华中科技大学 2024-2025 学年　第 一 学期

微积分 A　试卷（模拟卷）

院 (系) ________ 班级 ________ 姓名 ________ 学号 ________

试卷卷面成绩						
题 号	一	二	三	四	五	小 计
得 分						

自觉遵守考试规则，诚信考试，绝不作弊

装订线内不要答题

得分

一、单项选择题 (共 6 小题，每小题 3 分，共 18 分)

1. 下列关于数列 $\{x_n\}$ 的说法错误的是（　　）

(A) 若 $\{x_n\}$ 单调递增且有上界，则 $\{x_n\}$ 收敛

(B) 若 $\{x_n\}$ 收敛，则 $\{x_n\}$ 有界

(C) 若 $\{x_n\}$ 收敛且 $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n \leqslant a$, 则存在 $N \in \mathbb{N}^+$, 对任意 $n > N$ 有 $x_n \leqslant a$

(D) 若 $\{x_n\}$ 为正数列且 $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1}{x_n} = a \neq 0$，则 $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = \dfrac{1}{a}$

2. 下列说法错误的是（　　）

(A) 若 $f(x)$ 定义在 $\mathbb{R}$ 上，$\lim\limits_{n\to+\infty} f\left(x_0+\dfrac{1}{n}\right) = \lim\limits_{n\to+\infty} f\left(x_0-\dfrac{1}{n}\right) = f(x_0)$，则 $f(x)$ 在 $x = x_0$ 处连续

(B) 若 $f(x) = 1037x^3 + 666x + 666$，则 $f(x)$ 有实零点

(C) 若 $f(x)$ 在 $[a,+\infty)$ 上连续且 $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ 存在，则 $f(x)$ 在 $[a,+\infty)$ 上有界

(D) 若 $x = x_0$ 为 $f(x)$ 的可去间断点，则 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$ 存在

3. 当 $x \to 0$ 时，下列哪个函数不是 $y = x$ 的同阶无穷小（　　）

(A) $\sin x$　　(B) $\ln(1+x)$　　(C) $\dfrac{1-\cos x}{x}$　　(D) $\dfrac{1-\cos(x^2)}{x^2}$

4. 下列说法正确的是（　　）

(A) 若 $f''(x)$ 连续，$f'(x_0) = 0$，$f''(x_0) \leqslant 0$, 则 $x = x_0$ 一定为 $f(x)$ 的极大值点

(B) 若 $f(x)$ 在 $x = x_0$ 处左右导数均存在，则 $f(x)$ 在 $x = x_0$ 处连续

(C) 若 $f'(x_0) > 0$，则 $f(x)$ 在 $x = x_0$ 的某邻域内单调

(D) 若 $f(x)$ 在 $x = x_0$ 处可导，则一定有 $f(x) = f(x_0) + o(x - x_0)\quad (x \to x_0)$

5. 设 $f(x)$ 和 $g(x)$ 在 [0,1] 上连续，则下列结论错误的是（　　）

(A) $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{1}{n}\sum\limits_{k=1}^{n}f\left(\dfrac{k}{n}\right)=\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{1}{n}\sum\limits_{k=1}^{n}f\left(\dfrac{2k-1}{2n}\right)$

(B) 若 $f(x)$ 单调增加，则 $\int_0^1 xf(x)\mathrm{d}x\geqslant\dfrac{1}{2}\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x$

(C) $\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^n(x)\mathrm{d}x=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^n(x)\mathrm{d}x$, 其中 n 为任意正整数

(D) $\int_0^1 f(t)\left(\int_0^t g(s)\mathrm{d}s\right)\mathrm{d}t=\int_0^1 g(s)\left(\int_0^s f(t)\mathrm{d}t\right)\mathrm{d}s$

6. 用 $[x]$ 表示不超过 x 的最大整数，$\{x\}=x-[x]$ 为 x 的小数部分，$\min(x,y)$ 表示 x 和 y 中较小者，记 $f(x)=\min\left(\left\{\dfrac{x}{4}\right\},\left\{\dfrac{x}{8}\right\}\right)$, 则积分 $\int_0^{2024}f(x)\mathrm{d}x$ 的值为（　　）

(A) 559　(B) 659　(C) 759　(D) 859

得分

二、**填空题** (共 4 小题，每小题 4 分，共 16 分.)

7. 数列极限 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{1}{n^2+n+1}+\dfrac{2}{n^2+n+2}+\cdots+\dfrac{n}{n^2+n+n}\right)=$ ______.

8. 设隐函数 $y=y(x)$ 由方程 $y=xe^y$ 确定，则 $y(x)$ 在 $x=0$ 处的切线方程为 ________.

9. 曲线 $y=\int_{-\sqrt{3}}^{x}\sqrt{3-t^2}\mathrm{d}t,-\sqrt{3}\leqslant x\leqslant\sqrt{3}$ 的弧长为 ________.

