---

1. Escriviu la definició de la transformada de Fourier d'una distribució temperada. Calculem ara transformades de Fourier de distribucions conegudes:

   (a) $T = \partial^\alpha \delta_0$, per $\alpha \in \mathbb{Z}_+^n$.

   (b) $T = x^2 - 2x + 1$. Doneu, més generalment, la transformada de $T = P$, P polinomi.

   (c) $T = \text{p.v.}\dfrac{1}{x}$.

   (d) $T = \text{sgn}(x)$, $T = x\chi_{\{x>0\}}$.

   (e) $T = x^2 \sin(2\pi x)$.

2. (*El lema de Weyl*). L'objectiu d'aquest exercici és provar el conegut lema de Weyl:

   Teorema (Weyl, 1940). *Sigui $u \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ tal que $\Delta u = 0$ com a distribucions. Llavors u és un polinomi.*

   A l'enunciat anterior $\Delta := \partial_1^2 + \partial_2^2 + \cdots + \partial_n^2$ és l'operador Laplacià (en coordenades cartesianes). Per a provar el lema, definim el concepte de *suport d'una distribució*. Sigui $T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$. El suport de T, $\text{supp}(T)$, és la intersecció de tots els tancats K tals que: si $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ té suport a $\mathbb{R}^n \setminus K$, llavors $\langle T, \varphi \rangle = 0$.

   (a) Proveu que si $\text{supp}(T)$ és compacte, llavors T té ordre finit.

   (b) Suposem que $\text{supp}(T) = \{x_0\}$ per algun $x_0 \in \mathbb{R}^n$. Proveu que existeixen coeficients C_α i $N \in \mathbb{N}$ tals que
   $$T = \sum_{|\alpha| \leq N} C_\alpha \partial^\alpha \delta_{x_0}, \quad \alpha \in \mathbb{Z}_+^n.$$
   Indicació: ajudeu-vos de la versió multi-dimensional d'un exercici de l'entrega del seminari passat. No cal que la proveu, però almenys enuncieu-la!

   (c) Suposem que $T \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ és tal que $\text{supp}(\widehat{T}) \subset \{\xi_0\}$, per algun $\xi_0 \in \mathbb{R}^n$. Deduïu que T és una combinació lineal finita de funcions $(-2\pi i\xi)^\alpha e^{2\pi i \xi \cdot \xi_0}$, per $\alpha \in \mathbb{Z}_+^n$. Per tant, què podem dir de T si $\xi_0 = 0$?

   (d) Demostreu el lema de Weyl.

Ex. 1

a) $\langle \hat{T}, \varphi \rangle := \langle T, \hat{\varphi} \rangle = (-1)^{|\alpha|} \partial^\alpha \hat{\varphi}(0) = (-1)^{|\alpha|} \partial_1^{\alpha_1} \cdot \ldots \cdot \partial_n^{\alpha_n} \hat{\varphi}(0)$

$$= (-1)^{|\alpha|} \left[(-2\pi i x_n)^{\alpha_n} \cdot \ldots \cdot (-2\pi i x_1)^{\alpha_1} \varphi \right]^\wedge (0)$$

$$= \left[(2\pi i)^{|\alpha|} x^\alpha \varphi \right]^\wedge (0) = \int_{\mathbb{R}^n} (2\pi i)^{|\alpha|} x^\alpha \varphi(x)\, dx$$

Llavors $\widehat{\partial^\alpha \delta_0} = (2\pi i)^{|\alpha|} x^\alpha$.

b) $\langle \hat{T}, \varphi \rangle = \langle \widehat{x^2}, \varphi \rangle - 2 \langle \hat{x}, \varphi \rangle + \langle \hat{1}, \varphi \rangle$

$$= -\frac{1}{4\pi^2} \langle \partial^2 \delta_0, \varphi \rangle - \frac{2}{2\pi i} \langle \partial \delta_0, \varphi \rangle + \langle \delta_0, \varphi \rangle$$

(l'apartat a) ens diu $\partial^\alpha \delta_0 = (2\pi i)^{|\alpha|} \widehat{x^\alpha}$) $\Rightarrow \hat{T} = -\frac{1}{4\pi^2} \partial^2 \delta_0 - \frac{1}{\pi i} \partial \delta_0 + \delta_0.$

