华中科技大学启明学院 2023～2024 学年第一学期

“高等数学（A）”（上）期末考试试卷(A 卷)

考试方式: 闭卷　　**考试日期:** **2024.1.10**　　**考试时间:** **150** 分钟

专业班级: ______　　**学　号:** ______　　**姓　名:** ______

题号	一	二	三	四	五	总分
满分	16	20	24	16	24	100
得分						

得　分	
评卷人	

一. 选择题（每小题 4 分，共 16 分）

1. 关于狄利克雷函数 $D(x)$，下列说法**正确**的是 (B)
   A. $D(x)$ 存在第一类间断点
   B. $xD(x)$ 存在连续点
   C. $D(x)$ 是凸函数
   D. $D(x)$ 在 [0,1] 上黎曼可积

2. 设 f 为定义在 $\mathbf{R}$ 上的函数，下列说法**错误**的是 (D)
   A. 若 $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)$存在，则 $\lim\limits_{x\to\infty} |f(x)|$ 存在
   B. 若 f 连续，则 $|f|$ 一定连续
   C. 若 f 在$[a,b]$上黎曼可积，则 $|f|$ 在 $[a,b]$ 上也黎曼可积
   D. 若$\int_0^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x$ 收敛，则 $\int_0^{+\infty} |f(x)|\,\mathrm{d}x$ 一定收敛

3. 设 $f:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$ 的一阶导数连续，且 f' 恰有一个零点 a，则 (C)
   A. f 必有两个零点
   B. a 必为 f 的极值点
   C. f 必在 $(a,+\infty)$上单调
   D. f 在 $\mathbf{R}$ 上不可能单调

4. 曲线 $y=e^x\sin x$ 一共有 (D) 个拐点
   A. 0　　B. 1　　C. 2　　D. 无数

得　分	
评卷人	

二. 填空题（每小题 4 分，共 20 分）

5. x^x 在 $x=1$ 处带 Peano 余项的二阶 Taylor 公式为 $\underline{\mathbf{1+(x-1)+(x-1)^2+o((x-1)^2)}}$.

或 $\underline{\mathbf{x^2-x+1+o((x-1)^2)}}$ 　　或 $\underline{\mathbf{1+(x-1)+(x-1)^2+O((x-1)^3)}}$

6. 曲线 $y=\frac{x^2+3}{x-1}$ 的全部渐近线有 $\underline{\mathbf{x=1}}$ **和** $\underline{\mathbf{y=x+1}}$.

7. $\int\frac{2x+3}{x^2+4x+5}\mathrm{d}x=$ $\underline{\mathbf{\ln(x^2+4x+5)-\arctan(x+2)+C}}$.

8. $\int_0^{2\pi}\sin^3 x\,\mathrm{d}x=$ $\underline{\mathbf{0}}$.

9. 设连续函数 $y(x)$ 满足 $y(x)=2023e^x+e^x\int_0^x y^2(t)dt$, 则 $y(x)=$ $\underline{\mathbf{\frac{4046}{2025e^{-x}-2023e^{x}}}}$ $\left(\frac{1}{\frac{2025}{4046}e^{-x}-\frac{1}{2}e^{x}}\right)$

得　分	
评卷人	

三. 计算题(每小题 6 分，共 24 分)

10. 求极限 $\lim\limits_{x\to0}\frac{e^x-1-x}{2(1+x)^{\frac{1}{2}}-2-\ln(1+x)}$.

解: 原式 $=\lim\limits_{x\to0}\frac{e^x-1-x}{2(1+x)^{\frac{1}{2}}-2-\ln(1+x)}=\lim\limits_{x\to0}\frac{e^x-1}{(1+x)^{-1/2}-(1+x)^{-1}}$ 　　(3 分)

$$=\lim_{x\to0}\frac{e^x-1}{(1+x)^{1/2}-1}\lim_{x\to0}(x+1)=\lim_{x\to0}\frac{x}{\frac{1}{2}x}=2.$$ 　　(3 分)

另解: 由 Taylor 公式得

原式 $=\lim\limits_{x\to0}\frac{\frac{1}{2}x^2+o(x^2)}{2\left[1+\frac{1}{2}x-\frac{1}{8}x^2+o(x^2)\right]-2-\left[x-\frac{1}{2}x^2+o(x^2)\right]}$ 　　(4 分)

$=\lim\limits_{x\to0}\frac{\frac{1}{2}x^2+o(x^2)}{\frac{1}{4}x^2+o(x^2)}=2.$ 　　(2 分)

