2023 ～2024 学年第 一 学期

《 微积分（一）》课程考试试卷(A 卷)

一.单项选择题(每小题 3 分，6 个小题共 18 分，将结果涂在答题卡上.）

1. 下列函数在其定义域上无界的是【　　】

A. $x^2D(x)$ （$D(x)$ 为迪尼克雷函数）　B. $\tan(\sin x)$　　C. $\dfrac{\sin x}{x}$　　D. 符号函数 $\mathrm{sgn}(x)$

解答：$x^2D(x)=\begin{cases}x^2, x\text{为有理数}\\0,\ x\text{为无理数}\end{cases}$，显然定义域上无界.

$$x\in R, |\sin x|\le 1, |\tan x(\sin x)|\le \frac{\pi}{4}.$$

$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x}=1, \lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\sin x}{x}=0$，所以 $\dfrac{\sin x}{x}$ 在 $x\in(-\infty,0)\bigcup(0,+\infty)$ 上有界.

$\mathrm{sgn}(x)=\begin{cases}1, x>0\\0, x=0\\-1, x<0\end{cases}$，显然在定义域中有界.

故选 A

2. 曲线 $y=\dfrac{1}{x}+\ln(1+\mathrm{e}^x)$ 的斜渐近线为【　　】

A. $y=-x$　　B. $y=-x+1$　　C. $y=x$　　D. $y=x+1$

解答：$\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}(\dfrac{1}{x}+\ln(1+\mathrm{e}^x))=0$，$y=0$ 为水平渐近线

$\lim\limits_{x\to 0}f(x)=\lim\limits_{x\to 0}(\dfrac{1}{x}+\ln(1+\mathrm{e}^x))=\infty$，$x=0$ 为垂直渐近线

$$k=\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{1}{x}+\ln(1+\mathrm{e}^x)}{x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x^2}+\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln(1+\mathrm{e}^x)}{x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\mathrm{e}^x}{1+\mathrm{e}^x}=1$$

$$b=\lim_{x\to+\infty}(f(x)-x)=\lim_{x\to+\infty}(\frac{1}{x}+\ln(1+\mathrm{e}^x)-x)=\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x}+\lim_{x\to+\infty}\left(\ln(1+\mathrm{e}^x)-x\right)$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\left(\ln(1+\mathrm{e}^x)-\ln\mathrm{e}^x\right)=\lim_{x\to+\infty}\ln(1+\mathrm{e}^{-x})=0$$

斜渐近线为 $y=x$.

故选 C

3. 通解为 $y=(C_1+C_2x)\mathrm{e}^x+x$（其中 C_1,C_2 为任意常数）的微分方程是【　　】.

A. $y''-y'=1$　　B. $y''-y=0$　　C. $y''-2y'+y=\mathrm{e}^x$　　D. $y''-2y'+y=x-2$.

解答：由线性微分方程通解的结构，$(C_1+C_2x)\mathrm{e}^x$ 是一个齐次方程的通解，$y=x$ 是一个相应非齐次方程的特解，所以选项 B 不对；从 $(C_1+C_2x)\mathrm{e}^x$ 知 e^x 对应的是齐次方程的二重特征根 $r=1$，即特征方程为 $r^2-2r+1=0$， 相应的二阶齐次方程为 $y''-2y'+y=0$，所以在 CD 中选择. 将特解 $y=x$ 分别代入选项 C、D，可确定 D 是正确答案.
答案为 D.

4. 设 $f(x)$ 在 $x=x_0$ 的某个邻域内有定义，则下列命题

①若 $f'(x_0)$ 存在，则 $f(x)$ 在 $x=x_0$ 连续.

②若 $f'_+(x_0),f'_-(x_0)$ 都存在，则 $f(x)$ 在 $x=x_0$ 连续.

③若 $\lim\limits_{x\to x_0^+}f'(x),\lim\limits_{x\to x_0^-}f'(x)$ 都存在，则 $f(x)$ 在 $x=x_0$ 连续.

