

Матричные вычисления

По лекциям Максима Рахубы

Содержание

1	О курсе	2
2	Основы матричного анализа	2
2.1	Векторные нормы	2
2.1.1	Разреженность в L1-норме	2
2.1.2	Скалярное произведение	3
2.1.3	Унитарная инвариантность L2-нормы	3
2.2	Матричные нормы	3
2.3	Разложение Шура	4
2.4	Нормальные матрицы	5
3	Малоранговое приближение матриц	5
3.1	Разделение переменных и скелетное разложение	5
3.2	SVD	6
3.3	Ортопроектор	7
3.4	Простейший рандомизированный алгоритм	8

1 О курсе

Большую часть сказанного можно найти в [ВИКИ](#).

Правда, кроме указанных на вики источников, было упомянуто ещё два:

1. Gilbert (неразборчиво) — Matrix Methods in Data Science (скорее всего, Gilbert Strang — Matrix Methods in Data Analysis, Signal Processing, and Machine Learning)
2. [Ivan Oseledets @ github](#). Скорее всего, имеются в виду репозитории с названиями pla20XX.

2 Основы матричного анализа

2.1 Векторные нормы

Определение 2.1. Векторная норма — функция $f : \mathbb{F}^n \rightarrow \mathbb{R}$ такая, что:

- $f(x) \geq 0$; $f(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$;
- $f(\alpha x) = |\alpha| f(x)$;
- $f(x + y) \leq f(x) + f(y)$.

Обозначается $\|x\|$.

Примеры:

- L_1 -норма (Единичная окружность — ромб, TODO: нарисовать):

$$\|x\|_1 = \sum_{i=1}^n |x_i|$$

- L_2 -норма (Единичная окружность — окружность):

$$\|x\|_2 = \sqrt{\sum_{i=1}^n |x_i|^2} = \sqrt{x^* x}$$

- A -норма:

$$\|x\|_A = \sqrt{x^* A x}, \quad A = A^*, \quad \forall x \neq 0 : x^* A x > 0$$

- L_∞ -норма (Единичная окружность — квадрат):

$$\|x\|_\infty = \max_{1 \leq i \leq n} |x_i|$$

- L_p -норма:

$$\|x\|_p = \left(\sum_{i=1}^n |x_i|^p \right)^{1/p}, \quad p \geq 1.$$

2.1.1 Разреженность в L_1 -норме

$$Ax = b, \quad A \in \mathbb{R}^{m \times n}, \quad m < n$$

Минимизируем x по L_2 - и L_1 -норме, в случае L_1 получим **разреженное** решение (с большим кол-вом нулей) (TODO: нарисовать).

2.1.2 Скалярное произведение

Определение 2.2. Скалярное произведение $(x, y) = x^*y$.

Теорема 2.1. (Неравенство Коши-Буняковского-Шварца).

$$|(x, y)| \leq \|x\| \cdot \|y\|.$$

Теорема 2.2. (Неравенство Гёльдера).

$$|(x, y)| \leq \|x\|_p \cdot \|y\|_q \Leftrightarrow \begin{cases} p, q \geq 1; \\ \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1. \end{cases}$$

2.1.3 Унитарная инвариантность L2-нормы

Определение 2.3. Унитарная матрица U — $U \in \mathbb{C}^{n \times n}$:

$$U^{-1} = U^* \quad (\Leftrightarrow I = U^*U = UU^*)$$

Утверждение 2.1. Если U — унитарная матрица, то $\|Ux\|_2 = \|x\|_2$.

Доказательство.

$$\|Ux\|_2 = \sqrt{(Ux)^*Ux} = \sqrt{x^*U^*Ux} = \sqrt{x^*x} = \|x\|_2.$$

□

2.2 Матричные нормы

Определение 2.4. Норма $\|\cdot\|$ называется матричной, если

1. $\|\cdot\|$ — векторная норма на пространстве матриц;
2. $\|AB\| \leq \|A\| \cdot \|B\|$ (субмультипликативность).

