

# Nusos i el polinomi de Jones

Treball de Final de Grau

Guillem Tutasaus Alcaraz, 1533701, 1533701@uab.cat  
Supervisor: Joan Porti Piqué

**Abstract:** Aquest és un document que tracta de donar una primera introducció a la teoria de nusos, estudiar alguns dels seus invariants algebràics més coneguts posant una èmfasi especial en el polinomi de Jones i classificar d'aquesta manera els nusos d'ordre més baix. Finalment, esmentarem algunes aplicacions.

## 1 Introducció

L'espècie humana té coneixement dels nusos des de temps immemorials. Començant per l'enregistrament d'informació, les xarxes de pesca o fins i tot per motius religiosos, els nusos han estat de gran importància per la seva utilitat i simbologia espiritual. Moltes obres d'art de cultures d'arreu del món presenten aquestes figures en les seves obres. Alguns exemples són la cultura Xinesa, Tibetana o Celta.

Els nusos comencen a tenir la seva presència dins el món de les matemàtiques a partir de l'any 1771 degut als treballs realitzats per Alexandre-Théophile Vandermonde el qual es dedicà a estudiar les propietats topològiques dels nusos en relació a la seva posició en l'espai. Treballs posteriors de Carl Friedrich Gauß qui va definir diverses propietats d'aquests objectes [Silver (2006)] van projectar aquesta teoria a la fama. L'any 1860 la teoria sobre l'atom en l'aether formulada per William Thomson va dur a Peter Guthrie Tait a la creació de les primeres taules de nusos. L'any 1885, aquest va publicar la primera taula amb tots els nusos de fins a deu creuaments, també va formular les conjectures que duen el seu

nom.

A principis del segle XX, Max Dehn i J. W. Alexander van estudiar els nusos des del punt de vista de la teoria de grups i el seus invariants utilitzant grups d'homologia, cosa que va dur a la creació d'un dels primers invariants algebràics de la teoria, el polinomi d'Alexander.

A finals de l'any 1970, la incorporació de la geometria hiperbòlica en l'estudi dels nusos utilitzant el teorema de Geometrització de Thurston va permetre classificar aquests en funció de la seva mètrica, permetent l'ús de la geometria en la creació de nous invariants. El descobriment del polinomi de Jones per part de Vaughan Jones l'any 1984 [Sosinskiĭ (2002)] juntament amb contribucions de Edward Witten i Maxim Kontsevich van revelar fortes relacions entre la teoria de nusos i mètodes matemàtics en mecànica estadística i teoria quàntica de camps. Una gran quantitat de invariant han estat inventats des de llavors utilitzant eines com els grups quàntics o la homologia de Floer.

En les darreres dècades, els científics han estat interessats en l'estudi dels nusos físics per tal de comprendre el nuament



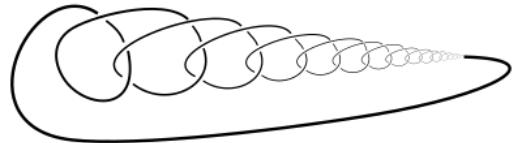
**Figura 1.1:** D'esquerra a dreta: Nus simple (Overhand Knot en anglès) i Arbre de la vida, nus celta símbol de la naturalesa.

de l'ADN i de diferents polímers. Aquesta teoria s'utilitza també per determinar si una molècula és o no quiral. Finalment, la teoria de nusos pot ser crucial en la construcció dels primers ordinadors quàntics a través del model proposat per Alexei Kitaev [Collins (2006)].

## 1.1 Sobre els nusos

Els nusos, son estructures presents en el nostre dia a dia. La Figura 1.1 mostra un parell d'exemples del que considerem nus en el sentit habitual.

El problema que tenen aquests nusos és que, aquests mantenen la seva forma a partir de la tensió i fricció que existeix entre les cordes que formen el nus. No és gaire difícil veure que un podria desfer aquests nusos de manera que acabariem obtenint una simple corda sense cap nus. És per això, que en matemàtiques és necessari considerar una definició més restrictiva d'aquest concepte per tal de preservar l'estructura de l'objecte. Podriem pensar, que si uníssim els caps de les cordes de la Figura 1.1, aleshores només tallant la corda seriem capaços de desfer el nus (això precisa de demostració!).



**Figura 2.1:** Exemple d'un nus salvatge.

## 2 Algunes definicions i els objectius de la teoria de nusos

De definicions de nus, parlant en termes matemàtics, n'hi ha diverses. Nosaltres considerarem la definició dins el camp de la topologia, d'on en reutilitzarem molta notació. A més, la teoria de nusos s'emmarca dins una teoria més general; la de links. Per tant, moltes vegades anirem mencionant resultats que també son vàlids per aquests objectes. La següent secció pretén donar unes primeres definicions pel que fa als nostres objectes.

**Definició 1.** *Diem que  $L$  és un link de  $m$  components, o un  $m$ -link si és un subconjunt de  $S^3$ , o de  $\mathbb{R}^3$ , que consisteix en  $m$  corbes disjunes, simples, tancades i lineals a trossos. Un 1-link és un nus.*

La condició de lineal a trossos significa que les components de  $L$  estan cadascuna d'elles feta d'un nombre finit de rectes col·locades una al costat de l'altra amb el principi d'una coincidint amb el final de l'altra. Aquesta condició evita la creació de nusos patològics que no presenten un comportament esperat (Figura 2.1). A aquests últims nusos se'ls anomena *salvatges* i no seran estudiats en aquest treball. A la pràctica, quan representem nusos o links assumirem que hi ha tants segments rectes que cada component semblarà corba.

*De què tracta la teoria de nusos?* Una possible resposta és que la teoria de nusos pretén classificar el conjunt de possibles nusos. Donat un nus  $K$ , hom con-



**Figura 2.2:** A l'esquerra el nus  $7_1$  (més endavant explicarem el perquè del nom). A la dreta un 3-link coneugut amb el nom d'anell Borromeu.

sidera que aquest està inclòs, mitjançant una aplicació contínua, dins l'espai ambient tres dimensional  $\mathbb{R}^3$  o equivalentment dins  $S^3$ , obtenim aleshores la teoria clàssica de nusos. Aquesta teoria pretén estudiar la col·locació de  $K$  dins aquest espai. Classificar, en aquest cas vol dir considerar iguals sota certes condicions, que definirem més endavant.

**Definició 2.** Diem que un nus està *desnuat* o que és el nus trivial, notacionalment  $\bigcirc$  si no presenta cap creuament en els segments de corda que el formen.

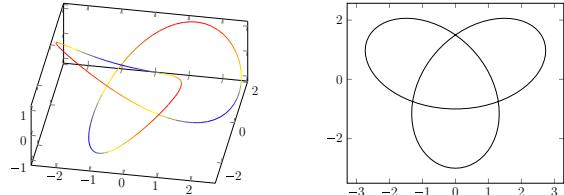
El nus trivial és el nus més simple que existeix.

## 2.1 Equivalència entre nusos

Expliquem ara què entem quan diem que dos nusos son el mateix.

**Definició 3.** Diem que dos links  $L$  i  $L'$  a  $S^3$  son equivalents si existeix una isotopia ambient entre ells.

És a dir, si existeix una família d'homeomorfismes  $h_t : S^3 \rightarrow S^3$  per  $t \in [0, 1]$  tal que  $h_0 = 1$ ,  $h_1 = h$  i  $(x, t) \mapsto (h_t x, t)$  és un homeomorfisme lineal a trossos de  $S^3 \times [0, 1]$  a  $S^3$ , llavors direm que  $L$  i  $L'$  son links equivalents. L'equivalència entre nusos és la mateixa que en la Definició 3 tenint present que en aquest cas només tenim una component. Observem que la distorsió no és del



**Figura 2.3:** A l'esquerra el nus  $3_1$  també coneugut com Trefoil amb parametrització  $(\sin t + 2 \sin 2t, \cos t - 2 \cos 2t, -\sin 3t)$ . A la dreta, la seva projecció paral·lela sobre l'eix  $z$ .

mateix link sinó de l'espai "ambient"  $S^3$  en sí mateix. Definir nus equivalent d'aquesta manera evita que els creuaments que formen el nus o link puguin fer-se cada vegada més petits fins a desapareixer. D'aquesta manera, és possible moure tot  $S^3$  de forma contínua utilitzant  $h_t$  per passar de  $L$  a  $L'$ .

## 2.2 Representació d'un nus en matemàtiques

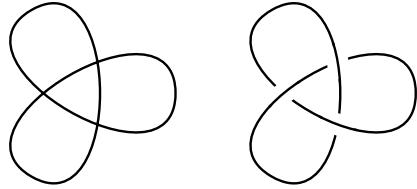
Tenint present la definició de nus a partir d'ara en sentit matemàtic donada a la Definició 1, un pot veure la dificultat d'estudiar aquest tipus d'objectes tres dimensionals en un llibre de text o bé en una pissarra. És per això, que per tal d'estudiar-los sovint es representen els nusos mitjançant el seu *diagrama de nus*.