11. 设 f 连续，F 为 f 的一个原函数，$F(1)=2$，$F(0)=0$，求极限 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\pi}{2n}\sum\limits_{i=1}^{n}f\left(\sin\frac{i\pi}{2n}\right)\cos\frac{i\pi}{2n}$

解: $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\pi}{2n}\sum_{i=1}^{n}f\left(\sin\frac{i\pi}{2n}\right)\cos\frac{i\pi}{2n}=\int_0^{\pi/2}f(\sin x)\cos x\,\mathrm{d}x$　（3 分）

$=\int_0^{\pi/2}f(\sin x)\,\mathrm{d}(\sin x)=F(\sin x)\big|_0^{\pi/2}$　（2 分）

$=F(1)-F(0)=2.$　（1 分）

另解: $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\pi}{2n}\sum_{i=1}^{n}f\left(\sin\frac{i\pi}{2n}\right)\cos\frac{i\pi}{2n}=\frac{\pi}{2}\int_0^{1}f\left(\sin\left(\frac{\pi}{2}x\right)\right)\cos\left(\frac{\pi}{2}x\right)\mathrm{d}x$　（3 分）

(换元 $t=\sin\left(\frac{\pi}{2}x\right)$)　$=\int_0^1 f(t)\,\mathrm{d}t$　（2 分）

$=F(1)-F(0)=2.$　（1 分）

12. 设 $y=\left(x+\frac{3}{4}\right)\mathrm{e}^x$ 是微分方程 $y''+y'-6y=ax\mathrm{e}^x$ 的一个特解，求 a 的值以及该方程的通解.

解: 将 $y'=\mathrm{e}^x\left(x+\frac{7}{4}\right)$，$y''=\mathrm{e}^x\left(x+\frac{11}{4}\right)$.

代入原方程化简得 $-4x\mathrm{e}^x=ax\mathrm{e}^x$，故 $a=-4$.　（2 分）

解特征方程 $\lambda^2+\lambda-6=0$ 得特征根 $\lambda_1=2$，$\lambda_2=-3$.　（2 分）

故原方程的通解为

$y(x)=C_1\mathrm{e}^{2x}+C_2\mathrm{e}^{-3x}+\left(x+\frac{3}{4}\right)\mathrm{e}^x.$　（2 分）（C_1,C_2为任意常数）

13. 计算由直线 $y=\frac{2}{\pi}x$ 和曲线 $y=\sin x$ 在第一象限所围成的图形面积和该图形绕 x 轴旋转一周所得旋转体体积.

解: 两曲线在第一象限交点为 $\left(\frac{\pi}{2},1\right)$.

所求面积为 $S=\int_0^{\pi/2}\left(\sin x-\frac{2}{\pi}x\right)\mathrm{d}x$　（1 分）

$=\left(-\cos x-\frac{1}{\pi}x^2\right)\Big|_0^{\pi/2}=1-\frac{\pi}{4}.$　（1 分）

所求体积为 $V=\pi\int_0^{\pi/2}\left(\sin^2x-\frac{4}{\pi^2}x^2\right)\mathrm{d}x$　（2 分）

$=\frac{\pi}{2}\int_0^{\pi/2}(1-\cos 2x)\,\mathrm{d}x-\frac{4}{\pi}\int_0^{\pi/2}x^2\,\mathrm{d}x$

$=\frac{\pi}{2}\left(x-\frac{1}{2}\sin 2x\right)\Big|_0^{\pi/2}-\frac{4}{3\pi}x^3\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}=\frac{\pi^2}{4}-\frac{\pi^2}{6}=\frac{\pi^2}{12}.$　（2 分）

得　分	

评卷人	

四. 解答题（每小题 8 分，共 16 分）

14. (1)证明: 若函数 f 在 $(\mathbf{0},+\infty)$ 上有界且一致连续, 则 f^2 在 $(\mathbf{0},+\infty)$ 上也一致连续.
(2) 举例说明: 存在 $(\mathbf{0},+\infty)$ 上的无界连续函数 f, 满足 f^2 在 $(\mathbf{0},+\infty)$ 上一致连续.

