İstatistik-II Dersi

1.Bölüm: Hipotez Testleri-I

1. GİRİŞ

Temel kavramlar

Uygulamalarda çoğu zaman örneklemden elde edilen bilgiler yardımıyla anakütle parametreleri hakkında bir karara varmaya çalışılır. Örneğin yeni bir öğretim sisteminin eskisinden farklı olup olmadığına karar verilebilir. Burada önemli olan nokta, bu farkların rastgele seçimin sonucu olan örnekleme hatalarından mı ileri geldiği, yoksa gerçekten bir değismenin olduğunun belirlenmesidir. Bu farkların istatistiksel acıdan anlamlı (önemli) olup olmadığına bazı testler sonucunda karar verilir. Anakütleler gösterdikleri olasılık dağılışları ile tanımlanırlar. Bu dağılışlar bilindiği taktirde popülasyonlar hakkında verilecek kararlar kesinlik kazanır. Fakat anakütle dağılışları genellikle bilinmez. Dolayısıyla da bu tip kararların verilebilmesi zordur. Anakütleler hakkında bilgi edinmenin diğer bir yolu örneklemedir. Uygun bir şekilde seçilen şans örnekleri yardımıyla anakütlenin gösterdiği dağılışa ait parametreler tahmin edilir. Belirli varsayımlara dayanarak örneklerden elde edilen bu tahminler yardımıyla belli bir risk karşılığında popülasyonlar veya bunların gösterdiği dağılışlar hakkında çeşitli kararlar verilir. Bu kararlar verilirken ya bir tahmin yapılır ya da konu ile ilgili belirli bir varsayımda bulunulur. Gerçeklessin veva gerçeklesmesin ileri sürülen bu tip varsayımlara **HİPOTEZ** denir. **Hipotez** kısaca doğruluğu bir araştırma ya da deney ile test edilmeye çalışılan öngörülere denir. Hipotez testleri bir örneklem ortalaması ile bu örneklemin çekilmiş olduğunu düşündüğümüz ortalaması etrafındaki farkın anlamlı olup olmadığını (yani önemli bir fark olup olmadığını) araştırmamızı sağlayan testlerdir.

İstatistiksel hipotezler anakütle parametrelerine ilişkin olarak ileri sürülen ve geçerliliği olasılık kanunlarına göre araştırılabilen özel önermelerdir. İstatistiksel hipotezlerin diğer hipotezlerden farkı, hipotezin bir frekans bölünmesiyle ilgili olmasıdır. Örneğin "belirli bir markayı taşıyan akülerin ortalama ömrünün 2.5 saat olduğunu ileri sürdüğümüzde bir hipotez önermiş oluruz. Bunun anlamı normal olan bir dağılımın aritmetik ortalaması 2.5 saate eşittir.

Bir hipotez ya doğru ya da yanlıştır. Bunu araştırmak için anakütleden rastgele seçilmiş belli bir örneklemdeki birimler incelenir ve bu örneklemden hareketle hipotezin geçerli olup olmadığı hakkında bir karara varılır. Örneklem istatistiklerinden yararlanarak bir hipotezin geçerli olup olmadığını ortaya koyma işlemine **istatistiksel hipotez testi** veya **hipotez testi** denir.(Ortaya atılan bir iddiayı ispatlama ya da çürütme işlemi=hipotez testi)

Örneklem değerleri kullanılarak hesaplanan istatistiğin değeriyle bu istatistiğin temsil ettiği anakütle parametre değerinin arasındaki farklılık olup olmadığı eğer farklılık varsa bunun istatistiksel olarak önemli olup olmadığı hipotez testi ile sınanır. İstatistiksel hipotez testi, bir araştırmada ilgilenilen bir ya da daha fazla parametre değeri hakkında ileri sürülen iddianın geçerliliğini bu parametreyi temsil edilen istatistik ve bu istatistiğin örnekleme dağılımıyla ilgili bilgilerden yararlanarak araştıran önermedir. Hipotez testi örneklemden yola çıkılarak anakütle parametresi hakkında ortaya atılan bir iddianın geçerliliğinin sınanmasıdır.

