Chapter 1

Serii de funcţii

1.1 Serii Fourier

În clasa seriilor de funcţii o deosebită importanţă o au seriile Fourier, care vor fi prezentate în acest paragraf. Ele sunt utilizate în electrotehnică, mecanică, construcţii şi în orice proces vibratoriu. Teoria reprezentării funcţiilor prin serii trigonometrice Fourier poartă denumirea de analiză armonică.

1. Serii trigonometrice Fourier

Se consideră spaţiul vectorial real $\mathcal{C}\left[-l,l\right]$ al funcţiilor reale continue pe intervalul $\left[-l,l\right]$, înzestrat cu produsul scalar

$$\langle f,g\rangle=\int_{-l}^{l}f\left(x\right)g\left(x\right)dx \tag{6.1}$$

Sistemul de funcţii $1,\cos\frac{\pi x}{l},\sin\frac{\pi x}{l},\cos\frac{2\pi x}{l},\sin\frac{2\pi x}{l},...,\cos\frac{k\pi x}{l},\sin\frac{k\pi x}{l}$, $k\in\mathbb{N}$ este ortogonal pe segmentul $\left[-l,l\right]$ în raport cu produsul scalar (6.1) şi se numeşte **sistem trigonometric fundamental.** Proprietăţile acestui sistem sunt date în lema următoare.

Lema 4.1. Sistemul trigonometric fundamental are următoarele proprietăţi de ortogonalitate:

i) $\left\langle \sin\frac{m\pi x}{l}, \cos\frac{n\pi x}{l}\right\rangle = 0;\ m, n \in \mathbb{N};$

ii) $\left\langle \sin\frac{m\pi x}{l}, \sin\frac{n\pi x}{l}\right\rangle = \begin{cases} 0,\ m \neq n,\ m, n \in \mathbb{N}^* \\ l,\ m = n,\ m, n \in \mathbb{N}^* \end{cases};$

iii) $\left\langle \cos\frac{m\pi x}{l}, \cos\frac{n\pi x}{l}\right\rangle = \begin{cases} 0,\ m \neq n,\ m, n \in \mathbb{N}^* \\ l,\ m = n,\ m, n \in \mathbb{N}^* \end{cases};$

iv) $\left\langle 1, \sin\frac{m\pi x}{l}\right\rangle = \left\langle 1, \cos\frac{n\pi x}{l}\right\rangle = 0,\ m, n \in \mathbb{N}^*.$

Demonstraţie. Vom demonstra câteva dintre aceste proprietăţi.

iii) Pentru $m \neq n$, se deduce uşor că se poate scrie succesiv

$$\int_{-l}^{l} \cos\frac{m\pi x}{l}\cos\frac{n\pi x}{l}dx = \frac{1}{2}\int_{-l}^{l}\left[\cos(m-n)\frac{\pi x}{l} + \cos(m+n)\frac{\pi x}{l}\right]dx = 0$$

$(m \neq n)$.

Dacă $m = n$, atunci **ii)** şi **iii)** implică

$$\int_{-l}^{l}\cos^2\frac{m\pi x}{l}dx = \int_{-l}^{l}\sin^2\frac{m\pi x}{l}dx = \int_{-l}^{l}\frac{1-\cos\frac{2m\pi x}{l}}{2}dx = l.$$

iv) $\displaystyle\int_{-l}^{l}\frac{1}{2}\sin\frac{m\pi x}{l}dx = -\frac{m\pi x}{2l}\cos\frac{m\pi x}{l}\Big|_{-l}^{l} = 0$ şi $\displaystyle\int_{-l}^{l}\frac{1}{2}\sin\frac{n\pi x}{l}dx = 0.$

Definiţia 4.1. Seria de funcţii de forma

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\cos\frac{n\pi x}{l} + b_n\sin\frac{n\pi x}{l}\right), \tag{6.2}$$

în care a_0, a_n, b_n $(n \in \mathbb{N}^*)$ sunt numere reale, se numeşte serie trigonometrică (Fourier) de coeficienţi a_0, a_n, b_n.