(1) **证:** 由 f 有界得存在 $M>0$ 使得对任意 $x>0$, 有 $|f(x)|\le M$. （1 分）
由 f 一致连续得 $\forall\,\varepsilon>0, \exists\,\delta>0, \text{s.t. } \forall\, x,y>0$ 且 $|x-y|<\delta$ 有

$$|f(x)-f(y)|<\frac{\varepsilon}{2M}. \qquad (2\text{ 分})$$

故对上述 ε 和 δ, 当 $x,y>0$ 且 $|x-y|<\delta$ 时, 有

$$\left|f^2(x)-f^2(y)\right|=|f(x)+f(y)|\cdot|f(x)-f(y)|$$

$$\le(|f(x)|+|f(y)|)\cdot|f(x)-f(y)|\le 2M\cdot\frac{\varepsilon}{2M}=\varepsilon. \quad (2\text{ 分})$$

(2) 例如函数 $f(x)=\sqrt{x}, x>0$. （2 分）
易知 $f(x)$ 无界且连续, 且 $f^2(x)=x$ 为 Lipschitz 函数从而一致连续. （1 分）

注: 例子不唯一, 比如: $f(x)=\sqrt{ax+b}\ (a>0, b\ge 0)$.

$f(x)=(ax+b)^\alpha\ (a>0, b\ge 0,\ 0<\alpha\le 1/2\ )$. $f(x)=\ln(1+x)$ 等.

15. (1) 判断反常积分$\int_0^{\pi/2}\ln(\cos x)\mathrm{d}x$的收敛性, 若收敛则求其值, 若发散, 请说明理由.

(2) 确定 p 的范围, 使反常积分 $\int_1^{+\infty}\frac{x}{x^2+2023}\ln\left(1+\frac{1}{x^p}\right)\mathrm{d}x$ 收敛，并说明理由.

解: (1) 取 $\alpha\in(0,1)$. 因为 $\lim\limits_{x\to(\pi/2)^-}(\pi/2-x)^\alpha|\ln(\cos x)|=-\lim\limits_{t\to 0^+}t^\alpha\ln(\sin t)$

$$=-\lim_{t\to 0^+}\frac{\ln(\sin t)}{t^{-\alpha}}=\frac{1}{\alpha}\lim_{t\to 0^+}\frac{t^{\alpha+1}}{\sin t}=0.$$

由 Cauchy 判别法得 $\int_0^{\pi/2}\ln(\cos x)\mathrm{d}x$ 收敛. （2 分）

令$A=\int_0^{\pi/2}\ln(\cos x)\mathrm{d}x$, 则

$$A=\int_0^{\pi/2}\ln(\cos x)\mathrm{d}x=\int_0^{\pi/2}\ln(\sin x)\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\int_0^{\pi/2}\ln(\frac{1}{2}\sin 2x)\mathrm{d}x$$

$$=-\frac{\pi\ln 2}{4}+\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\ln(\sin 2x)\,\mathrm{d}x=-\frac{\pi\ln 2}{4}+\frac{1}{4}\int_0^{\pi}\ln(\sin x)\,\mathrm{d}x$$

$$=-\frac{\pi\ln 2}{4}+\frac{1}{2}\int_0^{\pi/2}\ln(\sin x)\,\mathrm{d}x$$

$$=-\frac{\pi\ln 2}{4}+\frac{1}{2}A. \quad \text{故得 } A=-\frac{\pi\ln 2}{2}. \qquad (2\text{ 分})$$

(2) (i)若 $p>0$：当 $x\to+\infty$ 时，$\frac{x}{x^2+2023}\ln\left(1+\frac{1}{x^p}\right)\sim\frac{1}{x}\cdot\frac{1}{x^p}\sim\frac{1}{x^{p+1}}$.

由 Cauchy 判别法得此时$\int_1^{+\infty}\frac{x}{x^2+2023}\ln\left(1+\frac{1}{x^p}\right)\mathrm{d}x$ 收敛. (3 分)

(ii)若 $p\le 0$：易知 $\frac{x}{x^2+2023}\ln\left(1+\frac{1}{x^p}\right)\ge\ln 2\frac{x}{x^2+2023}, x\ge 1$.

而 $\int_1^{+\infty}\frac{x}{x^2+2023}\mathrm{d}x$ 发散，故此时$\int_1^{+\infty}\frac{x}{x^2+2023}\ln\left(1+\frac{1}{x^p}\right)\mathrm{d}x$ 发散. (1 分)

故使得原积分收敛的 p 的范围是 $p>0$.

