《线性代数》

2023-2024 学年第一学期期末考试 A 卷

一、判断题（2 分×8=16 分）

1.若A，B为满足$BA=0$的任意两个非零矩阵，则A的行向量形成的向量组线性相关.（　　）

2.向量组$\{\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s\}$可由向量组$\{\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_t\}$线性表出，则$r\{\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s\}\leqslant r\{\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_t\}$.

（　　）

3.2023 个 2024 维实向量可以生成至多 2023 维的空间，2024 个 2023 维实向量也可以生成至多 2023 维的空间.（　　）

4.设A为n阶方阵，则A^{2023}，A的伴随矩阵A^*的特征向量都与A的特征向量相同.（　　）

5.若齐次线性方程组$AX=0$有唯一零解，则非齐次线性方程组$AX=b$有唯一解.（　　）

6.设A，B均为n阶实矩阵，对任意的n维实向量X，都有$X^TAX=X^TBX$，则$A=B$.（　　）

7.设A是 2024 阶实对称阵，$AB+B^TA$是正定矩阵，则矩阵B可逆.（　　）

8.任意两个 2023 阶的正定矩阵必等价.（　　）

二、填空题（4 分×5=20 分）

1.设$D=\begin{vmatrix}1&1&\cdots&1\\0&2&\cdots&2\\\vdots&\vdots&\vdots&\vdots\\0&0&\cdots&2024\end{vmatrix}$为 2024 阶上三角行列式，则$D$的所有元素的代数余子式之和$=$________.

2.设A，B均为 2023 阶方阵，且$|A|=2023$，$|B|=2024$，$|A^{-1}+B|=2024$，则$|A+B^{-1}|=$________.

3.设A为 2024 阶方阵，A的每行元素之和均为 2024，则A^{2023}全部元素的和$=$________.

4.设向量组$\{\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3\}$为$\mathbb{R}^3$的一组基，当$k$满足条件________时，$\beta_1=2\alpha_1-2k\alpha_3$，$\beta_2=2\alpha_2$，$\beta_3=\alpha_1+(k+1)\alpha_3$也为$\mathbb{R}^3$的一组基。

5.设二次型$f(x_1,x_2,x_3)=ax_1^2+ax_2^2+(a+1)x_3^2+2x_1x_2$的规范形为$f=y_1^2+y_2^2$，则$a=$________.

三、（10 分

设$n(n\geq 3$

四、(1

设$f(x$

三、(10分)

设$n(n\geqslant 3)$阶方阵$\boldsymbol{A}$的行列式$|\boldsymbol{A}|=a$，将$\boldsymbol{A}$的每一列减去$\boldsymbol{A}$的其余所有各列得到方阵$\boldsymbol{B}$，求$|\boldsymbol{B}|$.

四、(10分)

设$f(x)=1+x+x^2+x^3+x^4$，$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&0&1\\0&0&0&0\end{bmatrix}$，求$f(\boldsymbol{A})$，$[f(\boldsymbol{A})]^{-1}$.

五、(12 分)

设矩阵 $A=\begin{bmatrix}1 & -1 & -1\\ 2 & a & 1\\ -1 & 1 & a\end{bmatrix}$，$B=\begin{bmatrix}2 & 2\\ 1 & a\\ b & -2\end{bmatrix}$，当 a，b 为何值时，矩阵方程 $AX=B$ 无解、有唯一解、有无穷多解？在有解时，求解此方程.

六、(12 分)

已知实二次型 $f(x_1,x_2,x_3)=X^T AX$ 在正交变换 $X=QY$ 下的标准形为 $-y_1^2-y_2^2$，且 Q 的第3列为 $\left[\frac{\sqrt{2}}{2},0,-\frac{\sqrt{2}}{2}\right]^T$.

（1）求矩阵 A；

（2）证明：$A+2I$ 为正定矩阵，其中 I 为单位矩阵.

七、(10 分)

已知$\alpha_1=[1,0,1]^T$，$\alpha_2=[1,1,1]^T$，$\alpha_3=[1,0,0]^T$为3阶方阵A的特征向量，对应的特征值分别为1, -1, -1，

(1) 证明：方阵A可以相似对角化；

(2) 设向量$\beta=[1,0,-1]^T$，求$A\beta$在基$\{\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3\}$下的坐标.

八、（10分）

设向量组$\boldsymbol{\alpha}_j=[a_{1j}, a_{2j}, \cdots, a_{nj}]^T$, $j=1,2,\cdots n$满足

$$|a_{ii}|>\sum_{\substack{j=1,\\ j\neq i}}^{n}|a_{ij}| \quad i=1,2,\cdots n,$$

证明：向量组$\{\boldsymbol{\alpha}_j, j=1,2,\cdots n\}$线性无关.

2023-2024 学年第一学期期末考试 A 卷参考答案

【本套试题学霸详细解析（实时更新）】

扫码关注并回复本资料编码【HH51】免费查看最新完整详解

【本套试题参考简答如下】

一、判断题（2 分×8=16 分）

1.【正解】√　2.【正解】√　3.【正解】√　4.【正解】×　5.【正解】×

6.【正解】×　7.【正解】√　8.【正解】√

二、填空题（4 分×5=20 分）

1.【正解】2024!　2.【正解】2023　3.【正解】2024^{2024}　4.【正解】$k \neq -\frac{1}{2}$

5.【正解】1

三、（10 分）

【正解】$|\boldsymbol{B}| = a(2-n)2^{n-1}$

四、（10 分）

【正解】$[f(\boldsymbol{A})]^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{5} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{5} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

五、（12 分）

【正解】当 $a \neq 1$ 且 $a \neq -2$ 时，$\boldsymbol{AX} = \boldsymbol{B}$ 有唯一解

$$X=\begin{pmatrix}\dfrac{2a^2+ab+a-b-3}{(a-1)(a+2)} & \dfrac{3a}{a+2}\\ -\dfrac{3(a+b+1)}{(a-1)(a+2)} & \dfrac{a-4}{a+2}\\ \dfrac{b+2}{a-1} & 0\end{pmatrix};$$

① 当$a=1$且$b\neq-2$时，$AX=B$无解；

② 当$a=1$且$b=-2$时，$AX=B$有无穷多解

$$X=\begin{pmatrix}1 & 1\\ -k_1-1 & -k_2-1\\ k_1 & k_2\end{pmatrix}\left(k_1,k_2\text{为任意常数}\right);$$

③ 当$a=-2$时，$AX=B$无解.

六、(12分)

【正解】(1)

$$A=Q\begin{pmatrix}-1&0&0\\0&-1&0\\0&0&0\end{pmatrix}Q^T=\begin{pmatrix}-\frac{1}{2}&0&-\frac{1}{2}\\0&-1&0\\-\frac{1}{2}&0&-\frac{1}{2}\end{pmatrix}.$$

(2) 略

七、(10分)

【正解】(1) 略

(2) $A\beta$在基$\{\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3\}$下的坐标为$(1,0,-4)^T$.

八、(10分)

【正解】略

2022-2023 学年第一学期期末考试试卷

一、判断题(2 分×8=16 分)

1. 设 A 为 n 阶可逆矩阵，P(x)为非 0 多项式，则 P(A)一定可逆。

2. 存在二阶矩阵 A，使得 $A^2=\begin{bmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{bmatrix}$.

3. 若 n 阶方阵 A 满足 $A^2=0$,则 A 的秩 r(A)最大为 2.

4. 若 AX=0 只有零解，则非齐次线性方程组 AX=b 有唯一解.

5. 设 A 为 n 阶方阵，则它一定可以表达成两个可逆矩阵之和.

6. 设 $A=[\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n]=[\beta_1,\beta_2,\cdots\beta_n]^T$ 为 n 阶方阵，则由 n 维列向量 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$ 生成的向量空间与由 n 维列向量 $\beta_1,\beta_2,\cdots\beta_n$ 生成的向量空间相同.

7. 设 A,B 均为实对称正定矩阵，则 AB 正定.

8. 若 n 阶实对称矩阵 A 正定，并且 $A^2=I$，其中 I 为单位矩阵，则一定有 $A=I$.

二、填空题(4 分×5=20 分)

1. 已知 $A=\begin{bmatrix}1 & 0 & 1\\ 2 & 0 & 3\\ 0 & 1 & 0\\ 3 & 4 & 2\end{bmatrix}$，则其次线性方程组 AX=0 的解空间 N(A)=______.

2. 设 A 为 n 阶可逆阵，$|A|=2$，A^* 是 A 的伴随矩阵，则 $\begin{bmatrix}O & A^*\\ A & O\end{bmatrix}^{-1}=$________.

3. 给定 R^3 中两组基 $\{\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3\}$ 和 $\{\beta_1,\beta_2,\beta_3\}$，若 $\beta_1=\alpha_1-\alpha_2$，$\beta_2=2\alpha_1+3\alpha_2+2\alpha_3$，$\beta_3=\alpha_1+3\alpha_2+2\alpha_3$，则 $\alpha=2\beta_1-\beta_2+3\beta_3$ 在 $\{\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3\}$ 基下的坐标为________.

4. 若 $A=\begin{bmatrix}2 & 1\\ 1 & 2\end{bmatrix}$，矩阵 $B=A^3-I$，则 B 的特征值为________.

5. 已知二次型 $f(x_1,x_2,x_3)=x_1^2+4x_2^2+4x_3^2+2ax_1x_2-2x_1x_3+4x_2x_3$ 正定，则 a 的取值范围是________.

三、(10分)计算 $n(n\geq 1)$ 阶行列式 $D_n=\begin{vmatrix} 3 & -2 & & & \\ -1 & 3 & -2 & & \\ & -1 & 3 & \ddots & \\ & & \ddots & \ddots & -2 \\ & & & -1 & 3 \end{vmatrix}$

四、(10分)设A为n阶矩阵，α_1为n维非0列向量.若

$A\alpha_1=3\alpha_1, A\alpha_2=3\alpha_2+2\alpha_1, A\alpha_3=3\alpha_3+2\alpha_2$,

(1) $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 能否由 $A\alpha_1,A\alpha_2,A\alpha_3$ 线性表出?请说明理由.

(2)证明: $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 线性无关.

五、(12 分)讨论a, b 取何值时线性方程组$\begin{cases} ax_1+x_2+x_3=4 \\ x_1+bx_2+x_3=3 \\ x_1+2bx_2+x_3=4 \end{cases}$有解，并求解该方程组.

六、(12 分)设三阶实矩阵 A 使得

$$A\begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-3\\-3\\-3\end{bmatrix},A\begin{bmatrix}-1\\1\\0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\0\\0\end{bmatrix},A\begin{bmatrix}1\\1\\-2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2\\2\\-4\end{bmatrix}.$$

(1)给出 A 的特征值.

(2)计算$A^{2022}\begin{bmatrix}0\\2\\1\end{bmatrix}$.

七、(10分)已知实二次型$f(x_1,x_2,x_3)=ax_1^2+2x_2^2+3x_3^2+2x_1x_2$通过正交变换X=CY化为标准形$by_1^2+3y_2^2+y_3^2$，求参数$a$, b及正交矩阵C.

八、(10分)设A为n阶实矩阵，向量$\alpha,\beta\epsilon R^n$，

(1)讨论$\alpha\beta^T$的秩.

(2)证明：存在$a,b\epsilon R$，使得行列式$|A+s\alpha\beta^T|=a+bs$对任意的实数$s\epsilon R$都成立.

2022-2023 学年第一学期期末考试试卷参考答案

一、判断题(2 分×8=16 分)

1. 【正解】×

【解析】设A的特征值为$\lambda_i(1\leq i\leq n)$，显然$\lambda_i\neq 0$，因为A可逆，取多项式

$$P(x)=\prod_{i=1}^{n}(x-\lambda_i)$$

那么$P(A)$的特征值为$P(\lambda_i)$，显然有 0 特征值，那么也不可逆.

【考点延伸】《考试宝典》知识点 5 矩阵的逆

2. 【正解】×

【解析】假设矩阵为$\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}$，$\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a^2+bc&ab+bd\\ac+cd&bc+d^2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}$；

则一定要有$\begin{cases}a^2+bc=bc+d^2=0\\b(a+d)=1\\c(a+d)=1\end{cases}\Longrightarrow\begin{cases}a=d\\b=c\\a^2+b^2=0\end{cases}$ 且$2ab=1$，不可能。

【考点延伸】《考试宝典》知识点 4 矩阵的概念和基本运算

3. 【正解】×

【解析】由题意可知：$r(A)+r(A)\leq n\Longrightarrow r(A)\leq\frac{n}{2}$。

【考点延伸】《考试宝典》知识点 5 矩阵的逆

4. 【正解】×

【解析】设A为$m\times n$矩阵，由于$AX=0$只有零解，因此$r(A)=n$，因此$m>n$，对于增广矩阵，$\bar{A}_{m\times(n+1)}$，$r(\bar{A})=n$不一定成立.

【考点延伸】《考试宝典》知识点 17 非齐次线性方程组

5. 【正解】√

【解析】设 A 为 n 阶实矩阵，$A=(xE+A)+(-xE)$，行列式$|(xE+A)|$是一个关于x的 n 次多项式，它至多有 n 个实根，因此一定有非零实数x使得$|(xE+A)|$不为零，一定可以找到一个 x，使得$|(-xE)|$不为 0，则$(xE+A)$，$(-xE)$均可逆。

【考点延伸】《考试宝典》知识点 1 行列式的概念及其性质

6. 【正解】×

【解析】不妨设$A=\begin{pmatrix}1 & 2\\0 & 0\end{pmatrix}$，$B=\begin{pmatrix}0 & 0\\1 & 2\end{pmatrix}$。

【考点延伸】《考试宝典》知识点 15 向量空间

7. 【正解】错

【解析】实对称正定矩阵乘积不一定正定，需要加 AB=BA 此条件才能说明正定.

【考点延伸】《考试宝典》知识点 24 正定二次型和正定矩阵

8. 【正解】√

【解析】实对称矩阵一定可以对角化，那么存在正交矩阵T成立，$T^{-1}AT=\Lambda$，

其中$\Lambda=\mathrm{diag}\{\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n\}$，那么

$$T^{-1}A^2T=T^{-1}T=E=\mathrm{diag}\{\lambda_1^2, \lambda_2^2, \cdots, \lambda_n^2\}$$

因此$\lambda_i^2=1$，由于A是正定矩阵，那么$\lambda_i=1$，因此$A=I$.

【考点延伸】《考试宝典》知识点 24 正定二次型和正定矩阵

二、填空题(4 分×5=20 分)

1. 【正解】$(0,0,0)^T$

【解析】对矩阵 A 进行行变换：$A=\begin{pmatrix}1 & 0 & 1\\0 & 0 & 1\\0 & 1 & 0\\0 & 4 & -1\end{pmatrix}$，$r(A)=3$，所以解空间为$n-r(A)=3-3=0$，

所以解为$(0,0,0)^T$.

【考点延伸】《考试宝典》知识点 16 齐次线性方程组

2. 【正解】$\begin{bmatrix}0 & A^{-1}\\ \frac{A}{2} & 0\end{bmatrix}$

【解析】根据逆矩阵的定义：

$$\begin{bmatrix}0 & A^*\\A & 0\end{bmatrix}^{-1}=\begin{bmatrix}0 & A^{-1}\\(A^*)^{-1} & 0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0 & A^{-1}\\ \frac{A}{|A|} & 0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0 & A^{-1}\\ \frac{A}{2} & 0\end{bmatrix}.$$

【考点延伸】《考试宝典》知识点 5 矩阵的逆

3. 【正解】(3,4,4)

【解析】

$\alpha=2$

$3\alpha_1+$

【考点

4. 【正

【解析

【考点

5. 【正

【解析】

$D_1=1>$

【考点延

三、(10 分

【解析】将

$D_n-D_{n-1}=$

$D_n=D_{n-1}+$

$=D_1+2^0(D$

$=D_1+(2^{n-1}-$

$D_n=3+4(2^n$

【考点延伸】《

四、(10 分)

【解析】(1)$(A\alpha_1$

所以$(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)=($

$\alpha = 2\beta_1 - \beta_2 + 3\beta_3 = 2(\alpha_1 - \alpha_2) - (2\alpha_1 + 3\alpha_2 + 2\alpha_3) + 3(\alpha_1 + 3\alpha_2 + 2\alpha_3)$

$3\alpha_1 + 4\alpha_2 + 4\alpha_3$。

【考点延伸】《考试宝典》知识点 15 向量空间

4. **【正解】** $\lambda = 0$，26

【解析】$A^3 - I = \begin{bmatrix} 13 & 13 \\ 13 & 13 \end{bmatrix}$，特征值对应矩阵：$\begin{bmatrix} \lambda - 13 & -13 \\ -13 & \lambda - 13 \end{bmatrix}$，解得：$\lambda = 0$，26.

【考点延伸】《考试宝典》知识点 19 特征值与特征向量

5. **【正解】** $-2 < a < 1$

【解析】二次型对应矩阵：$\begin{pmatrix} 1 & a & -1 \\ a & 4 & 2 \\ -1 & 2 & 4 \end{pmatrix}$，顺序主子式：

$D_1 = 1 > 0, D_2 = \begin{vmatrix} 1 & a \\ a & 4 \end{vmatrix} = 4 - a^2 > 0, D_3 = -4a^2 - 4a + 8 > 0$，解得 $-2 < a < 1$。

【考点延伸】《考试宝典》知识点 24 正定二次型和正定矩阵

三、(10 分)

【解析】将行列式按第一行展开：$D_n = 3D_{n-1} - 2D_{n-2}$；

$D_n - D_{n-1} = 2(D_{n-1} - D_{n-2}) = \cdots = 2^{n-2}(D_2 - D_1)$；

$D_n = D_{n-1} + 2^{n-2}(D_2 - D_1) = D_{n-2} + 2^{n-3}(D_2 - D_1) + 2^{n-2}(D_2 - D_1) =$

$= D_1 + 2^0(D_2 - D_1) + \cdots + 2^{n-3}(D_2 - D_1) + 2^{n-2}(D_2 - D_1)$

$= D_1 + (2^{n-1} - 1)(D_2 - D_1)$；$D_1 = 3, D_2 = 7$，所以

$D_n = 3 + 4(2^{n-1} - 1) = 2^{n+1} - 1$。

【考点延伸】《考试宝典》知识点 1 行列式的概念及其性质

四、(10 分)

【解析】(1) $(A\alpha_1, A\alpha_2, A\alpha_3) = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)\begin{pmatrix} 3 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$，因为 $\begin{vmatrix} 3 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 3 \end{vmatrix} = 27 \neq 0$

所以 $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) = (A\alpha_1, A\alpha_2, A\alpha_3)\begin{pmatrix} 3 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}^{-1}$，故 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 能由 $A\alpha_1, A\alpha_2, A\alpha_3$ 线性表出。

(2)有$(A-3I)\alpha_1=0$，$(A-3I)\alpha_2=2\alpha_1$，$(A-3I)\alpha_3=2\alpha_2$，不妨设α_1、α_2、α_3线性相关，则必然存在一组不全为零的数k_1，k_2，k_3，满足

$$k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+k_3\alpha_3=0 \qquad ①$$

则

$$(A-3I)(k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+k_3\alpha_3)=2k_2\alpha_1+2k_3\alpha_2=0 \qquad ②$$

$$(A-3I)(2k_2\alpha_1+2k_3\alpha_2)=4k_3\alpha_1=0$$

由于α_1非零，因此$k_3=0$，带入②中得到$k_2=0$，再带入①中，得到$k_1=0$，与α_1、α_2、α_3线性相关矛盾，因此α_1，α_2，α_3线性无关.

【考点延伸】《考试宝典》知识点 13 等价向量组

五、【解析】方程组对应矩阵$A=\begin{bmatrix} a & 1 & 1 \\ 1 & b & 1 \\ 1 & 2b & 1 \end{bmatrix}$，

$$|A|=\begin{vmatrix} a & 0 & 1 \\ 1 & b-1 & 1 \\ 1 & 2b-1 & 1 \end{vmatrix}=a\begin{vmatrix} b-1 & 1 \\ 2b-1 & 1 \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} 1 & b-1 \\ 1 & 2b-1 \end{vmatrix}=-ab+b,$$

当$b\neq 0$且$a\neq 1$时，方程组只有唯一解，根据克拉默法则，解为

$$\begin{cases} x_1=\dfrac{-2b+1}{b(1-a)} \\ x_2=\dfrac{1}{b} \\ x_3=\dfrac{-2ab+4b-1}{b(1-a)} \end{cases}$$

当 b=0 时，$\overline{A}=\begin{bmatrix} a & 1 & 1 & 4 \\ 1 & 0 & 1 & 3 \\ 1 & 0 & 1 & 4 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} a & 1 & 1 & 4 \\ 1 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$，方程组无解，

当 a=1 时，$\overline{A}=\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 4 \\ 1 & b & 1 & 3 \\ 1 & 2b & 1 & 4 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 4 \\ 0 & b-1 & 0 & -1 \\ 0 & b & 0 & 1 \end{bmatrix}$，当$b=\dfrac{1}{2}$时，方程组有解，解为：$\begin{cases} x_1=2-k \\ x_2=2 \\ x_3=k \end{cases}$，k 为任意常数。

当 a=1 时，$b\neq\dfrac{1}{2}$时，方程组无解。

【考点延伸】《考试宝典》知识点 17 非齐次线性方程组

六、(12 分)

【解析】(1)A 的特征值：-3，0，2.

(2)A 的特征值：-3，0，2 对应的特征向量分别为：

$\alpha_1=\begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix},\alpha_2=\begin{bmatrix}-1\\1\\0\end{bmatrix},\alpha_3=\begin{bmatrix}1\\1\\-2\end{bmatrix}$，设 $\begin{bmatrix}0\\2\\1\end{bmatrix}=k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+k_3\alpha_3$；解得 $\begin{cases}k_1=1\\k_2=1\\k_3=0\end{cases}$，所以

$$A^{2022}\begin{bmatrix}0\\2\\1\end{bmatrix}=A^{2022}\left(\begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}-1\\1\\0\end{bmatrix}\right)=\lambda_1^{2022}\begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix}+\lambda_2^{2022}\begin{bmatrix}-1\\1\\0\end{bmatrix}=(-3)^{2022}\begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix}.$$

【考点延伸】《考试宝典》知识点 19 特征值与特征向量

七、(10 分)

【解析】二次型对应矩阵 A 为 $\begin{bmatrix}a&1&0\\1&2&0\\0&0&3\end{bmatrix}$，由题意可知矩阵的特征值为 b,3,1；

$$|\lambda E-A|=\begin{vmatrix}\lambda-a&-1&0\\-1&\lambda-2&0\\0&0&\lambda-3\end{vmatrix}=(\lambda-3)\left[(\lambda-a)(\lambda-2)-1\right]=0,$$

将 $\lambda=1$ 代入，解得 $a=2$，特征值为 b,3,1，故 b=3；

$$|\lambda E-A|=\begin{vmatrix}\lambda-2&-1&0\\-1&\lambda-2&0\\0&0&\lambda-3\end{vmatrix}，\lambda=3\text{时}，|\lambda E-A|=\begin{vmatrix}1&-1&0\\-1&1&0\\0&0&0\end{vmatrix},$$

特征向量 $\alpha_1=\begin{bmatrix}\frac{\sqrt2}{2}\\\frac{\sqrt2}{2}\\0\end{bmatrix},\alpha_2=\begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix}$；

$\lambda=1$ 时，$|\lambda E-A|=\begin{vmatrix}-1&-1&0\\-1&-1&0\\0&0&-2\end{vmatrix}$，$\alpha_3=\begin{bmatrix}\frac{\sqrt2}{2}\\-\frac{\sqrt2}{2}\\0\end{bmatrix}$，

$$C=\begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 & -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}。$$

【考点延伸】《考试宝典》知识点 21 实对称矩阵的对角化

八、(10 分)

【解析】(1)当α、β有一个或均为 0 向量时，秩为 0，否则秩为 1。

(2)令

$$|A+s\alpha\beta^T|=\begin{vmatrix} A_1+s\alpha_1\beta^T \\ A_2+s\alpha_2\beta^T \\ \vdots \\ A_n+s\alpha_n\beta^T \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} A_1 \\ A_2+s\alpha_2\beta^T \\ \vdots \\ A_n+s\alpha_n\beta^T \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} s\alpha_1\beta^T \\ A_2+s\alpha_2\beta^T \\ \vdots \\ A_n+s\alpha_n\beta^T \end{vmatrix}$$

$$=\begin{vmatrix} A_1 \\ A_2 \\ \vdots \\ A_n+s\alpha_n\beta^T \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} A_1 \\ s\alpha_2\beta^T \\ \vdots \\ A_n+s\alpha_n\beta^T \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} s\alpha_1\beta^T \\ A_2+s\alpha_2\beta^T \\ \vdots \\ A_n+s\alpha_n\beta^T \end{vmatrix}$$

$$=\begin{vmatrix} A_1 \\ A_2 \\ \vdots \\ A_n \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} A_1 \\ A_2 \\ \vdots \\ s\alpha_n\beta^T \end{vmatrix}+\cdots+\begin{vmatrix} A_1 \\ s\alpha_2\beta^T \\ \vdots \\ A_n+s\alpha_n\beta^T \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} s\alpha_1\beta^T \\ A_2+s\alpha_2\beta^T \\ \vdots \\ A_n+s\alpha_n\beta^T \end{vmatrix}$$

故令第一项为a，由于后面几项均为 s 的函数，故可令其为bs，

所以存在$a,b\in R$，使得行列式$|A+s\alpha\beta^T|=a+bs$对任意的实数$s\in R$都成立.

