Seminari 2 Anàlisi harmònica

Guillem Tutusaus i Alcaraz

6 de Maig de 2024

1. Calculeu la segona derivada distribucional de p.f $x_+^{-1/2}$ i expresseu-la en termes d'una part finita concreta.

   Sabem del Seminari 2 exercici 1.b. que la primera derivada distribucional de p.f $x_+^{-1/2}$ és $-\frac{1}{2}$p.f $x_+^{-3/2}$, i.e.

   $$\varphi \longmapsto -\frac{1}{2}\int_0^\infty \frac{\varphi(x)-\varphi(0)}{x^{3/2}}dx$$

   Calculem ara (p.f $x_+^{-1/2})''$ de manera similar. Dient $T := -\frac{1}{2}$p.f $x_+^{-3/2}$, tenim

   $$\begin{aligned}
   \langle T', \varphi\rangle &= -\langle T, \varphi'\rangle = \frac{1}{2}\int_0^\infty \frac{\varphi'(x)-\varphi'(0)}{x^{3/2}}dx \\
   &= \frac{1}{2}\left[\frac{\varphi(x)-\varphi'(0)x}{x^{3/2}}\right]_0^\infty + \frac{3}{4}\int_0^\infty \frac{\varphi(x)-\varphi'(0)x}{x^{5/2}}dx \\
   &= -\frac{1}{2}\lim_{\varepsilon\to 0}\frac{\varphi(\varepsilon)-\varphi'(0)\varepsilon}{\varepsilon^{3/2}} + \frac{3}{4}\lim_{\varepsilon\to 0}\int_\varepsilon^\infty \frac{\varphi(x)-\varphi'(0)x}{x^{5/2}} + \frac{\varphi(0)-\varphi(0)}{x^{5/2}}dx \\
   &= -\frac{1}{2}\lim_{\varepsilon\to 0}\frac{\varphi(\varepsilon)-\varphi'(0)\varepsilon}{\varepsilon^{3/2}} + \frac{3}{4}\lim_{\varepsilon\to 0}\int_\varepsilon^\infty \frac{\varphi(x)-\varphi'(0)x-\varphi(0)}{x^{5/2}}dx \\
   &+ \frac{3}{4}\varphi(0)\lim_{\varepsilon\to 0}\int_\varepsilon^\infty \frac{1}{x^{5/2}}dx \\
   &= -\frac{1}{2}\lim_{\varepsilon\to 0}\frac{\varphi(\varepsilon)-\varphi'(0)\varepsilon}{\varepsilon^{3/2}} + \frac{3}{4}\lim_{\varepsilon\to 0}\int_\varepsilon^\infty \frac{\varphi(x)-\varphi(0)-\varphi'(0)x}{x^{5/2}}dx \\
   &+ \frac{3}{4}\varphi(0)\Big(\frac{2}{3\varepsilon^{3/2}}\Big) \\
   &= -\frac{1}{2}\lim_{\varepsilon\to 0}\frac{\varphi(\varepsilon)-\varphi'(0)\varepsilon-\varphi(0)}{\varepsilon^{3/2}} + \frac{3}{4}\lim_{\varepsilon\to 0}\int_\varepsilon^\infty \frac{\varphi(x)-\varphi(0)-\varphi'(0)x}{x^{5/2}}dx \\
   &= \frac{3}{4}\int_0^\infty \frac{\varphi(x)-\varphi(0)-\varphi'(0)x}{x^{5/2}}dx \\
   &=: \frac{3}{4}\text{p.f } x_+^{-5/2}
   \end{aligned}$$

   Per tant, com que la integral està ben definida en un entorn del 0 (ja que és de la forma $\frac{1}{\sqrt{x}}$) i com que podem acotar l'integrant, tenim que també està ben definida a l'infinit i per tant és distribució (ja que també és lineal per la linealitat de la integral). Concloem doncs que

   $$(\text{p.f } x_+^{-1/2})'' = \frac{3}{4}\text{p.f } x_+^{-5/2}$$

2. Suposeu que voleu resoldre l'equació distribucional

   $$(x-a)^m T = 1, \qquad a \in \mathbb{R}, n \in \mathbb{N}$$

   Justifiqueu (**sense necessitat de donar tots els detalls**) quins canvis hauriem de fer en els diferents passos exposats al Seminari 2 exercici 2 per arribar a la solució de l'equació. Doneu l'expressió explícita de T.

   Per provar aquest resultat seguirem les indicacions del Seminari 2 exercici 2 canviant lleugerament els apartats.

(a) Sigui $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ amb $\varphi(a) = 0$. Provem que existeix $\psi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ tal que $\varphi = (x-a)\psi$.