Considerant la projecció paral·lela (o axonomètrica) sobre l'eix  $z$  en el pla  $\mathbb{R}^2$  d'un nus qualsevol  $K$ , obtindrem una figura com en l'exemple 2.3.

Considerant aquesta projecció però, un perd informació sobre el propi nus, ja que cal saber quin segment de corda va per sobre i quin per sota alhora de creuar-se. Per tal de no perdre aquesta informació, el segment que passa per sota se'l dibuixa de forma discontinua mentre aquest passa sota el segment de corda que el creua.

D'aquesta manera, la projecció del nus  $3_1$  —nom que rep un nus d'acord amb unes

normes que definirem més endavant – de la Figura 2.3 quedaría de la següent manera:



Així doncs, considerant la projecció paral·lela sobre l'eix  $z$  d'un nus  $K$  qualsevol i disposant de la informació sobre els creuaments obtenim el que anomenarem *diagrama de nus*, notacionalment  $\text{diag}(K)$ . Moltes vegades, en la literatura es fa un abús de llenguatge i notació, anomenant nus al que nosaltres anomenem diagrama de nus i fent servir  $K$  i  $\text{diag}(K)$  indistintament. D'aquí a no massa veurem que de fet, estudiar-ne les propietats d'un és equivalent a estudiar les de l'altre.

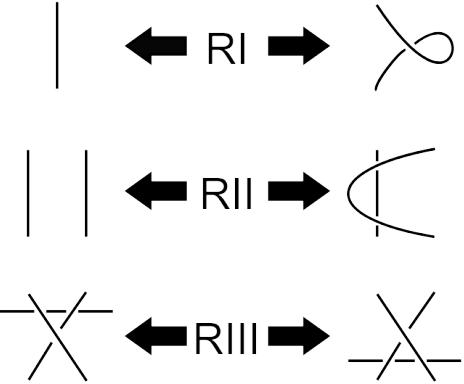
### 3 Els moviments de Reidemeister

Una primera aproximació per tal de distingir si dos nusos són diferents és veure quan són iguals. Aquesta és la inspiració darrera de la següent secció que tractarà sobre els moviments de Reidemeister i el Teorema central de la Teoria de Nusos.

#### 3.1 Moviments de Reidemeister

Motivats per la Secció 2.1, un podria veure sense massa dificultat que cadascun dels moviments de la Figura 3.1 resulta en un diagrama de nus equivalent a l'original.

A aquests tres tipus de moviments se'ls anomena moviments de Reidemeister. Al primer de tots se'l diu de Tipus I o *twist* en anglès, al segon de Tipus II o *poke* i al



**Figura 3.1:** De dalt a baix: Moviment de Tipus I, Tipus II i Tipus III [Trace (1983)]. Cal pensar que els segments lliures de corda s'uneixen a través d'un nus  $K$ .

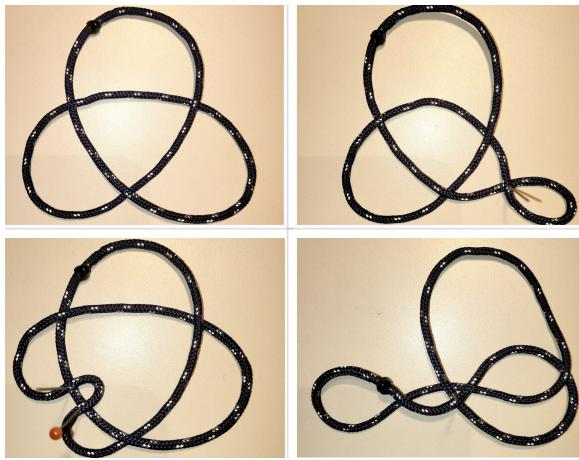
tercer de Tipus III o *slide*.

**Moviment de Tipus I o *twist*:** També anomenat **RI** per abreujar notació, aquest tipus de moviment consisteix en "pessigar" la corda i amb el tros obtingut donar-li la volta (d'aquí el nom en anglès) fent un bucle com en el de la Figura 3.1.

**Moviment de Tipus II o *poke*:** També anomenat **RII**. Aquest tipus de moviment consisteix en fer passar una de les dues cordes per sobre de l'altra. En anglès, la paraula *poke* significa fer passar forçosament alguna cosa en una certa direcció i doncs en aquest cas es podria pensar que una de les dues cordes s'ha fet passar per sobre de l'altra.

**Moviment de Tipus III o *slide*:** També anomenat **RIII**. Aquest tipus de moviment consisteix en, com el nom en anglès indica, fer lliscar una de les tres cordes d'una banda a l'altra de la intersecció entre les dues cordes restants. En la Figura 3.1 podem veure com el segment de corda horitzontal llisca de dalt a baix del creuament entre les altres dues cordes.

La Figura 3.2 mostra el nus  $3_1$  juntament



**Figura 3.2:** Moviments de Reidemeister aplicats al nus  $3_1$ . D'esquerra a dreta i de dalt a baix: Nus  $3_1$ , nus  $3_1$  havent aplicat un moviment RI, RII i RIII respectivament. Per aplicar RIII hem hagut d'aplicar RI abans ja que no es possible aplicar directament RIII en aquest cas.

amb aquest mateix havent aplicat cadascun dels moviments anteriors.

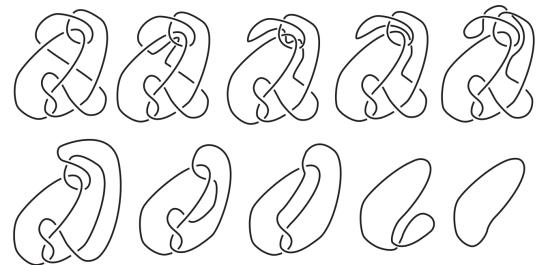
Continuant amb el que hem vist, no és massa difícil veure que aplicant una seqüència finita de moviments RI, RII o RIII a un diagrama de nus qualsevol, el nus obtingut és equivalent a l'original.

## 3.2 El Teorema central de la Teoria de Nusos

L'any 1930, Kurt Reidemeister demostrarà que l'implicació contrària també és certa, és a dir que si dos diagrames de nusos qualssevol son equivalents, aleshores sempre podem trobar una seqüència finita de moviments de Reidemeister de manera que podem transformar un diagrama de nus en l'altre. Aquest resultat va donar lloc al teorema central de la teoria.

**Teorema 1.**  $\text{diag}(K)$  i  $\text{diag}(K')$  son equivalents si i només si, existeix una seqüència finita de moviments RI, RII o RIII que passa d'un a l'altre.

Una demostració del teorema original es pot trobar a [Roberts (2015)]. Aquesta



**Figura 3.3:** Com es pot observar en l'exemple, el nus de Culprit és equivalent al nus trivial. Mitjançant la seqüència de moviments següent podem passar de l'un a l'altra. D'esquerra a dreta i de dalt a baix: RII, RIII+RIII, RII, RIII, RI+RII, RII, RII, RI, [Kauffman and Lambropoulou (2007)].

demostració es troba fora de l'objectiu del treball — i per això s'ha optat a no reproduir-la — però en essència aquesta demostració fa ús del fet que un pot generar nusos equivalents a l'original afegint triangles als costats d'un nus poligonal.

El Teorema 1 doncs, posa en evidència el fet que parlar d'equivalència entre nusos o d'equivalència entre diagrames de nusos és el mateix, doncs aquests estan en correspondència a través de la Secció 2.2.

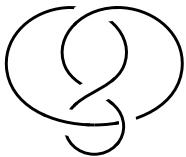
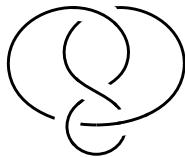
D'aquesta manera i fent referència al mencionat anteriorment, a partir d'ara farem un abús de llenguatge i notació dient nus  $K$  indistintament sense donar importància al fet de si ens referim al nus o al seu diagrama.

## 4 Propietats sobre nusos

En aquesta secció posarem de manifest diferents propietats d'un nus que més endavant tindran importància en la seva classificació.

**Definició 4.** Anomenem ordre de  $K$ ,  $O(K)$  al mínim nombre de creuament que  $K$  pot arribar a presentar donat un diagrama qualsevol.

La Figura 3.3 demostra que l'ordre del nus Culprit és zero ja que aquest sempre



**Figura 4.1:** A l'esquerra el nus  $4_1$  o Figure Eight en Anglès. A la dreta, el seu nus emmirallat.

és un nombre positiu. Tampoc és molt difícil veure que donat un nus  $K$  qualsevol a aquest se li pot afegir creuaments mitjançant moviments RI, no obstant  $O(K)$  es manté contant.

**Definició 5.** Diem que un nus és l'emmirallat  $\bar{K}$  d'un altre nus  $K$  si aquest primer s'obté a partir de l'original canviant tots els creuaments de sobrepassos a sotapassos i a la inversa.

La Figura 4.1 mostra un exemple d'un nus emmirallat.

