$f'(x) = \frac{1}{1+x},\ f''(x) = -\frac{1}{(1+x)^2},\ f'''(x) = (-1)^2 \frac{1 \cdot 2}{(1+x)^3}, \ldots$$

Inductiv, se arată că

$$f^{(n)}(x) = (-1)^{n-1} \frac{(n-1)!}{(1+x)^n}, \text{ pentru } x > -1 \text{ şi } n \in \mathbb{N}^*,$$

care pentru $x = 0$ devine

$$f^{(n)}(0) = (-1)^{n-1}(n-1)!,\ n \in \mathbb{N}^*.$$

Seria Mac-Laurin asociată funcţiei f este

$$\sum_{n\geq 0} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} = f(0) + \sum_{n\geq 1} \frac{f^{(n)}(0)}{n!}\, x^n = \sum_{n\geq 1} (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n},$$

a cărei mulţime de convergenţă este $C = (-1, 1]$. Deşi funcţia f este definită pe intervalul $(-1, \infty)$, are sens să studiem dezvoltabilitatea acestei funcţii în serie Mac-Laurin doar pe intervalul $(-1, 1]$.

Restul Lagrange este

$$R_n f(x) = \frac{f^{(n+1)}(t_n x)}{(n+1)!}\, x^{n+1} = (-1)^n \frac{1}{n+1} \left(\frac{x}{1+t_n x}\right)^{n+1},\ t_n \in (0, 1).$$

Dacă $x \in [0, 1]$, atunci

$$|R_n f(x)| = \frac{1}{n+1} \left(\frac{x}{1+t_n x}\right)^{n+1} \leq \frac{1}{n+1} \to 0. \tag{3.35}$$

Într-adevăr, cum $t_n \in (0, 1)$, rezultă $1 + t_n x \geq 1$, deci $\frac{x}{1+t_n x} \leq x \leq 1$. Relaţia (3.35) implică

$$\lim_{n\to\infty} R_n f(x) = 0,\ \text{pentru } x \in [0, 1],$$

deci f este dezvoltabilă în serie Mac-Laurin pe intervalul $[0, 1]$.

Pe intervalul $(-1, 0)$ restul lui Lagrange nu este concludent. De aceea, fie considerăm o altă formă a restului Taylor, de exemplu, restul Taylor sub forma lui Cauchy, definit prin

$$R_n f(x) = \frac{f^{(n+1)}(t_n x)}{n!} (1 - t_n)^n\, x^{n+1},\ t_n \in (0, 1),$$

fie studiem printr-o altă metodă dezvoltabilitatea funcţiei f în serie Taylor pe intervalul $(-1, 0)$. În acest sens, vom utiliza teoria aferentă seriilor de puteri. Astfel, are loc

$$f'(t) = \frac{1}{1+t} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n t^n,\ \text{pentru } t \in (-1, 1). \tag{3.36}$$

Fie $x \in (-1, 0)$. Integrând relaţia (3.36) pe intervalul $[x, 0]$, se obţine

$$\int_x^0 f'(t)dt = \int_x^0 \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n t^n\, dt = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \int_x^0 t^n dt = -\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{x^{n+1}}{n+1}.$$

Pe de altă parte, cum

$$\int_x^0 f'(t)\, dt = f(0) - f(x) = -f(x),$$

deducem că

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{x^{n+1}}{n+1} = \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{x^n}{n}, \text{ pentru } x \in (-1, 0),$$

deci f este dezvoltabilă în serie Mac-Laurin pe intervalul $(-1, 0)$. Din cele de mai sus se obţine

$$\begin{aligned}\ln(1+x) &= \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{x^n}{n} \\ &= x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \cdots + (-1)^{n-1}\frac{x^n}{n} + \cdots,\ \forall\, x \in (-1, 1].\end{aligned}$$

3.2.2 Probleme rezolvate

Exerciţiul 1 Utilizând formula lui Taylor, să se dezvolte funcţia polinomială $P(x) = 2x^3 + x^2 - 2x + e^2$ după puterile lui $x - 1$.