Més generalment, si $P: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ és un polinomi de grau N,

$$P(x_1, \ldots, x_n) = \sum_{\substack{d_1 + \cdots + d_n \leq N \\ d_j \in \{0, 1, \ldots, N\}}} a_{d_1, \ldots, d_n} x_1^{d_1} \cdot \ldots \cdot x_n^{d_n}, \qquad a_{d_1, \ldots, d_n} \in \mathbb{R}$$

tenim

$$\hat{P} = \sum_{\substack{d_1 + \cdots + d_n \leq N \\ d_j \in \{0, 1, \ldots, N\}}} \frac{a_{d_1, \ldots, d_n}}{(2\pi i)^{|d|}} \partial^d \delta_0, \qquad \text{on} \quad d := (d_1, \ldots, d_n)$$

c) Fet a teoria: $\hat{T} = -i\pi \cdot \operatorname{sgn}(\xi)$

d) Anomenem $T_1 := \operatorname{sgn}(x)$, $T_2 := x \cdot \chi_{\{x > 0\}}$. Per estudiar $\hat{T}_1$ usem l'apartat c):

$$\hat{T}_1 = \frac{1}{-i\pi}\left(-i\pi \cdot \mathrm{sgn}(x)\right)^\wedge = \frac{1}{-i\pi}\left(\mathrm{p.v.}\frac{1}{x}\right)^\wedge = \frac{1}{i\pi}\,\mathrm{p.v.}\frac{1}{\xi}.$$

Per estudiar $\hat{T}_2$ ens adonem que $\chi_{\{x>0\}} = \frac{1}{2}\left(1+\mathrm{sgn}(x)\right)$. Llavors

$$\hat{T}_2 = \left(\frac{x}{2} + x\,\mathrm{sgn}(x)\right)^\wedge = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2\pi i}\partial\delta_0\right) + \frac{1}{-2\pi i}\left[(-2\pi i x)\,\mathrm{sgn}(x)\right]^\wedge$$

$$= \frac{1}{4\pi i}\partial\delta_0 - \frac{1}{2\pi i}\partial\left(\mathrm{sgn}(x)\right)^\wedge = \frac{1}{4\pi i}\partial\delta_0 - \frac{1}{2\pi i}\partial\left(\frac{1}{i\pi}\,\mathrm{p.v.}\frac{1}{\xi}\right)$$

$$= \frac{1}{4\pi i}\partial\delta_0 + \frac{1}{2\pi^2}\partial\left(\mathrm{p.v.}\frac{1}{\xi}\right).$$

e) $\langle \hat{T}, \varphi\rangle := \langle T, \hat{\varphi}\rangle = \frac{1}{2i}\left\langle x^2\left(e^{2\pi i x} - e^{-2\pi i x}\right), \hat{\varphi}\right\rangle$

$$= \frac{1}{2i}\left[\left\langle e^{2\pi i x}, x^2\hat{\varphi}\right\rangle - \left\langle e^{-2\pi i x}, x^2\hat{\varphi}\right\rangle\right]$$

$$= \frac{1}{2i}\cdot\left(-\frac{1}{4\pi^2}\right)\left[\left\langle e^{2\pi i x}, \widehat{\partial^2\varphi}\right\rangle - \left\langle e^{-2\pi i x}, \widehat{\partial^2\varphi}\right\rangle\right]$$

$$= -\frac{1}{8\pi^2 i}\left\langle \widehat{e^{2\pi i x}} - \widehat{e^{-2\pi i x}}, \partial^2\varphi\right\rangle = -\frac{1}{8\pi^2 i}\left\langle \delta_{-1} - \delta_1, \partial^2\varphi\right\rangle$$

$$= -\frac{1}{8\pi^2 i}\left\langle \partial^2\delta_{-1} - \partial^2\delta_1, \varphi\right\rangle \Rightarrow \hat{T} = -\frac{1}{8\pi^2 i}\left(\partial^2\delta_{-1} - \partial^2\delta_1\right).$$

a*) $T = x\,\chi_{[a,b]}$, $a<b$ reals

$$T = x\left(\chi_{\{a\geq 0\}} - \chi_{\{b\geq 0\}}\right) = x\left(\frac{\mathrm{sgn}(x-a)+1}{2} - \frac{\mathrm{sgn}(x-b)+1}{2}\right)$$

$$= \frac{x}{2}\left(\mathrm{sgn}(x-a) - \mathrm{sgn}(x-b)\right)$$

$$\hat{T} = \frac{1}{-4\pi i}\left((-2\pi i x)\,\tau_a\,\mathrm{sgn}(x) - (-2\pi i x)\,\tau_b\,\mathrm{sgn}(x)\right)^\wedge$$