注： 情形(ii)也可分 $p=0$ 和 $p<0$ 讨论，注意 $p=0$ 时等价关系为

$$\frac{x}{x^2+2023}\ln\left(1+\frac{1}{x^p}\right)\sim\frac{1}{x}\ln 2\ (x\to+\infty).$$

得　分	
评卷人	

五. 证明题（每小题 8 分，共 24 分）

16. (1) 设函数 f,g 在区间 $[a,b]$ 上 n 阶可导，$f^{(k)}(a)=g^{(k)}(a), k=0,1,2,\cdots,n-1$，且 $f^{(n)}(x)=g^{(n)}(x)=0,\ \forall\, x\in[a,b]$. 证明 $f(x)=g(x),\ \forall\, x\in[a,b]$.

(2) 设函数 f 在 x_0 某邻域内有定义且在 x_0 可导，实数 a,b,c 满足 $a+b+c=0, a+2b+3c=0$.

证明 $\lim\limits_{h\to0}\frac{1}{h}[af(x_0+h)+bf(x_0+2h)+cf(x_0+3h)]=0$.

证明：(1)

方法一：由 Taylor 公式得$\forall\, x\in[a,b]$，$\exists\,\xi_x,\eta_x\in(a,x)$，使得

$$f(x)=f(a)+f'(a)(x-a)+\frac{f''(a)}{2}(x-a)^2+\cdots+\frac{f^{(n-1)}(a)}{(n-1)!}(x-a)^{n-1}+\frac{1}{n!}f^{(n)}(\xi_x)(x-a)^n.$$

$$g(x)=g(a)+g'(a)(x-a)+\frac{g''(a)}{2}(x-a)^2+\cdots+\frac{g^{(n-1)}(a)}{(n-1)!}(x-a)^{n-1}+\frac{1}{n!}g^{(n)}(\eta_x)(x-a)^n.$$

(3 分)

代入条件 $f^{(k)}(a)=g^{(k)}(a), k=0,1,2,\cdots,n-1$ 和 $f^{(n)}(x)=g^{(n)}(x)\equiv 0$ 可得

$$f(x)=g(x),\ \forall\, x\in[a,b]. \qquad (1 分)$$

方法二：对 $h(x)=f(x)-g(x)$ 在点 a 处作 Taylor 展开去证明 $h(x)\equiv 0$.

方法三：令 $h(x)=f(x)-g(x)$. 则 $h^{(n)}(x)=0,\ \forall\, x\in[a,b]$. 故 $h(x)$ 为一$(n-1)$次多项式.

不妨设 $h(x)=b_0+b_1(x-a)+b_2(x-a)^2+\cdots+b_{n-1}(x-a)^{n-1}$. (2 分)

注意到 $b_k=\frac{h^{(k)}(a)}{k!}=0$，$k=0,1,2,\cdots,n-1$，故 $h(x)\equiv 0$，此即 $f(x)\equiv g(x)$. (2 分)

(2) 方法一: 由 Taylor 公式得

$$f(x_0+h)=f(x_0)+f'(x_0)h+o(h)\ (h\to 0),$$

$$f(x_0+2h)=f(x_0)+2f'(x_0)h+o(h)\ (h\to 0),$$

$$f(x_0+3h)=f(x_0)+3f'(x_0)h+o(h)\ (h\to 0).\qquad (2\text{ 分})$$

由上式和已知条件$a+b+c=0, a+2b+3c=0$ 得

$$af(x_0+h)+bf(x_0+2h)+cf(x_0+3h)=o(h)\ (h\to 0).\qquad (1\text{ 分})$$

故 $\lim\limits_{h\to 0}\frac{1}{h}[af(x_0+h)+bf(x_0+2h)+cf(x_0+3h)]=\lim\limits_{h\to 0}\frac{o(h)}{h}=0.$　　(1 分)

方法二: $\lim\limits_{h\to 0}\frac{1}{h}[af(x_0+h)+bf(x_0+2h)+cf(x_0+3h)]$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{1}{h}[af(x_0+h)+bf(x_0+2h)+cf(x_0+3h)-(a+b+c)f(x_0)]$$

$$=a\lim_{h\to 0}\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}+2b\lim_{h\to 0}\frac{f(x_0+2h)-f(x_0)}{2h}+3c\lim_{h\to 0}\frac{f(x_0+3h)-f(x_0)}{3h}\qquad (2\text{ 分})$$

$$=af'(x_0)+2bf'(x_0)+3cf'(x_0)=0.\qquad (2\text{ 分})$$

17. 设函数 f 在 $\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$ 上一阶可导, 且满足 $\int_0^{\pi/2}f(x)\sin x\,\mathrm{d}x=1$. 证明:

(1) 存在 $\xi\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$ 使得 $f(\xi)=1$.

