Nusos i el polinomi de Jones

Treball de Final de Grau

Guillem Tutusaus Alcaraz, 1533701, 1533701@uab.cat
Supervisor: Joan Porti Piqué

Abstract: Aquest és un document que tracta de donar una primera introducció a la teoria de nusos, estudiar alguns dels seus invariants algebràics més coneguts posant una ènfasis especial en el polinomi de Jones i classificar d'aquesta manera els nusos d'ordre més baix. Finalment, en buscarem algunes aplicacions.

1 Introducció

L'espècie humana té coneixement dels nusos desde temps prehistòrics. Començant per l'enregistrament d'informació, les xarxes de pesca i fins i tot per motius religiosos, els nusos han estat de gran importància per la seva utilitat i simbologia espiritual. Moltes obres d'art de cultures d'arreu del món presenten aquestes figures en les seves obres. Alguns exemples son la cultura Xinesa, Tibetana o Celta.

Els nusos comencen a tenir la seva presència dins el món de les matemàtiques a partir de l'any 1771 degut als treballs realitzats per Alexandre-Théophile Vandermonde el qual es dedicà a estudiar les propietats topològiques dels nusos en relació a la seva posició en l'espai. Treballs posteriors de Carl Friedrich Gauß qui va definir diverses propietats d'aquests objectes [Silver (2006)] van projectar aquesta teoria a la fama. L'any 1860 la teoria sobre l'atom en l'aether formulada per William Thomson va dur a Peter Guthrie Tait a la creació de les primeres taules de nusos. L'any 1885, aquest va publicar la primera taula amb tots els nusos de fins a deu creuaments, també va formular les conjectures que duen el seu nom.

A principis del segle XX, Max Dehn i J. W. Alexander van estudiar els nusos des del punt de vista de la teoria de grups i el seus invariants utilitzant grups d'homologia, cosa que va dur a la creació d'un dels primers invariants algebràics de la teoria, el polinomi d'Alexander.

A finals de l'any 1970, la incorporació de la geometria hiperbòlica en l'estudi dels nusos utilitzant el teorema de Geometrització de Thurston va permetre classificar aquests en funció de la seva mètrica, permetent l'ús de la geometria en la creació de nous invariants. El descobriment del polinomi de Jones per part de Vaughan Jones l'any 1984 [Sosinskiĭ (2002)] juntament amb contribucions de Edward Witten i Maxim Kontsevich van revelar fortes relacions entre la teoria de nusos i mètodes matemàtics en mecànica estadística i teoria quàntica de camps. Una gran quantitat de invariant han estat inventats desde llavors utilitzant eines com els grups quàntics o la homologia de Floer.

En les darreres dècades, els científics han estat interessats en l'estudi dels nusos físics per tal de comprendre el nuament de l'ADN i de diferents polímers. Aquesta teoria s'utilitza també per determinar si una molècula és o no quiral. Finalment, la teoria de nusos pot ser crucial en la construcció dels primers ordinadors quàntics a través del model proposat per Alexei Kitaev [Collins (2006)].

1.1 Sobre els nusos

Els nusos, son estructures presents en el nostre dia a dia. Podriem considerar un nus, en el sentit habitual, qualsevol de les figures següents.

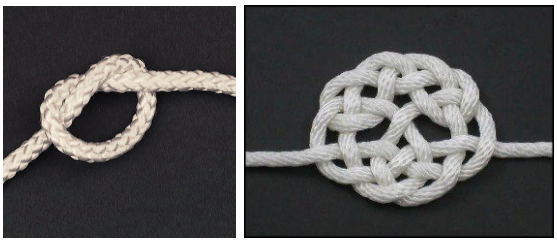


Figura 1.1: D'esquerra a dreta: Nus simple (Overhand Knot en anglès) i Nus de Dara, nus celta símbol de la força.

El problema que tenen aquests nusos és que, aquests mantenen la seva forma a partir de la

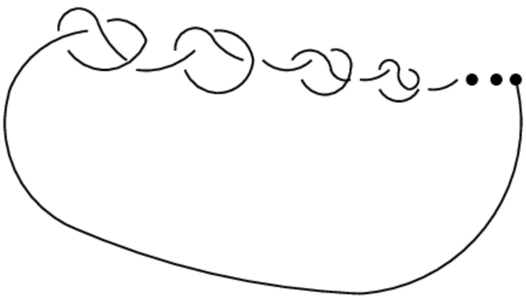


Figura 2.1: Exemple d'un nus salvatge.

tensió i fricció que existeix entre les cordes que formen el nus. No és gaire difícil veure que un podria desfer aquests nusos de manera que acabariem obtenint una simple corda sense cap nus. És per això, que en matemàtiques és necessari considerar una definició més restrictiva d'aquest concepte per tal de preservar-ne l'estructura interna. Podriem pensar, que si uníssim els caps de les cordes de la Figura 1.1, aleshores només tallant la corda seriem capaços de desfer el nus (això precisa de demostració!).

2 Algunes definicions i els objectius de la teoria de nusos

De definicions de nus, parlant en termes matemàtics, n'hi ha diverses. Nosaltres considerarem la definició dins el camp de la topologia, d'on en reutilitzarem molta notació. A més, la teoria de nusos s'emmarca dins una teoria més general; la de links. La següent secció pretén donar unes primeres definicions pel que fa aquests conceptes.

