Llista 2 Anàlisi harmònica

Guillem Tutusaus i Alcaraz

1533701

1. Considerem la sèrie de Fourier d'una funció f en forma complexa, i.e. $\sum_{n\in\mathbb{Z}} \hat{f}(n)e^{int}$. Sigui $\mathcal{A}$ el conjunt de funcions contínues a $[-\pi,\pi]$ amb sèrie de Fourier absolutament convergent. Definim $||f||_{\mathcal{A}} := \sum_{n\in\mathbb{Z}} |\hat{f}(n)|$. Demostrem que:
   (a) La hipòtesi de convergència absoluta implica la convergència uniforme de la sèrie de Fourier.
   (b) Demostreu que si f és contínua i derivable a trossos, amb f' de quadrat integrable, llavors $f \in \mathcal{A}$ i doneu una cota per $||f||_{\mathcal{A}}$.
   (c) Proveu que si f i g estan a $\mathcal{A}$, llavors el seu producte fg també pertany a $\mathcal{A}$ i es compleix $||fg||_{\mathcal{A}} \leq ||f||_{\mathcal{A}}||g||_{\mathcal{A}}$.

   (a) Veiem que es verifica la condició M-Weierstrass.

$$\left|\sum_{n\in\mathbb{Z}} \hat{f}(n)e^{int}\right| \leq \sum_{n\in\mathbb{Z}} \left|\hat{f}(n)\right| < \infty$$

   Per tant, tenim convergència uniforme de la sèrie de Fourier.

   (b) Recordem que $\widehat{f'}(n) = in\hat{f}(n)$. Veiem que la sèrie és absolutament convergent.

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}} |\hat{f}(n)| = |\hat{f}(0)| + \sum_{n\in\mathbb{Z}\setminus\{0\}} \frac{1}{n} n|\hat{f}(n)| \tag{1}$$

$$\leq |\hat{f}(0)| + \frac{1}{2}\sum_{n\in\mathbb{Z}\setminus\{0\}} \left(\frac{1}{n^2} + n^2|\hat{f}(n)|^2\right) \tag{2}$$

$$= |\hat{f}(0)| + \frac{1}{2}\sum_{n\in\mathbb{Z}\setminus\{0\}} \frac{1}{n^2} + \frac{1}{2}\sum_{n\in\mathbb{Z}} |\widehat{f'}(n)| \tag{3}$$

$$= |\hat{f}(0)| + \frac{1}{2}\sum_{n\in\mathbb{Z}\setminus\{0\}} \frac{1}{n^2} + \frac{1}{4\pi}||f'||_2{}^2 \tag{4}$$

   on a (2) hem utilitzat que $ab \leq \frac{1}{2}(a^2+b^2)$ i a (4) hem utilitzat Parseval i que f' és de quadrat integrable. Una cota de $||f||_{\mathcal{A}}$ és:

$$||f||_{\mathcal{A}} \leq |\hat{f}(0)| + \frac{\pi^2}{6} + \frac{1}{4\pi}||f'||_2{}^2$$

   (c) Per provar aquest resultat cal veure que la següent sèrie és convergent.

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}} \left|\widehat{fg}(n)\right|$$

   de fet, veient que $||fg||_{\mathcal{A}} \leq ||f||_{\mathcal{A}}||g||_{\mathcal{A}}$ ja ho tindriem. Abans però, calculem $\widehat{fg}(n)$ en termes de $\hat{f}(n)$ i $\hat{g}(n)$. Tenim,

$$\begin{aligned}
\widehat{fg}(n) &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)g(t)e^{-int}dt \\
&= \sum_{m\in\mathbb{Z}} \hat{g}(m)\int_{-\pi}^{\pi} f(t)e^{-i(n-m)t}dt \\
&= \sum_{m\in\mathbb{Z}} \hat{g}(m)\hat{f}(n-m) \\
&= (f*g)(n)
\end{aligned}$$