Sıfır Hipotezi ve Karşıt Hipotez

Hipotez testinde bir hipotezle onun karşıtı diğer bir hipotezden hangisinin örneklemden elde edilen sonuç ile daha iyi bağdaştığı araştırılmaktadır. Karşılaştırılan iki hipotezden birine sıfır hipotezi (istatistiksel hipotez), diğerine ise karşıt hipotez (araştırma hipotezi) adı verilir. Hipotezlerin daima örneklem alınmadan önce kurulması gerekir. İstatistiksel bir araştırmada iki tür hipotez kurulur. "Eşit, fark yoktur, önemli değildir, en az(fazla) ... kadardır" biçiminde kurulan hipoteze "yokluk (null), boş ya da sıfır hipotezi" denir ve \mathbf{H}_0 ile gösterilir. \mathbf{H}_0 hipotezine karşı test edilen hipoteze ise "alternatif (alternative), seçenek ya da karşıt hipotez "denir ve \mathbf{H}_1 ile gösterilir. \mathbf{H}_0 ve \mathbf{H}_1 hipotezleri genelde aşağıdaki gibi kurulur.

H₀: Örneklemden elde edilen değer ile anakütlenin bilinen değeri arasında bir fark yoktur.

H₁: Örneklemden elde edilen değer ile anakütlenin bilinen değeri arasında bir önemli (anlamlı) bir fark vardır.

Genellikle araştırmacılar sıfır hipotezinin reddedilmesini ve karşıt hipotezin kabul edilmesini isterler. Eskiden beri geçerli sayılmış önerme sıfır hipotezi, yeni görüş ise karşıt hipotezi olur.

$$\begin{array}{lll} H_0: p = p_0 & & H_0: \mu_1 = \mu_2 \\ ----- & & ---- \\ H_1: p \neq p_0 & \text{veya} & H_1: \mu_1 \neq \mu_2 & \text{veya} \\ H_1: p > p_0 & \text{veya} & H_1: \mu_1 > \mu_2 & \text{veya} \\ H_1: p < p_0 & \text{seklinde kurulur} & H_1: \mu_1 < \mu_2 & \text{seklinde kurulur} \end{array}$$

Bu ifadeler araştırmacının konu ile ilgili ön yargısına bağlı olarak değişir. Eğer araştırıcı I. uygulamanın II. uygulamadan iyi olacağına dair ön yargısı varsa H_1 : $\mu_1 > \mu_2$ şeklinde kurulur. Hiçbir ön yargısı yoksa, H_1 : $\mu_1 \neq \mu_2$ şeklinde kurulur.

Hipotez testleri için temel varsayımlar:

- Örneğe alınan birimler birbirlerinden bağımsız olarak seçilmiş olmalıdırlar.
- Anakütle(ler) normal dağılıma sahip olmalıdır (Parametrik hipotez testleri için).
- İki bağımsız anakütle söz konusu ise bunların varyansları eşit olmalıdır (Parametrik hipotez testleri için).

Hipotez testinin aşamaları

1) Hipotezlerin oluşturulması: "Sıfır hipotezi" ana kütle parametresinin önceden belirlenmiş, bilinen değerini göstermektedir. "Karşıt hipotez" ise, sıfır hipotezinin reddi halinde kabul edilmesi gereken hipotezdir. Bazen bir, bazen de birden fazla karşıt hipotez söz konusu olabilir. Ancak hipotez test edilirken, tek bir karşıt hipotez ileri sürüleceği açıktır. Karşıt hipotezin sıfır hipotezinden "farklı" veya "büyük" yahut "küçük" oluşuna göre testler çift veya tek "büyük" yahut "küçük" oluşuna göre testler

çift veya tek taraflı olmaktadır. Testte aşağıdaki üç takım testten birincisine veya ikincisine başvurulduğunda "tek taraflı test", üçüncüsü dikkate alındığında "çift taraflı test" söz konusu olur.

