Laborator nr 2

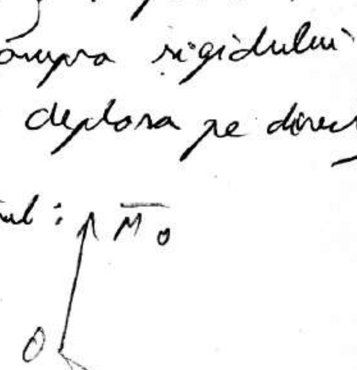
Forța - mărime vectorială, $[F]_{SI} = N$ (Newton)

$$\left.\begin{aligned} \bar{F} &= \bar{F}_x + \bar{F}_y + \bar{F}_z \\ &= F_x \cdot \bar{i} + F_y \bar{j} + F_z \cdot \bar{k} \end{aligned}\right\} \text{Expr analitică}$$

Modulul: $F = \sqrt{F_x^2 + F_y^2 + F_z^2}$

! Forța e un vector alunecător, forța F poate fi deplasată pe propriul suport fără ca efectul ei asupra rigidului să se modifice (pct de aplicație se poate deplasa pe direcția forței)

Pt $\bar{F}$, mom în rap cu pct O e vectorul: $\bar{M}_O$



$\bar{M}_O = \bar{r} \times \bar{F}$, având:

- pct de aplicație în O
- dir perpendiculară pe planul format de forță și pct O
- sensul dat de regula burghiului sau a mâinii drepte
- modulul: $M_O = r \cdot F \cdot \sin(\bar{r}, \bar{F}) = d \cdot F$ unde d e brațul forței

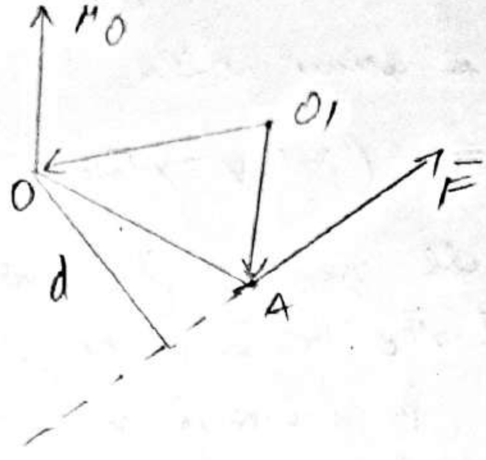
Dacă se cunoaște forța $\bar{F} = F_x \bar{i} + F_y \bar{j} + F_z \bar{k}$ cu pct de aplicație în $A(x, y, z)$ atunci momentul forței în rap cu pct O se poate scrie:

$$\bar{M}_O = \bar{r} \times \bar{F} = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ x & y & z \\ F_x & F_y & F_z \end{vmatrix} = (yF_z - zF_y)\bar{i} + (zF_x + xF_z)\bar{j} + (xF_y - yF_x)\bar{k}$$

$$= M_{Ox} \cdot \bar{i} + M_{Oy} \bar{j} + M_{Oz} \bar{k}$$

Modulul e: $M_O = \sqrt{M_{Ox}^2 + M_{Oy}^2 + M_{Oz}^2}$

Altfel: Mom forței față de un alt pct O_1 e diferit
$\bar{M}_{O_1} = \overline{O_1A} \times F = (\bar{r} + \overline{O_1O}) \times \bar{F} = \bar{r} \times \bar{F} + \overline{O_1O} \times \bar{F} = \bar{M}_O + \overline{O_1O} \times \bar{F}$
$= \bar{M}_O - \overline{OO_1} \times \bar{F}$



A reduce un sis de forțe într-un pct presupune a găsi un sistem echivalent de forțe care să producă același efect ca și sistemul de forțe dat

Forța rezultantă: $\bar{R} = \sum_{i=1}^{n} \bar{F}_i$

și cuplul rezultat prin mom: $\bar{M}_O = \sum_{i=1}^{n} \bar{M}_i = \sum_{i=1}^{n} \bar{r}_i \times F_i$

