Anàlisi harmònica **Grau de Matemàtiques**

Seminari 1, 13/03/2024 **Curs 2023-2024**

---

1. Per $\alpha > 0$ definim
$$f_\alpha(x) = \begin{cases} e^{-\alpha x}, & x \geq 0 \\ 0, & x < 0 \end{cases}.$$

   (a) Calculeu la transformada de Fourier de f_α. Useu-la per deduir les transformades de Fourier de
$$g_\alpha(x) = e^{-\alpha|x|} \qquad h_\alpha(x) = \operatorname{sgn}(x)e^{-\alpha|x|}$$

   (b) Calculeu la transformada de Fourier de $f(x) = \frac{\cos 2x}{4+x^2}$.

   (c) Calculeu la integral
$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\mathrm{d}x}{(\alpha^2 + x^2)^2}.$$

2. Donada $f \in L^1(\mathbb{R})$ sabem que $\widehat{f}$ és una funció (uniformement) contínua i tal que $|\widehat{f}(\xi)| \to 0$ conforme $|\xi| \to \infty$. Expressem aquest fet dient que si $f \in L^1(\mathbb{R})$ llavors, $\widehat{f} \in \mathcal{C}_0(\mathbb{R})$. Volem veure, però, que existeixen elements de $\mathcal{C}_0(\mathbb{R})$ que no són els transformats de Fourier d'un element de $L^1(\mathbb{R})$, és a dir, $\mathcal{F}(L^1(\mathbb{R})) \subsetneq \mathcal{C}_0(\mathbb{R})$.

   (a) Sigui $f \in L^1(\mathbb{R})$ amb $\widehat{f}$ senar. Proveu que existeix $M > 0$ tal que
$$\left| \int_1^a \frac{\widehat{f}(\xi)}{\xi} \mathrm{d}\xi \right| \leq M, \quad \forall a \geq 1.$$

   (*Indicació: recordeu que* $\int_0^\infty \frac{\sin(x)}{x}\mathrm{d}x < \infty$).

   (b) Considereu
$$g(x) = \begin{cases} \dfrac{\tanh(x)}{\log(1+|x|^{1/2})}, & \text{si } x \neq 0, \\ 0, & \text{si } x = 0. \end{cases}$$

   Comproveu que $g \in \mathcal{C}_0(\mathbb{R})$ i que no pot ser la transformada de Fourier de cap $f \in L^1(\mathbb{R})$.

3. *L'equació de Laplace al semiplà superior.* Definim $\mathbb{H} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y > 0\}$. Trobeu, mitjançant la transformada de Fourier, una funció $u(x,y) : \mathbb{H} \to \mathbb{R}$ (tot el regular que necessiteu) que satisfaci l'equació de Laplace $\partial_x^2 u + \partial_y^2 u = 0$ amb condicions de frontera $u(x,0) = h(x)$, $\lim_{y\to\infty} u(x,y) = 0$. Doneu la resposta en termes de la convolució de h amb una certa funció de (x,y). L'identifiqueu amb algun dels nuclis de convolució vists a teoria?

Ex. 1 :

a) $f_\alpha(x) := e^{-\alpha x}\chi_{\{x\geq 0\}}$, $\alpha>0$, $x\in\mathbb{R}$. És clarament una funció integrable a $\mathbb{R}$, ja que $\alpha>0$. Calculem la seva transformada de Fourier:

$$\hat{f}_\alpha(\xi) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\alpha x}\chi_{\{x\geq 0\}}\cdot e^{-2\pi i x\xi}\,dx = \int_0^{\infty} e^{-(2\pi i\xi+\alpha)x}\,dx$$

$$= \left[\frac{e^{-(2\pi i\xi+\alpha)x}}{-(2\pi i\xi+\alpha)}\right]_0^{\infty} = \frac{1}{2\pi i\xi+\alpha}.$$