Definició 1. *Diem que L és un link de m components, o un m-link si és un subconjunt de S^3, o de $\mathbb{R}^3$, que consisteix en m corbes disjuntes, simples, tancades i lineals a trossos. Un link d'una component és un nus.*

La condició de lineal a trossos significa que les components de L estan cadascuna d'elles feta d'un nombre finit de rectes col · locades una al costat de l'altre amb el principi d'una coincidint amb el final de l'altre. A la pràctica, quan representem nusos o links assumirem que hi ha tants segments rectes que cada component semblarà corba. El motiu pel qual el nombre de rectes que formen cada component és finit evita la possibilitat de construïr links o nusos amb un nombre infinit de creuaments que convergeixen en un punt, fent-se cada vegada més petits. Aquests darrers nusos s'anomenen *salvatges* i no seran estudiats en aquest treball.

De què tracta la teoria de nusos? Una possible resposta és que la teoria de nusos pretén classificar el conjunt de possibles nusos. Donat un nus K, hom considera que aquest està inclòs, mitjançant una aplicació contínua, dins l'espai ambient tres dimensional $\mathbb{R}^3$ o equivalentment dins S^3, obtenim aleshores la teoria clàssica de nusos. Aquesta teoria pretén estudiar la col · locació de K dins aquest espai. Classificar, en aquest cas vol dir considerar iguals sota certes condicions, que definirem més endavant.

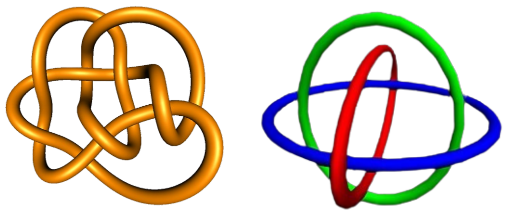


Figura 2.2: Exemples d'un nus (a l'esquerra) i d'un link de tres components o 3-link (a la dreta) conegut amb el nom del nus Borromeu.

Definició 2. *Diem que un nus està desnuat o que és el nus zero, notacionalment $\bigcirc$ si no presenta cap creuament en els segments de corda que el formen.*

2.1 Equivalència entre nusos

Expliquem ara què entem quan diem que dos nusos son el mateix.

Definició 3. *Diem que dos links L i L' a S^3 son equivalents si existeix una isotopia ambient entre ells.*

És a dir, si existeix una família d'homeomorfismes $h_t : S^3 \to S^3$ per $t \in [0,1]$ tal que $h_0 = 1$, $h_1 = h$ i $(x,t) \mapsto (h_t x, t)$ és un homeomorfisme lineal a trossos de $S^3 \times [0,1]$ a S^3, llavors direm que L i L' son links equivalents. L'equivalència entre nusos és la mateixa que en la Definició 3 tenint present que en aquest cas només tenim una component. Observem que la distorsió no és del mateix link sinó de l'espai "ambient" S^3 en sí mateix. Definir nus equivalent d'aquesta manera evita que els creuaments que formen el nus o link puguin fer-se cada vegada més petits fins a desapareixer. D'aquesta manera, és possible moure tot S^3 de forma contïnua utilitzant h_t per passar de L a L'.

2.2 Representació d'un nus en matemàtiques

Tenint present la definició de nus a partir d'ara en sentit matemàtic donada a la Definició 1, un pot veure la dificultat d'estudiar aquest tipus d'objectes tres dimensionals en un llibre de text o bé en una pissarra. És per això, que per tal d'estudiar-los sovint es representen els nusos mitjançant el seu *diagrama de nus*.

Considerant la projecció paral · lela (o axonomètrica) sobre l'eix z en el pla $\mathbb{R}^2$ d'un nus qualsevol K, obtindrem una figura com en l'exemple 2.3.

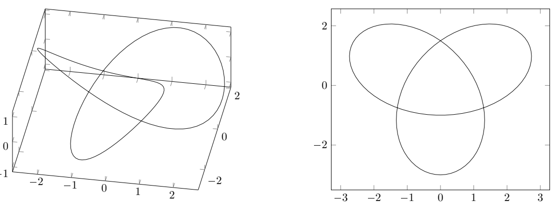
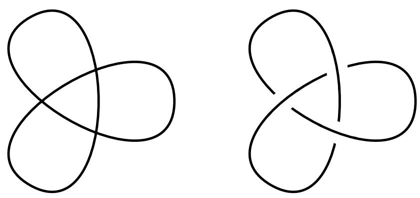


Figura 2.3: A l'esquerra el nus Trefoil amb parametrització $(\sin t + 2\sin 2t, \cos t - 2\cos 2t, -\sin 3t)$**. A la dreta, la seva projecció paral · lela sobre l'eix** z**.**

Considerant aquesta projecció però, un perd informació sobre el propi nus, ja que cal saber quin segment de corda va per sobre i quin per sota alhora de creuar-se. Per tal de no perdre aquesta informació, el segment que passa per sota se'l dibuixa de forma discontínua mentre aquest passa sota el segment de corda que el creua.

