

Nusos i el polinomi de Jones

Treball de Final de Grau

Guillem Tutasaus Alcaraz, 1533701, 1533701@uab.cat

Supervisor: Joan Porti Piqué

Abstract: Aquest és un document que tracta de donar una primera introducció a la teoria de nusos, estudiar alguns dels seus invariants algebràics més coneguts posant una èmfasi especial en el polinomi de Jones i classificar d'aquesta manera els nusos d'ordre més baix. Finalment, en buscarem algunes aplicacions.

1 Introducció

L'espècie humana té coneixement dels nusos des de temps prehistòrics. Començant per l'enregistrament d'informació, les xarxes de pesca o fins i tot per motius religiosos, els nusos han estat de gran importància per la seva utilitat i simbologia espiritual. Moltes obres d'art de cultures d'arreu del món presenten aquestes figures en les seves obres. Alguns exemples son la cultura Xinesa, Tibetana o Celta.

Els nusos comencen a tenir la seva presència dins el món de les matemàtiques a partir de l'any 1771 degut als treballs realitzats per Alexandre-Théophile Vandermonde el qual es dedicà a estudiar les propietats topològiques dels nusos en relació a la seva posició en l'espai. Treballs posteriors de Carl Friedrich Gauß qui va definir diverses propietats d'aquests objectes [Silver (2006)] van projectar aquesta teoria a la fama. L'any 1860 la teoria sobre l'atom en l'aether formulada per William Thomson va dur a Peter Guthrie Tait a la creació de les primeres taules de nusos. L'any 1885, aquest va publicar la primera taula amb tots els nusos de fins a deu creuaments, també va formular les conjectures que duen el seu

nom.

A principis del segle XX, Max Dehn i J. W. Alexander van estudiar els nusos des del punt de vista de la teoria de grups i el seus invariants utilitzant grups d'homologia, cosa que va dur a la creació d'un dels primers invariants algebràics de la teoria, el polinomi d'Alexander.

A finals de l'any 1970, la incorporació de la geometria hiperbòlica en l'estudi dels nusos utilitzant el teorema de Geometrització de Thurston va permetre classificar aquests en funció de la seva mètrica, permetent l'ús de la geometria en la creació de nous invariants. El descobriment del polinomi de Jones per part de Vaughan Jones l'any 1984 [Sosinskiĭ (2002)] juntament amb contribucions de Edward Witten i Maxim Kontsevich van revelar fortes relacions entre la teoria de nusos i mètodes matemàtics en mecànica estadística i teoria quàntica de camps. Una gran quantitat de invariant han estat inventats des de llavors utilitzant eines com els grups quàntics o la homologia de Floer.

En les darreres dècades, els científics han estat interessats en l'estudi dels nusos físics per tal de comprendre el nuament



Figura 1.1: D'esquerra a dreta: Nus simple (Overhand Knot en anglès) i Arbre de la vida, nus celta símbol de la naturalesa.

de l'ADN i de diferents polímers. Aquesta teoria s'utilitza també per determinar si una molècula és o no quiral. Finalment, la teoria de nusos pot ser crucial en la construcció dels primers ordinadors quàntics a través del model proposat per Alexei Kitaev [Collins (2006)].

1.1 Sobre els nusos

Els nusos, son estructures presents en el nostre dia a dia. La Figura 1.1 mostra un parell d'exemples del que considerem nus en el sentit habitual.

El problema que tenen aquests nusos és que, aquests mantenen la seva forma a partir de la tensió i fricció que existeix entre les cordes que formen el nus. No és gaire difícil veure que un podria desfer aquests nusos de manera que acabariem obtenint una simple corda sense cap nus. És per això, que en matemàtiques és necessari considerar una definició més restrictiva d'aquest concepte per tal de preservar-ne l'estructura. Podriem pensar, que si uníssim els caps de les cordes de la Figura 1.1, aleshores només tallant la corda seriem capaços de desfer el nus (això precisa de demostració!).

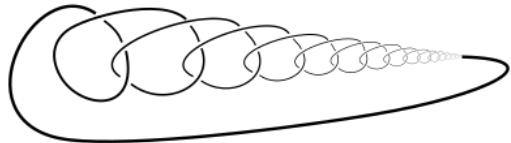


Figura 2.1: Exemple d'un nus salvatge.

2 Algunes definicions i els objectius de la teoria de nusos

De definicions de nus, parlant en termes matemàtics, n'hi ha diverses. Nosaltres considerarem la definició dins el camp de la topologia, d'on en reutilitzarem molta notació. A més, la teoria de nusos s'emmarca dins una teoria més general; la de links. Per tant, moltes vegades anirem mencionant resultats que també son vàlids per aquests objectes. La següent secció pretén donar unes primeres definicions pel que fa als nostres objectes.

Definició 1. Diem que L és un link de m components, o un m -link si és un subconjunt de S^3 , o de \mathbb{R}^3 , que consisteix en m corbes disjunes, simples, tancades i lineals a trossos. Un 1-link és un nus.

La condició de lineal a trossos significa que les components de L estan cadascuna d'elles feta d'un nombre finit de rectes col·locades una al costat de l'altra amb el principi d'una coincidint amb el final de l'altra. Aquesta condició evita la creació de nusos patològics que no presenten un comportament esperat (Figura 2.1). A aquests últims nusos se'ls anomena *salvatges* i no seran estudiats en aquest treball. A la pràctica, quan representem nusos o links assumirem que hi ha tants segments rectes que cada component semblarà corba.

De què tracta la teoria de nusos? Una possible resposta és que la teoria de nusos pretén classificar el conjunt de possibles nusos. Donat un nus K , hom con-



Figura 2.2: A l'esquerra el nus 7_1 (més endavant explicarem el perquè del nom). A la dreta un 3-link coneugut amb el nom d'anell Borromeu.

sidera que aquest està inclòs, mitjançant una aplicació contínua, dins l'espai ambient tres dimensional \mathbb{R}^3 o equivalentment dins S^3 , obtenim aleshores la teoria clàssica de nusos. Aquesta teoria pretén estudiar la col·locació de K dins aquest espai. Classificar, en aquest cas vol dir considerar iguals sota certes condicions, que definirem més endavant.

Definició 2. Diem que un nus està *desnuat* o que és el nus trivial, notacionalment \bigcirc si no presenta cap creuament en els segments de corda que el formen.

El nus trivial és el nus més simple que existeix.

2.1 Equivalència entre nusos

Expliquem ara què entem quan diem que dos nusos son el mateix.

Definició 3. Diem que dos links L i L' a S^3 son equivalents si existeix una isotopia ambient entre ells.

És a dir, si existeix una família d'homeomorfismes $h_t : S^3 \rightarrow S^3$ per $t \in [0, 1]$ tal que $h_0 = 1$, $h_1 = h$ i $(x, t) \mapsto (h_t x, t)$ és un homeomorfisme lineal a trossos de $S^3 \times [0, 1]$ a S^3 , llavors direm que L i L' son links equivalents. L'equivalència entre nusos és la mateixa que en la Definició 3 tenint present que en aquest cas només tenim una component. Observem que la distorsió no és del

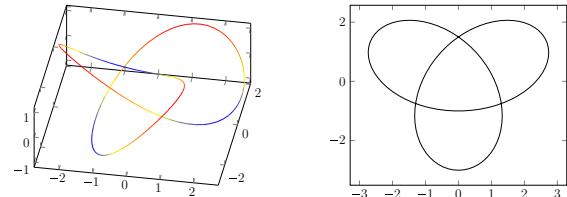


Figura 2.3: A l'esquerra el nus 3_1 també conegut com Trefoil amb parametrització $(\sin t + 2 \sin 2t, \cos t - 2 \cos 2t, -\sin 3t)$. A la dreta, la seva projecció paral·lela sobre l'eix z .

mateix link sinó de l'espai "ambient" S^3 en sí mateix. Definir nus equivalent d'aquesta manera evita que els creuaments que formen el nus o link puguin fer-se cada vegada més petits fins a desapareixer. D'aquesta manera, és possible moure tot S^3 de forma contínua utilitzant h_t per passar de L a L' .

