命题证明笔记

对于线性变换必存在唯一变换矩阵

证明:

1.存在性:

对于某一从R^n到R^m的线性变换T,其存在以下性质:
a.齐次性:$T(ax)=aT(x)$;
b.可加性:$T(x+y)=T(x)+T(y)$;

现给定某一向量$\vec{v}$,$\vec{v}\in D_T$,$\vec{v}\in R^n$.
对于向量空间R^n的基$B=\{\vec{e}|\vec{e}=\vec{e}_i,i\in N^+,i\leq n\}$,可用其来表示$\vec{v}$,即:

$$\vec{v}=c_1\vec{e}_1+c_2\vec{e}_2+c_3\vec{e}_3+\ldots+c_n\vec{e}_n$$

现对$\vec{v}$做线性变换T,可得:
$T(\vec{v})=T(c_1\vec{e}_1+c_2\vec{e}_2+c_3\vec{e}_3+\ldots+c_n\vec{e}_n)$
$=T(c_1\vec{e}_1)+T(c_2\vec{e}_2)+T(c_3\vec{e}_3)+\ldots+T(c_n\vec{e}_n)$
$=c_1T(\vec{e}_1)+c_2T(\vec{e}_2)+c_3T(\vec{e}_3)+\ldots+c_nT(\vec{e}_n)$

那么上述的等式等价于:

$$[T(\vec{e}_1)\ T(\vec{e}_2)\ T(\vec{e}_3)\ldots\ T(\vec{e}_n)]\begin{bmatrix}c_1\\c_2\\c_3\\.\\.\\.\\c_n\end{bmatrix} \tag{1}$$

现令矩阵$A = [T(\vec{e}_1)\ T(\vec{e}_2)\ T(\vec{e}_3)\dots\ T(\vec{e}_n)]$,
其中$T(\vec{e}_i), i \in N^+, i \leq n$为A的列向量,$\vec{c}$为属于$R^n$的列向量;
综上所述,$\exists Matrix\ A$,使得$T(\vec{x}) = A\vec{x}$

2.唯一性:

从上述(1)出发
$\because$线性变换T其本质是一种映射
$\therefore$在对于任意$\forall \vec{x} \in D_T$其值域R_T内有且仅有唯一元素与其对应
$\therefore$矩阵A每一列向量唯一
故矩阵A唯一.

综合$1, 2$可得,对于某一线性变换T必存在唯一的变换矩阵