D'aquesta manera, la projecció del Trefoil de la Figura 2.3 quedaria de la següent manera:



Així doncs, considerant la projecció paral · lela sobre l'eix z d'un nus K qualsevol i disposant de la informació sobre els creuaments obtenim el que anomenarem *diagrama de nus*, notacionalment $diag(K)$. Moltes vegades, en la literatura es fa un abús de llenguatge i notació, anomenant nus al que nosaltres anomenem diagrama de nus i fent servir K i $diag(K)$ indistintament. D'aquí a no massa veurem que de fet, estudiar-ne les propietats d'un és equivalent a estudiar les de l'altre.

3 Els moviments de Reidemeister

Una primera aproximació per tal de distingir si dos nusos son diferent és veure quan son iguals. Aquesta és la inspiració darrera de la següent secció que tractarà sobre els moviments de Reidemeister i el Teorema central de la Teoria de Nusos.

3.1 Moviments de Reidemeister

Motivats per la Secció 2.1, un podria veure sense massa dificultat que cadascun dels moviments de la Figura 3.1 resulta en un diagrama de nus equivalent a l'original.

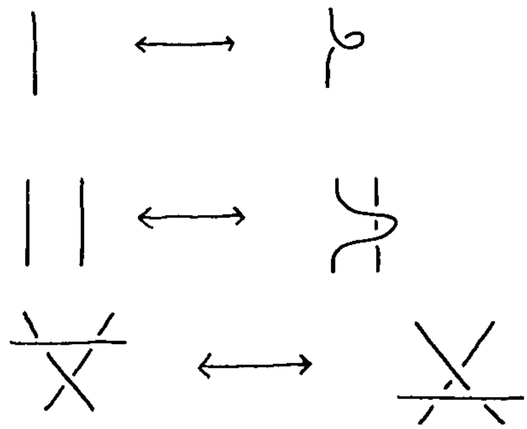


Figura 3.1: De dalt a baix: Moviment de Tipus I, Tipus II i Tipus III [Trace (1983)]. Cal pensar que els segments lliures de corda s'uneixen a través d'un nus K**.**

A aquests tres tipus de moviments se'ls anomena moviments de Reidemeister. Al primer de tots se'l diu de Tipus I o *twist* en anglès, al segon de Tipus II o *poke* i al tercer de Tipus III o *slide*.

Moviment de Tipus I o *twist*: També anomenat **RI** per abreujar notació, aquest tipus de moviment consisteix en "pessigar" la corda i amb el tros obtingut donar-li la volta (d'aquí el nom en anglès) fent un bucle com en el de la Figura 3.1.

Moviment de Tipus II o *poke*: També anomenat **RII**. Aquest tipus de moviment consisteix en fer passar una de les dues cordes per sobre de l'altra. En anglès, la paraula *poke* significa fer passar forçosament alguna cosa en una certa direcció i doncs en aquest cas es podria pensar que una de les dues cordes s'ha fet passar per sobre de l'altra.

Moviment de Tipus III o *slide*: També anomenat **RIII**. Aquest tipus de moviment consisteix en, com el nom en anglès indica, fer lliscar una de les tres cordes d'una banda a l'altra de la intersecció entre les dues cordes restants. En la Figura 3.1 podem veure com el segment de corda horitzontal llisca de dalt a baix del creuament entre les altres dues cordes.

Continuant amb el que hem vist, no és massa difícil veure que aplicant una seqüència finita de moviments RI, RII o RIII a un diagrama de nus qualsevol, el nus obtingut és equivalent a l'original.

3.2 El Teorema central de la Teoria de Nusos

L'any 1930, Kurt Reidemeister demostrà que l'implicació contrària també és certa, és a dir que si dos diagrames de nusos qualssevol son equivalents, aleshores sempre podem trobar una seqüència finita de moviments de Reidemeister de manera que podem transformar un diagrama de nus en l'altre. Aquest resultat va donar lloc al teorema central de la teoria.

Teorema 1. *$diag(K)$ i $diag(K')$ son equivalents si i només si, existeix una seqüència finita de moviments RI, RII o RIII que passa d'un a l'altre.*

Una demostració del teorema original es pot trobar a (Knot Knotes Justin Roberts, pàgina 18 Teorema 2.3.1) Reidemeister (2013), **però en essència aquesta demostració fa ús del fet que la manera en que un pot generar nusos equivalents a l'original és a través d'afegir triangles als costats d'un nus poligonal.**

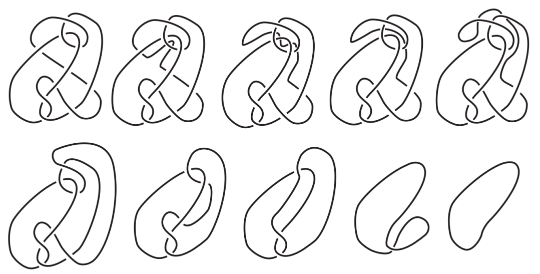


Figura 3.2: Com es pot observar en l'exemple, el nus de Culprit és equivalent al nus zero o *unknot* en anglès. Mitjançant la seqüència de moviments següent podem passar de l'un a l'altra. D'esquerra a dreta i de dalt a baix: RII, RIII+RIII, RII, RIII, RI+RII, RII, RII, RII, RI, [Kauffman and Lambropoulou (2007)].