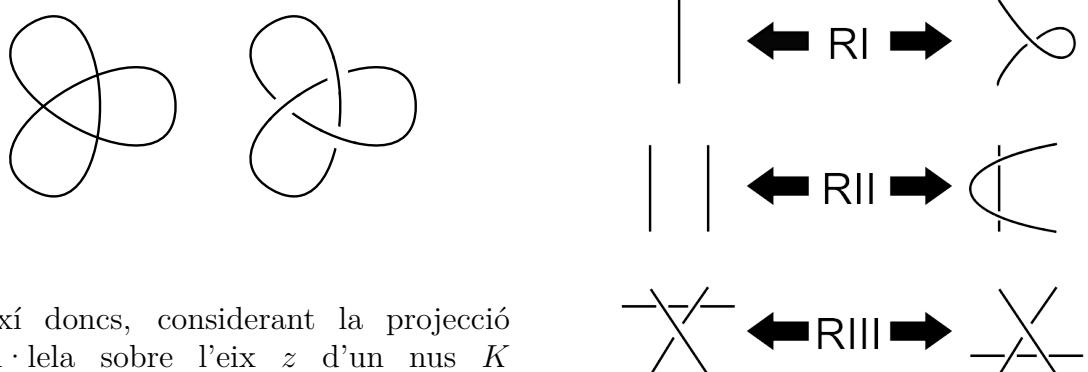
2.2 Representació d'un nus en matemàtiques

Tenint present la definició de nus a partir d'ara en sentit matemàtic donada a la Definició 1, un pot veure la dificultat d'estudiar aquest tipus d'objectes tres dimensionals en un llibre de text o bé en una pissarra. És per això, que per tal d'estudiar-los sovint es representen els nusos mitjançant el seu *diagrama de nus*.

Considerant la projecció paral·lela (o axonomètrica) sobre l'eix z en el pla \mathbb{R}^2 d'un nus qualsevol K , obtindrem una figura com en l'exemple 2.3.

Considerant aquesta projecció però, un perd informació sobre el propi nus, ja que cal saber quin segment de corda va per sobre i quin per sota alhora de creuar-se. Per tal de no perdre aquesta informació, el segment que passa per sota se'l dibuixa de forma discontinua mentre aquest passa sota el segment de corda que el creua.

D'aquesta manera, la projecció del nus 3_1 de la Figura 2.3 quedaria de la següent manera:



Així doncs, considerant la projecció paral·lela sobre l'eix z d'un nus K qualsevol i disposant de la informació sobre els creuaments obtenim el que anomenarem *diagrama de nus*, notacionalment $\text{diag}(K)$. Moltes vegades, en la literatura es fa un abús de llenguatge i notació, anomenant nus al que nosaltres anomenem diagrama de nus i fent servir K i $\text{diag}(K)$ indistintament. D'aquí a no massa veurem que de fet, estudiar-ne les propietats d'un és equivalent a estudiar les de l'altre.

3 Els moviments de Reidemeister

Una primera aproximació per tal de distingir si dos nusos són diferents és veure quan són iguals. Aquesta és la inspiració darrera de la següent secció que tractarà sobre els moviments de Reidemeister i el Teorema central de la Teoria de Nusos.

3.1 Moviments de Reidemeister

Motivats per la Secció 2.1, un podria veure sense massa dificultat que cadascun dels moviments de la Figura 3.1 resulta en un diagrama de nus equivalent a l'original.

A aquests tres tipus de moviments se'ls anomena moviments de Reidemeister. Al primer de tots se'l diu de Tipus I o *twist* en anglès, al segon de Tipus II o *poke* i al tercer de Tipus III o *slide*.

Figura 3.1: De dalt a baix: Moviment de Tipus I, Tipus II i Tipus III [Trace (1983)]. Cal pensar que els segments lliures de corda s'uneixen a través d'un nus K .

Moviment de Tipus I o *twist*: També anomenat **RI** per abreujar notació, aquest tipus de moviment consisteix en "pessigar" la corda i amb el tros obtingut donar-li la volta (d'aquí el nom en anglès) fent un bucle com en el de la Figura 3.1.

Moviment de Tipus II o *poke*: També anomenat **RII**. Aquest tipus de moviment consisteix en fer passar una de les dues cordes per sobre de l'altra. En anglès, la paraula *poke* significa fer passar forçosament alguna cosa en una certa direcció i doncs en aquest cas es podria pensar que una de les dues cordes s'ha fet passar per sobre de l'altra.

Moviment de Tipus III o *slide*: També anomenat **RIII**. Aquest tipus de moviment consisteix en, com el nom en anglès indica, fer lliscar una de les tres cordes d'una banda a l'altra de la intersecció entre les dues cordes restants. En la Figura 3.1 podem veure com el segment de corda horitzontal llisca de dalt a baix del creuament entre les altres dues cordes.

La Figura 3.2 mostra el nus 3_1 juntament amb aquest mateix havent aplicat cadascun dels moviments anterioris.

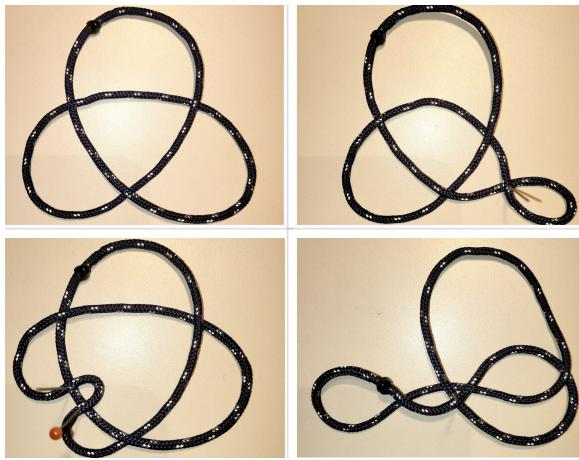


Figura 3.2: Moviments de Reidemeister aplicats al nus 3_1 . D'esquerra a dreta i de dalt a baix: Nus 3_1 , nus 3_1 havent aplicat un moviment RI, RII i RIII respectivament. Per aplicar RIII hem hagut d'aplicar RI abans ja que no es possible aplicar directament RIII en aquest cas.

Continuant amb el que hem vist, no és massa difícil veure que aplicant una seqüència finita de moviments RI, RII o RIII a un diagrama de nus qualsevol, el nus obtingut és equivalent a l'original.

3.2 El Teorema central de la Teoria de Nusos

L'any 1930, Kurt Reidemeister demostrarà que l'implicació contrària també és certa, és a dir que si dos diagrames de nusos qualsevol son equivalents, aleshores sempre podem trobar una seqüència finita de moviments de Reidemeister de manera que podem transformar un diagrama de nus en l'altre. Aquest resultat va donar lloc al teorema central de la teoria.