$g_\alpha(x) = e^{-\alpha|x|}$, $x\in\mathbb{R}$. Fixeu-vos que la podem reescriure com

$$g_\alpha(x) = f_\alpha(x) + f_\alpha(-x)$$

Per tant, usant que $\widehat{D_\lambda f}(\xi) = \mathrm{sgn}(\lambda)\cdot\hat{f}(\lambda\xi)$ i expressant $f_\alpha(-x)$ com $-D_{-1}f_\alpha(x)$ tenim, per la linealitat de la transformada:

$$\hat{g}_\alpha(\xi) = \hat{f}_\alpha(\xi) - \widehat{D_{-1}f_\alpha}(\xi) = \hat{f}_\alpha(\xi) + \hat{f}_\alpha(-\xi)$$

$$= \frac{1}{2\pi i\xi+\alpha} + \frac{1}{-2\pi i\xi+\alpha} = \frac{2\alpha}{\alpha^2+4\pi^2\xi^2}.$$

D'altra banda tenim $h_\alpha(x) = f_\alpha(x) - f_\alpha(-x) = f_\alpha(x) + D_{-1}f_\alpha(x)$. Per tant

$$\hat{h}_\alpha(\xi) = \hat{f}_\alpha(\xi) + \widehat{D_{-1}f_\alpha}(\xi) = \hat{f}_\alpha(\xi) - \hat{f}_\alpha(\xi)$$

$$= \frac{1}{2\pi i\xi+\alpha} - \frac{1}{-2\pi i\xi+\alpha} = \frac{-4\pi i\xi}{\alpha^2+4\pi^2\xi^2} \longrightarrow$$

(Possible candidat per $\widehat{\mathrm{sgn}}(\xi)$ hauria de ser $\frac{1}{i\pi\xi}$.)

b) Escrivim $f(x) = \dfrac{\cos(2x)}{4+x^2}$ com

$$f(x) = \frac{1}{2}\left(e^{i2x}+e^{-i2x}\right)\cdot\frac{1}{4+x^2} = \frac{e^{i2x}}{8+2x^2} + \frac{e^{-i2x}}{8+2x^2}.$$

Fixeu-vos que

$$f(\sqrt{2}\pi x) = \frac{e^{2\pi i\sqrt{2}x}}{8+4\pi^2x^2} + \frac{e^{-2\pi i\sqrt{2}x}}{8+4\pi^2x^2}$$

$$= \frac{1}{4\sqrt{2}}\left(\frac{4\sqrt{2}}{8+4\pi^2x^2}\right)e^{2\pi i\sqrt{2}x} + \frac{1}{4\sqrt{2}}\left(\frac{4\sqrt{2}}{8+4\pi^2x^2}\right)e^{-2\pi i\sqrt{2}x}$$

$$= \frac{\sqrt{2}}{8}\left[M_{\sqrt{2}}\,\hat{g}_{2\sqrt{2}}(x) + M_{-\sqrt{2}}\,\hat{g}_{2\sqrt{2}}(x)\right]$$

És a dir, com $D_{\frac{1}{\sqrt{2}\pi}}f(x) = \sqrt{2}\pi\cdot f(\sqrt{2}\pi x)$, tenim

$$\frac{4}{\pi}D_{\frac{1}{\sqrt{2}\pi}}f(x) = M_{\sqrt{2}}\,\hat{g}_{2\sqrt{2}}(x) + M_{-\sqrt{2}}\,\hat{g}_{2\sqrt{2}}(x)$$

Llavors prenent transformades de Fourier:

$$\frac{4}{\pi}\hat{f}\left(\frac{\xi}{\sqrt{2}\pi}\right) = (\hat{g}_{2\sqrt{2}})^{\wedge}(\xi-\sqrt{2}) + (\hat{g}_{2\sqrt{2}})^{\wedge}(\xi+\sqrt{2})$$

$$= g_{2\sqrt{2}}(\sqrt{2}-\xi) + g_{2\sqrt{2}}(-\sqrt{2}-\xi)$$

És a dir

$$\hat{f}(\xi) = \frac{\pi}{4}\left[g_{2\sqrt{2}}(\sqrt{2}(1-\pi\xi)) + g_{2\sqrt{2}}(-\sqrt{2}(1+\pi\xi))\right]$$

