

Relatório Parcial Iniciação Científica (USP)

Título: O Problema do Caixeiro Viajante: Modelos e Aplicações

Bolsista: Gabriel Sanches da Silva - N.USP: 11884693

Orientadora: Franklina M. B. Toledo

Período do Relatório:

1 Introdução

O Problema do Caixeiro Viajante (PCV) (em inglês, *Travelling Salesman Problem (TSP)*) é um problema muito estudado até os dias de hoje. Ele tem como objetivo encontrar o melhor caminho para que um caixeiro viajante visite um conjunto de cidades, passando em cada uma delas uma única vez, e retornando a cidade inicial. Este problema pode ser representado pelo modelo a seguir.

$$\text{minimizar } \sum_{i=0}^n \sum_{j=0, j \neq i}^n c_{ij} x_{ij} \quad (1)$$

$$\text{sujeito a } \sum_{i=0, i \neq j}^n x_{ij} = 1 \quad j = 0, \dots, n \quad (2)$$

$$\sum_{j=0, j \neq i}^n x_{ji} = 1 \quad i = 0, \dots, n \quad (3)$$

$$x_{ij} \in \{0, 1\} \quad i, j = 0, \dots, n \quad (4)$$

Em (1), definimos nossa função objetivo, que, neste caso, é dada pela soma de cada caminho escolhido multiplicado pelo seu respectivo custo. Ou seja, cada caminho possui um custo, ou distância, e queremos minimizar a soma dos mesmos. As restrições (2) e (3) são responsáveis por garantir que um nó, ou cidade, possua apenas uma via de entrada e uma via de saída, para evitar que voltemos na mesma cidade mais de uma vez, e para garantir que todas as cidades sejam visitadas. Por fim, (4) define o domínio das variáveis, e, como o problema trata de caminhos utilizados, os únicos valores possíveis são 0 (para que um caminho não utilizado não seja contabilizado) e 1 (para que um caminho utilizado seja contabilizado).

Contudo, apenas com esta modelagem, nada impede de a melhor solução encontrada tenha subciclos. Isto é, a solução não precisa ser um ciclo contendo todas os nós, poderiam haver subciclos que não se interligam, como ilustra a Figura 1.

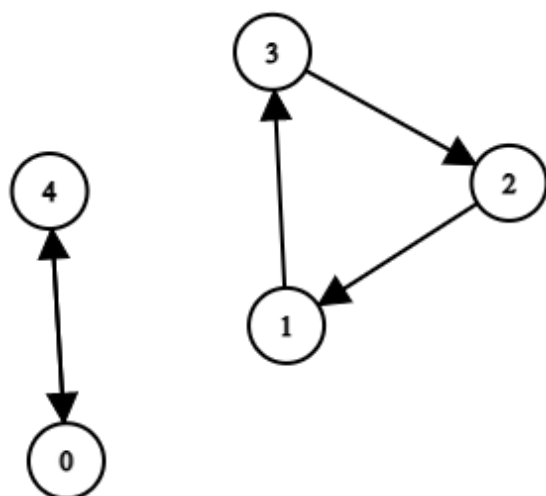


Figura 1: Solução com Subciclos

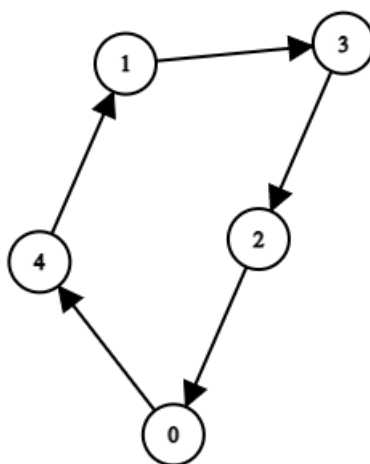


Figura 2: Solução Factível

Quando aplicado na realidade, uma solução como indicada na Figura 1 se mostra impraticável, pois não há maneira de sair de um nó e ir para o outro sem fazer o caminho entre eles.

Para tanto, diversos modelos e métodos de resolução foram desenvolvidos para resolver este problema. Nesta Iniciação Científica, foram utilizados três modelos matemáticos como objeto de estudo para compreender o problema e as diferentes abordagens usadas na literatura.

2 Abordagem utilizada

Na literatura, existem diversos modelos matemáticos proposto para o PCV. Dentre eles, três foram escolhidos para o desenvolvimento deste projeto: o modelo de Dantzig et al. [1954] (DFJ), de Miller et al. [1960] (MTZ), e de Desrochers and Laporte [1991] (DL). Cada um adiciona novas restrições ao modelo (1)-(4) para evitar a criação de subciclos, visando acelerar a busca por uma solução ótima. Estes modelos são descritos a seguir.

