1. Escriviu la sèrie de Fourier només en termes de sinus (i també la que és només en termes de cosinus) de la funció

$$f(x) = \begin{cases} \pi/3 & \text{si } x \in (0, \pi/3) \\ 0 & \text{si } x \in (\pi/3, 2\pi/3) \\ -\pi/3 & \text{si } x \in (2\pi/3, \pi) \end{cases} .$$

2. Sigui f una funció 2π-periòdica. Demostreu que si f és decreixent a $[0, 2\pi)$ llavors el coeficient de Fourier

$$b_n(f) = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x) \sin(nx) dx, \quad n \geq 1$$

és no-negatiu.

3. Donada una funció 2π-periòdica, tal que $|f(x)| \leq 1$, demostreu que

$$|\widehat{f}(1) - \widehat{f}(0)| \leq \frac{4}{\pi}.$$

Trobeu un exemple que compleixi la igualtat.

Indicació: potser us pot resultar útil utilitzar alguna fórmula trigonomètrica de l'angle doble a l'hora de calcular la integral

4. Sigui $f \in \mathcal{C}^k$ una funció $2\pi-$periòdica. Demostreu que $\widehat{f}(n) = O(|n|^{-k})$ quan $|n| \to \infty$ (*i.e. existeix una constant* $C > 0$ *tal que* $|\widehat{f}(n)| \leq C|n|^{-k}$).

5. Sigui f una funció 2π-periòdica i $n \in \mathbb{N}$. Definim $p(x) = f(nx)$. Demostreu que per a $m \in \mathbb{Z}$ es compleix

$$\widehat{p}(m) = \begin{cases} \widehat{f}(\frac{m}{n}), & \text{si } n|m, \\ 0, & \text{en cas contrari.} \end{cases}$$