Per tant, reordenant la següent sèrie (ja que és de termes positius) obtenim:

$$\begin{aligned}\sum_{n\in\mathbb{Z}}\left|\widehat{fg}(n)\right| &\leq \sum_{n,m\in\mathbb{Z}}|\hat{g}(m)||\hat{f}(n-m)| \\ &= \sum_{m\in\mathbb{Z}}|\hat{g}(m)|\sum_{n\in\mathbb{Z}}|\hat{f}(n-m)| \\ &= ||f||_{\mathcal{A}}\sum_{m\in\mathbb{Z}}|\hat{g}(m)| \\ &= ||f||_{\mathcal{A}}||g||_{\mathcal{A}}\end{aligned}$$

2. Sigui f la funció definida a $[-\pi,\pi]$ per $f(t)=|t|$. Comprovem que

$$\hat{f}(n)=\begin{cases}\frac{\pi}{2} & n=0\\ \frac{-1+(-1)^n}{\pi n^2} & n\neq 0\end{cases}$$

Utilitzant el desenvolupament en sèrie de Fourier de la funció anterior, proveu que

$$\sum_{n\geq 0}\frac{1}{(2n+1)^2}=\frac{\pi^2}{8}\quad \text{i} \quad \sum_{n\geq 1}\frac{1}{n^2}=\frac{\pi^2}{6}$$

Tenim que:

$$\begin{aligned}\hat{f}(n) &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(t)e^{-int}dt \\ &= \frac{1}{2\pi}\left[-\int_{-\pi}^{0}te^{-int}dt+\int_{0}^{\pi}te^{-int}dt\right] \\ &= \frac{1}{2\pi}\left[\int_{0}^{\pi}te^{int}dt+\int_{0}^{\pi}te^{-int}dt\right] \\ &= \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi}t\cos(nt)dt \\ &= \begin{cases}\frac{\pi}{2} & n=0\\ \frac{-1+(-1)^n}{\pi n^2} & n\neq 0\end{cases}\end{aligned}$$

Com que f té límits i derivades laterals en tots els punts de $[-\pi,\pi]$ podem escriure:

$$f(t)=\frac{\pi}{2}+\sum_{n\in\mathbb{Z}}\frac{-1+(-1)^n}{\pi n^2}e^{int}=\frac{\pi}{2}+\frac{2}{\pi}\sum_{n\geq 1}\frac{-1+(-1)^n}{n^2}\cos(nt)$$

Per $t=0$, com f és contínua en aquest punt tenim:

$$0=\frac{\pi}{2}+\frac{2}{\pi}\sum_{n\geq 1}\frac{-1+(-1)^n}{n^2}$$

Per tant,

$$\sum_{n \text{ senar}}\frac{-2}{n^2}=-\frac{\pi^2}{4}\implies\sum_{k\geq 0}\frac{1}{(2k+1)^2}=\frac{\pi^2}{8}$$

Observem que

$$\sum_{n\geq 1}\frac{1}{n^2}=\sum_{n \text{ senar}}\frac{1}{n^2}+\sum_{n \text{ parell}}\frac{1}{n^2}=\frac{\pi^2}{8}+\frac{1}{4}\sum_{n\geq 1}\frac{1}{n^2}$$

Finalment,

$$\sum_{n\geq 1}\frac{1}{n^2}=\frac{\pi^2}{6}$$

3. Si $f \equiv 0$ a $[a, b] \subset [-\pi, \pi]$, la seva sèrie de Fourier convergeix uniformement a zero a $[a+\delta, b-\delta]$ per $\delta > 0$.

Per tal de demostrar aquest resultat, proveu primer la següent adaptació del lema de Riemann-Lebesgue:

Si f és 2π-periòdica, integrable i acotada, i g és una funció monòtona a trossos i acotada, llavors

$$\lim_{\lambda\to\infty} \int_{-\pi}^{\pi} f(x+t)g(t)\sin(\lambda t)dt = 0$$

uniformement en x.