【考点延伸】《考试宝典》知识点 2 行列式的展开

2021-2022 学年第一学期期末考试 A 卷

一.判断题(2 分×8=16 分)

1.设 A,B 均为 n 阶方阵且 $6AB=3A+2B$，则 $AB=BA$.

2.设 A 为 n 阶方阵，则 $(aA)^*=a^n A^*$，其中 a 为常数.

3.已知 n 维列向量 $\alpha=\left[\frac{1}{2},0,\cdots,0,\frac{1}{2}\right]^T$，则 $A=I-4\alpha\alpha^T$ 的列向量是 n 维向量空间的一组标准正交基.

4.设 A 为 n 阶方阵，α 为 n 维列向量，满足秩的等式：$r\left(\begin{bmatrix} A & \alpha \\ \alpha^T & 0 \end{bmatrix}\right)=r(A)$，则齐次线性方程组 $\begin{bmatrix} A & \alpha \\ \alpha^T & 0 \end{bmatrix}X=0$ 只有零解.

5.若 $A^2=0, A\neq 0$，则必不可相似于对角矩阵.

6.设 A 为 n 阶方阵，$r(\lambda_0 I-A)=t$，则 λ_0 必为 A 的 n-t 重特征值.

7.设 A,B 均为实对称矩阵，则存在正交矩阵 Q，使得 $Q^TAQ=B$ 的充分必要条件是 A,B 的特征多项式相同.

8.若 n 阶实对称矩阵 A 正定，则 A 的主对角线上元素都大于 0.

二.填空题(4 分×5=20 分)

1.已知 3 维列向量 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 满足 $\alpha_1+2\alpha_2+3\alpha_3=0$，$\alpha_2,\alpha_3$ 线性无关，3 阶方阵 $A=[\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3]$，则齐次线性方程组 $AX=0$ 的通解为______.

2.设 I 为 n 阶单位阵，则 $\begin{bmatrix} I & I \\ 0 & I \end{bmatrix}^{-1}=$______.

3.设三维向量 α 在基 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 下的坐标为 $[3,2,1]^T$，则 α 在基 $\beta_1=\alpha_1, \beta_2=\alpha_1+\alpha_2$，$\beta_3=\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3$ 下的坐标______.

4.若 $A=\begin{bmatrix} 1 & -2 & 2 \\ -2 & a & -c \\ 2 & -c & b \end{bmatrix}$ 合同于 $\begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$，则 A 的迹 $tr(A)=$______.

5.二次型 $f(x_1,x_2,x_3)=(-2x_1+x_2-x_3)(3x_1-2x_2+5x_3)$ 的正惯性指数为______.

三.(10分)$n(n\geqslant 2)$阶行列式$D=\begin{vmatrix} x & a & a & \cdots & a \\ a & x & a & \cdots & a \\ \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ a & a & a & \cdots & x \end{vmatrix}$

(1)求D；(2)求D的第一行元素对应的代数余子式之和$\sum_{j=1}^{n} A_{1j}$.

四.(10分)已知$A=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$,$B=\begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$，且矩阵$X$满足：$AXA+BXB=AXB+BXA+$

(1)求$(A-B)^{-1}$；(1)求X.

五.(12分)已知非齐次

(1)求a,b,c的值及该

(2)该非齐次线性方程

六.(12分)设三阶实对

$\alpha_1-2\alpha_3=[-3,0,6]$

(1)证明$A=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & -2 \end{bmatrix}$

(2)求正交变换$X=CY$

五.(12 分)已知非齐次线性方程组$\begin{cases} x_1+x_2+x_3+x_4=-1 \\ ax_1+bx_2+5x_3-x_4=-1 \\ 2x_1+x_2+3x_3-3x_4=c \end{cases}$系数矩阵的秩为 2，且有解

(1)求 a,b,c 的值及该非齐次线性方程组的通解.

(2)该非齐次线性方程组有多少线性无关的解？说明理由.

六.(12 分)设三阶实对称矩阵 $A=[\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3]$ 有二重特征值 $\lambda_1=\lambda_2=2$，且满足：

$\alpha_1-2\alpha_3=[-3,0,6]^T$.

(1)证明 $A=\begin{bmatrix}1 & 0 & 2\\ 0 & 2 & 0\\ 2 & 0 & -2\end{bmatrix}$.

(2)求正交变换 $X=CY$，将 $f(x_1,x_2,x_3)=X^T(A+A^{-1})X$ 化为标准形.

七.(10 分)已知 A 为三阶方阵，X_1,X_2 为齐次方程 $(I-A)X=0$ 的基础解系，且 $|A-2I|=0$.

(1)证明 A 可以相似对角化；

(2)求 $(A-I)(A-2I)$.

八.(10 分)设 A 为 n 阶实矩阵，证明 A 为正交矩阵的充要条件是：对任意 $\alpha,\beta\in\mathbb{R}^n,(A\alpha,A\beta)=(\alpha,\beta)$.其中 $(\alpha,\beta)=\alpha^T\beta$ 为 $\mathbb{R}^n$ 中的内积.

一.判断题

1.【正解】✓

【解析】$6AB$

$\Rightarrow (2B-I)($

【考点延伸】

2.【正解】×

【解析】$aA=$

【考点延伸】

3.【正解】✓

【解析】$A^2=$

$=I=AA^T=$

【考点延伸】

4.【正解】×

【解析】若

【考点延伸】《

5.【正解】✓

【解析】由 $A^2=$

$r(A)$，又 $A\neq 0$

【考点延伸】《

6.【正解】×

【解析】考虑矩

$\rightarrow\begin{pmatrix}0&1&0\\0&0&1\\0&0&0\end{pmatrix}$，

2021-2022 学年第一学期期末考试 A 卷参考答案

一、判断题

1.【正解】✓

【解析】$6AB=3A+2B\Rightarrow 3A(2B-I)=2B\Rightarrow(3A-I)(2B-I)=I\Rightarrow 2B-I=(3A-I)^{-1}$

$\Rightarrow(2B-I)(3A-I)=I\Rightarrow 6BA=3A+2B\Rightarrow BA=AB$

【考点延伸】《考试宝典》知识点 4-9，题型 3：求抽象矩阵的逆矩阵

2.【正解】×

【解析】$aA=a(a_{ij})_{n\times n}$，则$(aA)^*=a^{n-1}(A_{ij})_{n\times n}=a^{n-1}A^*$

【考点延伸】《考试宝典》知识点 4-9，题型 4：伴随矩阵的计算

3.【正解】✓

【解析】$A^2=(I-4\alpha\alpha^T)(I-4\alpha\alpha^T)=I-8\alpha\alpha^T+16\alpha(\alpha^T\alpha)\alpha^T=I-8\alpha\alpha^T+8\alpha\alpha^T$

$=I=AA^T=A^TA$，故 A 是正交阵，所以 A 的列向量是一组标准正交基.

【考点延伸】《考试宝典》知识点 12：极大线性无关组，知识点 14：标准正交向量组

4.【正解】×

【解析】若$\begin{pmatrix}A&\alpha\\\alpha^T&0\end{pmatrix}X=0$仅有零解，则$r\begin{pmatrix}A&\alpha\\\alpha^T&0\end{pmatrix}=n+1>r(A)$，与题设矛盾

【考点延伸】《考试宝典》知识点 16：齐次线性方程组

5.【正解】✓

【解析】由$A^2=0\Rightarrow\lambda_A=0$，因此$(\lambda_AI-A)x=0=Ax$必有 n 个线性无关解而$dim(N(A))=n-r(A)$，又$A\neq0$，故$dim(N(A))<n$，这表明 A 不可能相似于对角阵

【考点延伸】《考试宝典》知识点 21：矩阵相似对角化

6.【正解】×

【解析】考虑矩阵$A=\begin{pmatrix}3&2&1\\0&2&0\\0&0&3\end{pmatrix}$，则$\lambda=3$是 2 重特征值，但是$\lambda I-A=\begin{pmatrix}0&-2&-1\\0&1&0\\0&0&0\end{pmatrix}$

$\rightarrow\begin{pmatrix}0&1&0\\0&0&1\\0&0&0\end{pmatrix}$，则$r(\lambda I-A)=2$，此时$n-r=1$，与$\lambda=3$是 2 重特征值矛盾.

【考点延伸】《考试宝典》知识点 19：特征值与特征向量

7.【正解】✓

【解析】①充分性：A，B 特征多项式相同，则存在对角阵 $\Lambda=\mathrm{diag}(\lambda_1,\cdots,\lambda_n)$，$Q_1^TAQ_1=\Lambda=Q_2^TBQ_2$，从而 $Q_2Q_1^TAQ_1Q_2^T=B$，令 $Q=Q_1Q_2^T$，则 $Q^TQ=Q_2Q_1^TQ_1Q_2^T=I$，其中 Q_1 和 Q_2 均为正交阵，故 Q 为正交阵. ②必要性：由于 Q 是正交阵，因此 $Q^T=Q^{-1}$，故 A 与 B 相似，则 A，B 具有相同的特征多项式.

【考点延伸】《考试宝典》知识点 20：矩阵相似对角化，知识点 21：实对称矩阵的对角化

8.【正解】✓

【解析】由正定阵的性质可得，或由 $e_i^TAe_i=a_{ii}>0$ 即知

【考点延伸】《考试宝典》知识点 24：正定二次型和正定矩阵

二.填空题

1.【正解】$k(1,2,3)^T$，k 为任意常数

【解析】由 α_2,α_3 线性无关，则 $r(A)\geqslant 2$，又由 $\alpha_1+2\alpha_2+3\alpha_3=0$，则 $r(A)<3$，故 $r(A)=2$，则 $\dim(N(A))=3-2=1$，易知 $(1,2,3)^T$ 是 $Ax=0$ 的一个解，故通解为 $x=k(1,2,3)^T$，其中 k 为任意常数.

【考点延伸】《考试宝典》知识点 16：齐次线性方程组

2.【正解】$\begin{pmatrix}1&-1\\0&1\end{pmatrix}$

【解析】$\begin{pmatrix}1&1\\0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&-1\\0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&\\&1\end{pmatrix}$

【考点延伸】《考试宝典》知识点 5：逆矩阵

3.【正解】$(1,1,1)^T$

【解析】$(\beta_1,\beta_2,\beta_3)=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)P$，其中 $P=\begin{pmatrix}1&1&1\\0&1&1\\0&0&1\end{pmatrix}$，故 $\alpha=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)(3,2,1)^T$

$=(\beta_1,\beta_2,\beta_3)P^{-1}(3,2,1)^T=(\beta_1,\beta_2,\beta_3)\begin{pmatrix}1&-1&0\\0&1&-1\\0&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}3\\2\\1\end{pmatrix}=(\beta_1,\beta_2,\beta_3)(1,1,1)^T$.

【考点延伸】基下矩阵

4.【正解】9

【解析】由题$\begin{pmatrix}1 & -2 & 2\\ -2 & a & -c\\ 2 & -c & b\end{pmatrix}$与$\mathrm{diag}(3,0,0)$合同，则$A$与$\mathrm{diag}(3,0,0)$有相同的正负惯性指数，

故$r(A)=1$，又$\begin{pmatrix}1 & -2 & 2\\ -2 & a & -c\\ 2 & -c & b\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1 & -2 & 2\\ 0 & a-4 & 4-c\\ 0 & a-c & b-c\end{pmatrix}$，从而$a=4$，$c=4$，$b=c$，故

$tr(A)=a+b+1=9$

【考点延伸】《考试宝典》知识点 23：矩阵的合同

5.【正解】1

【解析】令$z=\begin{pmatrix}-2 & 1 & -1\\ 3 & -2 & 5\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}x=Cx$，则$|C|=4-3=1$，C 可逆，$f(x)\xlongequal{z=Cx}z_1z_2$

再令$z=\begin{pmatrix}1 & 1 & 0\\ 1 & -1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}y=By$，则$|B|=-1-1=-2$，B 可逆，故$f(x)=z_1z_2\xlongequal{z=By}y_1^2-y_2^2$

故正惯性指数为 1.

【考点延伸】《考试宝典》知识点 23：矩阵的合同，知识点 24：正定二次型和正定阵，知识点 22：二次型

三.(1)【解析】$\begin{vmatrix}x & a & a & \cdots & a\\ a & x & a & \cdots & a\\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ a & a & a & \cdots & x\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}x+(n-1)a & x+(n-1)a & x+(n-1)a & \cdots & x+(n-1)a\\ a & x & a & \cdots & a\\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots\\ a & a & a & \cdots & x\end{vmatrix}$

$$=[x+(n-1)a]\begin{vmatrix}1 & 1 & 1 & \cdots & 1\\ a & x & a & \cdots & a\\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots\\ a & a & a & \cdots & x\end{vmatrix}=[x+(n-1)a]\begin{vmatrix}1 & 1 & 1 & \cdots & 1\\ 0 & x-a & 0 & \cdots & 0\\ 0 & 0 & x-a & \cdots & 0\\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ 0 & 0 & 0 & \cdots & x-a\end{vmatrix}$$

$$=(x-a)^{n-1}[x+(n-1)a]$$

【考点延伸】《考试宝典》知识点 3：几种特殊的行列式

(2)【解析】$\sum_{j=1}^{n} A_{1j}=\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ a & x & a & \cdots & a \\ a & a & x & \cdots & a \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a & a & a & \cdots & x \end{vmatrix}=(x-a)^{n-1}$

【考点延伸】《考试宝典》知识点 4-9，题型 4：伴随矩阵的计算

四.(1)【解析】$AXA-AXB+BXB-BXA=I\Rightarrow(A-B)X(A-B)=I$，由题知$A-B$可逆，故

$X=(A-B)^{-2}$，而$(A-B)^{-1}=\begin{pmatrix}1 & -1 & -1\\ 0 & 1 & -1\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}^{-1}=\begin{pmatrix}1 & 1 & 2\\ 0 & 1 & 1\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$

【考点延伸】《考试宝典》知识点 4-9，题型 3：求抽象矩阵的逆矩阵

(2)【解析】$X=\begin{pmatrix}1 & 1 & 2\\ 0 & 1 & 1\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}^2=\begin{pmatrix}1 & 2 & 5\\ 0 & 1 & 2\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$

【考点延伸】《考试宝典》知识点 4-9，题型 3：求抽象矩阵的逆矩阵

五.(1)【解析】$(A\ \vdots\ b)=\begin{pmatrix}1 & 1 & 1 & 1 & \vdots & -1\\ a & b & 5 & -1 & \vdots & -1\\ 2 & 1 & 3 & -3 & \vdots & c\end{pmatrix}$

$\rightarrow\begin{pmatrix}1 & 1 & 1 & 1 & -1\\ 0 & -1 & 1 & -5 & c+2\\ 0 & 0 & 5+b-2a & 4a-5b-1 & a-1+(c+2)(b-a)\end{pmatrix}$，

由$r(A)=2$，$Ax=b$有解，故$r(A\ \vdots\ b)=2$，

从而$\begin{cases}5+b-2a=0\\ 4a-5b-1=0\\ a-1+(c+2)(b-a)=0\end{cases}\Rightarrow a=4,b=3,c=1$

因此$(A\ \vdots\ b)\rightarrow\begin{pmatrix}1 & 0 & 2 & -4 & 2\\ 0 & 1 & -1 & 5 & -3\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$，故方程组的通解为

$$x=k_1(-2,1,1,0)^T+k_2(4,-5,0,1)^T+(2,-3,0,0)^T，k_1,k_2\text{为任意常数}$$

【考点延伸】《考试宝典》知识点 17：非齐次线性方程组

(2)【解析】非齐次线性方程组的线性无关的解的个数为$n-r+1=4-2+1=3$。

【考点延伸】《考试宝典》知识点 17：非齐次线性方程组

(2)【解析】$\sum_{j=1}^{n} A_{1j}=\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ a & x & a & \cdots & a \\ a & a & x & \cdots & a \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a & a & a & \cdots & x \end{vmatrix}=(x-a)^{n-1}$

【考点延伸】《考试宝典》知识点 4-9，题型 4：伴随矩阵的计算

四.(1)【解析】$AXA-AXB+BXB-BXA=I\Rightarrow (A-B)X(A-B)=I$，由题知$A-B$可逆，

$X=(A-B)^{-2}$，而$(A-B)^{-1}=\begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1}=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

【考点延伸】《考试宝典》知识点 4-9，题型 3：求抽象矩阵的逆矩阵

(2)【解析】$X=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}^2=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

【考点延伸】《考试宝典》知识点 4-9，题型 3：求抽象矩阵的逆矩阵

五.(1)【解析】$(A\vdots b)=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & \vdots & -1 \\ a & b & 5 & -1 & \vdots & -1 \\ 2 & 1 & 3 & -3 & \vdots & c \end{pmatrix}$

$\rightarrow\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 1 & -5 & c+2 \\ 0 & 0 & 5+b-2a & 4a-5b-1 & a-1+(c+2)(b-a) \end{pmatrix}$，

由$r(A)=2$，$Ax=b$有解，故$r(A\vdots b)=2$，

从而$\begin{cases} 5+b-2a=0 \\ 4a-5b-1=0 \\ a-1+(c+2)(b-a)=0 \end{cases}\Rightarrow a=4,b=3,c=1$

因此$(A\vdots b)\rightarrow\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & -4 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & 5 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$，故方程组的通解为

$$x=k_1(2,1,1,0)^T+k_2(4,-5,0,1)^T+(2,-3,0,0)^T\text{，}k_1,k_2\text{为任意常数}$$

【考点延伸】《考试宝典》知识点 17：非齐次线性方程组

(2)【解析】非齐次线性方程组的线性无关的解的个数为$n-r+1=4-2+1=3$.

【考点延伸】《考试宝典》知识点 17：非齐次线性方程组

六.(1)【解析】由$\alpha_1-2\alpha_3=A(1,0,-2)^T=(-3,0,6)^T=-3(1,0,-2)^T$，故$\lambda_3=-3$，由$A$实对称，故存在正交阵$Q$，$A=Q\Lambda Q^T=(q_1,q_2,q_3)\begin{pmatrix}2&0&0\\0&2&0\\0&0&-3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}q_1^T\\q_2^T\\q_3^T\end{pmatrix}$，易知$q_3=\left(\frac{1}{\sqrt5},0,-\frac{2}{\sqrt5}\right)^T$，

$q_3^Tq_1=q_3^Tq_2=0$，$q_1^Tq_2=0$，而方程$\frac{1}{\sqrt5}x_1-\frac{2}{\sqrt5}x_3=0$通解为$x=k_1(2,0,1)^T+k_2(0,1,0)^T$

因此$q_1=\left(\frac{2}{\sqrt5},0,\frac{1}{\sqrt5}\right)^T$,$q_2=(0,1,0)^T$，故$Q=\begin{pmatrix}\frac{2}{\sqrt5}&0&\frac{1}{\sqrt5}\\0&1&0\\\frac{1}{\sqrt5}&0&-\frac{2}{\sqrt5}\end{pmatrix}$，故$A=Q\Lambda Q^T=\begin{pmatrix}1&0&2\\0&2&0\\2&0&-2\end{pmatrix}$

【考点延伸】《考试宝典》知识点16：齐次线性方程组，知识点21：实对称矩阵的对角化

(2)【解析】由(1)知$A=Q\Lambda Q^T$，则$A^{-1}=Q\Lambda^{-1}Q^T$，故

$$A+A^{-1}=Q(\Lambda+\Lambda^{-1})Q^T=Q\,\mathrm{diag}\left(\frac{5}{2},\frac{5}{2},-\frac{10}{3}\right)Q^T$$

令$x=Qy$，则$x^T(A+A^{-1})x=x^TQ\,\mathrm{diag}\left(\frac{5}{2},\frac{5}{2},-\frac{10}{3}\right)Q^Tx=y^T\mathrm{diag}\left(\frac{5}{2},\frac{5}{2},-\frac{10}{3}\right)y$

$=\frac{5}{2}y_1^2+\frac{5}{2}y_2^2-\frac{10}{3}y_3^2$

【考点延伸】《考试宝典》知识点21：实对称矩阵的对角化，知识点27：二次型

七.(1)【解析】由于x_1,x_2是方程$(I-A)x=0$的基础解系，故$r(I-A)=1$，又$|A-2I|=0$，故A的一个特征值为2，又由$r(I-A)=1$，得$|I-A|=0$，所以A的一个特征值为1，且为特征多项式的2重根，因此A可以相似对角化

【考点延伸】《考试宝典》知识点20：矩阵相似对角化

(2)【解析】由(1)知，存在P，使$A=P\Lambda P^{-1}=P\,\mathrm{diag}(1,1,2)P^{-1}$，则$A-I=P\,\mathrm{diag}(0,0,1)P^{-1}$

$A-2I=P\,\mathrm{diag}(1,1,0)P^{-1}$，故$(A-I)(A-2I)=P\,\mathrm{diag}(0,0,0)P^{-1}=0$

【考点延伸】《考试宝典》知识点9：矩阵的秩和矩阵等价，知识点20：矩阵相似对角化

八.【解析】①必要性：若A是正交阵，则$(A\alpha,A\beta)=\alpha^TA^TA\beta=\alpha^TI\beta=\alpha^T\beta=(\alpha,\beta)$

②充分性：若$(A\alpha,A\beta)=(\alpha,\beta)$对$\forall\alpha$，$\beta\in R^n$成立，则$\alpha^TA^TA\beta=\alpha^T\beta\Rightarrow\alpha^T(A^TA-I)\beta=0$，由$\alpha,\beta$的任意性，则必有$A^TA=I$，即$A$为正交阵

【考点延伸】《考试宝典》知识点19-24，题型8：正交矩阵的性质和证明

2019-2020 学年第一学期期末考试 A 卷

一、 判断题（2 分×8=16 分）

1. 若矩阵A,B满足$AB=BA$，则对任意的自然数k，均有$(AB)^k=A^kB^k$.
2. 设C是一个正交矩阵，则C的行列式为 1
3. 设$\alpha_1,\alpha_2,\beta_1,\beta_2$均是$n$维向量，已知$\alpha_1,\alpha_2$线性相关，$\beta_1,\beta_2$线性相关，则$\alpha_1+\beta_1,\alpha_2+\beta_2$也线性相关.
4. 设R^n为n维实向量的全体，设$\alpha\in R^n$且α与R^n中所有向量都正交，则α必为 0 向量.
5. 设A为$m\times n$矩阵，B是$n\times m$矩阵，若$m>n$，则必有AB的行列式为 0.
6. 设A是一个非零的n阶方阵，若存在一个正整数k使得$A^k=0$，则A必不可相似对角化.
7. 若A是一个n阶正定矩阵，I是n阶单位矩阵，则$A+I$的行列式大于 1.
8. 设A是一个$m\times n$矩阵，B是一个$n\times p$矩阵，且$A\neq 0$，若$AB=0$，则B的行向量组一定线性相关.