$$= \frac{\pi}{4}\left[e^{-2\sqrt{2}|\sqrt{2}(1-\pi\xi)|} + e^{-2\sqrt{2}|-\sqrt{2}(1+\pi\xi)|}\right]$$

$$= \frac{\pi}{4}\left(e^{-4|1-\pi\xi|} + e^{-4|1+\pi\xi|}\right)$$

c) Calcularem la integral de l'enunciat ajudant-nos del teorema de Plancherel:

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f(x)|^2\, dx = \int_{\infty}^{\infty} |\hat{f}(\xi)|^2\, d\xi\,, \qquad \text{per } f \in L^2(\mathbb{R}).$$

Calculem la integral:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{(\alpha^2+x^2)^2} = \frac{1}{4\alpha^2}\int_{-\infty}^{\infty}\left(\frac{2\alpha}{\alpha^2+x^2}\right)^2 dx \overset{(x=2\pi\xi)}{=} \frac{1}{4\alpha^2}\int_{-\infty}^{\infty}\left(\frac{2\alpha}{\alpha^2+4\pi^2\xi^2}\right)^2 2\pi\, d\xi$$

$$= \frac{\pi}{2\alpha^2}\int_{-\infty}^{\infty} |\hat{g}_\alpha(\xi)|^2\, d\xi = \frac{\pi}{2\alpha^2}\int_{-\infty}^{\infty} |g_\alpha(x)|^2\, dx$$

$$= \frac{\pi}{\alpha^2}\int_{0}^{\infty} e^{-2\alpha x}\, dx = \frac{\pi}{\alpha^2}\left[\frac{e^{-2\alpha x}}{-2\alpha x}\right]_0^{\infty} = \frac{\pi}{2\alpha^3}.$$

Ex. 2

a)
$$\left|\int_1^a \frac{\hat{f}(\xi)}{\xi}\, d\xi\right| = \frac{1}{2}\left|\int_{1\le|\xi|\le a} \frac{\hat{f}(\xi)}{\xi}\, d\xi\right|$$

$\left(\frac{\hat{f}(\xi)}{\xi} \text{ parella}\right)$
$$= \frac{1}{2}\left|\int_{1\le|\xi|\le a} \frac{1}{\xi}\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\, e^{-2\pi i x\xi}\, dx\, d\xi\right|$$

$\left(\text{Fubini, usem } f \in L^1\right) \longrightarrow$
$$= \frac{1}{2}\left|\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\left(\int_{1\le|\xi|\le a} \frac{e^{-2\pi i x\xi}}{\xi}\, d\xi\right) dx\right|$$

$\left(\cos(2\pi x\xi)/\xi \text{ és senar}\right) \longrightarrow$
$$= \frac{1}{2}\left|\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\left(\int_{1\le|\xi|\le a} \frac{\sin(2\pi\xi t)}{\xi}\, d\xi\right) dx\right|$$

$\left(2\pi x\xi = u\right) \longrightarrow$
$$= \frac{1}{2}\left|\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\left(\int_{2\pi|x|\le|u|\le 2\pi|x|a} \frac{\sin(u)}{u}\, du\right) dx\right|$$

$$\le \int_{-\infty}^{\infty} |f(x)|\, \underbrace{\left|\int_{2\pi|x|}^{2\pi|x|a} \frac{\sin(u)}{u}\, du\right|}_{\text{uniformement fitada en } a}\, dx \le C\cdot \|f\|_{L^1} =: M.$$

b) Només cal estudiar la continuïtat a $x=0$, ja que és clar que a la resta de punts és contínua i $\lim_{|x|\to\infty} g(x) = 0$. Però fixeu-vos que