Sumele parţiale ale unei astfel de serii se numesc **polinoame trigonometrice.**

În particular, pentru $l = \pi$ sistemul trigonometric fundamental are forma $\frac{1}{2}$, $\cos x$, $\sin x$, $\cos 2x$, $\sin 2x, ..., \cos nx$, $\sin nx, ...$ şi el este ortogonal pe intervalul $[-\pi,\pi]$. Pentru o funcţie periodică de perioadă $2l$ are loc, descompunerea unică după elementele sistemului trigonometric fundamental dată de reprezentarea

$$f\left(x\right)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\cos\frac{n\pi x}{l}+b_n\sin\frac{n\pi x}{l}\right). \tag{6.3}$$

Ipotezele în care are loc această reprezentare sunt date de teorema următoare.

Teorema 4.1. Dacă $f:[-l,l]\to\mathbb{R}$ este o funcţie integrabilă pe segmentul $[-l,l]$ iar seria (6.2) este integrabilă termen cu termen pe acelaşi interval $[-l,l]$ şi are suma f, atunci coeficienţii a_n şi b_n sunt daţi de relaţiile

$$a_0=\frac{1}{l}\int_{-l}^{l}f\left(x\right)dx,\ \ a_n=\frac{1}{l}\int_{-l}^{l}f\left(x\right)\cos\frac{n\pi x}{l}dx,\ \ b_n=\frac{1}{l}\int_{-l}^{l}f\left(x\right)\sin\frac{n\pi x}{l}dx,\ \ n\in\mathbb{N}. \tag{6.4}$$

Demonstraţie. Integrând termen cu termen reprezentarea (6.3) de la $-l$ la l, se obţine egalitatea $\displaystyle\int_{-l}^{l}f\left(x\right)dx=a_0l+\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\int_{-l}^{l}\cos\frac{n\pi x}{l}dx+b_n\int_{-l}^{l}\sin\frac{n\pi x}{l}dx\right)$.

Conform celor două egalităţi **iv)** din Lema 4.1, toţi termenii de sub semnul sumă sunt nuli, aşa că pentru a_0 rezultă formula $\displaystyle a_0=\frac{1}{l}\int_{-l}^{l}f\left(x\right)dx$.

Pentru determinarea coeficienţilor a_k, $k\in\mathbb{N}$, se înmulţesc ambii membri ai egalităţii (6.3) cu $\cos\dfrac{k\pi x}{l}$ şi din nou integrând termen cu termen în raport cu x între limitele $-l$ şi l rezultă $\displaystyle\int_{-l}^{l}f\left(x\right)\cos\frac{k\pi x}{l}dx=\frac{a_0}{2}\int_{-l}^{l}\cos\frac{k\pi x}{l}dx+$

$$+\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\int_{-l}^{l}\cos\frac{k\pi x}{l}\cos\frac{n\pi x}{l}dx+b_n\int_{-l}^{l}\cos\frac{k\pi x}{l}\sin\frac{n\pi x}{l}dx\right).$$

În baza ortogonalităţii sistemului trigonometric fundamental (Lema 4.1,**i)**), toţi termenii din partea dreaptă a acestei egalităţi sunt nuli, iar pentru $n=k$

coeficientul a_k este egal cu l. În acest fel pentru calculul coeficienţilor a_k se obţin formulele

$a_k = \dfrac{1}{l}\displaystyle\int_{-l}^{l} f(x)\cos\dfrac{k\pi x}{l}dx,\ k\in\mathbb{N}$. Analog, înmulţind egalitatea (6.3) cu

$\sin\dfrac{k\pi x}{l}$ şi apoi integrând avem $\displaystyle\int_{-l}^{l} f(x)\sin\frac{k\pi x}{l}dx = \frac{a_0}{2}\int_{-l}^{l}\sin\frac{k\pi x}{l}dx +$

$$+\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\int_{-l}^{l}\sin\frac{k\pi x}{l}\cos\frac{n\pi x}{l}dx + b_n\int_{-l}^{l}\sin\frac{k\pi x}{l}\sin\frac{n\pi x}{l}dx\right).$$

În baza proprietăţilor sistemului trigonometric fundamental, în partea dreaptă a ultimei egalităţi, este diferit de zero numai coeficientul lui b_k, care are valoarea l. Rezultă astfel că $b_k = \dfrac{1}{l}\displaystyle\int_{-l}^{l} f(x)\sin\frac{k\pi x}{l}dx,\ k\in\mathbb{N}$.

