华中科技大学 2024-2025 学年 第 一 学期

微积分 A 答案 试卷（模拟卷）

院 (系) ________ 班级 ________ 姓名 ________ 学号 ________

试卷卷面成绩						
题 号	一	二	三	四	五	小 计
得 分						

自觉遵守考试规则，诚信考试，绝不作弊

装订线内不要答题

得分

一、**单项选择题** (共 6 小题，每小题 3 分，共 18 分)

1. 下列关于数列 $\{x_n\}$ 的说法错误的是（　　）

(A) 若 $\{x_n\}$ 单调递增且有上界，则 $\{x_n\}$ 收敛

(B) 若 $\{x_n\}$ 收敛，则 $\{x_n\}$ 有界

(C) 若 $\{x_n\}$ 收敛且 $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n \leqslant a$, 则存在 $N\in\mathbb{N}^+$, 对任意 $n>N$ 有 $x_n\leqslant a$

(D) 若 $\{x_n\}$ 为正数列且 $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{1}{x_n}=a\neq 0$，则 $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n=\dfrac{1}{a}$

答案：C

A 说法正确，由单调有界收敛定理可得

B 说法正确，有界性是收敛数列的基本性质

C 说法错误，考虑 $x_n=(-1)^n\dfrac{1}{n}$，则 $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n=0$ 但是不存在 N 使得当 $n\geqslant N$ 时，有 $x_n\leqslant 0$

请选错的同学回顾数列极限的定义，两大收敛定理，收敛数列的基本性质，收敛数列的四则运算性质

D 说法正确，由极限的四则运算性质有 $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n=\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{1}{\frac{1}{x_n}}=\dfrac{\lim_{n\to+\infty}1}{\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{x_n}}=\dfrac{1}{a}$

2. 下列说法错误的是（　　）

(A) 若 $f(x)$ 定义在 $\mathbb{R}$ 上，$\lim\limits_{n\to+\infty} f\left(x_0+\dfrac{1}{n}\right)=\lim\limits_{n\to+\infty} f\left(x_0-\dfrac{1}{n}\right)=f(x_0)$，则 $f(x)$ 在 $x=x_0$ 处连续

(B) 若 $f(x)=1037x^3+666x+666$，则 $f(x)$ 有实零点

(C) 若 $f(x)$ 在 $[a,+\infty)$ 上连续且 $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ 存在，则 $f(x)$ 在 $[a,+\infty)$ 上有界

(D) 若 $x=x_0$ 为 $f(x)$ 的可去间断点，则 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$ 存在

答案：A

A 说法错误，反例取 $x_0 = 0, f(x) = \begin{cases} 1 & x \in \mathbb{Q} \\ 0 & x \notin \mathbb{Q} \end{cases}$ 即可

请选错的同学回顾函数极限的定义，函数极限和数列极限的关系（海涅定理），连续函数的介值性质，闭区间上连续函数的性质，各类间断点的定义

B 说法正确，容易知道 $f(-1) < 0$ $f(1) > 0$ 由连续函数的介值性质知其必有零点

C 说法正确，由极限存在的定义知道，存在 M 使得 $f(x)$ 在 $[M, +\infty)$ 有界，又连续函数 $f(x)$ 在闭区间 $[a, M]$ 有界，所以 $f(x)$ 在 $[a, +\infty)$ 有界

D 说法正确，由可去间断点的定义可知 $f(x)$ 在 $x = x_0$ 左右极限存在且相等

3. 当 $x \to 0$ 时，下列哪个函数不是 $y = x$ 的同阶无穷小（　　）

(A) $\sin x$　　(B) $\ln(1+x)$　　(C) $\dfrac{1-\cos x}{x}$　　(D) $\dfrac{1-\cos(x^2)}{x^2}$

答案：D

A 和 B 无须多言，是应该记住的基本结论

对于 C 和 D，使用泰勒展开式 $\cos(x) = 1 - \dfrac{x^2}{2} + o(x^2)\quad (x \to 0)$ 可得

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2} = 1/2,\quad \lim_{x\to 0}\frac{1-\cos(x^2)}{x^3} = 0$$

因此 D 是 $y = x$ 的高阶无穷小

请选错的同学回顾无穷小，无穷小的阶，同阶无穷小，高阶无穷小，常见的等价无穷小

4. 下列说法正确的是（　　）

(A) 若 $f''(x)$ 连续，$f'(x_0) = 0$，$f''(x_0) \leqslant 0$，则 $x = x_0$ 一定为 $f(x)$ 的极大值点

(B) 若 $f(x)$ 在 $x = x_0$ 处左右导数均存在，则 $f(x)$ 在 $x = x_0$ 处连续

(C) 若 $f'(x_0) > 0$，则 $f(x)$ 在 $x = x_0$ 的某邻域内单调

(D) 若 $f(x)$ 在 $x = x_0$ 处可导，则一定有 $f(x) = f(x_0) + o(x - x_0)\quad (x \to x_0)$

答案：B

A 说法错误，反例取 $f(x) = x^3, x_0 = 0$ 即可

B 说法正确，由右导数存在可得

$$\lim_{x\to x_0^+}(f(x) - f(x_0)) = \lim_{x\to x_0^+}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}\lim_{x\to x_0^+}(x - x_0) = 0$$