El Teorema 1 doncs, posa en evidència el fet que parlar d'equivalència entre nusos o d'equivalència entre diagrames de nusos és el mateix, doncs aquests estan en correspondència a través de la Secció 2.2.

D'aquesta manera i fent referència al mencionat anteriorment, a partir d'ara farem un abús de llenguatge i notació dient nus K indistintament sense posar importància al fet de si ens referim al nus o al seu diagrama.

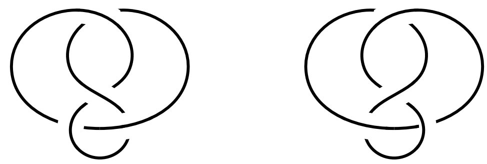


Figura 4.1: A l'esquerra el nus Vuit o Figure Eight en Anglès. A la dreta, el seu nus emmirallat.

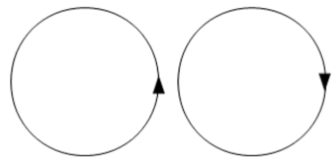


Figura 4.2: Les dues úniques orientacions del nus zero.

4 Propietats sobre nusos

És ben conegut el fet que les propietats d'un nus en permeten la classificació d'una manera més eficaç. En aquesta Secció posarem de manifest diferents propietats que més endavant tindran importància en la classificació d'aquests.

Definició 4. *Anomenem ordre de K, $O(K)$ al mínim nombre de creuament que aquest pot arribar a presentar donat un diagrama qualsevol.*

La Figura 3.2 demostra que l'ordre del nus Culprit és zero ja que aquest sempre és un nombre positiu.

Definició 5. *Diem que un nus és l'emmirallat $\overline{K}$ d'un altre nus K si aquest primer s'obté a partir de l'original canviant tots els creuaments de sobrepassos a sotapassos i a la inversa.*

La Figura 4.1 mostra un exemple d'un nus emmirallat.

D'aquesta manera, si un nus K és equivalent a $\overline{K}$, llavors diem que és *amfiquiral*, sinó diem que és *quiral*. El nus Vuit és un exemple de nus amfiquiral, però no sempre és veritat que un nus K sigui equivalent a $\overline{K}$.

Definició 6. *Diem que un nus és l'invers rK d'un altre nus K si aquest primer s'obté a partir de l'original canviant-ne l'orientació.*

És clar que un nus pot ser orientat de dues maneres diferents (mirar Figura 4.2), escollir una d'aquestes orientacions és informació extra sobre el nus que pot o no ser donada. De manera similar a la Definició 5, no sempre un nus és equivalent al seu invers.

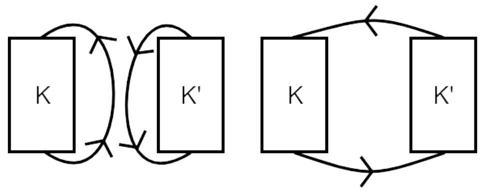


Figura 4.3: Suma de dos nusos qualssevol.

Definició 7. *Diem que un nus K és* <u>*primer*</u> *si no és el nus zero i si $K = K_1 + K_2$ implica que K_1 o K_2 és el nus zero.*

En aquest cas, el símbol + fa referència a l'operació suma. Donats dos nusos orientats K i K', aquests poden ser sumats posant-los un al costat de l'altre i unint-los de manera que es preservi l'orientació. Aquesta operació està ben definida sota equivalència. A més, és commutativa, associativa i té element neutre. Més endavant estudiarem aquesta operació en detall.

La Figura 4.4 és una taula que conté tots els nusos primers de fins a 9 creuaments. Cadascun rep un nom conformat per un parell de nombres; el primer de tots correspon al seu ordre i el segon és un subíndex històricament assignat a aquell nus en concret (les primeres tabulacions daten de l'any 1860 per Tait). D'aquesta manera, el Trefoil mostrat a la Figura 2.3 s'identifica amb 3_1. Aquesta taula negligeix el fet que possiblement un mateix nus K sigui diferent a $\overline{K}$, rK o $\overline{rK}$. D'aquesta manera, cada nus de la taula correspon a un, dos o quatre nusos de S^3 mitjançant les operacions definides a 5 i 6.

Definició 8. *Diem que K és un nus* <u>*alternat*</u> *si a mesura que anem recorrent el nus, els creuaments alternen de sobrepassos a sotapassos.*

El nus 4_1 n'és un exemple. De fet, cal anar fins a 8_{19} per trobar el primer nus no alternat i doncs això és una conseqüència del baix ordre dels nusos. Es pot veure que donat un ordre qualsevol, sempre existeix com a mínim un nus alternat. Ara bé, aquests disminueixen exponencialment a mesura que incrementem l'ordre del nus.

5 Alguns invariants algebràics

El Teorema 1 dona un mètode per saber quan dos nusos son equivalents, però aquest resultat no permet distingir quan dos nusos son diferents. D'aquesta manera per exemple, encara no sabem que $\bigcirc \neq 3_1$. És per això que és necessari la creació d'invariants que ens permetin realitzar aquesta tasca.