Primer suposem que g és monòtona. Com que f és integrable, sabem que $\forall \epsilon > 0$ podem trobar $f_\epsilon = \sum_{k=1}^{M} c_{k,\epsilon} \mathbb{1}_{[a_{k,\epsilon}, b_{k,\epsilon}]}$ esglaonada tal que

$$\int_{-\pi}^{\pi} |f(t) - f_\epsilon(t)|dt < \epsilon$$

Denotem per $\alpha_{k,\epsilon} := \max(-\pi, a_{k,\epsilon} - x)$ i $\beta_{k,\epsilon} := \max(\pi, b_{k,\epsilon} - x)$. Llavors:

$$\begin{aligned}
\Big|\int_{-\pi}^{\pi} f(x+t)g(t)\sin(\lambda t)dt\Big| &\le \int_{-\pi}^{\pi} \Big|(f(x+t) - f_\varepsilon(x+t))g(t)\sin(\lambda t)\Big|dt + \Big|\int_{-\pi}^{\pi} f_\varepsilon(x+t)g(t)\sin(\lambda t)dt\Big| \\
&\le ||g||_\infty \int_{-\pi-x}^{\pi-x} \Big|f(t) - f_\varepsilon(t)\Big|dt + \sum_{k=1}^{M} \Big|c_{k,\varepsilon}\Big| \Big|\int_{-\pi}^{\pi} \mathbb{1}_{[a_{k,\varepsilon}, b_{k,\varepsilon}]}(x+t)g(t)\sin(\lambda t)dt\Big| \\
&= ||g||_\infty \int_{-\pi}^{\pi} \Big|f(t) - f_\varepsilon(t)\Big|dt + \sum_{k=1}^{M} \Big|c_{k,\varepsilon}\Big| \Big|\int_{\alpha_{k,\varepsilon}}^{\beta_{k,\varepsilon}} g(t)\sin(\lambda t)dt\Big| \\
&< ||g||_\infty \varepsilon + \sum_{k=1}^{M} \Big|c_{k,\varepsilon}\Big| \Big|g({\alpha_{k,\varepsilon}}^+) \int_{\alpha_{k,\varepsilon}}^{\xi_{k,\varepsilon}} \sin(\lambda t)dt + g({\beta_{k,\varepsilon}}^-) \int_{\xi_{k,\varepsilon}}^{\beta_{k,\varepsilon}} g(t)\sin(\lambda t)dt\Big|
\end{aligned}$$

on $\xi_{k,\varepsilon} \in [\alpha_{k,\varepsilon}, \beta_{k,\varepsilon}]$, pel teorema del valor mitjà per integrals. Finalment tenim que:

$$\begin{aligned}
\Big|\int_{-\pi}^{\pi} f(x+t)g(t)\sin(\lambda t)dt\Big| &< ||g||_\infty \varepsilon + \sum_{k=1}^{M} \Big|c_{k,\varepsilon}\Big| \Big|g({\alpha_{k,\varepsilon}}^+) \int_{\alpha_{k,\varepsilon}}^{\xi_{k,\varepsilon}} \sin(\lambda t)dt + g({\beta_{k,\varepsilon}}^-) \int_{\xi_{k,\varepsilon}}^{\beta_{k,\varepsilon}} g(t)\sin(\lambda t)dt\Big| \\
&\le ||g||_\infty \varepsilon + \sum_{k=1}^{M} \Big|c_{k,\varepsilon}\Big| ||g||_\infty \left(\frac{\Big|\cos(\lambda\alpha_{k,\varepsilon}) - \cos(\lambda\xi_{k,\varepsilon})\Big|}{\lambda} + \frac{\Big|\cos(\lambda\xi_{k,\varepsilon}) - \cos(\lambda\beta_{k,\varepsilon})\Big|}{\lambda} \right) \\
&\le ||g||_\infty \varepsilon + \sum_{k=1}^{M} \Big|c_{k,\varepsilon}\Big| ||g||_\infty \frac{4}{\lambda}
\end{aligned}$$

I triant λ tal que tot el segon sumand sigui menor que ε tenim que això últim és tant petit com vulguem independentment de x.