因此 $f(x)$ 在 $x = x_0$ 右连续，同理可证得左连续，因此 $f(x)$ 在 $x = x_0$ 连续

请选错的同学回顾可导与连续的关系，导数与单调性的关系，极值点的定义，用导数判定极值点的方法

自觉遵守考试规则，诚信考试，绝不作弊　装订线内不要答题

C 说法错误，单点导数并不能推出在 $x = x_0$ 的某邻域的导数正负情况，也就不能推出在 $x = x_0$ 的某邻域的单调性, 可以考虑以下反例

$$f(x) = \begin{cases} x + 2x^2 \sin \dfrac{1}{x} & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$$

感兴趣的同学请验证 $f'(0) = 1 > 0$，但 $f(x)$ 在 $x = 0$ 的任一个邻域内不单调
D 说法错误，$f(x) = f(x_0) + o(x - x_0) \quad (x \to x_0)$ 意味着 $f'(x_0) = 0$，但是 $f(x)$ 仅仅是在 $x = x_0$ 可导而已

5. 设 $f(x)$ 和 $g(x)$ 在 [0,1] 上连续，则下列结论错误的是（　　）

(A) $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1}{n}\sum\limits_{k=1}^{n} f\left(\dfrac{k}{n}\right) = \lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1}{n}\sum\limits_{k=1}^{n} f\left(\dfrac{2k-1}{2n}\right)$

(B) 若 $f(x)$ 单调增加，则 $\displaystyle\int_0^1 xf(x)\mathrm{d}x \geqslant \frac{1}{2}\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x$

(C) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n(x)\mathrm{d}x = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n(x)\mathrm{d}x$, 其中 n 为任意正整数

(D) $\displaystyle\int_0^1 f(t)\left(\int_0^t g(s)\mathrm{d}s\right)\mathrm{d}t = \int_0^1 g(s)\left(\int_0^s f(t)\mathrm{d}t\right)\mathrm{d}s$

答案：D
A 正确, 连续函数可积，由定积分的定义，将 [0,1] 进行 n 等分，分别在小区间的右端点和中点取值，再取极限可知 A 的左右两边均为 $\displaystyle\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x$

B 正确,$\displaystyle s = \int_0^1 xf(x)\mathrm{d}x - \frac{1}{2}\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x = \int_0^{\frac{1}{2}}(x-\frac{1}{2})f(x)\mathrm{d}x + \int_{\frac{1}{2}}^1 (x-\frac{1}{2})f(x)\mathrm{d}x$
对这两个积分用第一中值定理得

$$s = f(\xi_1)\int_0^{\frac{1}{2}}(x-\frac{1}{2})\mathrm{d}x + f(\xi_2)\int_{\frac{1}{2}}^1(x-\frac{1}{2})\mathrm{d}x = \frac{1}{8}(f(\xi_2) - f(\xi_1)) \geqslant 0$$

最后一步是因为 $\xi_1 \leqslant \dfrac{1}{2} \leqslant \xi_2$ 再由 $f(x)$ 的单调性判断
C 正确, 作换元 $x = \dfrac{\pi}{2} - t$ 可知

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n(x)\mathrm{d}x = \int_{\frac{\pi}{2}}^0 \sin^n(\frac{\pi}{2}-t)\mathrm{d}(\frac{\pi}{2}-t) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n(t)\mathrm{d}t$$

D 错误, 令 $\displaystyle F(t) = \int_0^t f(u)\mathrm{d}u \quad G(t) = \int_0^t g(u)\mathrm{d}u$

则 $F'(t)=f(t)\quad G'(t)=g(t)$ 由分部积分公式可得

$$
\begin{aligned}
\int_0^1 f(t)\left(\int_0^t g(s)\mathrm{d}s\right)\mathrm{d}t &= \int_0^1 F'(t)G(t)\mathrm{d}t \\
&= F(t)G(t)\mid_0^1 - \int_0^1 F(t)G'(t)\mathrm{d}t \\
&= \int_0^1 f(t)\mathrm{d}t\int_0^1 g(s)\mathrm{d}s - \int_0^1 g(s)(\int_0^s f(u)du)\mathrm{d}s \\
&= \int_0^1 g(s)\left(\int_s^1 f(t)dt\right)\mathrm{d}s
\end{aligned}
$$

请选错的同学回顾定积分的定义，积分第一中值定理，定积分换元，分部积分，变上限定积分求导

6. 用 $[x]$ 表示不超过 x 的最大整数，$\{x\}=x-[x]$ 为 x 的小数部分，$\min(x,y)$ 表示 x 和 y 中较小者，记 $f(x)=\min\left(\left\{\frac{x}{4}\right\},\left\{\frac{x}{8}\right\}\right)$，则积分 $\int_0^{2024} f(x)\mathrm{d}x$ 的值为 (　　)