Soluţie. Calculăm mai întâi derivatele funcţiei P:

$$P'(x) = 6x^2 + 2x - 2,\ P''(x) = 12x + 2,\ P'''(x) = 12,\ P^{(n)}(x) = 0, \forall\, n \geq 4,$$

de unde rezultă că

$$P(1) = 1 + e^2,\ P'(1) = 6,\ P''(1) = 14,\ P'''(1) = 12.$$

Înlocuind aceste derivate în formula lui Taylor cu restul lui Lagrange,

$$P(x) = P(1) + \frac{P'(1)}{1!}(x-1) + \frac{P''(1)}{2!}(x-1)^2 + \frac{P'''(1)}{3!}(x-1)^3 + \frac{P^{(4)}(c)}{4!}(x-1)^4,$$

unde c se află între 1 şi x, se obţine

$$P(x) = 1 + e^2 + 6(x-1) + 7(x-1)^2 + 2(x-1)^3.$$

□

Exerciţiul 2 Folosind formula lui Taylor, să se calculeze limita

$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)-x}{x^2}.$$

Soluţie. Fie $f(x)=\ln(1+x)-x$, $x>-1$. Calculăm mai întâi derivatele funcţiei f până la ordinul doi:

$$f'(x)=\frac{1}{1+x}-1,\ f''(x)=-\frac{1}{(1+x)^2}.$$

Cum $f(0)=0$, $f'(0)=0$ şi $f''(0)=-1$, din formula lui Mac-Laurin pentru $n=2$, rezultă

$$f(x)=f(0)+\frac{f'(0)}{1!}x+\frac{f''(0)}{2!}x^2+R_2f(x)=-\frac{1}{2}x^2+R_2f(x),\ x>-1.$$

Înlocuind această relaţie în limita cerută şi utilizând formula (3.31), se obţine

$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)-x}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{x^2}=-\frac{1}{2}+\lim_{x\to 0}\frac{R_2f(x)}{x^2}=-\frac{1}{2}.$$

□

Exerciţiul 3 Fie $f:(-\infty,5/2)\to\mathbb{R}$, $f(x)=\dfrac{1}{2x-5}$. Să se dezvolte funcţia f în serie Taylor în jurul punctului $x_0=1$ şi apoi să se determine domeniul de dezvoltabilitate.

Soluţie. Are loc

$$f(x)=\frac{1}{2x-5}=\frac{1}{2(x-1)-3}=-\frac{1}{3-2(x-1)}=-\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{1-\frac{2(x-1)}{3}}$$
$$=-\frac{1}{3}\sum_{n=0}^{\infty}\left[\frac{2(x-1)}{3}\right]^n=-\frac{1}{3}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{2}{3}\right)^n(x-1)^n.$$

Dezvoltarea de mai sus are loc dacă

$$\frac{2(x-1)}{3}\in(-1,1)\iff x\in(-1/2,5/2).$$

Rămâne să studiem dacă seria de puteri $\sum\limits_{n\geq 0}\left(\frac{2}{3}\right)^n(x-1)^n$ este convergentă pentru $x=-1/2$, caz în care aceasta devine $\sum\limits_{n\geq 0}(-1)^n$, serie care nu este convergentă.

Rezultă astfel că domeniul de dezvoltabilitate al funcţiei f în serie Taylor în jurul punctului $x_0 = 1$ este $D = (-1/2, 5/2)$.

$\square$

Exerciţiul 4 Fie $f : (-2, 2) \to \mathbb{R}$, $f(x) = \dfrac{1}{4 - x^2}$. Să se dezvolte funcţia f în serie Taylor în jurul punctului $x_0 = -1$, respectiv în serie Mac-Laurin şi să se determine domeniile de dezvoltabilitate.

Soluţie. Are loc

$$\begin{aligned}
f(x) &= \frac{1}{(2-x)(2+x)} = \frac{1}{4}\left(\frac{1}{2-x} + \frac{1}{2+x}\right) = \frac{1}{4}\left[\frac{1}{3-(x+1)} + \frac{1}{1+(x+1)}\right] \\
&= \frac{1}{4}\left[\frac{1}{3}\frac{1}{1-\frac{x+1}{3}} + \frac{1}{1+(x+1)}\right] \\
&= \frac{1}{4}\left[\frac{1}{3}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{x+1}{3}\right)^n + \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n(x+1)^n\right] \\
&= \frac{1}{4}\sum_{n=0}^{\infty}\left[\frac{1}{3^{n+1}} + (-1)^n\right](x+1)^n.
\end{aligned}$$

Dezvoltarea de mai sus are loc dacă $\frac{x+1}{3} \in (-1, 1)$ şi $x + 1 \in (-1, 1)$, de unde rezultă că $x \in (-4, 2) \cap (-2, 0) = (-2, 0)$. Cum seria numerică $\sum\limits_{n\geq 0}\left[\frac{1}{3^{n+1}} + (-1)^n\right]$ nu este convergentă, şirul

$$x_n = \frac{1}{3^{n+1}} + (-1)^n$$

nu are limită, rezultă că domeniul de dezvoltabilitate al funcţiei f în serie Taylor în jurul punctului $x_0 = -1$ este $D = (-2, 0)$.