$$H_0: \varphi = \varphi_0 \\ H_1: \varphi > \varphi_0 \qquad (1) \\ H_0: \varphi = \varphi_0 \qquad (2) \\ H_1: \varphi < \varphi_0 \qquad (2)$$
 Tek Taraflı Test
$$H_0: \varphi = \varphi_0 \\ H_1: \varphi \neq \varphi_0 \qquad (3)$$
 Çift Taraflı Test

Örnek-1: Malt-O-Meal firması ortalama kutu ağırlığının, etikette yazılanın (16 ons) üstünde olmasını istemektedir. Çünkü şirket düşük paket ağırlığı nedeniyle ya da müşteri memnuniyetsizliğini göze almak istemez. Kutu başına gevrek miktarının ana kütle ortalamasını μ ile gösterirsek H_0 hipotezi

$$H_0: \mu \le 16$$

Alternatif hipotez ise;

$$H_1: \mu > 16$$

olur.

Örnek-2: Tedarikçiden yeni gelmiş bir malzemenin kabul mü edileceği yoksa spesifikasyonlara uymadığı için geri mi gönderileceği konusunda karar vermesi gereken kalite kontrol sorumlusunun sorunu ele alınabilir. Belirli bir malzeme için ortalama uzunluğun 4cm olması gerektiği belirlenmiş olsun. Eğer parçaların ortalama uzunluğu 4cm' den az ya da çok olursa montaj hattında kalite sorunu yaratacaktır. Bu durumda sıfır hipotezi ve alternatif hipotez:

$$H_0: \mu = 4$$

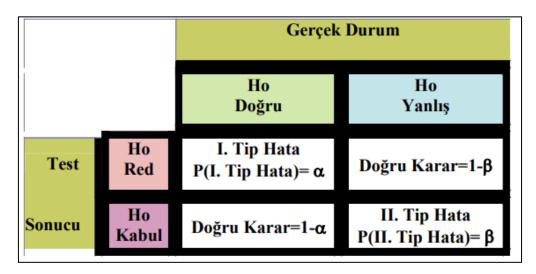
 $H_1: \mu \neq 4$ olur.

- 2) Anlam düzeyinin (α) belirlenmesi: Gerek I. tip hatayı gerekse II. tip hatayı minimuma indirecek şekilde α 'nın çeşitli istatistiksel tekniklerle belirlenmesi mümkün ise de, test yapanın α ve β hatalarına vereceği önem de α ' nın seçiminde rol oynamaktadır. Genellikle %1,%5 ve %10 anlamlılık düzeyleri kullanılmakta ve kararın etkilenmesi için α ' nın değeri testin başlangıcında tespit edilmektedir. Teste başlamadan önce belirlenir
- *3) Örnekleme dağılımının belirlenmesi*: Örneklemin incelenmesiyle elde edilecek sonuçlar olasılığa dayanılarak yorumlanacağından uygun bir olasılık dağılımının belirlenmesi zorunlu hale gelir. Anakütle normal dağıldığında veya ana kütle normal dağılmasa bile örneklem hacmi yeteri kadar büyük (n≥30) olduğunda örnekleme dağılımı normal dağılım mahiyetinde olmaktadır. Dolayısıyla, örneklem hacminin yeteri kadar büyük olması halinde testlerde normal dağılıma başvurabilir.
- *4) Ret bölgesinin belirlenmesi:* Anlamlılık düzeyinin belirlenmesi ile birlikte ret bölgesinin büyüklüğü de tespit edilmiş olur. Diğer taraftan karşıt hipoteze göre de ret bölgesinin yeri belirlenir.

5) Test istatistiğinin hesaplanması ve yorum: İstatistiksel karar, ileri sürülen sıfır hipotezi ile örneklemlerden elde edilmiş ortalama, oran vs. gibi istatistiklerin kıyaslanması sonucu ve örneklem istatistiği ile sıfır hipotezinde belirlenmiş olan ana kütle parametresi arasındaki farkı standart hata birimleriyle ifade eden bir ölçüye ihtiyaç vardır. Kısaca üzerinde test kurulan örneklem istatistiğine "test istatistiği" denir.