(A) 559　　(B) 659　　(C) 759　　(D) 859

答案：C

由函数 $\{x\}$ 的周期性可以自然得到 $f(x)$ 的周期性，我们有 $f(x+8)=f(x)$，因此

$$
\int_0^{2024} f(x)\mathrm{d}x = \frac{2024}{8}\int_0^8 f(x)\mathrm{d}x = \frac{2024}{8}\int_0^4 \frac{x}{8}\mathrm{d}x + \frac{2024}{8}\int_4^8 (\frac{x}{4}-1)\mathrm{d}x = 759
$$

这道题是想告诉大家，不要一拿到积分就想去求原函数，首先应该观察被积函数，看看它有什么样的性质可以简化运算，比如奇偶性，周期性，对称性等等，作出函数图像可以帮我们快速了解这些性质，从而化繁为简。这道题中如果你看不出周期性，也没有作函数图像，那你也应该能意识到以 4 为区间长度进行分段处理，多写几段你也能找到规律。

得分

二、**填空题** (共 4 小题，每小题 4 分，共 16 分.)

7. 数列极限 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n^2+n+1}+\frac{2}{n^2+n+2}+\cdots+\frac{n}{n^2+n+n}\right)=$ ______.

答案：$\frac{1}{2}$

自觉遵守考试规则，诚信考试，绝不作弊 装订线内不要答题

解：本题求极限需运用“两边夹定理”。令 $x_n=\sum_{i=1}^{n}\frac{i}{n^2+n+i}$，则可得到

$$\sum_{i=1}^{n}\frac{i}{n^2+n+n}<x_n<\sum_{i=1}^{n}\frac{i}{n^2+n+1}$$

$$\therefore \sum_{i=1}^{n}\frac{i}{n^2+n+1}=\frac{\frac{1}{2}n(n+1)}{n^2+n+1}\to\frac{1}{2}\quad(n\to\infty^+)$$

$$\left(\sum_{i=1}^{n}\frac{i}{n^2+n+n}=\frac{\frac{1}{2}n(n+1)}{n^2+n+n}\to\frac{1}{2}\quad(n\to\infty^+)\right)$$

$\therefore$ 由夹逼原理得 $\lim\limits_{n\to\infty^+}\left(\frac{1}{n^2+n+1}+\frac{2}{n^2+n+2}+\cdots+\frac{n}{n^2+n+n}\right)=\frac{1}{2}$

8. 设隐函数 $y=y(x)$ 由方程 $y=xe^y$ 确定，则 $y(x)$ 在 $x=0$ 处的切线方程为 ________.

答案: $y=x$

解：本题考察的是简单的隐函数求导

对方程 $y=xe^y$ 两边同时求导有：

$$y'=e^y+xe^yy'\Rightarrow$$
$$y'-xe^yy'=e^y\Rightarrow$$
$$\frac{dy}{dx}=y'=\frac{e^y}{1-xe^y}$$

将 $x=0$ 代入方程，得到 $y=0$，代入 $\frac{dy}{dx}$，得到该方程在 (0,0) 处切线斜率为 1。

故切线为 $y=x$。

9. 曲线 $y=\int_{-\sqrt{3}}^{x}\sqrt{3-t^2}\mathrm{d}t,-\sqrt{3}\leqslant x\leqslant\sqrt{3}$ 的弧长为 ________.

答案: $\frac{4}{3}\pi+\sqrt{3}$

解：根据弧长公式

$$l=\int_a^b \sqrt{1+(y')^2}dx$$

$$\text{由 } y'=\sqrt{3-x^2} \Rightarrow \text{得 } (y')^2=3-x^2$$

由于 x 的定义域要保证积分区间 $\left[-\sqrt{3},x\right]$ 在被积函数定义域内

故 x 的定义域为 $\left[-\sqrt{3},\sqrt{3}\right]$

因此弧长为 $l=\int_{-\sqrt{3}}^{\sqrt{3}}\sqrt{4-x^2}\mathrm{d}x$, 作换元 $x=2\sin\alpha$

则原式$=\int_{-\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{3}}\sqrt{4-4\sin^2\alpha}d(\sin 2\alpha)=4\int_{-\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{3}}\cos^2\alpha d\alpha=\frac{4}{3}\pi+\sqrt{3}$

10. 定积分 $I_1=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\mathrm{d}x}{1+n^2\cos^2 x}$ 的值为 ________，利用该积分结果，进一步计算极限 $I=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}\int_0^{n\pi}\frac{x}{1+n^2\cos^2 x}\mathrm{d}x=$ ________.