$$\lim_{x\to 0} g(x) = \lim_{x\to 0} \left(\frac{e^x - e^{-x}}{e^x+e^{-x}}\right)\cdot \frac{1}{\log(1+|x|^{1/2})} \underset{\left(\begin{array}{l}\log(1+y)\simeq y \\ e^y \simeq 1+y\end{array},\ y\to 0\right)}{\simeq} \lim_{x\to 0} \frac{2x}{2}\cdot\frac{1}{|x|^{1/2}} = 0,$$

i ho tenim. Per tant $g\in \mathcal{C}_0(\mathbb{R})$. D'altra banda és clar que

$$\left|\int_1^\infty \frac{g(x)}{x}\,dx\right| = \int_1^\infty \frac{\tanh(x)}{x\cdot\log(1+|x|^{1/2})}\,dx \underset{\left(\text{integrand positiu} \to \text{criteri de comparació}\right)}{=} \int_1^\infty \frac{dx}{x\log(|x|^{1/2})} = +\infty,$$

i per l'apartat a) deduïm que no pot existir cap $f\in L^1(\mathbb{R})$ tal que $\hat{f} = g$.

Ex. 3

Plantegem per $u: \mathbb{H}\to\mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^2(\mathbb{H})$ l'equació de l'enunciat:

$$\begin{cases} \partial_x^2 u + \partial_y^2 u = 0 \\ u(x,0) = h(x), \quad \lim_{y\to\infty} u(x,y) = 0 \end{cases}$$

Observeu que "$u(x,0) = h(x)$" no és una igualtat ben definida perquè els punts de la forma $(x,0)$ ni tan sols estan al domini de u. Aquestes igualtats s'han d'entendre com

$\lim_{y\to 0} u(\cdot,y) = h$, on la igualtat s'ha d'entendre en un espai de funcions adient o g.p.t. punt (o per tot punt).

En qualsevol cas, escrivim $u(x,0) = h(x)$ abusant de la notació.

Per cada $y>0$ prenem la transformada de Fourier en x per obtenir l'equació diferencial:

$$\begin{cases} -4\pi^2\xi^2 \cdot \hat{u}(\xi,y) + \partial_y^2 \hat{u}(\xi,y) = 0, & (*) \\ \hat{u}(\xi,0) = \hat{h}(\xi), \quad \lim_{y\to\infty} \hat{u}(\xi,y) = 0, \end{cases}$$

on hem suposat $h \in L^1(\mathbb{R})$. Si per cada $y>0$ denotem $u_y(x) := u(x,y)$, estem suposant implícitament que $u_y \in L^1(\mathbb{R})$ i $u_y'' \in L^1(\mathbb{R})$. També cal que $\partial_y^2 \hat{u}(\xi,\cdot)$ coincideixi amb $(\partial_y^2 u)^\wedge(\xi,\cdot)$.

A més, per imposar la segona condició de frontera "a la banda de Fourier" cal suposar, per exemple, que per $y \geq M > 0$ amb M prou gran, u_y està dominada per una funció integrable independent de y. En resum, estem suposant:

- <u>Sobre h</u>: $h \in L^1(\mathbb{R})$.
- <u>Sobre la solució</u>: $u_y \in L^1(\mathbb{R})$ i $u_y'' \in L^1(\mathbb{R})$ per a tot $y>0$. A més cal que $\partial_y^2 \hat{u}(\xi,\cdot) = (\partial_y^2 u)^\wedge(\xi,\cdot)$ i també $|u_y| \leq |g|$ per alguna $g \in L^1(\mathbb{R})$ i per $y \geq M > 0$.