Si g és monòtona a trossos, aleshores $g(t) = \sum_{k=1}^{N} g_k \mathbb{1}_{[c_k, d_k]}(t)$ amb $g_k : [c_k, d_k] \to \mathbb{R}$ monòtona. Llavors, aplicant el que acabem de demostrar a cada g_k i utilitzant la linealitat de la integral provem el resultat general. Demostrem ara el primer enunciat. Cal veure que

$$\sup_{x\in[a+\delta, b-\delta]} \Big|S_N f(x)\Big| \overset{N\to\infty}{\longrightarrow} 0$$

Recordem que podem escriure $S_N f(x)$ com:

$$S_N f(x) = \int_{-\pi}^{\pi} f(x+t)D_N(t)dt = \int_{-\pi}^{\pi} f(x+t)\frac{1}{\sin(t/2)}\sin((N+1/2)t)dt$$

Fixem-nos que gairebé estem en les hipòtesis de poder aplicar el lema generalitzat de Riemann-Lebesgue, però d'entrada $\frac{1}{\sin(t/2)}$ no està acotat en un entorn del 0. Ara bé, notem que:

$$x + t \in [a, b] \iff a \le x + t \le b \iff a - (b - \delta) \le t \le b - (a + \delta) \iff -(b - a) + \delta \le t \le (b - a) - \delta$$

Per tant, quan $f(x+t)=0$, la t està en un interval que conté el 0 (per a $0<\delta<\frac{b-a}{2}$, que és fins on deixa de tenir sentit l'interval $[a+\delta,b-\delta]$) i per tant, considerant la funció acotada

$$g(t)=\frac{1}{\sin(t/2)}(1-\mathbb{1}_{[-(b-a)+\delta,(b-a)-\delta]}(t))+C\mathbb{1}_{[-(b-a)+\delta,(b-a)-\delta]}(t)$$

tenim que

$$S_N f(x)=\int_{-\pi}^{\pi} f(x+t)\frac{1}{\sin(t/2)}\sin((N+1/2)t)dt=\int_{-\pi}^{\pi} f(x+t)g(t)\sin((N+1/2)t)dt$$

per a qualsevol $C\in\mathbb{R}^*$ i podem aplicar el lema anterior per demostrar la convergència uniforme.

4. Comproveu que per $\alpha\notin\mathbb{Z}$, la sèrie de Fourier de $\frac{\pi}{\sin(\pi\alpha)}e^{i(\pi-x)\alpha}$ a $[0,2\pi]$ ve donada per

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}}\frac{e^{inx}}{n+\alpha}$$

Utilitzem la identitat de Parseval per provar que

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}}\frac{1}{(n+\alpha)^2}=\frac{\pi^2}{(\sin(\pi\alpha))^2}$$

$$\begin{aligned}
\hat{f}(n)&=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(t)e^{-int}dt\\
&=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{\pi}{\sin(\pi\alpha)}e^{i(\pi-t)\alpha}e^{-int}dt\\
&=\frac{e^{i\pi\alpha}}{2\sin(\pi\alpha)}\int_0^{2\pi} e^{-i(n+\alpha)t}dt\\
&=\frac{e^{i\pi\alpha}}{2\sin(\pi\alpha)}\frac{e^{-2\pi i(n+\alpha)}-1}{-i(n+\alpha)}\\
&=\frac{-e^{-2\pi in}(e^{i\pi\alpha}-e^{-i\pi\alpha})}{-2i(n+\alpha)\sin(\pi\alpha)}\\
&=\frac{e^{-2\pi in}}{n+\alpha}\\
&=\frac{1}{n+\alpha}
\end{aligned}$$

Per tant,

$$f(x)=\sum_{n\in\mathbb{Z}}\frac{e^{inx}}{n+\alpha}$$

Utilitzant la identitat de Parseval tenim:

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}}\frac{1}{(n+\alpha)^2}=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}|f(x)|^2dx$$

Ara bé,

$$\left|\frac{\pi}{\sin(\pi\alpha)}e^{i(\pi-x)\alpha}\right|^2=\frac{\pi^2}{(\sin(\pi\alpha))^2}$$

i obtenim el que voliem veure.