答案：$\frac{1}{\sqrt{n^2+1}}\cdot\frac{\pi}{2}$，$\frac{\pi^2}{2}$

步骤一：对 I_1 进行计算

这个积分的计算是直接的，只需利用常见换元, 即可得到结果，计算如下

$$\begin{aligned}
I_1&=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{dx}{1+n^2\cos^2 x}\\
&=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{dx}{\sin^2 x+\cos^2 x+n^2\cos^2 x}\\
&=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\frac{1}{\cos^2 x}}{(n^2+1)+\frac{\sin^2 x}{\cos^2 x}}dx\\
&=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sec^2 x}{(n^2+1)+\tan^2 x}dx
\end{aligned}$$

自觉遵守考试规则，诚信考试，绝不作弊

装订线内不要答题

令 $u=\tan x$，则 $du=\sec^2 xdx$，当 $x=0$ 时，$u=0$；当 $x=\dfrac{\pi}{2}$ 时，$u\to+\infty$，则:

$$\begin{aligned}
I_1&=\int_0^{+\infty}\frac{du}{(n^2+1)+u^2}\\
&=\frac{1}{n^2+1}\cdot\sqrt{n^2+1}\int_0^{+\infty}\frac{d(\frac{u}{\sqrt{n^2+1}})}{1+(\frac{u}{\sqrt{n^2+1}})^2}\\
&=\frac{1}{\sqrt{n^2+1}}\arctan(\frac{u}{\sqrt{n^2+1}})\Big|_0^{+\infty}\\
&=\frac{1}{\sqrt{n^2+1}}\cdot(\frac{\pi}{2}-0)\\
&=\frac{1}{\sqrt{n^2+1}}\cdot\frac{\pi}{2}
\end{aligned}$$

步骤二：利用换元对积分进行转化

设 $I_0=\dfrac{1}{n}\displaystyle\int_0^{n\pi}\frac{t}{1+n^2\cos^2 t}dt$，由第一问的积分，我们自然联想到如果能将被积函数分子上的 t 处理掉就好办了，且利用这个积分上下限，以及余弦函数的周期性，这是可以办到的, 令 $x=n\pi-t$ 可得:

$$\begin{aligned}
I_0&=\frac{1}{n}\int_0^{n\pi}\frac{n\pi-x}{1+n^2\cos^2(n\pi-x)}dx\\
&=\frac{1}{n}\int_0^{n\pi}\frac{n\pi-x}{1+n^2\cos^2 x}dx\\
&=\frac{1}{n}\int_0^{n\pi}\frac{n\pi}{1+n^2\cos^2 x}dx-\frac{1}{n}\int_0^{n\pi}\frac{x}{1+n^2\cos^2 x}dx\\
&=\frac{1}{n}\int_0^{n\pi}\frac{n\pi}{1+n^2\cos^2 x}dx-I_0
\end{aligned}$$

由此可得 $2I_0=\dfrac{1}{n}\displaystyle\int_0^{n\pi}\frac{n\pi}{1+n^2\cos^2 x}dx$,进一步化简为 $2I_0=\pi\displaystyle\int_0^{n\pi}\frac{dx}{1+n^2\cos^2 x}$。再利用函数的对称性以及周期性（因为被积函数关于 $x=\dfrac{n\pi}{2}$ 对称），可得 $2I_0=2n\pi\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{dx}{1+n^2\cos^2 x}$，即 $I_0=n\pi I_1$，其中 $I_1=\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{dx}{1+n^2\cos^2 x}$。

步骤三：求极限 I

由前面的推导可知 $I_0=n\pi I_1$，将 $I_1=\dfrac{1}{\sqrt{n^2+1}}\cdot\dfrac{\pi}{2}$ 代入可得:

$$I_0=\frac{n}{\sqrt{n^2+1}}\cdot\pi\cdot\frac{\pi}{2}=\frac{\pi^2}{2}\sqrt{\frac{n^2}{n^2+1}}$$

而要求的极限 $I=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}\int_0^{n\pi}\frac{x}{1+n^2\cos^2 x}dx=\lim\limits_{n\to\infty}I_0$，即：

$$I=\lim_{n\to\infty}\frac{\pi^2}{2}\sqrt{\frac{1}{1+\frac{1}{n^2}}}$$
$$=\frac{\pi^2}{2}$$

所以，原极限的值为 $\frac{\pi^2}{2}$。

得分

三、**计算题** (共 6 小题，每小题 6 分，共 36 分)

11. 求极限 $\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{(1+x)^{\frac{1}{x}}}{e}\right)^{\frac{1}{x}}$

解:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{x}\ln(1+x)-1}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)-x}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{1+x}-1}{2x}=-\lim_{x\to 0}\frac{1}{2(1+x)}=\frac{1}{2}$$

所以 $\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{(1+x)^{\frac{1}{x}}}{e}\right)^{\frac{1}{x}}=e^{-\frac{1}{2}}$

12. 设 $y=e^x\cos x$, 求 $y^{(n)}(x)$ 的表达式 (建议用归纳法) 以及 $y^{(404)}(0)$ 的值.

