Työ 1 - Tiheyden määrittäminen

Opeteltavat taidot

Suhteellinen virhetarkastelu sekä työntömitan, mikrometriruuvin ja vaa’an käyttö.

Teoria

Kappaleen tiheys saadaan jakamalla kappaleen massa kappaleen tilavuudella:

$$\rho = \frac{m}{V}$$

Sylinterin tilavuuden lauseke on

$$V = h\pi r^2,$$

missä *h* sylinterin paksuus ja *r* on sylinterin säde. Yhdistämällä molemmat lausekkeet saadaan sylinterin tiheydeksi:

$$\rho = \frac{m}{h\pi r^2}$$

Mittaukset

Työssä on tarkoitus määrittää lasi, betoni ja teräs kiekkojen tiheydet. Kappaleen mittojen mittauksessa on pohdittava, mikä mittaväline antaa tarkimman mitan. Kappaleet eivät ole täysin symmetrisiä, joten esim. paksuus kannattaa mitata vähintään kolme kertaa eri kohdista. Mittaustulos on tällöin keskiarvo ja virheeksi on järkevää laittaa suurin poikkeama keskiarvosta.

Tulosten käsittely

Tässä työssä käytetään suhteellista virhetarkastelua, jolloin virheyhtälöksi saadaan:

$$\frac{\Delta\rho}{\rho} = \frac{\Delta m}{m} + \frac{\Delta h}{h} + 2\frac{\Delta r}{r}$$

HUOM: yhtälö antaa suhteellisen virheen (esim. 0,0456=4,56%) ja tämän avulla on laskettava absoluuttinen virhe.

Raportin sisältö

- Lyhyt teoriatarkastelu työstä (sis. laskennassa käytetyt kaavat)
- Työn suorittamisen pääkohdat
- Laskut (kiekkojen mitat ja massat sekä näistä lasketut tiheydet virherajoineen)
- Johtopäätökset (mitä opittiin, saatujen tulosten kirjallisuusarvoihin vertaaminen)
- Lähteet esille

Muista aina käydä katsomassa Optimasta PDF:stä "Tietoa_raportin_rakenteesta" mitä lukuja raportissa tulee olla ja mitä sisältöä eri luvuissa.

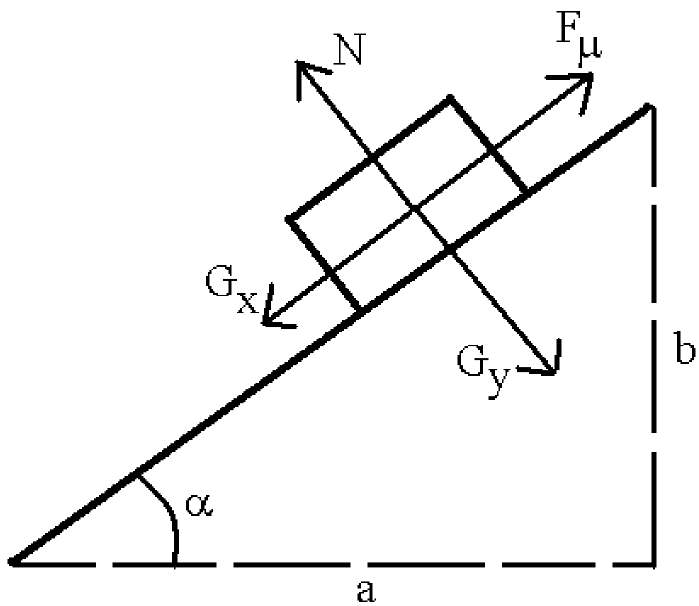
Työ 2 - Lähtökitkakertoimen määrittäminen

Opeteltavat taidot

Tilastollinen virhetarkastelu sekä suureiden mittaaminen epäsuorasti (tässä hyödyntämällä Pythagoraan lausetta)

Teoria

Kun kappale asetetaan kaltevalle tasolle siihen kohdistuvat seuraavat voimat:



Kun tason kaltevuutta kasvatetaan riittävästi, painovoiman *x*-suuntainen komponentti kasvaa riittävän suureksi, jolloin kappale juuri ja juuri nytkähtää liikkeelle. Tällöin kitkavoima ja *G*:n *x*-suuntainen komponentti ovat likimain yhtä suuret eli

$$G_x = F_\mu$$

Toisaalta tilanteessa tukivoima *N* on yhtä suuri kuin painovoiman *y*-suuntainen komponentti $N = mg\cos(\alpha)$.

