1. Per $a > 0, a \notin \mathbb{Z}$, definim la *part finita* de $|x|^{-a}$ com la distribució

$$\left\langle \text{f.p.}\frac{1}{|x|^a}, \varphi \right\rangle := \int_{\mathbb{R}} \frac{\varphi(x) - P_\varphi(x)}{|x|^a} \mathrm{d}x, \quad \forall \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}),$$

on P_φ és el polinomi de Taylor de φ a l'origen d'ordre $[a] - 1$. Definim de la mateixa manera la part finita de $x_+^{-a} := x^{-a}\chi_{(0,\infty)}$.

   (a) Proveu que, en efecte, la part finita de $|x|^{-a}$ (i de x_+^{-a}) defineix una distribució.

   (b) Calculeu la derivada distribucional de la funció $f(x) = x_+^{-1/2}$ i expresseu-la en termes d'una part finita concreta.

   (c) Calculeu la derivada distribucional de la funció $f(x) = \ln |x|$.

2. L'objectiu d'aquest exercici és resoldre l'equació distribucional $x^m T = 1$, $m \in \mathbb{N}$. Per fer-ho, resoldrem un seguit d'apartats previs auxiliars.

   (a) Sigui $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ amb $\varphi(0) = 0$. Proveu que existeix $\Psi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ tal que $\varphi = x\Psi$.

   (b) Més generalment, proveu que si $\varphi^{(j)}(0) = 0$ per tot $0 \leq j \leq m - 1$, llavors existeix $\Psi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ tal que $\varphi = x^m\Psi$.

   (c) Proveu la igualtat distribucional $x\left(\text{p.v.}\frac{1}{x}\right) = 1$.

   (d) Per $m \geq 1$, considereu

$$T_m := \frac{(-1)^{m-1}}{(m-1)!}\partial^m \ln |x| \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}).$$

   Demostreu $x^m T_m = 1$.

   (e) Demostreu que si $T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$ és tal que $x^m T = 0$, llavors $T = \sum_{j=0}^{m-1} C_j \partial^j \delta$.

   (*Indicació:* comproveu-ho primer per funcions test amb $\varphi^{(j)}(0) = 0$ per tot $0 \leq j \leq m-1$. Després, ajudant-vos de funcions esglaó de $\mathcal{D}(\mathbb{R})$, escriviu una funció test general com a suma d'una funció test del tipus anterior i una altra suportada a un entorn de l'origen).

   (f) Deduïu que, en general, si $x^m T = 1$, llavors $T = T_m + \sum_{j=0}^{m-1} C_j \partial^j \delta$.

3. (*El teorema de representació de Riesz-Markov*). Sigui X un espai topològic Hausdorff en què tot punt admet un entorn compacte i $\mathcal{A}$ una σ-àlgebra sobre X. Una mesura μ a $(X, \mathcal{A})$ és una *mesura de Borel* si $\mathcal{B}(X) \subseteq \mathcal{A}$, on $\mathcal{B}(X)$ és la σ-àlgebra de Borel, la mínima que conté els oberts d'X.

   El teorema de representació de Riesz-Markov ens diu que tot funcional continu Λ sobre $\mathcal{C}_c(X) = \mathcal{C}_c^0(X)$ està representat per una única mesura μ de Borel sobre X, en el sentit següent:

$$\Lambda(f) = \int_X f(x)\mathrm{d}\mu(x), \quad \forall f \in \mathcal{C}_c^0(X).$$

L'objectiu d'aquest primer exercici és veure'n algunes conseqüències. A partir d'ara podeu pensar que $X = \mathbb{R}^n$ i $\mathcal{A} = \mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$. Fixarem $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ obert.

(a) Sigui $T \in \mathcal{D}'_N(\Omega)$, una distribució d'ordre N i $\varphi \in \mathcal{C}_c^N(\Omega)$. Considereu $(\psi_n)_n$ aproximació de la identitat i definiu $\varphi_n := \varphi * \psi_n$. Proveu que $(\langle T, \varphi_n \rangle)_n$ té límit conforme $n \to \infty$.

