Einführung in die Wahrscheinlichkeitstheortie

17. Dezember 2017

Inhaltsverzeichnis

Literatur: Sheldon Ross: Introduction to probability models.

0.1 0. Einführendes Beispiel

Münzexperiment Bei 50 aufeinanderfolgenden Würfen einer fairen Münze. Mit welcher Wahrscheinlichkeit erscheint im laufe der Würfe 5 mal hintereinander Zahl?

Antwort: die WSK beträgt ca. 0,55.

Dieses Bsp. zeigt:

- intuitive Schätzung ist oft weit von der tatsächlichen WSK entfernt.
- Pechsträhne bei Münzwürfen sehr häufig

0.2 1. Modelierung von Zufallsexperimenten

0.2.1 Ergebnisräume und Ereignisse

Ein Ergebnisraum (ER) ist eine Menge, die alle möglichen Ausgänge eines Zufallsexperiments umfasst. Bezeichnung: Ω.

Beispiele für Ereignisräume:

a) Zufallsexperiment ist ein einmaliger Münzwurf:

$$\Omega = \{K, Z\}$$

b) bei zweifachem Münzwurf:

$$\Omega = \{K, Z\}^2 = \{(K, K), (K, Z), (Z, K), (Z, Z)\}$$

"kartesisches Produkt"

c) einfacher Münzwurf:

$$\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$$

d) zweifacher Münzwurf:

$$\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}^2$$

e) erzielte Tore im einem Fußballspiel:

$$\Omega = \mathbb{N}_{\geq 0} := \{0, 1, 2, ...\}$$

Vorerst: nur ER mit abzählbar vielen Elementen

Wir bezeichnen jede Teilmenge von Ω als ein Ereignis. Man sagt: Ein Ereignis $A \subset \Omega$ tritt ein, falls das Ergebnis des Zufallsexp. in A liegt.

Beispiele für Ereignisse:

a) Sei $\Omega = \{K, Z\}$ (zweifacher Münzwurf)

Ereignis in Worten	Ereignis als Teilmenge
1. Wurf ist Zahl	{(Z,K), (Z,Z)}
Höchstens ein Wurf ist Zahl	{(Z,K), (K,K), (K,Z)}

b) Sei $\Omega = \mathbb{Z}_{\geq 0}$ (Tore im Fußball)

Ereignis in Worten	Ereignis als Teilmenge
höchstens drei Tore	{0,1,2,3}
mindestens ein Tor	$\mathbb{Z}_{>0}$
gerade Anzahl an Toren	{0,2,4,6,...}

Seien A,B zwei Ereignosse von Ω.

$$A \subset \Omega$$

$$B \subset \Omega$$

Neue Ereignisse: TABELLE

Ein Ereignis heißt Elementarereignis oder Ergebnis, falls das Ereignis nur ein Element enthält. Wir bezeichnen mit $\mathcal{P}(\Omega) := \{A : A \subset \Omega\}$ die Potenzmenge von Ω. $\mathcal{P}(\Omega)$ ist häufig sehr viel größer als der Ergebnisraum Ω.

1.2 Wahrscheinlichkeitsmaß (WM)

Definition 1.1 Sei $\Omega \neq \emptyset$ abzählbar. Das WSK-maß ist eine Abbildung $P : \mathcal{P}(\Omega)$.

$$P : \mathcal{P}(\Omega) \to [0;1]$$

mit zwei Eigenschaften. Eine Abbildung
abbildung heißt WM, falls gilt:

(W1) $P(\Omega) = 1$

(W2) Sind $A_1, A_2, ..$ disjunkte Ereignisse (d. h. $A_i \cap A_j = \emptyset$, falls $i \neq j$)

$$P\left(\bigcup_{n=1}^{\infty}\right) = \sum_{n=1}^{\infty} P(A_n)$$

HIER FEHLT ETWAS

Man sagt $P(A)$ ist die WSK des Ereignisses A.
Beispiele für WSK-maße

a) Modell des einmaligen Münzwurfes einer fairen Münze $\Omega = \{K, Z\}$ und P WM mit $P(\{K\}) = P(\{Z\}) = \frac{1}{2}$

b) Modell eines fairen Würfelwurfs $\Omega = 1, 2, 3, 4, 5, 6$ und P WM mit $P(1) = P(2) = ... = P(6) = \frac{1}{6}$

c) La-Place-Experiment: alle Ergebnisse mind. Gleichwahrscheinlich (Verallgemeinerung von a) und b)). Sei Ω eine endliche Menge und P WM

$$P(A) := \frac{|A|}{|\Omega|}, A \in \mathcal{P}(\Omega)$$

$|A|$-Möglichkeit von A-Kardinalität: Anzahl der Elemente in A

Lemma / Satz 1.2 (Eigenschaften von WM) Sei $P : \mathcal{P}(\Omega) \to [0;1]$ein WM. Dann gilt:

(1) $P(\emptyset) = 0$

(2) $A_1, ..., A_n$ disjunkt $\Rightarrow P\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) = \sum_{i=1}^{n} P(A_i)$ (endliche Additivität)

Des Weiteren gilt für alle $A, B \in \mathcal{P}(\Omega)$.