Aceste sis echivalente s.n. torsorul de reducere în pct O
și se not $\tau_O(\bar{R}, \bar{M}_O)$

! La schimbarea pct de red forța rez $\bar{R}$ nu se schimbă dar momentul se schimbă – teorema momentelor

$\bar{M}_{O_1} = \bar{M}_O - \overline{OO_1} \times \bar{R}$ unde O_1 e noul pct de reducere

Mom. minimal sau redus → versorul rezultantei / direcției

$M_2 = \dfrac{\bar{R} \cdot \bar{M}_O}{R} = \dfrac{\bar{R}}{R} \cdot \bar{M}_O$

repr proiecția momentului $\bar{M}_O$ pe rezultanta $\bar{R}$

Tinând cont că mom minimal M_2 e coliniar cu rezultanta $\bar{R}$, se poate scrie vectorial $\bar{M}_2 = \dfrac{\bar{R} \cdot \bar{M}_O}{R^2} \bar{R}$ și se obține torsorul minimal : $\tau_O(\bar{R}, \bar{M}_R)$

Axa centrală

Ec axei centrale : $\frac{M_{Ox} - (yR_z - zR_y)}{R_x} = \frac{M_{Oy} - (zR_x - xR_z)}{R_y} = \frac{M_{Oz} - (xR_y - yR_x)}{R_z}$

În cazul unui sistem de forțe coplanare, ec axei centrale este : $M_{Oz} - (xR_y - yR_x) = 0$

Cazurile de reducere posibile

Caz 1 : $\bar{R} \cdot \bar{M}_O \neq 0 \Rightarrow \bar{R} \neq 0, \bar{M}_O \neq 0$ - se deduce mom minimal $M_R \neq 0$. În consecință sistemul de forțe se reduce la un torsor minimal situat pe axa centrală care este bine det.

Caz 2 : $\bar{R} \cdot \bar{M}_O = 0$ dar $\bar{R} \neq 0$ se deduce momentul minimal $M_R = 0$, și în consecință, torsorul minimal e format numai din rezultanta - Sistem de forțe se va reduce la rezultanta unică situată pe axa centrală. Acest caz apare de:

· $\bar{M}_O = 0$ - deci pct de red. O se află pe axa centrală

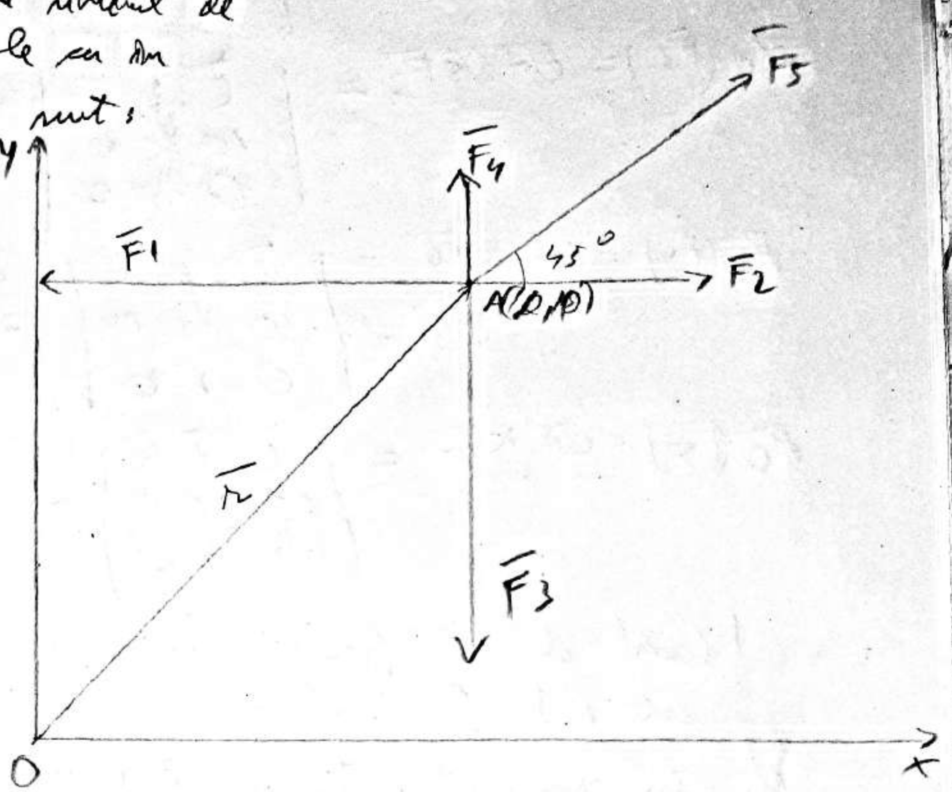
· $\bar{R} \perp \bar{M}_O$ - pct de red O nu se află pe axa centrală dar mom din punctul de reducere e egal cu momentul rezultantei pe axa centrală.