Birinci ve İkinci Tip Hatalar: Bir hipotez testi sonucunda örneklem istatistiklerine göre şu dört durumdan birisi gerçekleşmiş olur.

- I. H₀ gerçekte doğrudur ve reddedilmemiştir (kabul edilmiştir).
- II. H₀ gerçekte doğrudur, fakat reddedilmiştir (kabul edilmemiştir).
- III. H_0 gerçekte yanlıştır, fakat reddedilmemiştir (kabul edilmiştir).
- IV. H₀ gerçekte yanlıştır ve reddedilmiştir (kabul edilmemiştir).



- α: Gerçekte doğru olan sıfır hipotezinin reddedilmesi olasılığını (anlamlılık düzeyini),
- $1-\alpha$: Gerçekte doğru olan sıfır hipotezinin reddedilmeme (kabul edilmesi) olasılığını yani testin güvenilirlik düzeyini,
- β: Gerçekte yanlış olan sıfır hipotezinin reddedilmeme (kabul edilmesi) olasılığını,
- 1-β :Gerçekte yanlış olan sıfır hipotezinin reddedilmesi olasılığını yani testin gücünü gösterir.

Hipotez testinde amaç sıfır hipotezini ret veya kabul etmek olduğundan, I. ve II. tip hataları aynı anda işlemek mümkün değildir. İstatistik testler yapılırken bu hata olasılıkları mutlaka vardır ve her ikisini aynı anda küçültmek mümkün değildir. α küçülürken β büyür, β küçülürken α büyür.

Örnek-3: Ali ortağının kendisini aldattığından şüphelidir. Bu bakımdan birbirlerini tamamlayan aşağıdaki hipotezleri ileri sürer.

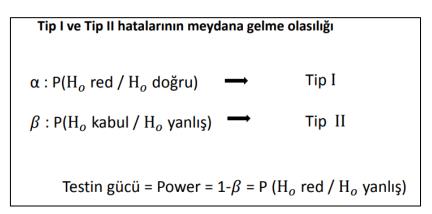
H₀:Ortağım beni aldatıyor

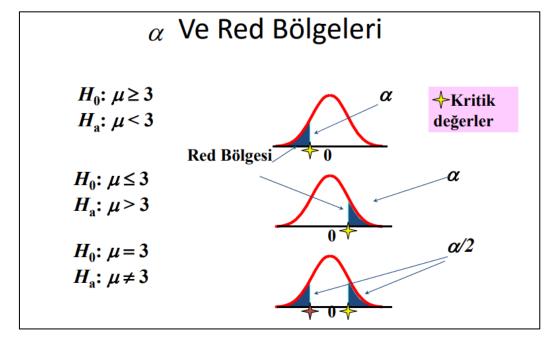
H₁:Ortağım beni aldatmıyor

Bu önermelerin, doğrulukları henüz bilinmediği için, test edilmeleri gerekir. Hipotezlerin testi için elde bazı kanıtlar bulunmalıdır. Burada kanıtlar, ortağının sık sık yurtdışına çıkması, ev eşyalarını değiştirmesi, kendisinden daha lüks bir hayat yaşaması vb. olabilir. Kanıtların yeterlilik derecesi ne olursa olsun, varılacak sonuç hatalı olabilecektir. Yani Ali elindeki kanıtlara dayanarak "Ortağım beni aldatıyor" veya "Ortağım beni aldatmıyor" sonucunu çıkarırsa, bu iki sonuçta hatalı olabilir. Bu ifadelerimizi bir tablo üzerinde gösterelim:

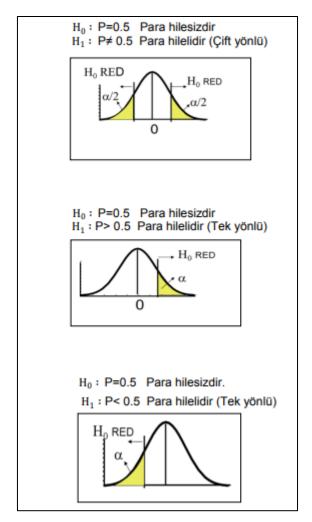
Ali'nin çıkardığı Sonuç	Ortağı Ali'yi Gerçekten	
,,	Aldatıyor	Aldatmıyor
Ortağım beni aldatıyor	Doğru Karar	II. Tip Hata(β)
Ortağım beni aldatmıyor	I. Tip Hata(α)	Doğru Karar

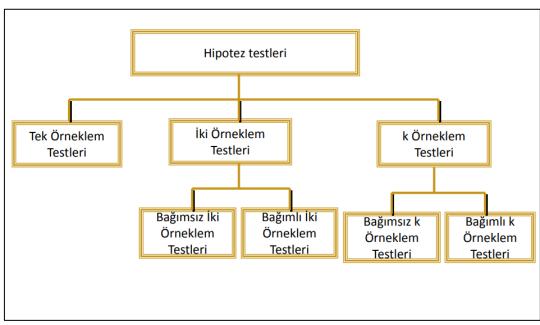
Günlük hayattan alınan örneklerde söz konusu kararlardaki hatalar. I.tip hata ve II. tip hata gibi teknik terimlerle anlatılamaz. Bunun yerine "Dikkat et, ortağın sana kazık atıyor" veya "Günahını alıyorsun adamcağızın" gibi ifadeler kullanılır. Yukarıdaki örnekte yapılacak hatadan hangisinin daha önemli olduğuna Ahmet kişisel olarak karar verecektir. Oysa bilimsel çalışmalarda araştırmacı karar verirken benzeri bir kişisel tercih yapamazlar.





Bir para denemesinde hipotezler üç farklı şekilde kurulabilir.

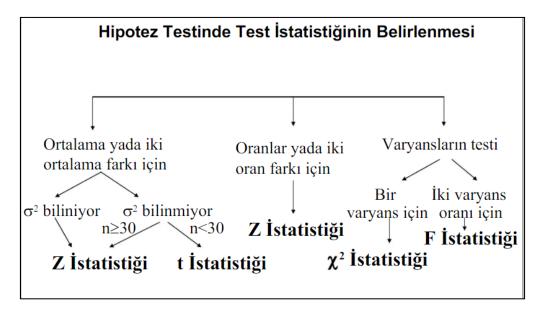




Hipotez testleri parametrik ve parametrik olmayan hipotez testleri olmak üzere iki grupta incelenir. Biz hipotez testleri kapsamında parametrik testlerden bazılarını inceleyeceğiz.

Parametrik Hipotez Testleri

- Gözlemler bağımsız olmalı. Bir birimin verisi başka biriminkini etkilememelidir.
- Gözlemler normal dağılımı gösteren bir anakütleden çekilmiş olmalıdır. Anakütle varyansları aynı olmalı (özel durumlarda varyansların oranı bilinmelidir).
- Veriler nicel ölçekli olmalıdır (Skort(likert tipi), Aralıklı, Oransal ölçekli).
- Değişken normal dağılım göstermelidir. Verilerin normal dağılım gösterdiği uygun Normality testleri ile (Shapiro- Wilk, Ryan- Joiner, Kolmogorov- Smirnow, Anderson-Darling vb.) test edilerek denetlenmelidir.
- Test tipine göre örnek birim sayısı (n)/ sayıları (n_i) (n_i=1,k) yeterli olmalıdır.
- Değişkenin toplum parametreleri bilinmelidir (μ , σ^2 ya da p, npq).
- Sayımla elde edilen Binom, Poisson dağılan değişkenlerin Normale yaklaşım koşullarını gerçeklemesi gerekir.