$$= -\frac{1}{4\pi i}\left[\partial\left(\tau_a\, sgn(x)\right)^\wedge - \partial\left(\tau_b\, sgn(x)\right)^\wedge\right]$$

$$= -\frac{1}{4\pi i}\left[\partial\left(\frac{e^{-2\pi i a\xi}}{i\pi}\,\text{p.v.}\frac{1}{\xi}\right) - \partial\left(\frac{e^{-2\pi i b\xi}}{i\pi}\,\text{p.v.}\frac{1}{\xi}\right)\right]$$

$$= \frac{1}{4\pi^2}\,\partial\left[\left(e^{-2\pi i a\xi} - e^{-2\pi i b\xi}\right)\text{p.v.}\frac{1}{\xi}\right]$$

$$= \frac{a e^{-2\pi i a\xi} - b e^{-2\pi i b\xi}}{2\pi i}\cdot \text{p.v.}\frac{1}{\xi} + \frac{e^{-2\pi i a\xi} - e^{-2\pi i b\xi}}{4\pi^2}\cdot\partial\left(\text{p.v.}\frac{1}{\xi}\right).$$

b*) $T = g(x)\cos(x)^2, \quad g\in L^1(\mathbb{R})$

Fixeu-vos que

$$T = g(x)\left(\frac{1+\cos(2x)}{2}\right) = g(x)\left(\frac{1}{2} + \frac{e^{2ix}+e^{-2ix}}{4}\right)$$

$$= \frac{1}{2}g(x) + \frac{1}{4}g(x)e^{2\pi i x\cdot\frac{1}{\pi}} + \frac{1}{4}g(x)e^{2\pi i x\cdot\left(\frac{-1}{\pi}\right)}$$

$$= \frac{1}{2}g(x) + \frac{1}{4}\left(M_{\frac{1}{\pi}}g\right)(x) + \frac{1}{4}\left(M_{-\frac{1}{\pi}}g\right)(x)$$

Llavors

$$\hat{T} = \frac{1}{2}\hat{g}(\xi) + \frac{1}{4}\hat{g}\left(\xi-\frac{1}{\pi}\right) + \frac{1}{4}\hat{g}\left(\xi+\frac{1}{\pi}\right).$$

c*) Fixeu-vos que $e^x\cdot\cos(e^x)$ és la derivada de $\sin(e^x)$, i noteu que per tota $\varphi\in\mathcal{S}(\mathbb{R})$ es té

$$|\langle \sin(e^x),\varphi\rangle| \leq \int_{\mathbb{R}}|\sin(e^x)||\varphi(x)|\,dx \leq \int_{\mathbb{R}}|\varphi(x)|\,dx$$

$$= \int_{|x|\leq 1}|\varphi(x)|\,dx + \int_{|x|\geq 1}|\varphi(x)|\,dx \leq 2p_{0,0}(\varphi) + 2p_{2,0}(\varphi)$$

Llavors $\sin(e^x) \in \mathcal{S}'(\mathbb{R})$ i llavors la seva derivada també. És a dir, $e^x \cdot \cos(e^x) \in \mathcal{S}'(\mathbb{R})$ i per tant té sentit considerar la seva transformada de Fourier (si representeu la funció veureu que és bastant sorprenent que en pugui tenir!)

Ex. 2

(a) Suposem que $\mathrm{supp}(T)$ és compacte i vegem que T té ordre finit. Per a fer-ho, primer ens adonem del següent: sigui $\mathcal{U}_\delta(\mathrm{supp}(T))$ un entorn dilatat a distància $\delta > 0$ de $\mathrm{supp}(T)$, és a dir:

$$\mathcal{U}_\delta(\mathrm{supp}(T)) := \{ x \in \mathbb{R}^n : \ \mathrm{dist}(x, \mathrm{supp}(T)) < \delta \}.$$

Escrivim $F := \overline{\mathcal{U}_\delta(\mathrm{supp}(T))}$. Fixem ara χ funció test tal que $\chi|_{\mathrm{supp}(T)} \equiv 1$, $\chi|_{F^c} \equiv 0$ i $0 \leq \chi \leq 1$. Llavors, per definició de $\mathrm{supp}(T)$ tenim que:

$$\forall \varphi \in \mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R}^n) : \quad \langle T, \varphi \rangle = \langle T, \chi\varphi \rangle.$$

