

Problem 12: Monty Hall

Punkty: 25

Autor: Christian Lin, Greenville, Karolina Południowa, Stany Zjednoczone

Wprowadzenie do problemu

Paradoks Monty/ego Halla to problem statystyczny, którego nazwa pochodzi od pierwszego prowadzącego amerykańskiej wersji teleturnieju „Idź na całość” (czyli „Let's Make a Deal!”). W jednym z najsłynniejszych fragmentów programu gospodarz proponuje uczestnikowi wybór jednej z trzech bramek. Za jedną z nich był samochód, natomiast za dwoma pozostałymi kozy. Uczestnik wybiera bramkę - na przykład, bramkę numer 1 - a gospodarz, wiedząc, co kryje się za każdą z nich, wybiera inną - na przykład, bramkę numer 3 - i otwiera ją. Za bramką, którą wskazuje gospodarz nigdy nie ma nagrody (za to jest tam koza). Następnie gospodarz proponuje uczestnikowi zmianę wyboru (w tym przypadku na bramkę numer 2).

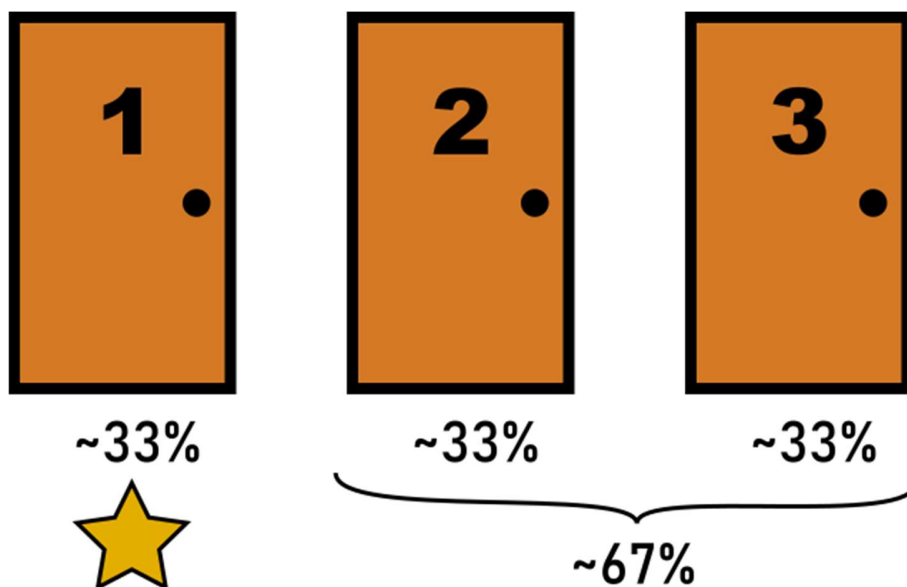
Problem jest następujący:

Czy zmiana bramki jest korzystna dla uczestnika konkursu?

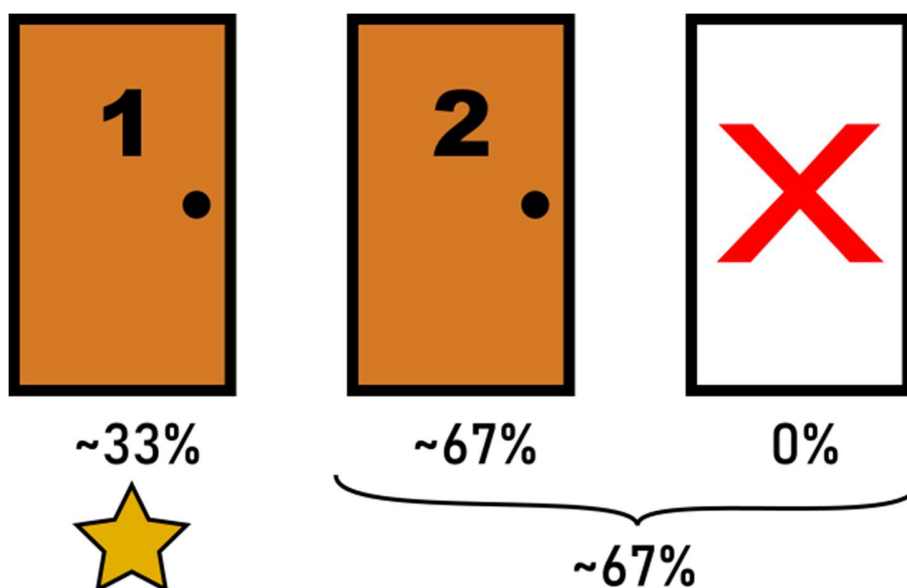
Czy zmiana wyboru będzie mieć znaczenie?

Odpowiedź wydaje się przeczyć intuicji, ale brzmi: tak, po zmianie wybranej bramki uczestnik zwiększa prawdopodobieństwo wygranej dwukrotnie! To był ciężki orzech do zgryzienia nawet dla matematyków, dopóki nie dowiedziono prawidłowości rozwiązania. Jest ono następujące:

Po pierwszym wyborze uczestnika do każdej bramki jest przyporządkowane prawdopodobieństwo wygranej (czyli znalezienia samochodu) równe $1/3$ (33%). Innymi słowy, prawdopodobieństwo przegranej - czyli że samochód znajduje się za bramką, która nie została wybrana - wynosi $2/3$ (67%).



Gdy gospodarz otwiera jedną z niewłaściwych bramek, prawdopodobieństwa nie ulegają zmianie: w bramce wybranej przez uczestnika prawdopodobieństwo wygranej ciągle wynosi $1/3$, a prawdopodobieństwo przegranej $2/3$. Co uległo zmianie? W tym momencie wiadomo, że jedna z pozostałych bramek nie zawiera nagrody, a zatem dla niej prawdopodobieństwo wygranej wynosi 0 - co oznacza, że teraz prawdopodobieństwo $2/3$, poprzednio należące do dwóch bramek, których nie wybrał uczestnik, teraz jest przyporządkowane do jednej.