(b) Proveu que el límit anterior permet estendre T a un funcional lineal continu de $\mathcal{C}_c^N(\Omega)$. És a dir, per a tot $K \subset \Omega$ compacte existeix una constant $C = C(K)$ tal que per qualsevol $\varphi \in \mathcal{C}_c^N(\Omega)$ suportada a K,

$$|\langle T, \varphi \rangle| \leq C \sum_{|\alpha| \leq N} \|\partial^\alpha \varphi\|_\infty.$$

(c) (**Conseqüència 1**) Usant el teorema de representació de Riesz-Markov i l'apartat anterior deduïu que tota distribució d'ordre 0 és una mesura de Borel.

(d) (**Conseqüència 2**) Diem que una distribució és positiva si per a qualsevol φ funció test amb $\varphi \geq 0$, es té $\langle T, \varphi \rangle \geq 0$. Proveu que tota distribució positiva és una mesura.

Ex. 1 :

a) Provarem que f.p. $|x|^{-a}$ és una distribució, amb $a>0$, $a\notin\mathbb{Z}$. (la prova de f.p. x_+^{-a} és anàloga). És clar que és un funcional lineal de $\mathcal{D}(\mathbb{R})$ a $\mathbb{R}$. Estudiem la seva continuïtat: fixem $K\subset\mathbb{R}$ compacte i $\varphi\in\mathcal{C}_0^\infty(K)$. Distingim dos casos:

1) Si $\{0\}\notin \operatorname{supp}(\varphi)$: Llavors $P_\varphi=0$ i tenim:

$$\left|\left\langle \text{f.p.}\frac{1}{|x|^a},\varphi\right\rangle\right| = \left|\int_{\operatorname{supp}(\varphi)}\frac{\varphi(x)}{|x|^a}\,dx\right| \leq \underbrace{\operatorname{dist}(K,\{0\})^{-a}|K|}_{C}\cdot\|\varphi\|_\infty \ \checkmark$$

2) Si $\{0\}\in\operatorname{supp}(\varphi)$: apliquem el teorema de Taylor de manera que per cada $x\in\mathbb{R}$, existeix $\xi=\xi(x)$ entre 0 i x tal que

$$\varphi(x) = \sum_{j=0}^{[a]-1}\frac{\varphi^{(j)}(0)}{j!}x^j + \frac{\varphi^{([a])}(\xi(x))}{[a]!}x^{[a]}$$

Així doncs

$$\left|\left\langle \text{f.p.}\frac{1}{|x|^a},\varphi\right\rangle\right| = \left|\int_{\operatorname{supp}(\varphi)}\frac{\varphi^{([a])}(\xi(x))}{[a]!}\cdot\frac{1}{x^{a-[a]}}\,dx\right|$$

$$\leq \frac{\|\varphi^{([a])}\|_\infty}{[a]!}\left|\int_{-2\cdot\operatorname{diam}(K)}^{2\operatorname{diam}(K)}\frac{dx}{x^{a-[a]}}\right| \underset{(a-[a]\in(0,1))}{\leq} \frac{(2\operatorname{diam}(K))^{a-[a]+1}}{[a]!\,(a-[a]+1)}\|\varphi^{([a])}\|_\infty \ \checkmark$$

b) Definim $f(x):=x_+^{-1/2}=\frac{1}{\sqrt{x}}\chi_{(0,\infty)}$ i fixem $\varphi\in\mathcal{D}(\mathbb{R})$. Llavors:

$$\langle f',\varphi\rangle := -\langle f,\varphi'\rangle = -\int_0^\infty\frac{\varphi'(x)}{\sqrt{x}}\,dx = \lim_{\varepsilon\to0}-\int_\varepsilon^\infty\frac{\varphi'(x)}{\sqrt{x}}\,dx$$

$$= \left\| \begin{matrix} u = \varphi & , & v = x^{-1/2} \\ du = \varphi' & , & dv = -\frac{1}{2} x^{-3/2} \end{matrix} \right\|$$

$$= \lim_{\varepsilon \to 0} \left(- \left[\frac{\varphi(x)}{\sqrt{x}} \right]_\varepsilon^\infty - \frac{1}{2} \int_\varepsilon^\infty \frac{\varphi(x)}{x^{3/2}} \, dx \right)$$

