Seminari 3 Anàlisi harmònica

Guillem Tutusaus i Alcaraz, 1533701

28 de Maig de 2024

1. Responeu les següents qüestions.

   (a) Calculeu la transformada de Fourier de $f(x) = x\mathcal{X}_{[a,b]}(x)$, per $a < b$ reals.

$$\widehat{x\mathcal{X}_{[a,b]}} = \frac{\widehat{2\pi i x\mathcal{X}_{[a,b]}}}{2\pi i} = \frac{1}{2\pi i}\widehat{\mathcal{X}_{[a,b]}}' \tag{1}$$

   on hem fet servir que

$$\partial^\alpha \widehat{T} = \widehat{(2\pi i x)^{|\alpha|}T}$$

   A més, fent servir els següents resultats de classe

   i. $\mathcal{X}_{[a,b]}(x) = \mathcal{X}_{[a,\infty)}(x) - \mathcal{X}_{[b,\infty)}(x) = \mathcal{X}_{[0,\infty)}(x-a) - \mathcal{X}_{[0,\infty)}(x-b)$

   ii. $\widehat{\mathcal{X}_{[0,\infty)}} = \frac{1}{2}\delta_0 + \frac{1}{2\pi i}\text{p.v}\frac{1}{\xi}$

   Podem comprovar que

$$\begin{aligned}
\widehat{\mathcal{X}_{[a,b]}} &= \mathcal{X}_{[0,\infty)}\widehat{(x-a)} - \mathcal{X}_{[0,\infty)}\widehat{(x-b)} \\
&= e^{-2\pi i a\xi}\widehat{\mathcal{X}_{[0,\infty)}} - e^{-2\pi i b\xi}\widehat{\mathcal{X}_{[0,\infty)}} \\
&= (e^{-2\pi i a\xi} - e^{-2\pi i b\xi})\widehat{\mathcal{X}_{[0,\infty)}}
\end{aligned}$$

   D'aquesta manera,

$$\widehat{\mathcal{X}_{[a,b]}}' = (\frac{1}{2}\delta_0(e^{-2\pi i a\xi} - e^{-2\pi i b\xi}))' + \frac{1}{2\pi i}(\text{p.v}\Big(\frac{1}{\xi}\Big)(e^{-2\pi i a\xi} - e^{-2\pi i b\xi}))'$$

   Calculant la primera derivada distribucional

$$\langle(\frac{1}{2}\delta_0(e^{-2\pi i a\xi} - e^{-2\pi i b\xi}))', \varphi\rangle = -\langle\frac{1}{2}\delta_0, \varphi'(e^{-2\pi i a\xi} - e^{-2\pi i b\xi})\rangle = 0$$

   Finalment utilitzant el resultat anterior juntament amb (1) tenim

$$\widehat{x\mathcal{X}_{[a,b]}} = -\frac{1}{4\pi^2}(\text{p.v}\Big(\frac{1}{\xi}\Big)(e^{-2\pi i a\xi} - e^{-2\pi i b\xi}))'$$

   (b) Calculeu la transformada de Fourier de $f(x) = g(x)\cos(x)^2$ per $g \in L^1(\mathbb{R})$.

   Utilitzant identitats trigonomètriques, veiem que $f(x)$ es pot reescriure de la següent manera $f(x) = g(x)\cos(x)^2 = g(x)\big(\frac{1+\cos(2x)}{2}\big)$, de manera que

$$\widehat{f}(\xi) = \frac{1}{2}\widehat{g}(\xi) + \frac{1}{2}g\widehat{(x)\cos}(2x)$$

Finalment, sabent

$$\widehat{g(x)\cos(2x)} = \frac{\widehat{g}(\xi - \frac{1}{\pi}) + \widehat{g}(\xi + \frac{1}{\pi})}{2}$$

obtenim

$$\widehat{f}(\xi) = \frac{1}{2}\widehat{g}(\xi) + \frac{\widehat{g}(\xi - \frac{1}{\pi}) + \widehat{g}(\xi + \frac{1}{\pi})}{4} \tag{2}$$

on $\widehat{g}$ és la tranformada de Fourier de g. Veiem ara que realment $\widehat{g(x)\cos(2x)} = \frac{\widehat{g}(\xi - \frac{1}{\pi}) + \widehat{g}(\xi + \frac{1}{\pi})}{2}$. Utilitzant la definició habitual i escrivint $\cos(2x) = \frac{e^{2ix}+e^{-2ix}}{2}$, obtenim

$$\begin{aligned}
\widehat{g(x)\cos(2x)} &= \int_{-\infty}^{\infty} g(x)\Big(\frac{e^{2ix}+e^{-2ix}}{2}\Big)e^{-2\pi i x\xi}dx \\
&= \frac{1}{2}\Big(\int_{-\infty}^{\infty}(g(x)e^{2ix})e^{-2\pi i x\xi} + \int_{-\infty}^{\infty}(g(x)e^{-2ix})e^{-2\pi i x\xi}\Big)dx \\
&= \frac{1}{2}(\widehat{g(x)e^{iax}} + \widehat{g(x)e^{-iax}})
\end{aligned}$$

Ara, sabent que $\widehat{g(x)e^{iax}} = \widehat{g}(\xi - \frac{a}{2\pi})$ com hem vist a teoria[1], és fàcil veure (2).