Teorema 1. *diag(K) i diag(K') son equivalents si i només si, existeix una seqüència finita de moviments RI, RII o RIII que passa d'un a l'altre.*

Una demostració del teorema original es pot trobar a [Roberts (2015)]. Aquesta demostració es troba fora de l'objectiu del treball — i per això s'ha optat a no

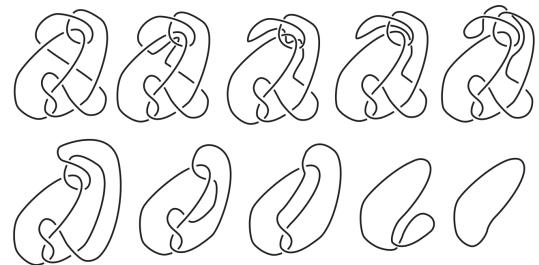


Figura 3.3: Com es pot observar en l'exemple, el nus de Culprit és equivalent al nus trivial. Mitjançant la seqüència de moviments següent podem passar de l'un a l'altra. D'esquerra a dreta i de dalt a baix: RII, RIII+RIII, RII, RIII, RI+RII, RII, RII, RI, [Kauffman and Lambropoulou (2007)].

reproduir-la — però en essència aquesta demostració fa ús del fet que un pot generar nusos equivalents a l'original afegint triangles als costats d'un nus poligonal.

El Teorema 1 doncs, posa en evidència el fet que parlar d'equivalència entre nusos o d'equivalència entre diagrames de nusos és el mateix, doncs aquests estan en correspondència a través de la Secció 2.2.

D'aquesta manera i fent referència al mencionat anteriorment, a partir d'ara farem un abús de llenguatge i notació dient nus K indistintament sense donar importància al fet de si ens referim al nus o al seu diagrama.

4 Propietats sobre nusos

En aquesta Secció posarem de manifest diferents propietats d'un nus que més endavant tindran importància en la seva classificació.

Definició 4. *Anomenem ordre de K , $O(K)$ al mínim nombre de creuament que aquest pot arribar a presentar donat un diagrama qualsevol.*

La Figura 3.3 demostra que l'ordre del nus Culprit és zero ja que aquest sempre

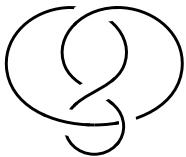
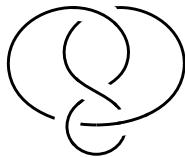


Figura 4.1: A l'esquerra el nus 4_1 o Figure Eight en Anglès. A la dreta, el seu nus emmirallat.

és un nombre positiu. Tampoc és molt difícil veure que donat un nus K qualsevol a aquest se li pot afegir creuaments mitjançant moviments RI, no obstant $O(K)$ es manté contant.

Definició 5. Diem que un nus és l'emmirallat \bar{K} d'un altre nus K si aquest primer s'obté a partir de l'original canviant tots els creuaments de sobrepassos a sotapassos i a la inversa.

La Figura 4.1 mostra un exemple d'un nus emmirallat.

D'aquesta manera, si un nus K és equivalent a \bar{K} , llavors diem que és *amfíquiral*, sinó diem que és *quiral*. El nus 4_1 de la Figura 4.1 és un exemple de nus amfíquiral, però no sempre és veritat que un nus K sigui equivalent a \bar{K} com veurem més endavant.

Definició 6. Diem que un nus és l'invers rK d'un altre nus K si aquest primer s'obté a partir de l'original canviant-ne l'orientació.

És clar que un nus pot ser orientat de dues maneres diferents, escollir una d'aquestes orientacions és informació extra sobre el nus que pot o no ser donada. De manera similar a la Definició 5, no sempre un nus és equivalent al seu invers.

Definició 7. Diem que un nus K és primer si no és el nus trivial i si $K = K_1 + K_2$ implica que K_1 o K_2 és el nus trivial.

En aquest cas, el símbol $+$ fa referència a l'operació suma. Donats dos nusos orientats K i K' , aquests poden ser sumats

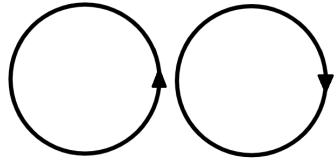


Figura 4.2: Les dues úniques orientacions del nus trivial. És evident que aquests dos diagrames son equivalents.

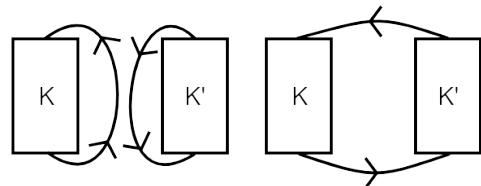


Figura 4.3: Suma de dos nusos qualssevol.

posant-los un al costat de l'altre i unint-los de manera que es preservi l'orientació. Aquesta operació està ben definida sota equivalència. A més, és commutativa, associativa i té element neutre. Més endavant estudiarem aquesta operació en detall AAAA.....AAAAA.....AAAAA.

La Figura 4.4 és una taula que conté tots els nusos primers de fins a 9 creuaments. Cadascun rep un nom conformat per un parell de nombres; el primer de tots correspon al seu ordre i el segon és un subíndex històricament assignat a aquell nus en concret. Les primeres tabulacions que es coneixen van fer-se per Tait l'any 1860 mentre aquest estudiava l'àtom. Aquesta taula negligeix el fet que possiblement un mateix nus K sigui diferent a \bar{K} , rK o \bar{rK} . D'aquesta manera, cada nus de la taula correspon a un, dos o quatre nusos de S^3 mitjançant les operacions definides a 5 i 6.

Definició 8. Diem que K és un nus alternat si a mesura que anem recorrent el nus, els creuaments alternen de sobrepassos a sotapassos.

El nus 4_1 n'és un exemple. De fet, cal anar fins a 8_{19} per trobar el primer nus no

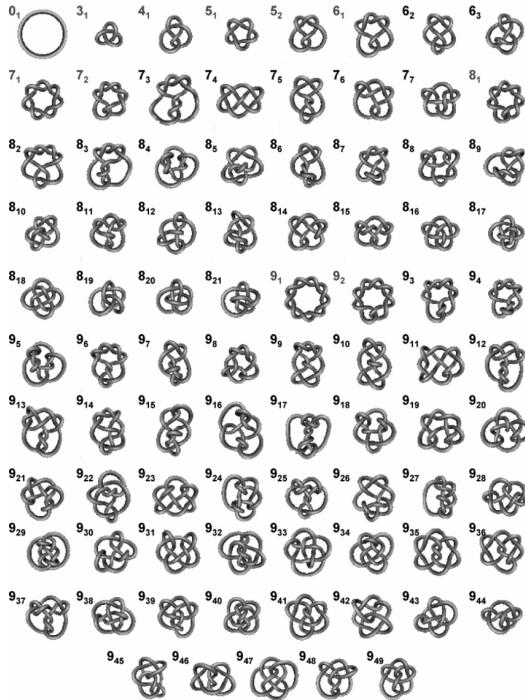


Figura 4.4: Taula de nusos fins a ordre 9.

alternat i doncs això és una conseqüència del baix ordre dels nusos. Es pot veure que donat un ordre qualsevol, sempre existeix com a mínim un nus alternat. Ara bé, aquests disminueixen exponencialment a mesura que incrementem l'ordre del nus. Aquesta classe de nusos tenen bones propietats.

5 Alguns invariants algebraics

El Teorema 1 dona un mètode per saber quan dos nusos són equivalents, aquest resultat però no permet distingir quan dos nusos són diferents. D'aquesta manera per exemple, encara no sabem que $\textcircled{1} \neq 3_1$. Per això que és necessari la creació d'invariants que ens permetin realitzar aquesta tasca.