二、 填空题（4 分×5=20 分）

1. 已知A为 3 阶方阵，其行列式$|A|=2$。用$|A^*|$表示A的伴随矩阵A^*的行列式，A^T表示A的转置，则$|A^*|\cdot A^T$的行列式的值为________.
2. 设方阵A满足$A^2-3A+I=0$，其中I是单位阵。若未知方阵B满足$AB=A+B$，则$B=$________（表示成A的矩阵多项式）.
3. 已知 3 阶方阵A的特征值为$1,\sqrt{2},\pi$，则矩阵$A-A^2$的行列式的值为________.
4. 设A为 3 阶方阵，β是一个三维向量，设$\{\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3\}$是$A$的列向量组且秩为 2.若$\alpha_3=2\alpha_2$且$\beta=\alpha_1-3\alpha_2$，则非齐次线性方程组$AX=\beta$的通解为________.
5. 若二次型$f(x_1,x_2,x_3)=2x_1^2+x_2^2+x_3^2+2x_1x_2+tx_2x_3$是正定的，则$t$的取值范围为________

三、（

四、

已知矩

值范围

三、（8分）计算n阶行列式$D_n=\begin{vmatrix} x+1 & x & \cdots & x \\ x & x+\frac{1}{2} & \cdots & x \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ x & x & \cdots & x+\frac{1}{n} \end{vmatrix}$.

四、（10分）

已知矩阵$A=\begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & t \end{bmatrix},B=\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 3 & 3 & 3 \end{bmatrix},C=\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 3 & 5 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix},D=\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$，分别确定$t$的取值或者取值范围，使得$A$与$B$等价，$A$与$C$相似，$A$与$D$合同.

五、（12 分）

已知线性方程组$\begin{cases} x_1+2x_2+4x_3+2x_4=2 \\ x_2+2x_3-x_4=1 \\ 3x_1-x_2-ax_3+15x_4=3 \\ 2x_1-3x_2-6x_3+14x_4=b+2 \end{cases}$

讨论方程组解的情况，并在方程组有无穷多解时（如果存在的话），求出方程组的通解.

六、（12 分）

记A为二次型$f(x_1,x_2,x_3)=3x_1^2+ax_2^2+3x_3^2+4x_1x_2+4x_2x_3+8x_3x_1$对应的对称矩阵，已知 8 是$A$的一个特征值．求$a$及正交矩阵$C$使得$C^{-1}AC$为对角矩阵.

七、　(12 分)

设$\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_m,\beta_1,\beta_2,\ldots,\beta_n$都是$d$维向量，其中$m\geq n\geq 2$，记$\alpha_{m+1}=\alpha_1$，已知向量组

$\{\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_m\}$线性无关，且

$$\beta_1=\alpha_1+\alpha_2,\beta_2=\alpha_2+\alpha_3,\ldots\ldots,\beta_{n-1}=\alpha_{n-1}+\alpha_n,\beta_n=\alpha_n+\alpha_{n+1}$$

试判断向量组$\{\beta_1,\beta_2,\ldots,\beta_n\}$的线性相关性和线性无关性

八、　(10 分)

设A是一个$m\times n$矩阵，β是一m维向量，A^T表示矩阵A的转置。证明：若AA^T可逆，则线性方程组$AX=\beta$的解存在，如果将条件改为A^TA可逆呢？

2019-2020 学年第一学期期末考试 A 卷参考答案

一、 判断题（2 分×8=16 分）

1. 【正解】正确

【解析】下面用数学归纳法给出证明：

当$k=1$时，$(AB)^1=A^1B^1$，命题成立

当$k=n$时，假设$(AB)^n=A^nB^n$成立

则当$k=n+1$时，有$(AB)^{n+1}=(AB)^n(AB)=A^nB^nAB=A^nB^{n-1}AB^2=\ldots\ldots=A^{n+1}B^{n+1}$

所以命题得证

【考点延伸】《考试宝典》知识点 4：矩阵的概念和基本运算

2. 【正解】错误

【解析】因为C是正交矩阵，所以$C^TC=E$，取行列式得$|C|^2=1\Longrightarrow|C|=\pm1$

【考点延伸】《考试宝典》知识点 19-24【重要题型】题型 8：正交矩阵的性质和证明

3. 【正解】错误

【解析】反例：取$\alpha_1=\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix},\alpha_2=\begin{bmatrix}0\\2\end{bmatrix},\beta_1=\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix},\beta_2=\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}$，满足所有题设要求

但是$\alpha_1+\beta_1=\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix},\alpha_2+\beta_2=\begin{bmatrix}1\\2\end{bmatrix}$明显它们是线性无关的

【考点延伸】《考试宝典》知识点 11：向量组的线性相关和线性表示

4. 【正解】正确

【解析】设$\alpha=[a_1,a_2,\ldots,a_n]^T$，依次取向量

$$e_1=[1,0,0\ldots,0],e_2=[0,1,0,\ldots,0],\ldots,e_n=[0,0,0,\ldots,1]$$

则有$(\alpha,e_i)=0(i=1,2,\ldots,n)$，故而有$a_i=0(i=1,2,\ldots,n)$，即$\alpha=\vec{0}$

【考点延伸】《考试宝典》知识点 10：向量的概念与运算

5. 【正解】正确

【解析】因为$R(AB)\le R(A)\le\min\{m,n\}=n<m$，而$AB$是一个$m\times m$矩阵，故$|AB|=0$

【考点延伸】《考试宝典》知识点 4-9【重要题型】题型 6：矩阵的秩

6. 【正解】正确

【解析】不妨反设A可相似对角化，则存在可逆矩阵P，使得$A=P^{-1}\mathrm{diag}(\lambda_1,\lambda_2,\ldots,\lambda_n)P$

2019-2020 学年第一学期期末考试 A 卷参考答案

一、 判断题（2 分×8=16 分）

1. 【正解】正确

【解析】下面用数学归纳法给出证明：

当$k=1$时，$(AB)^1=A^1B^1$，命题成立

当$k=n$时，假设$(AB)^n=A^nB^n$成立

则当$k=n+1$时，有$(AB)^{n+1}=(AB)^n(AB)=A^nB^nAB=A^nB^{n-1}AB^2=\ldots\ldots=A^{n+1}B^{n+1}$

所以命题得证

【考点延伸】《考试宝典》知识点 4：矩阵的概念和基本运算

2. 【正解】错误

【解析】因为C是正交矩阵，所以$C^TC=E$，取行列式得$|C|^2=1\Longrightarrow|C|=\pm1$

【考点延伸】《考试宝典》知识点 19-24【重要题型】题型 8：正交矩阵的性质和证明

3. 【正解】错误

【解析】反例：取$\alpha_1=\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix},\alpha_2=\begin{bmatrix}0\\2\end{bmatrix},\beta_1=\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix},\beta_2=\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}$，满足所有题设要求

但是$\alpha_1+\beta_1=\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix},\alpha_2+\beta_2=\begin{bmatrix}1\\2\end{bmatrix}$明显它们是线性无关的

【考点延伸】《考试宝典》知识点 11：向量组的线性相关和线性表示

4. 【正解】正确

【解析】设$\alpha=[a_1,a_2,\ldots,a_n]^T$，依次取向量

$$e_1=[1,0,0\ldots,0],e_2=[0,1,0,\ldots,0],\ldots,e_n=[0,0,0,\ldots,1]$$

则有$(\alpha,e_i)=0(i=1,2,\ldots,n)$，故而有$a_i=0(i=1,2,\ldots,n)$，即$\alpha=\vec{0}$

【考点延伸】《考试宝典》知识点 10：向量的概念与运算

5. 【正解】正确

【解析】因为$R(AB)\leq R(A)\leq\min\{m,n\}=n<m$，而$AB$是一个$m\times m$矩阵，故$|AB|=0$

【考点延伸】《考试宝典》知识点 4-9【重要题型】题型 6：矩阵的秩

6. 【正解】正确

【解析】不妨反设A可相似对角化，则存在可逆矩阵P，使得$A=P^{-1}\mathrm{diag}(\lambda_1,\lambda_2,\ldots,\lambda_n)P$

从而$A^k=P^{-1}\mathrm{diag}(\lambda_1^k,\lambda_2^k,\dots,\lambda_n^k)P=O\Longrightarrow\lambda_i=0(i=1,2,\dots,n)\Longrightarrow A=O$，这和$A$是一个非零的$n$阶方阵产生矛盾，所以命题正确

【考点延伸】《考试宝典》知识点 20：矩阵的相似对角化

7. 【正解】正确

【解析】设A的特征值分别为$\lambda_1,\lambda_2,\dots,\lambda_n(\lambda_i>0)$，则$A+I$的特征值为$1+\lambda_1,1+\lambda_2,\dots,1+\lambda_n$

故而$|A+I|=(1+\lambda_1)(1+\lambda_2)\dots\dots(1+\lambda_n)>1$

【考点延伸】《考试宝典》知识点 19-24【重要题型】题型 7：正定矩阵的性质和证明

8. 【正解】正确

【解析】因为$AB=0\Longrightarrow R(A)+R(B)\leqslant n$，因为$A\neq 0$，故而$R(B)<n$，所以$B$非行满秩，其行向量组一定线性相关

【考点延伸】《考试宝典》知识点 10-15【重要题型】题型 1：利用矩阵的秩证明线性相关性

二、 填空题（4 分×5=20 分）

1. 【正解】128

【解析】由题意有$AA^*=|A|E=2E\Longrightarrow A^*=2A^{-1}\Longrightarrow|A^*|=2^3|A^{-1}|=4$

从而$||A^*|A^T|=|4A^T|=4^3|A|=64\times 2=128$

【考点延伸】《考试宝典》知识点 4-9【重要题型】题型 1：矩阵的运算与矩阵行列式的计算

2. 【正解】A^2-2A

【解析】$AB=A+B\Longrightarrow(A-I)B=A$

又因为$A^2-3A+I=0\Longrightarrow A^2-3A+2I=I\Longrightarrow(A-2I)(A-I)=I\Longrightarrow(A-I)^{-1}=A-2I$

所以$B=(A-I)^{-1}A=(A-2I)A=A^2-2A$

【考点延伸】《考试宝典》知识点 5：矩阵的逆

3. 【正解】0

【解析】令$f(x)=x-x^2$，$f(1)=0,f(\sqrt{2})=\sqrt{2}-2,f(\pi)=\pi-\pi^2$

所以$|A-A^2|=f(1)f(\pi)f(\sqrt{2})=0$

【考点延伸】《考试宝典》知识点 20：矩阵的相似对角化

4. 【正解】$c\begin{bmatrix}0\\2\\-1\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}1\\-3\\0\end{bmatrix}$（$c$可为任意常数）

【解析】因为$[\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3]\begin{bmatrix}1\\-3\\0\end{bmatrix}=\alpha_1-3\alpha_2=\beta$，从而$\begin{bmatrix}1\\-3\\0\end{bmatrix}$是$AX=\beta$的一个特解

下面考虑$AX=0$的基础解系，因为$R(A)=2, 3-R(A)=1$，且$[\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3]\begin{bmatrix}0\\2\\-1\end{bmatrix}=2\alpha_2-\alpha_3=0$

所以$\begin{bmatrix}0\\2\\-1\end{bmatrix}$是$AX=0$的一个基础解系，综上$AX=\beta$的通解为$c\begin{bmatrix}0\\2\\-1\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}1\\-3\\0\end{bmatrix}$（$c$可为任意常数）

【考点延伸】《考试宝典》知识点 17：非齐次线性方程组

5. 【正解】$-\sqrt{2}<t<\sqrt{2}$

【解析】此二次型对应的矩阵$A=\begin{bmatrix}2&1&0\\1&1&\frac{t}{2}\\0&\frac{t}{2}&1\end{bmatrix}$，由二次型正定可知：

$$2>0,\begin{vmatrix}2&1\\1&1\end{vmatrix}>0,\begin{vmatrix}2&1&0\\1&1&\frac{t}{2}\\0&\frac{t}{2}&1\end{vmatrix}>0$$

从而$-\sqrt{2}<t<\sqrt{2}$

【考点延伸】《考试宝典》知识点 24：正定二次型和正定矩阵

（8分）【解析】记$\alpha=[x,x,\dots,x]^T,\beta=[1,2,\dots,n]$

$$\text{则}D_n=\frac{1}{n!}\begin{vmatrix}x+1&2x&\cdots&nx\\x&2x+1&\cdots&nx\\\vdots&\vdots&&\vdots\\x&2x&\cdots&nx+1\end{vmatrix}=\frac{1}{n!}\left|E+\begin{bmatrix}x&2x&\cdots&nx\\x&2x&\cdots&nx\\\vdots&\vdots&&\vdots\\x&2x&\cdots&nx\end{bmatrix}\right|=\frac{1}{n!}|E+\alpha\beta|$$

考虑分块矩阵$\begin{bmatrix}E&\alpha\\\beta&1\end{bmatrix}$，因为$\begin{bmatrix}E&\alpha\\\beta&1\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}E+\alpha\beta&0\\-\beta&1\end{bmatrix}$，另一方面$\begin{bmatrix}E&\alpha\\-\beta&1\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}E&\alpha\\0&1+\beta\alpha\end{bmatrix}$

$$\begin{vmatrix}E+\alpha\beta&0\\\beta&1\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}E&\alpha\\0&1+\beta\alpha\end{vmatrix}\longrightarrow|E+\alpha\beta|=|E|(1+\beta\alpha)=1+[1,2,\dots,n]\begin{bmatrix}x\\x\\\vdots\\x\end{bmatrix}=1+\frac{n(n+1)}{2}$$

从而 $D_n = \dfrac{1+\frac{n(n+1)}{2}x}{n!}$.

【考点延伸】《考试宝典》知识点 3：几种特殊的行列式

四、 （10 分）

【解析】A 与 B 等价的充分必要条件：$R(A)=R(B)=2$，故而必有 $t=0$

A 与 C 相似：因为 $|C-\lambda I|=0 \Longrightarrow \lambda_1=1,\lambda_2=3,\lambda_3=5$，特征值无重根，所以 C 必定可以和对角矩阵 $\mathrm{diag}(1,3,5)$ 相似，由相似的传递性，这里要求 A 也和 $\mathrm{diag}(1,3,5)$ 相似

因为 $|A-\lambda I|=\begin{vmatrix}2-\lambda & 1 & 0\\ 1 & 2-\lambda & 0\\ 0 & 0 & t-\lambda\end{vmatrix}=(t-\lambda)(3-\lambda)(1-\lambda)=0$，从而必然有 $t=5$

此时 A 的特征值也为 1,3,5，无重根，因此可以和 $\mathrm{diag}(1,3,5)$ 相似

A 与 D 合同：因为 A 与 D 都为实对称矩阵，所以他们合同的充要条件为拥有相同的正负惯性指数

因为 $|D-\lambda I|=\begin{vmatrix}2-\lambda & 0 & 0\\ 0 & 2-\lambda & 1\\ 0 & 1 & -\lambda\end{vmatrix}=(2-\lambda)(\lambda^2-2\lambda-1)=0$

解得 $\lambda_1=2,\lambda_2=1+\sqrt{2},\lambda_3=1-\sqrt{2}$，正惯性指数为 2，负惯性指数为 1

A 的特征值为 1,3，t，从而必有 $t<0$

【考点延伸】《考试宝典》知识点 4-9【重要题型】题型 5：矩阵等价

知识点 20：矩阵相似对角化

知识点 23：矩阵的合同

五、 （12 分）

【解析】记增广矩阵 $[A,b]=\begin{bmatrix}1 & 2 & 4 & 2 & 2\\ 0 & 1 & 2 & -1 & 1\\ 3 & -1 & -a & 15 & 3\\ 2 & -3 & -6 & 14 & b+2\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1 & 2 & 4 & 2 & 2\\ 0 & 1 & 2 & -1 & 1\\ 0 & -7 & -a-12 & 9 & -3\\ 0 & -7 & -14 & 10 & b-2\end{bmatrix}$

$\to\begin{bmatrix}1 & 2 & 4 & 2 & 2\\ 0 & 1 & 2 & -1 & 1\\ 0 & 0 & -a+2 & 2 & 4\\ 0 & 0 & 0 & 3 & b+5\end{bmatrix}$，当 $-a+2\neq 0$ 时，即 $a\neq 2$，$R(A)=R(A,b)=4$，此时方程组有唯一解；当 $a=2$ 时，等价的同解方程组对应的矩阵为

$$\begin{bmatrix}1&2&4&2&2\\0&1&2&-1&1\\0&0&0&1&2\\0&0&0&3&b+5\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1&2&4&2&2\\0&1&2&-1&1\\0&0&0&1&2\\0&0&0&0&b-1\end{bmatrix}$$

所以此时当$b\neq1$时，方程组无解；当$b=1$时，$R(A)=R(A,b)=3<4$，方程组有无穷多组解，

这时候同解的方程组对应的矩阵为

$$\begin{bmatrix}1&2&4&2&2\\0&1&2&-1&1\\0&0&0&1&2\\0&0&0&0&0\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1&0&0&0&-8\\0&1&2&0&3\\0&0&0&1&2\\0&0&0&0&0\end{bmatrix}\Longrightarrow\begin{cases}x_1=-8\\x_2+2x_3=3\\x_4=2\end{cases}$$

令$x_3=c$，则有$x_1=-8,x_2=3-2c,x_3=c,x_4=2$

通解为$\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-8\\3-2c\\c\\2\end{bmatrix}=c\begin{bmatrix}0\\-2\\1\\0\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}-8\\3\\0\\2\end{bmatrix}$（$c$可为任意常数）

【考点延伸】《考试宝典》知识点 17：非齐次线性方程组

六、　（12 分）

【解析】$A=\begin{bmatrix}3&2&4\\2&a&2\\4&2&3\end{bmatrix}$

$$|A-\lambda I|=\begin{vmatrix}3-\lambda&2&4\\2&a-\lambda&2\\4&2&3-\lambda\end{vmatrix}=-\lambda^3+(a+6)\lambda^2-(6a-15)\lambda+8-7a=0$$

代入$\lambda=8$，得$a=0$，并且$|A-\lambda I|=-\lambda^3+6\lambda^2+15\lambda+8=0\Longrightarrow\lambda_1=8,\lambda_2=-1,\lambda_3=-1$

对于特征值 8，$A-8I=\begin{bmatrix}-5&2&4\\2&-8&2\\4&2&-5\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1&-4&1\\2&-8&2\\4&2&-5\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1&-4&1\\0&2&-1\\0&0&0\end{bmatrix}$

解得一个特征向量$p_1=\begin{bmatrix}2\\1\\2\end{bmatrix}$

对于特征值-1，$A+I=\begin{bmatrix}4&2&4\\2&1&2\\4&2&4\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}2&1&2\\0&0&0\\0&0&0\end{bmatrix}$，解得两个正交的并且是线性无关的特

$p_2=\begin{bmatrix}-1\\4\\-1\end{bmatrix},p_3=\begin{bmatrix}-1\\0\\1\end{bmatrix}$

令$C=\left[\frac{p_1}{||p_1||},\frac{p_2}{||p_2||},\frac{p_3}{||p_3||}\right]=\begin{bmatrix}\frac{2}{3} & -\frac{\sqrt{2}}{6} & -\frac{1}{\sqrt{2}}\\ \frac{1}{3} & \frac{2\sqrt{2}}{3} & 0\\ \frac{2}{3} & -\frac{\sqrt{2}}{6} & \frac{1}{\sqrt{2}}\end{bmatrix}$，使得$C^{-1}AC=\mathrm{diag}(8,-1,-1)$

【考点延伸】《考试宝典》知识点 21：实对称矩阵的对角化

七、　(12 分)

【解析】$[\beta_1,\beta_2,\dots,\beta_n]=[\alpha_1,\alpha_2,\dots,\alpha_n]\begin{bmatrix}1 & 0 & 0 & \cdots & 1\\ 1 & 1 & 0 & \cdots & 0\\ 0 & 1 & 1 & \cdots & \vdots\\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & 0\\ 0 & 0 & \cdots & 1 & 1\end{bmatrix}$

记矩阵$C=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0 & \cdots & 1\\ 1 & 1 & 0 & \cdots & 0\\ 0 & 1 & 1 & \cdots & \vdots\\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & 0\\ 0 & 0 & \cdots & 1 & 1\end{bmatrix}$,$A=[\alpha_1,\alpha_2,\dots,\alpha_n]$,$B=[\beta_1,\beta_2,\dots,\beta_n]$，则$B=AC$，且已知$R(A)=n$，

故$R(B)=R(AC)=R(C)$，因为$|C|=1+(-1)^{n+1}$，当n为奇数时，$R(B)=n$，此时向量组$\{\beta_1,\beta_2,\dots,\beta_n\}$线性无关，当$n$为偶数时，$R(B)<n$，此时向量组$\{\beta_1,\beta_2,\dots,\beta_n\}$线性相关

【考点延伸】《考试宝典》知识点 10-15【重要题型】题型 1：利用矩阵的秩证明线性相关性

八、　(10 分)

【解析】先证明一个命题：$R(AA^T)=R(A^T)$，即证明$AA^TX=0$与$A^TX=0$同解

所有$A^TX=0$的解，必然使得$AA^TX=0$；

所有满足$AA^TX=0$的解，必然也满足$X^TAA^TX=0\Longrightarrow(A^TX)^T(A^TX)=0\Longrightarrow A^TX=0$

命题得证，所以有$R(A)=R(A^T)=R(A^TA)$

当AA^T可逆时，有$R(A)=R(AA^T)=m$，所以有$R(A)=R(A,\beta)=m$，故$AX=\beta$有解得证

如果A^TA可逆，根据已证的命题，可有$R(A)=R(A^TA)=n$

所以如果出现$R(A,\beta)=n+1,R(A)=n$，则方程组无解；

如果$R(A,\beta)=R(A)=n$，则方程组有唯一解；

【考点延伸】《考试宝典》知识点 17：非齐次线性方程组

一、判断

1、设A,

2、若向

3、设A,

4、设A为

5、设A为

6、若方阵

7、记A^*为

8、设A是

有X^TAX

二、填空

1、设A是

2、设A是

代数余子式

3、设α_1,α

$B=(\alpha_1+$

4、已知$f($

为______

5、设矩阵A

$AX=\beta$的解

2018-2019 学年第二学期期末考试 A 卷

一、判断题（每小题 2 分，共 16 分）

1、设A,B,C是三个n阶非零矩阵，如果$AB=BA$，则$A^2B+ACA=A(B+C)A$

2、若向量$\alpha_1,\alpha_2,\dots,\alpha_m$线性无关，则必有$\alpha_1+\alpha_2+\dots+\alpha_m\neq 0$

3、设A,B为满足$AB=0$的两个非零矩阵，则A的列向量组线性相关，B的列向量组也线性相关.

4、设A为三阶非零矩阵满足$A^2=0$，则齐次线性方程组$AX=0$的线性无关的解向量的个数为 2.

5、设A为$m\times n$阶实矩阵，则矩阵A^TA与A有相同的秩，其中A^T是A的转置

6、若方阵A的各行元素和为 1，则 1 必为A的一个特征值

7、记A^*为方阵A的伴随矩阵，若A为正定矩阵，则A^*也为正定矩阵.

8、设A是n阶实反对称矩阵，即$A^T=-A$，其中A^T是A的转置，则对任意的n维实向量X，均有$X^TAX=0$.

二、填空题(每小题 4 分，共 20 分)

1、设A是n阶方阵，I为n阶单位矩阵，且$A^2=A$，则$(A-2I)^{-1}=$__________.

2、设A是n阶可逆矩阵，A的行列式$|A|=a$，且A的各行元素之和均为b，则A的第 1 列元素的代数余子式之和$A_{11}+A_{21}+\dots+A_{n1}=$__________.

3、设$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$为三个三维（列）向量，记矩阵$A=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)$，已知$A$的行列式$|A|=1$，记矩阵$B=(\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3,\alpha_1+2\alpha_2+4\alpha_3,\alpha_1+3\alpha_2+9\alpha_3)$，则行列式$|B|=$__________.

4、已知$f(x_1,x_2,x_3)=x_1^2+tx_2^2+tx_3^2+2x_1x_2+4x_1x_3$为正定二次型，则$t$的取值范围为__________.