Observat això, fixem $K \subset \mathbb{R}^n$ compacte qualsevol i $\varphi \in \mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ amb $\mathrm{supp}(\varphi) \subseteq K$. Fixem també una bola $B(0,R)$ amb radi $R > 0$ prou gran com perquè $\mathrm{supp}(T) \subset B(0, R/2) \subset \overline{B(0,R)}$. Fixem-nos que si $K \subseteq \mathrm{supp}(T)$, podem triar un natural m_1 i una constant C_1, associades a $\overline{B(0,R)}$ i per tant independents de K i de $\mathrm{supp}(\varphi)$ tals que

$$|\langle T, \varphi \rangle| \leq C_1 \sum_{|j| \leq m_1} \| \partial^j \varphi \|_\infty .$$

Si $K \not\subseteq \mathrm{supp}(T)$ distingim casos:

1) Si $supp(\varphi) \cap supp(T) = \emptyset$, llavors : $|\langle T, \varphi \rangle| = 0$.

2) Si $supp(\varphi) \cap supp(T) \neq \emptyset$. Considerem $\mathcal{U}_{\delta/2}(supp(\varphi) \cap supp(T))$ i una funció test $\tilde{\chi}$ tal que $0 \leq \tilde{\chi} \leq 1$ i

$$\tilde{\chi}\big|_{supp(\varphi) \cap supp(T)} \equiv 1, \qquad \tilde{\chi}\big|_{\mathcal{U}_{\delta/2}(supp(\varphi) \cap supp(T))^c} \equiv 0.$$

Llavors, per definició de $supp(T)$ tenim $\langle T, \varphi \rangle = \langle T, \tilde{\chi}\varphi \rangle$. A més $supp(\tilde{\chi}\varphi) \subseteq F$ i per tant podem triar un natural m_2 i una constant C_2 associades a F i per tant independents de K i de $supp(\varphi)$ tals que

$$|\langle T, \varphi \rangle| = |\langle T, \tilde{\chi}\varphi \rangle| \leq C_2 \sum_{|j| \leq m_2} \|\partial^j \tilde{\chi}\varphi\|_\infty$$

$$\leq C_2' \sum_{|j| \leq m_2} \|\partial^j \varphi\|_\infty$$

(C_2' depèn de les derivades de $\tilde{\chi}$, que podem triar fitades per 1, per exemple, triant $\delta > 0$ prou gran)

Per tant l'ordre de T és menor o igual a $\max\{m_1, m_2\} < \infty$.

b) Sigui $T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$ tal que $supp(T) \subseteq \{x_0\}$, $x_0 \in \mathbb{R}^n$. Clarament el suport de T és compacte i per tant, per l'apartat anterior, T té ordre finit N. Vegem ara que si triem $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ tal que

(*) $\partial^\alpha \varphi(x_0) = 0$, $\forall \alpha \in \mathbb{Z}_+^n$ amb $|\alpha| \leq N$, llavors $\langle T, \varphi \rangle = 0$.

Considerem $\forall \varepsilon > 0$ una funció test χ_ε amb suport a $B(x_0, \varepsilon)$ tal que $\chi_\varepsilon\big|_{B(x_0, \frac{\varepsilon}{2})} \equiv 1$, $\chi_\varepsilon\big|_{B(x_0, \varepsilon)^c} \equiv 0$ i $0 \leq \chi_\varepsilon \leq 1$. Així doncs:

$$\langle T, \varphi \rangle = \langle T, \chi_\varepsilon \varphi \rangle \quad , \quad \text{per definició de } \operatorname{supp}(T).$$

Per definició de distribució d'ordre N:

$$|\langle T, \varphi\rangle| \leq \sum_{|j| \leq N} \|\partial^j (\chi_\varepsilon \varphi)\|_\infty = \sum_{|k|+|m| \leq N} \|\partial^k \chi_\varepsilon \cdot \partial^m \varphi\|_\infty$$

$$= \|\chi_\varepsilon \partial^N \varphi\|_\infty + \sum_{\substack{|k|+|m| \leq N \\ |k| \geq 1}} \|\partial^k \chi_\varepsilon \cdot \partial^m \varphi\|_\infty = (*)$$