Podsumowując, prawdopodobieństwo błędnego wyboru ciągle wynosi $2/3$, ale do wyboru pozostaje tylko jedna bramka, co oznacza, że w przypadku zmiany prawdopodobieństwo *właściwego* wyboru wyniesie właśnie $2/3$. To nie gwarantuje wygranej, ale jednak dwukrotnie zwiększa jej prawdopodobieństwo!

Opis problemu

Zostaliście zatrudnieni przez studio telewizyjne, które chce opracować nowy teleturniej oparty na paradoksie Monty/ego Halla. Skoro jednak uczestnicy mogą znać ten przypadek, niezbędne będą zmiany, by program był atrakcyjniejszy.

Gra rozpoczyna się z określoną liczbą bramek (większą od 3). Podobnie jak poprzednio, tylko za jedną bramką znajduje się nagroda. Na początku gry uczestnik konkursu wybiera jedną z bramek. Gospodarz otwiera co najmniej jedną z pozostałych bramek, ale wyłącznie spośród tych niezawierających nagrody. Następnie uczestnik dostaje szansę zmiany wybranej bramki. Proces jest kontynuowany aż do ostatniej rundy, w której uczestnik po raz ostatni może zmienić bramkę. Następnie otwierana jest bramka z nagrodą.

Studio chce przeprowadzić symulację najgorszego możliwego scenariusza, zgodnie z ich przewidywaniami: bardzo inteligentny uczestnik i bardzo pomocny gospodarz. Konkretnie, chcą przeprowadzić symulację, w której uczestnik i gospodarz zachowują się zgodnie z poniższymi regułami:

- W momencie otrzymania możliwości wyboru uczestnik wybiera bramkę z największym prawdopodobieństwem wygranej. W przypadku równych prawdopodobieństw uczestnik wybiera spośród bramek o tym samym prawdopodobieństwie tę z najniższym numerem.
- Podczas otwierania bramek gospodarz otwiera bramki, które po poprzedniej rundzie mają przyporządkowane największe prawdopodobieństwo wygranej. Gospodarz nigdy nie otwiera bramki z nagrodą i nigdy nie otwiera bramki wybranej (aktualnie czy poprzednio) przez uczestnika.

Dla przykładu rozważmy grę z dziesięcioma bramkami. Nagroda znajduje się za bramką numer 6 (oznaczoną na zielono), a w każdej z dwóch rund otwierane są trzy bramki. Uczestnik wybiera bramkę z najniższym numerem, czyli 1 (oznaczoną na żółto).

10%	10%	10%	10%	10%	10%	10%	10%	10%	10%
-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----

Następnie gospodarz otwiera trzy bramki. Ponieważ każda bramka ma identyczne prawdopodobieństwo wygranej, otwiera trzy ostatnie bramki: 8, 9 i 10. To zwiększa prawdopodobieństwo wygranej w bramkach, których nie wskazał uczestnik:

10%	15%	15%	15%	15%	15%	15%	X	X	X
-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	---	---	---

Następnie uczestnik otrzymuje możliwość zmiany wybranej bramki. Wszystkie niewybrane i nieotwarte bramki mają prawdopodobieństwo wygranej równe 15%, zatem uczestnik wybiera pierwszą z nich. Gospodarz otwiera trzy kolejne bramki z dużym prawdopodobieństwem wygranej. Powinien otworzyć 5, 6 i 7, ale za bramką numer 6 znajduje się wygrana. Zatem pomija bramkę numer 6 i otwiera bramki o numerach 4, 5 i 7:

10%	15%	37,5%	X	X	37,5%	X	X	X	X
-----	-----	-------	---	---	-------	---	---	---	---

Teraz do wyboru pozostają tylko cztery bramki, a uczestnik ponownie może zmienić bramkę. Dwie bramki mają prawdopodobieństwo wygranej równe 37,5%, zatem uczestnik wybiera pierwszą z nich. Niestety, wybrał źle, ale i tak ponad trzykrotnie zwiększył prawdopodobieństwo swojej wygranej wyłącznie dzięki zmianom wyboru.

Waszym zadaniem będzie napisać program, który zasymuluje kilka odmian takiej gry. W każdej symulacji uczestnik i gospodarz mają postępować zgodnie z powyższymi regułami. Wynik powinien określać, jaka jest na koniec gry szansa uczestnika na wygraną.

Przykładowe dane wejściowe

Pierwszy wiersz danych wejściowych waszego programu, **otrzymanego przez standardowe wejście**, będzie zawierać dodatnią liczbę całkowitą oznaczającą liczbę przypadków testowych. Każdy przypadek testowy będzie zawierać pojedynczy wiersz składający się z trzech dodatnich liczb całkowitych oddzielonych spacjami. Te liczby kolejno reprezentują:

- Liczbę bramek na początku gry
- Liczbę rund, w trakcie których gospodarz otwiera bramki
- Liczbę bramek otwieranych w ramach każdej rundy

```
3
10 2 3
10 3 2
10 4 1
```

Przykładowe dane wyjściowe

W każdym przypadku testowym wasz program musi wyświetlić pojedynczy wiersz zawierający prawdopodobieństwo wygrania przez uczestnika nagrody po zakończeniu gry, przy założeniu, że uczestnik i gospodarz postępują według wyżej opisanych reguł. Prawdopodobieństwa mają być podane w formie procentu z dwoma miejscami dziesiętnymi (z ewentualnymi zerami następującymi).

```
37.50%
57.86%
24.61%
```