Llista 3 Anàlisi harmònica

Guillem Tutusaus i Alcaraz

19 d'Abril del 2024

1. Si $D_N(t)$ denota el nucli de Dirichlet. Demostreu que

$$\int_{-\pi}^{\pi} |D_N(t)| dt \approx \log(N+1)$$

i que per tant la família de nuclis de Dirichlet no són una aproximació de la identitat quan $N \to \infty$.

$$||D_N(t)||_{L^1([-\pi,\pi])} = \int_{-\pi}^{\pi} \left| \frac{\sin((N+1/2)t)}{\sin(t/2)} \right| dt = 2\int_0^{\pi} \left| \frac{\sin((N+1/2)t)}{\sin(t/2)} \right| dt$$
$$= 2\int_0^{\pi} \frac{|\sin((N+1/2)t)|}{\sin(t/2)} dt \approx \int_0^{\pi} \frac{|\sin((N+1/2)t)|}{t} dt$$

on hem utilitzat la definició de la norma L^1, la simetria de $|D_N(t)|$, el fet que $\sin(t/2)$ és positiu en $[0,\pi]$ i finalment el criteri de comparació per integrals. Ara, considerant $y = (N+1/2)t$, tenim

$$\int_0^{(N+1/2)\pi} \frac{|\sin(y)|}{y} dy \geq \sum_{k=0}^{N} \int_{k\pi}^{(k+1)\pi} \frac{|\sin(y)|}{y} dy$$
$$\geq \left| \sum_{k=0}^{N} \int_0^{\pi} \frac{\sin(y)}{(k+1)\pi} dy \right| = \frac{2}{\pi} \sum_{k=0}^{N+1} \frac{1}{k} \approx \log(N+1)$$

On en la primera desigualtat hem partit la integral original en suma d'integrals i ignorat el 1/2 al tenir un integrand no-negatiu. Per la segona desigualtat hem acotat la integral al ser una successió monòtona i $|\sin(y)|$ una funció π-periòdica de la següent manera.

$$\left| \sum_{k=0}^{N} \int_0^{\pi} \frac{\sin(y)}{(k+1)\pi} dy \right| \leq \sum_{k=0}^{N} \int_0^{\pi} \frac{|\sin(y)|}{(k+1)\pi} dy$$
$$= \sum_{k=0}^{N} \int_{k\pi}^{(k+1)\pi} \frac{|\sin(y)|}{(k+1)\pi} dy \leq \sum_{k=0}^{N} \int_{k\pi}^{(k+1)\pi} \frac{|\sin(y)|}{y} dy$$

Finalment, sabent que $H_N \approx \log(N)$ ja ho tindríem.

2. Sigui $f \in \mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R}^2)$ una funció infinítament diferenciable i amb suport compacte. Definim la seva transformada de Radon $R_\theta f(t)$ d'angle θ i paràmetre t com la integral de f a la recta $-x\sin\theta + y\cos\theta = t$, és a dir

$$R_\theta f(t) = \int_{\mathbb{R}} f(-t\sin\theta + \rho\cos\theta, t\cos\theta + \rho\sin\theta)d\rho$$

   (a) Trobeu una expressió de la transformada de Fourier 1-dimensional $\widehat{R_\theta f}(\xi)$ en funció de la transformada de Fourier 2-dimensional de f:

$$\widehat{f}(\xi_1, \xi_2) = \widehat{f}(\xi) = \int_{\mathbb{R}^2} f(x)e^{-2\pi i x\xi}dx$$

   (b) Com podem recuperar f a partir de $R_\theta f$ amb $0 \leq \theta \leq 2\pi$?

3. Suposeu que f és contínua a $\mathbb{R}$. Proveu que f i $\widehat{f}$ no poden tenir les dues suport compacte a no ser que $f = 0$. Això es pot interpretar amb el mateix esperit que el principi d'incertesa.
Demostrem aquest fet per reducció a l'absurd. Comencem doncs suposant que f i $\widehat{f}$ tenen suports compactes $K_f \in [-(N-1), N-1] \subset [-N, N]$ i $K_{\widehat{f}} \in [-M, M]$ respectivament per certs $N, M \in \mathbb{N}$. Considerant la periodització de f amb període $2N$ que per tal de simplificar la notació també anomenarem f, considerant la seva sèrie de mitjanes de Féjer tenim:

$$\begin{aligned} \sigma_R f(x) &= \sum_{n=-R}^{R} \left(1 - \frac{|n|}{R+1}\right)\widehat{f}(n)e^{\frac{2\pi i n x}{2N}} \\ &= \sum_{n=-M}^{M} \left(1 - \frac{|n|}{R+1}\right)\widehat{f}(n)e^{\frac{2\pi i n x}{2N}} \xrightarrow{R\to\infty} \sum_{n=-M}^{M} \widehat{f}(n)e^{\frac{2\pi i x n}{2N}} \end{aligned}$$

Ara bé, per la continuïtat de f i el teorema de Fejér, tenim que

$$f(x) = \lim_{R\to\infty} \sigma_R f(x) = \sum_{n=-M}^{M} \widehat{f}(n)e^{\frac{2\pi i n x}{2N}}$$

per a tot $x \in \mathbb{R}$. Observem que com que $e^{\frac{2\pi i n x}{2N}}$ és analítica, i les combinacions lineals de funcions analítiques son analítiques, tenim que f també ho és. Però $f(x) = 0$ per $x \in (N-1, N)$. Per tant, pel principi de prolongació analítica, tenim que $f = 0$.