La solució general de $(*)$ és $\hat{u}(\xi,y) = A\cdot e^{2\pi|\xi|y} + Be^{-2\pi|\xi|y}$, on A i B poden dependre de ξ. Imposant condicions de frontera deduïm: $A=0$ i $B = \hat{h}(\xi)$, de manera que:

$$\hat{u}(\xi,y) = \hat{h}(\xi)\cdot e^{-2\pi|\xi|y} = \hat{h}(\xi)\cdot g_{2\pi y}(\xi) = \hat{h}(\xi)\cdot\left[\left(g_{2\pi y}\right)^\vee\right]^\wedge(\xi)$$

(apartat a) exercici 1)

$\left(\hat{h}\cdot e^{-2\pi|\cdot|y} \in L^1(\mathbb{R}),\ \forall y>0\right)$

$$= \left[h * \left(g_{2\pi y}\right)^\vee\right]^\wedge(\xi) \Rightarrow u(x,y) = \left(h * \left(g_{2\pi y}\right)^\vee\right)(x)$$

El nucli de Poisson al semiplà superior és doncs

$$(g_{2\pi y})^{\vee}(x) \underset{\text{(ex. 1a))}}{=} \frac{2(2\pi y)}{(2\pi y)^2+(2\pi x)^2} = \frac{1}{\pi}\cdot\frac{y}{y^2+x^2} =: P_y(x), \quad y>0.$$

Vegem ara si realment $u(x,y) = (h * P_y)(x) = \int_{-\infty}^{\infty} h(z) P_y(x-z)\,dz$ és solució de l'equació. Abans, però, vegem que és una expressió ben definida: fixem $(x,y)\in\mathbb{R}\times\mathbb{H}$ i notem que

$$|u(x,y)| \le \frac{y}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{|h(z)|}{y^2+(x-z)^2}\,dz \underset{\left(s := \frac{z-x}{y}\right)}{=} \frac{y}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{|h(x+ys)|}{y^2+y^2s^2}\,y\,ds$$

$$= \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{|h(x+ys)|}{1+s^2}\,ds \le \frac{1}{\pi}\|h\|_{L^1(\mathbb{R})} < \infty \ \checkmark$$

Comprovem ara si és solució:

1) $\underline{u_y \in L^1(\mathbb{R}),\ \forall y>0}$? Fixem $y>0$ i calculem:

$$\int_{-\infty}^{\infty}|u_y(x)|\,dx \le \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\left(\int_{-\infty}^{\infty}\frac{|h(x+ys)|}{1+s^2}\,ds\right)dx$$

$$\underset{\text{(Tonelli)}}{=} \frac{1}{\pi}\|h\|_{L^1(\mathbb{R})}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{ds}{1+s^2} = \|h\|_{L^1(\mathbb{R})} < \infty \ \checkmark.$$

2) $\underline{u_y'' \in L^1(\mathbb{R}),\ \forall y>0}$? Fixem $y>0$ i calculem $\partial_x^2 P_y(x-z)$:

$$\partial_x^2 P_y(x-z) = \frac{y}{\pi}\partial_x^2\left(\frac{1}{y^2+(x-z)^2}\right) = \frac{y}{\pi\left(y^2+(x-z)^2\right)^2}\left[\frac{8(x-z)^2}{y^2+(x-z)^2} - 2\right]$$

Observeu que $|\partial_x^2 P_y(x-z)| \leq \frac{6}{\pi y^3}$, llavors $|h(\cdot)\,\partial_x^2 P_y(x-\cdot)| \leq$

$\leq \frac{6}{\pi y^3} h(\cdot) \in L^1(\mathbb{R})$ per hipòtesi. Així doncs podem derivar sota el signe integral i deduïm

$$|u_y''(x)| = |(h * P_y)''(x)| = |(h * \partial_x^2 P_y)(x)| \leq \frac{6}{\pi y^3} h \in L^1(\mathbb{R}) \checkmark$$

3) $\underline{\partial_y^2 \hat{u}(\xi,\cdot) = (\partial_y^2 u)^\wedge(\xi,\cdot)}$: Fixem $x \in \mathbb{R}$ i calculem $\partial_y^2 P_y(x-z)$

$$\partial_y^2 P_y(x-z) = \frac{1}{\pi} \partial_y^2\left(\frac{y}{y^2+(x-z)^2}\right)$$

$$= \frac{2y}{\pi\left(y^2+(x-z)^2\right)^2}\left(\frac{4y^2}{y^2+(x-z)^2} - 3\right)$$