Yhdistämällä lausekkeet saadaan:

$$mg\sin(\alpha) = \mu mg\cos(\alpha).$$

Lausekkeesta supistuvat pois termit *m* ja *g* jolloin kitkakerroin saadaan määritettyä.

$$\mu = \frac{sin(\alpha)}{cos(\alpha)} = tan(\alpha)$$

Toisaalta suorakulmaisen kolmion trigonometriasta tiedetään, että

$$\tan(\alpha) = \frac{b}{a}$$

missä *b* on tason korkeus ja *a* on tason ”leveys” (näkyvät myös kuvassa). Lopulta lähtökitkakertoimen lausekkeeksi saadaan:

$$\mu = b/a$$

Mittaukset

Työssä määritetään puupalan ja metallikiekon lähtökitkakertoimia pleksilasilevypinnalla. Pleksilevynä toimii sisustustaululevy, jonka pituus on hypotenuusa ja kateetit *a* ja *b* mitataan/lasketaan.

Mitattava kappale asetetaan aina samaan kohtaan tasoa. Tasoa aletaan nostaa toisesta päästä varovasti ylöspäin, kunnes kappale juuri ja juuri lähtee liikkeelle. Tällöin otetaan ylös sivun *b* korkeus. Leveyttä (sivu *a*) ei mitata, sillä se selviää Pythagoraan lauseen avulla. Mittaus toistetaan (vähintään) 20 kertaa, jotta siitä voidaan tehdä tilastollinen tarkastelu.

Ota huomioon, että mittausjärjestely ei ole kovin tarkka, mutta ole sinä tarkka! Pyri ottamaan mahdollisimman tarkat mitat ja aseta kappale aina samalle kohtaa tasoa. Puhdista pleksin pinta tarvittaessa vedellä ja saippualla tai alkoholilla.

Tulosten käsittely

Koska kyseessä on tilastollinen ilmiö, on järkevä tehdä tilastollinen analyysi. Molemmille kiekoille saadaan siis laskettua vähintään 20 kappaletta lähtökitkakertoimia. Tämän jälkeen otetaan avuksi Excel:

Esimerkki mittaustulosten laskemisesta

Excelissä tulokset kirjataan ylös ja lasketaan niiden keskiarvo (ks. insert function->average)

	Kitkakerroin
	0,45
	0,4
	0,48
	0,46
	0,35
	0,41
	0,4
	0,51
	0,47
	0,38
	0,48
	0,6
	0,52
	0,83
KESKIARVO	0,481428571

Tämän jälkeen käsketään Exceliä laskemaan tuloksista keskihajonta (ks. insert function->statistical->STDEV). Esimerkissä syntaksina on ollut STDEV(B2:B15)

	Kitkakerroin
	0,45
	0,4
	0,48
	0,46
	0,35
	0,41
	0,4
	0,51
	0,47
	0,38
	0,48
	0,6
	0,52
	0,83
KESKIARVO	0,481428571
KESKIHAJONTA	0,119412481

Keskihajonta ilmoittaa mikä olisi seuraavan UUDEN (tässä tapauksessa 15.) mittauksen virhe. Nyt tarkastellaan koko otannan virhettä joka on pienempi. Paras virhearvio saadaan keskiarvon keskivirheellä joka on **keskihajonta jaettuna mittauksien lukumäärän neliöllä**:

$$\Delta\mu = \frac{0.119412481}{\sqrt{14}} = 0{,}031914328 \approx 0{,}04$$

Lopullinen tulos on siis:

$$\mu = 0{,}48 \pm 0{,}04$$

Raportin sisältö

- Lyhyt teoriatarkastelu työstä (sis. laskennassa käytetyt kaavat)
- Työn suorittamisen pääkohdat
- Laskut (molempien kappaleiden lepokitkakertoimet virheineen)
- Johtopäätökset (mitä opittiin, saatujen tulosten kirjallisuusarvoihin vertaaminen)
- Lähteet esille

Muista aina käydä katsomassa Optimasta PDF:stä "Tietoa_raportin_rakenteesta" mitä lukuja raportissa tulee olla ja mitä sisältöä eri luvuissa.

Työ 3 - Jousivakio

Opeteltavat taidot

Suoran sovitus, (vieraan) kokeellisen mallin hyödyntäminen, suuripotenssisten suureiden vaikutus virhearvionteihin, eri menetelmiä vertaaminen keskenään.

