Дискрет мат, Семинар №01

1. Дараах өгүүлбэрүүдийн аль нь хэллэг вэ?

1. Улаанбаатар бол Монгол улсын нийслэл.
2. $2 + 3 = 5$.
3. $5 + 7 = 10$.
4. $x + 2 = 11$.
5. Энэ асуултанд хариул.
6. Цаг хэд болж байна вэ?
7. Сарыг бяслагаар хийсэн.
8. $2^n \geq 100$.
9. Математик бол сонирхолтой хичээл.

Бодолт 1.

1. Монгол улсын үндсэн хуулийн 13.1-д зааснаар “Улаанбаатар хот бол Монгол улсын нийслэл юм” гэж заасан. Иймд үнэн хэллэг болж байна.
2. $2 + 3 = 5$ нь үнэн хэллэг.
3. $5 + 7 = 10$ нь худал хэллэг.
4. $x + 2 = 11$ нь хэллэгийн хэлбэр буюу предикат бөгөөд $x = 9$ үед үнэн утга бусад үед худал утга авна.
5. Тодорхой үнэн эсвэл худал утга оноох боломжгүй тул хэллэг биш.
6. Асуух өгүүлбэрүүд нь хэллэг болж чаддаггүй.
7. Худал тул хэллэг болно.
8. $2^n \geq 100$ нь n гэсэн нэг хувьсагчтай предикат.
9. Багшийн хувьд математик сонирхолтой хичээл, сурагчдын хувьд сонирхолгүй хичээл байж болно. Иймд шууд үнэн эсвэл худал утга оноох боломжгүй. Харин хувь хүнээс хамаарсан предикат гэж үзэж болно.

2. Дараах хэллэгүүдийн үгүйсгэлийг бич.

1. Бат, Болд хоёр найзууд.
2. Цэцэг өдөрт 100-аас олон зурвас илгээдэг.
3. 121 нь бүхэл тооны квадрат.
4. Хэрэв миний гэдэс өлсвөл би ууртай болдог.

Бодолт 1.

1. Бат, Болд хоёр найзууд биш.
2. “Цэцэг өдөрт 100-аас олонгүй зурвас илгээдэг” эсвэл “Цэцэг өдөрт 100-аас олон зурвас илгээдэггүй” байж болно. Харин “Цэцэг өдөрт 100-аас цөөн зурвас илгээдэг” гэвэл үгүйсгэл болж чадахгүй. Учир нь Цэцэг өдөрт яг 100 зурвас илгээдэг бол дээрх хоёр өгүүлбэр хоёулаа худал болоход хүрнэ. Гэтэл хэллэгийн үгүйсгэл нь хэллэгтэйгээ нэг ижил үнэний утгатай байж болохгүй.
3. 121 нь бүхэл тооны квадрат биш.
4. Би өлсөж байсан ч ууртай болдоггүй.

3. Хэрэв $p =$ “Би сугалаа худалдаж авсан.”, $q =$ “Би 100 сая төгрөг хожсон.” гэсэн хэллэг бол дараах хэллэгийг өгүүлбэр болгон бич.

1. $\neg p$

2. $p \vee q$
3. $p \to q$
4. $p \wedge q$
5. $p \leftrightarrow q$
6. $\neg p \leftrightarrow \neg q$
7. $\neg p \wedge \neg q$
8. $\neg p \vee (p \wedge q)$

Бодолт 1.

1. Би сугалаа худалдаж аваагүй.
2. Би сугалаа худалдаж авсан эсвэл 100 сая төгрөг хожсон.
3. Хэрвээ би сугалаа худалж авсан бол 100 сая төгрөг хожих байсан.
4. Би сугалаа ч худалдаж авсан, 100 сая төгрөг ч хожсон.
5. Хэрвээ би сугалаа худалж авсан л бол 100 сая төгрөг хожих байсан.
6. Хэрвээ би сугалаа худалдаж аваагүй л бол 100 сая төгрөг хожоогүй.
7. Би сугалаа ч сугалаа худалдаж аваагүй, 100 сая төгрөг ч хожоогүй.
8. Би сугалаа худалдаж аваагүй, эсвэл сугалаа сугалаад 100 сая хожсон. Түүнчлэн
$$\neg p \vee (p \wedge q) = (\neg p \vee p) \wedge (\neg p \vee q) = 1 \wedge (\neg p \vee q) = \neg p \vee q$$
тул “Би сугалаа худалдаж аваагүй эсвэл 100 сая төгрөг хожсон” өгүүлбэр дээрх өгүүлбэртэй ижил утгатай өгүүлбэр юм.