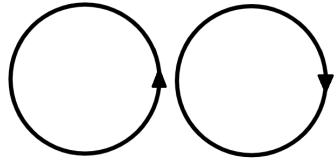
D'aquesta manera, si un nus  $K$  és equivalent a  $\bar{K}$ , llavors diem que és *amfíquiral*, sinó diem que és *quiral*. El nus  $4_1$  de la Figura 4.1 és un exemple de nus amfíquiral, però no sempre és veritat que un nus  $K$  sigui equivalent a  $\bar{K}$  com veurem més endavant.

**Definició 6.** Diem que un nus és l'invers  $rK$  d'un altre nus  $K$  si aquest primer s'obté a partir de l'original canviant-ne l'orientació.

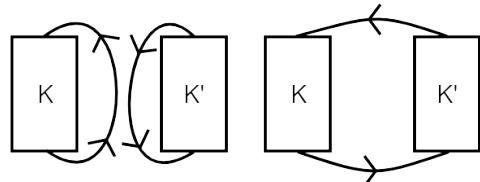
És clar que un nus pot ser orientat de dues maneres diferents, escollir una d'aquestes orientacions és informació extra sobre el nus que pot o no ser donada. De manera similar a la Definició 5, no sempre un nus és equivalent al seu invers.

**Definició 7.** Diem que un nus  $K$  és primer si no és el nus trivial i si  $K = K_1 + K_2$  implica que  $K_1$  o  $K_2$  és el nus trivial.

En aquest cas, el símbol  $+$  fa referència a l'operació suma. Donats dos nusos orientats  $K$  i  $K'$ , aquests poden ser sumats



**Figura 4.2:** Les dues úniques orientacions del nus trivial. És evident que aquests dos diagrames son equivalents.

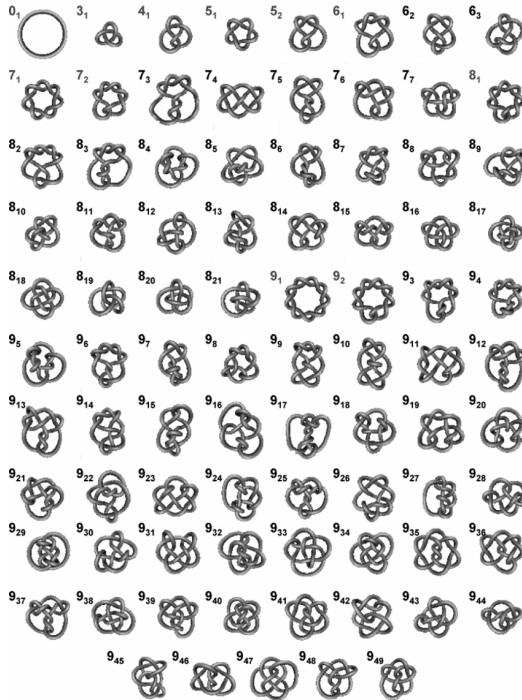


**Figura 4.3:** Suma de dos nusos quals-sevol.

posant-los un al costat de l'altre i unint-los de manera que es preservi l'orientació. Aquesta operació està ben definida sota equivalència. A més, és commutativa, associativa, té element neutre i es comporta de forma similar al producte de nombres enteros. De fet, caldria pensar en la suma de nusos com la suma conexa de varietats desenvolupada en un curs fonamental de topologia.

La Figura 4.4 és una taula que conté tots els nusos primers de fins a 9 creuaments. Cadascun rep un nom conformat per un parell de nombres; el primer de tots correspon al seu ordre i el segon és un subíndex històricament assignat a aquell nus en concret. Les primeres tabulacions que es coneixen van fer-se per Tait l'any 1860 mentre aquest estudiava l'àtom. Aquesta taula negligeix el fet que possiblement un mateix nus  $K$  sigui diferent a  $\bar{K}$ ,  $rK$  o  $\bar{rK}$ . D'aquesta manera, cada nus de la taula correspon a un, dos o quatre nusos de  $S^3$  mitjançant les operacions definides a 5 i 6.

**Definició 8.** Diem que  $K$  és un nus alternat si a mesura que anem recorrent el nus, els creuaments alternen de sobrepassos



**Figura 4.4:** Taula de nusos fins a ordre 9.

a sotapassos.

El nus  $4_1$  n'és un exemple. De fet, cal anar fins a  $8_{19}$  per trobar el primer nus no alternat i doncs això és una conseqüència del baix ordre dels nusos. Es pot veure que donat un ordre qualsevol, sempre existeix com a mínim un nus alternat. Ara bé, aquests disminueixen exponencialment a mesura que incrementem l'ordre del nus. Aquesta classe de nusos tenen bones propietats.

## 5 Alguns invariants algebraics

El Teorema 1 dona un mètode per saber quan dos nusos son equivalents, aquest resultat però no permet distingir quan dos nusos son diferents. D'aquesta manera per exemple, encara no sabem que  $\textcircled{O} \neq 3_1$ . Per això és necessari la creació d'invariants que ens permetin realitzar aquesta tasca.

Recordem que un invariant és un objecte ben definit, ja sigui un número, polinomi, grup, etcètera; que podem associar a un nus

qualsevol, de manera que si tenim dos nusos amb diferent valor per aquest invariant, llavors segur que els dos nusos son diferents.

### 5.1 L'Ordre

Com ja podriem haver esperat, l'ordre d'un nus és un exemple d'invariant. Nusos amb diferent ordre no poden ser equivalents. Aquest invariant però és intractable a nivell pràctic pel fet d'haver de considerar el mínim nombre de creuaments donats tots els diagrames d'aquest.

**Proposició 1.** *L'ordre d'un nus és un invariant.*

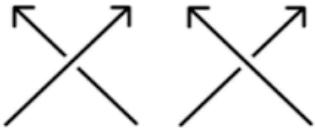
*Demostració.* Sigui  $K$  un nus qualsevol amb diagrama  $\text{diag}(K)$ . Siguin  $K_1, K_2, K_3, \dots$  nusos equivalents a  $K$  amb els seus respectius diagrames formats a partir de diferents transformacions de  $K$  com hem definit a la Secció 3.1. D'entre aquests nusos, tenim un nus  $K_k$  que té el mínim nombre de creuaments  $x$ . Definim  $O(K) = O(K_k) = x$ . Evidentment,  $x = O(K_1) = O(K_2) = O(K_3) = \dots$ . Ara, quan transformem el nus  $K$  en un nus equivalent, com aquest està a la llista de nusos, aquest també pot ser transformat en  $K_k$  on  $O(K_k) = x$ .  $\square$

### 5.2 El Nombre de Desnuament

**Definició 9.** *Diem que  $u(K)$  és el nombre de desnuament del nus  $K$  si aquest és el mínim nombre de canvis en els creuaments d'un diagrama de nus necessaris per tal d'aconseguir el nus trivial.*

$$u(K) = \min\{u(D) | D \text{ diagrama de } K\}$$

El nombre de desnuament és també un invariant. Aquest però, de la mateixa manera que passa amb l'ordre és intractable a nivell pràctic. Intuitivament, si  $K$  és una corba a  $S^3$ , llavors  $u(K)$  és el mínim nombre de vegades que  $K$  ha de passar per sí mateix per aconseguir el nus trivial.



**Figura 5.1:** Moviments locals que es poden realitzar en qualsevol creuament d'un nus. A la imatge de l'esquerra, el tros de corda que va de Sud-Oest fins a Nord-Est passa per sobre de la corda que el creua i doncs en aquest sentit diem que la sobrepassa. A la dreta, aquesta mateixa corda creua per sota i doncs diem que la sotapassa.

**Proposició 2.** *Donat un nus  $K$  qualsevol, aquest sempre pot ser desnuat, i.e.  $u(K)$  és finit.*

*Demostració.* Entenem per *moviment local* un canvi en els creuaments d'un nus com en el de la Figura 5.1 passant de sobrepassos a sotapassos o a la inversa. D'aquesta manera, recorrent  $K$  d'acord amb una orientació qualsevol i fent moviments locals canviant sotapassos a sobrepassos a mesura que aquests van apareixen sense modificar els creuaments que ja haguem visitat ja ho tindriem.  $\square$

**Proposició 3.** *Sigui  $K, K'$  dos nusos qualssevol, llavors  $u(K + K') \leq u(K) + u(K')$*

*Demostració.* És clar que per tal de desnuar  $K + K'$  només fa falta desnuar  $K$  i  $K'$ .  $\square$

L'altre desigualtat és de fet un problema obert.

De fet, coneixer el nombre de desnuament d'un nus pot pensar-se com l'objectiu d'aquesta teoria. Si veiem que un nus  $K$  no és el nus trivial i que un moviment local en algun dels creuaments dona com a resultat el nus trivial, llavors segur que  $u(K) = 1$ . Així doncs, d'aquí a no massa estarà clar que  $u(3_1) = u(4_1) = 1$ . No obstant, actualment encara hi ha una gran

quantitat de nusos com per exemple  $10_{11}$  dels quals se'ls hi desconeix el nombre de desnuament. Per aquest últim es creu que es troba entre dos i tres.