(c) Tindria sentit preguntar-se per la transformada de Fourier de la funció $e^x\cos(e^x)$?

Recordem que per tal que la transformada de Fourier de la funció $f(x) = e^x\cos(e^x)$ existeixi a L^1 és necessari el següent

$$\int_{-\infty}^{\infty} |e^x\cos(e^x)|dx < \infty$$

Ara bé, la integral anterior no és convergent perquè no existeix el límit quan x tendeix a infinit de $|e^x\cos(e^x)|$, i.e $\lim_{x\to\infty}|e^x\cos(e^x)|$.

No obstant, en el sentit distribucional si que podem parlar de la seva transformada de Fourier. Encara que $f(x)$ no sigui una distribució temperada, si que és la derivada d'una distribució temperada com podem veure

$$\widehat{e^x\cos(e^x)} = \widehat{\sin(e^x)'} = (2\pi i\xi)\widehat{\sin(e^x)}$$

on en la darrera igualtat hem fet servir propietats de la tranformada d'una derivada. Calculant la transformada de Fourier de $\sin(e^x)$ veiem:

$$\begin{aligned}
\mathcal{F}\{\sin(e^x)\}(\xi) &= \int_{-\infty}^{\infty}\sin(e^x)e^{-2\pi i x\xi}dx \\
&= \int_{0}^{\infty}\frac{\sin(t)}{t}e^{-2\pi i\log(t)\xi}dt \\
&= \int_{0}^{\infty}\sin(t)t^{(-2\pi i\xi)-1}dt \\
&= \mathcal{M}\{\sin(t)\}(s = -2\pi i\xi)
\end{aligned}$$

[1]De fet, a teoria hem vist que $\widehat{g(x)e^{2\pi iax}} = \widehat{g}(\xi - a)$, però llavors és fàcil provar $\widehat{g(x)e^{iax}} = \widehat{g}(\xi - \frac{a}{2\pi})$.

on la darrera integral correspon a la transformada de Mellin de $\sin(t)$ que és

$$-\sin(i\pi^2\xi)\Gamma(-2\pi i\xi)$$

Finalment,

$$(2\pi i\xi)\widehat{\sin(e^x)} = -2\pi i\xi \sin(i\pi^2\xi)\Gamma(-2\pi i\xi) = 2\pi\xi \sinh(\pi^2\xi)\Gamma(-2\pi i\xi)$$

2. Responeu les següents qüestions.

(a) Considereu $Q_0 := [-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}] \times [-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$ el quadrat tancat unitat de $\mathbb{R}^2$. Proveu que la funció característica $\mathcal{X}_{Q_0}$, entesa com a element de $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^2)$, té com a suport Q_0.

Enunciem un resultat una mica més general i després el demostrem: *T és una distribució amb suport compacte, si i només si $T \in \mathcal{E}^{'}(\mathbb{R}^n)$.* Tenint present la definició de suport d'una distribució, considerem l'espai $\mathcal{E}(\mathbb{R}^n) := \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^n)$ i el seu dual $\mathcal{E}^{'}(\mathbb{R}^n)$. És fàcil veure que $T \in \mathcal{E}^{'}(\mathbb{R}^n)$ si i només si existeix $C > 0$ i $N, m \in \mathbb{N}$ tals que

$$|\langle T, \varphi\rangle| \leq C \sum_{|\alpha|\leq m} \sup_{|x|\leq N} |(\partial^\alpha \varphi)(x)|$$

per a tota $\varphi \in \mathcal{E}(\mathbb{R}^n)$. Ara, comencem veient primer de tot que T és una distribució amb suport compacte K. Per definició, si $\varphi \in \mathcal{E}(\mathbb{R}^n)$ té suport a $\mathbb{R}^n \setminus K$, tenim que $\langle T, \varphi\rangle = 0$. Ara considerem una funció $\psi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ tal que $\psi(x) = 1$ per a tot $x \in K$. Aleshores, per a tota $\varphi \in \mathcal{E}(\mathbb{R}^n)$ tenim que:

$$|\langle T, \varphi\rangle| = |\langle T, \varphi\psi\rangle + \langle T, \varphi(1-\psi)\rangle| = |\langle T, \varphi\psi\rangle| \leq C \sum_{|\alpha|\leq m} \sup_{x\in Q} |(\partial^\alpha(\varphi\psi))(x)|$$

per a tot compacte $Q \subset \Omega$ i certes constants $C > 0, m \in \mathbb{N}$. La segona igualtat es deu al fet que $\varphi(1-\psi)$ té suport contingut en $\mathbb{R}^n \setminus K$ i la desigualtat ve del fet que $\varphi\psi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ i, per tant, dins aquestes condicions tenim continuïtat. Si triem $Q = K$ tenim que $\sup_{x\in Q} |(\partial^\alpha(\varphi\psi))(x)| = \sup_{x\in K} |(\partial^\alpha\varphi)(x)|$ ja que $\varphi\psi = \varphi$ a K.
Finalment, triant un $N \in \mathbb{N}$ suficientment gran perquè $K \subset \overline{B(0,N)}$ obtenim el resultat:

$$|\langle T, \varphi\rangle| \leq C \sum_{|\alpha|\leq m} \sup_{x\in K} |(\partial^\alpha\varphi)(x)| \leq C \sum_{|\alpha|\leq m} \sup_{|x|\leq N} |(\partial^\alpha\varphi)(x)| \tag{3}$$

Veiem ara la implicació contrària. Comencem suposant que $T \in \mathcal{E}'(\mathbb{R}^n)$. Com que $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n) \subset \mathcal{E}(\mathbb{R}^n)$, tenim que $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^n) \subset \mathcal{E}'(\mathbb{R}^n)$. Per tant, T és una distribució i a més el seu suport K és tancat, perquè és intersecció de tancats. Cal veure que K és acotat. Del fet que $T \in \mathcal{E}'(\mathbb{R}^n)$, tenim que existeixen constants $C > 0$, $N, m \in \mathbb{N}$ tals que es satisfà (3). Ara bé, si K no fos acotat, aleshores podríem triar $\varphi \in \mathcal{E}(\mathbb{R}^n)$ tal que $\operatorname{supp} \varphi \subseteq \mathbb{R}^n \setminus \overline{B(0,N)}$ i $|\langle T, \varphi\rangle| > 0$, ja que si no poguéssim voldria dir que $\operatorname{supp} T \subseteq \overline{B(0,N)}$, que estaria acotat. Però això contradiu (3) ja que totes les seminormes $\sup_{|x|\leq N} |(\partial^\alpha\varphi)(x)|$ serien 0 perquè φ és nul·la a dins de $\overline{B(0,N)}$. Amb això hem vist que no només K ha de ser acotat, sinó que ha d'estar contingut en $\overline{B(0,N)}$.

(b) Enuncieu el resultat que feu servir a l'apartat (b) de l'exercici 2 del Seminari 3.

Fent servir l'expansió de φ en sèrie de Taylor centrada en x_0, i.e

$$\varphi(x) = \sum_{|\alpha|\leq k} \frac{1}{\alpha!}\partial^\alpha \varphi(x_0)(x-x_0)^\alpha + R_{k,\varepsilon}(x)$$

on $R_{k,\varepsilon}(x) = \sum_{|\alpha|=k+1} \frac{\partial^\alpha \varphi(x_0+c(x-x_0))}{\alpha!}(x-x_0)^\alpha$, $c \in (0,1)$ i $|x-x_0| \leq \varepsilon$. Denotant $a_\alpha := \frac{(-1)^\alpha}{\alpha!}\langle T, (x-x_0)^\alpha\rangle$, aleshores tenim el resultat

$$\langle T, \varphi\rangle = \sum_{|\alpha|\leq k} a_\alpha (-1)^\alpha \partial^\alpha \varphi(x_0) + \langle T, R_{k,\varepsilon}\rangle = \sum_{|\alpha|\leq k} a_\alpha \langle \partial^\alpha \delta_{x_0}, \varphi\rangle + \langle T, R_{k,\varepsilon}\rangle$$

on sabem que $|\langle T, R_{k,\varepsilon}\rangle| \xrightarrow{\varepsilon\to 0} 0$ perquè ja ho hem vist al Seminari 3.

(c) A l'apartat (a) de l'exercici 2 del Seminari 3 se us demana provar que una distribució amb suport compacte té ordre finit. Per què és necessària aquesta hipòtesi per a resoldre l'exercici?

Cal veure això per provar que és de fet una distribució temperada.