

计算机的不可计算性

11 月 4 日的茶会

0.引言

要了解一个学科，就应该了解一个学科的弱点。作为计算机专业的一员，了解计算机的局限性是我们的必须要务。同时，对于问题的局限与否，又需要有实在的证明和证伪。因此引入计算机的不可计算性的讨论。

1.引例：计算机不能干什么

1.1 病毒的判断与否

结论：不存在一个通用程序，使之可以判断一个程序是否为计算机病毒

1.1.1 病毒的特征

- (1) 自我复制
- (2) 危害计算机硬件与软件
- (3) 传播

1.1.2 局限性

无法给定一个通用的程序，判断程序是否可自我复制。

一个可能的样本：模拟运行，判断触发条件 -> 不合题：与直接执行程序相同。并非一个通用的程序（算法一段程序作为一段代码，输入的为程序，输出“yes” or “no”

1.2 停机问题

结论：不存在一个通用程序，使得可以判断任意一个程序是否运行中。

背景：图灵的图灵机和图灵停机问题

假设：可以存在一个通用程序 $H(M, \omega)$

使得这个程序可以得到一个 output，判断这个程序 M 是否运行中

M 为该机器， ω 为该机器的输入。

验证矛盾的方案：

假设停机问题有解，则可定义一个程序，使得输出相反的结论：

依据假设，设定自定义程序 $D(M, H(M, M))$ ，使得当 $H(M, M)$ 输出 YES 时， D 输出 NO；则： $D(D) : \rightarrow \rightarrow$

则：if $D \rightarrow \text{yes}$ then $D \rightarrow \text{no}$, H is die

if $D \rightarrow \text{no}$ then $D \rightarrow \text{yes}$ yes, H is running

矛盾

引出：康托尔对角线认证法

eg：自然数集 N 和实数集 R 大小比较

先提认证：[0, 1] 之间的实数个数有无穷多个。

设： $a_1, a_2, \dots, a_n \in [0, 1]$, 每个 a 的小数位为数字 (0 ~ 9) 的不同排列。

$$a_1 = 0.1234567 \dots \dots \dots$$

$$a_2 = 0.3249766 \dots \dots \dots$$

$$a_3 = 0.9871445 \dots \dots \dots$$

对于前 n 个数 a ，总存在第 m 个数 $m > n \rightarrow a_m$ ，使得：

m 的第 i 小数位与 a_i 的对应的第 i 位相异：此数不存在于编号之中。

$$a_1 = 0.\underline{5}105110\dots$$

$$a_2 = 0.4\underline{1}32043\dots$$

$$a_3 = 0.82\underline{4}5026\dots$$

$$a_4 = 0.233\underline{0}126\dots$$

$$a_5 = 0.4107\underline{2}46\dots$$

$$a_6 = 0.99378\underline{3}8\dots$$

$$a_7 = 0.010513\underline{5}\dots$$

因此可证明：[0, 1] 之间的实数有无穷多个；实数集是不可数集

同时：[0, 1] 之间的自然数仅有 0, 1

所以：实数集比自然数集大很多。证毕。

同理：停机问题：假设存在一个 D ，可以判断一个程序什么时候停机。所以。单自己以自己为操作数：对于任意一个此程序 D ，总存在一个程序 D ，使得矛盾。

	D	E	F	G	
D	X				
E		X			
F			X		
G				X	
					...

2. 拓展：现实中一阶逻辑下对于数学难题证明、证伪的局限性

2.1 理发师悖论：

从前有个（傻逼）理发师，他说：“我只为城里不为自己理发的人理发”。

那么这就尴尬了。他是要不要给自己理发呢。

If 给自己理发 then 他给自己理发了，说好的只为不为自己理发的人理发呢。

Else if 不给自己理发 then 他是不是应该给自己理发？

So : 引出：罗素悖论：设命题函数 $P(x)$ 表示“ $x \notin x$ ”，现假设由性质 P 确定一个集合 A ——也就是说“ $A = \{x | x \notin x\}$ ”。那么现在的问题是： $A \in A$ 是否成立？首先，若 $A \in A$ ，则 A 是 A 的元素，那么 A 不具有性质 P ，由命题函数 P 知 $A \notin A$ ；其次，若 $A \notin A$ ，也就是说 A 具有性质 P ，而 A 是由所有具有性质 P 的类组成的，所以 $A \in A$ 。

2.2 希尔伯特的函数实数——映射的推证：

原题：对于任意一个的实数 $R(x)$ ，总存在一个函数 $g_x(x)$ ，使得两者一一对映

证伪：构造： $f(x) = g_x(x) + 1$ 与：题设矛盾

$$f(1) = g_1(1) + 1$$

$$f(2) = g_2(2) + 1$$

.....

x 与 $f(x)$ 对应，则：

$x \leftrightarrow g(x) : \text{---} \rightarrow \text{不对映！}$

对于任意一个 x ，总存在一个函数，使之与函数不对映

3.结论：

关于计算机的局限性：据哥德尔的定理，在一阶逻辑或者数论体系下，就有很多不可证明不可证伪的结论。在计算机只有一阶逻辑的能力的情况下，会有大量的问题不可解。那么，计算机的局限性就体现出来。对于计算机的体系突破，以及对计算机的应用能力与范围，需要深入了解与挖掘。同时，人无法解决的问题计算机在绝大多数情况下也无法解决。了解其局限性，才能深入了解计算机的发展方向，提高科研的正确性与可行性。