Caz 3 : $\bar{R} = 0$ și $\bar{M}_O \neq 0$ ceea ce implică și $\bar{R} \cdot \bar{M}_O = 0$ - Sis de forțe se reduce la un cuplu $\bar{M} = \bar{M}_O$

Caz 4 : $\bar{R} = 0$ și $\bar{M}_O = 0$ - Sistemul de forțe e în echilibru

Exemplul 1:

În pct $A(x, y)$ acționează un număr de 5 forțe având direcțiile ca în figură, iar modulele lor sunt:



$F_1 = 6$ [N]

$F_2 = 3$ [N]

$F_3 = 5$ [N]

$F_4 = 2$ [N]

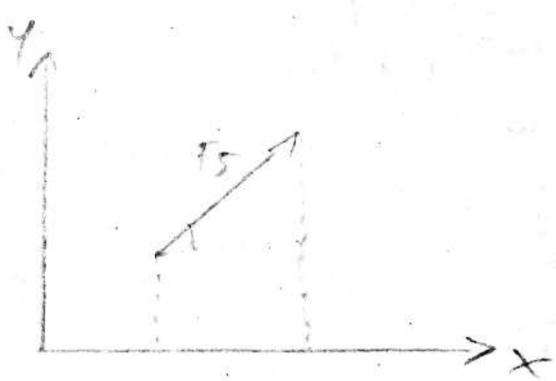
$F_5 = 3\sqrt{2}$ [N] (4,25)

Să se găsească el. torsorului de reducere în rap cu originea sistemului de coordonate:

Se impune:

- să se exprime analitic fiecare vector forță $\overline{F_i}$
- să se determine elementele torsorului de reducere
  - rezultanta: $\overline{R} = \sum_{i=1}^{n} \overline{F_i}$
  - momentul rezultant:

$$\overline{M_O} = \sum_{i=1}^{n} \overline{r_i} \times \overline{F_i}$$



$$\overline{F_1} = F_1(-\overline{i}) = -6\overline{i}$$

$$\overline{F_2} = F_2(\overline{i}) = 3\overline{i}$$

$$\overline{F_3} = F_3(-\overline{j}) = -5\overline{j}$$

$$\overline{F_4} = F_4(\overline{j}) = 2\overline{j}$$

$$\overline{F_5} = F_5 \cos 45\, \overline{i} + F_5 \sin 45\, \overline{j}$$

$$= 3\sqrt{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2}\, \overline{i} + 3\sqrt{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2}\, \overline{j} = 3\overline{i} + 3\overline{j}$$

- Rezultanta: $\overline{R} = \sum_{i=1} \overline{F_i} = \overline{F_1} + \overline{F_2} + \overline{F_3} + \overline{F_4} + \overline{F_5} = 0$

$$\overline{M_O}(\overline{F_1}) = \overline{OA} \times \overline{F_1}$$

$$= \begin{vmatrix} \overline{i} & \overline{j} & \overline{k} \\ 10 & 10 & 0 \\ -6 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 0 \cdot \overline{i} + 0 - 0 - 60\overline{k} - 0 - 0 = -60\overline{k}$$

$$\bar{M}_O(\bar{F}_2) = \bar{OA} \times \bar{F}_2 = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ 10 & 10 & 0 \\ 3 & 0 & 0 \end{vmatrix} = -30\bar{k}$$