Consecinţa 4.1. Dacă funcţia integrabilă f este dată pe segmentul $[-\pi,\pi]$, atunci punând $l=\pi$ în expresia coeficienţilor Fourier daţi de Teorema 4.1, se obţin pentru determinarea coeficienţilor Fourier ai funcţiei $f:[-\pi,\pi]\to\mathbb{R}$, formulele

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,dx,\ a_k = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos kx dx,\ b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin kx dx,\ k\in\mathbb{N}. \tag{6.5}$$

În acest caz seria Fourier a funcţiei f este de forma

$$f(x)\simeq\frac{a_0}{2}+\sum_{k=1}^{\infty}\left(a_k\cos kx + b_k\sin kx\right). \tag{6.6}$$

Observaţia 4.1. Dacă $f:(a,b)\to\mathbb{R}$ este continuă pe porţiuni, atunci luând ca perioadă numărul $2l=b-a$ şi prelungind prin periodicitate funcţia f, se obţine funcţia f^* definită pe $\mathbb{R}$ şi care coincide cu f pe intervalul (a,b).

Exemplul 2. Să se dezvolte în serie trigonometrică Fourier funcţia f

periodică de perioadă 2π $(f(x+2\pi) = f(x), x \in \mathbb{R})$, dată prin

$$f(x) = \begin{cases} 0, & -\pi < x < 0 \\ x, & 0 \le x < \pi \end{cases}$$

Soluţie. Graficul lui f este dat în figura 6.2.

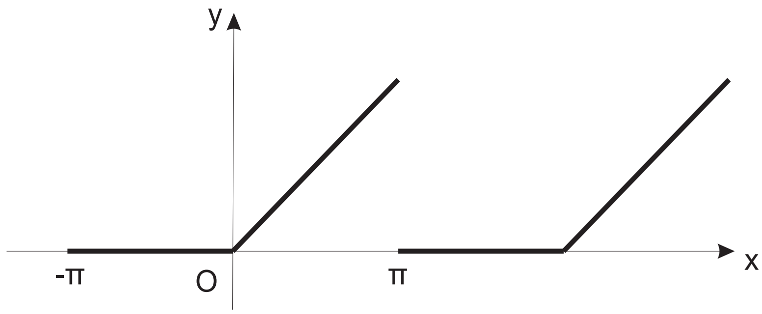

Figura 6.2

Coeficienţii Fourier sunt: $a_0 = \dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,dx = \dfrac{1}{\pi}\int_0^{\pi} x dx = \dfrac{\pi}{2}$,

$$a_k = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos kx dx = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} x\cos kx dx = \frac{1}{\pi}\left(\frac{x}{k}\sin kx + \frac{1}{k^2}\cos kx\right)\Bigg|_0^{\pi} =$$

$$= \frac{\cos k\pi - 1}{\pi k^2} = \frac{(-1)^k - 1}{\pi k^2} = \begin{cases} 0, & k = 2p \\ -\dfrac{2}{\pi(2p-1)^2}, & k = 2p-1 \end{cases}, \ k \in \mathbb{N}$$

$$b_k = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin kx dx = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} x\sin kx dx = \left(-\frac{1}{\pi}\frac{x\cos kx}{k} + \frac{1}{\pi}\frac{\sin kx}{k^2}\right)\Bigg|_0^{\pi} =$$

$$= \frac{(-1)^{k-1}}{k}, \ k \in \mathbb{N}.$$

Seria Fourier este $f(x) = \dfrac{\pi}{4} - \dfrac{2}{\pi}\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\cos(2k-1)x}{(2k-1)^2} + \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k-1}\frac{\sin kx}{k}$.

Cu privire la convergenţa seriilor Fourier pentru funcţii derivabile pe porţiuni are loc teorema următoare.