5、设矩阵$A=(a_{ij})_{3\times 3}$是正交矩阵，且$a_{11}=1$.设向量$\beta=(1,0,0)^T$，则非齐次线性方程组$AX=\beta$的解$X=$__________.

三、(8 分) 计算n阶行列式$D_n=\begin{vmatrix} 1+a_1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 1+a_2 & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 1 & \cdots & 1+a_n \end{vmatrix}$,其中$a_i\neq 0, i=1,2,\dots,n$

四、(12 分) 设线性方程组为$\begin{cases} x_1+x_2-2x_3+3x_4=0 \\ 2x_1+x_2-6x_3+4x_4=-1 \\ 3x_1+2x_2+ax_3+7x_4=-1 \\ x_1-x_2-6x_3-x_4=b \end{cases}$

(1) 讨论a,b为何值时,方程组有解或无解;

(2) 当有解时,求出方程组的解.

五、

为三

六、(1

矩阵C,

五、(10 分) 设矩阵 A,B 满足 $A^*BA=2BA-8I$,其中 $A=\begin{pmatrix}1&2&-2\\0&-2&4\\0&0&1\end{pmatrix}$,$A^*$ 表示 A 的伴随矩阵,I 为三阶单位矩阵,求矩阵 B.

六、(12 分) 已知矩阵 $A=\begin{pmatrix}a-1&-1&1\\-1&a-1&1\\1&1&a-1\end{pmatrix}$ 有特征值 1,当 A 的特征值之和最小时,求正交矩阵 C,使得 C^TAC 为对角矩阵,并写出此对角矩阵.

七、（10分）已知方阵$A,I-A,I-A^{-1}$均可逆，其中I为单位矩阵，证明：

$$(I-A)^{-1}+(I-A^{-1})^{-1}=I$$

八、（12分）证明题

设A,B为n阶方阵，已知A可相似对角化，又有$A^2+A=0$，$B^2+B=I$,且有秩关系$R(AB)=2$

证明：（1）B可逆；

（2）$|A+2I|=2^{n-2}$，其中I为n阶单位矩阵.

2018-2019 学年第二学期期末考试 A 卷参考答案

一、判断题

1.【正解】✓

【解析】由于 $AB=BA$，$A(B+C)A=(AB+AC)A=ABA+ACA=A^2B+ACA$

【考点延伸】《考试宝典》知识点 4——矩阵的概念和基本运算

2.【正解】✓

【解析】由于线性无关，则 $\alpha_1+\alpha_2+\cdots+\alpha_m\neq 0$

【考点延伸】《考试宝典》知识点 11——向量组的线性相关和线性表示

3.【正解】×

【解析】由题干知：$AB=0$，且 $A\neq 0, B\neq 0$，则线性齐次方程组 $AX=0$ 有非零解，则A的列向量组线性相关；由 $AB=0\rightarrow (AB)^T=B^TA^T=0$，即齐次线性方程组 $B^TY=0$ 有非零解。则 B^T 的列向量组线性相关，即B的行向量组线性相关。

【考点延伸】《考试宝典》知识点 16——齐次线性方程组

4.【正解】✓

【解析】$A_{m\times n}B_{n\times s}=O$，则 $R(A)+R(B)\leq n$。故 $r(A)+r(A)\leq 3$，且 A 非零矩阵，$r(A)\geq 1$。故 $r(A)=1$，因此 $Ax=0$ 线性无关解向量个数为2

【考点延伸】《考试宝典》知识点 16——齐次线性方程组

5.【正解】✓

【解析】对于方程组 ① $Ax=0$，② $A^TAx=0$，其中 ① 的解显然必是 ② 的解，对于 ② 的解若 $A^TAx=0\Rightarrow x^TA^TAx=0\Rightarrow (Ax)^TAx=0$，所以 ② 的解显然必是 ① 的解，两方程组同解，故 $r(A)=r(A^TA)$

【考点延伸】《考试宝典》知识点 4——矩阵的概念和基本运算

6.【正解】✓

【解析】由题可知 $A\begin{bmatrix}1\\1\\\vdots\\1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1\\1\\\vdots\\1\end{bmatrix}$，故由定义，显然1为矩阵的一个特征值

【考点延伸】《考试宝典》知识点 19——特征值和特征向量

7.【正解】✓

【解析】若A为正定矩阵，则A的特征值都为正数，而A^*特征值为$\frac{|A|}{\lambda}$，因此A^*特征值也恒正，

因此矩阵A^*正定

【考点延伸】《考试宝典》知识点24——正定二次型和正定矩阵

8、【正解】✓

【解析】注意到X^TAX是一个数，所以$X^TAX=(X^TAX)^T=X^TA^TX$

又∵A^T为反对称矩阵，故$X^TA^TX=-X^TAX$，即$X^TAX=0$

【考点延伸】《考试宝典》知识点4——矩阵的概念和基本运算

二、填空题

1、【正解】$-\frac{1}{2}(A+I)$

【解析】$A^2=A\Rightarrow A^2-A-2I=-2I\Rightarrow(A-2I)(A+I)=-2I$

故$(A-2I)^{-1}=-\frac{1}{2}(A+I)$

【考点延伸】《考试宝典》知识点5——矩阵的逆

2、【正解】$\frac{a}{b}$

【解析】由题可知$A\begin{bmatrix}1\\1\\\vdots\\1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}b\\b\\\vdots\\b\end{bmatrix}$，又$A$可逆，因此$b\neq0$，因此有$\begin{bmatrix}1\\1\\\vdots\\1\end{bmatrix}=A^{-1}\begin{bmatrix}b\\b\\\vdots\\b\end{bmatrix}$

$=\frac{1}{|A|}A^*\begin{bmatrix}b\\b\\b\\b\end{bmatrix}=A^*\begin{bmatrix}\frac{b}{a}\\\frac{b}{a}\\\frac{b}{a}\\\frac{b}{a}\end{bmatrix}$，可得$(A_{11}+A_{21}+\cdots+A_{n1})\frac{b}{a}=1$，故

$A_{11}+A_{21}+\cdots+A_{n1}=\frac{a}{b}$

【考点延伸】《考试宝典》知识点5——矩阵的逆

3、【正解】2

【解析】$B=(\alpha_1\ \ \alpha_2\ \ \alpha_3)\begin{pmatrix}1&1&1\\1&2&3\\1&4&9\end{pmatrix}$，故$|B|=|A|\begin{vmatrix}1&1&1\\1&2&3\\1&4&9\end{vmatrix}=1\times2=2$

【考点延伸】《考试宝典》知识点 4——矩阵的概念和基本运算

4.【正解】$t>5$

【解析】二次型对应矩阵为$\begin{pmatrix}1&1&2\\1&t&0\\2&0&t\end{pmatrix}$，为正定矩阵，故顺序主子式大于零，故

$$\begin{vmatrix}1&1\\1&t\end{vmatrix}>0,\begin{vmatrix}1&1&2\\1&t&0\\2&0&t\end{vmatrix}>0，故t>5$$

【考点延伸】《考试宝典》知识点 24——正定二次型和正定矩阵

5.【正解】$\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix}$

【解析】由于矩阵A为正交矩阵，而$a_{11}=1$因此矩阵$A=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&0&1\\0&1&0\end{pmatrix}$或$A=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$

故$AX=\beta$的解$X=\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix}$

【考点延伸】《考试宝典》知识点 17——非齐次线性方程组

三、【解析】$D_n=\begin{vmatrix}1&0&0&\cdots&0\\1&1+a_1&1&\cdots&1\\1&1&1+a_2&\cdots&1\\\vdots&\vdots&\vdots&\ddots&\vdots\\1&1&1&1&1+a_n\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1&-1&-1&\cdots&-1\\1&a_1&0&\cdots&0\\1&0&a_2&\cdots&0\\\vdots&\vdots&\vdots&\ddots&\vdots\\1&0&0&\cdots&a_n\end{vmatrix}$（爪型行列式）

$$=\left(1+\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{a_i}\right)\left(\prod_{i=1}^{n}a_i\right)$$

【考点延伸】《考试宝典》知识点 1——行列式的概念及其性质

四、【解析】1.A为系数矩阵$(A|b)=\left(\begin{array}{cccc|c}1&1&-2&3&0\\2&1&-6&4&-1\\3&2&a&7&-1\\1&-1&-6&-1&b\end{array}\right)\to\left(\begin{array}{cccc|c}1&1&-2&3&0\\0&-1&-2&-2&-1\\0&0&a+8&0&0\\0&0&0&0&b+2\end{array}\right)$

当$b\neq-2$时，方程无解；当$b=-2$时，方程有解

2.当$b=-2$，$a\neq-8$时$r(A)=R(A|b)=3$，因此通解为

$$X=\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\end{bmatrix}=k\begin{bmatrix}-1\\-2\\0\\1\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}-1\\1\\0\\0\end{bmatrix}\quad k\in R$$

当$b=-2$，$a=-8$时$r(A)=R(A|b)=2$，因此通解为

$$X=\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\end{bmatrix}=k_1\begin{bmatrix}4\\-2\\1\\0\end{bmatrix}+k_2\begin{bmatrix}-1\\-2\\0\\1\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}-1\\1\\0\\0\end{bmatrix}\quad k_1,k_2\in R$$

【考点延伸】《考试宝典》知识点17——非齐次线性方程组

五、【解析】$A^*BA=2BA-8I$，而$|A|=-2$，因此A可逆，$|A|A^{-1}BA=2BA-8I$

$|A|A^{-1}B=2B-8A^{-1}\Rightarrow|A|B=2AB-8I\Rightarrow 8I=(2A-|A|I)B$

$$B=8(2A-|A|I)^{-1}=8\begin{bmatrix}4&4&-4\\0&-2&8\\0&0&4\end{bmatrix}^{-1}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc}4&4&-4&1&0&0\\0&-2&8&0&1&0\\0&0&4&0&0&1\end{array}\right]\to\left[\begin{array}{ccc|ccc}4&0&0&1&2&-3\\0&-2&0&0&1&-2\\0&0&4&0&0&1\end{array}\right]$$

$$\to\left[\begin{array}{ccc|ccc}1&0&0&\frac{1}{4}&\frac{1}{2}&-\frac{3}{4}\\0&1&0&0&-\frac{1}{2}&1\\0&0&1&0&0&\frac{1}{4}\end{array}\right]\qquad B=8\begin{bmatrix}\frac{1}{4}&\frac{1}{2}&-\frac{3}{4}\\0&-\frac{1}{2}&1\\0&0&\frac{1}{4}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2&4&-6\\0&-4&8\\0&0&2\end{bmatrix}$$

【考点延伸】《考试宝典》知识点5——矩阵的逆

六、【解析】由$|A|=\begin{vmatrix}2-a&1&-1\\1&2-a&-1\\-1&-1&2-a\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}3-a&1&-1\\0&1-a&0\\1-a&0&1-a\end{vmatrix}=(1-a)\begin{vmatrix}3-a&-1\\1-a&1-a\end{vmatrix}$

$=(1-a)(1-a)(4-a)=0$，$\therefore a=1$或4

当$a=1$时，$A=\begin{bmatrix}0&-1&1\\1&0&1\\1&1&0\end{bmatrix}$，$|\lambda E-A|=\begin{vmatrix}\lambda&1&-1\\1&\lambda&-1\\-1&-1&\lambda\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}\lambda&1&\\1-\lambda&\lambda&1\\\lambda-1&0&\end{vmatrix}$

$=\begin{vmatrix}\lambda+1&1&-1\\0&\lambda-1&0\\\lambda-1&0&\lambda-1\end{vmatrix}=(\lambda-1)\begin{vmatrix}\lambda+1&-1\\\lambda-1&\lambda-1\end{vmatrix}=(\lambda-1)^2(\lambda+2)$

$\lambda_1=\lambda_2=1$，$\lambda_3=-2$，$a=4$时，

$A=\begin{bmatrix}3&1&1\\1&3&1\\1&1&3\end{bmatrix}$，$|\lambda E-A|=\begin{vmatrix}\lambda-3&1&-1\\1&\lambda-3&-1\\-1&-1&\lambda-3\end{vmatrix}=(\lambda-4)^2(\lambda$

λ_1

$(E$

η_1

$\to$

$\therefore$

【考点延伸】

七、【解析】$(I$

$=$

$=$

【考点延伸】

八、【解析】(1

(2

mi

α,x

A^2

$A\sim$

【考点延伸】

$\lambda_1=\lambda_2=4$，$\lambda_3=1$ $\quad\therefore A$ 的特征值的和最小时，$a=1$

$$(E-A)=\begin{pmatrix}1&1&-1\\1&1&-1\\-1&-1&1\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&1&-1\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}$$，取单位正交特征向量

$$\eta_1=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix}1\\-1\\0\end{bmatrix},\ \eta_2=\frac{1}{\sqrt{6}}\begin{bmatrix}1\\1\\2\end{bmatrix}(-2E-A)=\begin{pmatrix}-2&1&-1\\1&-2&-1\\-1&-1&-2\end{pmatrix},$$

$$\to\begin{pmatrix}-1&2&1\\1&-2&-1\\-1&-1&-2\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}0&0&0\\1&-1&0\\0&1&1\end{pmatrix}$$. 取单位特征向量 $\eta_3=\frac{1}{\sqrt{3}}\begin{bmatrix}1\\1\\-1\end{bmatrix}$

$$\therefore C=\begin{bmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}}&\frac{1}{\sqrt{6}}&\frac{1}{\sqrt{3}}\\-\frac{1}{\sqrt{2}}&\frac{1}{\sqrt{6}}&\frac{1}{\sqrt{3}}\\0&\frac{2}{\sqrt{6}}&-\frac{1}{\sqrt{3}}\end{bmatrix}\qquad C^TAC=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&-2\end{bmatrix}$$

【考点延伸】《考试宝典》知识点 22——二次型

【解析】$(I-A)^{-1}+(I-A^{-1})^{-1}=(I-A)^{-1}+(AA^{-1}-A^{-1})^{-1}$

$=(I-A)^{-1}+[(A-I)A^{-1}]^{-1}=(I-A)^{-1}+A(A-I)^{-1}$

$=(I-A)^{-1}-A(I-A)^{-1}=(I-A)(I-A)^{-1}=I$

【考点延伸】《考试宝典》知识点 4——矩阵的概念和基本运算

【解析】(1) $B^2+B=I\Rightarrow B(B+E)=I$；$|B||B+E|=|I|=1$；$|B|\neq 0$，$B$ 可逆

(2) 而 A 可相似对称化

$\min(r(A),r(B))\geq r(AB)=2\geq r(A)+r(B)-n=r(A)$，故 $r(A)=2$

α,x 分别为 A 的特征向量，特征值 $A\alpha=\lambda\alpha\Rightarrow A^2\alpha=\lambda A\alpha=\lambda^2\alpha$

$A^2\alpha=-A\alpha=x^2\alpha=-\lambda\alpha$；$\lambda^2=-\lambda$，因此 A 的特征值为 0 或 -1，$r(A)=2$

$$A\sim\begin{bmatrix}-1&&&&\\&-1&&&\\&&\ddots&&\\&&&0&\\&&&&0\end{bmatrix}_{n\times n}\qquad 故|A+2I|=\begin{bmatrix}1&&&&\\&1&&&\\&&2&&\\&&&\ddots&\\&&&&2\end{bmatrix}_{n\times n}=2^{n-2}$$

【考点延伸】《考试宝典》知识点 19——特征值与特征向量

2017-2018 学年第二学期期末考试 A 卷

一、判断题（16 分，每题 2 分，共 8 题）

1.若矩阵A的所r有阶子式都为0，则A的所有$r+1$阶子式，如果存在，也都为0.(　　)

2.两个n维向量组等价的充分必要条件是它们有相同的秩.(　　)

3.初等矩阵的乘积仍然是初等矩阵.(　　)

4.若方阵A的行列式$|A|=0$，则A的列向量中一定有一列可由其余列线性表示.(　　)

5.设A是一个n阶方阵，$f(A)$是一个常数项不为0的m次多项式，其中$m>0$.如果有$f(A)=0$,则A一定可逆.(　　)

6.设A是一个mxn矩阵，其秩为r,则非齐次线性方程组$AX=\beta$的线性无关的解的个数不超过$n-r$个.(　　)

7.由r个n维向量$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r$生成的向量空间$L(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r)$的维数为$\min(r,n)$.(　　)

8.设n阶方阵A, B均为正交矩阵，则AB也为正交矩阵.(　　)

二、填空题(20 分，每题 4 分，共 5 题)

1.已知一个4阶行列式第一行元素依次是$-4,0,1,3$，第3行元素的代数余子式依次为$-2,5,1,x$，则$x=$________.

2.设A是三阶方阵，将A的第1列与第2列交换得矩阵B，再把B的第2列加到第3列得矩阵C，则满足$AQ=C$的可逆矩阵Q为________.

3.设$\lambda=1$是方阵$A=\begin{bmatrix}-4&0&4\\-2&a&2\\-2&0&3\end{bmatrix}$的一个特征值，则$a=$________.

4.记5×4阶矩阵A的列向量依次为$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$设矩阵A的秩为3且各行元素和为0,又已知向量$\beta=\alpha_1-2\alpha_2-3\alpha_3$,那么非齐次线性方程组$AX=\beta$的通解为：________.

5.设$A_{n\times n}$是一个实对称矩阵，且存在整数$m\geq1$使得$A^m=\boldsymbol{O}$，则$A=$________.

三、(8分) 计算n阶行列式$D_n=\begin{vmatrix} a_1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & a_2 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 1 & a_3 & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & a_n \end{vmatrix}$，其中$a_i\neq 1, i=1,2,\cdots,n$.

四、(12分) 设三维向量$\alpha_1=\begin{bmatrix} a+3 \\ a \\ 3(a+1) \end{bmatrix},\alpha_2=\begin{bmatrix} 1 \\ a-1 \\ a \end{bmatrix},\alpha_3=\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ a+3 \end{bmatrix}$，$\beta=\begin{bmatrix} a \\ a \\ 3 \end{bmatrix}$，问：

(1) a为何值时，β能由$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$唯一的线性表示？

(2) a为何值时，β能由$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$线性表示，但表示不唯一？此时给出所有可能的表示.

(3) a为何值时，β不能由$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$线性表示.

五、(10 分) 设矩阵$A=\begin{bmatrix}-2&0&0\\2&a&2\\3&1&b\end{bmatrix}$和矩阵$B=\begin{bmatrix}-1&&\\&2&\\&&c\end{bmatrix}$相似，求$a,b,c$

六、(12 分) 已知二次型$f(x,y,z)=x^2+4xy+4xz+y^2+4yz+z^2$，试用正交变换将此二次型化为标准型.给出其标准型，及所使用的正交变换矩阵.

七、证明题（10 分）设 $A, B, A+B$ 都是 n 阶可逆矩阵，证明 $A^{-1}+B^{-1}$ 也是可逆矩阵.

《线性代数》历年题

八、证明题（10 分）设 $A=(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n)$, $B=(\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_n)$ 是两个 $m\times n$ 矩阵，已知存在 n 阶方阵 K 使得 $B=AK$，且矩阵 A 的列向量组 $\{\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n\}$ 线性无关.证明：矩阵 B 的列向量组 $\{\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_n\}$ 也线性无关当且仅当 K 是可逆矩阵.

2017-2018 学年第二学期期末考试 A 卷参考答案

一、 判断题（16 分，每题 2 分，共 8 题）

1、【正解】对

【解析】若矩阵A的所有r阶子式都为0，那么$r(A)<r$，因此 A 的所有 r+1 阶子式，

如果存在都要为 0，否则$r(A)\geq r+1$就会出现矛盾.

【考点延伸】《考试宝典》【知识点 9】矩阵的秩

2、【正解】错

【解析】"两个n维向量组等价的充分必要条件是它们有相同的秩"这个命题是错的，

我们用反例：$\left\{\begin{bmatrix}1\\0\\0\\\vdots\\0\end{bmatrix}_{n\times1}\right\}$、$\left\{\begin{bmatrix}0\\1\\0\\\vdots\\0\end{bmatrix}_{n\times1}\right\}$是n维向量组，且它们的秩都是 1，

显然它们不等价.（不能相互线性表示）

【考点延伸】《考试宝典》【知识点 13】等价向量组

3、【正解】错

【解析】$A=\begin{bmatrix}0&1\\1&0\end{bmatrix},B=\begin{bmatrix}2&0\\0&1\end{bmatrix}$是两个初等矩阵，但是$AB=\begin{bmatrix}0&1\\2&0\end{bmatrix}$不是初等矩阵

【考点延伸】《考试宝典》【知识点 8】初等矩阵

4、【正解】对

【解析】若n阶方阵A的行列式$|A|=0$,则说明$r(A)<n$，因此A的列向量线性相关，

所以一定有一列可由其余列线性表示.

【考点延伸】《考试宝典》【知识点 10-15 重要题型】题型 1：利用矩阵的秩证明线性相关性

5、【正解】对

【解析】依题意$f(A)=a_mA^m+a_{m-1}A^{m-1}+\cdots+a_1A+a_0I=0$，且$a_m\neq0,a_0\neq0$，

那么$A(a_mA^{m-1}+a_{m-1}A^{m-2}+\cdots+a_1I)=-a_0I$，

反证法：假设A不可逆，那么$|A|=0$，

所以$|A||(a_mA^{m-1}+a_{m-1}A^{m-2}+\cdots+a_1I)|=|-a_0I|$，等式左边为 0，右边为$(-a_0)^n$，

由于$a_0\neq0$，那么左右两边矛盾，所以A可逆

【考点延伸】《考试宝典》【知识点 5】矩阵的逆

6、【正解】错

【解析】举个反例：假设$A=[1,1],\beta=1,r=r(A)=1,n=2$，那么$AX=\beta$的展开形式为

$x_1+x_2=1$,其通解为：$x=a\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}+(1-a)\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}$，a是任意常数

所以非齐次线性方程组$AX=\beta$的线性无关的解的个数为大于$n-r=1$.

【考点延伸】《考试宝典》知识点 16-18【重要题型】题型 2：非齐次线性方程的解

7.【正解】错

【解析】令$r=2,n=2,\alpha_1=\alpha_2=\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}$,显然生成的向量空间$L(\alpha_1,\alpha_2)$的维数为1，

而不是$\min(r,n)=2$.（思考：题目改为r个线性无关的n维向量才正确）

【考点延伸】《考试宝典》【知识点 15】向量空间

8.【正解】对

【解析】设n阶方阵A,B均为正交矩阵，根据正交矩阵的定义，那么$AA^T=BB^T=I$，

则$AB(AB)^T=ABB^TA^T=AIA^T=I$，所以AB也为正交矩阵.

【考点延伸】《考试宝典》【知识点 19-24 重要题型】题型 8：正交矩阵的性质和证明

二、填空题(18 分，每题 3 分，共 6 题)

1.【正解】-3

【解析】根据行列式的性质：$(-4,0,1,3)$和$(-2,5,1,x)$是正交的，因此$8+1+3x=0$，

所以$x=-3$.

【考点延伸】《考试宝典》【知识点 19-24 重要题型】题型 8：正交矩阵的性质和证明

2.【正解】$\begin{bmatrix}0&1&1\\1&0&0\\0&0&1\end{bmatrix}$

【解析】由初等矩阵的性质：$A\begin{bmatrix}0&1&0\\1&0&0\\0&0&1\end{bmatrix}=B,B\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&1\\0&0&1\end{bmatrix}=C$，那么：

$$A\begin{bmatrix}0&1&0\\1&0&0\\0&0&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&1\\0&0&1\end{bmatrix}=C\Rightarrow Q=\begin{bmatrix}0&1&0\\1&0&0\\0&0&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&1\\0&0&1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0&1&1\\1&0&0\\0&0&1\end{bmatrix}$$

【考点延伸】《考试宝典》【知识点 4-9 重要题型】题型 2：初等变换与初等矩阵

【正解】1

【解析】先求A的特征值，由$\det(A-\lambda I)=0$,那么可以化简得到：（注：这里的符号$\det(A-\lambda I)$表示方阵$A-\lambda I$的行列式，下同）$[(4+\lambda)(3-\lambda)-8](\lambda-a)=0$，

由于$\lambda=1$是该式的一个解，而$\lambda=1$时前面[中括号]的一项不为0，因此$(\lambda-a)=0$，那么$a=1$.