BİR ANAKÜTLE PARAMETRELERİ İLE İLGİLİ HİPOTEZ TESTLERİ Bir Anakütle Ortalamasının Hipotez Testi

Bu tür hipotezlerin testinin amacı, karşıt hipotezde ileri sürülen iddianın kabul edilip edilmeyeceğinin ortaya çıkartılmasıdır. Ancak karşıt hipotezi direk test etmek mümkün olmadığından, sıfır hipotezi test edilir ve elde edilen sonuç karşıt hipotez için genellenir. Tek grup anakütlenin parametreleriyle ilgili hipotez testlerin varsayımları şunlardır:

- i. Örneklemin alındığı anakütle normal dağılıma sahiptir.
- ii. Örneklemdeki birimler eşit olasılıkla ve iadeli olarak seçilmiş veya anakütle sonsuz büyüklüktedir.

Bu testlerde ileri sürülebilecek karşıt hipotezlere şu şekilde örnek verebiliriz.

- a) Bir firmanın tereyağı paketlerinin ağırlığının 250 gr olması gerektiği halde, firma buna uymamaktadır.
- b) Günlük ortalama üretimi 1000 kg olan bir ilaç fabrikasında uygulanan yeni teknik üretimi artırmıştır.
- c) Turistik amaçla yurtdışına giden vatandaşlarımızın ortama konaklama süresi 20 günden azdır.

Bu örneklere göre sıfır ve karşıt hipotezlerimiz sırasıyla aşağıdaki gibi olacaktır.

$$H_0$$
: μ=μ₀=250 gr H_0 : μ=μ₀=1000 kg H_0 : μ=μ₀=20 gün H_1 : μ≠μ₀=250 gr H_1 : μ>μ₀=1000 kg H_1 : μ<μ₀=20 gün

Anakütle (Popülâsyon) Varyansı (σ²) Biliniyor:

Anakütle normal dağılışlı ve anakütle varyansı biliniyorsa ve n≥30 ise, sıfır hipotezinin karşıt hipoteze karşı testi için Z test istatistiği kullanılır.

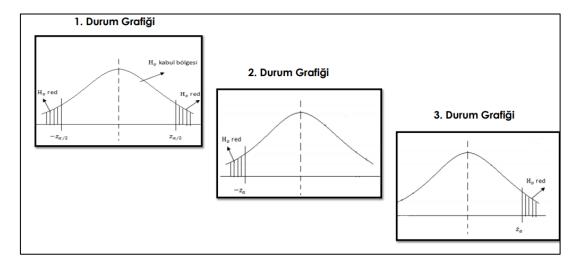
$$Z = \frac{\overline{X} - \mu}{\sigma / \sqrt{n}}$$

Bulunan Z test istatistiği α anlamlılık seviyesine göre Z tablo değerleri ile karşılaştırılır. Karşıt hipotezin tek (α) veya çift (α /2) taraflı olmasına göre karar verilir.

Tek taraflı : $Z < -Z_{\alpha}$ $Z > Z_{\alpha}$

Çift taraflı : $Z < -Z_{\alpha/2}$ $Z > Z_{\alpha/2}$ ise H_0 (sıfır) hipotezi reddedilir.

<u>Hipotezler</u>	<u>Test istatistiği</u>	Karar kura	<u>lı</u>
$H_o: \mu = \mu_0$		i-) $z_0 <$ - $z_{\alpha/2}$ veya $z_0 > z_{\alpha/2}$ ise H $_o$ red	
i-) $H_a: \mu \neq \mu_0$	$z_0 = \frac{\bar{X} - \mu_0}{\sigma / \sqrt{n}}$	ii-) z ₀ <-z _{\alpha}	H _o red
ii-) $H_{\alpha}: \mu < \mu_0$		iii-) z ₀ > z _a	H _o red
iii-) $H_a: \mu > \mu_0$			



p değeri: İstatistik paket programlarında genellikle p olasılığı kullanılır. Bu olasılık H_0 doğru olduğunda, test istatistiğinin hesaplanan değerine eşit ya da daha uç değerler alması olasılığıdır. Hesaplanan p değeri yanılma olasılığından (α) küçük ise H_0 reddedilir.

p< α ise H₀ hipotezi reddedilir,

 $p \ge \alpha$ ise H_0 hipotezi red edilemez.