Recordem que un invariant és un objecte ben definit, ja sigui un número, polinomi, grup, etcètera; que podem associar a un nus qualsevol, de manera que si tenim dos nusos amb diferent valor per aquest invariant, llavors segur que els dos nusos són diferents.

5.1 L'Ordre

Com ja podriem haver esperat, l'ordre d'un nus és un exemple d'invariant. Nusos amb diferent ordre no poden ser equivalents. Aquest invariant però és intractable a nivell pràctic pel fet d'haver de considerar el mínim nombre de creuaments donats tots els diagrames d'aquest.

Proposició 1. *L'ordre d'un nus és un invariant.*

Demostració. Sigui K un nus qualsevol amb diagrama $\text{diag}(K)$. Siguin K_1, K_2, K_3, \dots nusos equivalents a K amb els seus respectius diagrames formats a partir de diferents transformacions de K . D'entre aquests nusos, tenim un nus K_k que té el mínim nombre de creuaments x . Definim $O(K) = O(K_k) = x$. Evidentment, $x = O(K_1) = O(K_2) = O(K_3) = \dots$. Ara, quan transformem el nus K en un nus equivalent, com aquest està a la llista de nusos, aquest també pot ser transformat en K_k on $O(K_k) = x$. \square

5.2 El Nombre de Desnuament

Definició 9. *Diem que $u(K)$ és el nombre de desnuament del nus K si aquest és el mínim nombre de canvis en els creuaments d'un diagrama de nus necessaris per tal d'aconseguir el nus trivial.*

$$u(K) = \min\{u(D) | D \text{ diagrama de } K\}$$

El nombre de desnuament és també un invariant. Aquest però, de la mateixa manera que passa amb l'ordre és intractable a nivell pràctic. Intuïtivament, si K és una corba a S^3 , llavors $u(K)$ és el mínim nombre de vegades que K ha de passar per sí mateix per aconseguir el nus trivial.

Proposició 2. *Donat un nus K qualsevol, aquest sempre pot ser desnuat, i.e. $u(K)$ és finit.*

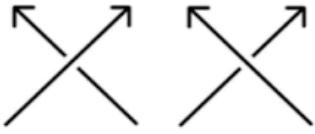


Figura 5.1: Moviments locals que es poden realitzar en qualsevol creuament d'un nus. A la imatge de l'esquerra, el tros de corda que va de Sud-Oest fins a Nord-Est passa per sobre de la corda que el creua i doncs en aquest sentit diem que la sobrepassa. A la dreta, aquesta mateixa corda creua per sota i doncs diem que la sotapassa.

Demostració. Entenem per *moviment local* un canvi en els creuaments d'un nus com en el de la Figura 5.1 passant de sobrepassos a sotapassos o a la inversa. D'aquesta manera, recorrent K d'acord amb una orientació qualsevol i fent moviments locals canviant sotapassos a sobrepassos a mesura que aquests van apareixen sense modificar els creuaments que ja haguem visitat ja ho tindriem. \square

Proposició 3. *Sigui K, K' dos nusos qualssevol, llavors $u(K + K') \leq u(K) + u(K')$*

Demostració. És clar que per tal de desnuar $K + K'$ només fa falta desnuar K i K' . \square

L'altre desigualtat és de fet un problema obert.

De fet, coneixer el nombre de desnuament d'un nus pot pensar-se com l'objectiu d'aquesta teoria. Si veiem que un nus K no és el nus trivial i que un moviment local en algun dels creuaments dona com a resultat el nus trivial, llavors segur que $u(K) = 1$. Així doncs, d'aquí a no massa estarà clar que $u(3_1) = u(4_1) = 1$. No obstant, actualment encara hi ha una gran quantitat de nusos com per exemple 10_{11} dels quals se'ls hi desconeix el nombre de desnuament. Per aquest últim es creu que

es troba entre dos i tres.

Existeixen més resultats que poden ser útils alhora de diferenciar nusos,

5.3 El Gènere

Veurem ara que tot link a S^3 es pot veure com la frontera d'una superfície immersa en S^3 . Aquestes superfícies poden ser utilitzades per estudiar el link.

Definició 10. Una superfície de Seifert S per un link L orientat de S^3 és una superfície compacta, connexa i orientable, $S \subset S^3$ de manera que la seva frontera és L , i.e. $\partial S = L$.

No es gens evident a partir de la Definició 10 que aquests objectes hagin d'existir i encara menys evident com es construeixin. A continuació veurem que de fet, existeix un algorisme per construir-los. Exemples d'aquestes superfícies son com les de la Figura 5.2.

És evident que tota superfície compacta connexa i orientada amb frontera dins S^3 és un exemple d'un link. Una superfície és no orientable si conté una banda de Möbius. Algunes superfícies poden ser construïdes amb un link qualsevol com a frontera de la següent manera: Pintant de color blanc i negre seguint un patró com el d'un taulell d'escacs les regions de S^2 que formen el complement del diagrama d'un link. Considerant totes les regions d'un mateix color i juntant-les per bandes amb una mitja volta arribem a obtenir un objecte com el de la Figura 5.3.

Tot i que aquest mètode pot donar com a resultat una superfície de Seifert, en general aquest no té perquè ser el cas. Herbert Seifert demostrarà l'existència d'aquests objectes i donà un algorisme — que duu el seu mateix nom — per trobar-les [Seifert (1931)].

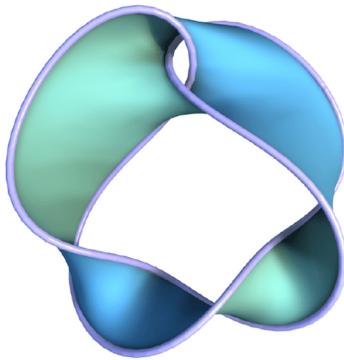


Figura 5.2: Exemple d'una superfície de Seifert per 5_2 .

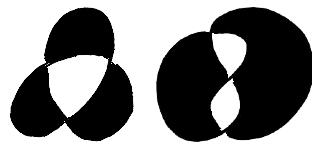


Figura 5.3: Dos diagrames del nus 3_1 pintats com indiquen les instruccions. Com es pot observar, la superfície de l'esquerra és no orientable al ser una cinta de Möbius amb tres mitjes voltes, la de la dreta, en canvi, sí; i doncs és una superfície de Seifert com havíem vist a la Definició 10. Notem doncs que diagrames diferents d'un mateix nus poden o no donar lloc a una superfície de Seifert.



Figura 5.4: Moviments utilitzats en l'algorisme de Seifert. Quan ens trobem amb un creuament, resoldrem aquest com mostra la imatge central resseguint el nus o link com indica la seva orientació.

