Seminari 1 Anàlisi harmònica

Guillem Tutusaus i Alcaraz

16 de Març 2024

1. Calculeu la següent integral en termes del paràmetre $\alpha > 0$:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{(\alpha^2 + x^2)^2}$$

Si haguéssiu de donar, almenys formalment, un candidat raonable per ser la transformada de Fourier de la funció $\operatorname{sgn}(x)$, quin seria?

Per tal de calcular la següent integral utilitzarem el teorema de Plancherel sobre la funció $g_\alpha(x)$, és a dir

$$\int_{-\infty}^{\infty} |e^{-\alpha|x|}|^2 dx = \int_{-\infty}^{\infty} |\hat{g_\alpha}(\xi)|^2 d\xi \tag{1}$$

Al saber que la tranformada de Fourier de la funció $g_\alpha(x)$ és

$$\hat{g_\alpha}(\xi) = \frac{2\alpha}{\alpha^2 + 4\pi^2\xi^2}$$

substituïnt el resultat dins la integral obtenim el següent

$$\begin{aligned}
\int_{-\infty}^{\infty} |\hat{g_\alpha}(\xi)|^2 d\xi &= \int_{-\infty}^{\infty} \left| \frac{2\alpha}{\alpha^2 + 4\pi^2\xi^2} \right|^2 d\xi \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{4\alpha^2}{(\alpha^2 + 4\pi^2\xi^2)^2} d\xi \\
&= 4\alpha^2 \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\xi}{(\alpha^2 + 4\pi^2\xi^2)^2} d\xi \\
&= \frac{4\alpha^2}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{(\alpha^2 + x^2)^2}
\end{aligned}$$

on hem utilitzat el canvi de variable $4\pi^2\xi^2 = x^2$ i el fet que $\alpha > 0$. Ara, calculant la integral de l'esquerra a (1)

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{\infty} |e^{-\alpha|x|}|^2 dx &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{-2\alpha|x|} dx \\ &= \int_{-\infty}^{0} e^{2\alpha x} dx + \int_{0}^{\infty} e^{-2\alpha x} dx \\ &= \left[\frac{e^{2\alpha x}}{2\alpha}\right]_{-\infty}^{0} + \left[\frac{e^{-2\alpha x}}{-2\alpha}\right]_{0}^{\infty} \\ &= \frac{1}{\alpha}\end{aligned}$$

Per tant, tenim que la nostre integral és

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{(\alpha^2 + x^2)^2} = \frac{2\pi}{4\alpha^3} = \frac{\pi}{2\alpha^3}$$

La transformada de Fourier de $\mathrm{sgn}(x)$ no té sentit ja que $\mathrm{sgn}(x) \notin L^1(\mathbb{R})$. No obstant, al seminari passat vam veure la funció $h_\alpha(x) = \mathrm{sgn}(x)e^{-\alpha|x|}$. Observem el següent fet

$$\lim_{\alpha\to 0^+} h_\alpha(x) = \mathrm{sgn}(x)$$

Sabent que $\hat{h_\alpha}(x) = \frac{-4\pi i x}{\alpha^2+4\pi^2x^2}$, aleshores podriem dir que

$$\hat{\mathrm{sgn}}(x) = \lim_{\alpha\to 0^+} \hat{h_\alpha}(x) = \lim_{\alpha\to 0^+} \frac{-4\pi i x}{\alpha^2 + 4\pi^2 x^2} = \frac{-i}{\pi x} = \frac{1}{\pi i x}$$

2. Justifiqueu raonadament si és cert que per $f \in L^1(\mathbb{R})$ es té necessàriament $\hat{f} \in \mathcal{C}_0(\mathbb{R})$. Justifiqueu raonadament si de fet es té la següent igualtat: $\mathcal{F}(L^1(\mathbb{R})) = \mathcal{C}_0(\mathbb{R})$. En cas afirmatiu, proveu-ho, i en cas contrari, doneu un contraexemple i justifiqueu-ho breument, no cal que feu càlculs explícits.

   Per tal de veure si $f \in L^1(\mathbb{R})$, aleshores $\hat{f} \in \mathcal{C}_0(\mathbb{R})$, és necessari veure que la transformada de Fourier és una funció uniformement contínua i tal que $|\hat{f}(\xi)| \to 0$ conforme $|\xi| \to 0$. Començarem veient que la transformada de Fourier és una funció uniformement contínua. És a dir, cal veure que

$$\lim_{h\to 0} \sup_{\xi\in\mathbb{R}} |\hat{f}(\xi + h) - \hat{f}(\xi)| = 0$$

   Ara bé,

$$\begin{aligned}|\hat{f}(\xi + h) - \hat{f}(\xi)| &= |\mathcal{F}(e^{-2\pi i h x} f(x)) - \mathcal{F}(f(x))| \\ &= \Big| \int_{-\infty}^{\infty} f(x)(e^{-2\pi i h x} - 1)e^{-2\pi i \xi x} dx \Big| \\ &\leq \int_{-\infty}^{\infty} |f(x)(e^{-2\pi i h x} - 1)| dx\end{aligned}$$

Per tant,

$$\lim_{h\to 0}\sup_{\xi\in\mathbb{R}}|\hat{f}(\xi+h)-\hat{f}(\xi)| \le \lim_{h\to 0}\int_{-\infty}^{\infty} q_h(x)dx = \int_{-\infty}^{\infty}\lim_{h\to 0} q_h(x)dx = 0$$

on hem utilitzat que $q_h(x) := f(x)(e^{-2\pi i h x}-1)$ continua respecte el paràmetre i hem acotat $|q_h(x)| \le 2|f(x)|$, que és integrable per tal de poder aplicar el teorema de la convergència dominada. Això demostra que la transformada de Fourier d'una funció $f \in L^1(\mathbb{R})$ és una funció contínua, és a dir, que $\hat{f}(\xi) \in \mathcal{C}_0(\mathbb{R})$.