Примеры:

- Норма Фробениуса:

$$\|A\|_F = \sqrt{\sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n |a_{ij}|^2} = \sqrt{\text{trace}(A^*A)}.$$

- Операторные нормы. Если $\|\cdot\|_*$, $\|\cdot\|_{**}$ — векторные нормы, то соответствующей им операторной нормой будет

$$\|A\|_{*,**} = \sup_{x \neq 0} \frac{\|Ax\|_*}{\|x\|_{**}} = \sup_{\|y\|_{**}=1} \|Ay\|_*.$$

- Например, операторной нормой, соответствующей L_2 -норме, является

$$\|A\|_2 = \sqrt{\lambda_{\max}(A^*A)} = \sigma_1(A).$$

Утверждение 2.2. Для любой матрицы A и для любых унитарных матриц U, V верно

$$\begin{aligned} \|UAV\|_F &= \|A\|_F \\ \|UAV\|_2 &= \|A\|_2 \end{aligned}$$

Доказательство. Для $\|\cdot\|_2$:

$$\|UAV\|_2 = \sup_{x \neq 0} \frac{\|UAVx\|_2}{\|x\|_2} = \sup_{x \neq 0} \frac{\|U^*(UAVx)\|_2}{\|Vx\|_2}$$

Заменим Vx на y . В силу обратимости V это будет равно

$$\sup_{y \neq 0} \frac{\|Ay\|_2}{\|y\|_2} = \|A\|_2.$$

□

2.3 Разложение Шура

Собственное разложение (существует не всегда):

$$A = S\Lambda S^{-1}, \quad \Lambda = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$$

Жорданова форма (всегда существует, но неустойчива при вычислениях):

$$A = PJP^{-1}$$

Для вычислений используют разложение Шура.

Теорема 2.3. (О разложении Шура)

Для всякой $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$ существуют такие унитарная U и верхнетреугольная T , что $A = UTU^*$.

Доказательство. Индукцией по размерности A .

База. $n = 1$: $U = I$, $T = A$.

Переход. $(n - 1) \rightarrow n$.

Т.к. \mathbb{C} алгебраически замкнуто, у характеристического многочлена A есть хотя бы один корень, т.е. у A есть хотя бы одно собственное значение λ_1 , т.е. всегда найдётся хотя бы один ненулевой собственный вектор v_1 единичной длины.

Дополним v_1 до ортонормированного базиса v_1, \dots, v_n и положим $U_1 = (v_1 | \dots | v_n)$.

v_1 — собственный вектор, так что $Av_1 = \lambda_1 v_1$. Тогда, в силу ортогональности v_i и v_j ,

$$v_i^* A v_1 = \begin{cases} \lambda, & i = 1; \\ 0, & i \neq 1. \end{cases}$$

Поумножаем пару матриц:

$$U_1^* A U_1 = \begin{pmatrix} v_1^* \\ \vdots \\ v_n^* \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} A v_1 & \dots & A v_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda & v_1^* A v_2 & \dots \\ 0 & & \\ \vdots & A_1 & \\ 0 & & \end{pmatrix}$$

По индукции разложим A_1 как $V_1 T_1 V_1^*$. Запишем $U_1^* A U_1$ с помощью блочного умножения:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & V_1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \lambda & \dots \\ 0 & T_1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & V_1^* \end{pmatrix}$$

В силу обратимости V_1^* мы можем так сделать (иначе вектора-строки для \dots над T_1 могло бы и не существовать).

Получаем, что

$$T = \begin{pmatrix} \lambda & \cdots \\ 0 & T_1 \end{pmatrix};$$

$$U = U_1 \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & V_1 \end{pmatrix}.$$

Действительно, T верхнетреугольная по построению, а U унитарна как произведение двух унитарных матриц. \square

2.4 Нормальные матрицы

Определение 2.5. Матрица A называется нормальной, если $A^*A = AA^*$.