(3) $A \subset B \Rightarrow P(A) \leq P(B)$ (Monotonieeigenschaft des WM)

(4) $P(A^C) = 1 - P(A)$

(5) $P(A \setminus B) = P(A) - P(A \cap B)$

(6) $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$

Beweis

(1) Setzen $A_n := \emptyset$ für alle $n \geq 1$
Dann folgt aus (W2)

$$P(\emptyset) = P\left(\bigcup_{k=1}^{\infty}\right) = \sum_{n=1}^{\infty} P(A_n) = P(\emptyset) + P(\emptyset) + ...$$

Da $P(\emptyset) \in [0;1]$ muss $P(\emptyset) = 0$ gelten.

(2) Sei $A_1, ..., A_n$ beliebige disjunkte Ereignbisse und $A_m \neq \emptyset$ für alle $m > n$. Dann folgt aus (W2) und (1)

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) = \underbrace{P\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right)}_{\text{Bei } i \geq (n+1) \text{ füge } \emptyset \text{ hinzu}} = P(A_i) = \sum_{i=1}^{\infty} P(A_i) = \sum_{i=1}^{n} P(A_i)$$

(3) Sei $A \subset B$. Dann ist disjunkte Vereinigung von A und $B \setminus A$.
Wegen (2) gilt $P(B) = P(A) + \underbrace{P(B \setminus A)}_{\geq 0} \geq P(A)$

(4) Beachte: Ω ist disjunkte Vereinigung von A und A^C.
Also wegen (2): $P(\Omega) = P(A) + P(A^C)$
Da $P(\Omega) = 1$, folgt $P(A^C) = 1 - P(A)$

(4) $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$

(5 & 6) ÜBUNG

Bemerkung: Sei Ω abzählung und P ein WM auf $\mathcal{P}(\Omega)$. Jedes Ereignis $A \subset \Omega$ ist abzählbare Vereinigung der Elementarereignisse $\{\omega\}$ mit $\omega \in A$. Also folgt aus (W2) und (2):

$$P(A) = \sum_{\omega \in A} P(\{\omega\}) \tag{1}$$

Ausblick: Man kann WM auf überabzählbaren ER definieren: Eigenschaften (1)-(6) gelten dann noch, aber Eigenschaft (1.1.) nicht mehr!

Beispiel 1.3 (Lange Sequenzen von Zahl-Würfen)

Ziel Methode, um Frage aus Kap. 0. zu beantworten.

Dazu: Wie groß ist die WSk, dass bei n Würfen einer fairen Münze höchstens x mal hintereinander Z (= Zahl) erscheint?

$\rightarrow$ müssen dafür ein Modell erstellen:

- Erhgebisraum
- WSK-Maß

Hierzu sei
$\Omega = \{K, Z\}^n$ [1] und P_n WM mit $P_n(\{\omega\}) = \frac{1}{|\Omega_n|} = \frac{1}{2^n}$
$A_n =$ "Keine Z-Teilsequenz ist länger als x"[2]
$a_n(x) := |A_n(X)|$
Beachte: falls $x >= n$, dann ist $a_n(x) = 2^n$
Für später setzen wir $a_0(x) = 1$[3]. Für festes x lässt sich $a_n(x)$ rekursiv in n berechnen.