Teoria

Yksinkertainen harmoninen värähtelijä saadaan aikaan, kun tankoon kiinnitetyn kierrejousen vapaaseen päähän asetetaan *m*-massainen kappale. Kun kappale poikkeutetaan tasapainoasemastaan ja päästetään vapaasti liikkumaan, se alkaa värähdellä harmonisesti pystysuunnassa.

Tässä osassa työtä on tarkoitus määrittää käytetyn kierrejousen jousivakio *k* kahta eri menetelmää käyttäen. Jousivakio kuvaa jousen jäykkyyttä.

Ensimmäisenä menetelmänä on jousivakion määritys jousen päähän asetetun massan *m* ja sen aiheuttaman jousen venymän tasapainotilasta x_0 avulla. Tässä tapauksessa jousivakio voidaan ratkaista tasapainoyhtälöstä 3

$$mg - kx_0 = 0 \tag{3}$$

Toisena menetelmänä on jousivakion määrittäminen jousen ominaisuuksien avulla yhtälöstä 4

$$k = \frac{G \cdot d^4}{8 \cdot n \cdot D^3} \tag{4}$$

Missä

G = jousimateriaalin liukukerroin
d = jousilangan halkaisija
D = kierteen keskihalkaisija (sisä- ja ulkohalkaisijan keskiarvo)
n = kierteiden lukumäärä

Mittaukset

Työssä on tarkoitus määrittää yhden jousen jousivakio kahdella eri menetelmällä.

- Ensimmäisessä osiossa jousen venymä mitataan SEITSEMÄLLÄ eri punnuksella. Venymä x_0 tarkoittaa venyneen jousen ja vapaasti (ilman punnusta) roikkuvan jousen pituuksien erotusta.
- Toisessa osiossa kannattaa käyttää mikrometriruuvia jousilangan paksuuden määrittämiseen.

Tulosten käsittely

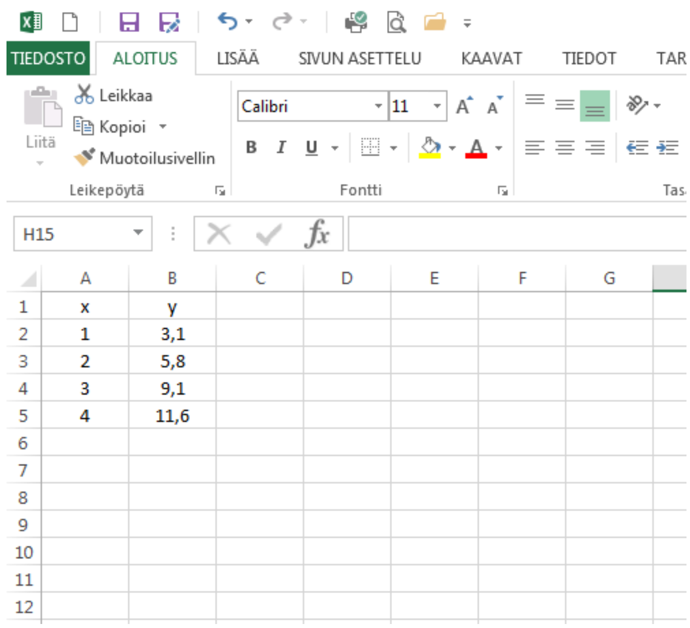
1. osion suoran sovitus

Yhtälö (3) saadaan muutettua muotoon:

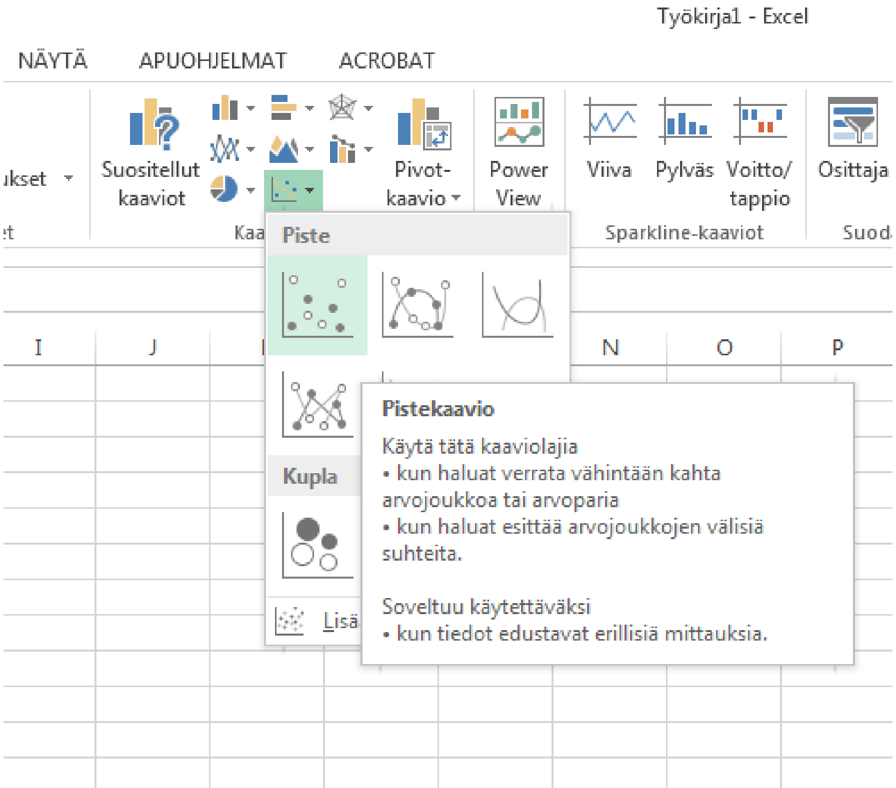
$$mg = kx_0$$

Mikä muistuttaa matematiikasta tuttua suoran yhtälöä $y = kx + b$ missä *k* on kulmakerroin ja *b* on *y*-akselin leikkauskohta (mallissa *b* oletetaan nollaksi, näin ei kuitenkaan voi olla, koska malli ei ota huomioon jousen massaa).

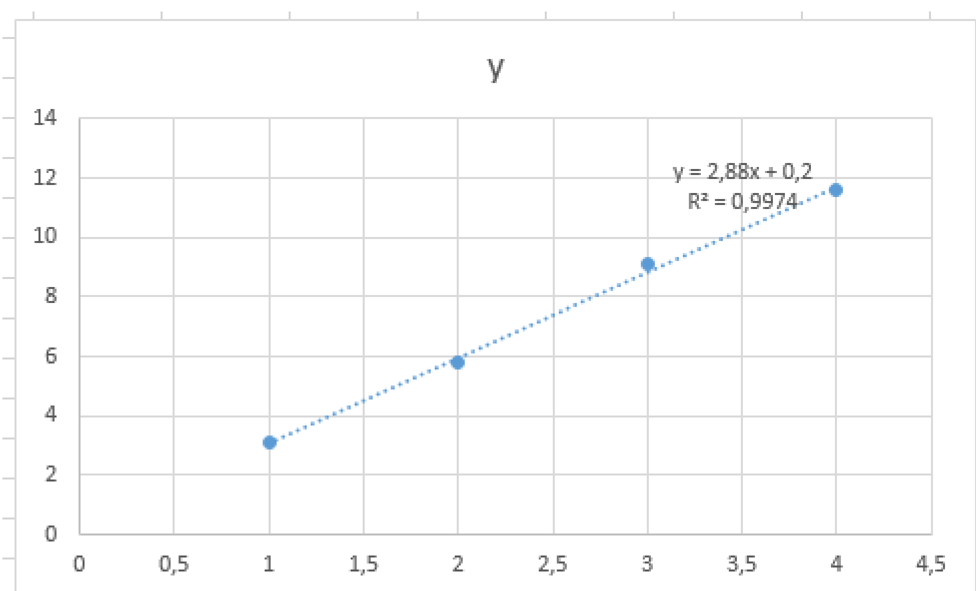
Syötetään vastaavat arvot Exceliin (*x* on nyt venymä ja *y* on *mg*):



Seuraavaksi käsketään ohjelmaa tekemään mittauspisteistä kuvaaja maalamalla sarakkeet ja painamalla lisää -välilehden pistekaavio (scatter) –painiketta.



Seuraavaksi käsketään ohjelmaa tekemään suoran sovitus valitsemalla arvosarja (datapisteet) hiirellä ja oikealla näppäimellä avautuvasta valikosta ”lisää trendiviiva” (Add trendline). Suoran yhtälön saa näkyviin klikkaamalla oikean laidan valikosta ”Näytä kaava kaaviossa” (Display Equation on chart) sekä ”Näytä korrelaatiokertoimen arvo kaaviossa” (Display R-squared value on chart).



Nyt kuvaajan päälle piirtyy kaksi yhtälöä. Ensimmäisestä voidaan lukea jousen jousivakio, joka on suoraan *x*:n edessä oleva kerroin.

