计算机的不可计算性

11 月 4 日的茶会

0.引言

要了解一个学科，就应该了解一个学科的弱点。作为计算机专业的一员，了解计算机的局限性是我们的必须要务。同时，对于问题的局限与否，又需要有实在的证明和证伪。因此引入计算机的不可计算性的讨论。

1.引例：计算机不能干什么

1.1病毒的判断与否

结论：不存在一个通用程序，使之可以判断一个程序是否为计算机病毒

1.1.1 病毒的特征

（1）自我复制

（2）危害计算机硬件与软件

（3）传播

1.1.2 局限性

无法给定一个通用的程序，判断程序是否可自我复制。

一个可能的样本：模拟运行，判断触发条件－->不合题：与直接执行程序相同。并非一个通用的程序（算法一段程序作为一段代码，输入的为程序，输出“yes” or “no”

1.2停机问题

结论：不存在一个通用程序，使得可以判断任意一个程序是否会停止运行。

背景：图灵的图灵机和图灵停机问题

假设：可以存在一个通用程序$H(\mathrm{M},\omega)$

使得这个程序可以得到一个 output，判断这个程序 M 是否会停止运行。

M 为该机器，ω为该机器的输入。

验证矛盾的方案：

假设停机问题有解，则可定义一个程序，使得输出相反的结论：

依据假设，设定自定义程序 D（M，H（M，M））, 使得当 H(M,M)输出 YES 时，D 输出 NO；则：D（D）：→→

则：if D→ yes then D → no，H is die

if D→ no then D→ yes　　yes，H is running

矛盾

引出：康托尔对角线认证法

eg：自然数集 N 和实数集 *R* 大小比较

先提认证： [0, 1] 之间的实数个数有无穷多个。

设：$a_1, a_2, \ldots, a_n \in [0,1]$,每个 a 的小数位为数字（0 ~ 9）的不同排列。

$a_1 = 0.1234567 \ldots \ldots \ldots$

$a_2 = 0.3249766 \ldots \ldots \ldots$

$a_3 = 0.9871445 \ldots \ldots \ldots$

对于前 n 个数 a，总存在第 m 个数 m>n → a_m，使得：

m 的第 i 小数位与a_i的对应的第 i 位相异：此数不存在于编号之中。

a_1 = 0 . **5** 1 0 5 1 1 0 ...

a_2 = 0 . 4 **1** 3 2 0 4 3 ...

a_3 = 0 . 8 2 **4** 5 0 2 6 ...

a_4 = 0 . 2 3 3 **0** 1 2 6 ...

a_5 = 0 . 4 1 0 7 **2** 4 6 ...

a_6 = 0 . 9 9 3 7 8 **3** 8 ...

a_7 = 0 . 0 1 0 5 1 3 **5** ...

因此可证明：[0, 1] 之间的实数有无穷多个；实数集是不可数集

同时：[0, 1] 之间的自然数仅有 0, 1

所以：实数集比自然数集大很多。证毕。

同理：停机问题：假设存在一个 D，可以判断一个程序什么时候停机。所以。单自己以自己为操作数：对于任意一个此程序 D，总存在一个程序 D，使得矛盾。

	D	E	F	G	
D	X				
E		X			
F			X		
G				X	
					…

2．拓展：现实中一阶逻辑下对于数学难题证明、证伪的局限性

2.1 理发师悖论：

从前有个（傻逼）理发师，他说：“我只为城里不为自己理发的人理发”。那么这就尴尬了。他是要不要给自己理发呢。

If 给自己理发 then 他给自己理发了，说好的只为不为自己理发的人理发呢。

Else if 不给自己理发 then 他是不是应该给自己理发？

So ：引出：**罗素悖论**：设命题函数 P(x)表示“x∉x”，现假设由性质 P 确定一个集合 A——也就是说“A={x|x∉x}”。那么现在的问题是：A∈A 是否成立？首先，若 A∈A，则 A 是 A 的元素，那么 A 不具有性质 P，由命题函数 P 知 A∉A；其次，若 A∉A，也就是说 A 具有性质 P，而 A 是由所有具有性质 P 的类组成的，所以 A∈A。

2.2 希尔伯特的函数实数一一映射的推证：

原题：对于任意一个的实数 R(x)，总存在一个函数$g_x(x)$，使得两者一一对映

证伪：构造： $f(x) = g_x(x) + 1$ 与：题设矛盾

$f(1) = g_1(1) + 1$

$f(2) = g_2(2) + 1$

……………

x 与 f（x）对应，则:

x←→g(x):---→不对映！

对于任意一个 x，总存在一个函数，使之与函数不对映

3.结论：

关于计算机的局限性：据哥德尔的定理，在一阶逻辑或者数论体系下，就有很多不可证明不可证伪的结论。在计算机只有一阶逻辑的能力的情况下，会有大量的问题不可解。那么，计算机的局限性就体现出来。对于计算机的体系突破，以及对计算机的应用能力与范围，需要深入了解与挖掘。同时，人无法解决的问题计算机在绝大多数情况下也无法解决。了解其局限性，才能深入了解计算机的发展方向，提高科研的正确性与可行性。