$$\bar{M}_O(\bar{F}_3) = \bar{OA} \times \bar{F}_3 = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ 10 & 10 & 0 \\ 0 & -5 & 0 \end{vmatrix} = -50\bar{k}$$

$$\bar{M}_O(\bar{F}_4) = \bar{OA} \times \bar{F}_4 = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ 10 & 10 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \end{vmatrix} = 20\bar{k}$$

$$\bar{M}_O(\bar{F}_5) = \bar{OA} \times \bar{F}_5 = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ 10 & 10 & 0 \\ 3 & 3 & 0 \end{vmatrix} = 30\bar{k} - 30\bar{k} = 0$$

! Când direcția forței trece prin punctul de reducere momentul este 0!

Momentul rezultat este: $\bar{M}_O(\bar{F}_1) + \bar{M}_O(\bar{F}_2) + \bar{M}_O(\bar{F}_3) + \bar{M}_O(\bar{F}_4) + \bar{M}_O(\bar{F}_5) = 0$

$\Rightarrow$ sis e în echilibru

Exemplul 2

$F_1 = 5N$ în $A_1(2,\alpha)$
$F_2 = 3N$ în $A_2(18, \cancel{18})$
$F_3 = 5N$ în $A_3(8,17)$
$F_4 = 5N$ în $A_4(0,9)$

$\bar{F}_1 = 5\bar{j}$
$\bar{F}_2 = 3\bar{j}$
$\bar{F}_3 = -5\bar{i}$
$\bar{F}_4 = 5\bar{i}$

$\bar{R} = \bar{F}_1 + \bar{F}_2 + \bar{F}_3 + \bar{F}_4$
$= 5\bar{j} + 3\bar{j} - 5\bar{i} + 5\bar{i}$
$= 8\bar{j}$

$$\overline{M_O}(\overline{F_1}) = \overline{OA_1} \times \overline{F_1} = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ 2 & 18 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \end{vmatrix} = 10\bar{k}$$

$$\overline{M_O}(\overline{F_2}) = \overline{OA_2} \times \overline{F_2} = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ 18 & 10 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \end{vmatrix} = 54\bar{k}$$

$$\overline{M_O}(\overline{F_3}) = \overline{OA_3} \times \overline{F_3} = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ 12 & 17 & 0 \\ -5 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 85\bar{k}$$

$$\overline{M_O}(\overline{F_4}) = \overline{OA_4} \times \overline{F_4} = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ 2 & 9 & 0 \\ 5 & 0 & 0 \end{vmatrix} = -45\bar{k}$$

$$\overline{M_O} = \sum_{i=1}^{4} \overline{r_i} \times \overline{F_i} = \overline{M_O}(\overline{F_1}) + \overline{M_O}(\overline{F_2}) + \overline{M_O}(\overline{F_3}) + \overline{M_O}(\overline{F_4})$$

$$= 10\bar{k} + 54\bar{k} + 85\bar{k} - 45\bar{k}$$

el torsorului τ_O: $= 104\bar{k}$

$$\begin{cases} \bar{R} = \sum_{i=1}^{4} \overline{F_i} = 8\bar{j} \\ \overline{M_O} = \sum_{i=1}^{4} \overline{r_i} \times \overline{F_i} = 104\bar{k} \end{cases}$$

Se det momentul minimal sau redus:

$$M_R = \frac{\bar{R} \cdot \overline{M_O}}{R} = \frac{8\bar{j} \cdot 104\bar{k}}{\sqrt{8^2}} = 0$$

$\Rightarrow$ Caz 2 : $\bar{R} \cdot \overline{M_O} = 0 \, (\bar{R} \perp \overline{M_O})$ $R \neq 0$, $M_R = 0$. În consecință torsorul minimal e format numai din rezultantă – Sistemul de forțe se va reduce la rezultanta unică situată pe axa centrală.

Se det ecuația axei centrale:

$$M_{Oz} = x R_y - y R_x$$

$$104 = x \cdot 8 - y \cdot 0 \Rightarrow x = \frac{104}{8} = 13$$

Se obs că axa centrală nu trece prin centrul de greutate al plăcii $C(10,10)$ deci când $\bar{R} = 8\bar{j}$ rezultă că sub acțiunea sistemului de forțe apare o mișcare de translație după axa Oy în același sens.