Dezvoltarea în serie Mac-Laurin presupune dezvoltarea funcţiei f în jurul punctului $x_0 = 0$. Astfel, avem

$$f(x) = \frac{1}{4 - x^2} = \frac{1}{4}\frac{1}{1 - \left(\frac{x}{2}\right)^2} = \frac{1}{4}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{x}{2}\right)^{2n} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{2n}}{4^{n+1}},$$

dezvoltare care are loc dacă $\frac{x}{2} \in (-1, 1)$, adică $x \in (-2, 2)$. De aici se obţine că domeniul de dezvoltabilitate al funcţiei f în serie Mac-Laurin este $D = (-2, 2)$.

$\square$

3.2.3 Probleme propuse

Exerciţiul 1 Să se dezvolte funcţia polinomială $P(x) = x^3 + x^2 + x + 3$ după puterile lui $x - 2$, respectiv $x + 1$.

Exerciţiul 2 Folosind formula lui Taylor, să se calculeze următoarele limite:

a) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\ln(1+2x) - \sin(2x) + 2x^2}{x^3}$

b) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e^{-x^2} - \cos(\sqrt{2}x)}{x^4}$

c) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{12\ln x + 3x^4 - 16x^3 + 36x^2 - 48x + 25}{(x-1)^5}$

d) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\mathrm{tg}x - \sin x}{x^3}$

e) $\lim\limits_{x\to\infty} \left[x - x^2 \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right)\right]$.

Exerciţiul 3 Să se dezvolte următoarele funcţii în serie Taylor în jurul punctului $x_0 = 1$ şi apoi să se determine domeniile de dezvoltabilitate:

a) $f : \left(-\frac{1}{2}, \infty\right) \to \mathbb{R},\ f(x) = \frac{1}{2x+1}$;

b) $f : \left(\frac{1}{3}, \infty\right) \to \mathbb{R},\ f(x) = \frac{1}{9x^2-1}$;

c) $f : (-2, 3) \to \mathbb{R},\ f(x) = \frac{2x-1}{x^2-x-6}$;

d) $f : (-1, \infty) \to \mathbb{R},\ f(x) = \ln(1 + x)$.

Exerciţiul 4 Să se dezvolte următoarele funcţii în serie Mac-Laurin şi să se determine domeniile de dezvoltabilitate:

a) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f(x) = xe^{-2x}$;

b) $f : (-1, \infty) \to \mathbb{R},\ f(x) = \ln \frac{1+x}{1+x^2}$;

c) $f : \mathbb{R} \to \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right),\ f(x) = \mathrm{arctg}\, x$;

d) $f : (-1, 1) \to (0, \infty),\ f(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$;

e) $f : [-1, 1] \to \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right],\ f(x) = \arcsin x$.

Indicaţie: a) Se foloseşte dezvoltarea în serie Mac-Laurin a funcţiei exponenţiale:

$$e^y = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{y^n}{n!}, \ y \in \mathbb{R};$$

b) Se observă că $f(x) = \ln(1+x) - \ln(1+x^2)$ şi apoi se foloseşte dezvoltarea în serie Mac-Laurin a funcţiei logaritmice:

$$\ln(1+y) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{y^n}{n}, \ y \in (-1, 1];$$

c) Din relaţia

$$f'(x) = \frac{1}{1+x^2} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^{2n}, \ x \in (-1, 1),$$

se determină seria Mac-Laurin asociată funcţiei f;
d) Se utilizează suma seriei binomiale; e) Se ţine cont de faptul că

$$f'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}, \text{ pentru } x \in (-1, 1),$$

apoi se foloseşte seria Mac-Laurin obţinută la subpunctul precedent.

Exerciţiul 5 Se consideră funcţiile *sinus hiperbolic*, respectiv *cosinus hiperbolic*, $sh, ch : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, definite prin

$$sh(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2}, \text{ respectiv } ch(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2}.$$

Folosind, eventual, dezvoltarea în serie Mac-Laurin a funcţiei exponenţiale, să se arate că

$$sh(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} = \frac{x}{1!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots + \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + \cdots, \ \forall x \in \mathbb{R},$$

respectiv

$$ch(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n}}{(2n)!} = 1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \cdots + \frac{x^{2n}}{(2n)!} + \cdots, \ \forall x \in \mathbb{R}.$$