【考点延伸】《考试宝典》【知识点19】特征值与特征向量

4.【正解】$k\begin{bmatrix}1\\1\\1\\1\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}1\\-2\\-3\\0\end{bmatrix}$,$k$为任意常数

【解析】根据各行元素和为0，那么$A\begin{bmatrix}1\\1\\1\\1\end{bmatrix}=\mathbf{0}_{5\times1}$,由于$r(A)=3,n=4$，那么解集中，线性无关的解的个数不超过n－r=1个,因此我们找到了方程的齐次解.$\beta=\alpha_1-2\alpha_2-3\alpha_3$这个条件告诉我们$[\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4]\begin{bmatrix}1\\-2\\-3\\0\end{bmatrix}=\beta$，所以我们找到了特解.所以通解为:

$$k\begin{bmatrix}1\\1\\1\\1\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}1\\-2\\-3\\0\end{bmatrix},k\text{为任意常数}$$

【考点延伸】《考试宝典》【知识点16-18重要题型】线性方程组的解

5.【正解】0

【解析】对$A_{n\times n}$是一个实对称矩阵，那么A一定可相似对角化，所以我们可知:

$$A=P\begin{bmatrix}\lambda_1&&&\\&\lambda_2&&\\&&\ddots&\\&&&\lambda_n\end{bmatrix}P^{-1},\text{那么}A^m=P\begin{bmatrix}\lambda_1^m&&&\\&\lambda_2^m&&\\&&\ddots&\\&&&\lambda_n^m\end{bmatrix}P^{-1},$$

由于$A^m=\mathbf{0}$，那么$r(A^m)=0$，根据性质，与可逆矩阵相乘不改变矩阵的秩，即

$$r\left(\begin{bmatrix}\lambda_1^m&&&\\&\lambda_2^m&&\\&&\ddots&\\&&&\lambda_n^m\end{bmatrix}\right)=r(A^m)=0\Rightarrow\lambda_i=0(i=1,2,\cdots,n)$$

又$A=P\begin{bmatrix}\lambda_1&&&\\&\lambda_2&&\\&&\ddots&\\&&&\lambda_n\end{bmatrix}P^{-1}$，所以$r(A)=r\left(\begin{bmatrix}\lambda_1&&&\\&\lambda_2&&\\&&\ddots&\\&&&\lambda_n\end{bmatrix}\right)=0$

也就是说A

【考点延伸】《考试宝

三、(8分)

【正解】$D_n=$

从第二行开

$D_{n+1}=$

【考点延伸】《考试宝

四、(12分)

【正解】$A=$

(1) β能由

所以$r(A)=$

所以，当$a\neq$

(2) 当$a=1$

此时，$r(A)$

主元列在第

那么

也就是说$A=O_{n\times n}$

【考点延伸】《考试宝典》【知识点 21】实对称矩阵的对角化

三、（8 分）

【正解】$D_n=\begin{vmatrix} a_1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & a_2 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 1 & a_3 & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & a_n \end{vmatrix}=D_{n+1}=\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 0 & a_1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 0 & 1 & a_2 & 1 & \cdots & 1 \\ 0 & 1 & 1 & a_3 & \cdots & 1 \\ 0 & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 1 & 1 & 1 & \cdots & a_n \end{vmatrix}$ （利用加边法）

从第二行开始，每一行都减去第一行，那么：

$$D_{n+1}=\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ -1 & a_1-1 & & & & \\ -1 & & a_2-1 & & & \\ -1 & & & a_3-1 & & \\ \vdots & & & & \ddots & \\ -1 & & & & & a_n-1 \end{bmatrix}=\left(1+\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{a_i-1}\right)\prod_{i=1}^{n}(a_i-1)$$

$a_i\neq 1, i=1,2,\cdots,n$

【考点延伸】《考试宝典》【知识点 3：几种特殊的行列式】爪型行列式的计算方法

四、（12 分）

【正解】$A=\begin{bmatrix} a+3 & 1 & 2 \\ a & a-1 & 1 \\ 3(a+1) & a & a+3 \end{bmatrix},[A\mid B]=\left[\begin{array}{ccc|c} a+3 & 1 & 2 & a \\ a & a-1 & 1 & a \\ 3(a+1) & a & a+3 & 3 \end{array}\right]$

（1）β能由$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$唯一的线性表示意味着$AX=B$仅有唯一解.

所以$r(A)=r(A\mid B)=3$，那么A可逆，则$\det(A)\neq 0$.由于$\det(A)=a^2(a-1)$

所以，当$a\neq 0$且$a\neq 1$时，β能由$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$唯一的线性表示.

（2）当$a=1$时，$A=\begin{bmatrix} 4 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \\ 6 & 1 & 4 \end{bmatrix},[A\mid B]=\left[\begin{array}{ccc|c} 4 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 6 & 1 & 4 & 3 \end{array}\right]\to\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -2 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

此时，$r(A)=r(A\mid B)<3$，β能由$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$线性表示，但表示不唯一.

主元列在第一列和第二列，因此我们将x_3看作自由变量

那么$\begin{cases} x_1=-x_3+1 \\ x_2=2x_3-3 \\ x_3=x_3 \end{cases}$，即通解为：$X=k\begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} 1 \\ -3 \\ 0 \end{bmatrix},k\in R$，此时$\beta=[\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3]X$

(3) 当$a=0$时，$A=\begin{bmatrix}3&1&2\\0&-1&1\\3&0&3\end{bmatrix}$，$[A\mid B]=\left[\begin{array}{ccc|c}3&1&2&0\\0&-1&1&0\\3&0&3&3\end{array}\right]\to\left[\begin{array}{ccc|c}1&0&1&0\\0&1&-1&0\\0&0&0&1\end{array}\right]$

由于$r(A)\neq r(A\mid B)$，因此β不能由$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$线性表示

【考点延伸】《考试宝典》【知识点 11】向量组的线性表示

五、（10 分）

【正解】由于$A=\begin{bmatrix}-2&0&0\\2&a&2\\3&1&b\end{bmatrix}$和矩阵$B=\begin{bmatrix}-1&&\\&2&\\&&c\end{bmatrix}$相似，

那么A、B有相同的特征值，则$tr(A)=tr(B),\det(A)=\det(B)$

由于B的特征值为对角线上元素$-1,2,c$,那么A也有这三个特征值.

由于$A=\left[\begin{array}{c|cc}-2&0&0\\\hline 2&a&2\\3&1&b\end{array}\right]$是下三角的分块矩阵，

所以其特征值为：-2,以及$\begin{bmatrix}a&2\\1&b\end{bmatrix}$的两个特征值.那么$c=-2$.

由于$\det(B)=-1\times2\times(-2)=4,tr(B)=-1+2+(-2)=-1$

因此：$\det(A)=-2\times(ab-2)=4,tr(A)=a+b-2=-1$

解得：$a=0,b=1$(或者$a=1,b=0$)

【考点延伸】《考试宝典》【知识点 19-24 重要题型】题型 5：相似矩阵

六、（12 分）

【正解】$f(x,y,z)=x^2+4xy+4xz+y^2+4yz+z^2$

对应的矩阵形式表示为$f(x,y,z)=\begin{bmatrix}x&y&z\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&2&2\\2&1&2\\2&2&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\y\\z\end{bmatrix}$

我们令$A=\begin{bmatrix}1&2&2\\2&1&2\\2&2&1\end{bmatrix}$,那么由于$A$是对称矩阵，所以$A$一定可以相似对角化

令$\det(A-\lambda I)=0$,所以$(\lambda-5)(\lambda+1)^2=0$，解得$\lambda_1=\lambda_2=-1,\lambda_3=5$

当$\lambda_1=\lambda_2=-1$时，根据$(A-\lambda I)x=0$可以解得对应的特征向量为

$p_1=\begin{bmatrix}1\\-1\\0\end{bmatrix},p_2=\begin{bmatrix}1\\0\\-1\end{bmatrix}$，将其进行施密特正交化，那么

$$q_1=p_1=\begin{bmatrix}1\\-1\\0\end{bmatrix},q_2=p_2-\frac{q_1\cdot p_2}{q_1\cdot q_1}q_1=\begin{bmatrix}1\\0\\-1\end{bmatrix}-\frac{1}{2}\begin{bmatrix}1\\-1\\0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1/2\\1/2\\-1\end{bmatrix}$$

单位化后为：$\varepsilon_1=\begin{bmatrix}1/\sqrt{2}\\-1/\sqrt{2}\\0\end{bmatrix},\varepsilon_2=\begin{bmatrix}1/\sqrt{6}\\1/\sqrt{6}\\-2/\sqrt{6}\end{bmatrix}$

同理：$\lambda_3=5$ 对应的标准化后的特征向量为$\varepsilon_3=\begin{bmatrix}1/\sqrt{3}\\1/\sqrt{3}\\1/\sqrt{3}\end{bmatrix}$

那么所使用的正交变换矩阵$P=\begin{bmatrix}1/\sqrt{2}&1/\sqrt{6}&1/\sqrt{3}\\-1/\sqrt{2}&1/\sqrt{6}&1/\sqrt{3}\\0&-2/\sqrt{6}&1/\sqrt{3}\end{bmatrix}$（$P$ 正交）

因此$A=P\begin{bmatrix}-1&&\\&-1&\\&&5\end{bmatrix}P^{-1}\Rightarrow P^TAP=\begin{bmatrix}-1&&\\&-1&\\&&5\end{bmatrix}$（利用$P^{-1}=P^T$）

我们令：$X=\begin{bmatrix}x\\y\\z\end{bmatrix},V=\begin{bmatrix}v_1\\v_2\\v_3\end{bmatrix},X=PV$

所以$f(x,y,z)=X^T\begin{bmatrix}1&2&2\\2&1&2\\2&2&1\end{bmatrix}X=V^TP^T\begin{bmatrix}1&2&2\\2&1&2\\2&2&1\end{bmatrix}PV=V^T\begin{bmatrix}-1&&\\&-1&\\&&5\end{bmatrix}V$

因此，标准型为$f=-v_1{}^2-v_2{}^2+5v_3{}^2$

【考点延伸】《考试宝典》【知识点 19-24 重要题型】题型 6：二次型的标准化

（10 分）

【解析】根据$A,B,A+B$都是n阶可逆矩阵，

因此$A^{-1}(A+B)B^{-1}=A^{-1}AB^{-1}+A^{-1}BB^{-1}=B^{-1}+A^{-1}$

因此$(A^{-1}+B^{-1})^{-1}=\{A^{-1}(A+B)B^{-1}\}^{-1}=B(A+B)^{-1}A$

【考点延伸】《考试宝典》【知识点 5】矩阵的逆

八、（10分）

【证明】由于矩阵A的列向量组$\{\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n\}$线性无关，因此$m \geq n$.

否则当$m<n$时，$r(A) \leq \min(m,n) \Rightarrow r(A)<n$，那么$A$的列向量组$\{\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n\}$线性相关，故矛盾.

由于$m \geq n$，且A的列向量组$\{\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n\}$线性无关，因此$r(A)=n$

充分性：

（1）K是可逆矩阵时，那么由于$B=AK$，因此$r(B)=r(A)=n$，

因此矩阵B的列向量组$\{\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_n\}$也线性无关

（**注：**与可逆矩阵相乘不改变矩阵的秩）

必要性：

（2）当矩阵B的列向量组$\{\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_n\}$线性无关时，那么$r(B)=n$

因此，我们可以得到$r(B)=r(A)=n$

由题意存在$B=AK$，注意到K是n阶方阵.

我们用反证法：假设K不可逆，那么一定有$r(K)<n$，

因此$r(AK) \leq \min(r(A),r(K))=r(K)<n$

（**注：**秩的不等式$r(AB) \leqslant \min(r(A),r(B))$）

又因为$r(B)=n$，$B=AK$，所以$r(AK)=n$

因此产生了矛盾

也就是说K一定是可逆矩阵.

【考点延伸】《考试宝典》【知识点 11】向量组的线性相关

一、判断是

1、设 A 是

2、两个同

3、任意一

4、若两个

5、设$A=$

6、设向量组

7、设 A 是

8、设 A 是

二、填空题

1、设$\alpha=(1$

2、设 A,B 是

=

3、设矩阵A

4、设5×4阶

方程组$AX=$

5、如果矩阵A

三、计算$n+1$阶

2016-2017 学年第二学期期末考试试卷

一、判断题

1、设A是n阶方阵，如果A行列式非零，则对任意的$1\leqslant k\leqslant n$，A一定有一个非零的k阶子式

2、两个同型矩阵等价当且仅当它们有相同的秩

3、任意一个可逆矩阵均可经过有限次初等变换为单位矩阵

4、若两个n阶方阵A,B相似，那么对任意的多项式$f(x)$,均有$f(A)$相似于$f(B)$

5、设$A=a_{ij}$是n阶矩阵，$\lambda_i=(1\leqslant i\leqslant n)$是A的特征值，则有$\sum\limits_{1\leqslant i\leqslant n}\lambda_i^2=\sum\limits_{1\leqslant i\leqslant n}\sum\limits_{1\leqslant j\leqslant n}a_{ij}^2$

6、设向量组$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$线性无关，则向量组$\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3,\alpha_2+\alpha_3,\alpha_3$也线性无关

7、设A是实对称矩阵，如果A的特征值均为0，则A=0

8、设A是n阶实矩阵，则A^TA是正定矩阵

二、填空题

1、设$\alpha=(1,-1,1)^T,\beta=(1,1,1)^T,A=\alpha\beta^T$，那么$A^n=$__________

2、设A,B是两个三阶可逆矩阵，如果将A的第一行乘以5加到第三行上就得到矩阵B，则AB^{-1}

=__________

3、设矩阵$A=\begin{bmatrix}1&5&9\\0&2&8\\0&0&2\end{bmatrix}$，多项式$f(x)=x^3-x+2$.则$f(A)$的行列式________

4、设5×4阶矩阵A的行向量表示为$(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4)$，其秩为4.设向量$\beta=\alpha_1-2\alpha_2-3\alpha_3$那么线性方程组$AX=\beta$的解为__________

5、如果矩阵$A=\begin{bmatrix}t&1&2\\1&1&0\\2&0&t-1\end{bmatrix}$是正定矩阵，则t的取值范围为________

计算$n+1$阶行列式$D_{n+1}=\begin{bmatrix}a_0&b_1&\cdots&b_n\\c_1&a_1&\cdots&0\\\vdots&\vdots&\ddots&0\\c_n&0&\cdots&a_n\end{bmatrix}$，其中$a_i\neq0$，$i=1,2,\cdots,n$

四. 线性方程组$\begin{cases} (\lambda+3)x_1+x_2+2x_3=\lambda \\ \lambda x_1+(\lambda-1)x_2+x_3=\lambda \\ 3(\lambda+1)x_1+\lambda x_2+(\lambda+3)x_3=3 \end{cases}$

① 当λ取什么值时有唯一解？

② 当λ取什么值时无解？当λ取什么值时有无穷个解？当有无穷个解时，求出其通解。

五. 设三阶方阵 A 的特征值为 1，1，-1，属于它们的特征向量分别是$\begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix}$，$\begin{bmatrix}1\\0\\1\end{bmatrix}$，$\begin{bmatrix}2\\1\\1\end{bmatrix}$

求矩阵 A

六. 用正交矩阵将三维空间中的二次曲面$2xy+2yz+2zx=1$化为标准方程，给出使用的正交变换矩阵，并指出曲面类型

七. 设 A 是一个

的基础解系，β

① 证明：β,β

② 问 $AX=b$ 有

八. 证明题

设 A 是 n 阶

① A 是可逆

② A 是可相

四. 线性方程组$\begin{cases}(\lambda+3)x_1+x_2+2x_3=\lambda\\ \lambda x_1+(\lambda-1)x_2+x_3=\lambda\\ 3(\lambda+1)x_1+\lambda x_2+(\lambda+3)x_3=3\end{cases}$

① 当λ取什么值时有唯一解？

② 当λ取什么值时无解？当λ取什么值时有无穷个解？当有无穷个解时，求出其通解。

五. 设三阶方阵 A 的特征值为 1，1，-1，属于它们的特征向量分别是$\begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix}$，$\begin{bmatrix}1\\0\\1\end{bmatrix}$，$\begin{bmatrix}2\\1\\1\end{bmatrix}$

求矩阵 A

六. 用正交矩阵将三维空间中的二次曲面$2xy+2yz+2zx=1$化为标准方程，给出使用的正交变换矩阵，并指出曲面类型

七. 设A是一个$m\times n$矩阵，b是一个m维非零列向量，设$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_t$是齐次线性方程组$AX=0$的基础解系，$\beta$的非齐次线性方程组$AX=b$的一个特解

① 证明：$\beta,\beta+\alpha_1,\beta+\alpha_2,\cdots,\beta+\alpha_t$是$AX=b$的一个特解

② 问$AX=b$有可能有$t+2$个线性无关的解吗？说明理由

八. 证明题

设A是n阶方阵，满足$A^2-2A-3E=0$证明

① A是可逆的

② A是可相似对角化

2016-2017 学年第二学期期末考试试卷参考答案

一、判断题

1、【正解】正确

【解析】$|A|\neq 0, R(A)=n \Longrightarrow R(A^{*})=n \Longrightarrow$ 存在非零的$n-1$阶子式

也就是存在一个$n-1$阶矩阵满足$R(A_{n-1})=n-1 \Longrightarrow$ 存在的非零的$n-2$阶子式

以此类推，任意$1\leq k\leq n$皆满足

【考点延伸】《考试宝典》知识点 1 行列式的概念及其性质

2、【正解】正确

【解析】$R(A)=R(B) \Longleftrightarrow A$和$B$等价

【考点延伸】《考试宝典》知识点 9 矩阵的秩和矩阵等价

3、【正解】正确

【解析】n阶 A 矩阵可逆 $\Longrightarrow R(A)=n$，又$R(E)=n \Longrightarrow A$和E等价 $\Longrightarrow A$经过有限次初等变换可变为单位矩阵

【考点延伸】《考试宝典》知识点 9 矩阵的秩和矩阵等价

4、【正解】正确

【解析】存在P为可逆矩阵，$A=P^{-1}BP$，取$f(x)$中任一单项式kx^n，k,n为任意常数，

$kA^n=k(P^{-1}BP)^n=kP^{-1}BPP^{-1}BP\cdots P^{-1}BP=P^{-1}(kB^n)P \Longrightarrow kA^n\sim kB^n \Longrightarrow f(A)\sim f(B)$

【考点延伸】《考试宝典》知识点 19 特征值与特征向量

5、【正解】错误

【解析】反例：$A=\begin{bmatrix}0&4\\1&0\end{bmatrix}$，$|\lambda E-A|=0 \Longrightarrow \lambda_1=2,\lambda_2=-2$，$\sum\limits_{1\leq i\leq 2}\lambda_i^2=4$，$\sum\limits_{1\leq i\leq 2}\sum\limits_{1\leq j\leq 2}a_{ij}^2=17$

【考点延伸】《考试宝典》知识点 19 特征值与特征向量

6、【正解】正确

【解析】设$k_1(\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3)+k_2(\alpha_2+\alpha_3)+k_3\alpha_3=0 \Longrightarrow k_1\alpha_1+(k_1+k_2)\alpha_2+(k_1+k_2+k_3)\alpha_3=0$

又$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$无关 $\Longrightarrow \begin{cases}k_1=0\\k_1+k_2=0\\k_1+k_2+k_3=0\end{cases} \Longrightarrow k_1=k_2=k_3=0 \Longrightarrow \alpha_1+\alpha_2+\alpha_3,\alpha_2+\alpha_3,\alpha_3$线性无关

【考点延伸】《考试宝典》知识点 11 向量组的线性相关和线性表示 题型 2 用定义和重要结论证明线性相关性

【正解】正确

【解析】由于A为实对称矩阵，又特征值均为0，所以∃正交矩阵Q,使$Q^{-1}AQ=O$，

$\Rightarrow R(A)=R(0)=0\Longrightarrow A=O$

【考点延伸】《考试宝典》知识点21 实对称矩阵的对角化

【正解】错误

【解析】$X^TA^TAX=(AX)^T(AX)=a_{11}^2+a_{22}^2+\cdots+a_{nn}^2\geq 0$，$(X\neq 0)$这里需要讨论A

当$|A|\neq 0$时，$AX\neq 0\Longrightarrow (AX)^T(AX)>0$,正定

当$|A|=0$时，$AX=0$有解$\Longrightarrow (AX)^T(AX)\geq 0$,不正定

【考点延伸】《考试宝典》知识点24 正定二次型和正定矩阵

二、填空题

【正解】$\begin{bmatrix}1&1&1\\-1&-1&-1\\1&1&1\end{bmatrix}$

【解析】$\beta^T\alpha=1,A^n=\alpha(\beta^T\alpha)^{n-1}\beta^T=\alpha\beta^T=\begin{bmatrix}1&1&1\\-1&-1&-1\\1&1&1\end{bmatrix}$

【考点延伸】《考试宝典》知识点4 矩阵的概念和基本运算

【正解】$\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\-5&0&1\end{bmatrix}$

【解析】显然$\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\5&0&1\end{bmatrix}$可逆，则$\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\5&0&1\end{bmatrix}A=B\Longrightarrow AB^{-1}=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\5&0&1\end{bmatrix}^{-1}=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\-5&0&1\end{bmatrix}$

【考点延伸】《考试宝典》知识点5 矩阵的逆

【正解】128

【解析】$|\lambda E-A|=0\Longrightarrow\lambda=1,2,2\Longrightarrow f(A)$的特征值为$2,8,8\Longrightarrow|f(A)|=128$

【考点延伸】《考试宝典》知识点19 特征值与特征向量

【正解】$(1,-2,-3,0)^T$

【解析】$R(A)=4\Longrightarrow AX=0$只有零解$\Longrightarrow AX=\beta$有唯一解

$\alpha_1-2\alpha_2-3\alpha_3=A(1,-2,-3,0)^T\Longrightarrow X=(1,-2,-3,0)^T$

【考点延伸】《考试宝典》知识点 17 非齐次线性方程组

5、【正解】$t>3$

【解析】A 为正定矩阵 $\Longrightarrow A$ 的各阶顺序子式均大于 $0 \Longrightarrow t>0$，$\begin{vmatrix} t & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}=t-1>0$，

$$\begin{vmatrix} t & 1 & 2 \\ 1 & t & 0 \\ 2 & 0 & t-1 \end{vmatrix}=(t-3)(t+1)>0 \Longrightarrow t>3$$

【考点延伸】《考试宝典》知识点 24 正定二次型和正定矩阵

三. 【解析】由于 $a_i \neq 0$，第二列乘以 $\left(-\frac{c_1}{a_1}\right)$ 加到第一列，第三列乘以 $\left(-\frac{c_2}{a_2}\right)$ 加到第一列，第四列乘以 $\left(-\frac{c_3}{a_3}\right)$ 加到第一列，…，第 n+1 列乘以 $\left(-\frac{c_n}{a_n}\right)$ 加到第一列，得到

$$D_{n+1}=\begin{vmatrix} a_0-\frac{b_1c_1}{a_1}-\frac{b_2c_2}{a_2}-\cdots-\frac{b_nc_n}{a_n} & b_1 & \cdots & b_n \\ 0 & a_1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a_n \end{vmatrix}=\prod_{i=1}^{n} a_i\left(a_0-\sum_{i=1}^{n}\frac{b_ic_i}{a_i}\right)$$

【考点延伸】《考试宝典》知识点 1-3 题型 2 加边法和爪形行列式

四. 【解析】设该方程组为 $AX=\beta$，先将 $\overline{A}$ 矩阵进行初等行变换，

$$\begin{bmatrix} \lambda+3 & 1 & 2 & \lambda \\ \lambda & \lambda-1 & 1 & \lambda \\ 3(\lambda+3) & \lambda & \lambda+3 & 3 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 3 & 1 & 2-\lambda & 3\lambda-3 \\ 0 & \lambda-1 & 1-\lambda & 3\lambda-3 \\ \lambda & 0 & \lambda & 3-2\lambda \end{bmatrix}，|A|=0 \text{ 时，} \lambda_1=0，\lambda_2=1$$

① 当 $\lambda \neq 0$ 且 $\lambda \neq 1$ 时，$R(A)=R\left(\overline{A}\right)=3$，方程组有唯一解