解: 方法一:

$$y'=e^x(\cos x-\sin x)=2^{\frac{1}{2}}e^x\cos\left(x+\frac{\pi}{4}\right)$$

$$y''=2^{\frac{1}{2}}e^x\left(\cos\left(x+\frac{\pi}{4}\right)-\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)\right)=2^{\frac{2}{2}}e^x\cos\left(x+\frac{2\pi}{4}\right)$$

利用数学归纳法可证得:

$$y^{(n)}=2^{\frac{n}{2}}e^x\cos\left(x+\frac{n\pi}{4}\right)$$

从而 $y^{(404)}(0)=2^{202}\cos(\frac{404\pi}{4})=-2^{202}$

方法二：由欧拉公式可知 $\cos x=\frac{1}{2}(e^{ix}+e^{-ix})$, 因此

$$y=e^x\cos x=\frac{1}{2}(e^{(1+i)x}+e^{(1-i)x})$$

从而由由 棣莫弗公式

$$
\begin{aligned}
y^{(n)}(x) &= \frac{1}{2}((1+i)^n e^{(1+i)x} + (1-i)^n e^{(1-i)x}) \\
&= \frac{1}{2}\left((\sqrt{2}(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}))^n e^{(1+i)x} + (\sqrt{2}(\cos\frac{\pi}{4} - i\sin\frac{\pi}{4}))^n e^{(1-i)x}\right) \\
&= \frac{1}{2}\left(2^{\frac{n}{2}}(\cos\frac{n\pi}{4} + i\sin\frac{n\pi}{4})e^{(1+i)x} + 2^{\frac{n}{2}}(\cos\frac{n\pi}{4} - i\sin\frac{n\pi}{4})e^{(1-i)x}\right) \\
&= \frac{e^x 2^{\frac{n}{2}}}{2}\left(e^{\frac{n\pi i}{4}}e^{ix} + e^{-\frac{n\pi i}{4}}e^{-ix}\right) \\
&= 2^{\frac{n}{2}}e^x \frac{e^{(\frac{n\pi}{4}+x)i} + e^{-(\frac{n\pi}{4}+x)i}}{2} \\
&= 2^{\frac{n}{2}}e^x \cos\left(x + \frac{n\pi}{4}\right)
\end{aligned}
$$

方法三：由 Lebnize 公式，

$$
\begin{aligned}
y^{(n)}(x) &= \sum_{k=0}^{n} C_n^k (e^x)^{(n-k)}(\cos x)^{(k)} \\
&= e^x \sum_{k=0}^{n} C_n^k \cos(x + \frac{k\pi}{2}) \\
&= e^x(C_n^0 \cos x + C_n^1(-\sin x) + C_n^2(-\cos x) + C_n^3(\sin x) + \cdots) \\
&= e^x \cos x(C_n^0 - C_n^2 + \cdots) - e^x \sin x(C_n^1 - C_n^3 + \cdots)
\end{aligned}
$$

如何处理这个组合数求和呢，我们仍然要借助虚数单位 i，一方面由欧拉公式

$$(1+i)^n = (\sqrt{2}e^{\frac{\pi i}{4}})^n = 2^{\frac{n}{2}}e^{\frac{n\pi i}{4}}$$

另一方面由二项式定理

$$(1+i)^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k i^k = (C_n^0 - C_n^2 + C_n^4 - \cdots) + i(C_n^1 - C_n^3 + C_n^5 - \cdots)$$

对比实部和虚部，我们有

$$2^{\frac{n}{2}}\cos(\frac{n\pi}{4}) = C_n^0 - C_n^2 + C_n^4 - \cdots$$

$$2^{\frac{n}{2}}\sin(\frac{n\pi}{4}) = C_n^1 - C_n^3 + C_n^5 - \cdots$$

这样就可以算出高阶导数了，剩下的过程请各位同学自行补全

13. 设对数螺线的极坐标方程为 $r = ae^{m\theta}$，其中 $a, m > 0$ 为常数，$r = \sqrt{x^2+y^2}$，$\theta = \arctan\frac{y}{x}$，求 $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$ 的表达式.(只用 θ, m 表示即可)

解：$x=r\cos\theta, y=r\sin\theta$，其中 $r=r(\theta)$. 利用参数方程所确定的求导方式，可得

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}\theta}}{\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}\theta}}=\frac{r\cos\theta+\sin\theta\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}\theta}}{-r\sin\theta+\cos\theta\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}\theta}}.$$

由 $r=ae^{m\theta}$ 知，$\dfrac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}\theta}=mae^{m\theta}$ 带入（1）式得

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{mae^{m\theta}\sin\theta+ae^{m\theta}\cos\theta}{mae^{m\theta}\cos\theta-ae^{m\theta}\sin\theta}=\frac{m\sin\theta+\cos\theta}{m\cos\theta-\sin\theta}=\tan\left(\theta+\arctan\frac{1}{m}\right).$$