2.1 Modelo de Dantzig-Fulkerson-Johnson

O primeiro modelo estudado foi o modelo DFJ, proposto por Dantzig, Fulkerson e Johnson [1954]. Esta formulação consiste em proibir todos os subciclos, como descrito na restrição (5).

$$\begin{aligned} \text{(DFJ) minimizar } & \sum_{i=0}^n \sum_{j \neq i, j=0}^n c_{ij} x_{ij} \\ \text{sujeito a } & (2) - (3) \\ & \sum_{i,j \in S} x_{ij} \leq |S| - 1 \quad S \subseteq \{2, \dots, n\}, \quad 2 \leq |S| \leq n - 1, \quad (5) \\ & x_{ij} \in \{0, 1\}, \quad i, j = 0, \dots, n \end{aligned}$$

Como existe um número exponencial de restrições (5), uma estratégia utilizada para resolver uma instância utilizando o modelo DFJ é, inicialmente, resolver o problema sem estas restrições de subciclo. Em seguida, os subciclos são adicionados, como restrições, ao problema, à medida que uma solução ótima com subciclos é encontrada. Em outras palavras, após uma solução ter sido obtida, verifica-se a presença de subciclos e, se os mesmos forem encontrados, novas restrições são adicionadas ao modelo para que aquele subciclo não se repita. Feito isso, uma nova solução é obtida, e o algoritmo se repete até que uma solução ótima sem subciclos seja encontrada.

Para verificar a existência de subciclos, é utilizada a cardinalidade do conjunto de nós S . Este conjunto é constituído pelos nós de um subciclo encontrado na solução, e, através de sua cardinalidade, ou seja, o número de nós que o compõe, podemos restringir que o mesmo aconteça.

Na visão do computador, o que ocorre é uma soma de somas onde certos nós receberão o valor 1. Se esta soma for maior que a cardinalidade do subciclo S menos 1, então o subciclo S não compõe todos os nós do nosso conjunto, ou seja, os nós escolhidos

formaram um subciclo. Com isso, uma nova restrição é adicionada para que os nós não possam ser escolhidos novamente como o subciclo encontrado.

Ao longo do estudo do modelo base, também foram adicionados dois conjuntos de restrições visando acelerar a busca por uma solução ótima. Inicialmente, foram adicionadas ao modelo as restrições que proíbem subciclos com duas e três cidades. Testes computacionais foram realizados para verificar se é vantajosa essa inclusão.

2.2 Modelo de Miller-Tucker-Zemlin

O segundo modelo estudado utiliza uma estratégia diferente para proibir subciclos. Na modelagem de Miller, Tucker e Zemlin [1960], as restrições que proíbem subciclos são descritas como definido a seguir.

$$\begin{aligned}
 \text{(MTZ) minimizar } & \sum_{i=0}^n \sum_{j \neq i, j=0}^n c_{ij} x_{ij} \\
 \text{sujeito a } & (2) - (3) \\
 & u_i - u_j + (n-1)x_{ij} \leq n-2 \quad i, j = 0, \dots, n \quad (6) \\
 & 1 \leq u_i \leq n-1 \quad i = 2, \dots, n \quad (7) \\
 & x_{ij} \in \{0, 1\} \quad i, j = 0, \dots, n
 \end{aligned}$$

A ideia das restrições (6) e (7) é associar pesos aos nós de forma que, se um caminho indica que o caixeiro viajante sai do nó i e vai para o nó j , então o valor do nó j (u_j) é maior que o valor do nó i (u_i). Desta forma, não é possível ter um subciclo. De uma maneira simplificada, é como uma contagem iniciando-se do zero: conta-se $0, 1, 2, \dots, n$, então não poderia haver duas sequência como $0, 1, 2, 0$ e $3, 4, 5, 3$; o modelo obriga que haja uma sequência de 0 a 5 .

Este modelo tem um número polinomial de restrições, logo é possível escrevê-lo mesmo para instâncias com um número grande de nós.

2.3 Modelo de Desrochers-Laporte

O terceiro modelo estudado foi proposto por Desrochers e Laporte [1991]. Os autores propuseram uma melhoria do modelo de Miller et al. [1960]. Este modelo é descrito a seguir.

$$\begin{aligned}
& \text{(DL) minimizar } \sum_{i=0}^n \sum_{j \neq i, j=0}^n c_{ij} x_{ij} \\
& \text{sujeito a (2) - (3)} \\
& u_i - u_j + (n-1)x_{ij} + (n-3)x_{ji} \leq n-2 \quad i, j = 0, \dots, n \quad (8) \\
& 1 + (n-3)x_{i1} + \sum_{j=2}^n x_{ji} \leq u_i \quad i = 2, \dots, n \quad (9) \\
& u_i \leq n-1 - (n-3)x_{1i} - \sum_{j=2}^n x_{ij} \quad i = 2, \dots, n \quad (10) \\
& x_{ij} \in \{0, 1\} \quad i, j = 0, \dots, n
\end{aligned}$$

Foi comprovado que as restrições (8), (9) e (10) são equivalentes às restrições (6) e (7), no entanto são mais fortes.