其中正确的个数是

A. 1　　B. 2　　C. 3　　D. 0

解答：由导数与连续之间的关系得①②是正确的

$$f(x)=\begin{cases}x^2,x>0\\0,x=0,\\-x+1,x<0\end{cases}\quad \lim_{x\to0^+}f'(x)=0,\lim_{x\to0^-}f'(x)=-1,\ \lim_{x\to0^+}f(x)=0,\lim_{x\to0^-}f(x)=1,$$

因而 $\lim\limits_{x\to0}f(x)$ 不存在，从而 $f(x)$ 在　$x=0$ 不连续，故 C 不对.

故答案为：B

5. 设 $f(x)$ 在 $x=1$ 的某邻域内连续，且 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\ln\left(f(x+1)+\mathrm{e}^{x^2}\right)}{x^2}=2$，则 $x=1$ 是 $f(x)$ 的【　】.

A. 驻点且为极大值点　　B.驻点且为极小值点

B. 不可导点　　D.可导点但不是驻点

解答：由条件得 $\lim\limits_{x\to0}\ln(f(x+1)+\mathrm{e}^x)=0$，于是由连续性有 $\ln(f(1)+1)=0$，因而 $f(1)=0$

而$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(f(x+1)+\mathrm{e}^x)}{x^2}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x+1)+\mathrm{e}^{x^2}-1}{x^2}=\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{f(x+1)}{x^2}+\dfrac{\mathrm{e}^{x^2}-1}{x^2}\right)=2$

$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x+1)}{x^2}=1$，由极限的保号性得$\forall x\in \mathring{N}(0,\delta), f(x+1)>0=f(1)$ ，故$x=1$是极小值点

又$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x+1)}{x^2}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\dfrac{f(x+1)-f(1)}{x}}{x}=1$ ，所以$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x+1)-f(1)}{x}=0$，因而$f'(1)=0.$

故答案为：B.

6.设$M=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\cos^4 x\sin^3 x\mathrm{d}x, N=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}(\cos^3 x+\sin^3 x)\mathrm{d}x, P=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}(x\cos x-\sin^2 x)\mathrm{d}x$ ，则【　】

A. $M>N>P$　　B. $N>P>M$　　C. $N>M>P$　　D. $M>P>N$

解：由对称性$M=0$，$N=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\cos^3 x\mathrm{d}x=2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^3 x\mathrm{d}x=\dfrac{4}{3}>0, P=-\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\sin^2 x\mathrm{d}x<0$

所以$N>M>P$.　故答案为：C.

二、填空题 （每小题 4 分，共 16 分）

7. 设曲线$y=f(x)$与$y=x^2-x+1$在点$(2,3)$处有公共切线，则$\lim\limits_{n\to\infty}n\left(f(2-\dfrac{1}{n})-3\right)=$____ .

解：由题中条件可得$f(2)=3, f'(2)=(2x-1)|_{x=2}=3$，

$$\lim_{n\to\infty}n\left[f(2-\frac{1}{n})-3\right]=\lim_{n\to\infty}\frac{f(2-\frac{1}{n})-f(2)}{\frac{1}{n}}=-f'(2)=-3.$$

8. $y=f(x)$满足$y'=(1-y)y^{\alpha}(\alpha>0)$，若曲线$y=f(x)$的一个拐点为$(t,\dfrac{1}{2})$，则$\alpha=$____ .

解析：$\dfrac{\mathrm{d}^2 y}{\mathrm{d}x^2}=\big(\alpha-(1+\alpha)y\big)(1-y)y^{2\alpha-1}$，由题意$\dfrac{\mathrm{d}^2 y}{\mathrm{d}x^2}|_{x=t}=0$，$y(t)=\dfrac{1}{2}$，

所以　$\left(\alpha-(1+\alpha)\dfrac{1}{2}\right)\left(\dfrac{1}{2}\right)^{2\alpha}=0$，解得$\alpha=1.$

9.　已知$f(x)$的一个原函数是e^{-x}，则$\int_{-\frac{1}{2}}^{0}xf(2x)\mathrm{d}x=$________ .