Anem a veure que l'altre implicació no és certa, és a dir, que $\mathcal{F}(L^1(\mathbb{R})) \subsetneq \mathcal{C}_0(\mathbb{R})$. Per això, donem el següent exemple de funció

$$g(x) = \begin{cases} \frac{\tanh(x)}{\log(1+|x|^{1/2})} & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$$

és fàcil comprovar que $g \in \mathcal{C}_0(\mathbb{R})$. Ara bé, g no pot ser la transformada de Fourier de cap $f \in L^1(\mathbb{R})$. Per veure això, recordem un enunciat del seminari passat, que deia.

Sigui $f \in L^1(\mathbb{R})$ amb $\hat{f}$ senar, aleshores existeix $M > 0$ tal que

$$\left|\int_1^a \frac{\hat{f}(\xi)}{\xi}d\xi\right| \le M$$

per a tot $a \ge 1$.

Si g fos la tranformada de Fourier d'una funció $f \in L^1(\mathbb{R})$, aleshores pel resultat anterior tindriem que

$$\left|\int_1^{\infty} \frac{\tanh(x)}{x\log(1+\sqrt{x})}dx\right| \le M$$

per alguna certa $M \ge 0$, al ser g una funció senar. Veiem que això no pot passar.

$$\begin{aligned}\left|\int_1^{\infty} \frac{\tanh(x)}{x\log(1+\sqrt{x})}dx\right| &\ge \int_1^{\infty}\frac{1}{x\log(1+\sqrt{x})}dx \\ &\ge \int_1^{\infty}\frac{1}{x\log(x)}dx\end{aligned}$$

que és clarament divergent. Per tant, no podem acotar uniformement (per tot a) la integral $|\int_1^a \frac{g(x)}{x}dx|$, contradient la hipòtesis que g és la transformada de Fourier d'una funció $f \in L^1(\mathbb{R})$. Això és, $g \notin \mathcal{F}(L^1(\mathbb{R}))$.

3. Escriviu l'equació de Laplace al semiplà superior per a una funció $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Calculeu la solució i doneu-la en termes d'una convolució amb un nucli concret. Doneu un exemple de condicions de regularitat que hauríem d'imposar sobre h per tal que, en efecte, l'anterior convolució sigui una solució de l'equació de Laplace.

   L'equació de Laplace per a una funció $h(x, y)$ al semiplà superior pren la forma,

$$\Delta h = 0$$

   és a dir, $\partial_x^2 h + \partial_y^2 h = 0$. Per tal de solucionar aquesta equació, passem abans l'equació a coordenades polars per fer-nos la vida més fàcil. Amb una mica de feina, es pot veure que l'equació de Laplace en coordenades polars pren la forma,

$$\Delta u = u_{rr} + \frac{1}{r} u_r + \frac{1}{r^2} u_{\theta\theta} = 0$$

   on $h(x, y) = u\big(\sqrt{x^2 + y^2}, \arctan \frac{y}{x}\big) = u(r, \theta)$.

   Considerem ara el problema

$$\Delta u = 0, \quad 0 \leq r < 1$$

$$u(1, \theta) = g(\theta), \quad 0 \leq \theta \leq 2\pi$$

   Per tal de resoldre aquest problema, assumirem que la solució pot ser presentada com un producte, obtenim dues EDO i utilitzem la condició de frontera de θ per acabar amb

$$u(r, \theta) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k \geq 1} a_k r^k \cos(k\theta) + b_k r^k \sin(k\theta)$$

   Calculant els coeficients de Fourier tenim

$$a_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} g(\phi) \cos(k\phi) d\phi, \quad b_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} g(\phi) \sin(k\phi) d\phi$$

   Per tant, ja tenim la solució. Escrivim però aquesta com a convolució amb algun dels nuclis vists a classe.

$$\begin{aligned} u(r, \theta) &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} g(\phi) \Big(\frac{1}{2} + \sum_{k \geq 1} r^k (\cos(k\phi)\cos(k\theta) + \sin(k\phi)\sin(k\theta))\Big) d\theta \\ &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} g(\phi) \Big(\frac{1}{2} + \sum_{k \geq 1} r^k \cos(k(\theta - \phi))\Big) d\phi \end{aligned}$$

Ara,

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2} + \sum_{k\geq 1} r^k \cos(k\theta) &= Re\Big(\frac{1}{2} + \sum_{k\geq 1} z^k\Big) \\
&= Re\Big(\frac{1}{2} + \frac{z}{1-z}\Big) \\
&= Re\Big(\frac{1+z}{2(1-z)}\Big) \\
&= Re\Big(\frac{(1+z)(1-\bar{z})}{2|1-z|^2}\Big) \\
&= Re\Big(\frac{1-|z|^2+z-\bar{z}}{2|1-z|^2}\Big) \\
&= \frac{1-r^2}{2(1+r^2-2r\cos\theta}
\end{aligned}$$

I per tant, finalment, podem concloure que la solució està donada per

$$u(r,\theta) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} g(\phi)\frac{1-r^2}{1+r^2-2r\cos(\theta-\phi)}d\phi$$

que es tracta del *nucli de Poisson* convolucionat amb la funció g.