10. 定积分 $I_1=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\dfrac{\mathrm{d}x}{1+n^2\cos^2 x}$ 的值为 ________，利用该积分结果，进一步计算极限 $I=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{n}\int_0^{n\pi}\dfrac{x}{1+n^2\cos^2 x}\mathrm{d}x=$ ________.

得分

三、**计算题** (共 6 小题，每小题 6 分，共 36 分)

11. 求极限 $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{(1+x)^{\frac{1}{x}}}{e}\right)^{\frac{1}{x}}$

12. 设 $y=e^x\cos x$, 求 $y^{(n)}(x)$ 的表达式 (建议用归纳法) 以及 $y^{(404)}(0)$ 的值.

自觉遵守考试规则，诚信考试，绝不作弊

装订线内不要答题

13. 设对数螺线的极坐标方程为 $r = ae^{m\theta}$,其中 $a, m > 0$ 为常数,$r = \sqrt{x^2+y^2}$,$\theta = \arctan\dfrac{y}{x}$, 求 $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$ 的表达式.(只用 θ, m 表示即可)

14. 求不定积分 $\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{1+e^{\frac{x}{2}}+e^{\frac{x}{3}}+e^{\frac{x}{6}}}$

15. 求定积分 $\displaystyle\int_{e^{-2\pi n}}^{1}\left|\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\cos\left(\ln\frac{1}{x}\right)\right)\right|\mathrm{d}x$, 其中 n 为正整数.

自觉遵守考试规则，诚信考试，绝不作弊

装订线内不要答题

16. 请确定参数 a,b 使得 $k\in\mathbb{N}^{+}$ 最大,其中 k 是使得极限 $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{x-(a+b\cos x)\sin x}{x^{k}}$ 存在且为非零有限数的最大整数.

得分

四、综合应用题 (共 2 小题，每小题 7 分，共 14 分)

17. 已知函数 $f(x)=\begin{cases}\displaystyle\int_0^x e^{-t^2}\mathrm{d}t-\int_0^{x^2}\sqrt{t}e^{-t}\mathrm{d}t & (0\leqslant x\leqslant 2)\\ x^2+x & (-1\leqslant x\leqslant 0)\end{cases}$

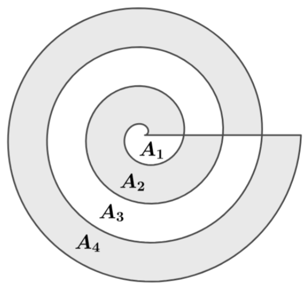
(1)x 取何值时，$f(x)$ 在区间 $[-1,2]$ 上取到最大值?

(2) 求 $f(x)$ 在区间 $(-1,2)$ 上的所有拐点.

18. 阿基米德螺线是一个点匀速离开一个固定点的同时又以固定的角速度绕该固定点转动而产生的轨迹，其极坐标方程为 $r=a\theta$，其中 $a>0$ 为常数。阿基米德螺线和 x 轴正半轴一起将平面划分成如图所示的环状区域 (相邻的环状区域用白色和灰色加以区分)，记从里向外第 n 个环状区域的面积为 A_n.

(1) 求 A_1 的值.

(2) 通过计算说明 $\{A_n\}$ 在 $n\geqslant 2$ 时成一等差数列并求其公差.



得分

五、综合解答题 (共 2 小题，第一题 7 分，第二题 9 分，共 16 分)

19. 设函数 $f(x)$ 在 $[0, 2025\pi]$ 上连续, $(0, 2025\pi)$ 上可导, 满足 $f(0) = f(2025\pi) = 0$, 且对任意 $x \in (0, 2025\pi)$, $|f'(x)| < \dfrac{2}{2025\pi}$.

(1) 证明: 对任意 $x \in (0, 2025\pi)$, $|f(x)| < 1$.

(2) 利用 (1) 中的结论证明方程 $\sin x = f(x)$ 在 $(0, 2025\pi)$ 上至少有 2024 个根且相邻两个根之间的距离小于 2π.

自觉遵守考试规则，诚信考试，绝不作弊

装订线内不要答题

20. 设函数 $f(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 上连续，$a_n = \int_n^{n+1} f(x)\mathrm{d}x$, $n \in \mathbb{N}^+$.

(1) 若对任意 $x \geqslant 0$, $0 < f(x+1) < f(x)$, 证明数列 $\{a_n\}$ 收敛.

(2) 设 $f(x) = \sin g(x)$, 其中 $g(x) = xe^x$, 试回答以下问题:

(a) 由于 $g(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 上严格单调增，故存在反函数，记为 $h(x)$, 写出 $h(x)$ 在点 (x,y) 处的导数表达式 (用 y 表示), 其中 $y = h(x)$, 并判断 $h''(x)$ 的正负号 (直接写出结果，不需要推导过程).

(b) 证明: $|a_n| \leqslant \dfrac{2}{(n+1)e^n}$