$\overline{M_O} = 104\bar{k}$ rezultă că sub acțiunea sistemului de forțe apare o mișcare de rotație în jurul axei z, Problemă 1

$F_1 = 2\sqrt{3}F$ (direcția BO_1)

$F_2 = 2F$ (direcția D_1D)

$F_3 = 2\sqrt{2}F$ (direcția AO_1)

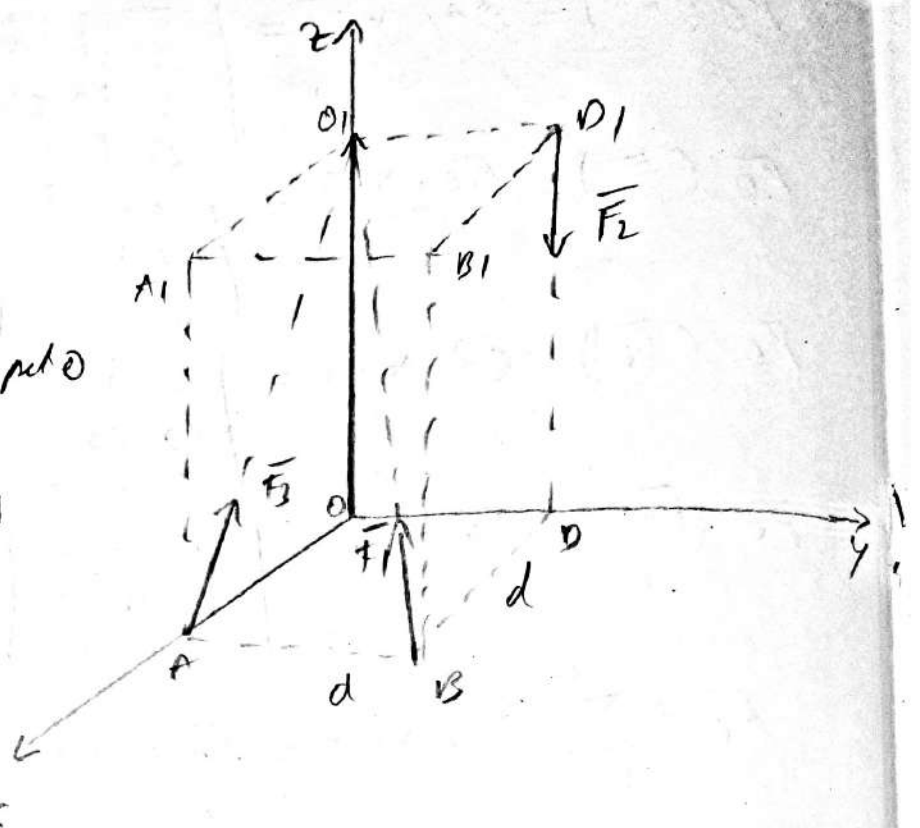
Să se det.:

a) Torsorul de reducere în pct O

b) Torsorul în pct B

c) momentul minimal (redus)

d) axa centrală



$$\bar{F_1} = F_1 \frac{\overline{BO_1}}{\overline{BO_1}}$$

$$= F_1 \frac{\overline{BA}+\overline{AO}+\overline{OO_1}}{BO_1} = 2\sqrt{3}F\frac{-d\bar{j}-d\bar{i}+d\bar{k}}{d\sqrt{3}} = -2F\bar{i}-2F\bar{j}+2F\bar{k}$$

$$\bar{F_2} = F_2\frac{\overline{D_1D}}{D_1D} = 2F\frac{-d\bar{k}}{d} = -2F\bar{k}$$

$$\bar{F_3} = F_3\frac{\overline{AO_1}}{AO_1} = F_3\frac{\overline{AO}+\overline{OO_1}}{AO_1} = 2\sqrt{2}F\frac{-d\bar{i}+d\bar{k}}{d\sqrt{2}}$$