Teorema 4.2 (Dirichlet). Dacă funcţia periodică $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de perioadă $T = 2l$ este derivabilă pe porţiuni pe intervalul $[-l, l]$, atunci seria Fourier asociată lui f este punctual convergentă pe $\mathbb{R}$ şi pentru orice $x \in \mathbb{R}$ are loc egalitatea

$$\frac{f(x-0)+f(x+0)}{2} = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n \cos\frac{n\pi x}{l} + b_n \sin\frac{n\pi x}{l}\right). \tag{6.7}$$

Dacă x este punct de continuitate pentru funcţia $f(x)$, atunci

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n \cos\frac{n\pi x}{l} + b_n \sin\frac{n\pi x}{l}\right) \tag{6.8}$$

iar în capetele segmentului $[-l, l]$ suma seriei Fourier se defineşte prin formula $\dfrac{f(-l+0)+f(l-0)}{2}$.

Observaţia 4.2. Coeficienţii Fourier din Teorema 4.1. se pot determina şi din relaţiile echivalente

$$a_n = \frac{1}{l}\int_c^{c+2\pi} f(x)\cos\frac{n\pi x}{l}dx,\ \ b_n = \frac{1}{l}\int_c^{c+2\pi} f(x)\sin\frac{n\pi x}{l}dx,\ \ n \in \mathbb{N}. \tag{6.9}$$

Într-adevăr, dacă $c = -\pi$ din Teorema 4.1. se obţin expresiile 6.9.

Vom prezenta acum legătura între coeficienţii Fourier ai unei serii uniform convergente pe $[-\pi, \pi]$ şi suma sa corespunzătoare f.

Propoziţia 4.1 (Identitatea lui Parceval). Dacă a_n şi b_n sunt coeficienţii Fourier ai unei serii uniform convergente pe $[-l, l]$ având suma f, atunci are loc egalitatea

$$\frac{1}{2}a_0^2 + \sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n^2 + b_n^2\right) = \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f^2(x)\,dx. \tag{6.10}$$

Demonstraţie. Înmulţind cu $f(x)$ egalitatea (6.8) şi integrând termen cu termen de la $-l$ la l (lucru posibil deoarece seria este uniform convergentă pe segmentul $[-l, l]$) şi ţinând cont de expresiile (6.4) ale coeficienţilor Fourier se obţine

$$\int_{-l}^{l} f^2(x)\,dx = \frac{a_0}{2}\int_{-l}^{l} f(x)\,dx + \sum_{n=1}^{\infty}\left[a_n\int_{-l}^{l} f(x)\cos\frac{n\pi x}{l}dx + b_n\int_{-l}^{l} f(x)\sin\frac{n\pi x}{l}dx\right]$$

$$= \frac{1}{2}a_0^2 l + l\sum_{n=1}^{\infty}(a_n^2+b_n^2) = l\left[\frac{1}{2}a_0^2 + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n^2+b_n^2)\right].$$

Egalitatea (6.9) se obţine împărţind ambii membri ai acestei egalităţi cu l.

Propoziţia 4.2 (Inegalitatea lui Bessel). Dacă a_n şi b_n sunt coeficienţii Fourier ai unei serii uniform convergente pe segmentul $[-l,l]$ având suma f continuă pe porţiuni în intervalul $(-l,l)$, atunci seria $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(a_n^2+b_n^2)$ este convergentă şi are loc inegalitatea (Bessel)

$$\frac{1}{2}a_0^2 + \sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n^2+b_n^2\right) \le \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f^2(x)\,dx. \tag{6.11}$$

Demonstraţie. Fie $s_k(x) = \frac{a_0}{2} + \sum\limits_{n=1}^{k}\left(a_n\cos\frac{n\pi x}{l} + b_n\sin\frac{n\pi x}{l}\right)$ şirul sumelor parţiale al seriei Fourier asociată funcţiei f. Deoarece $(s_k(x))_{k\ge1}$ este un şir uniform convergent pe $[-l,l]$ către funcţia f iar $(f(x)-s_k(x))^2 \ge 0$ rezultă inegalitatea $\int\limits_{-l}^{l}(f(x)-s_k(x))^2\,dx \ge 0$, care dezvoltat se scrie

$$2\int_{-l}^{l} f(x)\,s_k(x)\,dx - \int_{-l}^{l} s_k^2(x)\,dx \le \int_{-l}^{l} f^2(x)\,dx. \tag{6.12}$$

