Llista 1 Anàlisi harmònica

Guillem Tutusaus i Alcaraz

1533701

1. Escriu la sèrie de Fourier només en termes de sinus (i també la que és només en termes de cosinus) de la funció

$$f(x) = \begin{cases} \pi/3, & x \in (0, \pi/3) \\ 0, & x \in (\pi/3, 2\pi/3) \\ -\pi/3, & x \in (2\pi/3, \pi) \end{cases}$$

Considerem l'extensió 2π-periòdica de f sobre l'interval $(-\pi, \pi)$. Considerant els coeficients de Fourier de la funció tenim

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos(nx)dx$$
$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin(nx)dx$$

Calculant $a_n(f)$ observem que la funció a integrar és una funció senar[1] en un domini simètric i doncs aquesta serà zero. Per tant $a_n(f) = 0 \forall n$. Ara bé, per a $b_n(f)$ cal separar-la en diferents integrals de la forma següent

$$\begin{aligned} b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin(nx)dx = \frac{1}{\pi}\Big(&\int_{-\pi}^{-2\pi/3} f(x)\sin(nx)dx \\ &+ \int_{-2\pi/3}^{-\pi/3} f(x)\sin(nx)dx + \int_{-\pi/3}^{0} f(x)\sin(nx)dx \\ &+ \int_{0}^{\pi/3} f(x)\sin(nx)dx + \int_{\pi/3}^{2\pi/3} f(x)\sin(nx)dx \\ &+ \int_{2\pi/3}^{\pi} f(x)\sin(nx)dx\Big) \end{aligned} \tag{1}$$

Substituïnt a $f(x)$ el valor de la funció en l'interval específic de l'equació

[1] El producte d'una funció senar i una parell dona lloc a una funció senar. En el nostre cas, la funció senar és f i la parell $\cos(nx)$, per tant $f(x)\cos(nx)$ és una funció senar.

(1) obtenim

$$\begin{aligned} b_n = \frac{1}{\pi}\Big(&\int_{-\pi}^{-2\pi/3} \sin(nx)dx + \int_{-\pi/3}^{0} -\sin(nx)dx \\ &+ \int_{0}^{\pi/3} \sin(nx)dx + \int_{2\pi/3}^{\pi} -\sin(nx)dx\Big) \end{aligned} \tag{2}$$

És fàcil veure que

$$b_n = \frac{4}{\pi n}\sin^2\left(\frac{\pi n}{3}\right)\Big(1 - 2\cos\left(\frac{\pi n}{3}\right)\Big)$$

Per tant, finalment veiem

$$f(x) = \frac{4}{\pi}\sum_{n\geq 1}\frac{\sin^2\left(\frac{\pi n}{3}\right)\Big(1-2\cos\left(\frac{\pi n}{3}\right)\Big)}{n}\sin(nx)$$

2. Sigui f una funció 2π-periòdica. Demostreu que si és decreixent a $[0, 2\pi)$ aleshores el coeficient de Fourier

$$b_n(f) = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\sin(nx)dx \qquad n \geq 1$$

és no-negatiu.
Cal veure per tant que $b_n(f) \geq 0$, o el que és el mateix, que

$$I := \int_0^{2\pi} f(x)\sin(nx)dx$$

és no-negatiu per $n \geq 1$. Calculem

$$\begin{aligned} I &= \left[-\frac{\cos(nx)}{n}f(x)\right]_0^{2\pi} - \int_0^{2\pi} f'(x)\Big(-\frac{\cos(nx)}{n}\Big)dx \\ &= \int_0^{2\pi} f'(x)\Big(\frac{\cos(nx)}{n}\Big)dx \end{aligned} \tag{3}$$

3. Donada una funció 2π-periòdica, tal que $|f(x)| \leq 1$, demostreu que

$$|\hat{f}(1) - \hat{f}(0)| \leq \frac{4}{\pi}$$

Trobem un exemple que compleixi la igualtat.
Comencem escrivint els coeficients de Fourier complexos d'una funció $2L$-periòdica

$$\hat{f}(n) = \frac{1}{2L}\int_{-L}^{L} f(x)e^{-i\frac{\pi n x}{L}}dx$$

En el nostre cas, f és 2π-periòdica i per tant calculant veiem fàcilment que

$$\begin{aligned}
|\hat{f}(1)-\hat{f}(0)| &= \Big|\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)(e^{-ix}-1)dx\Big| \\
&\leq \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |f(x)(e^{-ix}-1)|dx \\
&\leq \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |e^{-ix}-1|dx
\end{aligned} \tag{4}$$