$$= -\frac{1}{2} \cdot \lim_{\varepsilon \to 0} \left[\int_\varepsilon^\infty \frac{\varphi(x)}{x^{3/2}} \, dx - \frac{2\varphi(\varepsilon)}{\sqrt{\varepsilon}} \right]$$

$$= -\frac{1}{2} \lim_{\varepsilon \to 0} \left[\int_\varepsilon^\infty \frac{\varphi(x) - \varphi(\varepsilon)}{x^{3/2}} \, dx \right] = -\frac{1}{2} \int_0^\infty \frac{\varphi(x) - \varphi(0)}{x^{3/2}} \, dx$$

$$= \left\langle -\frac{1}{2} \, \mathrm{f.p.} \frac{1}{x_+^{3/2}}, \varphi \right\rangle .$$

Calulem la segona derivada de f calculant la derivada de $\mathrm{f.p.}\ x_+^{-3/2}$:

$$\left\langle \left(\mathrm{f.p.} \frac{1}{x_+^{3/2}} \right)', \varphi \right\rangle := - \left\langle \mathrm{f.p.} \frac{1}{x_+^{3/2}}, \varphi' \right\rangle = - \int_0^\infty \frac{\varphi'(x) - \varphi'(0)}{x^{3/2}} \, dx$$

$$= \left\| \begin{matrix} du = \varphi'(x) - \varphi'(0) & , & v = x^{-3/2} \\ u = \varphi(x) - x\varphi'(0) & , & dv = -\frac{3}{2} x^{-5/2} \end{matrix} \right\|$$

$$= - \lim_{\varepsilon \to 0} \left(\left[\frac{\varphi(x) - x\varphi'(0)}{x^{3/2}} \right]_\varepsilon^\infty + \frac{3}{2} \int_\varepsilon^\infty \frac{\varphi(x) - x\varphi'(0)}{x^{5/2}} \, dx \right) .$$

$$= \lim_{\varepsilon \to 0} \left(- \frac{\varphi(\varepsilon) - \varepsilon\varphi'(0)}{\varepsilon^{3/2}} - \frac{3}{2} \int_\varepsilon^\infty \frac{\varphi(x) - x\varphi'(0)}{x^{5/2}} \, dx \right) = (*)$$

Apliquem el T.V.M per trobar $\eta \in (0, \varepsilon)$ tal que $\varphi(\varepsilon) = \varphi(0) + \varepsilon\varphi'(\eta)$ de manera que

$$\frac{\varphi(\varepsilon) - \varepsilon\varphi'(0)}{\varepsilon^{3/2}} = \frac{\varphi(0)}{\varepsilon^{3/2}} + \frac{\varphi'(\eta) - \varphi'(0)}{\varepsilon^{1/2}} = -\frac{3}{2} \int_\varepsilon^\infty \frac{\varphi(0)}{x^{5/2}} \, dx + \frac{\varphi'(\eta) - \varphi'(0)}{\varepsilon^{1/2}} .$$

Així doncs:

$$(*) = \lim_{\varepsilon\to 0}\left(-\frac{\varphi'(\eta)-\varphi'(0)}{\varepsilon^{1/2}} - \frac{3}{2}\int_{\varepsilon}^{\infty}\frac{\varphi(x)-\varphi(0)-x\varphi'(0)}{x^{5/2}}\,dx\right) = (**)$$

Fixeu-vos que

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\left|\frac{\varphi'(\eta)-\varphi'(0)}{\varepsilon^{1/2}}\right| \underset{\uparrow}{\leq} \lim_{\varepsilon\to 0}\|\varphi''\|_\infty\cdot \eta^{1/2} = 0.$$

(T.V.M. i $\eta\in(0,\varepsilon)$)