Per cada $y_0 > 0$ fixat triem un entorn (ε, N) de y_0 contingut a $(0,+\infty)$. Observeu que $\forall y \in (\varepsilon, N)$ es té

$$|h(\cdot)\,\partial_y^2 P_y(x-\cdot)| \leq \frac{2}{\pi\varepsilon^3} h \in L^1(\mathbb{R})$$

Així doncs u_x és doblement diferenciable a (un entorn de) y_0, i diferenciant sota el signe integral obtenim

$$\partial_y^2 \hat{u}(\xi, y_0) = (\partial_y^2 u)^\wedge(\xi, y_0), \quad \forall y_0 > 0 \quad \checkmark.$$

4) $\underline{|u_y| \leq |g| \text{ per } g \in L^1(\mathbb{R}) \text{ i } y \geq M > 0,\ M \text{ gran}}$: ja hem vist que $u_y \in L^1(\mathbb{R})$, $\forall y > 0$ ja que $h \in L^1(\mathbb{R})$ $\checkmark$.

Per tant deduïm que $h \in L^1(\mathbb{R})$ és suficient per assegurar que $\partial_x^2 u + \partial_y^2 u = 0$ i $\lim_{|y|\to\infty} u(x,y) = 0$. Estudiem ara la condició

"$u(x,0) = h(x)$"

L'estudiarem en dos sentits usant que el nucli de Poisson P_y, $y>0$, defineix una aproximació de la identitat (funció integrable, amb integral 1 i tal que $\int_{|x|>\delta} |P_y(x)|\,dx \xrightarrow[y\to 0]{} 0$ per tot $\delta>0$). Llavors:

1) Si $h\in L^1(\mathbb{R})$: $\| u(\cdot,y)-h \|_{L^1(\mathbb{R})} = \| h * P_y - h \|_{L^1(\mathbb{R})} \xrightarrow[y\to 0]{} 0$. És a dir, $\lim\limits_{y\to 0} u(x,y) = h(x)$ a $L^1(\mathbb{R})$

2) Si $h\in \mathcal{C}_0(\mathbb{R})$: $\| u(\cdot,y)-h \|_{L^\infty(\mathbb{R})} \xrightarrow[y\to 0]{} 0$, és a dir, $\lim\limits_{y\to 0} u(x,y) = h(x)$ per tot punt $x\in\mathbb{R}$ (per continuïtat). Noteu però que cal seguir suposant $h\in L^1(\mathbb{R})$ perquè l'equació se satisfaci.

De fet, tot i que no s'ha vist a teoria també podríem imposar:

3)* Si $h\in L^p(\mathbb{R})$, $1\leq p<\infty$: Llavors es pot demostrar que $\| u(\cdot,y)-h \|_{L^p(\mathbb{R})} \xrightarrow[y\to 0]{} 0$. És a dir, $\lim\limits_{y\to 0} u(x,y) = h(x)$ a $L^p(\mathbb{R})$. De nou, caldria suposar igualment $h\in L^1(\mathbb{R})$ perquè $u = h * P_y$ fos solució de l'EDP.

COMENTARIS FINALS:

* Fixeu-vos que podríem plantejar el problema amb una condició de frontera menys:

$$\begin{cases} \partial_y^2 u + \partial_x^2 u = 0, & (x,y)\in\mathbb{R}\times\mathbb{H} \\ \text{"} u(x,0) = h(x) \text{"} \end{cases}$$

però en aquest cas perdríem la unicitat, ja que podem escriure

$$u(x,y) = h * P_y + Ay, \quad \forall A\in\mathbb{R}$$

que fixeu-vos que també és solució! La condició que $u(x,y)$ s'anul·li quan $y \to 0$ fa que la solució trobada sigui única, i a més acotada si h també ho és!.

* Corregint els seminaris he vist condicions demanades per u de la forma "$x^2 u \in L^1(\mathbb{R})$". Fixeu-vos que no és necessari, ja que no cal derivar dues vegades $\hat{u}$ respecte ξ, sinó respecte y!.