3 Experimentos Computacionais Iniciais

Testes computacionais iniciais foram realizados para avaliar o desempenho dos modelos. Três instâncias da literatura foram utilizadas para uma análise inicial dos modelos. As instâncias escolhidas foram wi29, dj38, qa194 obtidas no site da Universidade de Waterloo sobre o Problema do Caixeiro Viajante (de Waterloo [2013]).

Nas Tabelas 1 - 3, são apresentados os resultados obtidos considerando o modelo de Dantzig-Fulkerson-Johnson sem a adição das restrições de subciclo, com as restrições de subciclos para dois nós, e, por fim, de três nós, respectivamente. Como podemos observar, os resultados foram muito semelhantes.

Os resultados obtidos utilizando o modelo MTZ e o modelo DL são apresentados nas Tabelas 4 e 5. Como podemos observar, os melhores resultados foram obtidos para o modelo DL.

Tabela 1: Resultados obtidos considerando o modelo DFJ.

Instância	Melhor Solução	Limitante Inferior	GAP	Tempo (s)
wi29	27.603	27.603	0	< 1
dj38	6.656	6.656	0	< 1
qa194	—	9.301	—	1.800

Tabela 2: Resultados obtidos considerando o modelo DFJ2.

Instância	Melhor Solução	Limitante Inferior	GAP	Tempo (s)
wi29	27.603	27.603	0	< 1
dj38	6.656	6.656	0	< 1
qa194	–	9.301	–	1.800

Tabela 3: Resultados obtidos considerando o modelo DFJ23.

Instância	Melhor Solução	Limitante Inferior	GAP	Tempo (s)
wi29	27.603	27.603	0	< 1
dj38	6.656	6.656	0	< 1
qa194	–	9.301	–	1.800

Tabela 4: Resultados obtidos considerando o modelo MTZ.

Instância	Melhor Solução	Limitante Inferior	GAP	Tempo (s)
wi29	27.603	27.603	0	< 1
dj38	6.656	6.656	0	< 1
qa194	10.336	–	–	1.800

Tabela 5: Resultados obtidos considerando o modelo DL.

Instância	Melhor Solução	Limitante Inferior	GAP	Tempo (s)
wi29	27.603	27.603	0	< 1
dj38	6.656	6.656	0	< 1
qa194	9352	9.352	0	571

4 Cronograma e Próximos Passos

O cronograma inicial do projeto era composto por oito tarefas, descritas abaixo. Na Tabela 6, em vermelho indicamos o que foi executado até o momento e, em preto, indicamos os próximos passos.

Tarefa 1: Revisão bibliográfica: nesta tarefa, vamos aprofundar e manter atualizada a revisão bibliográfica sobre o problema estudado.

Tarefa 2: Estudo do problema do caixeiro viajante assimétrico: nesta etapa, será

estudado o problema e modelos da literatura para representá-lo.

Tarefa 3: Estudo de uma linguagem de modelagem para representar os modelos.

Tarefa 4: Experimentos computacionais com os modelos escolhidos utilizando software de otimização não-comercial. Pretendemos desta forma determinar a dimensão das instâncias-teste que podem ser tratadas utilizando cada uma das abordagens estudadas.

Tarefa 5: Redação de textos: relatório e resumo para congresso.

Tabela 6: Cronograma de atividades.

	2022			2023		
	Ago/Set	Out/Nov	Dez/Jan	Fev/Mar	Abr/Mai	Jun/Jul
Tarefa 1	x	x	x	x	x	x
Tarefa 2	x	x				
Tarefa 3		x	x	x		
Tarefa 4			x	x	x	
Tarefa 5		x	x	x	x	x

Referências

G. Dantzig, R. Fulkerson, and S. Johnson. Solution of a large-scale traveling-salesman problem. *Journal of the Operations Research Society of America*, 2(4):393–410, 1954.

Universidade de Waterloo. World TSP. www.math.uwaterloo.ca/tsp/world/countries.html, 2013.

Martin Desrochers and Gilbert Laporte. Improvements and extensions to the miller-tucker-zemlin subtour elimination constraints. *Operations Research Letters*, 10(1): 27–36, 1991.

C. E. Miller, A. W. Tucker, and R. A. Zemlin. Integer programming formulation of traveling salesman problems. *J. ACM*, 7(4):326–329, 1960.