Per tant $(**) = \left\langle -\frac{3}{2}\,\text{f.p.}\frac{1}{x_+^{5/2}}, \varphi\right\rangle \Rightarrow f'' = \frac{3}{4}\,\text{f.p.}\frac{1}{x_+^{5/2}}.$

c) Fixem $\varphi\in\mathcal{D}(\mathbb{R})$ i calculem:

$$\langle (\ln|x|)', \varphi\rangle := -\langle \ln|x|, \varphi'\rangle = -\int_{\mathbb{R}}\ln|x|\cdot\varphi'(x)\,dx$$

$$= -\lim_{\varepsilon\to 0}\int_{|x|>\varepsilon}\ln|x|\cdot\varphi'(x)\,dx = -\lim_{\varepsilon\to 0}\left[\int_{-\infty}^{-\varepsilon}\ln|x|\,\varphi'(x)\,dx + \int_{\varepsilon}^{\infty}\ln|x|\,\varphi'(x)\,dx\right]$$

$$= -\lim_{\varepsilon\to 0}\left[\ln|x|\cdot\varphi'(x)\Big|_{-\infty}^{-\varepsilon} - \int_{-\infty}^{-\varepsilon}\frac{\varphi(x)}{x}dx + \ln|x|\,\varphi'(x)\Big|_{\varepsilon}^{\infty} - \int_{\varepsilon}^{\infty}\frac{\varphi(x)}{x}dx\right]$$

$$= \lim_{\varepsilon\to 0}\left[\int_{|x|>\varepsilon}\frac{\varphi(x)}{x}dx + \underbrace{(\varphi(\varepsilon)-\varphi(-\varepsilon))}_{=\varepsilon\cdot\varphi'(\tilde{\varepsilon})}\cdot\ln|\varepsilon|\right] = \lim_{\varepsilon\to 0}\int_{|x|>\varepsilon}\frac{\varphi(x)}{x}dx$$

$$= \left\langle \text{p.v.}\frac{1}{x}, \varphi\right\rangle.$$

Ex. 2

a) El candidat Ψ que proposem és

$$\Psi(x) = \begin{cases}\dfrac{\varphi(x)}{x}, & x\neq 0,\\ \varphi'(0), & x=0.\end{cases} \qquad \Psi(x) = \begin{cases}\dfrac{\varphi(x)}{x-a}, & x\neq a,\\ \varphi'(a), & x=a.\end{cases}$$

La funció Ψ clarament satisfà $\varphi = x\Psi$ i a més és contínua, ja que $\varphi(0) = 0$. De fet, és infinitament diferenciable (amb suport compacte). En efecte, vegem alguns casos:

- Primera derivada en $x=0$:

$$\lim_{x\to 0} \frac{\Psi(x) - \Psi(0)}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{\frac{\varphi(x)}{x} - \varphi'(0)}{x}$$

$$\xrightarrow{\text{(Taylor)}} = \lim_{x\to 0} \frac{\frac{\varphi(0) + x\varphi'(0) + \frac{x^2}{2}\varphi''(\xi(x))}{x} - \varphi'(0)}{x} = \frac{1}{2}\varphi''(0) \checkmark$$

- Segona derivada en $x=0$:

$$\lim_{x\to 0} \frac{\Psi'(x) - \Psi'(0)}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{\frac{x\varphi'(x) - \varphi(x)}{x^2} - \frac{1}{2}\varphi''(0)}{x}$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{\frac{x\varphi'(0) + x^2\varphi''(0) + \frac{x^3}{2}\varphi'''(\xi(x)) - x\varphi'(0) - \frac{x^2}{2}\varphi''(0) - \frac{x^3}{6}\varphi'''(\tilde{\xi}(x))}{x^2} - \frac{1}{2}\varphi''(0)}{x}$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{1}{2}\varphi'''(\xi(x)) - \frac{1}{6}\varphi'''(\tilde{\xi}(x)) = \frac{1}{3}\varphi'''(0) \checkmark$$

Per inducció podríem acabar veient que, en efecte, Ψ és infinitament derivable.

b) Els arguments són anàlegs als de l'apartat anterior, ara amb

$$\Psi(x) := \begin{cases} \frac{\varphi(x)}{x^m}, & \text{si } x \neq 0, \\ \frac{\varphi^{(m)}(0)}{m!}, & \text{si } x = 0. \end{cases} \qquad \Psi(x) := \begin{cases} \frac{\varphi(x)}{(x-a)^m}, & \text{si } x \neq a, \\ \frac{\varphi^{(m)}(a)}{m!}, & \text{si } x = a. \end{cases}$$

c) $\left\langle x\left(\text{p.v.}\frac{1}{x}\right), \varphi \right\rangle := \left\langle \text{p.v.}\frac{1}{x}, x\varphi \right\rangle := \lim\limits_{\varepsilon\to 0}\int_{|x|>\varepsilon} \frac{x\varphi(x)}{x}\,dx$