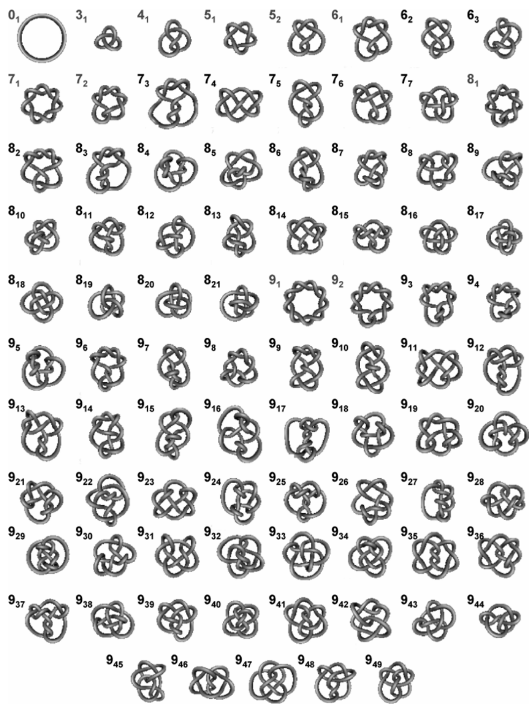


Figura 4.4: Taula de nusos fins a ordre 9.

Recordem que un invariant és un objecte ben definit, ja sigui un número, polinomi, grup, etcètera; que podem associar a un nus qualsevol, de manera que si tenim dos nusos amb diferent valor per aquest invariant, llavors segur que els dos nusos son diferents.

5.1 L'Ordre

Com haviem vist a la Definició 4, l'ordre d'un nus és un exemple d'invariant. Nusos amb diferent ordre no poden ser equivalents. Aquest invariant però és quasi intractable a nivell pràctic pel fet d'haver de considerar el mínim nombre de creuaments donats tots els diagrames d'aquest.

CAL LA DEMOSTRACIÓ QUE L'ORDRE ÉS UN INVARIANT ALGEBRÀIC (REIDEMEISTER?)

5.2 El Nombre de Desnuament

Definició 9. *Diem que $u(K)$ és el* <u>*nombre de desnuament*</u> *del nus K si aquest és el mínim nombre de canvis en els creuaments d'un nus necessaris per tal d'aconseguir el nus zero donats tots els diagrames de K.*

El nombre de desnuament és també un invariant. Aquest però, de la mateixa manera que passa amb l'ordre és intractable a nivell pràctic. Intuïtivament, si K és una corba a S^3, llavors $u(K)$ és el mínim nombre de vegades que K ha de passar per sí mateix per aconseguir el nus zero.

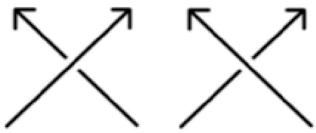


Figura 5.1: Moviments locals que es poden realitzar en qualsevol creuament d'un nus. A la imatge de l'esquerra, el tros de corda que va de Sud-Oest fins a Nord-Est passa per sobre de la corda que el creua i doncs en aquest sentit diem que la sobrepassa. A la dreta, aquesta mateixa corda creua per sota i doncs diem que la sotapassa.

Proposició 1. *Donat un nus K qualsevol, aquest sempre pot ser desnuat.*

Demostració. Entenem per *moviment local* un canvi en els creuaments d'un nus com en el de la Figura 5.1 passant de sobrepassos a sotapassos o a la inversa. D'aquesta manera, recorrent K d'acord amb una orientació qualsevol i fent moviments locals canviant sotapassos a sobrepassos a mesura que aquests van apareixen sense modificar els creuaments que ja haguem visitat ja ho tindriem. □

Proposició 2. *Sigui K, K' dos nusos qualssevol, llavors $u(K + K') \leqslant u(K) + u(K')$*

Demostració. És clar que per tal de desnuar $K+K'$ només fa falta desnuar K i K'. □

L'altre desigualtat és de fet un problema obert.

Per acabar de veure com d'intractable és aquest invariant afirmem el següent resultat sense demostrar-lo.

Proposició 3. *Sigui K un nus, existeix un diagrama de K pel qual $u(K) = C$ per a tot $C \in \mathbb{N}$.*

5.3 El Gènere

Veurem ara que tot link a S^3 es pot veure com la frontera d'una superfície immersa en S^3. Aquestes superfícies poden ser utilitzades per estudiar el link.

Definició 10. *Una superfície de Seifert per un link L orientat de S^3 és una superfície compacta, connexa i orientable continguda a S^3 de manera que la seva frontera és L.*

Exemples d'aquestes superfícies son com les de la Figura 5.2. Evidentment, tota superfície compacta connexa i orientada amb frontera dins S^3 és un exemple d'un link equipat amb una superfície de Seifert. Una superfície és no orientable si conté una

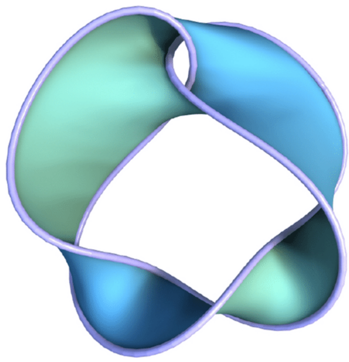


Figura 5.2: Exemple d'una superfície de Seifert per 5_2.

