

1. (5 pts.) Calculeu la següent integral en termes del paràmetre $\alpha > 0$:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{(\alpha^2 + x^2)^2}.$$

Si haguéssiu de donar, almenys formalment, un candidat raonable per a ser la transformada de Fourier de la funció $\operatorname{sgn}(x)$, quin seria?

2. (3 pts.) Justifiqueu raonadament si és cert que per $f \in L^1(\mathbb{R})$ es té necessàriament $\widehat{f} \in \mathcal{C}_0(\mathbb{R})$. Justifiqueu raonadament si de fet es té la següent igualtat: $\mathcal{F}(L^1(\mathbb{R})) = \mathcal{C}_0(\mathbb{R})$. En cas afirmatiu, proveu-ho, i en cas contrari, doneu un contraexemple i justifiqueu-ho breument, no cal que feu càlculs explícits.
3. (2 pts.) Escriviu l'equació de Laplace al semiplà superior per a una funció $h : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$. Calculeu la solució i doneu-la en termes d'una convolució amb un nucli concret. Doneu un exemple de condicions de regularitat que hauríem d'imposar sobre h per tal que, en efecte, l'anterior convolució sigui una solució de l'equació de Laplace.