Înmulţind ambii membrii ai egalităţii ce reprezintă expresia lui $s_k(x)$ prin $2f(x)$ şi integrând apoi de la $-l$ la l se obţine egalitatea

$$2\int_{-l}^{l} f(x)\,s_k(x)\,dx = 2l\left[\frac{1}{2}a_0^2 + \sum_{n=1}^{k}\left(a_n^2+b_n^2\right)\right]. \tag{6.13}$$

Ridicând acum la pătrat aceeaşi expresie a sumei parţiale $s_k(x)$ şi integrând de la $-l$ la l, folosind Lema 4.1 se obţine egalitatea

$$\int_{-l}^{l} s_k^2(x)\,dx = l\left[\frac{1}{2}a_0^2 + \sum_{n=1}^{k}\left(a_n^2 + b_n^2\right)\right]. \tag{6.14}$$

Înlocuind (6.13) şi (6.14) în (6.12) şi apoi împărţind prin l se obţine inegalitatea

$$\frac{1}{2}a_0^2 + \sum_{n=1}^{k}\left(a_n^2 + b_n^2\right) \leq \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f^2(x)\,dx. \tag{6.15}$$

Trecând la limită pentru $k \to \infty$, se obţine inegalitatea lui Bessel (6.11), care arată că şirul sumelor parţiale ai seriei cu termeni pozitivi $\frac{1}{2}a_0^2+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n^2+b_n^2)$ este mărginit, deci această serie este convergentă. Seria fiind convergentă rezultă că termenul general $a_n^2 + b_n^2 \to 0$ $(n \to \infty)$, deci $a_n \to 0$ şi $b_n \to 0$ $(n \to \infty)$.

Observaţia 4.3. Din Propoziţia 4.2 se deduce că se poate considera $s_k(x)$ ca o aproximare a lui $f(x)$.

Exemplul 3. Să se cerceteze dacă următoarele serii:
i) $\frac{1}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(\cos nx + \sin nx)$; **ii)** $\frac{1}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\cos nx + \frac{1}{\sqrt{n}}\sin nx\right)$
pot fi seriile Fourier ale unor funcţii continue $f : [-\pi, \pi] \to \mathbb{R}$.

Soluţie. **i)** Coeficienţii Fourier sunt $a_n = b_n = 1$ şi deoarece $a_n \nrightarrow 0, b_n \nrightarrow 0$ $(n \to \infty)$, iar seria $\sum_{n=1}^{\infty}(a_n^2 + b_n^2)$ este divergentă, rezultă că a_n şi b_n nu pot fi coeficienţii unei serii Fourier.

ii) Coeficienţii Fourier $a_n = b_n = \frac{1}{\sqrt{n}} \to 0$ $(n \to \infty)$ însă deoarece seria $\sum_{n=1}^{\infty}(a_n^2 + b_n^2) = 2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ este divergentă, rezultă că a_n şi b_n nu pot fi coeficienţii Fourier ai unei serii.

2. Seriile Fourier ale funcţiilor pare şi impare

Înainte de toate, reamintim că dacă o funcţie pară sau impară este integrabilă pe segmentul $[-a, a]$ atunci au loc egalităţile

$$\int_{-a}^{a} f(x)\,dx = 2\int_{0}^{a} f(x)\,dx, \text{ sau } \int_{-a}^{a} f(x)\,dx = 0, \quad (a > 0) \tag{6.16}$$

O justificare a acestor egalităţi se deduce după cum urmează. Dacă f este o funcţie pară $(f(-x) = f(x))$ atunci rezultă egalitatea $\int_{a}^{0} f(-u)\,du =$