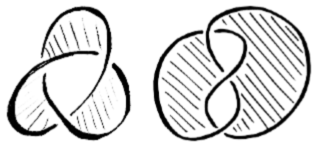


Figura 5.3: Dos diagrames del nus 3_1 pintats com indiquen les instruccions on en comptes de pintar de color negre les regions hem dibuixat línies. Com es pot observar, la superfície de l'esquerra és no orientable mentre que la de la dreta si i doncs és una superfície de Seifert com haviem vist a la Definició 10.

banda de Möbius. Algunes superfícies poden ser construïdes amb un link qualsevol com a frontera de la següent manera: Pintant de color blanc i negre seguint un patró com el d'un taulell d'escacs les regions de S^2 que formen el complement del diagrama d'un link. Considerant totes les regions d'un mateix color i juntant-les per bandes amb una mitja volta arribem a obtenir un objecte com el de la Figura 5.3.

Tot i que aquest mètode pot donar resultat a una superfície de Seifert, en general aquest no té perquè ser el cas. Seifert dona un algorisme, per tal de trobar en general una superfície d'aquest tipus.

Teorema 2. *Tot link orientat L a S^3 té una superfície de Seifert.*

Demostració. Sigui $diag(L)$ un diagrama orientat de L qualsevol i sigui $\widehat{diag(L)}$ aquest darrer diagrama modificat segons indica la Figura 5.4, llavors $\widehat{diag(L)}$ és el mateix que $diag(L)$ excepte en un entorn prou petit de cada creuament on aquest ha sigut eliminat de la única manera possible coherent amb l'orientació. Aquest $\widehat{diag(L)}$ és doncs una unió disjunta de corbes orientades simples i tancades dins S^2. Així doncs, $\widehat{diag(L)}$ és la frontera de la

Figura 5.4: Moviments utilitzats en l'algorisme de Seifert. Quan ens trobem amb un creuament, resoldrem aquest com mostra la imatge central reseguint el nus o link com indica la seva orientació.

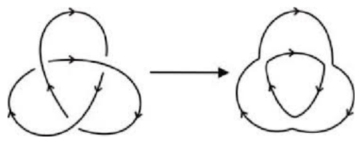


Figura 5.5: Exemple amb la construcció de $\widehat{diag(3_1)}$ a partir d'un diagrama de 3_1 qualsevol.

unió d'un nombre de discs disjunts tots en un costat de S^2. Juntem els discs mitjançant bandes amb una mitja volta als mateixos llocs on hi havia els creuaments. Això forma una superfície orientada amb L com a frontera d'aquesta; cada disc rep la orientació induïda per $\widehat{diag(L)}$ i les bandes que uneixen els diferents discos van alternant aquesta orientació. Si aquesta superfície no és connexa, connectem els components eliminant discos i afegint tubs. $\square$

En la demostració del Teorema 2, $\widehat{diag(L)}$ era una col · lecció disjunta de corbes simples i tancades construïdes a partir de $diag(L)$. Aquestes corbes s'anomemen <u>cercles de Seifert</u> del $diag(L)$. La Figura 5.5 dona un exemple d'aquests.

Una superfície de Seifert per la Figura 5.5 s'obté afegint dos discos un a sobre l'altre i tres bandes amb una mitja volta cadascun en els creuaments unint així els discos. Evidentment, aquest algorisme dona lloc a una superfície de Seifert donat un diagrama qualsevol de L però aquesta no té perquè ser única. Tampoc té perquè ser la més senzilla donat un diagrama qualsevol.

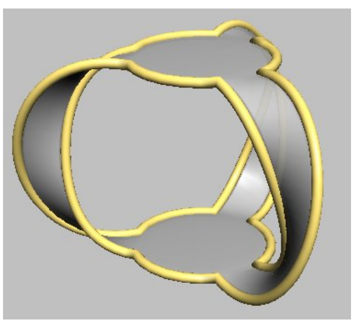


Figura 5.6: superfície de Seifert pel nus 3_1 obtinguda unint els discos amb bandes.

Definició 11. *El <u>gènere</u> $g(K)$ d'un nus K es defineix com*

$$g(K) = \min\{g(F) \colon F \text{ superfície de Seifert de } K\}$$

Com en aquest cas K és un nus, F només té un component de frontera de manera que com a superfície abstracte és un disc amb un nombre concret de forats (AIXÒ NO ESTÀ DEL TOT BÉ). A aquest nombre se l'anomena gènere. Més precisament, el gènere de F és

$$g(F) = \frac{1}{2}(1 - \chi(F))$$

on χ és la característica d'Euler de F. La característica d'Euler es pot definir paral · lelament com el nombre vèrtex menys el nombre de costats més el nombre de triangles en qualsevol triangulació de F.

Si $diag(K)$ té n creuament i s cercles de Seifert, llavors $\chi(F) = s - n$ de manera que

$$g(K) \leqslant \frac{1}{2}(n - s + 1)$$

Aquest invariant té un millor tractament que els vistos anteriorment. A més, no és difícil veure que K és el nus zero si i només si $g(K) = 0$. Podem a més trobar una cota superior per aquest gènere. POTSER HAURIEM DE DEMOSTRAR AIXÒ ÚLTIM I A MÉS TAMBÉ DEMOSTRAR QUE EL GÈNERE ÉS UN INVARIANT.