Toiseksi tärkein arvo on *y*:n yhtälöstä löytyvä vakiotermi (leikkauskohta). Teoreettisesti leikkauskohdan pitäisi olla NOLLA. Vakiotermiä voidaan siis pitää systemaattisena virheenä: ts. Ikään kuin kaikki mittauspisteet ovat arvon 0,2 verran liian suuria. Tämä ei kuitenkaan vaikuta kulmakertoimeen!

Tässä työssä käytetty Excel ei valitettavasti anna kulmakertoimen virhettä. Excel kertoo kuitenkin sen miten hyvin mittauspisteet osuvat suoralle ja tämän voimme lukea suoran yhtälön alapuolelta korrelaatiokertoimesta R^2. Mitä lähempänä annettu numero on lukua 1, sitä paremmin suora osuu mittauspisteisiin. Luku 0 vastaa sitä, että pisteet eivät sovi lainkaan suoralle.

Suoransovituksen takana on menetelmä nimeltä ”pienimmän neliösumman sovitus” ja siitä sekä kulmakertoimen virheen laskemisesta voi halutessaan lukea lisää täältä: http://mathworld.wolfram.com/LeastSquaresFitting.html

Kulmakertoimesta saadaan nyt kirjoitettua jousivakio:

$$k = 2{,}88\ \frac{\mathrm{N}}{\mathrm{m}}$$

Lasketaan virhe tälle suoraan ratkaisemalla jousivakio yhtälöstä *mg* = *kx* josta saadaan *k* = *mg*/*x*. Tälle kaavalle voidaan käyttää aiemmin esiteltyä virhekaavaa potensseille joten virheeksi saadaan:

$$\frac{\Delta k}{k} = \frac{\Delta m}{m} + \frac{\Delta x}{x}$$

Laskennassa kannattaa käyttää Exceliä, jossa kaavojen kopioinnilla saadaan virheet laskettua helposti.

Lasketaan tällä kaavalla kaikkien mittauspisteiden virheet ja valitaan niistä suurin tuloksemme virheeksi.

2. osion virhearvio suhteellisella menetelmällä

Yhtälön (4) virheeksi saadaan:

$$\frac{\Delta k}{k} = 4\frac{\Delta d}{d} + \frac{\Delta n}{n} + 3\frac{\Delta D}{D},$$

kun teräksen liukukerrointa *G* voidaan pitää vakiona (ks. taulukkokirjat).

Virhelausekkeesta huomaa heti, että *d*:n (jousilangan paksuus) ja *D*:n (kierteen keskihalkaisija) arvot täytyy mitata todella tarkasti.

HUOM: Kierteen keskihalkaisija on sisähalkaisijan ja ulkohalkaisijan puolivälissä.

Raportin sisältö

Palautettavasta raportista löytyvät seuraavat osiot:

- Lyhyt teoriatarkastelu työstä
- Työn suorittamisen pääkohdat
- Laskut (kahdella eri menetelmällä saadut jousivakiot virheineen)
- Suoran sovituksen kuvaaja (menetelmä 1)
- Johtopäätökset (mitä opittiin, menetelmien vertaaminen keskenään)
- Lähteet esille

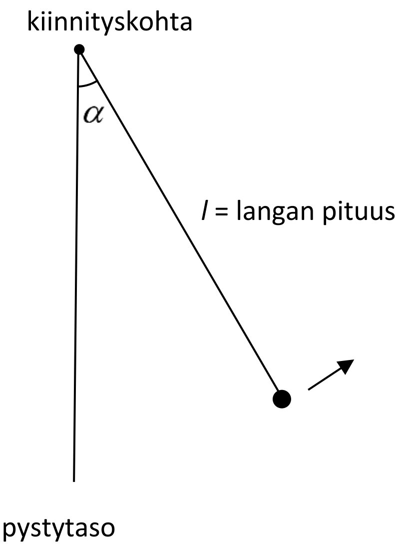
Muista aina käydä katsomassa Optimasta PDF:stä "Tietoa_raportin_rakenteesta" mitä lukuja raportissa tulee olla ja mitä sisältöä eri luvuissa.