$$\bar{R} = \sum_{i=1}^{3}\bar{F_i} = \bar{F_1}+\bar{F_2}+\bar{F_3}$$

$$= -2F\bar{i}-2F\bar{j}+2F\bar{k}-2F\bar{k}-2F\bar{i}+2F\bar{k}$$

$$= -4F\bar{i}-2F\bar{j}+2F\bar{k}$$

$$\bar{M}_O(\bar{F_1}) = \overline{OB}\times\bar{F_1} = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ d & d & 0 \\ -2F & -2F & 2F \end{vmatrix} = 2dF\bar{i}-2dF\bar{j}$$

$$\bar M_O(\bar F_2) = \overline{OD_1} \times \bar F_2 = \begin{vmatrix} \bar i & \bar j & \bar k \\ 0 & d & d \\ 0 & 0 & -2F \end{vmatrix} = -2dF\bar i$$

$$\bar M_O(\bar F_3) = \overline{OA} \times \bar F_3 = \begin{vmatrix} \bar i & \bar j & \bar k \\ d & 0 & 0 \\ -2F & 0 & 2F \end{vmatrix} = -2dF\bar j$$

$$\bar M_O = \sum_{i=1}^{3} \bar r_i \times \bar F_i = \bar M_O(\bar F_1) + \bar M_O(\bar F_2) + \bar M_O(\bar F_3)$$
$$= 2dF\bar i - 2dF\bar j - 2dF\bar i - 2dF\bar j$$
$$= -4dF\bar j$$

El torsorului τ_O:

$$\begin{cases} \bar R = -4F\bar i - 2F\bar j + 2F\bar k \\ \bar M_O = -4dF\bar j \end{cases}$$

- el torsorului în pct B sunt:

Acelaşi $\bar R = -4F\bar i - 2F\bar j + 2F\bar k$

Moment în raport cu punctul B diferit $\bar M_B = \bar M_O - \overline{OB} \times \bar R$

$$= -4dF\bar j - \begin{vmatrix} \bar i & \bar j & \bar k \\ d & d & 0 \\ -4F & -2F & 2F \end{vmatrix}$$

$$= -2dF\bar i - 2dF\bar j - 2dF\bar k$$

$$\tau_B \begin{cases} \bar R = -4F\bar i - 2F\bar j + 2F\bar k \\ \bar M_B = -2dF\bar i - 2dF\bar j - 2dF\bar k \end{cases}$$

Moment minimal sau redus:

$$M_R = \frac{\bar R \cdot \bar M_O}{R} = \frac{(-4F\bar i - 2F\bar j + 2F\bar k)(-4dF\bar j)}{\sqrt{(4F)^2 + (2F)^2 + (2F)^2}} = \frac{8dF}{\sqrt{24}}$$

⇒ Cazul 1 ⇒ Sistemul de forţe se reduce la un torsor minimal situat pe axa centrală.

$$\tau_O \begin{cases} \bar R = -4F\bar i - 2F\bar j + 2F\bar k \\ \bar M_O = -4dF\bar j \end{cases}$$

Axa centrală: $\frac{M_{Ox} - (yR_z - zR_y)}{R_x} = \frac{M_{Oy} - (zR_x - xR_z)}{R_y} = \frac{M_{Oz} - (xR_y - yR_x)}{R_z}$

$$\frac{0 - (y(2F) - z(-2F))}{-4F} = \frac{-4dF - (z(-4F) - x(2F))}{-2F} = \frac{0 - (x(-2F) - y(-4F))}{2F}$$

$$\begin{cases} 16d - 20z - 8x - 4y = 0 \\ -4d + 4x + 4z - 4y = 0 \end{cases}$$

Dc $y = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{d}{3} \\ z = \frac{2d}{3} \end{cases} \Rightarrow P_1\left(\frac{d}{3}, 0, \frac{2d}{3}\right)$

Dc $z = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{5d}{3} \\ y = \frac{2d}{3} \end{cases} \Rightarrow P_2\left(\frac{5d}{3}, \frac{2d}{3}, 0\right)$