Teorema 2. *Tot link orientat L a S^3 té una superfície de Seifert.*

Demostració. Sigui $\text{diag}(L)$ un diagrama orientat de L qualsevol i sigui $\widehat{\text{diag}}(L)$ aquest darrer diagrama modificat segons indica la Figura 5.4, llavors $\widehat{\text{diag}}(L)$ és el mateix que $\text{diag}(L)$ excepte en un entorn prou petit de cada creuament on aquest ha sigut eliminat de la única manera coherent amb l'orientació del nus. Aquest $\widehat{\text{diag}}(L)$ és doncs una unió disjunta de corbes orientades simples i tancades dins S^2 . D'aquesta manera, $\widehat{\text{diag}}(L)$ és la frontera de la unió d'un nombre de discs disjunts. Considerant que aquests disc es troben al mateix nivell, excepte si aquests estan un contingut en l'altre — en aquest cas el disc de dins es considerarà a sobre l'altre disc — juntent els discs mitjançant bandes amb una mitja volta als mateixos llocs on hi havia els creuaments. Això forma una superfície orientada amb L com a frontera. Cada disc rep la orientació induïda per $\text{diag}(L)$ i les bandes que uneixen els diferents discs van alternant aquesta orientació. \square

En la demostració del Teorema 2, $\widehat{\text{diag}}(L)$ era una col·lecció disjunta de corbes simples i tancades construïdes a partir de $\text{diag}(L)$. Aquestes corbes s'anomenen cercles de Seifert del $\text{diag}(L)$. La Figura 5.5 dona un exemple d'aquesta.

Una superfície de Seifert per la Figura 5.5 s'aconsegueix superposant les dues corbes disjunes una a sobre l'altra i unir-les mitjançant tres bandes amb una mitja volta

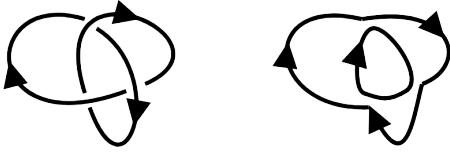


Figura 5.5: Exemple amb la construcció de $\widehat{\text{diag}}(3_1)$ a partir d'un diagrama de 3_1 qualsevol.

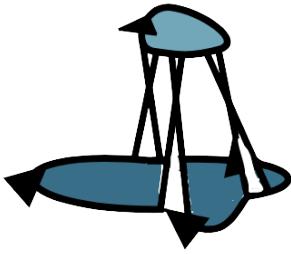


Figura 5.6: superfície de Seifert pel nus 3_1 obtinguda unint els discs a través de bandes amb una mitja volta. Una senzilla comprovació demostra que la frontera de la superfície és el mateix nus.

cadascuna en els creuaments. Evidentment, aquest algorisme dona lloc a una superfície de Seifert. Donat un diagrama qualsevol de L però, aquesta no té perquè ser única. Tampoc té perquè ser la més senzilla donat un diagrama qualsevol.

Definició 11. El gènere $g(K)$ d'un nus K es defineix com

$$g(K) = \min\{g(S) | S \text{ superfície de Seifert de } K\}$$

Direm que una superfície de Seifert S amb K com a frontera és minimal si $g(S) = g(K)$.

Proposició 4. El gènere d'un nus és invariant.

Demostració. Considerem una superfície de Seifert minimal S que té per frontera K . Com K és equivalent a K' llavors ha d'existir un homeomorfisme $h : S^3 \rightarrow S^3$ de manera que $h(K) = K'$. Llavors, $h(S)$ és una superfície de Seifert que té per frontera K' i $g(h(S)) = g(S) = g(K)$. A més, $h(S)$

és una superfície de Seifert minimal que té S' per frontera i per tant $g(K) = g(K')$. Si $h(S)$ no fos una superfície de Seifert minimal de K' , llavors existiria una superfície de Seifert minimal S' que tindria K' per frontera i tal que $g(S') < g(h(S))$ i per tant $h^{-1}(S')$ seria una superfície de Seifert amb K per frontera amb gènere menor que $g(S)$, però això no pot ser ja que S és minimal. \square

Com en aquest cas K és un nus, S només té una component de frontera de manera que com a superfície abstracta és un disc amb un nombre concret de "mànecs". A aquest nombre se l'anomena gènere. Més precisament, el gènere de S és

$$g(S) = \frac{1}{2}(1 - \chi(S)) \quad (5.1)$$

on χ és la característica d'Euler de S . La característica d'Euler es pot definir paral·lelament com el nombre de vèrtex menys el nombre de costats més el nombre de triangles en qualsevol triangulació de S .

Si $\text{diag}(K)$ té n creuament i s cercles de Seifert, llavors $\chi(S) = s - n$ de manera que

$$g(K) \leq \frac{1}{2}(n - s + 1) \quad (5.2)$$

Aquest invariant té un millor tractament que els vistos anteriorment. Donem ara una caracterització del nus trivial en termes del gènere.

Proposició 5. K és el nus trivial si i només si $g(K) = 0$.

Demostració. Si K és el nus trivial, llavors un disc amb frontera K és clarament una superfície de Seifert minimal amb K per frontera. I com que un disc és una esfera amb un component de frontera deduïm que $g(K) = g(S^2) = 0$. Alternativament, si K és tal que $g(K) = 0$, llavors existeix una superfície de Seifert minimal S amb $g(S) = 0$, d'aquesta manera S és una esfera amb una component per frontera, i.e. un disc. \square

Seguint amb l'exemple del nus 3_1 , llavors es veu clarament que $g(3_1) = 1$. Per tant, ja sabem que $3_1 \neq \bigcirc$. De manera similar un pot arribar a calcular els gèneres d'un gran nombre de nusos. El problema amb aquest mètode és que l'Equació 5.2 dona una cota superior per aquest gènere i per tant, a mesura que incrementem el nombre de creuaments és possible que el gènere pugui prendre un nombre finit de valor diferents entre ells. Per exemple, un exercici senzill demostra que $g(8_{20}) \leq 2$ i doncs pot ser 1 o bé 2.

5.3.1 Additivitat i aplicacions

Teorema 3. *Donats dos nusos K i K' ,*

$$g(K + K') = g(K) + g(K')$$

Demostració. Comencem veient $g(K + K') \leq g(K) + g(K')$. Considerem que K i K' estan separats per un pla i considerem les superfícies de Seifert minimals de tots dos nusos S i S' (S i S' també estan separades pel pla). Donem una orientació a K i K' i considerem la seva suma assegurant-nos que $K + K'$ no intersecti $\text{Int}(S)$ ni $\text{Int}(S')$. Considerem ara una banda B que connecta K i K' que té per frontera els dos segments de corda introduïts al considerar la suma $K + K'$ i de tal manera que B no intersecta $\text{Int}(S)$ ni $\text{Int}(S')$. D'aquesta manera, B connecta S i S' i doncs $C = S \cup S' \cup B$ és una superfície de Seifert per $K + K'$. Finalment com $g(C) = g(S) + g(S') = g(K) + g(K')$ tenim $g(K + K') \leq g(K) + g(K')$. L'altre desigualtat es pot trobar a AAAA.....AAAAAAA □

A partir del Teorema 3 obtenim un seguit de resultats:

Corol·lari 1. Cap nus tret del nus trivial té oposat respecte la suma. És a dir, que si $K + K' = \mathbb{O}$, llavors $K = K' = \mathbb{O}$.

Demostració. Suposem que existeix K i K' amb almenys un d'ells diferent del nus trivial de manera que $K + K' = \bigcirc$, llavors en

virtut del Teorema 3

$$g(K + K') = g(K) + g(K')$$

Com que el gènere d'un nus és un nombre positiu, tenim que $g(K) = g(K') = 0$. \square

Corol·lari 2. *Hi ha un nombre infinit de nusos diferents.*

Demostració. Sigui K un nus no trivial qualsevol i $\sum^n K$ la suma de n còpies d'aquest. Veiem que si $n \neq m$, llavors $\sum^n K \neq \sum^m K$. Suposem que $\sum^n K = \sum^m K$, aleshores $\sum^n g(K) = \sum^m g(K)$. Sense pèrdua de generalitat podem suposar que $m > n$, d'aquesta manera $\sum^{m-n} g(K) = 0$ cosa que implica $K = \bigcirc$. Contradicció amb el fet que K no pot ser trivial. \square

Corol·lari 3. *Un nus K amb gènere 1 és primer.*

Demostració. Sigui K un nus amb $g(K) = 1$ i expressem aquest com a suma de nusos K_1 i K_2 , llavors $1 = g(K_1) + g(K_2)$ i per tant $g(K_1) = 0$ o al revés. \square

Corol·lari 4. Tot nus K pot ser expressat com a suma finita de nusos primers.