解：$f(x)=(\mathrm{e}^{-x})'=-\mathrm{e}^{-x}$, 令$u=2x$，则

$$\int xf(2x)\mathrm{d}x = \frac{1}{4}\int uf(u)\mathrm{d}u = \frac{1}{4}\int u\mathrm{d}e^{-u} = \frac{1}{4}(u+1)e^{-u} + C$$

$$\int_{-\frac{1}{2}}^{0} xf(2x)\mathrm{d}x = \frac{1}{4}$$

10. 位于曲线 $y = x\mathrm{e}^{-x}(0 \le x < +\infty)$ 下方、x 轴上方的无界图形的面积为______ .

解：$A = \int_0^{+\infty} x\mathrm{e}^{-x}\mathrm{d}x = -x\mathrm{e}^{-x}\Big|_0^{+\infty} + \int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-x}\mathrm{d}x = -\mathrm{e}^{-x}\Big|_0^{+\infty} = 1.$

三. 计算题（每小题 7 分，6 个小题共 42 分，必须写出主要计算过程.）

11. 设 $y = y(x)$ 由方程 $\mathrm{e}^y + 6xy + x^2 - 1 = 0$ 确定，求 $y'(0)$， $y''(0)$.

解：由方程得 $x = 0$ 时，$y = 0$.

方程两边关于 x 求导得

$$(\mathrm{e}^y + 6x)y' + 6y + 2x = 0,$$

令 $x = 0$ 得 $y'(0) = 0.$

关于 x 再求导得

$$(\mathrm{e}^y + 6x)y'' + \mathrm{e}^y(y')^2 + 12y' + 2 = 0,$$

将 $x = 0, y'(0) = 0$ 代入得 $y''(0) = -2.$

12. 设 $f(x) = \mathrm{e}^x\ln(1+x) - x(1+\frac{1}{2}x)$，当 $x \to 0$ 时，求 $f(x)$ 的主部及阶数.

解：由泰勒公式得

$$\mathrm{e}^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + o(x^2)，\ \ln(1+x) = x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 + o(x^3)$$

$$f(x) = \left(1 + x + \frac{x^2}{2!} + o(x^2)\right)\left(x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 + o(x^3)\right) - x(1 + \frac{1}{2}x)$$

$$= \frac{1}{3}x^3 + o(x^3) \sim \frac{1}{3}x^3(x \to 0),$$

故 $f(x)$ 的主部为 $\frac{1}{3}x^3$，阶数为 3.

13. 求极限 $l=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{\sin x}}{x\sin x^2}\int_0^x \sin(x-t)^2\,\mathrm{d}t$.

解:令 $u=x-t$, 则 $\int_0^x \sin(x-t)^2 dt=\int_0^x \sin u^2 du$

$$\text{原式}=\lim_{x\to 0}\frac{\int_0^x \sin u^2 du}{x^3}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\sin x^2}{3x^2}=\frac{1}{3}$$

14. 求极限 $l=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{n}\left[\ln(1+\dfrac{1}{n})+\ln(1+\dfrac{2}{n})+\cdots+\ln(1+\dfrac{n}{n})\right]$

解：$l=\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{i=1}^{n}\ln(1+\dfrac{i}{n})\cdot\dfrac{1}{n}=\int_0^1 \ln(1+x)\,\mathrm{d}x$

$$=x\ln(1+x)\Big|_0^1-\int_0^1 x\cdot\frac{1}{1+x}\mathrm{d}x$$

$$=2\ln 2-1$$

15. 设 $f(x)=\int_0^x \dfrac{\sin t}{1-t}\mathrm{d}t$, 求 $I=\int_0^1 (x-1)f(x)\,\mathrm{d}x$.

解：$f'(x)=\dfrac{\sin x}{1-x}$， $f(0)=0$

$$I=\int_0^1 (x-1)f(x)\mathrm{d}x=\frac{(x-1)^2}{2}f(x)\Big|_0^1-\int_0^1 \frac{(x-1)^2}{2}f'(x)\mathrm{d}x$$

$$=-\int_0^1 \frac{(x-1)^2}{2}f'(x)\mathrm{d}x$$

$$=\int_0^1 \frac{x-1}{2}\sin x\,\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\int_0^1 (x-1)\mathrm{d}(-\cos x)$$

$$=\frac{1}{2}\left(-(x-1)\cos x\right)\Big|_0^1+\frac{1}{2}\int_0^1 \cos x\,\mathrm{d}x$$

$$=\frac{1}{2}(\sin 1-1).$$

16. 若曲线 $y=f(x)$ 是 $y''+2y'-3y=4\mathrm{e}^x$ 的一条积分曲线，此曲线过点 $A(0,1)$ ，且在点

$A(0,1)$ 处的切线的倾斜角为 $\frac{3\pi}{4}$，求 $f(x)$.