14. 求不定积分 $\displaystyle\int\frac{\mathrm{d}x}{1+e^{\frac{x}{2}}+e^{\frac{x}{3}}+e^{\frac{x}{6}}}$

解：设 $e^{\frac{x}{6}}=t$，则 $x=6\ln t$,$\mathrm{d}x=\dfrac{6}{t}\mathrm{d}t$ 代入得

$$\begin{aligned}
\text{原式}&=6\int\frac{\mathrm{d}t}{t\left(1+t^3+t^2+t\right)}\\
&=6\int\frac{\mathrm{d}t}{t\left(t+1\right)\left(t^2+1\right)}\\
&=6\int\left[\frac{1}{t}-\frac{1}{2\left(t+1\right)}-\frac{t+1}{2\left(t^2+1\right)}\right]\mathrm{d}t\\
&=6\ln t-3\ln\left(t+1\right)-\frac{3}{2}\ln\left(t^2+1\right)-3\arctan t+C\\
&=x-3\ln\left[\left(1+e^{\frac{x}{6}}\right)\sqrt{1+e^{\frac{x}{3}}}\right]-3\arctan\left(e^{\frac{x}{6}}\right)+C
\end{aligned}$$

15. 求定积分 $\displaystyle\int_{e^{-2\pi n}}^{1}\left|\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\cos\left(\ln\frac{1}{x}\right)\right)\right|\mathrm{d}x$，其中 n 为正整数.

解:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\cos\left(\ln\frac{1}{x}\right)\right)=\frac{\sin\left(-\ln x\right)}{x}.$$

设 $x=e^{-t}$.，则

$$dx=-e^{-t}dt$$

$$\frac{\sin\left(-\ln x\right)}{x}=\frac{\sin t}{e^{-t}}=e^{t}\sin t.$$

带入得

$$\int_{e^{-2\pi n}}^{1}\left|\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\cos\left(\ln\frac{1}{x}\right)\right)\right|\mathrm{d}x=\int_{0}^{2\pi n}\left|\sin t\right|\mathrm{d}t=\sum_{k=1}^{2n}\int_{0}^{\pi}\sin t\mathrm{d}t=4n.$$

16. 请确定参数 a,b 使得 $k\in\mathbb{N}^{+}$ 最大,其中 k 是使得极限 $\displaystyle\lim_{x\to0}\frac{x-(a+b\cos x)\sin x}{x^k}$ 存在且为非零有限数的最大整数.

自觉遵守考试规则，诚信考试，绝不作弊

装订线内不要答题

提示：将量 $x-(a+b\cos x)\sin x = x - a\sin x - \dfrac{b}{2}\sin 2x$ 展开到 x^5

解:

$$\begin{aligned}\text{原式} &= x - a\left[x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + o\left(x^5\right)\right] - \frac{b}{2}\left[2x - \frac{1}{3!}\left(2x\right)^3 + \frac{1}{5!}\left(2x\right)^5 + o\left(x^5\right)\right] \\ &= \left(1-a-b\right)x + \left(\frac{a}{6} + \frac{2b}{3}\right)x^3 - \left(\frac{a}{120} + \frac{2b}{15}\right)x^5 + o\left(x^5\right).\end{aligned}$$

因为仅有 a,b 两个待定参数，所以我们最多可使 x 和 x^3 的系数为零，故 k 最大取 5，此时 a,b 的值满足

$$1-a-b=0$$
$$\frac{a}{6}+\frac{2b}{3}=0$$

解得 $a=\dfrac{4}{3}$,$b=-\dfrac{1}{3}$

得分

四、综合应用题 (共 2 小题，每小题 7 分，共 14 分)

17. 已知函数 $f(x)=\begin{cases}\displaystyle\int_0^x e^{-t^2}\mathrm{d}t - \int_0^{x^2}\sqrt{t}e^{-t}\mathrm{d}t & (0\leqslant x\leqslant 2) \\ x^2+x & (-1\leqslant x\leqslant 0)\end{cases}$

(1)x 取何值时，$f(x)$ 在区间 $[-1,2]$ 上取到最大值?

(2) 求 $f(x)$ 在区间 $(-1,2)$ 上的所有拐点.

解：(1) $-1\leqslant x\leqslant 0$ 时：$f(x)\leqslant 0$

$0<x<2$ 时:

$$f'(x)=e^{-x^2}-\sqrt{x^2}e^{-x^2}\cdot(2x)=(1-2x^2)e^{-x^2}$$

令 $f'(x)=0$ 得 $x=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$

当 $x\in(0,\dfrac{\sqrt{2}}{2})$ 时，$f'(x)>0$ 从而 f 在 $[0,\dfrac{\sqrt{2}}{2}]$ 上单调递增，且 $f(\dfrac{\sqrt{2}}{2})>f(0)=0$。当 $x\in(\dfrac{\sqrt{2}}{2},2)$ 时，$f'(x)<0$，因此 $x=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ 时，$f(x)$ 的值最大。(3 分)

(2)$-1<x<0$ 时：$f''(x)=2$ 无零点（或 $f'(x)=2x+1$ 单调）从而 f 在 $(-1,0)$ 内无拐点。

$0<x<2$ 时：$f''(x)=2x(2x^2-3)e^{-x^2}$

令 $f''(x)=0$ 得 $x=\dfrac{\sqrt{6}}{2}$

$x\in(0,\dfrac{\sqrt{6}}{2})$ 时，$f''(x)<0$，$x\in(\dfrac{\sqrt{6}}{2},2)$ 时，$f''(x)>0$.