Tek ve çift taraflı test için bazı kritik Z tablo değerleri

Testin Cinsi	Anlamlılık	Anlamlılık Düzeyi (α)	
	%5	%1	
Tek taraflı test	1.645	2.33	
İki taraflı test	1.960	2.58	

Örnek-1: Bir firmanın tereyağı paketlerinin ağırlığının ortalama 250 gr olması gerektiği halde, firmanın buna uymadığı iddia edilmektedir. Paketleme sırasında rasgele seçilen 100 paketin ortalama ağırlığı 245.5 gr olduğu tespit ediliyor. Anakütlenin standart sapması 15 gr olduğu biliniyor. %5 anlamlılık düzeyinde iddianın doğru olup olmadığını araştırınız?(Tablo=1,96)

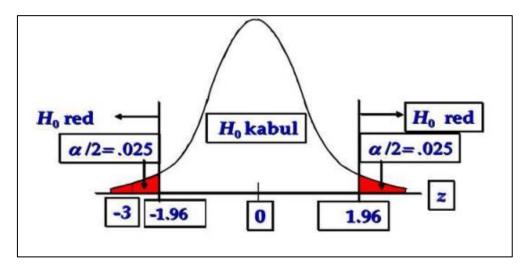
$$H_0$$
: $\mu = \mu_0 = 250$ gr

Anlamlılık düzeyi= α =0.05; α /2=0.025

$$Z_{\alpha/2} = 1.96$$

$$Z = \frac{\overline{X} - \mu}{\sigma / \sqrt{n}} = \frac{245.5 - 250}{15 / \sqrt{100}} = -3 \qquad \text{Z<-Z}_{\alpha/2 \Rightarrow -3 < -1.96}$$

%95 güvenle H_0 reddedilir. Firmanın tereyağı paketlerinin ağırlığı ortalama 250 gr olması gerektiği halde, firma buna uymamaktadır.



Örnek-2: Günlük ortalama üretimi 1000 kg. olan bir ilaç fabrikasında uygulanan yeni bir tekniğin üretimi artırdığı iddia edilmektedir. Üretim sırasında rastgele seçilen 64 günde yapılan üretim belirlendikten sonra bunların ortalaması 1018 kg olarak hesaplanmıştır. Anakütle standart sapması 120 kg olarak biliniyor. %5 anlamlılık seviyesine göre kararınız ne olur?(Tablo=1,64)

 H_0 : $\mu = \mu_0 = 1000 \text{ kg}$

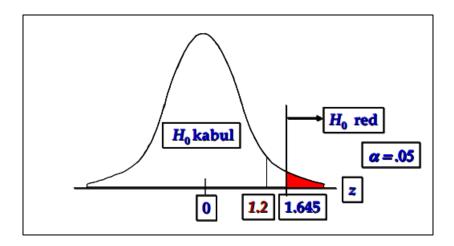
 $H_1: \mu > \mu_0 = 1000 \text{ kg}$

Anlamlılık düzeyi=α=0.05

 $Z_{\alpha} = 1.645$

$$Z = \frac{\overline{X} - \mu}{\sigma / \sqrt{n}} = \frac{1018 - 1000}{120 / \sqrt{64}} = 1.2$$

%95 güvenle H_0 red edilemez (H_0 hipotezini red edecek yeterli kanıt yoktur) Yeni teknik üretimi artırmamıştır.



Yararlanılan Kaynaklar

- 1. Newbold, P. (2005). İşletme ve İktisat İçin İstatistik. (Ü. Şenesen, Çev.). İstanbul: Literatür Yayıncılık.
- 2. Erilli, N.A. (2018). İstatistik-2. Ankara: Seçkin Yayıncılık.
- 3. Spiegel, M. R., & Stephens, L. J. (1988). İstatistik. Çev. Erdal Öney ve Nahit Töre. Ankara: AÜ Basımevi.
- 4. McClave, J. T., & Sincich, T. (2006). Statistics (No. QA 276.12. M33 2006).
- 5. Cengiz, M. A. & Terzi, Y. (2020) Hipotez Testleri Ders Notları