Teorema 3. *Donats dos nusos K i K',*

$$g(K + K') = g(K) + g(K')$$

Demostració. JA LA FARÉ $\square$

Corol · lari 1. *Cap nus tret del nus zero té oposat respecte la suma.*

Demostració. Suposem que existeix K i K' amb almenys un d'ells diferent del nus zero de manera que $K + K' = \bigcirc$, llavors en virtut del Teorema 3

$$g(K + K') = g(K) + g(K')$$
$$0 = g(K) + g(K')$$

Com que el gènere d'un nus és un nombre positiu, tenim que $g(K) = g(K') = 0$. $\square$

Corol · lari 2. *Hi ha un nombre infinit de nusos diferents.*

Demostració. Sigui K un nus no trivial qualsevol i $\sum^n K$ la suma de n còpies d'aquest. Veiem que si $n \neq m$, llavors $\sum^n K \neq \sum^m K$. Suposem que $\sum^n K = \sum^m K$, aleshores $\sum^n g(K) = \sum^m g(k)$. Sense pèrdua de generalitat podem suposar que $m > n$, d'aquesta manera $\sum^{m-n} g(K) = 0$ cosa que implica $K = \bigcirc$. $\square$

Corol·lari 3. *Un nus K amb gènere 1 és primer.*

Demostració. Sigui K un nus amb $g(K) = 1$ i expressem aquest com a suma de nusos K_1 i K_2, llavors $1 = g(K_1) + g(K_2)$ i per tant $g(K_1) = 0$ o al revés. □

Corol·lari 4. *Tot nus pot ser expressat com a suma finita de nusos primers.*

Demostració. Si un nus no és primer, aquest es pot expressar com a suma de dos nusos de menor gènere. Per inducció sobre el gènere ja ho tindriem. □

Es pot veure també, que aquesta expressió és única tret de l'ordenació dels sumands.

AL FINAL DE LA SECCIÓ CAL REMARCAR QUE LA TEORIA D'INVARIANTS NO S'HA DE CONCEBRE COM UNA TEORIA ON HI HAGI INVARIANTS MILLORS QUE D'ALTRES, SINÓ QUE CADASCUN AJUDA EN LA CLASSIFICACIÓ DE MANERA QUE EL QUE POTSER UN INVARIANT NO PERMET DISTINGIR, UN ALTRE SI. D'AQUESTA MANERA, PODEM PENSAR EN ELS INVARIANTS COM UNA CAIXA D'EINES QUE PODEM UTILITZAR ALHORA D'ESTUDIAR UN NUS. També m'agradaria tenir una taula amb tots els nusos de fins a 9 creuaments classificats en funció de cada invariant estudiat fins al moment

6 El polinomi de Jones

El descobriment del *polinomi de Jones* per part de Vaughan Jones l'any 1984 [Jones (1985)] dona una manera d'associar a cada nus o link un polinomi de Laurent amb coeficients enters. Aquesta correspondència es fa mitjançant un diagrama de link qualsevol. La teoria de Jones es fonamenta en el fet que si fem un moviment RI, RII o RIII al diagrama del link, aquest polinomi no canvia i doncs és un invariant sota moviments de Reidemeister. El polinomi per un link és doncs independentment del diagrama d'aquest. De manera que si podem veure que dos diagrames de links no tenen el mateix polinomi, llavors segur que aquests son diferents.

La manera més simple per definir-lo és mitjançant un altre tipus de polinomi; el *polinomi de Kauffman* descobert per Louis Kauffman.

Definició 12. *El polinomi de Kauffman de L, $\langle L\rangle$ és un polinomi de Laurent amb coeficients enters i indeterminada A que podem associar a tot diagrama d'un link a S^2 de la següent manera:*

1. $\left\langle \bigcirc \right\rangle = 1$
2. $\left\langle L \cup \bigcirc \right\rangle = (-A^{-2} - A^2)\langle L\rangle$
3. 

En aquesta definició,

$$\bigcirc$$

és el diagrama del nus zero i

$$L \cup \bigcirc$$

és un diagrama de L juntament amb una corba tancada extra que no conté cap creuament ni amb ella mateixa ni amb L. A *3* la fórmula relaciona tres diagrames que son el mateix excepte al voltant d'un creuament on es diferencien pels moviments locals indicats. A partir d'aquesta definició és fàcil veure les següents propietats.

- $\left\langle \bigcirc \overset{c}{\cdots} \bigcirc \right\rangle = (-A^{-2} - A^2)^{c-1}$
- $\langle L\rangle = \langle rL\rangle$

La Figura 6.1 mostra de forma iterativa el càlcul d'aquest polinomi. Així doncs trobem que

$$\langle 3_1\rangle = A^{-7} - A^{-3} - A^5$$

Un exercici similar demostra que

$$\langle \overline{3_1}\rangle = A^7 - A^3 - A^{-5}$$

Investiguem ara el comportament del polinomi respecte els moviments de Reidemeister.