Veiem a continuació un altre tipus d'invariants més fàcils de tractar i que permeten distingir amb facilitat diferents nusos.

### 5.3 El Gènere

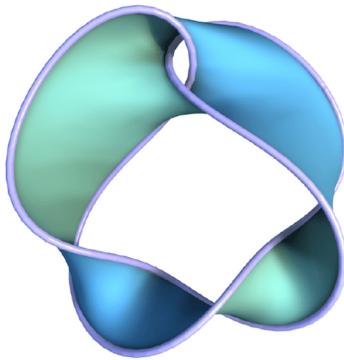
Veurem ara que tot link a  $S^3$  es pot veure com la frontera d'una superfície immersa en  $S^3$ . Aquestes superfícies poden ser utilitzades per estudiar el link.

**Definició 10.** Una superficie de Seifert  $S$  per un link  $L$  orientat de  $S^3$  és una superfície compacta, connexa i orientable,  $S \subset S^3$  de manera que la seva frontera és  $L$ , i.e.  $\partial S = L$ .

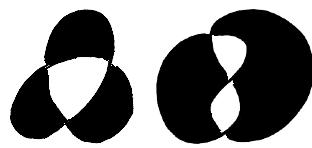
No es gens evident a partir de la Definició 10 que aquests objectes hagin d'exsistir i encara menys evident com es construeixin. A continuació veurem que de fet, existeix un algorisme per construir-los. Exemples d'aquestes superfícies son com les de la Figura 5.2.

És evident que tota superfície compacta connexa i orientada amb frontera dins  $S^3$  és un exemple d'un link. Una superfície és no orientable si conté una banda de Möbius. Algunes superfícies poden ser construïdes amb un link qualsevol com a frontera de la següent manera: Pintant de color blanc i negre seguint un patró com el d'un taulell d'escacs les regions de  $S^2$  que formen el complement del diagrama d'un link. Considerant totes les regions d'un mateix color i juntant-les per bandes amb una mitja volta arribem a obtenir un objecte com el de la Figura 5.3.

Tot i que aquest mètode pot donar com a resultat una superfície de Seifert, en general aquest no té perquè ser el cas. Herbert



**Figura 5.2:** Exemple d'una superfície de Seifert per  $5_2$ .



**Figura 5.3:** Dos diagrames del nus  $3_1$  pintats com indiquen les instruccions. Com es pot observar, la superfície de l'esquerra és no orientable al ser una cinta de Möbius amb tres mitjes voltes, la de la dreta, en canvi, sí; i doncs és una superfície de Seifert com havíem vist a la Definició 10. Notem doncs que diagrames diferents d'un mateix nus poden o no donar lloc a una superfície de Seifert.



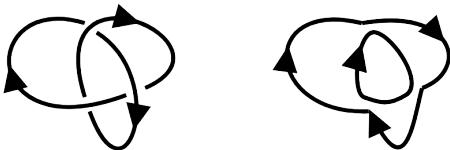
**Figura 5.4:** Moviments utilitzats en l'algorisme de Seifert. Quan ens trobem amb un creuament, resoldrem aquest com mostra la imatge central resseguint el nus o link com indica la seva orientació.

Seifert demostrà l'existència d'aquests objectes i donà un algorisme — que duu el seu mateix nom — per trobar-les [Seifert (1931)].

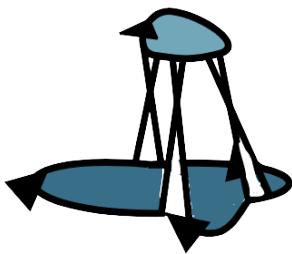
**Teorema 2.** *Tot link orientat  $L$  a  $S^3$  té una superfície de Seifert.*

*Demostració.* Sigui  $\widehat{\text{diag}}(L)$  un diagrama orientat de  $L$  qualsevol i sigui  $\widehat{\text{diag}}(\widehat{L})$  aquest darrer diagrama modificat segons indica la Figura 5.4, llavors  $\widehat{\text{diag}}(\widehat{L})$  és el mateix que  $\widehat{\text{diag}}(L)$  excepte en un entorn prou petit de cada creuament on aquest ha sigut eliminat de la única manera coherent amb l'orientació del nus. Aquest  $\widehat{\text{diag}}(\widehat{L})$  és doncs una unió disjunta de corbes orientades simples i tancades dins  $S^2$ . D'aquesta manera,  $\widehat{\text{diag}}(\widehat{L})$  és la frontera de la unió d'un nombre de discs disjunts. Considerant que aquests disc es troben al mateix nivell, excepte si aquests estan un contingut en l'altre — en aquest cas el disc de dins es considerarà a sobre l'altre disc — juntem els discs mitjançant bandes amb una mitja volta als mateixos llocs on hi havia els creuaments. Això forma una superfície orientada amb  $L$  com a frontera. Cada disc rep la orientació induïda per  $\widehat{\text{diag}}(\widehat{L})$  i les bandes que uneixen els diferents discs van alternant aquesta orientació.  $\square$

En la demostració del Teorema 2,  $\widehat{\text{diag}}(\widehat{L})$  era una col·lecció disjunta de corbes simples i tancades construïdes a partir de  $\widehat{\text{diag}}(L)$ . Aquestes corbes s'anomenen cercles de Seifert del  $\widehat{\text{diag}}(L)$ . La Figura 5.5 dona un exemple d'aquesta.



**Figura 5.5:** Exemple amb la construcció de  $\widehat{\text{diag}}(3_1)$  a partir d'un diagrama de  $3_1$  qualsevol.



**Figura 5.6:** superfície de Seifert pel nus  $3_1$  obtinguda unint els discs a través de bandes amb una mitja volta. Una senzilla comprovació demostra que la frontera de la superfície és el mateix nus.

Una superfície de Seifert per la Figura 5.5 s'aconsegueix superposant les dues corbes disjunes una a sobre l'altra i unir-les mitjançant tres bandes amb una mitja volta cadascuna en els creuaments. Evidentment, aquest algorisme dona lloc a una superfície de Seifert. Donat un diagrama qualsevol de  $L$  però, aquesta no té perquè ser única. Tampoc té perquè ser la més senzilla donat un diagrama qualsevol.

**Definició 11.** El gènere  $g(K)$  d'un nus  $K$  es defineix com

$$g(K) = \min\{g(S) | S \text{ superfície de Seifert de } K\}$$

Direm que una superfície de Seifert  $S$  amb  $K$  com a frontera és minimal si  $g(S) = g(K)$ .

**Proposició 4.** El gènere d'un nus és invariant.

**Demostració.** Considerem una superfície de Seifert minimal  $S$  que té per frontera  $K$ . Com  $K$  és equivalent a  $K'$  llavors ha

d'existir un homeomorfisme  $h : S^3 \rightarrow S^3$  de manera que  $h(K) = K'$ . Llavors,  $h(S)$  és una superfície de Seifert que té per frontera  $K'$  i  $g(h(S)) = g(S) = g(K)$ . A més,  $h(S)$  és una superfície de Seifert minimal que té  $S'$  per frontera i per tant  $g(K) = g(K')$ . Si  $h(S)$  no fos una superfície de Seifert minimal de  $K'$ , llavors existiria una superfície de Seifert minimal  $S'$  que tindria  $K'$  per frontera i tal que  $g(S') < g(h(S))$  i per tant  $h^{-1}(S')$  seria una superfície de Seifert amb  $K$  per frontera amb gènere menor que  $g(S)$ , però això no pot ser ja que  $S$  és minimal.  $\square$

Com en aquest cas  $K$  és un nus,  $S$  només té una component de frontera de manera que com a superfície abstracta és un disc amb un nombre concret de "mànecs". A aquest nombre se l'anomena gènere. Més precisament, el gènere de  $S$  és

$$g(S) = \frac{1}{2}(1 - \chi(S)) \quad (5.1)$$

on  $\chi$  és la característica d'Euler de  $S$ . La característica d'Euler es pot definir paral·lelament com el nombre de vèrtex menys el nombre de costats més el nombre de triangles en qualsevol triangulació de  $S$ .

Si  $\text{diag}(K)$  té  $n$  creuament i  $s$  cercles de Seifert, llavors  $\chi(S) = s - n$  de manera que

$$g(K) \leq \frac{1}{2}(n - s + 1) \quad (5.2)$$

Aquest invariant té un millor tractament que els vistos anteriorment. Donem ara una caracterització del nus trivial en termes del gènere.

**Proposició 5.**  $K$  és el nus trivial si i només si  $g(K) = 0$ .

**Demostració.** Si  $K$  és el nus trivial, llavors un disc amb frontera  $K$  és clarament una superfície de Seifert minimal amb  $K$  per frontera. I com que un disc és una esfera amb un component de frontera deduïm que  $g(K) = g(S^2) = 0$ . Alternativament, si  $K$  és tal que  $g(K) = 0$ , llavors existeix

una superfície de Seifert minimal  $S$  amb  $g(S) = 0$ , d'aquesta manera  $S$  és una esfera amb una component per frontera, i.e. un disc.  $\square$

Seguint amb l'exemple del nus  $3_1$ , llavors es veu clarament que  $g(3_1) = 1$ . Per tant, ja sabem que  $3_1 \neq \bigcirc$ . De manera similar un pot arribar a calcular els gèneres d'un gran nombre de nusos. El problema amb aquest mètode és que l'Equació 5.2 dona una cota superior per aquest gènere i per tant, a mesura que incrementem el nombre de creuaments és possible que el gènere pugui prendre un nombre finit de valor diferents entre ells. Per exemple, un exercici senzill demostra que  $g(8_{20}) \leq 2$  i doncs pot ser 1 o bé 2.