解：由题意得 $y(0)=1, y'(0)=\tan\frac{3}{4}\pi=-1$

方程对应的齐次方程的特征方程为

$$r^2+2r-3=0，特征根 r_1=-3, r_2=1$$

对应的线性齐次方程通解为：$y=C_1\mathrm{e}^{-3x}+C_2\mathrm{e}^{x}$ (C_1, C_2 为常数)

$\lambda=1$ 为特征方程的特征单根，故可设线性非齐次方程的特解为 $y^*=Ax\mathrm{e}^x$，A 为待定常数，代入线性非齐次方程得　$4A=4, A=1$，特解为 $y=x\mathrm{e}^x$.

原方程的通解为 $y=C_1\mathrm{e}^{-3x}+C_2\mathrm{e}^{x}+x\mathrm{e}^x$

将初始条件代入解得　$C_1=\frac{3}{4}, C_2=\frac{1}{4}$

$$y=\frac{3}{4}\mathrm{e}^{-3x}+\frac{1}{4}\mathrm{e}^{x}+x\mathrm{e}^x.$$

四. 综合题（每小题 7 分，2 个小题共 14 分，必须写出主要过程．）

17. 设 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上可导，其反函数存在为 $g(x)$，若

$$\int_0^{f(x)} g(t)\mathrm{d}t+\int_0^x f(t)\mathrm{d}t = x\mathrm{e}^x-\mathrm{e}^x+1,$$

求 $f(x)$.

解　在所给方程两边对 x 求导，得

$$g(f(x))f'(x)+f(x)=x\mathrm{e}^x,$$

由于 $g(f(x))=x$，上式变为　$xf'(x)+f(x)=x\mathrm{e}^x$.

若 $x=0$，则 $f(0)=0$；

若 $x\neq 0$，则上式变为 $f'(x)+\frac{1}{x}f(x)=\mathrm{e}^x$，

因此，$f(x)=\mathrm{e}^{-\int\frac{1}{x}\mathrm{d}x}(\int \mathrm{e}^x\mathrm{e}^{\int\frac{1}{x}\mathrm{d}x}\mathrm{d}x+C)=\frac{1}{x}(\int x\mathrm{e}^x\mathrm{d}x+C)=\frac{1}{x}(x\mathrm{e}^x-\mathrm{e}^x+C)$，

由 $f(x)$ 在 $x=0$ 处连续，有 $0=f(0)=\lim\limits_{x\to 0}f(x)=\lim\limits_{x\to 0}[\mathrm{e}^x+\frac{C-\mathrm{e}^x}{x}]$，从而 $C=1$，于是

$$f(x)=\begin{cases}0, & x=0,\\ \dfrac{1}{x}(xe^{x}-e^{x}+1), & x\neq 0.\end{cases}$$

18. 设函数 $f(x)=ax+\dfrac{3}{2}bx^2$ 在区间 $(0,1)$ 内大于零，其中 a,b 为未知常数，曲线 $y=f(x)$ 与直线 $x=1, y=0$ 所围成的区域 D 的面积为 2．求 a,b 的值，使得 D 绕 x 轴旋转一周得到的旋转体的体积最小, 并求出最小值.

解：由题意得

$\int_0^1(ax+\dfrac{3}{2}bx^2)dx=2$，从而得 $a+b=4$，即 $a=4-b$。

所以 $f(x)=(4-b)x+\dfrac{3}{2}bx^2,$

D 绕 x 轴旋转一周得到的旋转体的体积

$$V=\int_0^1\pi\left((4-b)x+\frac{3}{2}bx^2\right)^2\mathrm{d}x=(\frac{16}{3}+\frac{b}{3}+\frac{b^2}{30})\pi$$

$V'=(\dfrac{1}{3}+\dfrac{b}{15})\pi$，令 $V'=0$，得 $b=-5$，于是 $a=9$, $V=\dfrac{9}{2}\pi$，

$V''(-5)=\dfrac{\pi}{15}>0$，体积的最小值存在，故 $a=9,b=-5$ 时，旋转体体积最小值为 $\dfrac{9}{2}\pi$.