Lemma 1. *Si a K hi apliquem un moviment RI el seu polinomi de Kauffman canvia de la següent manera*

$$\langle FALTAAAA\rangle$$

Demostració. Utilitzant *3* i *2* en aquest mateix ordre. □

Notem a més que si a *3* fessim un moviment local canviant-lo a

llavors el polinomi de Kauffman corresponent seria el mateix que l'original intercanviant A per A^{-1}. Això significa que si $\overline{K}$ és el nus emmirallat de K, llavors $\langle\overline{K}\rangle = \overline{\langle K\rangle}$, on $\overline{\langle K\rangle}$ denota el canvi esmentat anteriorment. Així, observant la Proposició 1 deduïm que

$$FALTA$$

En l'exemple del càlcul del polinomi de Kauffman de 3_1 anterior també es dona aquest cas.

Lemma 2. *El polinomi de Kauffman és invariant per moviment RII i RIII*

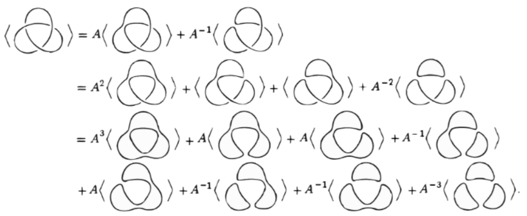


Figura 6.1: Exemple del polinomi de Kauffman de 3_1.

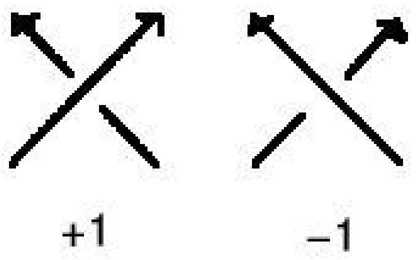


Figura 6.2: Signe d'un creuament per la regla de la ma dreta.

Demostració. Per RII cal aplicar *3* dues vegades seguides sabent que $\langle \overline{K} \rangle = \overline{\langle K \rangle}$ i aplicar-ho en un dels dos creuaments. Per RIII igual. ☐

Definició 13. *Definim el torçament $w(L)$ del diagrama d'un link orientat qualsevol com la suma dels signes dels seus creuaments, on cada un d'aquests pren el valor $+1$ o -1 com s'indica a la Figura 6.2*

Notem que la Definició 13 utilitza la orientació del link. Notem també que aquest és invariant sota moviments RII i RIII i aquest canvia per $+1$ o -1 sota moviments RI. La Figura 6.3 mostra dos exemples sobre el càlcul del torçament d'un nus.

El troçament d'un link orientat juntament amb el polinomi de Kauffman d'un diagrama de link sense tenir en compte la orientació son tots dos invariants sota moviments RII i RIII a més, aquests es comporten d'una manera previsible sota moviments RI. Això duu al següent resultat:

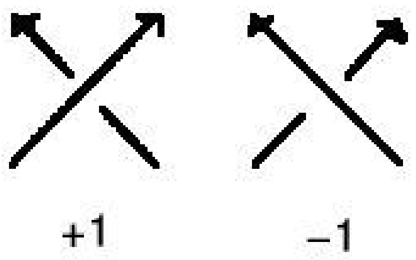


Figura 6.3: A l'esquerra el nus 5_1 que té torçament -5, a la dreta $r5_1$ que té torçament -5.

Teorema 4. *Sigui diag(L) un diagrama d'un link orientat L. Llavors,*

$$(-A)^{-3w(L)} \langle L \rangle$$

és un invariant del link orientat L.

Demostració. Conseqüència directa del Lemma 2, 1 i l'observació sobre el torçament sota moviments *RI* anterior. ☐

7 Aplicacions

References

Graham P. Collins. Computing with Quantum Knots. *Scientific American*, 294(4):56–63, apr 2006. doi:10.1038/scientificamerican0406-56.

Vaughan F. R. Jones. A polynomial invariant for knots via von Neumann algebras. *Bulletin (New Series) of the American Mathematical Society*, 12(1):103 – 111, 1985.

L Kauffman and S Lambropoulou. Unknots and dna. *Current Developments in Mathematical Biology*, 38:39–68, 2007.

Kurt Reidemeister. *Knotentheorie*, volume 1. Springer-Verlag, 2013.

Daniel S. Silver. Knot theory's odd origins: The modern study of knots grew out an attempt by three 19th-century scottish physicists to apply knot theory to fundamental questions about the universe. *American Scientist*, 94(2):158–165, 2006. ISSN 00030996. URL `http://www.jstor.org/stable/27858741`.

A.B. Sosinskiĭ. *Knots: Mathematics with a Twist.* Harvard University Press, 2002. ISBN 9780674009448. URL `https://books.google.es/books?id=BewrZeACVKcC`.

Bruce Trace. On the reidemeister moves of a classical knot. *Proceedings of the American Mathematical Society*, 89(4):722–724, 1983.

A Appendix

In the Appendix (or Appendices) you may give the details that did not fit in the main text. If necessary, you may use a one-column lay-out here. Start the first appendix on a new page.

B Appendices

If you have more than one Appendix, use letters to "number" them. You may start every appendix on a new page, but this is not necessary. If you have many appendices, it may be helpful for the reader to have a list of appendices on the first page of the appendices.