### 5.3.1 Additivitat i aplicacions

**Teorema 3.** *Donats dos nusos  $K$  i  $K'$ ,*

$$g(K + K') = g(K) + g(K')$$

*Demostració.* Comencem veient  $g(K + K') \leq g(K) + g(K')$ . Considerem que  $K$  i  $K'$  estan separats per un pla i considerem les superfícies de Seifert minimals de tots dos nusos  $S$  i  $S'$  ( $S$  i  $S'$  també estan separades pel pla). Donem una orientació a  $K$  i  $K'$  i considerem la seva suma assegurant-nos que  $K + K'$  no intersecti  $\text{Int}(S)$  ni  $\text{Int}(S')$ . Considerem ara una banda  $B$  que connecta  $K$  i  $K'$  que té per frontera els dos segments de corda introduïts al considerar la suma  $K + K'$  i de tal manera que  $B$  no intersecta  $\text{Int}(S)$  ni  $\text{Int}(S')$ . D'aquesta manera,  $B$  connecta  $S$  i  $S'$  i doncs  $C = S \cup S' \cup B$  és una superfície de Seifert per  $K + K'$ . Finalment com  $g(C) = g(S) + g(S') = g(K) + g(K')$  tenim  $g(K + K') \leq g(K) + g(K')$ . L'altre desigualtat es pot trobar a AAAA.....AAAAAAA □

A partir del Teorema 3 obtenim un seguit de resultats:

**Corol·lari 1.** Cap nus tret del nus trivial té oposat respecte la suma. És a dir, que si  $K + K' = \bigcirc$ , llavors  $K = K' = \bigcirc$ .

*Demostració.* Suposem que existeix  $K$  i  $K'$  amb almenys un d'ells diferent del nus trivial de manera que  $K + K' = \bigcirc$ , llavors en virtut del Teorema 3

$$g(K + K') = g(K) + g(K')$$

Com que el gènere d'un nus és un nombre positiu, tenim que  $g(K) = g(K') = 0$ .  $\square$

**Corol·lari 2.** *Hi ha un nombre infinit de nusos diferents.*

*Demostració.* Sigui  $K$  un nus no trivial qualsevol i  $\sum^n K$  la suma de  $n$  còpies d'aquest. Veiem que si  $n \neq m$ , llavors  $\sum^n K \neq \sum^m K$ . Suposem que  $\sum^n K = \sum^m K$ , aleshores  $\sum^n g(K) = \sum^m g(K)$ . Sense pèrdua de generalitat podem suposar que  $m > n$ , d'aquesta manera  $\sum^{m-n} g(K) = 0$  cosa que implica  $K = \emptyset$ . Contradicció amb el fet que  $K$  no pot ser trivial.  $\square$

**Corol·lari 3.** Un nus  $K$  amb gènere 1 és primer.

*Demostració.* Sigui  $K$  un nus amb  $g(K) = 1$  i expressem aquest com a suma de nusos  $K_1$  i  $K_2$ , llavors  $1 = g(K_1) + g(K_2)$  i per tant  $g(K_1) = 0$  o al revés.  $\square$

**Corol·lari 4.** Tot nus  $K$  pot ser expressat com a suma finita de nusos primers.

*Demostració.* Si  $K$  és primer, llavors el resultat és obvi. Suposem ara que  $K$  no sigui un nus primer. Per definició, existeixen  $K_1$  i  $K_2$  tots dos diferents del nus trivial de manera que  $K = K_1 + K_2$  i del Teorema 3 sabem que  $g(K_1), g(K_2) < g(K)$ . Ara, fent el mateix procés amb  $K_1$  i  $K_2$  podem concloure que  $K$  és suma de nusos primers.  $\square$

**Corol·lari 5.** Existeixen nusos amb un nombre de creuaments arbitràriament gran.

*Demostració.* Sigui  $K$  un nus qualsevol, com que el nombre de cercles de Seifert sempre serà com a mínim 1, utilitzant l'Equació 5.2 tenim

$$g(K) \leq \frac{n}{2}$$

3 <sub>1</sub>	4 <sub>1</sub>	5 <sub>1</sub>	5 <sub>2</sub>	6 <sub>1</sub>	6 <sub>2</sub>	6 <sub>3</sub>	7 <sub>1</sub>	7 <sub>2</sub>	7 <sub>3</sub>	7 <sub>4</sub>	7 <sub>5</sub>
1	1	2	1	1	2	2	3	1	2	1	2

7 <sub>6</sub>	7 <sub>7</sub>
2	2

**Figura 5.7:** Gènere de tots dels nusos primers de fins a 7 creuaments.

on  $n$  és el nombre de creuaments del diagrama de  $K$ . Considerem ara un nus no trivial i  $K_m = \sum^m K$  la suma de  $m$  còpies de  $K$ . Llavors,

$$m \leq g(K_m) \leq \frac{c(K_m)}{2}$$

on  $c(K_m)$  és el nombre de creuaments de la superfície de Seifert de  $K_m$ . A mesura que  $m$  s'acosta a infinit, també ho fa  $c(K_m)$ .  $\square$

Cal remarcar que existeixen cotes inferiors pel gènere d'un nus qualsevol [Kohli and Tahar (2023)] i que hi ha classes de nusos amb molt bones propietats pel que fa el seu gènere. Nosaltres però al no fer-nos falta, ens limitarem a fer-ne menció i classificarem els nusos d'ordre més baix utilitzant només els resultats vistos.

La Figura 5.7 mostra una taula per al gènere d'un nus primer de fins a 7 creuaments.

## 6 El polinomi de Jones

El descobriment del *polinomi de Jones* per part de Vaughan Jones l'any 1984 [Jones (1985)] dona una manera d'associar a cada nus o link un polinomi de Laurent amb coeficients enters. Aquesta correspondència es fa mitjançant un diagrama de link qualsevol. La teoria de Jones es fonamenta en el fet que si fem un moviment RI, RII o RIII al diagrama del link, aquest polinomi no canvia i doncs és un invariant sota moviments de Reidemeister. El polinomi

per un link és doncs independentment del diagrama d'aquest. De manera que si podem veure que dos diagrames de links no tenen el mateix polinomi, llavors segur que aquests son diferents.

### 6.1 Construcció del polinomi de Jones

La manera més simple per definir-lo és mitjançant un altre tipus de polinomi; el *polinomi de Kauffman* descobert per Louis Kauffman.

**Definició 12.** *El polinomi de Kauffman de  $L$ ,  $\langle L \rangle$  és un polinomi de Laurent amb coeficients enters i indeterminada  $A$  que podem associar a tot diagrama d'un link a  $S^2$  de la següent manera:*

1.  $\langle \textcirclearrowleft \rangle = 1$
2.  $\langle L \cup \textcirclearrowleft \rangle = (-A^{-2} - A^2)\langle L \rangle$
3.  $\langle \text{X} \rangle = A \langle \text{O} \text{C} \rangle + A^{-1} \langle \text{C} \text{O} \rangle$

En aquesta definició,



representa el diagrama del nus trivial i



és un diagrama de  $L$  juntament amb una corba tancada extra que no conté cap creuament ni amb ella mateixa ni amb  $L$ . A 3 la fórmula relaciona tres diagrames que son el mateix excepte al voltant d'un creuament on es diferencien pels moviments locals indicats. A partir d'aquesta definició és fàcil veure les següents propietats.

1.  $\langle \textcirclearrowleft \dots \textcirclearrowleft \rangle = (-A^{-2} - A^2)^{c-1}$
2.  $\langle L \rangle = \langle rL \rangle$

Per demostrar 1 només cal fer inducció sobre  $c$  utilitzant la propietat  $\beta$  del polinomi de Kauffman. Per 2 és evident ja que el polinomi de Kauffman no té en compte d'orientació del nus alhora de calcular-lo.

Investiguem ara el comportament del polinomi respecte els moviments de Reidemeister.

**Lema 1.** Si a  $K$  hi apliquem un moviment RI el seu polinomi de Kauffman canvia de la següent manera

$$\langle FALTA \dots \rangle$$

*Demostració.* Utilitzant  $\beta$  i  $\gamma$  en aquest mateix ordre.  $\square$

Notem a més que si a  $\beta$  fessim un moviment local canviant-lo a



llavors el polinomi de Kauffman corresponent seria el mateix que l'original intercanviant  $A$  per  $A^{-1}$ .

