2023～2024 学年第一学期

《高等数学（A）》（上）期末考试试卷(A 卷) (闭卷，启明学院用)

院(系) 启明学院　　　　专业班级 ________________

学号 ________________　　　　姓名 ________________

考试日期: 2024-01-10　　　　**考试时间:** 8：30-11：00 AM

题号	一	二	三	四	五	总分
满分	16	20	24	16	24	100
得分						

得　分	
评卷人	

一. 选择题（每小题 4 分，共 16 分）

1. 关于狄利克雷函数 $D(x)$，下列说法**正确**的是 (　　)
   A. $D(x)$ 存在第一类间断点
   B. $xD(x)$ 存在连续点
   C. $D(x)$ 存在极值点
   D. $D(x)$ 在$[0,1]$上黎曼可积

2. 设 f 为定义在 $\mathbf{R}$ 上的函数, 下列说法**错误**的是 (　　)
   A. 若$\lim\limits_{x\to\infty} f(x)$存在, 则 $\lim\limits_{x\to\infty} |f(x)|$ 存在
   B. 若 f 连续, 则 $|f|$ 一定连续
   C. 若 f 在$[a,b]$上黎曼可积, 则 $|f|$ 在 $[a,b]$ 上也黎曼可积
   D. 若$\int_0^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x$ 收敛, 则 $\int_0^{+\infty} |f(x)|\,\mathrm{d}x$ 一定收敛

3. 设 $f:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$ 的一阶导数连续, 且 f' 恰有一个零点 a, 则 (　　)
   A. f 必有两个零点
   B. a 必为 f 的极值点
   C. f 必在 $(a,+\infty)$上单调
   D. f 在 $\mathbf{R}$ 上不可能单调

4. 曲线 $y=e^x\sin x$ 一共有 (　　) 个拐点
   A. 0　　　B. 1　　　C. 2　　　D. 无数

得　分	
评卷人	

二. 填空题（每小题 4 分，共 20 分）

5. x^x 在 $x=1$ 处带 Peano 余项的二阶 Taylor 公式为 ________________.

6. 曲线 $y=\frac{x^2+3}{x-1}$ 的全部渐近线有 ________________.

7. $\int \frac{2x+3}{x^2+4x+5}\mathrm{d}x=$ ________________.

8. $\int_0^{2\pi}\sin^3 x\,\mathrm{d}x=$ ________________.

9. 设连续函数 $y(x)$ 满足 $y(x)=2023e^x+e^x\int_0^x y^2(t)dt$, 则 $y(x)=$ ________________.

得　分	
评卷人	

三. 计算题(每小题 6 分，共 24 分)

10. 求极限 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\mathrm{e}^x-1-x}{2(1+x)^{\frac{1}{2}}-2-\ln(1+x)}$.

11. 设 f 连续，F 为 f 的一个原函数，$F(1)=2$，$F(0)=0$，求极限 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\pi}{2n}\sum\limits_{i=1}^{n}f\left(\sin\frac{i\pi}{2n}\right)\cos\frac{i\pi}{2n}$

12. 设 $y=\left(x+\frac{3}{4}\right)\mathrm{e}^{x}$ 是微分方程 $y''+y'-6y=ax\mathrm{e}^{x}$ 的一个特解，求 a 的值以及该方程的通解.

13. 计算由直线 $y=\frac{2}{\pi}x$ 和曲线 $y=\sin x$ 在第一象限所围成的图形面积和该图形绕 x 轴旋转一周所得旋转体体积.

得　分	
评卷人	

四. 解答题（每小题 8 分，共 16 分）

14. (1)证明: 若函数 f 在 $(\mathbf{0},+\infty)$ 上有界且一致连续, 则 f^2 在 $(\mathbf{0},+\infty)$ 上也一致连续.

(2) 举例说明: 存在 $(\mathbf{0},+\infty)$ 上的无界连续函数 f, 满足 f^2 在 $(\mathbf{0},+\infty)$ 上一致连续.

15. (1) 判断反常积分$\int_0^{\pi/2}\ln(\cos x)\mathrm{d}x$的收敛性, 若收敛则求其值, 若发散, 请说明理由.

(2) 确定 p 的范围, 使反常积分 $\int_1^{+\infty}\frac{x}{x^2+2023}\ln\left(1+\frac{1}{x^p}\right)\mathrm{d}x$ 收敛，并说明理由.

得　分	
评卷人	

五. 证明题（每小题 8 分，共 24 分）

16．(1) 设函数 f, g 在区间 $[a,b]$ 上 n 阶可导，$f^{(k)}(a) = g^{(k)}(a), k = 0,1,2,\cdots,n-1$，且 $f^{(n)}(x) = g^{(n)}(x) = 0$，$\forall\, x \in [a,b]$．证明 $f(x) = g(x)$，$\forall\, x \in [a,b]$.

(2) 设函数 f 在 x_0 某邻域内有定义且在 x_0 可导，实数 a, b, c 满足 $a+b+c=0, a+2b+3c=0$.

证明 $\lim\limits_{h\to 0}\frac{1}{h}[af(x_0+h)+bf(x_0+2h)+cf(x_0+3h)] = 0.$

17. 设函数 f 在 $\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$ 上一阶可导，且满足 $\int_0^{\pi/2} f(x)\sin x\,\mathrm{d}x = 1$. 证明：

(1) 存在 $\xi \in \left(0,\frac{\pi}{2}\right)$ 使得 $f(\xi) = 1$.

(2) 存在 $\eta \in \left(0,\frac{\pi}{2}\right)$ 使得 $f'(\eta)\cos\eta = (f(\eta)-1)\sin\eta$.

18. (1) 设函数 f,g 在区间 $[a,b]$ 上黎曼可积，证明 Cauchy-Schwarz 不等式:

$$\left(\int_a^b f(x)g(x)dx\right)^2 \leq \left(\int_a^b f^2(x)dx\right)\left(\int_a^b g^2(x)dx\right).$$

(2) 设函数 f 在 $[0,1]$ 上连续，证明:

$$\int_0^1 \left[\int_0^x f(u)\mathrm{d}u\right]^2 \mathrm{d}x \leq \frac{1}{2}\int_0^1 (1-x^2)\, f^2(x)dx.$$