

华中科技大学 2023~2024 学年第一学期

“微积分（一）”考试试卷(A 卷)

一、单项选择题（每小题 3 分，6 个小题共 18 分，将结果涂在答题卡上。）

1. 下列函数在其定义域上无界的是【 】

- A.  $x^2 D(x)$  ( $D(x)$  为迪尼克雷函数)    B.  $\tan(\sin x)$     C.  $\frac{\sin x}{x}$     D. 符号函数  $\operatorname{sgn}(x)$

2. 曲线  $y = \frac{1}{x} + \ln(1 + e^x)$  的斜渐近线为【 】

- A.  $y = -x$     B.  $y = -x + 1$     C.  $y = x$     D.  $y = x + 1$

3. 通解为  $y = (C_1 + C_2 x)e^x + x$  (其中  $C_1, C_2$  为任意常数) 的微分方程是【 】.

- A.  $y'' - y' = 1$     B.  $y'' - y = 0$     C.  $y'' - 2y' + y = e^x$     D.  $y'' - 2y' + y = x - 2$ .

4. 设  $f(x)$  在  $x = x_0$  的某个邻域内有定义, 则下列命题

- ①若  $f'(x_0)$  存在, 则  $f(x)$  在  $x = x_0$  连续.  
②若  $f'_+(x_0), f'_-(x_0)$  都存在, 则  $f(x)$  在  $x = x_0$  连续.  
③若  $\lim_{x \rightarrow x_0^+} f'(x), \lim_{x \rightarrow x_0^-} f'(x)$  都存在, 则  $f(x)$  在  $x = x_0$  连续.

其中正确的个数是【 】.

- A. 1    B. 2    C. 3    D. 0

5. 设  $f(x)$  在  $x = 1$  的某邻域内连续, 且  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(f(x+1) + e^{x^2})}{x^2} = 2$ , 则  $x = 1$  是  $f(x)$  的【 】.

- A. 驻点且为极大值点    B. 驻点且为极小值点  
C. 不可导点    D. 可导点但不是驻点

6. 设  $M = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^4 x \sin^3 x dx, N = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} (\cos^3 x + \sin^3 x) dx, P = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} (x \cos x - \sin^2 x) dx$ , 则【 】

- A.  $M > N > P$     B.  $N > P > M$     C.  $N > M > P$     D.  $M > P > N$

二、填空题（每小题 4 分，4 个小题共 16 分，将计算结果写在答题卡上。）

7. 设曲线  $y = f(x)$  与  $y = x^2 - x + 1$  在点  $(2, 3)$  处有公共切线, 则  $\lim_{n \rightarrow \infty} n(f(2 - \frac{1}{n}) - 3) = \underline{\hspace{2cm}}$ .

8.  $y = f(x)$  满足  $y' = (1-y)y^\alpha (\alpha > 0)$ , 若曲线  $y = f(x)$  的一个拐点为  $(t, \frac{1}{2})$ , 则  $\alpha = \underline{\hspace{2cm}}$ .

9. 已知  $f(x)$  的一个原函数是  $e^{-x}$ , 则  $\int_{-\frac{1}{2}}^0 xf(2x)dx = \underline{\hspace{2cm}}$ .

10. 位于曲线  $y = xe^{-x} (0 \leq x < +\infty)$  下方、 $x$  轴上方的无界图形的面积为  $\underline{\hspace{2cm}}$ .

### 三、计算题 (每小题 7 分, 6 个小题共 42 分, 必须写出主要计算过程.)

11. 设  $y = y(x)$  由方程  $e^y + 6xy + x^2 - 1 = 0$  确定, 求  $y'(0)$ ,  $y''(0)$ .

12. 设  $f(x) = e^x \ln(1+x) - x(1 + \frac{1}{2}x)$ , 当  $x \rightarrow 0$  时, 求  $f(x)$  的主部及阶数.

13. 求极限  $l = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{\sin x}}{x \sin x^2} \int_0^x \sin(x-t)^2 dt$ .

14. 求极限  $l = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \left[ \ln(1 + \frac{1}{n}) + \ln(1 + \frac{2}{n}) + \cdots + \ln(1 + \frac{n}{n}) \right]$ .

15. 设  $f(x) = \int_0^x \frac{\sin t}{1-t} dt$ , 求  $I = \int_0^1 (x-1)f(x)dx$ .

16. 若曲线  $y = f(x)$  是  $y'' + 2y' - 3y = 4e^x$  的一条积分曲线, 此曲线过点  $A(0,1)$ , 且在点  $A(0,1)$  处的切线的倾斜角为  $\frac{3\pi}{4}$ , 求  $f(x)$ .

### 四. 综合题 (每小题 7 分, 2 个小题共 14 分, 必须写出主要过程.)

17. 设  $f(x)$  在  $(-\infty, +\infty)$  上可导, 其反函数存在为  $g(x)$ , 若

$$\int_0^{f(x)} g(t)dt + \int_0^x f(t)dt = xe^x - e^x + 1, \text{ 求 } f(x).$$

18. 设函数  $f(x) = ax + \frac{3}{2}bx^2$  在区间  $(0,1)$  内大于零, 其中  $a, b$  为未知常数, 曲线  $y = f(x)$  与直线  $x=1, y=0$  所围成的区域  $D$  的面积为 2. 求  $a, b$  的值, 使得  $D$  绕  $x$  轴旋转一周得到的旋转体的体积最小, 并求出最小值.

### 五. 证明题 (每小题 5 分, 2 个小题共 10 分, 必须写出主要过程.)

19. 设函数  $f(x)$ 、 $g(x)$  在区间  $[0, a]$  上连续且单调增加, 其中  $a > 0$ . 证明

$$a \int_0^a f(x)g(x)dx \geq \int_0^a f(x)dx \int_0^a g(x)dx.$$

20. 设  $f(x)$  在  $[a, b]$  上有二阶导数, 且  $f'(a) = f'(b) = 0$ , 证明: 存在  $\xi \in (a, b)$ , 使得

$$(b-a)^2 |f''(\xi)| \geq 4 |f(b) - f(a)|.$$