4. Apliqueu la fórmula de sumació de Poisson a la funció $g(x) = (1 - |x|)\chi_{|x|\leq 1}(x)$ per demostrar

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}} \frac{1}{(n+\alpha)^2} = \frac{\pi^2}{(\sin(\pi\alpha))^2}$$

deduïm com a conseqüència que

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}}\frac{1}{n+\alpha}=\frac{\pi}{\tan(\pi\alpha)}$$

En el cas $\xi=0$, tenim que el coeficient de Fourier de $g(x)$, $\widehat{g}(0)$ es correspon amb l'àrea del triangle amb base 2 i altura 1. Per tant, $\widehat{g}(0)=1$. Pel cas en que $\xi\neq 0$ cal resoldre el següent.

$$\begin{aligned}
\widehat{g}(\xi) &= \int_{-\infty}^{\infty}(1-|x|)\chi_{[-1,1]}(x)e^{-2\pi i\xi x}dx=\widehat{g}(0)-\int_{-1}^{1}|x|e^{-2\pi i\xi x}dx\\
&=\widehat{g}(0)-\left(\int_{-1}^{0}-xe^{-2\pi i\xi x}dx+\int_{0}^{1}xe^{-2\pi i\xi x}dx\right)\\
&=\widehat{g}(0)-\left(2\int_{0}^{1}x\cos(2\pi\xi x)dx\right)\\
&=\frac{\sin(2\pi\xi)}{\pi\xi}-\left(\frac{2\pi\xi\sin(2\pi\xi)+\cos(2\pi\xi)-1}{2\pi^2\xi^2}\right)=-\frac{\cos(2\pi\xi)-1}{2\pi^2\xi^2}
\end{aligned}$$

Finalment utilitzant l'identitat trigonomètrica $2(\sin(x))^2=1-\cos(2x)$ veiem que la transformada de Fourier de $g(x)$ quedaria:

$$\widehat{g}(\xi)=\frac{(\sin(\pi\xi))^2}{\pi^2\xi^2}$$

Ara, apliquem la fórmula general de Poisson a $\widehat{g}$. Ens fixem que $\widehat{g}$ és contínua i integrable. A més, $\sum_{n\in\mathbb{Z}}\widehat{g}(\xi+n)$ és uniformement convergent per $\xi\in[0,1]$ ja que pel teorema M de Weierstrass tenim

$$|\widehat{g}(\xi+n)|=\frac{(\sin(\pi(\xi+n)))^2}{\pi^2(\xi+n)^2}\leq\frac{1}{\pi^2(\xi+n)^2}\leq\frac{1}{\pi^2n^2}$$

per n prou gran, que és una sèrie convergent. A més,

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}}|\widehat{\widehat{g}}(n)|=\sum_{n\in\mathbb{Z}}|g(n)|=|g(0)|=1<\infty$$

al ser g una funció parella. Per tant, la fórmula de sumació de Poisson ens diu que $\sum\widehat{g}(n+\alpha)=\sum g(n+\alpha)=1$, i.e.

$$1=\sum_{n\in\mathbb{Z}}\frac{(\sin(\pi(n+\alpha)))^2}{\pi^2(n+\alpha)^2}=\frac{(\sin(\pi\alpha))^2}{\pi^2}\sum_{n\in\mathbb{Z}}\frac{1}{(n+\alpha)^2}$$

on hem utilitzat que $\sin(a+b)=\sin(a)\cos(b)+\sin(b)\cos(a)$. Obtenim per tant el resultat que buscavem.

Per tal de deduïr el segon resultat que ens demanen recordem que $\sum_{n\in\mathbb{Z}} \frac{1}{(n+\alpha)^2}$ és uniformement convergent per a $\alpha \in [0,1]$. Definim $f_n(\alpha) = \frac{1}{(n+\alpha)^2}$. Tenim que f_n és integrable Riemann en $[0,1]$ $\forall n \in \mathbb{Z} \setminus \{0,-1\}$. Vegem que també tenim integrabilitat de la funció

$$\frac{\pi^2}{(\sin(\pi\alpha))^2} - \frac{1}{\alpha^2} - \frac{1}{(\alpha-1)^2}$$

en [0,1]. Els problemes només els tenim en 0 i 1. A prop del 0, hem de controlar $\frac{\pi^2}{(\sin(\pi\alpha))^2} - \frac{1}{\alpha^2}$. Tenim que:

$$\frac{\pi^2}{(\sin(\pi\alpha))^2} - \frac{1}{\alpha^2} \approx \frac{\pi^2}{(\pi\alpha - \frac{(\pi\alpha)^3}{3!} + \dots)^2} - \frac{1}{\alpha^2} \approx \frac{\pi^2}{\pi^2\alpha^2 - \frac{\pi^4\alpha^4}{3} + \dots} - \frac{1}{\alpha^2}$$
$$\approx \frac{1}{\alpha^2}\left(\frac{1}{1-\frac{\pi^2\alpha^2}{3} + \dots} - 1\right) \approx \frac{1}{\alpha^2}\left(\left[1 - \frac{\pi^2\alpha^2}{3} + \dots\right] - 1\right) \approx \frac{\pi^2}{3} + \dots$$

Similarment a prop de 1, hem de controlar $\frac{\pi^2}{(\sin(\pi\alpha))^2} - \frac{1}{(\alpha-1)^2}$. Com que

$$\frac{\pi^2}{(\sin(\pi(\alpha-1)))^2} - \frac{1}{(\alpha-1)^2} = \frac{\pi^2}{(\sin(\pi\alpha))^2} - \frac{1}{(\alpha-1)^2}$$

ja que $\sin(a+b) = \sin(a)\cos(b) + \sin(b)\cos(a)$ i canviant α per $\alpha - 1$ en la fórmula anterior, tenim que:

$$\frac{\pi^2}{3} + \dots \approx \frac{\pi^2}{(\sin(\pi(\alpha-1)))^2} - \frac{1}{(\alpha-1)^2}$$

Per tant, tenim integrabilitat i usant el fet que $\int \frac{\pi^2}{(\sin(\pi\alpha))^2} d\alpha = -\frac{\pi}{\tan(\pi\alpha)} + C$ deduïm que:

$$\int \left(\frac{\pi^2}{(\sin(\pi\alpha))^2} - \frac{1}{\alpha^2} - \frac{1}{(\alpha-1)^2}\right) d\alpha = \sum_{n\in\mathbb{Z}\setminus\{0,-1\}} \int \frac{1}{(n+\alpha)^2}$$
$$-\frac{\pi}{\tan(\pi\alpha)} + \frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\alpha-1} + C = -\sum_{n\in\mathbb{Z}\setminus\{0,-1\}} \frac{1}{n+\alpha}$$

Ara, si fem el límit quan $\alpha \to 0$ tindrem d'una banda que

$$-\frac{1}{\alpha-1} - \sum_{n\in\mathbb{Z}\setminus\{0,-1\}} \frac{1}{n+\alpha} = \sum_{n\in\mathbb{Z}\setminus\{0\}} \frac{1}{n+\alpha} = \lim_{N\to\infty} \sum_{n=1}^{N} \left(\frac{1}{\alpha+n} + \frac{1}{\alpha-n}\right)$$
$$= \lim_{N\to\infty} \sum_{n=1}^{N} \frac{2\alpha}{\alpha^2 - n^2} \xrightarrow{\alpha\to 0} 0$$

I d'altra banda,

$$-\frac{\pi}{\tan(\pi\alpha)}+\frac{1}{\alpha}=\int\left(\frac{\pi^2}{(\sin(\pi\alpha))^2}-\frac{1}{\alpha^2}\right)d\alpha \approx \frac{\pi^2}{3}\alpha+\dots \xrightarrow{\alpha\to 0} 0$$

Per tant $C=0$ i ja estem.

5. (a) Donada $f[n]=\cos(\frac{\pi n}{2}), n=0,1,2,3$, calculeu la seva DFT.
   Aplicant el vist a classe, tenim

$$\widehat{f}[n]=\sum_{k=0}^{3}\cos\left(\frac{\pi k}{2}\right)e^{-\frac{2\pi i k n}{4}}=1-e^{-\pi i n}=1-(-1)^n$$

   (b) Sigui $f[n]=[1,2,0,3,-2,4,7,5]$. Calculeu $\widehat{f}[0], \widehat{f}[4], \sum_{k=0}^{7}\widehat{f}[k]$ i $\sum_{k=0}^{7}|\widehat{f}[k]|^2$. Tenim,

$$\widehat{f}[0]=\sum_{k=0}^{7}f[k]=20$$
$$\widehat{f}[4]=\sum_{k=0}^{7}f[k]e^{-\pi i k}=\sum_{k=0}^{7}f[k](-1)^k=-8$$

   Per calcular $\sum_{k=0}^{7}\widehat{f}[k]$ utilitzem la fórmula de sumació de Poisson de manera que

$$\sum_{k=0}^{7}\widehat{f}[k]=8f[0]=8$$

   Per a l'últim apartat, utilitzem la identitat de Plancherel:

$$\sum_{k=0}^{7}|\widehat{f}[k]|^2=8\sum_{k=0}^{7}|f[k]|^2=8\cdot 108=864$$