（7 分）

五、证明题（每小题 5 分，共 10 分）

19. 设函数 $f(x)$、$g(x)$ 在区间 $[0,a]$ 上连续且单调增加，其中 $a>0$．证明

$$a\int_0^a f(x)g(x)\mathrm{d}x\geq\int_0^a f(x)\mathrm{d}x\int_0^a g(x)\mathrm{d}x.$$

证　构造函数 $F(x)=x\int_0^x f(t)g(t)\mathrm{d}t-\int_0^x f(t)\mathrm{d}t\int_0^x g(t)\mathrm{d}t$，$x\in[0,a]$，

则 $F(0)=0$，且对于 $x\in[0,a]$，有

$$F'(x)=\int_0^x f(t)g(t)\mathrm{d}t+xf(x)g(x)-f(x)\int_0^x g(t)\mathrm{d}t-g(x)\int_0^x f(t)\mathrm{d}t$$

$$=\int_0^x[f(t)g(t)+f(x)g(x)-f(x)g(t)-g(x)f(t)]\mathrm{d}t$$

$$=\int_0^x[f(t)(g(t)-g(x))+f(x)(g(x)-g(t))]\mathrm{d}t$$

$$=\int_0^x[(f(t)-f(x))(g(t)-g(x))]\mathrm{d}t\ .$$

由 $f(x)$、$g(x)$ 单调增加知，在 $[0,a]$ 上有 $(f(t)-f(x))(g(t)-g(x))\geq 0$，从而 $F'(x)\geq 0$，

$F(x)$ 在 $[0,a]$ 上单调增加，所以 $F(a)\geq F(0)=0$，即

$$a\int_0^a f(x)g(x)\mathrm{d}x \geq \int_0^a f(x)\mathrm{d}x\int_0^a g(x)\mathrm{d}x.$$

20. 设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上有二阶导数，且 $f'(a)=f'(b)=0$，证明：存在 $\xi\in(a,b)$，使得

$$(b-a)^2\,|f''(\xi)|\geq 4\,|f(b)-f(a)|.$$

证明：将 $f(\frac{a+b}{2})$ 分别在 $x=a$ 及 $x=b$ 展开成泰勒公式为：

$$f(\frac{a+b}{2})=f(a)+f'(a)(\frac{b-a}{2})+\frac{f''(\xi_1)}{2!}(\frac{b-a}{2})^2,\quad \xi_1\in(a,\frac{a+b}{2}),$$

即 $f(\frac{a+b}{2})=f(a)+\frac{f''(\xi_1)}{2!}(\frac{b-a}{2})^2$;

$$f(\frac{a+b}{2})=f(b)+f'(b)(\frac{a-b}{2})+\frac{f''(\xi_2)}{2!}(\frac{a-b}{2})^2,\quad \xi_2\in(\frac{a+b}{2},b),$$

即 $f(\frac{a+b}{2})=f(b)+\frac{f''(\xi_2)}{2!}(\frac{a-b}{2})^2.$

两式相减得

$$f(b)-f(a)=\left(\frac{f''(\xi_2)}{2!}-\frac{f''(\xi_1)}{2!}\right)\left(\frac{a-b}{2}\right)^2,$$

$$\left|f(b)-f(a)\right|\leq\frac{(b-a)^2}{8}\left(\left|f''(\xi_2)\right|+\left|f''(\xi_1)\right|\right).$$

取 $|f''(\xi)|=\max\{|f''(\xi_1)|,|f''(\xi_2)|\}$，则

$\left|f(b)-f(a)\right|\leq\frac{(b-a)^2}{8}\cdot 2\left|f''(\xi)\right|$，即 $(b-a)^2\left|f''(\xi)\right|\geq 4\left|f(b)-f(a)\right|$.