Demostració. Si K és primer, llavors el resultat és obvi. Suposem ara que K no sigui un nus primer. Per definició, existeixen K_1 i K_2 tots dos diferents del nus trivial de manera que $K = K_1 + K_2$ i del Teorema 3 sabem que $g(K_1), g(K_2) < g(K)$. Ara, fent el mateix procés amb K_1 i K_2 podem concloure que K és suma de nusos primers. \square

Corol·lari 5. Existeixen nusos amb un nombre de creuaments arbitràriament gran.

Demostració. Sigui K un nus qualsevol, com que el nombre de cercles de Seifert sempre serà com a mínim 1, utilitzant l'Equació 5.2 tenim

$$g(K) \leq \frac{n}{2}$$

on n és el nombre de creuaments del diagrama de K . Considerem ara un nus no

3 ₁	4 ₁	5 ₁	5 ₂	6 ₁	6 ₂	6 ₃	7 ₁	7 ₂	7 ₃	7 ₄	7 ₅
1	1	2	1	1	2	2	3	1	2	1	2

7 ₆	7 ₇
2	2

Figura 5.7: Gènere de tots dels nusos primers de fins a 7 creuaments.

trivial i $K_m = \sum^m K$ la suma de m còpies de K . Llavors,

$$m \leq g(K_m) \leq \frac{c(K_m)}{2}$$

on $c(K_m)$ és el nombre de creuaments de la superfície de Seifert de K_m . A mesura que m s'acosta a infinit, també ho fa $c(K_m)$. \square

Cal remarcar que existeixen cotes inferiors pel gènere d'un nus qualsevol [Kohli and Tahar (2023)] i que hi ha classes de nusos amb molt bones propietats pel que fa el seu gènere. Nosaltres però al no fer-nos falta, ens limitarem a fer-ne menció i classificarem els nusos d'ordre més baix utilitzant només els resultats vistos.

La Figura 5.7 mostra una taula per al gènere d'un nus primer de fins a 7 creuaments.

6 El polinomi de Jones

El descobriment del *polinomi de Jones* per part de Vaughan Jones l'any 1984 [Jones (1985)] dona una manera d'associar a cada nus o link un polinomi de Laurent amb coeficients enters. Aquesta correspondència es fa mitjançant un diagrama de link qualsevol. La teoria de Jones es fonamenta en el fet que si fem un moviment RI, RII o RIII al diagrama del link, aquest polinomi no canvia i doncs és un invariant sota moviments de Reidemeister. El polinomi per un link és doncs independentment del diagrama d'aquest. De manera que si

podem veure que dos diagrames de links no tenen el mateix polinomi, llavors segur que aquests son diferents.

6.1 Construcció del polinomi de Jones

La manera més simple per definir-lo és mitjançant un altre tipus de polinomi; el *polinomi de Kauffman* descobert per Louis Kauffman.

Definició 12. El *polinomi de Kauffman* de L , $\langle L \rangle$ és un polinomi de Laurent amb coeficients enters i indeterminada A que podem associar a tot diagrama d'un link a S^2 de la següent manera:

1. $\langle \textcircled{O} \rangle = 1$
2. $\langle L \cup \textcircled{O} \rangle = (-A^{-2} - A^2)\langle L \rangle$
3. $\langle \textcircled{X} \rangle = A \langle \textcircled{O} \textcircled{O} \rangle + A^{-1} \langle \textcircled{Y} \rangle$

En aquesta definició,



representa el diagrama del nus trivial i



és un diagrama de L juntament amb una corba tancada extra que no conté cap creuament ni amb ella mateixa ni amb L . A 3 la fórmula relaciona tres diagrames que son el mateix excepte al voltant d'un creuament on es diferencien pels moviments locals indicats. A partir d'aquesta definició és fàcil veure les següents propietats.

1. $\langle \textcircled{O} \dots \textcircled{O} \rangle = (-A^{-2} - A^2)^{c-1}$
2. $\langle L \rangle = \langle rL \rangle$

Per demostrar 1 només cal fer inducció sobre c utilitzant la propietat 3 del polinomi de Kauffman. Per 2 és evident ja que

el polinomi de Kauffman no té en compte d'orientació del nus alhora de calcular-lo.

Investiguem ara el comportament del polinomi respecte els moviments de Reidemeister.

Lema 1. Si a K hi aplicuem un moviment RI el seu polinomi de Kauffman canvia de la següent manera

$$\langle FALTA \dots \rangle$$

Demostració. Utilitzant 3 i 2 en aquest mateix ordre. \square

Notem a més que si a 3 fessim un moviment local canviant-lo a



llavors el polinomi de Kauffman corresponent seria el mateix que l'original intercanviant A per A^{-1} .

La Figura 6.1 mostra de forma iterativa el càlcul d'aquest polinomi. Així doncs trobem que

$$\langle 3_1 \rangle = A^{-7} - A^{-3} - A^5$$

Un exercici similar demostra que

$$\langle \overline{3}_1 \rangle = A^7 - A^3 - A^{-5}$$

Elaborant el que acabem de veure, si \overline{K} és el nus emmirallat de K , llavors $\langle \overline{K} \rangle = \langle \overline{K} \rangle$, on $\langle \overline{K} \rangle$ denota el canvi esmentat anteriorment. Així, observant el Lema 1 deduïm que

FALTA

Observem com $\langle \overline{3}_1 \rangle$ també verifica el que acabem de veure.

Lema 2. El polinomi de Kauffman és invariant per moviments RII i RIII.

Demostració. Per RII cal aplicar 3 dues vegades seguides sabent que $\langle \overline{K} \rangle = \langle \overline{K} \rangle$ i aplicar-ho en un dels dos creuaments. Per RIII cal fer exactament el mateix. \square

$$\begin{aligned} \langle \overline{3}_1 \rangle &= A \langle \overline{3}_1 \rangle + A^{-1} \langle \overline{3}_1 \rangle \\ &= A(A^{-1} \langle \overline{3}_1 \rangle + A \langle \overline{3}_1 \rangle) + A^{-1}(A^{-1} \langle \overline{3}_1 \rangle + A \langle \overline{3}_1 \rangle) \end{aligned}$$

Figura 6.1: Exemple del polinomi de Kauffman de 3_1 .

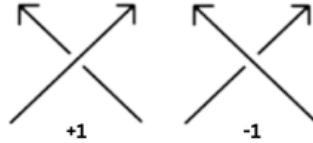


Figura 6.2: Signe d'un creuament per la regla de la ma dreta.

Definició 13. Definim el torçament $w(L)$ del diagrama d'un link orientat qualsevol com la suma dels signes dels seus creuaments, on cada un d'aquests pren el valor $+1$ o -1 com s'indica a la Figura 6.2

Notem que la Definició 13 utilitza la orientació del link. Un simple exercici demostra que aquest és invariant sota moviments RII i RIII i aquest canvia per $+1$ o -1 sota moviments RI. La Figura 6.3 mostra dos exemples sobre el càlcul del torçament d'un nus.