La Figura 6.1 mostra de forma iterativa el càlcul d'aquest polinomi. Així doncs trobem que

$$\langle 3_1 \rangle = A^{-7} - A^{-3} - A^5$$

Un exercici similar demostra que

$$\langle \overline{3}_1 \rangle = A^7 - A^3 - A^{-5}$$

Elaborant el que acabem de veure, si  $\overline{K}$  és el nus emmirallat de  $K$ , llavors  $\langle \overline{K} \rangle = \langle \overline{K} \rangle$ , on  $\langle \overline{K} \rangle$  denota el canvi esmentat anteriorment. Així, observant el Lema 1 deduïm que

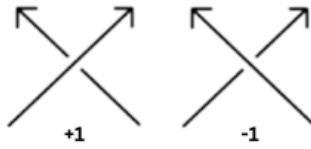
FALTA

Observem com  $\langle \overline{3}_1 \rangle$  també verifica el que acabem de veure.

**Lema 2.** El polinomi de Kauffman és invariant per moviments RII i RIII.

$$\begin{aligned} \langle \text{3}_1 \rangle &= A \langle \text{3}_1 \rangle + A^{-1} \langle \text{3}_1 \rangle \\ &= A(A^{-1} \langle \text{3}_1 \rangle + A \langle \text{3}_1 \rangle) + A^{-1}(A^{-1} \langle \text{3}_1 \rangle + A \langle \text{3}_1 \rangle) \end{aligned}$$

**Figura 6.1:** Exemple del polinomi de Kauffman de  $3_1$ .



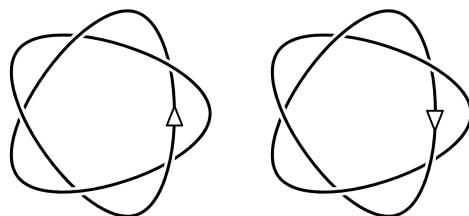
**Figura 6.2:** Signe d'un creuament per la regla de la ma dreta.

*Demostració.* Per RII cal aplicar  $\beta$  dues vegades seguides sabent que  $\langle \overline{K} \rangle = \langle \overline{K} \rangle$  i aplicar-ho en un dels dos creuaments. Per RIII cal fer exactament el mateix.  $\square$

**Definició 13.** Definim el torçament  $w(L)$  del diagrama d'un link orientat qualsevol com la suma dels signes dels seus creuaments, on cada un d'aquests pren el valor  $+1$  o  $-1$  com s'indica a la Figura 6.2

Notem que la Definició 13 utilitza la orientació del link. Un simple exercici demostra que aquest és invariant sota moviments RII i RIII i aquest canvia per  $+1$  o  $-1$  sota moviments RI. La Figura 6.3 mostra dos exemples sobre el càlcul del torçament d'un nus.

El torçament d'un link orientat juntaument amb el polinomi de Kauffman d'un diagrama de link sense tenir en compte l'orientació son tots dos invariants sota moviments RII i RIII a més, aquests es



**Figura 6.3:** A l'esquerra el nus  $5_1$  que té torçament  $-5$ , a la dreta  $r5_1$  que té torçament també  $-5$ .

comporten d'una manera previsible sota moviments RI. Això duu al següent resultat:

**Teorema 4.** *Sigui  $\text{diag}(L)$  un diagrama d'un link orientat  $L$ . Llavors,*

$$(-A)^{-3w(L)} \langle L \rangle$$

és un invariant del link orientat  $L$ .

*Demostració.* Conseqüència directa del Lema 2, el Lema 1 i l'observació sobre el torçament sota moviments RI anterior.  $\square$

**Definició 14.** *El polinomi de Jones  $V(L)$  d'un link orientat  $L$  és el polinomi de Laurent en  $t^{1/2}$  i coeficients enters, definit per*

$$V(L) = ((-A)^{-3w(L)} \langle L \rangle)_{t^{1/2}=A^{-2}} \in \mathbb{Z}[t^{1/2}, t^{-1/2}]$$

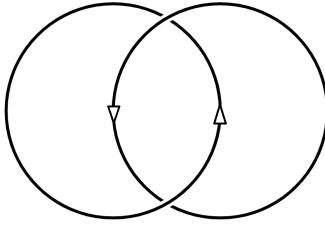
on  $\langle L \rangle$  és el polinomi de Kauffman i  $w(L)$  és el torçament definit anteriorment.

Aquí,  $t^{1/2}$  és una indeterminada el quadrat de la qual és  $t$ . De fet, només els links amb un nombre senar de components, incloent els nusos tenen polinomi amb potències enteres de  $t$  (CAL DEMOSTRAAAAAR ES FA PER INDUCCIÓ). El polinomi de Jones està ben definit i a més,  $V(\bigcirc) = 1$ . De fet, no es coneix cap altre exemple de nus  $L$  pel qual  $V(L) = 1$ ; trobar un nus tal o demostrar que no existeix es considera un problema important. La Figura 6.4 mostra una taula amb els polinomis de Jones de fins a 7 creuaments utilitzant l'algorisme descrit anteriorment.

Clarament, si l'orientació de cada component del link canvia, llavors el signe en cada creuament es manté constant. Així doncs, el polinomi de Jones d'un nus no depèn de l'orientació escollida. Dit d'una altra manera, el polinomi de Jones no distingeix un nus  $K$  del seu invers  $rK$ . Pel que fa la quiralitat, el polinomi de Jones tampoc té perquè distingir-los tot i que hi ha certes circumstàncies en que si, i doncs es comporta

3 <sub>1</sub>	$-t^{-4} + t^{-3} + t^{-1}$
4 <sub>1</sub>	$t^{-2} - t^{-1} + 1 - t + t^2$
5 <sub>1</sub>	$-t^{-7} + t^{-6} - t^{-5} + t^{-4} + t^{-2}$
5 <sub>2</sub>	$-t^{-6} + t^{-5} - t^{-4} + 2t^{-3} - t^{-2} + t^{-1}$
6 <sub>1</sub>	$t^{-4} - t^{-3} + t^{-2} - 2t^{-1} + 2 - t + t^2$
6 <sub>2</sub>	$t^{-5} - 2t^{-4} + 2t^{-3} - 2t^{-2} + 2t^{-1} - 1 + t$
6 <sub>3</sub>	$-t^{-3} + 2t^{-2} - 2t^{-1} + 3 - 2t + 2t^2 - t^3$
7 <sub>1</sub>	$-t^{-10} + t^{-9} - t^{-8} + t^{-7} - t^{-6} + t^{-5} + t^{-3}$
7 <sub>2</sub>	$-t^{-8} + t^{-7} - t^{-6} + 2t^{-5} - 2t^{-4} + 2t^{-3} - t^{-2} + t^{-1}$
7 <sub>3</sub>	$t^2 - t^3 + 2t^4 - 2t^5 + 3t^6 - 2t^7 + t^8 - t^9$
7 <sub>4</sub>	$t - 2t^2 + 3t^3 - 2t^4 + 3t^5 - 2t^6 + t^7 - t^8$
7 <sub>5</sub>	$-t^{-9} + 2t^{-8} - 3t^{-7} + 3t^{-6} - 3t^{-5} + 3t^{-4} - t^{-3} + t^{-2}$
7 <sub>6</sub>	$-t^{-6} + 2t^{-5} - 3t^{-4} + 4t^{-3} - 3t^{-2} + 3t^{-1} - 2 + t$
7 <sub>7</sub>	$-t^{-3} + 3t^{-2} - 3t^{-1} + 4 - 4t + 3t^2 - 2t^3 + t^4$

**Figura 6.4:** Taula dels polinomis de Jones. Una simple observació permet veure que tots aquests son diferents entre si.



**Figura 6.5: Càlcul del nombre de nuament del link de Hopf. Aquest té nuament -1.**

millor en distingir nusos amb aquesta darrera propietat. Elaborant en aquest últim comentari, utilitzant la Definició 14 no és massa difícil veure que

$$V(3_1) = -t^{-4} + t^{-3} + t^{-1}$$

i

$$V(\overline{3_1}) = t + t^3 - t^4$$

així doncs sabem que  $3_1 \neq \overline{3_1}$  i doncs no existeix cap isotopia ambient que passi d'un a l'altre.

**Definició 15.** Sigui  $L$  un link orientat amb dues components  $L_1$  i  $L_2$ . El nombre de nuament  $lk(L_1, L_2)$  de  $L_1$  i  $L_2$  és la meitat de la suma dels signes del seu diagrama els creuaments dels quals son sobrepassos.

La Figura 6.5 dona un exemple d'aquest càlcul.

És fàcil veure que si a un link orientat  $L$  se li canvia l'orientació de només una component  $K$  donant lloc a  $L'$ , llavors

$$V(L') = t^{-3lk(K, L-K)}V(L)$$

d'aquesta manera el polinomi de Jones depèn de l'orientació d'una manera molt elemental.

El polinomi de Jones es caracteritza mitjançant el següent resultat que és una conseqüència directa de la Definició 14.