Утверждение 2.3. Матрица диагонализуема в унитарном базисе тогда и только тогда, когда она является нормальной.

Доказательство. .

- (\Rightarrow) :

$$A^*A = U\Lambda^*U^*U\Lambda U^* = U\Lambda^*\Lambda U^* = U\Lambda\Lambda^*U^* = AA^*.$$

- (\Leftarrow) : Разложение Шура для A : UTU^* .

$$A^*A = AA^* \Rightarrow T^*T = TT^*.$$

Оставшаяся часть доказательства (\Leftarrow) будет в качестве упражнения в ДЗ.

\square

3 Малоранговое приближение матриц

3.1 Разделение переменных и скелетное разложение

Определение 3.1. Функция с разделенными переменными — такая функция $f : X \times Y \rightarrow Z$, что существуют u, v такие, что $f(x, y) = u(x)v(y)$.

Для приближения функций используют сумму функций с разделенными переменными:

$$f(x, y) \approx \sum_{i=1}^r u_i(x)v_i(y)$$

Например, разложения в ряд Тейлора и в ряд Фурье:

$$f(x, y) \approx \sum_{i,j=0}^p c_{ij}x^i y^j$$

$$f(x, y) \approx \sum_{i,j=1}^r c_{ij} \sin \pi i x \sin \pi j y \quad ((x, y) \in (0, 1)^2)$$

Как это относится к матричным вычислениям? Возьмём матрицу $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$. a_{ij} — функция дискретных переменных i, j .

Если $a_{ij} = u_i v_j$, то $A = uv^T$ (обратное тоже верно).

Раз все строки (столбцы) матрицы коллинеарны, $rk A \leq 1$.

Примеры: $a_{ij} = \sin i \cos j$, $a_{ij} = i$.

Определение 3.2. Скелетное разложение, rank decomposition — разложение $A = UV^T$ такое, что новая размерность U, V минимальна.

Замечания:

1. Storage: mn Vs. $(m + n)r$
2. Разложение единственно с точностью до умножения на обратимую матрицу:

$$UV^T = (US)(S^{-1}V^T)$$

Утверждения:

1. $A = UV^T \Rightarrow rk(A) \leq r$;
2. $rk(A) = r \Rightarrow \exists U \in \mathbb{R}^{m \times r}, V \in \mathbb{R}^{r \times n} : A = UV^T$.

Доказательство. .

1. очев
2. очев

□

3.2 SVD

Теорема 3.1. Пусть $A \in \mathbb{C}^{m \times n}$, $rk(A) = r$, тогда найдутся унитарные $U \in \mathbb{C}^{m \times m}$, $V \in \mathbb{C}^{n \times n}$ и $\sigma_1 \geq \dots \geq \sigma_r > 0$ — сингулярные числа, что

$$A = U\Sigma V^*,$$

где Σ — диагональная матрица с $\sigma_1, \dots, \sigma_r$ на диагонали.

Доказательство. Заметим, что $A^*A \geq 0$ и $(A^*A)^* = A^*A$. Из этого следует, что

$$\exists V : V^*A^*AV = \text{diag}(\sigma_1^2, \dots, \sigma_n^2), \quad \sigma_1 \geq \dots \geq \sigma_n \geq 0. \quad (1)$$

Рассмотрим $V_r = [v_1, \dots, v_r]$ и $\Sigma_r = \text{diag}(\sigma_1, \dots, \sigma_r)$, где $\sigma_{r+1} = 0$ (r пока неизвестно).

$$\begin{aligned} V_r^*A^*AV_r &= \Sigma_r^2; \\ (\Sigma_r^{-1}V_r^*A^*) (AV_r\Sigma_r^{-1}) &= I \end{aligned}$$

Получается, что $Av_i = \sigma_i u_i$ при $i \in [1, r]$.