$= \int_{a}^{0} f(u)\,du = -\int_{0}^{a} f(u)\,du$, în baza căreia se obţine

$$\int_{-a}^{a} f(x)\,dx = \int_{-a}^{0} f(x)\,dx + \int_{0}^{a} f(x)\,dx = -\int_{a}^{0} f(-u)\,du + \int_{0}^{a} f(x)\,dx$$
$$= \int_{0}^{a} f(u)\,du + \int_{0}^{a} f(x)\,dx = 2\int_{0}^{a} f(x)\,dx.$$

Dacă f este impară $(f(-x) = -f(x))$ atunci $\int_{a}^{0} f(-u)\,du = -\int_{a}^{0} f(u)\,du =$

$= \int_{0}^{a} f(u)\,du$ şi în baza acestei egalităţi se deduce succesiv că

$$\int_{-a}^{a} f(x)\,dx = \int_{-a}^{0} f(x)\,dx + \int_{0}^{a} f(x)\,dx = -\int_{a}^{0} f(-u)\,du + \int_{0}^{a} f(x)\,dx$$
$$= -\int_{0}^{a} f(u)\,du + \int_{0}^{a} f(x)\,dx = 0.$$

Având în vedere că produsul a două funcţii pare, sau a două funcţii impare este o funcţie pară şi de asemenea, produsul dintre o funcţie pară şi una impară este o funcţie impară, şi ţinând cont că $\sin u$ este impară iar $\cos u$ este pară, dacă f este o funcţie pară, atunci formulele (6.4) devin

$$a_n = \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(x)\cos\frac{n\pi x}{l}dx = \frac{2}{l}\int_{0}^{l} f(x)\cos\frac{n\pi x}{l}dx; \quad b_n = 0; \quad n = 0, 1, 2, ... \tag{6.17}$$

Aceasta înseamnă că seria Fourier a unei funcţii pare este o serie de cosinusuri, adică $f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos\frac{n\pi x}{l}$.

Dacă f este o funcţie impară, atunci coeficienţii Fourier sunt

$$a_n = 0; \quad b_n = \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(x)\sin\frac{n\pi x}{l}dx = \frac{2}{l}\int_{0}^{l} f(x)\sin\frac{n\pi x}{l}dx; \quad n = 0, 1, 2, .. \tag{6.18}$$

ceea ce înseamnă că seria Fourier a unei funcţii impare f conţine numai sinusuri.

În acest caz, $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin\frac{n\pi x}{l}$.

Observaţia 4.4. Dacă funcţia f este definită pe segmentul $[0, l]$, atunci prelungind-o pe segmentul $[-\pi, 0)$ prin paritate (punând $f(-x) = f(x)$, pentru $x \in [-\pi, 0)$) sau prin imparitate (punând $f(-x) = -f(x)$, pentru $x \in [-\pi, 0)$), se poate dezvolta funcţia f în serie Fourier numai de cosinusuri (în primul caz) şi numai de sinusuri (în al doilea caz).

Exemplul 4. Fie $f : (0, 2) \to \mathbb{R}$, $f(x) = x$. Se cere:

i) Să se dezvolte funcţia f în serie de : 1) sinusuri; 2) cosinusuri.

ii) Să se verifice identitatea lui Parceval pentru seria 2) şi apoi să se determine suma s a seriei numerice $\frac{1}{1^4} + \frac{1}{2^4} + \frac{1}{3^4} + ... + \frac{1}{n^4} + ...$

Soluţie. **i)** Prelungim în cazul 1) funcţia f prin imparitate, cu perioada 4, ca în figura 6.3a). Aceasta este prelungirea prin imparitate a funcţiei f.

