命题证明笔记

对于线性变换必存在唯一变换矩阵

证明:

1.存在性:

对于某一线性变换T,其存在以下性质:
a.齐次性:$T(ax) = aT(x)$;
b.可加性:$T(x+y) = T(x) + T(y)$;

现给定某一向量$\vec{v}, \vec{v} \in D_T, \vec{v} \in R^n$.
对于向量空间R^n的基$B = \{\vec{e} | \vec{e} = \vec{e}_i, i \in N^+, i \leq n\}$,可用其来表示$\vec{v}$,即:

$$\vec{v} = c_1\vec{e}_1 + c_2\vec{e}_2 + c_3\vec{e}_3 + \ldots + c_n\vec{e}_n$$

现对$\vec{v}$做线性变换T,可得:
$T(\vec{v}) = T(c_1\vec{e}_1 + c_2\vec{e}_2 + c_3\vec{e}_3 + \ldots + c_n\vec{e}_n)$
$= T(c_1\vec{e}_1) + T(c_2\vec{e}_2) + T(c_3\vec{e}_3) + \ldots + T(c_n\vec{e}_n)$
$= c_1T(\vec{e}_1) + c_2T(\vec{e}_2) + c_3T(\vec{e}_3) + \ldots + c_nT(\vec{e}_n)$

那么上述的等式等价于:

$$[T(\vec{e}_1)\ T(\vec{e}_2)\ T(\vec{e}_3) \ldots\ T(\vec{e}_n)] \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \\ . \\ . \\ . \\ c_n \end{bmatrix} \tag{1}$$

现令矩阵$A = [T(\vec{e}_1)\ T(\vec{e}_2)\ T(\vec{e}_3) \ldots\ T(\vec{e}_n)]$,
其中$T(\vec{e}_i), i \in N^+, i \leq n$为A的列向量,$\vec{c}$为属于$R^n$的列向量;
综上所述,$\exists Matrix\ A$,使得$T(\vec{x}) = A\vec{x}$