$(x-a)\left(\text{p.v.}\frac{1}{x-a}\right)$

$$= \int_{\mathbb{R}^n} \varphi(x)\,dx = \langle 1, \varphi\rangle, \quad \forall \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n) \ \checkmark.$$

d) El cas $m=1$ es dedueix de l'apartat anterior i l'exercici 1c). Provem el resultat general per inducció sobre m. Suposem doncs

$$x^{m-1}T_{m-1} = 1. \quad \text{(H.I.)} \qquad (x-a)^{m-1}T_{m-1} = 1, \quad \text{on} \quad T_k = \frac{(-1)^{k-1}}{(k-1)!}\partial^k \log|x-a|$$

Fixem-nos que $T_m = (1-m)^{-1}\cdot \partial T_{m-1}$, per tant

$$x^m T_m = (1-m)^{-1} x^m \partial T_{m-1} = (1-m)^{-1}\left[\partial(x^m T_{m-1}) - (\partial x^m)T_{m-1}\right]$$

$$= (1-m)^{-1}\left[\partial(x\cdot 1) - m\,(x^{m-1}T_{m-1})\right]$$

$$\underset{\text{(H.I.)}}{=} (1-m)^{-1}\left[1 - m\cdot 1\right] = 1 \ \checkmark$$

e) Sigui $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ tal que $\varphi^{(j)}(0) = 0$ per tot $0 \le j \le m-1$. Aplicant l'apartat b) tenim:

a

$(x-a)^m$

$$\langle T, \varphi\rangle = \langle T, x^m \psi\rangle = \langle x^m T, \psi\rangle = 0 = \sum_{j=0}^{m-1} \partial^j \varphi(0)$$

a

$$= \left\langle \sum_{j=0}^{m-1} c_j \cdot \partial^j \delta, \varphi \right\rangle, \quad \text{on} \quad c_j \in \{-1, 1\}. \ \checkmark$$

$\partial^j \delta_a$

Suposem ara que $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ és qualsevol. Triem $h \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ amb $h \equiv 1$ a un interval a l'entorn de $\underbrace{\text{l'origen}}_{x=a}$. Si anomenem

$$\Phi := \varphi - h\varphi,$$

a

es té $\Phi^{(j)}(0) = 0$, $0 \le j \le m-1$ (en particular). Llavors,

$$\langle T, \varphi\rangle = \langle T, \Phi + h\varphi\rangle = \langle T, h\varphi\rangle =: (*)$$

Usant ara el T^a de Taylor tenim

$$\sum \frac{\partial^j\varphi(a)}{j!}(x-a)^j + \frac{\partial^m\varphi(\xi(x))}{m!}(x-a)^m$$

$$(*) = \left\langle T, h\left(\sum_{j=0}^{m-1} \frac{\partial^j\varphi(0)}{j!}x^j + \frac{\partial^m\varphi(\xi(x))}{m!}x^m\right)\right\rangle$$

$$= \sum_{j=0}^{m-1}\frac{\partial^j\varphi(0)}{j!}\langle T, hx^j\rangle + \underbrace{\left\langle x^m T, \frac{\partial^m\varphi(\xi(x))}{m!}\right\rangle}_{=0 \text{ ja que } x^m T = 0.}$$

$$= \sum_{j=0}^{m-1}\underbrace{\frac{(-1)^j\langle T, hx^j\rangle}{j!}}_{c_j}\langle \partial^j\delta, \varphi\rangle$$

$$= \left\langle \sum_{j=0}^{m-1} c_j\partial^j\delta, \varphi\right\rangle \checkmark.$$

f) $x^m T = 1 \leftrightarrow x^m T - 1 = 0 \underset{d)}{\longleftrightarrow} x^m(T - T_m) = 0$

$$\underset{e)}{\longleftrightarrow} \quad T - T_m = \sum_{j=0}^{m-1} c_j \underset{\partial^j\delta_a}{\underset{\uparrow}{\partial^j\delta}} \quad \checkmark.$$

Ex. 3:

Si voleu detalls de la resolució veniu a veure'm al despatx o escriviu-me un correu!