Työ 4 - Putoamiskiihtyvyyden määritys

Opeteltavat taidot

Paraabelin muokkaaminen lineaariseksi suoran sovitusta varten. Tilastollisen menetelmän soveltumattomuus kyseiseen mittaustapahtumaan (mittaukset eivät ole identtisiä)

Teoria



Matemaattiseksi heiluriksi sanotaan sellaista heiluria, jossa pistemäinen kappale on ripustettu massattoman langan varaan (kuva 1). Langan yläpään ripustus on kiinteä ja heilahdukset tapahtuvat ripustuslangan määräämässä pystytasossa. Matemaattista heiluria ei ole olemassa mutta lähelle ideaalista päästään, kun ripustetaan esimerkiksi pieni lyijypallo kevyen langan varaan.

Kuten värähtelymekaniikkaa käsittelevissä oppikirjoissa osoitetaan, on tällöin värähtelijän värähdysaika eli edestakaiseen heilahdukseen kuluva aika t_0

$$t_0 = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}} \tag{1}$$

missä l on heilurin pituus ja g putoamiskiihtyvyys.

Mittaukset

Työssä on tarkoitus määrittää JYVÄSKYLÄN putoamiskiihtyvyys. Laitteistossa heilurin langan pituutta voidaan muuttaa. Työssä saadaan useita mittauspisteitä siten, että eri langan pituudelle mitataan oma heilahdusaika. Työ ei onnistu hyvin alle 0,6 m heilurin pituuksilla. Heilurin pituus mitataan kiinnityskohdan ja kuulan massakeskipisteen välistä. Lauseke (1) on todellisuudessa sarjakehitelmän approksimaatio s.e. heilahduskulma on oletettu pieneksi. Se tarkoittaa siis sitä, että työssä ei kannata käyttää yli kuuden asteen heilahduskulmia. Yhden heilahduksen (kuula palaa ”likimain” takaisin alkupisteeseensä) aikaa on hankala mitata, joten kannattaa mitata 20 heilahduksen aika jolloin yhden heilahduksen aika saadaan jakamalla useamman heilahduksen yhteisaika heilahdusten lukumäärällä.

Tulosten käsittely

Lauseke (1) saadaan muotoon:

$$4\pi^2 \cdot l = g \cdot t_0^2$$

Yhtälö muistuttaa nyt 2. asteen yhtälöä $y = ax^2 + b$. Laitetaan Exceliin (ks. edellisen työn ohje) y-sarakkeeseen arvot $4\pi^2 \cdot l$ ja x-sarekkeeseen arvot t_0^2 (yhden heilahduksen ajan neliöt). Tällä menettelyllä lausekkeesta ollaan muokattua suoran yhtälö: $y = kx$, missä y:tä vastaa $4\pi^2 \cdot l$, k:ta vastaa g ja x:ää vastaa t_0^2.

Jos mittaustulokset ovat seuraavat:

l	t0	4*PII^2*l	t0^2
0,6	1,559	23,68705056	2,430481
0,65	1,582	25,66097144	2,502724
0,8	1,75	31,58273408	3,0625
0,9	1,86	35,53057584	3,4596
1	1,955	39,4784176	3,822025
1,1	2,07	43,42625936	4,2849
1,2	2,162	47,37410113	4,674244
1,3	2,241	51,32194289	5,022081

saadaan suoran sovituksella tulokseksi

$$g = 10{,}3\,\frac{m}{s^2}.$$

Koska Excel ei anna virhearviota suoransovituksessa, niin teemme sen kuten edellisessä työssä. Potenssilain virhekaavalla saamme putoamiskiihtyvyyden suhteelliseksi virheeksi:

$$\frac{\Delta g}{g} = 2\frac{\Delta t_0}{t_0} + \frac{\Delta l}{l}$$

Lasketaan siis virhe kaikista mittauksista ja valitaan niistä suurin.

HUOM! Koska mittaukset tehdään eri langan pituuksilla, ei yksittäisistä mittauksista laskettujen g:n arvojen keskiarvo ole mielekäs tulos. Kyseessä ei ole toistomittaus, joka tarkoittaisi, että samasta asiasta tehdään useita samanlaisia mittauksia.

Raportin sisältö

Palautettavasta raportista löytyvät seuraavat osiot:

- Lyhyt teoriatarkastelu työstä (sis. laskennassa käytetyt kaavat)
- Työn suorittamisen pääkohdat
- Paraabelin sovituksen kuvaaja
- Johtopäätökset (mitä opittiin, tuloksen vertaaminen putoamiskiihtyvyyden vakiona pidettyyn arvoon)
- Lähteet esille

Muista aina käydä katsomassa Optimasta PDF:stä "Tietoa_raportin_rakenteesta" mitä lukuja raportissa tulee olla ja mitä sisältöä eri luvuissa.