Beispiel: jede Folge in $A_n(2)$ startet mit K,ZK oder ZZK. Beobachte: In $A_n(2)$ gibt es

- $a_n - 1(2)$ Elemente, die mit K starten
- $a_n - 2(2)$ Elemente, die mit ZK starten
- $a_n - 3(2)$ Elemente, die mit ZZK starten

Also gilt für alle $n >= 3$:

$$a_n(2) = a_{n-1}(2) + a_{n-2}(2) + a_{n-3}(2)$$

Allgemein lässt sich zeigen:

$$x) = \sum_{j=0}^{x} a_{n-j-1}(x) \text{ für alle } n >= x + 1 \tag{2}$$

Die gesuchte WSK ist

$$P_n(A_(x)) = \frac{a_n(x)}{2^n} \tag{3}$$

Die Formeln (1.2) und (1.3) lassen sich gut implementieren[4]
Im Bsp. aus Kap. O ist die WSK des Komplementes von $A_{50}(4)$ gesucht. Numerische Berechnung:

$$P_50(A_{50}(4)^C) = 1 - P((A_{50}(4)) = 1 - \frac{a_{50}(4)}{2^50} \approx 0,55$$

[1] endlich, damit abzählbar $\rightarrow$ (1.1) anwendbar
[2] Wenn die Ereignisse in Worten knackig ausgedrückt werden können, kann und sollte man eine solche Umschreibung angeben.
[3] Rekursionsanfang
[4] vgl. Übungsblatt 2

0.2.2 Exkurs: Nützliche Formeln der Kombinatorik

Ziel: Formeln, die hilfreiche sind zu Bestimmung von Mächtigkeiten. Zur Illustration denken wir an eine Urne mit n gleichförmigen Kugeln, die mit 1 bis n durchnummeriert sind.

1. Variationen (alt. geordnete Stichproben) mit Widerholung
   Man zieht k mal mit Zurücklegen; Reihenfolge ist wichtig.
   Die Anzahl möglicher Ergebnisse: n^k

2. Variationen ohne Wiederholung
   Man zieht k mal ohne Zurücklegen; Reihenfolge ist wichtig.

   Die Anzahl möglicher Ergebnisse:

   $$n * (n+1) * ... * (n-k+1)) = \frac{n!}{(n-k)!}$$

3. Kombinationen (alt. ungeordnete Stichproben) ohne Widerholung
   Man zieht k mal ohne Zurücklegen, Reigenfolge ist egal. Die Anzahl möglicher Ergebnisse: !!!!!!!!!!!!!!!! (n über k)

4. Kombinationen mit Wiederholung Man zieht k mal mit Zurücklegen, Reihenfolge ist egal. Die Anzahl möglicher Ergebnisse:

   Begründung anhand eines Beispiels: Sei $\underbrace{n=5}_{\text{Farben}}$ und $\underbrace{k=3}_{\text{Züge}}$. Jede Kombination mit Wdh. entspricht einer Folge mit Symbolen | und *.

HIER FEHLT NE MENGE
Anwendungsbeispiele in der W-Theorie

1. In der Übung sitzen 23 Studierende. Mit welcher WSK haben alle an unterschiedlichen Tagen Geburtstag=
   (Ohne Schaltjahr) $n = 365$; $k = 23$; mit Wiederholung
   1. Fall): Variationen Modell: Ω = Menge der Variationen mit Wdh., wobei $n = 365$ und $k = 23$. P ist WM mit $P(\{\omega\}) = \frac{1}{|\Omega|}$ (Laplace)
   Beachte: $|\Omega| = 365^{23}$ (a)) Das Ereignis älle an unterschiedlichen Tagen Geburtstagïst A = Menge der Variationen ohne Wdh. Die gesuchte WSK ist

   $$P(A) = \frac{|A|}{|\Omega|} = \underbrace{\frac{365!}{(365-23)!}}_{|A|} * \underbrace{\frac{1}{365^{23}}}_{|\Omega|} \approx 0,49$$

   Fazit: Es ist wahrscheinlicher, dass 2 Studierende am selben Tag Geburtstag haben als, dass dies nicht der Fall ist!

2. Man zieht 2 mal ohne Zurücklegen aus einer Urne mit 7 Schwarzen und 5 weißen Kugeln. Mit welcher WSK zieht man 2 mal schwarz? 1. Trick: nichts hindert uns daran, uns die Kugeln nummeriert zu denken Für die Beantwortung denkt man sic die Kuggeln durchnummeriert. Die ersten 7 Kugeln sind schwarz, die letzten 5 weiß.

   Modell: Ω = Menge der Kombinationen ohne Wiederholung mit n = 12, k = 2. P WM mit $P(\{\omega\} = \frac{1}{|\Omega|})$. Beachte: $|\Omega| = ... = \frac{12!}{(12-2!2!)} = \underline{66}$ Das Ereignis "Beide Schwarz" ist $A = \{\{\omega_1, \omega_2\} : \omega_1, \omega_2 \in \{1, ..., 7\}$ und $\omega_1 \neq \omega_2\}$

   Beachte: $|A| = \{\}$