1. Considerem la sèrie de Fourier d'una funció f en forma complexa, i.e. $\sum_{k=-\infty}^{\infty} \hat{f}(k)e^{ikt}$.

   Sigui $\mathcal{A}$ el conjunt de funcions contínues a $[-\pi, \pi]$ amb sèrie de Fourier absolutament convergent. Definim $\|f\|_{\mathcal{A}} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} |\hat{f}(k)|$. Demostreu que:

   (a) La hipòtesi de convergència absoluta implica la convergència uniforme de la sèrie de Fourier.

   (b) Demostreu que si f és contínua i derivable a trossos, amb f' de quadrat integrable, llavors $f \in \mathcal{A}$ i doneu una cota per $\|f\|_{\mathcal{A}}$.

   (c) Proveu que si f i g estan a $\mathcal{A}$, llavors el seu producte fg també pertany a $\mathcal{A}$ i es compleix $\|fg\|_{\mathcal{A}} \leq \|f\|_{\mathcal{A}}\|g\|_{\mathcal{A}}$.

2. Sigui f la funció definida a $[-\pi, \pi]$ per $f(t) = |t|$. Comproveu que

$$\hat{f}(n) = \begin{cases} \frac{\pi}{2} & \text{si } n = 0 \\ \frac{-1+(-1)^n}{\pi n^2} & \text{si } n \neq 0. \end{cases}$$

   Utilitzant el desenvolupament en sèrie de Fourier de la funció anterior, proveu que

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2k+1)^2} = \frac{\pi^2}{8} \qquad \text{i} \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}.$$

3. Volem provar: *Si $f \equiv 0$ a $[a, b] \subset [-\pi, \pi]$, la seva sèrie de Fourier convergeix uniformement a zero a $[a + \delta, b - \delta]$ per $\delta > 0$.*

   Per tal de demostrar aquest resultat, proveu primer la següent adaptació del lema de Riemann-Lebesgue:

   Si f és $2\pi-$periòdica, integrable i acotada, i g és una funció monòtona a trossos i acotada, llavors

$$\lim_{\lambda\to\infty} \int_{-\pi}^{\pi} f(x+t)g(t)\sin(\lambda t)dt = 0$$

   uniformement en x.

   (*Indicació: podeu suposar que f i g són no-negatives i aproximar f per funcions esglaonades.*)

4. Comproveu que per $\alpha \notin \mathbb{Z}$, la sèrie de Fourier de $\frac{\pi}{\sin(\pi\alpha)} e^{i(\pi - x)\alpha}$ a $[0, 2\pi]$ ve donada per $\sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{e^{inx}}{n+\alpha}$. Utilitzeu la identitat de Parseval per demostrar que

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{(n+\alpha)^2} = \frac{\pi^2}{(\sin(\pi\alpha))^2}.$$