从而 $x=\dfrac{\sqrt{6}}{2}$ 为 $f(x)$ 的一个拐点。

$x=0$ 时：由于 $x\in(-1,0)$ 时 $f''(x)=2>0$

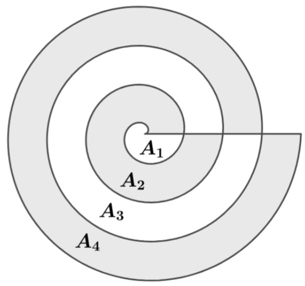
而 $x\in(0,\dfrac{\sqrt{6}}{2})$ 时，$f''(x)<0$(或者讨论 0 点两侧 $f'(x)$ 的单调性) 得，$x=0$ 也是 $f(x)$ 的拐点。

综上所述：$f(x)$ 的拐点为 0 和 $\dfrac{\sqrt{6}}{2}$。

18. 阿基米德螺线是一个点匀速离开一个固定点的同时又以固定的角速度绕该固定点转动而产生的轨迹，其极坐标方程为 $r=a\theta$，其中 $a>0$ 为常数。阿基米德螺线和 x 轴正半轴一起将平面划分成如图所示的环状区域 (相邻的环状区域用白色和灰色加以区分)，记从里向外第 n 个环状区域的面积为 A_n.

(1) 求 A_1 的值.

(2) 通过计算说明 $\{A_n\}$ 成一等差数列并求其公差.



解：极坐标下求图形的面积可以用微元法来思考，我们知道一个张角为 $\mathrm{d}\theta$，半径为 $r=r(\theta)$ 的扇形微元面积为 $\dfrac{1}{2}r^2\mathrm{d}\theta$, 对 $\mathrm{d}\theta$ 做累加即可得到极坐标下面积公式

$$S=\frac{1}{2}\int_{\theta_1}^{\theta_2} r^2\mathrm{d}\theta$$

(1)：$A_1=\dfrac{1}{2}\displaystyle\int_0^{2\pi} r^2d\theta=\dfrac{1}{2}a^2\int_0^{2\pi}\theta^2d\theta=\dfrac{4}{3}\pi^3a^2$(3 分)

(2) 令 $S_n=\displaystyle\sum_{i=1}^{n}A_i$,

则 S_n 的边界的极坐标方程为 $r=a\theta \qquad (2(n-1)\pi<\theta<2n\pi)$

(或 $r=a\theta+(2n-1)\pi a \qquad (0<\theta<2\pi)$)

则 $S_n=\dfrac{1}{2}\displaystyle\int_{2(n-1)\pi}^{2n\pi} r^2d\theta=\dfrac{1}{2}a^2\int_{2(n-1)\pi}^{2n\pi}\theta^2d\theta=a^2\pi^3(4n^2-4n+\dfrac{4}{3})$

$n\geqslant 2$ 时，$A_n=S_n-S_{n-1}=8(n-1)\pi^3a^2$

$n=1$ 时，不符合上式

综上所述：$A_n = 8(n-1)\pi^3 a^2$,n$\geqslant 2$

A$_n$ 在 $n \geqslant 2$ 时成一等差数列，公差为 $8\pi^3 a^2$.

得分

五、综合解答题 (共 2 小题，第一题 7 分，第二题 9 分，共 16 分)

19. 设函数 $f(x)$ 在 $[0, 2025\pi]$ 上连续, $(0, 2025\pi)$ 上可导, 满足 $f(0) = f(2025\pi) = 0$, 且对任意 $x \in (0, 2025\pi)$, $|f'(x)| < \dfrac{2}{2025\pi}$.

(1) 证明: 对任意 $x \in (0, 2025\pi)$, $|f(x)| < 1$.

(2) 利用 (1) 中的结论证明方程 $\sin x = f(x)$ 在 $(0, 2025\pi)$ 上至少有 2024 个根且相邻两个根之间的距离小于 2π.