Definint ψ de la següent manera

$$\psi := \begin{cases} \frac{\varphi(x)}{(x-a)}, & \text{si } x \neq a \\ \varphi'(a), & \text{si } x = a \end{cases}$$

ens assegura la continuïtat i al ser també lineal tenim que $\psi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$.

(b) Més generalment, proveu que si $\varphi^{(j)}(a) = 0$ per a tot $0 \leq j \leq m-1$, llavors existeix $\psi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ tal que $\varphi = (x-a)^m\psi$.

Altra vegada, i fent ús del teorema de Taylor

$$\varphi(x) = \sum_{j=0}^{m-1} \frac{\varphi^{(j)}(a)}{j!}(x-a)^j + \frac{\varphi^{(m)}(\xi)}{m!}(x-a)^m, \qquad \xi \in [a,x]$$

podem definir ψ de la següent manera

$$\psi := \begin{cases} \frac{\varphi(x)}{(x-a)^m}, & \text{si } x \neq a \\ \frac{\varphi^{(m)}(a)}{m!}, & \text{si } x = a \end{cases}$$

(c) Provem la igualtat distribucional $(x-a)\text{p.v } \frac{1}{x-a} = 1$.

Aquesta és una igualtat de distribucions i doncs equival a veure $\langle (x-a)\text{p.v } \frac{1}{x-a}, \varphi \rangle = \langle 1, \varphi \rangle$. Es fa de la mateixa manera que en el Seminari 2.

(d) Per $m \geq 1$, considereu

$$T_{m,a} := \frac{(-1)^{m-1}}{(m-1)!}\partial^m \ln|x-a|, \qquad \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$$

Demostreu que $(x-a)^m T_{m,a} = 1$.

Es pot demostrar per inducció sobre m. Pel cas $m = 1$ cal veure que

$$(x-a)T_{1,a} = 1$$

però $T_{1,a} := (\ln|x-a|)'$ que es pot veure fàcilment que dona p.v $\frac{1}{x-a}$ de manera que utilitzant (c) ja estariem. Pel cas m tenim

$$\begin{aligned} (x-a)^m T_{m,a} &= (x-a)^m \frac{(-1)}{(m-1)} \partial T_{m-1,a} \\ &= \frac{1}{1-m}[\partial((x-a)^m T_{m-1,a}) - m(x-a)^{m-1}T_{m-1}] \\ &= \frac{1}{1-m}[\partial((x-a)\cdot 1) - m] \\ &= 1 \end{aligned}$$

on en la segona igualtat hem fet servir la regla del producte $\partial((x-a)^m T_{m-1,a}) = (x-a)^m \partial T_{m-1,a} + m(x-a)^{m-1}T_{m-1,a}$.

(e) Demostreu que si $T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$ és tal que $(x-a)^m T = 0$, llavors $T = \sum_{j=0}^{m-1} \tilde{C}_j \partial^j \delta_a$.

És clar que $(x-a)\delta^{(k)} = 0 \forall k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$. Per tant,

$$((x-a)\delta^{(k)})' = \delta^{(k)} + (x-a)\delta^{(k+1)} = 0$$

i doncs

$$\delta^{(k)} = -(x-a)\delta^{(k+1)}$$

A més, recordem que si $(x-a)T = 0$ per $T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$, aleshores $T = C\delta_a$. Així doncs, si T és tal que $(x-a)^m T = 0$, aleshores

$$
\begin{aligned}
&(x-a)^m T = (x-a)(x-a)^{m-1}T = 0 \implies (x-a)^{m-1}T = C_1\delta_a \\
&\implies (x-a)^{m-1}T + C_1(x-a)\delta_a' = 0 \implies (x-a)((x-a)^{m-2}T + C_1\delta_a') = 0 \\
&\implies (x-a)^{m-2}T + C_1\delta_a' = C_2\delta_a \implies (x-a)((x-a)^{m-3}T - C_1\delta_a'' + C_2\delta_a') = 0 \\
&\implies (x-a)^{m-3}T - C_1\delta_a'' + \delta_a' = C_3\delta_a \implies \overset{m)}{\cdots} \implies
\end{aligned}
$$

$$T = \sum_{j=0}^{m-1} \tilde{C}_j \partial^j \delta_a$$

(f) Deduïm que, en general, si $(x-a)^m T = 1$, llavors $T = T_{m,a} + \sum_{j=0}^{m-1} \tilde{C}_j \partial^j \delta_a$.

El següent resultat es desprèn del vist en (d) i (e)

$$(x-a)^m (T - T_{m,a}) = 0 \implies T - T_{m,a} = \sum_{j=0}^{m-1} \tilde{C}_j \partial^j \delta_a$$