Si $N=0$ fixeu-vos que ja estaríem fent tendir $\varepsilon \to 0$ i usant que $\varphi(0) = 0$. Si $N > 0$, per cada $k, m \in \mathbb{Z}^n_+$ amb $|k|+|m| \leq N$ observem que $\operatorname{supp}(\partial^k \chi_\varepsilon \partial^m \varphi) \subseteq \overline{B(x_0, \varepsilon)}$ i que pel Tª de Taylor a ordre $N - |m| - 1$, per qualsevol $x \in B(x_0, \varepsilon)$ es té

$$|\partial^m \varphi(x)| = \left| \sum_{|\alpha| \leq N-|m|-1} \frac{\partial^\alpha \varphi(x_0)}{\alpha!} (x-x_0)^\alpha + \sum_{|\alpha| = N-|m|} R_\alpha(\xi(x)) (x-x_0)^\alpha \right|$$

(hipòtesi de $(*)$)

$$= \left| \sum_{|\alpha| = N-|m|} R_\alpha(\xi(x)) (x-x_0)^\alpha \right| \leq \varepsilon^{N-|m|} \sum_{|\alpha| = N-|m|} |R_\alpha(\xi(x))|$$

$$\leq C \varepsilon^{N-|m|} \sum_{|\beta| = N} \|\partial^\beta \varphi\|_{L^\infty(B(\varepsilon, x_0))} .$$

(Fórmules pel residu del Tª de Taylor)

Per tant, retornant a $(*)$ tenim

$$|\langle T, \varphi\rangle| \leq \|\chi_\varepsilon \partial^N \varphi\|_\infty +$$

$$\sum_{\substack{|k|+|m| \leq N \\ |k| \geq 1}} \|\partial^k \chi_\varepsilon\|_\infty \left(C \varepsilon^{N-|m|} \sum_{|\beta| = N} \|\partial^\beta \varphi\|_{L^\infty(B(\varepsilon, x_0))} \right)$$

Suposem χ_ε tal que

$$\|\partial^k \chi_\varepsilon\|_\infty \leq A\cdot\varepsilon^{-|k|},$$

que sempre ho podem fer sense pèrdua de generalitat. Així doncs

$$|\langle T,\varphi\rangle| \leq \|\chi_\varepsilon \partial^N \varphi\|_\infty + AC\cdot \sum_{\substack{|k|+|m|\leq N \\ |k|\geq 1}} \varepsilon^{N-|m|-|k|} \sum_{|\beta|=N} \|\partial^\beta \varphi\|_{L^\infty(B(\varepsilon,x_0))}$$

$$\xrightarrow[\varepsilon\to 0]{} 0, \text{ per la hipòtesi de } (*).$$

Per tant $(*)$ queda provat. Ara usarem una versió multidimensional de l'exercici 2 de l'entrega del seminari 2, que diu així:

> Sigui $a=(a_1,\dots,a_n)\in\mathbb{R}^n$ i $m\in\mathbb{N}$. Sigui $T\in\mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$ tal que per a tota n-tupla $(d_1,\dots,d_n)\in\mathbb{Z}_+^n$ satisfent $d_1+\dots+d_n=m$ es té
>
> $$(x_1-a_1)^{d_1}\cdot\ldots\cdot(x_n-a_n)^{d_n}\,T=0$$
>
> Llavors existeixen coeficients $C_\alpha\in\mathbb{R}$ on ara α és un multi-índex tals que
>
> $$T=\sum_{|\alpha|\leq m-1} C_\alpha \partial^\alpha \delta_a, \qquad \text{on } \alpha\in\mathbb{Z}_+^n.$$

Així doncs, si partim d'una distribució tal que $\mathrm{supp}(T)=\{x_0\}$ amb ordre N, triant $d_1,\dots,d_n\in\mathbb{Z}_+^n$ tals que $d_1+\dots+d_n=N+1$, la propietat $(*)$ implica

$$(x_1-x_{0,1})^{d_1}\cdot\ldots\cdot(x_n-x_{0,n})^{d_n}\,T=0.$$

En efecte, $\forall \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$

$$\langle (x_1 - x_{0,1})^{d_1} \cdot \ldots \cdot (x_n - x_{0,n})^{d_n} T, \varphi \rangle$$

$$:= \langle T, \underbrace{(x_1 - x_{0,1})^{d_1} \cdot \ldots \cdot (x_n - x_{0,n})^{d_n} \varphi}\rangle = 0$$

[l'anomenem $\psi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ i observem que $\partial^\alpha \psi(x_0) = 0$ si $|\alpha| \leq N$, ja que $d_1 + \cdots + d_n > N$. Llavors per (*), $\langle T, \psi \rangle = 0$]