② $\lambda=0$ 时，$R(A)=2, R\left(\overline{A}\right)=3 \Longrightarrow$ 方程组无解

$\lambda=1$ 时，$R(A)=R\left(\overline{A}\right)=2<3$，方程组有无穷解

由 $\begin{bmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}X=\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \Longrightarrow$ 基础解系 $\eta=(-1,2,1)^T$，

特解 $\eta_*=(0,-1,1)^T \Longrightarrow X=\begin{bmatrix} -k \\ 2k-1 \\ k+1 \end{bmatrix}$，$k$ 为任意常数

【考点延伸】《考试宝典》知识点 17 非齐次线性方程组

五.【解析】

$$\begin{bmatrix}1&1&2\\1&0&1\\1&1&1\end{bmatrix}^{-1}A\begin{bmatrix}1&1&2\\1&0&1\\1&1&1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&&\\&1&\\&&-1\end{bmatrix}$$

$$\Longrightarrow A=\begin{bmatrix}1&1&2\\1&0&1\\1&1&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&&\\&1&\\&&-1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&1&2\\1&0&1\\1&1&1\end{bmatrix}^{-1}=\begin{bmatrix}-3&0&4\\-2&1&2\\-2&0&3\end{bmatrix}$$

【考点延伸】《考试宝典》知识点 19 特征值与特征向量

六.【解析】对于二次型 $f(x,y,z)=2xy+2yz+2zx$，该二次型矩阵

$$A=\begin{bmatrix}0&1&1\\1&0&1\\1&1&0\end{bmatrix},\text{由}|\lambda E-A|=\begin{vmatrix}\lambda&-1&-1\\-1&\lambda&-1\\-1&-1&\lambda\end{vmatrix}=(\lambda-2)(\lambda+1)^2=0\Longrightarrow\lambda_1=\lambda_2=-1,\lambda_3=2$$

$(-E-A)X=0$ 得 $\lambda=-1$ 对应的两个线性无关的特征向量为 $\alpha_1=(-1,1,0)^T,\alpha_2=(-1,0,1)^T$

$(2E-A)X=0$ 得 $\lambda=2$ 对应的一个线性无关的特征向量为 $\alpha_3=(1,1,1)^T$，利用 *Gram-Schmidt*

正交化将 α_1,α_2 正交化得到 $\beta_1=\left(-\frac{1}{\sqrt2},\frac{1}{\sqrt2},0\right)$，$\beta_2=\left(-\frac{1}{\sqrt6},-\frac{1}{\sqrt6},\frac{2}{\sqrt6}\right)$，将 α_3 单位化得到

$\beta_3=\left(\frac{1}{\sqrt3},\frac{1}{\sqrt3},\frac{1}{\sqrt3}\right)$，此时 β_1,β_2,β_3 相互垂直，得到正交矩阵

$$Q=\begin{bmatrix}-\frac{1}{\sqrt2}&-\frac{1}{\sqrt6}&\frac{1}{\sqrt3}\\\frac{1}{\sqrt2}&-\frac{1}{\sqrt6}&\frac{1}{\sqrt3}\\0&\frac{2}{\sqrt6}&\frac{1}{\sqrt3}\end{bmatrix}$$

经过坐标变化 $\begin{bmatrix}x\\y\\z\end{bmatrix}=Q\begin{bmatrix}x_1\\y_1\\z_1\end{bmatrix}$ 下，二次型 $f=-x_1^2-y_1^2+2z_1^2=1$，该曲面为双叶双曲线

【考点延伸】《考试宝典》知识点 22 二次型 题型 6 二次型的标准化

七.【解析】①由于 $A\alpha_i=0$，$A\beta=b\Longrightarrow A(\beta+\alpha_i)=b$，所以 $\beta,\beta+\alpha_1,\beta+\alpha_2,\cdots,\beta+\alpha_t$ 都是 $AX=b$ 的特解

②不可能，证明：若有 $t+2$ 个线性无关解，不妨设解为 $\eta_1,\eta_2,\cdots,\eta_{t+2}$，则存在 $t+1$ 个线性无关的向量的向量组 $\eta_1-\eta_2,\eta_1-\eta_3,\cdots,\eta_1-\eta_{t+2}$ 为齐次方程 $AX=0$ 的基础解系，又 $AX=0$ 的基

础解系只有t个线性无关的向量，矛盾，所以$AX=b$不可能存在$t+2$个线性无关的解。

【考点延伸】《考试宝典》知识点 18 方程组解的延伸

八.【解析】①$A^2-2A-3E=0\Longrightarrow A(A-2E)=3E\Longrightarrow A\dfrac{A-2E}{3}=E$，A 矩阵可逆

② 要证明 A 可对角化，即确定 A 的线性无关的特征向量的个数，等价于求 A 的所有特征值的几何重数，由于 A 的特征值满足$\lambda^2-2\lambda-3=0$，解得$\lambda=3$或$\lambda=-1$，

i)当$\lambda=3$和$\lambda=-1$均是 A 的特征值时：

$A^2-2A-3E=0\Longrightarrow(A+E)(3E-A)=0\Longrightarrow R(A+E)+R(3E-A)\leqslant n$，

又$R(A+E)+R(3E-A)\geqslant R(A+E+3E-A)=R(4E)=n$

$\Longrightarrow R(3E-A)+R(E+A)=n$，

$(A+E)$中有$R(A+E)$个线性无关解向量，$(3E-A)(A+E)=0$，所以对于

$(3E-A)X=0$，有$n-R(3E-A)$个线性无关的解向量，同理

$(A+E)X=0$，有$n-R(A+E)$个线性无关的解向量，说明 A 有

$$n-R(3E-A)+n-R(E+A)=n$$

个线性无关的特征向量，因此，A 是可相似对角化

ii)当$\lambda=3$是 A 的特征值，但$\lambda=-1$不是 A 的特征值时：此时$\lambda=3$的几何重数为

$$n-R(3E-A)$$

但$|E+A|\neq 0$，说明$E+A$为可逆矩阵，由$(A+E)(3E-A)=0$得到$3E-A=0$，那么 A 的线性无关特征向量的个数为$n-R(3E-A)=n$，所以 A 可对角化。

iii)当$\lambda=-1$是 A 的特征值，但$\lambda=3$不是 A 的特征值时，同 ii)，因此 A 可对角化。

【考点延伸】《考试宝典》知识点 20 矩阵相似对角化

2014-2015 学年第二学期期末考试 A 卷

一、判断题（16 分，每题 2 分，共 8 题）()

1. 设A为阶方阵（$n\geq 3$），则对于任意数K，有（KA）$^*=KA^*$，A^*为A的伴随矩阵.(　　)
2. 设A为$m\times n$阶实矩阵，若$A^TA=0$，则$A=0$.(　　)
3. 设n阶方阵A与B相似，则对于任意的多项式$f(\lambda)$，有$f(A)$相似于$f(B)$.(　　)
4. 若n阶行列式D_n的数值相同的元素大于n^2-n个，则行列式的值等于零.(　　)
5. 若齐次线性方程组$AX=0$只有零解，则对应的非齐次线性方程组$AX=b$有唯一解.(　　)
6. 若n阶方阵A的特征值为 1 或 0，则$A^2=A$.(　　)
7. 设A为n阶可逆矩阵，则A的任何一行都不是其余行的线性组合.(　　)
8. 设$A=(a_{ij})_{n\times n}$为n阶正定矩阵，则A的主对角线元素$a_{ii}>0$，i=1,2,…，n.(　　)

二、填空题(20 分，每题 4 分，共 5 题)

1. $D_4=\begin{vmatrix}1 & x & y & z\\ x & 1 & 0 & 0\\ y & 0 & 1 & 0\\ z & 0 & 0 & 1\end{vmatrix}=$________.

2. 设矩阵$A=(a_1, a_2, a_3, a_4)$，其中a_1，a_2，a_3，a_4都是四维列向量，P为四阶矩阵，若$AP=(a_1, a_2, a_3, a_1+a_4)$，则$P=$________.

3. 若 4 阶矩阵A的四个列向量a_1，a_2，a_3，a_4满足$a_1-a_2+a_3-a_4=0$，且秩$A=3$，则线性方程组$AX=0$的基础解系为________.

4. 已知三阶方阵A的特征值为 1，-1，2，设$B=A^3-5A^2$，则$|B|=$________.

5. 若二次型$f=(x_1, x_2, x_3)=x_1^2+4x_2^2+4x_3^2+2tx_1x_2+2x_1x_3+4x_2x_3$是正定的，则$t$的取值范围是________.

三、(8 分) 计算 n 阶行列式$D_n=\begin{vmatrix}a+b & ab & & & \\ 1 & a+b & ab & & \\ & 1 & a+b & \cdots & \\ & & \cdots & \cdots & ab\\ & & & 1 & a+b\end{vmatrix}$.

四、（10 分）已知 3 阶矩阵 A 的逆矩阵为：$A^{-1}=\begin{bmatrix}1&1&1\\1&2&1\\1&1&3\end{bmatrix}$，求 A 的伴随矩阵 A^* 的逆矩阵 $(A^*)^{-1}$

五、（12 分）已知线性方程组 $\begin{cases}x_1+x_2+x_3+x_4=0\\x_2+2x_3+2x_4=1\\-x_2+(a-3)x_3-2x_4=b\\3x_1+2x_2+x_3+ax_4=-1\end{cases}$ 求参数 a，b 的取值，使得方程组

1. 有唯一解
2. 无解
3. 有无穷多解，并求通解

六、（12 分）设矩阵 $A=\begin{bmatrix}1&-1&1\\a&4&b\\-3&-3&5\end{bmatrix}$ 有三个线性无关的特征向量，$\lambda=2$ 是 A 的二重特征值，试确定参数 a，b 及可逆矩阵 P，使得 $P^{-1}AP$ 为对角矩阵。

七、(12 分) 用正交变换 X=CY 化二次型 $f=(x_1, x_2, x_3)=x_1^2+x_2^2+x_3^2+4x_1x_2+4x_1x_3+4x_2x_3$ 为标准型.

八、(10 分) 设 A，B 为 n 阶方阵，I 为单位矩阵，且 $A^2=B^2=I$，$|A|=-|B|$，证明矩阵 ($A+B$) 不可逆.

2014-2015 学年第二学期期末考试 A 卷参考答案

一、 判断题（10 分，每题 2 分，共 5 题）

1、【正解】错

【解析】矩阵的伴随矩阵相关问题，记住公式即可.即：

由公式 $(kA)^{*}=k^{n-1}A^{*}$知，当且仅当$k=1$时，题述公式成立

【考点延伸】《考试宝典》【知识点 4-9 重要题型】题型 4：伴随矩阵的计算

2、【正解】对

【解析】由公式$r(A)=r(A^{T})=r(AA^{T})=r(A^{T}A)$知$r(A)=0$，则$A=0$；

【考点延伸】《考试宝典》【知识点 9】矩阵的秩

附常用矩阵秩的公式如下：

（1）$0\le R(A_{m\times n})\le \min\{m,n\}$

（2）$R(A)=R(A^{T})=R(A^{T}A)=R(AA^{T})$

（3）若A等价于B，即$A\sim B$，则$R(A)=R(B)$

（4）设A是$m\times n$矩阵，P,Q 分别为 m,n 阶矩阵，若 P、Q 可逆，则 $R(PA)=R(AQ)=R(PAQ)=R(A)$

（5）$\max\{R(A),R(B)\}\le R(A,B)\le R(A)+R(B)$

（6）设A，B分别为$m\times s$与$n\times s$阶矩阵，则$R\binom{A}{B}\le R(A)+R(B)$

（7）设A，B为同型矩阵，则$R(A\pm B)\le R(A)+R(B)$

（8）$R(AB)\le\min\{R(A),R(B)\}$，即$R(AB)\le R(A)$，$R(AB)\le R(B)$

（9）设A是$m\times n$阶矩阵，设B是$n\times s$阶矩阵，若$AB=0$，则$R(A)+R(B)\le n$

（10）设A是n阶矩阵$(n\ge 2)$，则$R(A^{*})=\begin{cases}n, & R(A)=n\\ 1, & R(A)=n-1\\ 0, & R(A)<n-1\end{cases}$

3、【正解】对

【解析】$f(A)=\sum_{i=1}^{\infty}a_iA^i$，$f(B)=\sum_{i=1}^{\infty}a_iB^i$，由于$A$与$B$相似，可知$A^i$与$B^i$相似

故$\sum_{i=1}^{\infty}a_iA^i$与$\sum_{i=1}^{\infty}a_iB^i$相似，即$f(A)$与$f(B)$相似

【考点延伸】相似矩阵与矩阵的多项式

4、【正解】错

【解析】题目表述不易直接分析，考虑特殊法（举反例）：

取$A=\begin{bmatrix}1&1\\0&1\end{bmatrix}$，其中 1 有 3 个，符合题目要求.而A对应行列式的值为 1

【考点延伸】行列式的值

5、【正解】错

【解析】此题中，由齐次线性方程组只有零解知，A的列向量线性无关；而对应非齐次线性方程组有唯一解等价于A的秩等于对应增广矩阵的秩且A为列满秩矩阵.由以上分析，很容易得到反例，取$A=\begin{bmatrix}1&0\\0&1\\0&0\end{bmatrix}$，$b=(0,0,1)^{T}$，则方程组$AX=b$无解

【考点延伸】《考试宝典

6.【正解】错

【解析】取$A=\begin{bmatrix}1&1&0\\0&1&1\\0&0&0\end{bmatrix}$

【考点延伸】特征值

7.【正解】对

【解析】由A可逆知，A

A行向量线性相

【考点延伸】《考试宝典

8.【正解】对

【解析】取n 阶列向量 x

A其他主对角元

【考点延伸】《考试宝典

二、 填空题(18 分，每题

1.【正解】$D_4=1-x^2-$

【解析】此类题一般两种

式阶数较小，

用后一 种方法

$-z^2+y\begin{vmatrix}x\\y\end{vmatrix}$

【考点延伸】《考试宝典

2.【正解】$P=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\\0&0&0\end{bmatrix}$

【解析】此类题很基础，

某个复杂问题中，需要

【考点延伸】向量的表示

3.【正解】$(1,-1,1,-1)^{T}$

【解析】此题体现上题

$AX=0$基础解

【考点延伸】《考试宝典

4.【正解】-288

【解析】由已知可得B的

$2^3-5\times 2^2=$

【考点延伸】《考试宝典

5.【正解】$(-1,2)$

【解析】对于正定矩阵的

【考点延伸】《考试宝典》【知识点17】非齐次线性方程组

6、【正解】错

【解析】取$A=\begin{bmatrix}1&1&0\\0&1&1\\0&0&0\end{bmatrix}$，则A特征值为1或0，满足要求.而$A^2=\begin{bmatrix}1&2&1\\0&1&1\\0&0&0\end{bmatrix}\neq A$

【考点延伸】特征值

7、【正解】对

【解析】由A可逆知，A行向量线性无关，A的任何一行都不能由其余行线性组合来表示.否则，A行向量线性相关，与已知矛盾

【考点延伸】《考试宝典》【知识点11】向量组的线性相关和线性表示

8、【正解】对

【解析】取n阶列向量$x=(1,0,0,\dots,0)^T$，根据正定矩阵性质，知$x^TAx=a_{11}>0$. 同理，可证A其他主对角元素均大于零

【考点延伸】《考试宝典》【知识点19-24重要题型】正定矩阵的性质和证明

二、 填空题(18分，每题3分，共6题)

1、【正解】$D_4=1-x^2-y^2-z^2$

【解析】此类题一般两种思路：根据行列式形式特征，对其进行变化以简化求解过程；在行列式阶数较小，且一时不能很快发现化简方法，则可直接展开，细心计算即可.此题可使用后一种方法.将D_4按最后一列展开，得$D_4=-z\begin{vmatrix}x&1&0\\y&0&1\\z&0&0\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}1&x&y\\x&1&0\\y&0&1\end{vmatrix}$

$=-z^2+y\begin{vmatrix}x&1\\y&0\end{vmatrix}+1-x^2=1-x^2-y^2-z^2$

【考点延伸】《考试宝典》【知识点2】行列式的展开

2、【正解】$P=\begin{bmatrix}1&0&0&1\\0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\end{bmatrix}$

【解析】此类题很基础，可以直接得出结果.一般这种求P的问题不会单独考察，更多的是在解决某个复杂问题中，需要自己得到结果并应用

【考点延伸】向量的表示

3、【正解】$(1,-1,1,-1)^T$

【解析】此题体现上题分析内容.由已知得$Ax=0$，其中$x=(1,-1,1,-1)^T$.因为$r(A)=3$，则$AX=0$基础解析只含$4-3=1$个线性无关向量.故其基础解系可表示为$(1,-1,1,-1)^T$

【考点延伸】《考试宝典》【知识点16-18重要题型】题型5：齐次（非齐次）方程组解的结构

4、【正解】-288

【解析】由已知可得B的三个特征值分别为$1^3-5\times1^2=-4$；$-1^3-5\times1^2=-6$；$2^3-5\times2^2=-12$.则$|B|=-4\times6\times12=-288$

【考点延伸】《考试宝典》【知识点19-24重要题型】求特征值

5、【正解】$(-1,2)$

【解析】对于正定矩阵的应用，有很多思路.如配方法，顺序主子式法，特值法等等.此题中出现

三阶正定矩阵，考虑用顺序主子式判别法进行讨论，二次型对应矩阵为$\begin{bmatrix}1 & t & 1\\ t & 4 & 2\\ 1 & 2 & 4\end{bmatrix}$，

由顺序主子式大于零，即$\begin{vmatrix}1 & t\\ t & 4\end{vmatrix} > 0$，$\begin{vmatrix}1 & t & 1\\ t & 4 & 2\\ 1 & 2 & 4\end{vmatrix} > 0$，化简并解得$t \in (-1,2)$

【考点延伸】《考试宝典》【知识点 24】正定二次型和正定矩阵

三、（8 分）

【正解】将D_n按第一列展开，得$D_n = (a+b)D_{n-1} - abD_{n-2}$.

（1）$a \neq b$时，$D_1 = a + b = \frac{a^2-b^2}{a-b}$，$D_2 = (a+b)^2 - ab = a^2 + b^2 + ab = \frac{a^3-b^3}{a-b}$

于是猜想$D_n = \frac{a^{n+1}-b^{n+1}}{a-b}$，下面使用数学归纳法证明此猜想：

当$n = 1,2$时等式均成立.假设当$n \leq k$时等式成立，则

易得当$n = k+1$时，$D_{k+1} = (a+b)D_k - abD_{k-1} = \frac{a^{k+2}-b^{k+2}}{a-b}$，猜想成立

（2）$a = b$时

此时利用递推式也可得到正确结果，但过程较为繁琐.下面展示一种利用极限求取答案的方法：

$a \neq b$时，$D_n = \frac{a^{n+1}-b^{n+1}}{a-b} = \frac{(a-b)(a^n+a^{n-1}b+a^{n-2}b^2+\cdots+b^n)}{a-b}$

令$a \to b$，便可得$D_n = (n+1)a^n$，综上，可得$D_n = \begin{cases}\frac{a^{n+1}-b^{n+1}}{a-b}, & a \neq b\\ (n+1)a^n, & a = b\end{cases}$

【考点延伸】《考试宝典》【知识点 3】几种特殊的行列式

四、（10 分）

【正解】$(A^*)^{-1} = \frac{A}{|A|} = \begin{bmatrix}5 & -2 & -1\\ -2 & 2 & 0\\ -1 & 0 & 1\end{bmatrix}$

【考点延伸】《考试宝典》【知识点 4-9 重要题型】题型 6：矩阵的秩

五、（12 分）

【正解】对增广矩阵进行初等行变换，得矩阵如下所示$\begin{bmatrix}1 & 1 & 1 & 1 & 0\\ 0 & 1 & 2 & 2 & 1\\ 0 & 0 & a-1 & 0 & b+1\\ 0 & 0 & 0 & a-1 & 0\end{bmatrix}$

1.由已知得$r(A) = r(A|b) = 4$，则$a - 1 \neq 0$即$a \neq 1$（此时对b无取值要求）有唯一解

2.由已知得$r(A) < r(A|b)$，则$a - 1 = 0$且$b + 1 \neq 0$即$a = 1$，且$b \neq -1$，无解

3. 由已知得$r(A) = r(A|b) < 4$，则$a - 1 = 0$且$b + 1 = 0$即$a = 1$，$b = -1$

此时增广矩阵为$\begin{bmatrix}1 & 1 & 1 & 1 & 0\\ 0 & 1 & 2 & 2 & 1\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0\end{bmatrix}$

对应齐次线性方程组，基础解系由两个线性无关的解向量构成，

$\xi_1 = (1,-2,0,1)^T$，$\xi_2 = (1,-2,1,0)^T$

非齐次方程组一特解$\xi_3 = (-1,1,0,0)^T$，故通解$\xi = c_1\xi_1 + c_2\xi_2 + \xi_3$，其中$c_1$，$c_2$为常数

【考点延伸】《考试宝典》【知识点 16-18 重要题型】题型 2：非齐次线性方程组的解

六、（12分）

【正解】由已知得，矩阵A特征值$\lambda_1=\lambda_2=2$，设其另一个特征值为λ_3，

由$\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3=1+4+5$得$\lambda_3=6$，

特征方程$(\lambda E-A)x=0$，将$\lambda=2$代入，得系数矩阵：$A_1=\begin{bmatrix}1&1&-1\\a&2&b\\0&0&0\end{bmatrix}$

因为A有三个线性无关的特征向量，那么对应于$\lambda=2$，$(\lambda E-A)x=0$基础解系由两个线性无关解向量构成，可知$r(A_1)=1$ 从而得到：

$a=2=-b$，即$a=2$，$b=-2$

对应于$\lambda=2$，由$(\lambda E-A)x=0$易得两个线性无关基础解系：$\xi_1=(1,0,1)^T$，$\xi_2=(-1,1,0)^T$ 对应于$\lambda=6$，由$(\lambda E-A)x=0$易得一基础解系：$\xi_3=(1,-2,3)^T$

令$P=(\xi_1,\xi_2,\xi_3)$，满足$P^{-1}AP=\Lambda$，其中$\Lambda=\begin{bmatrix}2&0&0\\0&2&0\\0&0&6\end{bmatrix}$

【考点延伸】《考试宝典》【知识点 19-24 重要题型】求特征值与特征向量

七、（12分）

【正解】二次型对应矩阵$A=\begin{bmatrix}1&2&2\\2&1&2\\2&2&1\end{bmatrix}$，由特征行列式$|\lambda E-A|=0$得A特征值

$\lambda_1=\lambda_2=-1$，$\lambda_3=5$ 对应于$\lambda=-1$，由$(\lambda E-A)x=0$ 易得两个线性无关、正交的基础解系：$\xi_1=(-1,1,0)^T$，$\xi_2=(1,1,-2)^T$

对应于$\lambda=5$，由$(\lambda E-A)x=0$易得一基础解系：$\xi_3=(1,1,1)^T$，故存在$C=(\xi_1,\xi_2,\xi_3)$，使得在$X=CY$变换下，二次型化为标准型：$f(y_1,y_2,y_3)=-y_1^2-y_2^2+5y_3^2$

【考点延伸】《考试宝典》【知识点 21】实对称矩阵的相似对角化

八、（10分）

【证明】由$A^2=B^2=I$，取行列式得$|A|^2=|B|^2=1$，

又已知$|A|=-|B|$，则必有$|A|=-|B|=1$或$|A|=-|B|=-1$，即$|A||B|=-1$

故$|A||B||A+B|=|A||A+B||B|=|A^2+AB||B|=|A^2B+AB^2|=|A+B|$

即$-|A+B|=|A+B|$，则$|A+B|=0$，故$A+B$不可逆，原命题得证

【考点延伸】《考试宝典》【知识点 5】矩阵的逆

2013-2014 学年第二学期期末考试 A 卷

一、 判断题（16 分，每题 2 分，共 8 题）

1.设 A 为 $n(n\geq 3)$ 阶方阵，则任意数 a，都有 $(aA)^*=aA^*$.(　　)

2.若 n 阶行列式 D 中，多于 n^2-n 个元素为 0，则 D=0.(　　)

3.若 A 可对角化，则对任意多项式 $f(\lambda)$，$f(A)$ 也可对角化.(　　)

4.若 $A^2=A$ 则 $A=0$ 或 $A=I$.(　　)

5.若 $A+B$ 与 $A-B$ 均可逆，则 A、B 可逆.(　　)

6.若 n 阶实对称阵 A 的对角线上有某个元素等于零，则 A 一定不是正定矩阵.(　　)

7.若向量 α_1，α_2，α_3，α_4 线性无关，则必有 $\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3+\alpha_4\neq 0$.(　　)

8.设 A 为 m×n 矩阵，若 m<n,则线性方程组 $Ax=0$ 必有无穷多组解.(　　)

二、 填空题(20 分，每题 4 分，共 5 题)

1.设 A 为三阶方阵，$|A|=\frac{1}{2}$，则 $|(3A)^{-1}-2A^*|=$______.