El torçament d'un link orientat juntalement amb el polinomi de Kauffman d'un diagrama de link sense tenir en compte l'orientació son tots dos invariants sota moviments RII i RIII a més, aquests es comporten d'una manera previsible sota moviments RI. Això duu al següent resultat:

Teorema 4. Sigui $diag(L)$ un diagrama

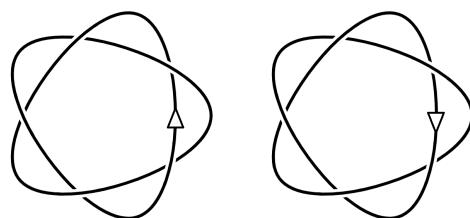


Figura 6.3: A l'esquerra el nus 5_1 que té torçament -5 , a la dreta $r5_1$ que té torçament també -5 .

d'un link orientat L . Llavors,

$$(-A)^{-3w(L)} \langle L \rangle$$

és un invariant del link orientat L .

Demostració. Conseqüència directa del Lema 2, el Lema 1 i l'observació sobre el torçament sota moviments RI anterior. \square

Definició 14. El polinomi de Jones $V(L)$ d'un link orientat L és el polinomi de Laurent en $t^{1/2}$ i coeficients enters, definit per

$$V(L) = ((-A)^{-3w(L)} \langle L \rangle)_{t^{1/2}=A^{-2}} \in \mathbb{Z}[t^{1/2}, t^{-1/2}]$$

on $\langle L \rangle$ és el polinomi de Kauffman i $w(L)$ és el torçament definits anteriorment.

Aquí, $t^{1/2}$ és una indeterminada el quadrat de la qual és t . De fet, només els links amb un nombre senar de components, incloent els nusos tenen polinomi amb potències enteres de t (CAL DEMOSTRAAAAAR ES FA PER INDUCCIÓ). El polinomi de Jones està ben definit i a més, $V(\bigcirc) = 1$. De fet, no es coneix cap altre exemple de nus L pel qual $V(L) = 1$; trobar un nus tal o demostrar que no existeix es considera un problema important. La Figura 6.4 mostra una taula amb els polinomis de Jones de fins a 7 creuaments utilitzant l'algorisme descrit anteriorment.

Clarament, si l'orientació de cada component del link canvia, llavors el signe en cada creuament es manté constant. Així doncs, el polinomi de Jones d'un nus no depèn de l'orientació escollida. Dit d'una altra manera, el polinomi de Jones no distingeix un nus K del seu invers rK . Pel que fa la quiralitat, el polinomi de Jones tampoc té perquè distingir-los tot i que hi ha certes circumstàncies en que sí, i doncs es comporta millor en distingir nusos amb aquesta darrera propietat. Elaborant en aquest últim comentari, utilitzant la Definició 14 no és massa difícil veure que

$$V(3_1) = -t^{-4} + t^{-3} + t^{-1}$$

3_1	$-t^{-4} + t^{-3} + t^{-1}$
4_1	$t^{-2} - t^{-1} + 1 - t + t^2$
5_1	$-t^{-7} + t^{-6} - t^{-5} + t^{-4} + t^{-2}$
5_2	$-t^{-6} + t^{-5} - t^{-4} + 2t^{-3} - t^{-2} + t^{-1}$
6_1	$t^{-4} - t^{-3} + t^{-2} - 2t^{-1} + 2 - t + t^2$
6_2	$t^{-5} - 2t^{-4} + 2t^{-3} - 2t^{-2} + 2t^{-1} - 1 + t$
6_3	$-t^{-3} + 2t^{-2} - 2t^{-1} + 3 - 2t + 2t^2 - t^3$
7_1	$-t^{-10} + t^{-9} - t^{-8} + t^{-7} - t^{-6} + t^{-5} + t^{-3}$
7_2	$-t^{-8} + t^{-7} - t^{-6} + 2t^{-5} - 2t^{-4} + 2t^{-3} - t^{-2} + t^{-1}$
7_3	$t^2 - t^3 + 2t^4 - 2t^5 + 3t^6 - 2t^7 + t^8 - t^9$
7_4	$t - 2t^2 + 3t^3 - 2t^4 + 3t^5 - 2t^6 + t^7 - t^8$
7_5	$-t^{-9} + 2t^{-8} - 3t^{-7} + 3t^{-6} - 3t^{-5} + 3t^{-4} - t^{-3} + t^{-2}$
7_6	$-t^{-6} + 2t^{-5} - 3t^{-4} + 4t^{-3} - 3t^{-2} + 3t^{-1} - 2 + t$
7_7	$-t^{-3} + 3t^{-2} - 3t^{-1} + 4 - 4t + 3t^2 - 2t^3 + t^4$

Figura 6.4: Taula dels polinomis de Jones. Una simple observació permet veure que tots aquests són diferents entre si.

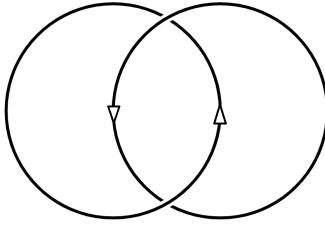


Figura 6.5: Càlcul del nombre de nuament del link de Hopf. Aquest té nuament -1.

i

$$V(\overline{3_1}) = t + t^3 - t^4$$

així doncs sabem que $3_1 \neq \overline{3_1}$ i doncs no existeix cap isotopia ambient que passi d'un a l'altre.

Definició 15. Sigui L un link orientat amb dues components L_1 i L_2 . El nombre de nuament $lk(L_1, L_2)$ de L_1 i L_2 és la meitat de la suma dels signes del seu diagrama els creuaments dels quals son sobrepassos.

La Figura 6.5 dona un exemple d'aquest càlcul.

És fàcil veure que si a un link orientat L se li canvia l'orientació de només una component K donant lloc a L' , llavors

$$V(L') = t^{-3lk(K, L-K)} V(L)$$

d'aquesta manera el polinomi de Jones depèn de l'orientació d'una manera molt elemental.

El polinomi de Jones es caracteritza mitjançant el següent resultat que és una conseqüència directa de la Definició 14.

Proposició 6. El polinomi de Jones és una funció

$$V : \{\text{Link orientat a } S^3\} \rightarrow \mathbb{Z}[t^{-1/2}, t^{1/2}]$$

de manera que

$$1. \quad V(\bigcirc) = 1$$

2. Sempre que tres links orientats L_+ , L_- i L_0 siguin el mateix excepte al voltant d'un punt, llavors

$$t^{-1}V(L_+) - tV(L_-) + (t^{-1/2} - t^{1/2})V(L_0) = 0$$

on L_+ , L_- , L_0 són links havent fet un moviment local a un dels creuaments.