**Proposició 6.** El polinomi de Jones és una funció

$$V : \{\text{Link orientat a } S^3\} \rightarrow \mathbb{Z}[t^{-1/2}, t^{1/2}]$$

de manera que

$$1. V(\bigcirc) = 1$$

2. Sempre que tres links orientats  $L_+$ ,  $L_-$  i  $L_0$  siguin el mateix excepte al voltant d'un punt, llavors

$$t^{-1}V(L_+) - tV(L_-) + (t^{-1/2} - t^{1/2})V(L_0) = 0$$

on  $L_+$ ,  $L_-$ ,  $L_0$  son links havent fet un moviment local a un dels creuaments.

*Demostració.* Sabem

$$\langle \diagup \diagdown \rangle = A \langle \diagdown \diagup \rangle + A^{-1} \langle \diagup \diagdown \rangle \quad (6.1)$$

$$\langle \diagdown \diagup \rangle = A^{-1} \langle \diagup \diagdown \rangle + A \langle \diagup \diagup \rangle \quad (6.2)$$

Multiplicant 6.1 per  $A$  i 6.2 per  $A^{-1}$  i restant les dues equacions obtenim

$$A \langle \diagup \diagdown \rangle - A^{-1} \langle \diagdown \diagup \rangle = (A^2 - A^{-2}) \langle \diagdown \diagup \rangle$$

D'aquesta manera, per links orientats amb diagrames com els mostrats, utilitzant el fet que  $w(L_+) - 1 = w(L_0) = w(L_-) + 1$  tenim

$$-A^4V(L_+) + A^{-4}V(L_-) = (A^2 - A^{-2})V(L_0)$$

Fent la substitució  $t^{1/2} = A^{-2}$  dona el resultat buscat.  $\square$

Deduïm automàticament de la Proposició 6 que si  $L'$  és un link creat a partir de  $L$  afegint un component trivial de més, llavors el seu polinomi de Jones ve donat per  $V(L') = (-t^{-1/2} - t^{1/2})V(L)$ . La Proposició 6 anterior també permet el càlcul de qualsevol link orientat. Això és conseqüència directa del fet que tot link pot ser deformat fins a assolir el link trivial de  $c$  components, el polinomi de Jones del qual és  $(-t^{-1/2} - t^{1/2})^{c-1}$  a partir de fer moviments locals el un diagrama d'aquest.

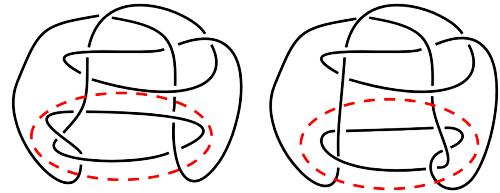
De la mateixa manera que el gènere d'un nus, vist a la Secció 5.3 obtenim un resultat similar.

**Proposició 7.** *El polinomi de Jones de la suma de dos nusos  $K + K'$  és el producte dels seus polinomis de Jones, i.e.*

$$V(K + K') = V(K)V(K')$$

*Demostració.* Considerant la suma del dos nusos  $K + K'$  i operant mitjançant la relació 2 en només un dels dos nusos trobem el seu polinomi de Jones, repetint el procés amb l'altra nus arribem al nus trivial.  $\square$

Per acabar la secció, cal remarcar que la teoria d'invariants és una teoria que preten desenvolupar diferents eines per tal de poder dur a terme la tasca de distingir els diferents nusos. Per aquest motiu, no hi ha invariants millors ni pitjors, sinó que cadacun d'ells ajuda en aquesta tasca i mentre possiblement un invariant no permet distingir entre dos nusos, possiblement un altre si. També, volia remarcar que dins la teoria de nusos existeix una gran quantitat d'invariants que no s'han pogut discussir en aquest treball. Alguns d'ells son, la p-Colorabilitat, el Determinant, el polinomi d'Alexander, el polinomi de Conway, el Grup Fonamental o el polinomi de HOMFLY-PT. Aquest últim consisteix en una generalització del polinomi de Jones i el d'Alexander alhora, de manera que conté la informació de tots dos polinomis. Un exemple de nus amb els mateixos polinomis de Jones, Alexander i HOMFLY-PT és el famós nus de Conway i el de Kinoshita-Terasaka,  $11n34$  i  $11n42$  respectivament en la notació de Thistlethwaite. Aquests dos nusos es distingeixen perquè tenen diferent gènere, i grup fonamental. No obstant, presenten els mateixos polinomis discutits anteriorment. El mètode per construir nusos d'aquesta mena és mitjançant un moviment introduït per Conway anomenat *mutació*. La Figura 6.6 mostra aquests dos nusos. Cal destacar que la teoria de nusos no té



**Figura 6.6:** Exemple de mutació. D'esquerra a dreta: Nus de Kinoshita-Terasaka;  $11n42$  i nus de Conway;  $11n34$ .

invariants complets, és a dir, que no existeix cap eina que permeti una classificació completa dels nusos i per tant, sempre existirà nusos diferents que cap de les eines desenvolupades pugui distingir. No obstant, hi ha certes classes de nusos pels quals el polinomi de HOMFLY n'és un invariant complet.

## 7 Aplicacions

En aquesta secció veurem de forma general diferents aplicacions tant de teoria de nusos com de topologia en diferents camps de la ciència. Algunes d'aquestes aplicacions son ben conegudes i altres son relativament recents.

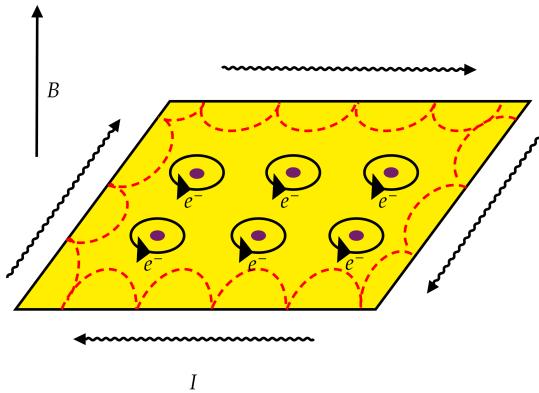
Durant molt de temps no es tenia clar si la topologia era una eina útil per descriure el comportament de partícules subatòmiques. Això es deu als efectes de la física quàntica sobre sistemes o partícules realment petites que poden ser descrits mitjançant la funció d'ona. Gràcies a les contribucions de David Thouless, Duncan Haldane i Michael Kosterlitz que van guanyar el premi nobel de física l'any 2016 van adonar-se de l'existència de propietats topològiques a l'escala quàntica. Des de llavors, aquest descobriment ha obert la porta a una revolució en la ciència de materials, enginyeria electrònica i ciència de la computació. Repassarem algunes de les aplicacions que han sorgit a conseqüència d'aquest descobriment i fem al·lusió a resultats de Alexei Kitaev i Edward Witten sobre la computació

quàntica i la construcció dels primers ordinadors quàntics.

## 7.1 Aïllants topològics

Per tal de motivar la Secció 7.2 començarem discutint un fenòmen ben conegut pels físics. A Qi and Zhang (2011) s'estudia aquest fenòmen en detall. Aquesta es tracta d'una propietat que presenten diferents materials al ser exposats a un camp magnètic.

Si imaginem que disposem d'una làmina metàl·lica rectangular i hi fem circular un camp magnètic a través d'aquesta en sentit perpendicular – paral·lela a la normal de la làmina – llavors per la regla de la ma dreta, els electrons presents en l'interior de la làmina es mouran descriuint òrbites tancades en forma de circumferència. Com que els electrons son estables dins aquesta configuració no condueixen l'electricitat. A la frontera de la làmina en canvi, aquests òrbites no són tancades, sinó que estan connectades i totes elles apunten en la mateixa direcció. D'aquesta manera els electrons poden saltar d'una òrbita a l'altra i viatjar a través de tota la frontera del material. Això significa que el material en qüestió conduceix l'electricitat a la frontera però no a l'interior de la làmina. A més, aquesta característica no depèn de la geometria de l'objecte en qüestió ja que deformacions en la frontera de la làmina dona lloc als mateixos resultats. D'aquesta manera, el fenòmen descrit no és susceptible a imperfeccions de fabricació o impureses. La frontera d'un objecte d'aquestes característiques presenta a més una conductivitat quasi absoluta, cap electró pot viatjar en sentit contrari, l'energia no es perd en forma de calor i el nombre de camins pels quals pot circular el corrent pot ser controlat. La Figura 7.1 mostra un exemple d'aquest fenòmen.



**Figura 7.1:** Exemple del fenòmen de l'aïllant topològic descrit a la Secció 7.1. Com es pot observar, a l'interior de la làmina, el material és aïllant ja que aquest no transporta electrons. A la frontera en canvi, sí. No és massa difícil veure que modificant la geometria de l'objecte, aquest fenòmen no s'altera. Tampoc és molt difícil veure que si a aquest objecte se li fes un forat d'un radi determinat a l'interior de la làmina, llavors l'electricitat també circularia per la frontera d'aquest.