Per tant, pel resultat enunciat tenim

$$T = \sum_{|\alpha| \leq N} c_\alpha \partial^\alpha \delta_{x_0}, \quad \text{per alguns } c_\alpha > 0.$$

(c) Suposem ara $T \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ amb $\operatorname{supp}(\hat{T}) \subseteq \{\xi_0\}$, $\xi_0 \in \mathbb{R}^n$. Per l'apartat anterior

$$\hat{T} = \sum_{|\alpha| \leq N} c_\alpha \partial^\alpha \delta_{\xi_0},$$

i prenent la transformada de Fourier inversa tenim

$$T = \sum_{|\alpha| \leq N} c_\alpha \cdot (-2\pi i x)^\alpha e^{2\pi i \langle x, \xi_0 \rangle}$$

Així doncs, si $\xi_0 = 0$ T és un polinomi a $\mathbb{R}^n$ amb valors a $\mathbb{C}$.

(d) Si $u \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ és tal que $\Delta u = 0$, prenent transformades de Fourier a ambdues bandes tenim

$$\sum_{j=1}^{n} (-2\pi i \xi_j)^2 \hat{u} = 0 \iff |\xi|^2 \hat{u} = 0.$$

Aquesta última igualtat implica $\operatorname{supp}(\hat{u}) \subseteq \{0\}$ (és fàcil, raoneu a l'absurd, per exemple) i per l'apartat (c) ho tenim.

(a*) Sigui $Q_0 := [-\frac{1}{2},\frac{1}{2}] \times [-\frac{1}{2},\frac{1}{2}] \subset \mathbb{R}^2$ i χ_{Q_0} la seva funció característica associada pensada com a element de $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^2)$. Volem estudiar el seu suport. Per fer-ho, considerem

$$Q_{0,\varepsilon} := \left(-\tfrac{1}{2}-\varepsilon, \tfrac{1}{2}+\varepsilon\right) \times \left(-\tfrac{1}{2}-\varepsilon, \tfrac{1}{2}+\varepsilon\right)$$

I notem que $\forall \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^2)$ amb $\text{supp}(\varphi) = \overline{\{x \in \mathbb{R}^2 : \varphi(x) \neq 0\}} \subset \mathbb{R}^2 \setminus \overline{Q_{0,\varepsilon}}$ es té

$$\langle \chi_{Q_0}, \varphi \rangle := \int_{Q_0} \varphi(x)\,dx = \int_{Q_0} 0\,dx = 0.$$

Així doncs $\text{supp}(\chi_{Q_0}) \subset \overline{Q_{0,\varepsilon}}$, $\forall \varepsilon > 0$. És a dir

$$\text{supp}(\chi_{Q_0}) \subset \bigcap_{\varepsilon>0} \overline{Q_{0,\varepsilon}} = Q_0.$$

Vegem ara que, de fet, $\text{supp}(\chi_{Q_0}) = Q_0$. Raonem per contradicció: suposem que $\exists x_0 \in Q_0$ tal que $x_0 \notin \text{supp}(\chi_{Q_0})$. Com $\{x_0\}$ és compacte i $\text{supp}(Q_0)$ tancat, $\exists \delta > 0$ tal que $\text{dist}(x_0, \text{supp}(\chi_{Q_0})) \geq \delta > 0$. Triem ara $\varphi \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^2)$ amb $0 \leq \varphi \leq 1$, $\varphi|_{B(x_0,\frac{\delta}{4})} \equiv 1$ i tal que $\varphi|_{B(x_0,\frac{\delta}{2})^c} \equiv 0$. D'aquesta manera $\text{supp}(\varphi) \cap \text{supp}(\chi_{Q_0}) = \phi$ i per tant, per definició de suport d'una distribució s'hauria de venir $\langle \chi_{Q_0}, \varphi \rangle = 0$. Però fixeu-vos que

$$\langle \chi_{Q_0}, \varphi \rangle = \int_{Q_0} \varphi(x)\,dx = \int_{B(x_0,\frac{\delta}{2}) \cap Q_0} \varphi(x)\,dx \geq \int_{B(x_0,\frac{\delta}{4}) \cap Q_0} 1\,dx$$

$$\geq \frac{1}{4}\left(\pi\left(\frac{\delta}{4}\right)^2\right) = \frac{\pi^2}{64} > 0 \quad ¡¡!!$$

Aquest fet és contradictori i porta a concloure que $\text{supp}(\chi_{Q_0}) = Q_0$.