Ara, sabent que si $z \in \mathbb{C}$, aleshores $z\bar{z} = |z|^2$ tenim que la darrera desigualtat de l'equació (4) es pot escriure de la forma

$$J := \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \sqrt{2(1-\cos(x))}dx$$

Calculant aquesta integral fent el canvi $1-\cos(x) = 2\sin^2(\frac{x}{2})$ obtenim el resultat que volíem

$$J = \frac{\sqrt{2}}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \sqrt{1-\cos(x)}dx = \frac{2}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |\sin\left(\frac{x}{2}\right)|dx$$

i separant l'integral veiem que aquesta val 4. Per tant ja tenim el que voliem veure.
Donem ara un exemple d'una funció que verifiqui la igualtat de l'enunciat.

$$f(x) = 2\Big|\sin\left(\frac{x}{2}\right)\Big|$$

4. Sigui $f \in \mathcal{C}^k$ una funció 2π-periòdica. Veiem que $\hat{f}(n) = \mathcal{O}(|n|^{-k})$ quan $|n| \to \infty$.
Demostrem per inducció sobre k que

$$\widehat{f^{(k)}}(n) = (in)^k \hat{f}(n)$$

El cas $k = 0$ és directe. Si suposem cert el cas $k-1$ tenim que:

$$\begin{aligned}
\widehat{f^{(k)}}(n) &= \langle f^{(k)}(n), \frac{1}{2\pi}e^{inx}\rangle \\
&= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f^{(k)}(x)e^{-inx}dx \\
&= \frac{1}{2\pi}f^{(k-1)}(x)e^{-inx}\Big]_{-\pi}^{\pi} + \frac{in}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f^{(k-1)}(x)e^{-inx}dx \\
&= in\widehat{f^{(k-1)}}(n) \\
&= (in)^k\hat{f}(n)
\end{aligned}$$

Per tant, com que sempre tenim que

$$|\hat{g}(n)| \leq \frac{1}{2\pi}||g||_1$$

i $||f^{(k)}||_1 = C < \infty$ perquè $f^{(k)}$ és contínua, deduïm que:

$$|\hat{f}(n)| = \left|\frac{\hat{f^{(k)}}(n)}{(in)^k}\right| \leq C|n|^{-k}$$

5. Sigui f una funció 2π-periòdica i $n \in \mathbb{N}$. Definim $p(x) = f(nx)$. Demostreu que per a $m \in \mathbb{Z}$ es compleix

$$\hat{p}(m) = \begin{cases} \hat{f}(\frac{m}{n}), & \text{si } n|m \\ 0, & \text{altrament} \end{cases}$$

Sabem que f té coeficients de Fourier

$$\hat{f}(n) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)e^{-inx}dx$$

a més, $p(x) = f(nx)$. D'aquesta manera, si f és 2π-periòdica aleshores p és $\frac{2\pi}{n}$-periòdica. Això és veu fàcilment ja que $p(x+\frac{2\pi}{n}) = p(\frac{nx+2\pi}{n}) = f(nx+2\pi) = f(nx) = p(x)$. D'aquesta manera calculant els coeficients de Fourier de p tenim

$$\hat{p}(m) = \frac{n}{2\pi}\int_{-\pi/n}^{\pi/n} p(x)e^{-imx}dx$$

Expressem ara, $\hat{p}(m)$ en termes de $\hat{f}(n)$.

$$\begin{aligned} \hat{p}(m) &= \frac{n}{2\pi}\int_{-\pi/n}^{\pi/n} p(x)e^{-imx}dx \\ &= \frac{n}{2\pi}\int_{-\pi/n}^{\pi/n} f(nx)e^{-imx}dx \\ &= \frac{n}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(y)e^{-i\frac{m}{n}y}\frac{dy}{n} \\ &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(y)e^{-i\frac{m}{n}y}dy \end{aligned} \tag{5}$$

Per a la tercera igualtat hem suposat que $n|m$ ja que dins aquestes hipòtesis podem garantir que f serà una funció periòdica. Dit d'una altra manera, en el cas que $n|m$ tenim que la freqüència és commesurable i per tant f és periòdica.