(1) 记 $M = \dfrac{2}{2025\pi}$, 由拉格朗日中值定理，存在 ξ_1 与 ξ_2，使得

$$|f(x)| = |f(x) - f(0)| = |f'(\xi_1)(x-0)| < Mx$$

$$|f(x)| = |f(2025\pi) - f(x)| = |f'(\xi_2)(2025\pi - x)| < M(2025\pi - x)$$

两式相加得

$$|f(x)| < \frac{M}{2}(x + 2025\pi - x) = 1$$

(2) 令 $g(x) = \sin x - f(x)$, 考察 $x_n = \dfrac{\pi}{2} + n\pi, n = 0, 1, \cdots, 2024$, 由 (1) 中结论 $|f(x)| < 1$ 可知

$$g(x_{2k}) = \sin\left(\frac{\pi}{2} + 2k\pi\right) - f(x_{2k}) = 1 - f(x_{2k}) > 0$$

以及

$$g(x_{2k+1}) = \sin\left(\frac{\pi}{2} + (2k+1)\pi\right) - f(x_{2k+1}) = -1 - f(x_{2k+1}) < 0$$

由于 $g(x)$ 为连续函数，因此由零点存在定理, $g(x)$ 分别在区间 $(x_0, x_1), (x_1, x_2), \cdots, (x_{2023}, x_{2024})$ 上至少存在一根，从而方程 $\sin x = f(x)$ 在 $(0, 2025\pi)$ 上至少有 2024 个根, 且相邻两个根之间距离小于 2π.

20. 设函数 $f(x)$ 在 $[0, +\infty)$ 上连续，$a_n = \displaystyle\int_n^{n+1} f(x)\mathrm{d}x$, $n \in \mathbb{N}^+$.

(1) 若对任意 $x \geqslant 0$, $0 < f(x+1) < f(x)$, 证明数列 $\{a_n\}$ 收敛.

(2) 设 $f(x) = \sin g(x)$, 其中 $g(x) = xe^x$, 试回答以下问题:

(a) 由于 $g(x)$ 在 $[0, +\infty)$ 上严格单调增，故存在反函数，记为 $h(x)$, 写出 $h(x)$ 在点 (x, y) 处的导数表达式 (用 y 表示), 其中 $y = h(x)$, 并判断 $h''(x)$ 的正负号 (直接写出结果，不需要推导过程).

(b) 证明: $|a_n| \leqslant \dfrac{2}{(n+1)e^n}$.

(1) 由于

$$\begin{aligned} a_{n+1}-a_n &= \int_{n+1}^{n+2} f(x)\mathrm{d}x - \int_n^{n+1} f(x)\mathrm{d}x \\ &= \int_n^{n+1} f(x+1)\mathrm{d}x - \int_n^{n+1} f(x)\mathrm{d}x \\ &= \int_n^{n+1} (f(x+1)-f(x))\mathrm{d}x < 0 \end{aligned}$$

因此 a_n 单调递减, 又

$$a_n = \int_n^{n+1} f(x)\mathrm{d}x \geqslant 0$$

由单调收敛准则可知数列 $\{a_n\}$ 在 n 趋于正无穷时的极限存在.

(2)(a)

$$h'(x) = \frac{1}{g'(y)} = \frac{1}{(y+1)e^y}$$

从而

$$\begin{aligned} h''(x) &= -\frac{1}{(y+1)^2e^{2y}}\left(h'(x)e^y + (y+1)e^y h'(x)\right) \\ &= -\frac{1}{(y+1)^2e^{2y}}\left(\frac{1}{y+1}+1\right) < 0 \end{aligned}$$

(b) 由换元法和分部积分可知

$$\begin{aligned} a_n &= \int_n^{n+1} \sin g(x)\mathrm{d}x \xlongequal[x=h(t)]{t=g(x)} \int_{g(n)}^{g(n+1)} \sin t h'(t)\mathrm{d}t \\ &= \int_{g(n)}^{g(n+1)} h'(t)\mathrm{d}(-\cos t) \\ &= -\cos t h'(t)\Big|_{g(n)}^{g(n+1)} - \int_{g(n)}^{g(n+1)} h''(t)(-\cos t)\mathrm{d}t \\ &= -\cos g(n+1)h'(g(n+1)) + \cos g(n)h'(g(n)) - \int_{g(n)}^{g(n+1)} h''(t)(-\cos t)\mathrm{d}t \end{aligned}$$

因此

$$
\begin{aligned}
|a_n| &\leqslant |\cos g(n+1)h'(g(n+1))| + |\cos g(n)h'(g(n))| + \int_{g(n)}^{g(n+1)} |h''(t)(-\cos t)|\mathrm{d}t \\
&\leqslant |h'(g(n+1))| + |h'(g(n))| + \int_{g(n)}^{g(n+1)} |h''(t)|\mathrm{d}t \\
&= h'(g(n+1)) + h'(g(n)) - \int_{g(n)}^{g(n+1)} h''(t)\mathrm{d}t \\
&= h'(g(n+1)) + h'(g(n)) - h'(t)\Big|_{g(n)}^{g(n+1)} \\
&= h'(g(n+1)) + h'(g(n)) - h'(g(n+1)) + h'(g(n)) \\
&= 2h'(g(n)) = \frac{2}{(h(g(n))+1)e^{h(g(n))}} \\
&= \frac{2}{(n+1)e^n}
\end{aligned}
$$

自觉遵守考试规则，诚信考试，绝不作弊

装订线内不要答题