(2) 存在 $\eta\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$ 使得 $f'(\eta)\cos\eta=(f(\eta)-1)\sin\eta$.

证明: (1) 由推广的积分第一中值定理, 存在 $\xi\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$ 使得

$$1=\int_0^{\pi/2}f(x)\sin x\,\mathrm{d}x=f(\xi)\int_0^{\pi/2}\sin x\,\mathrm{d}x=f(\xi).\qquad (3\text{ 分})$$

(2) 令 $F(x)=(f(x)-1)\cos x, x\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$.　　(2 分)

由第(1)问结论知 $F(\xi)=0$. 此外, $F\left(\frac{\pi}{2}\right)=0$.　(1 分)

由罗尔中值定理得存在 $\eta\in\left(\xi,\frac{\pi}{2}\right)$ 使

$0=F'(\eta)=f'(\eta)\cos\eta-(f(\eta)-1)\sin\eta$. 因此结论成立.　(2 分)

18. (1) 设函数 f,g 在区间 $[a,b]$ 上黎曼可积，证明 Cauchy-Schwarz 不等式:

$$\left(\int_a^b f(x)g(x)dx\right)^2 \le \left(\int_a^b f^2(x)dx\right)\left(\int_a^b g^2(x)dx\right).$$

(2) 设函数 f 在 $[0,1]$ 上连续，证明:

$$\int_0^1 \left[\int_0^x f(u)\mathrm{d}u\right]^2 \mathrm{d}x \le \frac{1}{2}\int_0^1 (1-x^2)\, f^2(x)dx.$$

证明：方法一:

对任意 $t\in\mathbf{R}$, $t^2f^2(x)+2tf(x)g(x)+g^2(x)=(tf(x)+g(x))^2\ge 0, x\in[a,b]$.

由定积分的保序性得对任意 $t\in\mathbf{R}$,

$$t^2\int_a^b f^2(x)\mathrm{d}x+2t\int_a^b f(x)g(x)\mathrm{d}x+\int_a^b g^2(x)\mathrm{d}x\ge 0. \qquad (2\text{ 分})$$

因此，上式左端关于 t 的一元二次函数的判别式 $\Delta\le 0$，即

$$\Delta=4\left(\int_a^b f(x)g(x)dx\right)^2-4\left(\int_a^b f^2(x)dx\right)\left(\int_a^b g^2(x)dx\right)\le 0. \qquad (2\text{ 分})$$

整理即得结论.

方法二: 将区间 $[a,b]$ 作 n 等分，分点为 $x_i=a+\frac{i}{n}(b-a), i=0,1,\cdots,n$.

由已知条件知 f^2,g^2,fg 均在$[a,b]$ 上黎曼可积，于是由定积分定义和离散的 Cauchy 不等式得

$$\left(\int_a^b f(x)g(x)dx\right)^2=\left(\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^n f(x_i)g(x_i)\frac{b-a}{n}\right)^2=\lim_{n\to\infty}\left(\sum_{i=1}^n f(x_i)g(x_i)\frac{b-a}{n}\right)^2 \qquad (2\text{ 分})$$

$$\le\lim_{n\to\infty}\left(\sum_{i=1}^n f^2(x_i)\frac{b-a}{n}\right)\left(\sum_{i=1}^n g^2(x_i)\frac{b-a}{n}\right)=\left(\int_a^b f^2(x)dx\right)\left(\int_a^b g^2(x)dx\right). \qquad (2\text{ 分})$$

(2) 由(1)得 $\left[\int_0^x f(u)\mathrm{d}u\right]^2\le x\int_0^x f^2(u)\,du, \forall\, x\in[0,1]$. (2 分)

再由分部积分公式得

$$\int_0^1\left[\int_0^x f(u)\mathrm{d}u\right]^2\mathrm{d}x\le\int_0^1\left[x\int_0^x f^2(u)\,du\right]\mathrm{d}x=\frac{1}{2}x^2\int_0^x f^2(u)\,du\Big|_0^1-\frac{1}{2}\int_0^1 x^2f^2(x)\mathrm{d}x$$

$$=\frac{1}{2}\int_0^1 f^2(u)\,du-\frac{1}{2}\int_0^1 x^2f^2(x)\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\int_0^1(1-x^2)\,f^2(x)dx. \ (2\text{ 分})$$