Demostració. Sabem

$$\left\langle \begin{array}{c} \diagup \\ \diagdown \end{array} \right\rangle = A \left\langle \begin{array}{c} \diagdown \\ \diagup \end{array} \right\rangle + A^{-1} \left\langle \begin{array}{c} \diagup \\ \diagup \end{array} \right\rangle \quad (6.1)$$

$$\left\langle \begin{array}{c} \diagdown \\ \diagup \end{array} \right\rangle = A^{-1} \left\langle \begin{array}{c} \diagup \\ \diagdown \end{array} \right\rangle + A \left\langle \begin{array}{c} \diagup \\ \diagup \end{array} \right\rangle \quad (6.2)$$

Multiplicant 6.1 per A i 6.2 per A^{-1} i restat les dues equacions obtenim

$$A \left\langle \begin{array}{c} \diagup \\ \diagup \end{array} \right\rangle - A^{-1} \left\langle \begin{array}{c} \diagdown \\ \diagdown \end{array} \right\rangle = (A^2 - A^{-2}) \left\langle \begin{array}{c} \diagup \\ \diagdown \end{array} \right\rangle$$

D'aquesta manera, per links orientats amb diagrames com els mostrats, utilitzant el fet que $w(L_+) - 1 = w(L_0) = w(L_-) + 1$ tenim

$$-A^4 V(L_+) + A^{-4} V(L_-) = (A^2 - A^{-2}) V(L_0)$$

Fent la substitució $t^{1/2} = A^{-2}$ dona el resultat buscat. \square

Deduïm automàticament de la Proposició 6 que si L' és un link creat a partir de L afegint un component trivial de més, llavors el seu polinomi de Jones ve donat per $V(L') = (-t^{-1/2} - t^{1/2})V(L)$. La Proposició 6 anterior també permet el càlcul de qualsevol link orientat. Això és conseqüència directa del fet que tot link pot ser deformat fins a assolir el link trivial de c components, el polinomi de Jones del qual és $(-t^{-1/2} - t^{1/2})^{c-1}$ a partir de fer moviments locals el un diagrama d'aquest.

De la mateixa manera que el gènere d'un nus, vist a la Secció 5.3 obtenim un resultat similar.

Proposició 7. El polinomi de Jones de la suma de dos nusos K i K' és el producte dels seus polinomis de Jones, i.e.

$$V(K + K') = V(K)V(K')$$

Demostració. Considerant la suma del dos nusos $K + K'$ i operant mitjançant la relació 2 en només un dels dos nusos trobem el seu polinomi de Jones, repetint el procés amb l'altra nus arribem al nus trivial. \square

Per acabar la secció, cal remarcar que la teoria d'invariants és una teoria que pretén desenvolupar diferents eines per tal de poder dur a terme la tasca de distingir els diferents nusos. Per aquest motiu, no hi ha invariants millors ni pitjors, sinó que cadacun d'ells ajuda en aquesta tasca i mentre possiblement un invariant no permeti distingir entre dos nusos, possiblement un altre si. També, volia remarcar que dins la teoria de nusos existeix una gran quantitat d'invariants que no s'han pogut discutir en aquest treball. Alguns d'ells son, la p-Colorabilitat, el Determinant, el polinomi d'Alexander, el polinomi de Conway, el Grup Fonamental o el polinomi de HOMFLY-PT. Aquest últim consisteix en una generalització del polinomi de Jones i el d'Alexander alhora, de manera que conté la informació de tots dos polinomis. Un exemple de nus amb els mateixos polinomis de Jones, Alexander i HOMFLY-PT és el famós nus de Conway i el de Kinoshita-Terasaka, $11n34$ i $11n42$ respectivament en la notació de Thistlethwaite. Aquests dos nusos es distingeixen perquè tenen diferent gènere, i grup fonamental. No obstant, presenten els mateixos polinomis discutits anteriorment. El mètode per construir nusos d'aquesta mena és mitjançant un moviment introduït per Conway anomenat *mutació*. La Figura 6.6 mostra aquests dos nusos. Cal destacar que la teoria de nusos no té invariants complets, és a dir, que no existeix cap eina que permeti una classificació completa dels nusos i per tant, sempre existirà nusos diferents que cap de les eines desenvolupades pugui distingir. No obstant, hi ha certes classes de nusos pels quals el polinomi de HOMFLY n'és un invariant complet.

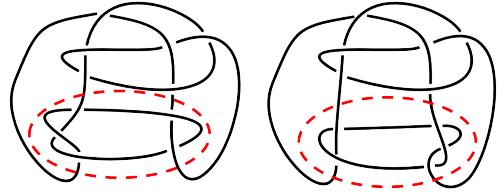


Figura 6.6: Exemple de mutació. D'esquerra a dreta: Nus de Kinoshita-Terasaka; $11n42$ i nus de Conway; $11n34$.

7 Aplicacions

7.1 Computació amb nusos quàntics

Els ordinadors quàntics prometen realitzar càlculs que es creuen impossibles per als ordinadors convencionals. Alguns d'aquests càlculs tenen una gran importància pràctica. Pràcticament tots els mètodes d'encriptació utilitzats per a dades altament sensibles són vulnerables a un algoritme quàntic o altre.

El poder extra d'un ordinador quàntic prové del fet que opera sobre informació representada com a qubits, o bits quàntics, en lloc de bits. Un bit clàssic ordinari pot ser un 0 o un 1, i les arquitectures de microxip estàndard reforcen aquesta dicotomia de manera rigorosa. Un qubit, en canvi, pot estar en un estat anomenat superposició, que comporta proporcions de 0 i 1 coexistint alhora. Es pot pensar en els possibles estats d'un qubit com els punts en una esfera. El pol nord és un 1 clàssic, el pol sud és un 0, i tots els punts intermedis són totes les superposicions possibles de 0 i 1. La llibertat que tenen els qubits per moure's per tota l'esfera ajuda a donar als ordinadors quàntics les seves capacitats úniques.

Malauradament, sembla que els ordinadors quàntics són extremadament difícils de construir. Els qubits soLEN expressar-se com a certes propietats quàntiques de partícules atrapades, com ara ions atòmics individuals o electrons. Però els seus estats de superposició són extremadament fràgils i poden ser malmesos per les més mínimies in-

teraccions fortuïtes amb l'entorn, que inclou tot el material que conforma l'ordinador mateix.

References

Graham P. Collins. Computing with Quantum Knots. *Scientific American*, 294(4):56–63, apr 2006. doi:10.1038/scientificamerican0406-56.

Vaughan F. R. Jones. A polynomial invariant for knots via von Neumann algebras. *Bulletin (New Series) of the American Mathematical Society*, 12(1):103 – 111, 1985.

L Kauffman and S Lambropoulou. Unknots and dna. *Current Developments in Mathematical Biology*, 38:39–68, 2007.

Ben-Michael Kohli and Guillaume Tahar. A lower bound for the genus of a knot using the links-gould invariant, 2023.

Justin Roberts. Knot knotes. *Notes*, page 18, 2015.

Herbert Seifert. Konstruktion dreidimensionaler geschlossener räume. (*No Title*), 1931.

Daniel S. Silver. Knot theory's odd origins: The modern study of knots grew out an attempt by three 19th-century scottish physicists to apply knot theory to fundamental questions about the universe. *American Scientist*, 94(2):158–165, 2006. ISSN 00030996. URL <http://www.jstor.org/stable/27858741>.

A.B. Sosinskiĭ. *Knots: Mathematics with a Twist*. Harvard University Press, 2002. ISBN 9780674009448. URL <https://books.google.es/books?id=BewrZeACVKcC>.

Bruce Trace. On the reidemeister moves of a classical knot. *Proceedings of the American Mathematical Society*, 89(4):722–724, 1983.

A Apendix

In the Appendix (or Appendices) you may give the details that did not fit in the main text. If necessary, you may use a one-column lay-out here. Start the first appendix on a new page.

B Apendix

If you have more than one Appendix, use letters to “number” them. You may start every appendix on a new page, but this is not necessary. If you have many appendices, it may be helpful for the reader to have a list of appendices on the first page of the appendices.