## 7.2 Computació amb nusos quàntics

La següent, és una aplicació la qual ha estat desenvolupada al llarg del darrer vicens degut a les contribucions de Edward Witten i Alexei Kitaev en gran part. Aquesta tracta dels ordinadors quàntics, els quals prometen realitzar càlculs que es creuen impossibles per als ordinadors convencionals. Alguns d'aquests càlculs tenen una gran importància a nivel pràctic. De fet, tots els mètodes d'encriptació utilitzats per a dades altament sensibles són vulnerables a un algoritme quàntic o altre. Un exemple d'aquests és l'algorisme de Shor, un algorisme quàntic per trobar els factors primers d'un nombre enter. Mètode pel qual molts protocols de protecció de dades es veurien compromesos.

Aquesta secció està inspirada en els articles [Collins (2006)], [Bonesteel, Hormozi,

Zikos, and Simon (2005)] i la presentació donada per Steven Simons l'any 2021 a l'Advanced Studies Gateway Center titulada *Knots, World lines and Quantum Computation* on s'estudia amb profunditat l'ús de la topologia per construir els primers ordinadors quàntics d'una manera diferent a la convencional estudiada fins al moment, on en aquesta darrera l'importància rau en obtenir baixes temperatures – de l'ordre de 10 milikelvins – i camps magnètics molts forts per poder simular els efectes quàntics de la matèria.

El poder d'un ordinador quàtic prové del fet que opera sobre informació representada com a qubits, en lloc de bits. Un bit clàssic ordinari pot ser un 0 o un 1, i les arquitectures de microxip estàndard reforcen aquesta dicotomia de manera rigorosa. Un qubit en canvi, pot estar en un estat anomenat superposició, que comporta proporcions de 0 i 1 coexistint alhora. Es pot pensar en els possibles estats d'un qubit com els punts en una esfera. El pol nord és un 1 clàssic, el pol sud és un 0, i tots els punts intermedis són totes les superposicions possibles de 0 i 1. La llibertat que tenen els qubits per moure's per tota l'esfera ajuda a donar als ordinadors quàntics les seves capacitats úniques.

Malauradament, sembla que els ordinadors quàntics són extremadament difícils de construir. Els qubits soLEN expressar-se com a certes propietats quàntiques de partícules atrapades, com ara ions atòmics individuals o electrons. Però els seus estats de superposició són extremadament fràgils i poden ser malmesos per les més mínimes interaccions fortuites amb l'entorn, que inclou tot el material que conforma l'ordinador mateix.

Si els qubits no estan aïllats amb cura del seu entorn, aquestes pertorbacions introduiran errors en el càlcul i en conseqüència,

les propietats quàntiques del sistema es perderan. Aquest fenòmen es coneix amb el nom de decoherència quàntica i és el principal motiu que fa que els ordinadors quàntics no existeixin.

Per tant, la majoria dels esquemes per dissenyar un ordinador quàtic se centren en trobar maneres de minimitzar les interaccions dels qubits amb l'entorn. Els investigadors saben que si la taxa d'error es pot reduir a aproximadament un error en cada 10.000 passos, es poden implementar procediments de correcció d'errors per compensar la decoherència. Construir una màquina funcional que tingui un gran nombre de qubits aïllats prou bé per tenir una taxa d'error tan baixa és una tasca formidable que els físics estan molt lluny d'aconseguir.

No obstant, hi ha una manera diferent de construir un ordinador quàtic. El terme per referir-se als ordinadors que utilitzen aquesta arquitectura s'anomenen ordinadors quàntics topològics o topological quantum computer en anglès. En el seu enfocament, els delicats estats quàntics depenen del que es coneix com a propietats topològiques d'un sistema físic. Microsoft és l'empresa que tracta de crear el primer ordinador quàtic utilitzant aquesta tècnica a diferència d'altres empreses com IBM o Google que utilitzen el mètode estàndard centrant-se en les propietats quàntiques de la matèria.

Un ordinador quàtic topològic no opera de la mateixa manera que ho fa un ordinador convencional. Aquest realitza els seus càlculs en cordes trenades, però no cordes físiques en el sentit convencional. Més aviat, són el que els físics es refereixen com a línies del món, representacions de partícules a mesura que es mouen a través del temps i l'espai. Cal imaginar que la longitud d'una d'aquestes cordes representa el moviment d'una partícula a

través del temps. Les partícules implicades són diferents dels electrons i protons que un podria imaginar primerament. Aquestes, són quasi-partícules anomenades anyons, que tenen les propietats matemàtiques desitjades\*. L'article [Bonesteel et al. (2005)], juntament amb [Freedman, Kitaev, Larsen, and Wang (2002)] explora aquest mecanisme relacionant el càlcul del polinomi de Kauffman amb les trena esmentades anteriorment.

A continuació, es dona un exemple sobre la manera com un ordinador d'aquestes característiques podria funcionar: primer, es creen parells d'anyons i es col·loquen en una línia. Cada parell d'anyons és com una partícula i la seva corresponent antipartícula, creada a partir d'energia pura. Després, es mouen parells d'anyons adjacents al voltant els uns dels altres en una seqüència acuradament determinada. La línia del món de cada anyó forma un fil, i els moviments dels anyons a mesura que s'intercanvien produeixen una trena. El càlcul quàntic ve codificat per la trena particular i es calcula mitjançant el polinomi de Kauffman de la trena. Els estats finals dels anyons, que encapsulen el resultat del càlcul, estan determinats per la trena i no per cap interacció elèctrica o magnètica. I com que la trena és topològica, deformar lleugerament els fils no canvia el resultat, de manera que està inherentment protegida de les pertorbacions externes. La idea d'utilitzar anyons per realitzar càlculs d'aquesta manera va ser proposada el 1997 per Alexei Y. Kitaev, ara a Microsoft.

Michael H. Freedman, actualment el director de Station Q, el centre de recerca de Microsoft dedicat a l'exploració de la computació quàntica va donar una

conferència a la Universitat de Harvard a la tardor de 1988 sobre la possibilitat d'utilitzar la topologia quàntica per a la computació. Aquestes idees, publicades en un article de recerca el 1998, es basaven en el descobriment que certes quantitats matemàtiques conegeudes com a invariants de nus estaven associades amb la física quàntica d'una superfície bidimensional que evoluciona en el temps. Si es pogués crear un exemple del sistema físic i realitzar una mesura adequada, l'invariant de nus seria calculat automàticament en lloc de mitjançant un càlcul llarg i inconvenient en un ordinador convencional.

Encara que tot això soia com teorització salvatge molt allunyada de la realitat, experiments recents en un camp conegut com la física de l'efecte Hall quàntic fraccionari han posat l'esquema de l'anyó en una base més sòlida.

\*La paraula *anyó* ve de l'anglès *any-*, "qualsevol" en anglès. D'aquesta manera es podria pensar que aquesta partícula és "qualsevol" que no sigui una de les ja conegeudes fins al moments com ara els protons, electron, neutrons, neutrins, positrons, etcètera.

## References

- N. E. Bonesteel, L. Hormozi, G. Zikos, and S. H. Simon. Braid topologies for quantum computation. *Phys. Rev. Lett.*, 95:140503, Sep 2005. doi:10.1103/PhysRevLett.95.140503. URL <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.95.140503>.
- Graham P. Collins. Computing with Quantum Knots. *Scientific American*, 294(4):56–63, apr 2006. doi:10.1038/scientificamerican0406-56.
- Michael H. Freedman, Alexei Kitaev, Michael J. Larsen, and Zhenghan Wang. Topological quantum computation, 2002.
- Vaughan F. R. Jones. A polynomial invariant for knots via von Neumann algebras. *Bulletin (New Series) of the American Mathematical Society*, 12(1):103 – 111, 1985.
- L Kauffman and S Lambropoulou. Unknots and dna. *Current Developments in Mathematical Biology*, 38:39–68, 2007.
- Ben-Michael Kohli and Guillaume Tahar. A lower bound for the genus of a knot using the links-gould invariant, 2023.
- Xiao-Liang Qi and Shou-Cheng Zhang. Topological insulators and superconductors. *Reviews of Modern Physics*, 83(4):1057–1110, October 2011. ISSN 1539-0756. doi:10.1103/revmodphys.83.1057. URL <http://dx.doi.org/10.1103/RevModPhys.83.1057>.
- Justin Roberts. Knot knotes. *Notes*, page 18, 2015.
- Herbert Seifert. Konstruktion dreidimensional geschlossener räume. (*No Title*), 1931.
- Daniel S. Silver. Knot theory’s odd origins: The modern study of knots grew out an attempt by three 19th-century scottish physicists to apply knot theory to fundamental questions about the universe. *American Scientist*, 94(2):158–165, 2006. ISSN 00030996. URL <http://www.jstor.org/stable/27858741>.
- A.B. Sosinskii. *Knots: Mathematics with a Twist*. Harvard University Press, 2002. ISBN 9780674009448. URL <https://books.google.es/books?id=BewrZeACVKcC>.
- Bruce Trace. On the reidemeister moves of a classical knot. *Proceedings of the American Mathematical Society*, 89(4):722–724, 1983.