2.设 $\alpha_1=[1,2,0,3]^T$，$\alpha_2=[2,7,1,1]^T$，$\alpha_3=[3,0,-2,t]^T$，则 t＝______时，$\{\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3\}$ 线性相关.

3.设 $A=\begin{bmatrix}1&2&3\\0&2&3\\0&0&3\end{bmatrix}$，则 $2I+A^{-1}$ 的特征值为______.

4.设 R^4 中向量 β 在基 $\{\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4\}$ 下坐标为 $X=[1,2,3,7]^T$，则 β 在基 $\{\alpha_1,\alpha_3,\alpha_4,\alpha_2\}$ 下的坐标 $Y=$______.

5.若 A，B 为正定方阵，则 $A^{-1},A^*,A+B,AB,KA(K>0)$ 中一定为正定矩阵的有______.

三、(8 分) 计算 n 阶行列式 $D_n=\begin{vmatrix}1+a_1&1&\cdots&1\\1&1+a_2&\cdots&1\\\cdots&\cdots&\cdots&\cdots\\1&1&\cdots&1+a_n\end{vmatrix}$，$(a_i\neq 0,i=1,2,\ldots,n)$.

四、(12分) λ 取何值时，线性方程组 $\begin{cases}\lambda x_1+x_2+x_3=1,\\ x_1+\lambda x_2+x_3=\lambda,\\ x_1+x_2+\lambda x_3=\lambda^2\end{cases}$ (1) 有唯一解；(2) 无解；(3) 有无穷多解，并求其通解.

五、(12分)) 设 $A=\begin{bmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}} & a_1 & 0\\ 0 & 0 & 1\\ a_2 & a_3 & 0\end{bmatrix}$ (1) a_1,a_2,a_3 满足何关系时，A 为可逆阵. (2) a_1,a_2,a_3 为何值时，A 为正交阵. (3) a_1,a_2,a_3 为何值时，A 为对称阵.

六、(12 分) 设ξ为 n 维非零实列向量，$\xi=[a_1,a_2,\dots,a_n]^T$, $|\xi|=2$, 又 $A=\xi\xi^T$,

(1) 证明 $A^2=4A$;

(2) 证明ξ是A的一个特征向量;

(3) 证明A相似于对角阵Λ，并写出对称阵Λ.

七、(10 分) 设$A=\begin{bmatrix}1 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 1\\ -1 & 0 & \lambda\\ 0 & \lambda & -1\end{bmatrix}$,二次型 $f(x_1,x_2,x_3)=X^T(A^TA)X$ 的秩为 2.

(1) 求实数λ的值;

(2) 求正交变换 $X=Cy$ 将 f 化为标准形.

八、证明题 (10 分) 证明A是正定矩阵的充要条件是存在实可逆阵P,使 $A=P^TP$.

2013-2014 学年第二学期期末考试 A 卷参考答案

一、判断题（16 分，每题 2 分，共 8 题）

1、【正解】错

【解析】$(aA)^*=A^*(aI)^*=a^{n-1}A^*$

【考点延伸】《考试宝典》【知识点 4-9 重要题型】题型 4：伴随矩阵的计算

2、【正解】对

【解析】若 n 阶行列式 D 中，多于 n^2-n 个元素为 0，那么必有一行的元素全为 0，则 D=0

【考点延伸】《考试宝典》【知识点 1】行列式的概念及其性质

3、【正解】对

【解析】若 A 可对角化，即 $P^{-1}AP=\Lambda$，$P^{-1}A^nP=P^{-1}AP\cdots P^{-1}AP=\Lambda^n$

则对任意多项式 $f(\lambda)$，$f(A)$ 也可对角化.

【考点延伸】《考试宝典》【知识点 20】矩阵相似对角化

4、【正解】错

【解析】假设 $A=\begin{bmatrix}1&0\\0&0\end{bmatrix}$，$A^2=\begin{bmatrix}1&0\\0&0\end{bmatrix}=A$，$A$ 不是零矩阵，也不是单位矩阵

【考点延伸】《考试宝典》【知识点 4-9 总览】幂等矩阵

5、【正解】错

【解析】$A=\begin{bmatrix}1&0\\0&0\end{bmatrix}$，$B=\begin{bmatrix}0&0\\0&1\end{bmatrix}$，$A+B$ 和 $A-B$ 可逆，但 A、B 不可逆

【考点延伸】《考试宝典》【知识点 5】矩阵的逆

6、【正解】对

【解析】若 n 阶实对称阵 A 的对角线上有某个元素等于零，则 A 一定不是正定矩阵.正定矩阵对角线上的元素均大于 0.

【考点延伸】《考试宝典》【知识点 24】正定二次型和正定矩阵

7、【正解】对

【解析】若向量 α_1，α_2，α_3，α_4 线性无关，则必有 $\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3+\alpha_4\neq 0$.

【考点延伸】《考试宝典》【知识点 11】向量组的线性相关和线性表示

8、【正解】对

【解析】线性方程组的行数小于未知元的个数，则方程组必有无穷解

【考点延伸】《考试宝典》【知识点 16-18 重要题型】线性方程组的解

二、填空题(20 分，每题 4 分，共 5 题)

1、【正解】$-\dfrac{16}{27}$

【解析】$\left|(3A)^{-1}-2A^{*}\right|=\left|-\dfrac{2}{3}A^{-1}\right|=-\dfrac{16}{27}$

【考点延伸】《考试宝典》【知识点 4-9 重要题型】题型 1：矩阵的运算与矩阵行列式的计算

2、【正解】19

【解析】$\begin{pmatrix}1&2&3\\2&7&0\\0&1&-2\\3&1&t\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&2&3\\0&3&-6\\0&0&0\\0&0&t-19\end{pmatrix}$，所以$t=19$

【考点延伸】《考试宝典》【知识点 11】向量组的线性相关和线性表示

3、【正解】$\lambda_1=3,\lambda_2=\dfrac{5}{2},\lambda_3=\dfrac{7}{3}$

【解析】$2I+A^{-1}=\begin{bmatrix}3&-1&0\\0&\dfrac{5}{2}&-\dfrac{1}{2}\\0&0&\dfrac{7}{3}\end{bmatrix}$，求得特征值为$\lambda_1=3,\lambda_2=\dfrac{5}{2},\lambda_3=\dfrac{7}{3}$

【考点延伸】《考试宝典》【知识点 19-24 重要题型】求特征值与特征向量

4、【正解】$Y=[1,3,7,2]^{T}$

【解析】$\beta=(\alpha_1,\ \alpha_2,\ \alpha_3,\ \alpha_4)X^{T}$

$$=(\alpha_1,\ \alpha_3,\ \alpha_4,\ \alpha_2)\begin{bmatrix}1&0&0&0\\0&0&0&1\\0&1&0&0\\0&0&1&0\end{bmatrix}^{-1}X^{T}=(\alpha_1,\ \alpha_3,\ \alpha_4,\ \alpha_2)\begin{bmatrix}1\\3\\7\\2\end{bmatrix}$$

【考点延伸】《考试宝典》【知识点 10-15 重要题型】题型 4：向量坐标与坐标变换

5、【正解】$A^{-1},A^{*},A+B,KA(K>0)$

【解析】A，B为正定方阵，则$A^{-1},A^{*},A+B,KA(K>0)$，对于AB，若AB可交换，才为正定矩阵，但题中未给该条件，故该矩阵不一定正定

【考点延伸】《考试宝典》【知识点 19-24 重要题型】正定矩阵的性质和证明

三、（8分）

【正解】$D_n=\begin{vmatrix}1&1&1&\cdots&1\\0&1+a_1&1&\cdots&1\\0&1&1+a_2&\cdots&1\\\vdots&\vdots&\vdots&\ddots&\vdots\\0&1&1&\cdots&1+a_n\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1&1&1&\cdots&1\\-1&a_1&0&\cdots&0\\-1&0&a_2&\cdots&0\\\vdots&\vdots&\vdots&\ddots&\vdots\\-1&0&0&\cdots&a_n\end{vmatrix}$

$$=\begin{vmatrix}1+\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{a_i} & 1 & 1 & \cdots & 1\\ 0 & a_1 & 0 & \cdots & 0\\ 0 & 0 & a_2 & \cdots & 0\\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a_n\end{vmatrix}=\left(1+\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{a_i}\right)\prod_{i=1}^{n}a_i$$

【考点延伸】《考试宝典》【知识点 3】几种特殊的行列式

四、（12 分）

【正解】首先用 Cramer 法则解

（1）$A=\begin{vmatrix}\lambda & 1 & 1\\ 1 & \lambda & 1\\ 1 & 1 & \lambda\end{vmatrix}=(\lambda-1)^2(\lambda+2)$，

故$|A|\neq 0\Leftrightarrow\lambda\neq 1$且$\lambda\neq -2$.即$\lambda\neq 1$且$\lambda\neq -2$时，方程组解唯一.

其他情形则只对应$\lambda=1$或$\lambda=-2$.

（2）当$\lambda=-2$时，$[A|b]=\left[\begin{array}{ccc|c}-2 & 1 & 1 & 1\\ 1 & -2 & 1 & -2\\ 1 & 1 & -2 & 4\end{array}\right]\to\left[\begin{array}{ccc|c}1 & -2 & 1 & -2\\ 0 & -3 & 3 & -3\\ 0 & 0 & 0 & 3\end{array}\right]$，

$r(A)\neq r[A|b]$，所以方程无解.

（3）当$\lambda=1$时，$[A|b]=\left[\begin{array}{ccc|c}1 & 1 & 1 & 1\\ 1 & 1 & 1 & 1\\ 1 & 1 & 1 & 1\end{array}\right]\to\left[\begin{array}{ccc|c}1 & 1 & 1 & 1\\ 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{array}\right]$

$r(A)=r([A|b])=1$，方程组有无穷多解，通解为$X=k_1\begin{bmatrix}-1\\1\\0\end{bmatrix}+k_2\begin{bmatrix}-1\\0\\1\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix}$ $k_1,k_2\in\boldsymbol{R}$

【考点延伸】《考试宝典》【知识点 16-18 重要题型】线性方程组的求解

五、【正解】（1）A为可逆阵时有$|A|\neq 0$，$\therefore a_1a_2-\frac{1}{\sqrt{2}}a_3\neq 0$，即$\sqrt{2}a_1a_2\neq a_3$

（2）由A为正交阵得：$\begin{cases}\frac{1}{2}+a_2^2=1\\ a_1^2+a_3^2=1\\ \frac{1}{\sqrt{2}}a_1+a_2a_3=0\end{cases}$，解得：$\begin{cases}a_1=\frac{1}{\sqrt{2}}\\ a_2=\frac{1}{\sqrt{2}}\\ a_3=-\frac{1}{\sqrt{2}}\end{cases}$ 或 $\begin{cases}a_1=-\frac{1}{\sqrt{2}}\\ a_2=\frac{1}{\sqrt{2}}\\ a_3=\frac{1}{\sqrt{2}}\end{cases}$ 或

$$\begin{cases}a_1=\frac{1}{\sqrt{2}}\\a_2=-\frac{1}{\sqrt{2}}\\a_3=\frac{1}{\sqrt{2}}\end{cases}\text{或}\begin{cases}a_1=-\frac{1}{\sqrt{2}}\\a_2=-\frac{1}{\sqrt{2}}\\a_3=-\frac{1}{\sqrt{2}}\end{cases}$$

（3）$A^T=\begin{bmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}}&0&a_2\\a_1&0&a_3\\0&1&0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}}&a_1&0\\0&0&1\\a_2&a_3&0\end{bmatrix}=A,$

$\therefore a_1=0,a_2=0,a_3=1$

【考点延伸】《考试宝典》【知识点 5】矩阵的逆；【知识点 19-24 重要题型】正交矩阵，转置矩阵

六、（12 分）

【证明】（1）已知$|\xi|=2$，即$(\xi,\xi)=\xi^T\xi=4$,所以$A^2=\xi\xi^T\xi\xi^T=4\xi\xi^T=4A$.

（2）因为$\xi\neq0,A\xi=\xi\xi^T\xi=4\xi$,所以$\xi$是$A$的对应于$\lambda=4$的特征向量.

（3）由$A^2=4A$得A的特征值λ满足$\lambda^2=4\lambda$，即$\lambda=4$或$\lambda=0$.

又$A^2=4A\Rightarrow A(4I-A)=0$,得$r(A)+r([4I-A])\leq n$

又$A+(4I-A)=4I$，得$r(A)+r([4I-A])\geq n$, 故$r(A)+r([4I-A])=n$

从而A共有$n-r([0\cdot I-A])+n-r([4I-A])=n$个线性无关的特征向量，从而$A$可相似于对角形$\Lambda$.由于$A=\xi\xi^T\neq0$，得$1\leq r(A)\leq r(\xi)=1$,即，

$r(A)=1$,由此可确定$\Lambda=\begin{bmatrix}4&&&\\&0&&\\&&\ddots&\\&&&0\end{bmatrix}_{n\times n}$

【考点延伸】《考试宝典》【知识点 19-24】矩阵相似对角化；

【知识点 19-24 重要题型】求特征值与特征向量

七、（10 分）

【正解】（1）$A^TA=\begin{bmatrix}2&0&1-\lambda\\0&\lambda^2+1&1-\lambda\\1-\lambda&1-\lambda&\lambda^2+3\end{bmatrix}$,因为$r(A^TA)=2$

所以$|A^TA|=(\lambda^2+3)(\lambda+1)^2=0$,解得，$\lambda=-1$

（2）$A^TA=\begin{bmatrix}2&0&2\\0&2&2\\2&2&4\end{bmatrix}$，由$|\lambda I-A^TA|=0$得$\lambda(\lambda-2)(\lambda-6)=0$

$\therefore A^TA$的特征值为$\lambda_1=0,\lambda_2=2,\lambda_3=6$

取 $C=\begin{bmatrix}-\frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}}\\ -\frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}}\\ \frac{1}{\sqrt{3}} & 0 & \frac{2}{\sqrt{6}}\end{bmatrix}$，则由正交变换 $X=Cy$，可得 f 化为标准形

$$f=2y_2^{\ 2}+6y_3^{\ 2}$$

【考点延伸】《考试宝典》【知识点 9】矩阵的秩；

【知识点 19-24 重要题型】题型 6：二次型的标准化

八、（10 分）

【证明】充分性：若 $A=P^TP$，则 A 为实对称矩阵，且 $\forall x\in R^n$，有

$$X^TAX=X^TP^TPX=(PX)^TPX\geq 0,$$

若 $X^TAX=0$，由 $(PX)^TPX=0$ 及 PX 为实向量知，$PX=0$

又 P 可逆，所以 $X=0$，从而 A 为正定矩阵.

必要性：若 A 正定，则存在正交阵 C，使 $C^TAC=\begin{bmatrix}\lambda_1 & & \\ & \lambda_2 & \\ & & \ddots \\ & & & \lambda_n\end{bmatrix}$，$\lambda_i>0(i=1,2,\dots,n)$，

从而 $A=C\begin{bmatrix}\lambda_1 & & \\ & \lambda_2 & \\ & & \ddots \\ & & & \lambda_n\end{bmatrix}C^T=C\begin{bmatrix}\sqrt{\lambda_1} & & \\ & \sqrt{\lambda_2} & \\ & & \ddots \\ & & & \sqrt{\lambda_n}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\sqrt{\lambda_1} & & \\ & \sqrt{\lambda_2} & \\ & & \ddots \\ & & & \sqrt{\lambda_n}\end{bmatrix}C^T$，

令 $P=\begin{bmatrix}\sqrt{\lambda_1} & & \\ & \sqrt{\lambda_2} & \\ & & \ddots \\ & & & \sqrt{\lambda_n}\end{bmatrix}C^T$，则 P 可逆，且 $A=P^TP$

【考点延伸】《考试宝典》【知识点 19-24 重要题型】题型 7：正定矩阵的性质和证明

2012-2013 学年第二学期期末考试 A 卷

一、判断题（16 分，每题 2 分，共 8 题）

1.若 n(n>2)阶行列式 $D=0$，则 D 有两行（列）的对应元素成比例.(　　)

2.若 n 阶行列式 D 恰有 n 个元素非零，则 $D\neq 0$.(　　)

3.若 A,B 均为不可逆方阵，则 $|A|=|B|$.(　　)

4.设 $f(x)$ 为任意一个多项式，A 为一个 n 阶矩阵，则 $(f(A))^T=f(A^T)$.(　　)

5.若齐次线性方程组中方程个数大于未知数的个数，则方程组只有零解.(　　)

6.若 $\{\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3\}$ 秩为 2，又 $\{\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4\}$ 秩为 3，则 α_1 可唯一地表示为 $\{\alpha_2,\alpha_3\}$ 的线性组合.(　　)

7.若 A,B 为 n 阶方阵，则 $r(AB)=r(BA)$.(　　)

8.设 A 为 3 阶方阵，若 $r(A)=2$，则 $AX=0$ 的解是 R^3 中彼此平行的向量.(　　)

二、填空题(20 分，每题 4 分，共 5 题)

1.若 $\begin{bmatrix}1&2&0\\0&1&2\\0&0&\lambda\end{bmatrix}X=0$ 有唯一解，则必有 λ________.

2.设 $A=\begin{bmatrix}3&1&0\\0&2&5\\0&0&4\end{bmatrix}$，则 A^2 的特征值为________.

3.二次型 $f(x_1,x_2,x_3)=3x_1^2-2x_1x_2-2x_1x_3+4x_2x_3$ 的秩为________，正惯性指数为________，负惯性指数为______，符号差为________.

4.设 n 阶方阵 A 的各行元素之和为零，且 $r(A)=n-1$，则齐次线性方程组 $AX=0$ 的通解为______

5.若二次型 $f=(x_1,x_2,x_3)=x_1^2+2tx_1x_2+2x_1x_3+2x_2^2+(1-t)x_3^2$ 是正定的，则 t 满足________.

三、（8 分）计算 n 阶行列式 $D_n=\begin{vmatrix}1+a_1&1&\cdots&1\\2&2+a_2&\cdots&2\\\cdots&\cdots&\cdots&\cdots\\n&n&\cdots&n+a_n\end{vmatrix}$ $(a_i\neq 0,i=1,2,\ldots,n)$.

四、(12 分) 设有线性方程组 $\begin{cases} x_1+a_1x_2+a_1^2x_3=a_1^3 \\ x_1+a_2x_2+a_2^2x_3=a_2^3 \\ x_1+a_3x_2+a_3^2x_3=a_3^3 \\ x_1+a_4x_2+a_4^2x_3=a_4^3 \end{cases}$

(1) 若 a_1,a_2,a_3,a_4 互不相同，证明此线性方程组无解.

(2) 若 $a_1=a_3=k,a_2=a_4=-k(k\neq 0)$ 求其通解.

五、(12 分) 设 $A=\begin{bmatrix} 2 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ 满足 $AB+I=A^2+B$，其中 I 是 3 阶单位矩阵，求矩阵 B.

六、(12 分) 设如果二次型 $f=2x_1^2+3x_2^2+3x_3^2+2ax_2x_3(a>0)$，可通过正交变换 $X=CY$ 化为标准形 $y_1^2+2y_2^2+5y_3^2$，求参数 a 及所作的正交变换 $X=CY$.

七、(10分) 设 $A=\begin{bmatrix}0&0&a&b\\0&0&b&a\\a&b&0&0\\b&a&0&0\end{bmatrix}$ 其中 a,b 是实数，$a\neq 0,b\neq 0,|a|\neq|b|$.

(1) 求 A 的特征值以及长度为 1 的特征向量；

(2) 当 n 为正整数时，计算 $[1,0,0,0]A^n[1,0,0,0]^T$.

八、证明题 (10分) 证明:任一 n 阶方阵总可以表为一个可逆矩阵与一个幂等矩阵之积.其中满足 $A^2=A$ 的矩阵称为幂等矩阵.

2012-2013 学年第二学期期末考试 A 卷参考答案

一、判断题（10 分，每题 2 分，共 5 题）

1、【正解】错

【解析】若 n(n>2)阶行列式 $D=0$，则 D 有两行（列）的对应元素不一定成比例.

【考点延伸】《考试宝典》知识点 1：行列式的概念及性质

2、【正解】错

【解析】n 个元素非零，可能有某一行或者列上不止一个元素非零，而某一行或者列的所有元素为零，则 D=0.

【考点延伸】《考试宝典》知识点 1：行列式的概念及性质

3、【正解】对

【解析】$|A|=|B|=0$

【考点延伸】《考试宝典》【知识点 4-9 总览】逆矩阵的充要条件

4、【正解】对

【解析】设 $f(x)$ 为任意一个多项式，A 为一个 n 阶矩阵，

$$\text{则}(f(A))^T=\left(\sum_{i=1}^{\infty}a_iA^i\right)^T=\sum_{i=1}^{\infty}a_i(A^T)^i=f(A^T).$$

【考点延伸】转置矩阵与矩阵的多项式

5、【正解】错

【解析】如若方程组中有方程与其他方程成比例，则方程组可能有唯一解，无穷解，零解

【考点延伸】《考试宝典》【知识点 16-18】重要题型非齐次线性方程组的解

6、【正解】对

【解析】$\{\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3\}$秩为 2，又$\{\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4\}$秩为 3，则 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 线性相关，α_2、α_3 线性无关，则 α_1 可唯一地表示为$\{\alpha_2,\alpha_3\}$的线性组合.

【考点延伸】《考试宝典》知识点 11：向量组的线性相关和线性表示

7、【正解】错

【解析】假设 $A=\begin{bmatrix}1&0\\1&0\end{bmatrix}$，$B=\begin{bmatrix}0&0\\1&1\end{bmatrix}$，则有 $AB=\begin{bmatrix}0&0\\0&0\end{bmatrix}$；$BA=\begin{bmatrix}0&0\\2&0\end{bmatrix}$

【考点延伸】《考试宝典》知识点 9：矩阵的秩和矩阵等价

8、【正解】对

【解析】A 为 3 阶方阵，若 $r(A)=2$，$dim\ N(A)=n-r(A)=1$，则 $AX=0$ 的解是 R^3 中彼此平行的向量.