А при $i \in [r + 1, n]$ — $Av_i = 0$.

Достраиваем U_r до унитарной U :

$$AV = U \begin{pmatrix} \Sigma_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow U^*AV = \begin{pmatrix} \Sigma_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Из этого, в частности, следует, что $r = rk(A)$.

□

Замечание:

1. u_i — левые сингулярные векторы;
 v_i — правые сингулярные векторы;
 $\sigma_{r+1} = \dots = \sigma_{\min(m,n)} = 0$ — нулевые сингулярные числа.
2. Сингулярные числа определены однозначно.
3. Сингулярные векторы определяются однозначно с точностью до множителя $C : |C| = 1$ при $\sigma_1 > \dots > \sigma_r > 0$.
- 4.

$$\begin{aligned} Im(A) &= \langle u_1, \dots, u_r \rangle; \\ Ker(A) &= \langle v_{r+1}, \dots, v_n \rangle. \end{aligned}$$

5. SVD \rightarrow скелетное разложение:

$$A = U\Sigma V^* = \hat{U}V^*.$$

Переход в другую сторону будет на семинаре.

Теорема 3.2. (Эккорта-Янга-Мирского).

Пусть $k < rk(A)$ и $A_k = U_k \Sigma_k V_k^*$, тогда

$$\min_{rk(B) \leq k} \|A - B\| = \|A - A_k\|$$

для любой унитарно инвариантной нормы $\|\cdot\|$, причем $\|A - A_k\|_2 = \sigma_{k+1}$, $\|A - A_k\|_F = \sqrt{\sum_{i=k+1}^r \sigma_i^2}$.

Определение 3.3. Нормы Шаттена:

$$\|A\|_{p, Shatten} = \left(\sum_{i=1}^r \sigma_i^p \right)^{1/p}, \quad 1 \leq p \leq \infty$$

Нормы Шаттена унитарно инвариантны!

Примеры:

1. $\|\cdot\|_{2, Shatten} = \|\cdot\|_F$;
2. $\|\cdot\|_{\infty, Shatten} = \|\cdot\|_2$;
3. $\|\cdot\|_{1, Shatten} = \|\cdot\|_*$ — ядерная (nuclear) норма.

3.3 Ортопроектор

Определение 3.4. P — ортопроектор на L , если

1. $Im(P) = L$
2. $P^2 = P$
3. $P^* = P$

Утверждение 3.1.

$$\forall x \in \mathbb{C}^n : Px \perp (I - P)x$$

Доказательство.

$$(Px, (I - P)x) = (x, P^*(I - P)x) = (x, P(I - P)x) = (x, 0) = 0.$$

□

Утверждение 3.2. Если $U \in \mathbb{C}^{n \times k}$, $U^*U = I_k$, то UU^* — ортопроектор на $\langle u_1, \dots, u_k \rangle$.

Ортопроекторы, связанные с SVD.

$$A = U\Sigma V^*, U = [U_r | \hat{U}_r], V = [V_r | \hat{V}_r]$$

$U_r U_r^*$ — ортопроектор на $Im(A)$.

$\hat{V}_r \hat{V}_r^*$ — ортопроектор на $Ker(A)$.

3.4 Простейший рандомизированный алгоритм

Хотим найти $Q \in \mathbb{R}^{m \times r}$ с ортогональными столбцами такую, что для $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$

$$A \approx QQ^T A \quad (\text{если } r = rk(A), Q = U_r, \text{ то точное равенство}).$$

Если мы нашли Q , то

$$Q(Q^T A) = Q(W\Sigma V^T) = U\Sigma V^T \quad \text{— SVD.}$$

Как выбрать Q ?

1. $\Omega = [\omega_1, \dots, \omega_r]$ — случайная матрица;
2. $Y = A \cdot \Omega$;
3. Ортогонализация столбцов Y . Например, с помощью Грамма-Шмидта. (= QR-разложение)