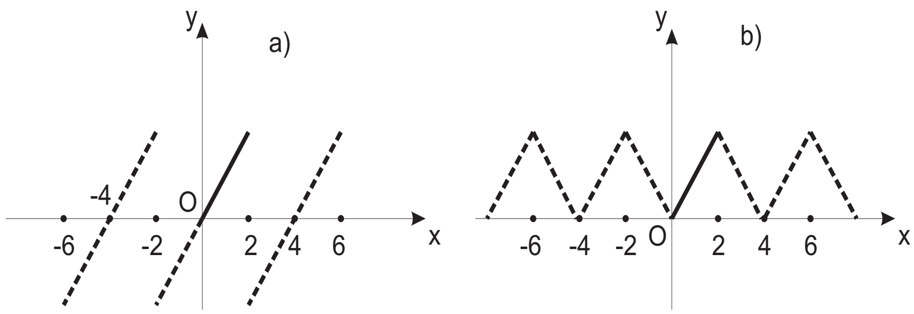

Figura 6.3

Atunci $2l = 4$, deci $l = 2$. Prin urmare, $a_n = 0, n \in \mathbb{N}$ iar b_n are expresia
$$b_n = \frac{2}{l}\int_0^l f(x)\sin\frac{n\pi x}{l}dx = \int_0^2 x\sin\frac{n\pi x}{2}dx = \left(x\frac{-2}{n\pi}\cos\frac{n\pi x}{2} + \frac{4}{n^2\pi^2}\sin\frac{n\pi x}{2}\right)\Big|_0^2$$
$= \dfrac{-4}{n\pi}\cos n\pi$. În acest fel, $f(x) = \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{-4}{n\pi}\cos n\pi\sin\frac{n\pi x}{2}$. În cazul 2) se prelungeşte prin paritate funcţia f, cu perioada 4, având graficul în figura 6.3 b). Aceasta este prelungirea prin paritate a funcţiei f în care $2l = 4$, deci $l = 2$. Atunci $b_n = 0$, iar
$$a_n = \frac{2}{l}\int_0^l f(x)\cos\frac{n\pi x}{l}dx = \int_0^2 x\cos\frac{n\pi x}{2}dx$$
$$= \left(x\frac{2}{n\pi}\sin\frac{n\pi x}{2} + \frac{4}{n^2\pi^2}\cos\frac{n\pi x}{2}\right)\Big|_0^2 = \frac{4}{n^2\pi^2}(\cos n\pi - 1),\ n \neq 0.$$
Dacă $n = 0$, $a_0 = \displaystyle\int_0^2 xdx = 2$ şi astfel
$$f(x) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{4}{n^2\pi^2}(\cos n\pi - 1)\cos\frac{n\pi x}{2}.$$
Se deduce astfel că funcţia $f(x) = x$, $0 < x < 2$ este reprezentată prin diferenţa a două serii, *a*) şi *b*).

ii) În acest caz $l = 2$, $a_0 = 2$, $a_n = \dfrac{4}{n^2\pi^2}(\cos n\pi - 1)$, $n \neq 0$ iar $b_n = 0$, $n \neq 0$. Identitatea lui Parceval devine

$\frac{1}{2}\int\limits_{-2}^{2} f^2(x)\,dx = \frac{1}{2}\int\limits_{-2}^{2} x^2 dx = \frac{2^2}{2} + \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{16}{n^4\pi^4}(\cos n\pi - 1)^2$, sau

$\frac{8}{3} = 2 + \frac{64}{\pi^4}\left(\frac{1}{1^4} + \frac{1}{3^4} + \frac{1}{5^4} + ...\right)$, de unde $\frac{1}{1^4} + \frac{1}{3^4} + \frac{1}{5^4} + ... = \frac{\pi^4}{96}$.

În acest fel se deduce că putem scrie fără dificultate că

$$s = \frac{1}{1^4} + \frac{1}{2^4} + \frac{1}{3^4} + \frac{1}{4^4} + \frac{1}{5^4} + ... =$$
$$= \left(\frac{1}{1^4} + \frac{1}{3^4} + \frac{1}{5^4} + ...\right) + \left(\frac{1}{2^4} + \frac{1}{4^4} + \frac{1}{6^4} + ...\right) =$$
$$= \left(\frac{1}{1^4} + \frac{1}{3^4} + \frac{1}{5^4} + ...\right) + \frac{1}{2^4}\left(\frac{1}{1^4} + \frac{1}{2^4} + \frac{1}{3^4} + ...\right) = \frac{\pi^4}{96} + \frac{s}{16},$$

de unde se deduce $s = \frac{\pi^4}{90}$.