【考点延伸】《考试宝典》【知识点 16-18】齐次线性方程组的解

二、 填空题(18 分，每题 3 分，共 6 题)

1、【正解】$\lambda \neq 0$

【解析】有唯一解，则$0 \neq |A| = \lambda$，即$\lambda \neq 0$

【考点延伸】《考试宝典》【知识点 16-18】齐次线性方程组的解

2、【正解】9, 4, 16

【解析】A的特征值为 3，2，4，A^2的特征值为$3^2, 2^2, 4^2$

【考点延伸】《考试宝典》【知识点 19-24 重要题型】

3、【正解】3 2 1 1

【解析】$\begin{bmatrix} 3 & -1 & -1 \\ -1 & 0 & 2 \\ -1 & 2 & 0 \end{bmatrix}$化简可得矩阵的秩为 3，求解矩阵的特征值，得$\lambda = 3, 2, -2$故正惯性指数为 2，负惯性指数为 1，符号差为 1

【考点延伸】《考试宝典》【知识点 23】矩阵的合同

4、【正解】$K[1,1,\dots,1]^T \quad K \in R$

【解析】$r(A) = n-1$，则线性无关解的个数为$n-(n-1)=1$，而每行元素之和为零

故通解为$K[1,1,\dots,1]^T \quad K \in R$

【考点延伸】《考试宝典》【知识点 16-18】齐次线性方程组的解

5、【正解】$-1 < t < 0$

【解析】$\begin{bmatrix} 1 & t & 1 \\ t & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 1-t \end{bmatrix}$矩阵的各阶子式的行列式的值必须为正

即$|A_1| = 1 > 0$；$|A_2| = \begin{bmatrix} 1 & t \\ t & 2 \end{bmatrix} = 2 - t^2 > 0$，$-\sqrt{2} < t < \sqrt{2}$

$|A_3| = t(t-2)(t+1) > 0$，综上$-1 < t < 0$

【考点延伸】《考试宝典》【知识点 19-24 重要题型】题型 7：正定矩阵的性质和证明

三、 (8 分)

【正解】$D_n = \begin{vmatrix} 1+a_1 & 1 & \dots & 1 \\ -2a_1 & a_2 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ -na_1 & 0 & \dots & a_n \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1+a_1+\dfrac{2a_1}{a_2}+\dots+\dfrac{na_1}{a_n} & 1 & \dots & 1 \\ 0 & a_2 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & a_n \end{vmatrix}$

$$=(1+a_1+\frac{2a_1}{a_2}+\ldots+\frac{na_1}{a_n})a_2\ldots a_n=(1+\frac{1}{a_1}+\frac{2}{a_2}+\ldots+\frac{n}{a_n})a_1a_2\ldots a_n$$

【考点延伸】《考试宝典》【知识点 3：几种特殊的行列式】

四、（10 分）

【正解】(1) $[A \vdots b]=\begin{bmatrix}1 & a_1 & a_1^2 & \vdots & a_1^3\\ 1 & a_2 & a_2^2 & \vdots & a_2^3\\ 1 & a_3 & a_3^2 & \vdots & a_3^3\\ 1 & a_4 & a_4^2 & \vdots & a_4^3\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1 & a_1 & a_1^2 & \vdots & a_1^3\\ 0 & a_2-a_1 & a_2^2-a_1^2 & \vdots & a_2^3-a_1^3\\ 0 & a_3-a_1 & a_3^2-a_1^2 & \vdots & a_3^3-a_1^3\\ 0 & a_4-a_1 & a_4^2-a_1^2 & \vdots & a_4^3-a_1^3\end{bmatrix}$

假设方程有解，由 $\begin{cases}(a_2-a_1)x_2+(a_2^{\ 2}-a_1^{\ 2})x_3=a_2^{\ 3}-a_1^{\ 3}\\(a_3-a_1)x_2+(a_3^{\ 2}-a_1^{\ 2})x_3=a_3^{\ 3}-a_1^{\ 3}\\(a_4-a_1)x_2+(a_4^{\ 2}-a_1^{\ 2})x_3=a_4^{\ 3}-a_1^{\ 3}\end{cases}$

得：$x_2=(a_1^{\ 2}-a_1a_2+a_2^{\ 2})-(a_1+a_2)x_3$

$=(a_1^{\ 2}-a_1a_3+a_3^{\ 2})-(a_1+a_3)x_3$ $\qquad \therefore a_1+x_3=a_2+a_3=a_2+a_4=a_3+a_4$

$=(a_1^{\ 2}-a_1a_4+a_4^{\ 2})-(a_1+a_4)x_3$ $\qquad \therefore a_2=a_3=a_4$

即 a_1,a_2,a_3,a_4 不能互不相同，$\therefore$ 若 a_1,a_2,a_3,a_4 互不相同，此线性方程组无解.

(2) $[A \vdots b]=\begin{bmatrix}1 & k & k^2 & \vdots & k^3\\ 0 & -2k & 0 & \vdots & -2k^3\\ 0 & 0 & 0 & \vdots & 0\\ 0 & -2k & 0 & \vdots & -2k^3\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1 & k & k^2 & \vdots & k^3\\ 0 & k & 0 & \vdots & k^3\\ 0 & 0 & 0 & \vdots & 0\\ 0 & 0 & 0 & \vdots & 0\end{bmatrix}$

$\therefore\begin{cases}x_1+kx_2+k^2x_3=k^3\\ kx_2=k^3\end{cases}$ 解得：$\begin{cases}x_1=-k^2x_3\\ x_2=k^2\\ x_3=x_3\end{cases}$

$\therefore$ 通解为 $X=x_3\begin{bmatrix}-k^2\\0\\1\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}0\\k^2\\0\end{bmatrix}$，其中 x_3 为任意常数

【考点延伸】《考试宝典》【知识点 16-18】齐次线性方程组的解

五、（12 分）

【正解】$AB+I=A^2+B$，$AB-B=A^2-I$，$(A-I)B=A^2-I$，

$B=(A-I)^{-1}(A^2-I)=(A-I)^{-1}(A-I)(A+I)=A+I$，$B=\begin{bmatrix}3 & 0 & 2\\0 & 3 & 0\\-1 & 0 & 2\end{bmatrix}$

【考点延伸】《考试宝典》【知识点 4-9 重要题型】题型 1：矩阵的运算

六、（12 分）

【正解】二次型f的矩阵为$A=\begin{bmatrix}2&0&0\\0&3&a\\0&a&3\end{bmatrix}$，因为$f$的标准形为$y_1^2+2y_2^2+5y_3^2$，

所以的特征值为1，2，5，于是$|A|=1\cdot2\cdot5=10$，即$2(9-a^2)=10$，由$a>0$知$a=2$

对$\lambda_1=1$，解齐次线性方程组$(I-A)X=0$，得基础解系 $\alpha_1=\begin{bmatrix}0\\1\\-1\end{bmatrix}$，

对$\lambda_2=2$，解齐次线性方程组$(2I-A)X=0$，得基础解系$\alpha_2=\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix}$，

对$\lambda_3=5$，解齐次线性方程组$(5I-A)X=0$，得基础解系$\alpha_3=\begin{bmatrix}0\\1\\1\end{bmatrix}$.

$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$两两正交，单位化得$\varepsilon_1=\begin{bmatrix}0\\\frac{1}{\sqrt2}\\-\frac{1}{\sqrt2}\end{bmatrix},\varepsilon_2=\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix},\varepsilon_3=\begin{bmatrix}0\\\frac{1}{\sqrt2}\\\frac{1}{\sqrt2}\end{bmatrix}$

令$C=[\varepsilon_1,\varepsilon_2,\varepsilon_3]=\begin{bmatrix}0&1&0\\\frac{1}{\sqrt2}&0&\frac{1}{\sqrt2}\\-\frac{1}{\sqrt2}&0&\frac{1}{\sqrt2}\end{bmatrix}$,则$C$为正交矩阵，$X=CY$为所求的正交变换.

【考点延伸】《考试宝典》【知识点19-24重要题型】题型6，二次型的标准化

七、 （12分）

【正解】(1) $|\lambda I-A|=[(\lambda-a)^2-b^2][(\lambda+a)^2-b^2]$,

$\lambda_1=a+b,\lambda_2=a-b,\lambda_3=-a+b,\lambda_4=-a-b$,

$a_1=\frac{1}{2}(1,1,1,1)^T,a_2=\frac{1}{2}(1,-1,1,-1)^T,a_3=\frac{1}{2}(1,-1,-1,1)^T,a_4=\frac{1}{2}(1,1,-1,-1)^T$

(2)令$P=(a_1,a_2,a_3,a_4)$，则$P^{-1}AP=\begin{bmatrix}a+b&&&\\&a-b&&\\&&-a+b&\\&&&-a-b\end{bmatrix}$,

$$(P^{-1}AP)^n=\begin{bmatrix}(a+b)^n & & & \\ & (a-b)^n & & \\ & & (-a+b)^n & \\ & & & (-a-b)^n\end{bmatrix}$$

$$(1,0,0,0)A^n(1,0,0,0)^T=\frac{1}{4}[(a+b)^n+(a-b)^n+(-a+b)^n+(-a-b)^n]$$

【考点延伸】《考试宝典》【知识点 19-24 重要题型】求特征值与特征向量

(10分)

【证明】设 A 为任意 n 阶矩阵，$r(A)=r$，则存在 n 阶可逆阵 P，Q，使 $PAQ=\begin{bmatrix}I_r & 0\\ 0 & 0\end{bmatrix}$

于是 $A=P^{-1}\begin{bmatrix}I_r & 0\\ 0 & 0\end{bmatrix}Q^{-1}=P^{-1}Q^{-1}Q\begin{bmatrix}I_r & 0\\ 0 & 0\end{bmatrix}Q^{-1}$

令 $M=P^{-1}Q^{-1},N=Q\begin{bmatrix}I_r & 0\\ 0 & 0\end{bmatrix}Q^{-1}$，则 M 为可逆矩阵，且 $N^2=Q\begin{bmatrix}I_r & 0\\ 0 & 0\end{bmatrix}Q^{-1}Q\begin{bmatrix}I_r & 0\\ 0 & 0\end{bmatrix}Q^{-1}$

$=Q\begin{bmatrix}I_r & 0\\ 0 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}I_r & 0\\ 0 & 0\end{bmatrix}Q^{-1}$

$=Q\begin{bmatrix}I_r & 0\\ 0 & 0\end{bmatrix}Q^{-1}$

$=N$

即 N 为幂等矩阵，$\therefore A$ 可表示为一个可逆矩阵 M 与一个幂等矩阵 N 之积.

【考点延伸】矩阵的分解

2011-2012 学年第二学期期末考试 A 卷

一、判断题（16 分，每题 2 分，共 8 题）

1.若 n 阶方阵 A 的行向量组与列向量组不等价，则 $|A|=0$.(　　)

2.相似的矩阵有相等的迹.(　　)

3.设 A,B 为两个 n 阶矩阵，若 $A^2+B^2=0$，则 $A=B=0$.(　　)

4.设 $f(x),g(x)$ 为任意两个多项式，A,B 为两个 n 阶方阵，若 $AB=BA$，则 $f(A)g(B)=g(B)f(A)$.

(　　)

5.设 A 为 $m\times n$ 矩阵，若 $m<n$，则线性方程组 $AX=0$ 必有无穷多解.(　　)

6.若向量 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$ 线性相关，则 $\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3+\alpha_4\neq 0$.(　　)

7.交换第 i 行与第 j 行这一初等变换，可以用另外两类行初等变换所取代.(　　)

8.若 A,B 为 n 阶正定矩阵，则 AB 也是正定矩阵.(　　)

二、填空题(20 分，每题 4 分，共 5 题)

1.$\begin{vmatrix} x & y & y & y \\ y & x & y & y \\ y & y & x & y \\ y & y & y & x \end{vmatrix}=$______.

2.设 $A=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$，对正整数 $n\geq 2$，则 $A^n-2A^{n-1}=$______.

3.设 A,B 为 n 阶方阵，$|A|=2,|B|=-3$ 则 $|2A^*B^{-1}|=$______.

4.设 A 为 $m\times n$ 矩阵，若有矩阵 $B\neq 0$，使 $AB=0$，则矩阵 A 的秩 $r(A)$ 满足条件：$r(A)$______.

5.若二次型 $f(x,y,z)=2x^2+y^2+4z^2+2xy+2tyz$ 正定，则 t 的取值范围是______.

三、（8 分）计算 n 阶行列式 $D_n=\begin{vmatrix} a-a_1^2 & -a_1a_2 & \cdots & -a_1a_n \\ -a_2a_1 & a-a_2^2 & \cdots & -a_2a_n \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ -a_na_1 & -a_na_2 & \cdots & a-a_n^2 \end{vmatrix}(a\neq 0)$

四、（12分）设有线性方程组 $\begin{cases} x_1+x_2+x_3+x_4=0 \\ x_2+2x_3+2x_4=1 \\ -x_2+(a-3)x_3-2x_4=b \\ 3x_1+2x_2+x_3+ax_4=-1 \end{cases}$

a,b为何值时，方程组（1）有唯一解；（2）无解；（3）有无穷多解，并求其解.

五、（12分）已知$A_{3\times3}$的特征值为1，2，3，求A^*的特征值.

六、（12分）设A与B相似，$A=\begin{bmatrix}2&0&0\\0&0&1\\0&1&x\end{bmatrix}$，$B=\begin{bmatrix}2&0&0\\0&y&0\\0&0&-1\end{bmatrix}$，求$A$和$B$，并求出$P$，使$P^{-1}AP=B$.

七、（10分）用行列对称初等变换化下列二次型为标准形. $f(x_1,x_2,x_3)=x_1x_2+4x_1x_3-6x_2x_3$

八、证明题（10分）设是A正定矩阵，证明A的伴随矩阵A^*也是正定矩阵.

2011-2012 学年第二学期期末考试 A 卷参考答案

一、 判断题（16 分，每题 2 分，共 8 题）

1、【正解】对

【解析】若 A 的行列式不等于零，则 A 的秩为 n，则 A 的行向量组与列向量组的秩都是 n，所以它们都与 n 维基本向量组等价，所以它们也等价，与已知矛盾.所以 $|A|=0$.

【考点延伸】《考试宝典》知识点 9 矩阵的秩的概念技巧

2、【正解】对

【解析】迹就是对角线上元素的和，这个和等于特征值的和

【考点延伸】《考试宝典》【知识点 19-24 重要题型】题型 5 相似矩阵

3、【正解】错

【解析】反例：$A=B=\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix}$

【考点延伸】幂零矩阵与矩阵的运算

4、【正解】对

【解析】对任意一个相乘后的多项式而言 $a_iA^i\times b_jB^j=a_ib_jA^i\times B^j=a_ib_jB^j\times A^i=b_jB^j\times a_iA^i$

在另一侧都能找到相对应的项，故 $f(A)g(B)=g(B)f(A)$

【考点延伸】矩阵的运算，矩阵可交换的性质

5、【正解】对

【解析】m<n 则有线性方程组中的未知元的个数大于已知方程组的个数，则线性方程组一定有无穷多个解.

【考点延伸】《考试宝典》【知识点 16-18 总览】题型 1 齐次线性方程组的解

6、【正解】错

【解析】若向量 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$，线性相关，则存在一组不全为零的 k_1,k_2,k_3,k_4 使得

$k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+k_3\alpha_3+k_4\alpha_4=0$，所以 k_1,k_2,k_3,k_4 可能均为 1

【考点延伸】《考试宝典》【知识点 11】1.线性相关性的定义

7、【正解】对

【解析】$\begin{pmatrix}\cdots\\i\\\cdots\\j\\\cdots\end{pmatrix}\xrightarrow{\text{第}j\text{行加到第}i\text{行}}\begin{pmatrix}\cdots\\i+j\\\cdots\\j\\\cdots\end{pmatrix}\xrightarrow{\text{第}j\text{行减去第}i\text{行}}\begin{pmatrix}\cdots\\i+j\\\cdots\\-i\\\cdots\end{pmatrix}\xrightarrow{\text{第}j\text{行加到第}i\text{行}}\begin{pmatrix}\cdots\\j\\\cdots\\-i\\\cdots\end{pmatrix}\xrightarrow{\text{第}j\text{行乘}-1}\begin{pmatrix}\cdots\\j\\\cdots\\i\\\cdots\end{pmatrix}$

【考点延伸】《考试宝典》【知识点 8】1.初等变换

8、【正解】错

【解析】A，B为正定矩阵，即满足$X^TAX>0,X^TBX>0$，但无法推出$X^T(AB)X>0$，因为缺少一个$AB=BA$的条件

【考点延伸】《考试宝典》【知识点19-24 重要题型】题型7：正定矩阵的性质和证明

二、填空题(20分，每题4分，共5题)

1、【正解】$(x+3y)(x-y)^3$

【解析】$\begin{vmatrix} x & y & y & y \\ y & x & y & y \\ y & y & x & y \\ y & y & y & x \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} x+3y & y & y & y \\ x+3y & x & y & y \\ x+3y & y & x & y \\ x+3y & y & y & x \end{vmatrix}=(x+3y)\begin{vmatrix} 1 & y & y & y \\ 1 & x & y & y \\ 1 & y & x & y \\ 1 & y & y & x \end{vmatrix}$

$$=(x+3y)\begin{vmatrix} 1 & y & y & y \\ 0 & x-y & 0 & 0 \\ 0 & 0 & x-y & 0 \\ 0 & 0 & 0 & x-y \end{vmatrix}=(x+3y)(x-y)^3$$

【考点延伸】《考试宝典》【知识点3：几种特殊的行列式】5.行和或列和相等的行列式

2、【正解】0

【解析】$AA=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}=2\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$归纳可得$A^n=2A^{n-1}$，故为0

【考点延伸】《考试宝典》知识点4：矩阵的概念和基本运算

3、【正解】$-\dfrac{2^{2n-1}}{3}$

【解析】$|2A^*B^{-1}|=2^n|A^*||B^{-1}|=-\dfrac{2^n}{3}||A|A^{-1}|=-\dfrac{2^{2n-1}}{3}$

【考点延伸】《考试宝典》【知识点4-9 重要题型】题型1：矩阵的运算和矩阵行列式的计算

4、【正解】$r(A)<n$

【解析】$AB=0$，则$r(A)+r(B)\le n$，而$B\ne O$，故$r(B)>0$，$r(A)<n$

【考点延伸】《考试宝典》【知识点18】题型1：齐次线性方程组的解

5、【正解】$(-\sqrt{2},\sqrt{2})$

【解析】正定则系数矩阵的各阶子式的行列式的值均为正

$|A_1|=2>0;|A_2|=1>0;|A_3|=2(2-t^2)>0$，$-\sqrt{2}<t<\sqrt{2}$

【考点延伸】《考试宝典》【知识点24】2.正定矩阵的必要条件

三、

(8分)

【正解】$D_n=\begin{vmatrix}1 & a_1 & a_2 & \cdots & a_n\\ 0 & a-a_1^2 & -a_1a_2 & \cdots & -a_1a_n\\ 0 & -a_2a_1 & a-a_2^2 & \cdots & -a_2a_n\\ \cdots & \cdots & \cdots & & \cdots\\ 0 & -a_na_1 & -a_na_2 & \cdots & a-a_n^2\end{vmatrix}$，将第 1 行的 a_i 倍加到第 $i+1$ 行 $(i=1,2,\cdots,n)$，

得爪型行列式：$D_n=\begin{vmatrix}1 & a_1 & a_2 & \cdots & a_n\\ a_1 & a & 0 & \cdots & 0\\ a_2 & 0 & a & \cdots & 0\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ a_n & 0 & 0 & \cdots & a\end{vmatrix}=a^n(1-\sum_{i=1}^{n}\frac{a_i^2}{a})$

【考点延伸】《考试宝典》【知识点 3】6.爪型行列式

四、（12 分）

【正解】$[A\ \vdots\ b]=\begin{bmatrix}1 & 1 & 1 & 1 & \vdots & 0\\ 0 & 1 & 2 & 2 & \vdots & 1\\ 0 & -1 & a-3 & -2 & \vdots & b\\ 3 & 2 & 1 & a & \vdots & -1\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1 & 1 & 1 & 1 & \vdots & 0\\ 0 & 1 & 2 & 2 & \vdots & 1\\ 0 & 0 & a-1 & 0 & \vdots & b+1\\ 0 & -1 & -2 & a-3 & \vdots & -1\end{bmatrix}$

$\to\begin{bmatrix}1 & 1 & 1 & 1 & \vdots & 0\\ 0 & 1 & 2 & 2 & \vdots & 1\\ 0 & 0 & a-1 & 0 & \vdots & b+1\\ 0 & 0 & 0 & a-1 & \vdots & 0\end{bmatrix}$

(1)方程有唯一解时，$r(A)=r(A\ \vdots\ b)=4$，$\therefore a\neq 1$

(2)方程组无解时，$r(A)<r(A\ \vdots\ b)$，$\therefore a=1$ 且 $b\neq -1$

(3)方程组有无穷多解时,$r(A)=r(A\ \vdots\ b)<4$,$\therefore a=1$ 且 $b=-1$

此时 $\begin{cases}x_1+x_2+x_3+x_4=0\\ x_2+2x_3+2x_4=1\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x_1=-1+x_3+x_4\\ x_2=1-2x_3-2x_4\end{cases}$

取 x_3,x_4 为自由变量得 $X=x_3\begin{bmatrix}1\\-2\\1\\0\end{bmatrix}+x_4\begin{bmatrix}1\\-2\\0\\1\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}-1\\1\\0\\0\end{bmatrix}$

$\therefore$ 通解为 $X=k_1[1,-2,1,0]^T+k_2[1,-2,0,1]^T+[-1,1,0,0]^T$，其中 k_1,k_2 为任意常数.

【考点延伸】《考试宝典》【知识点 16-18】重要题型 2 非齐次线性方程组的解

五、（12 分）

【正解】因为 $|A|=1\times2\times3=6$，$A^*=|A|A^{-1}$，则 $A^*X=|A|A^{-1}X=6A^{-1}X=\lambda X$，所以 $6X=\lambda AX$

（1）当 $A_{3\times3}$ 的特征值为 1 时，$6X=\lambda AX=\lambda X$，即 A^* 的特征值为 6

（2）当 $A_{3\times3}$ 的特征值为 2 时，A^* 的特征值为 3

（3）当 $A_{3\times3}$ 的特征值为 3 时，A^* 的特征值为 2.

【考点延伸】《考试宝典》知识点 19 例 19-4

六、（12 分）

【正解】A 相似于 $B \Rightarrow \begin{cases} \sum_{i=1}^{3} a_{ii} = \sum_{i=1}^{3} b_{ii}, \\ |A| = |B|, \end{cases}$ 从而有 $\begin{cases} 2+x=2+y-1 \\ -2=-2y \end{cases}$，得 $y=1, x=0$，

由此 $A=\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$ 的三个特征值为 B 的对角线上元素：2，1，-1.

$\lambda_1=2, [2I-A]=\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$，得 $\lambda_1=2$ 对应的线性无关的特征向量

$X_1=[1,0,0]^T$. $\lambda_2=1, [I-A]=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$，得 $\lambda_2=1$ 对应的线性无关的特征

向量 $X_2=[0,1,1]^T$. $\lambda_3=-1$ $[-I-A]=\begin{bmatrix} -3 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & -1 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$，得 $\lambda_3=-1$ 对应的线性无

关的特征向量 $X_3=[0,1,-1]^T$.因此，可取 $P=[X_1,X_2,X_3]=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}$，则 $P^{-1}AP=B$

【考点延伸】《考试宝典》【知识点 19-24 重要题型】题型 5 相似矩阵

七、（10 分）

【正解】f 的矩阵为 $A=\begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{2} & 2 \\ \frac{1}{2} & 0 & -3 \\ 2 & -3 & 0 \end{bmatrix}$

$$\begin{bmatrix} A \\ \cdots \\ I \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{2} & 2 \\ \frac{1}{2} & 0 & -3 \\ 2 & -3 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{2} & -1 \\ \frac{1}{2} & 0 & -3 \\ -1 & -3 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & -\frac{5}{2} \\ 0 & -\frac{5}{2} & -1 \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{4} & -\frac{5}{2} \\ 0 & -\frac{5}{2} & -1 \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ 1 & -\frac{1}{2} & 1 \\ 1 & \frac{1}{2} & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{4} & 0 \\ 0 & 0 & 24 \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ 1 & -\frac{1}{2} & 6 \\ 1 & \frac{1}{2} & -4 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}，令 P = \begin{bmatrix} 1 & -\frac{1}{2} & 6 \\ 1 & \frac{1}{2} & -4 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}，作非退化线性变换 X = PY，$$

则 $f = y_1^2 - \frac{1}{4} y_2^2 + 24 y_3^2$

【考点延伸】《考试宝典》【知识点 19-24 重要题型】题型 6：二次型的标准化

五、 （10 分）

【证明】$P^T AP = \Lambda, \Lambda = diag\{\lambda_1, \dots, \lambda_n\}, \lambda_i > 0, i = 1, \dots n,$

$(P^T AP)^{-1} = \Lambda^{-1}$，$P^{-1}A^{-1}(P^{-1})^T = \Lambda^{-1}$

因为 $A^{-1} = \frac{A^*}{|A|}$，所以 $\frac{P^{-1}A^*(P^{-1})^T}{|A|} = \Lambda^{-1}$，因为 $|A| > 0$，令 $B = \frac{(P^{-1})^T}{\sqrt{|A|}}$

所以 $B^T A^* B = \Lambda^{-1}$，所以 A^* 也是正定矩阵.

【考点延伸】《考试宝典》【知识点 19-24 重要题型】题型 7：正定矩阵的性质和证明