4. Хэрэв $p =$ “Гадаа 0°C-ээс хүйтэн байна.”, $q =$ “Гадаа цас орж байна.” гэсэн хэллэгүүд бол дараах хэллэгүүдийг p, q болон логик үйлдлүүд ашиглан бич.

1. Гадаа 0°C-ээс хүйтэн ба цас орж байна.
2. Гадаа 0°C-ээс хүйтэн боловч цас ороогүй байна.
3. Гадаа 0°C-ээс дулаан ба цас ороогүй байна.
4. Гадаа 0°C-ээс хүйтэн эсвэл цас орж байна.
5. Хэрэв гадаа 0°C-ээс хүйтэн байвал цас ордог.
6. Гадаа зөвхөн 0°C-ээс хүйтэн үед л цас ордог.

Бодолт 1.

1. $p \wedge q$
2. $p \wedge \neg q$
3. $\neg p \wedge \neg q$
4. $p \vee q$
5. $p \to q$
6. $q \to p = \neg p \to \neg q$

5. Хэрэв $p =$ “Оюутан X ханиад хүрчээ.”, $q =$ “Оюутан X шалгалтандаа ирээгүй.”,
$r =$ “Оюутан X хичээлдээ унав.” гэсэн предикатууд бол дараах предикатуудыг үгээр илэрхийл.

1. $p \to q$
2. $\neg q \leftrightarrow r$

3. $q \to \neg r$
4. $p \vee q \vee r$
5. $(p \to \neg r) \vee (q \to \neg r)$
6. $(p \wedge q) \vee (\neg q \wedge r)$

Бодолт 1.

1. Хэрэв оюутан X ханиад хүрсэн бол тэр хичээлдээ ирээгүй.
2. Хэрэв оюутан X шалгалтандаа ирсэн л бол тэр шалгалтандаа унасан.
3. Хэрэв оюутан X шалгалтандаа ирээгүй бол тэр шалгалтандаа унаагүй.
4. Оюутан X эсвэл ханиад хүрсэн, эсвэл шалгалтандаа ирээгүй, эсвэл шалгалтандаа унасан.
5. Хэрэв оюутан X ханиад хүрсэн бол шалгалтандаа унаагүй, эсвэл оюутан X шалгалтандаа ирээгүй бол шалгалтандаа унаагүй. Түүнчлэн

$$\begin{aligned}(p \to \neg r) \vee (q \to \neg r) &= (\neg p \vee \neg r) \vee (\neg q \vee \neg r)\\ &= \neg p \vee \neg q \vee \neg r\end{aligned}$$

   тул энэ дээрх өгүүлбэр нь “Оюутан X эсвэл ханиад хүрээгүй, эсвэл шалгалтандаа ирсэн, эсвэл шалгалтандаа унаагүй” гэсэн өгүүлбэртэй ижил утгатай юм.
6. Оюутан X эсвэл ханиад хүрээд шалгалтандаа ирээгүй, эсвэл шалгалтандаа ирээд унасан.

6. Дараах хэллэгүүдийн үнэн худлыг тогтоо.

1. Хэрэв $1 + 1 = 3$ бол ганц эвэрт оршин байдаг.
2. Хэрэв $1 + 1 = 3$ бол нохой нисэж чадна.
3. Хэрэв $1 + 1 = 2$ бол нохой нисэж чадна.
4. Хэрэв $2 + 2 = 4$ бол $1 + 1 = 3$.

Бодолт 1.

1. $1 + 1 = 3$ худал, ганц эвэрт оршин байдаг мөн худал. Иймд $0 \to 0 = 1$ буюу үнэн байна.
2. $1 + 1 = 3$ худал, нохой нисэж чадна мөн худал. Иймд $0 \to 0 = 1$ буюу үнэн байна.
3. $1 + 1 = 2$ үнэн, нохой нисэж чадна худал. Иймд $1 \to 0 = 0$ буюу худал өгүүлбэр болно.
4. $2 + 2 = 4$ үнэн, $1 + 1 = 3$ худал. $1 \to 0 = 0$ тул худал өгүүлбэр болно.

7. Дараах томьёоны үнэний утгын хүснэгтийг бич.

1. $p \wedge \neg p$
2. $p \vee \neg p$
3. $(p \vee \neg q) \to q$
4. $(p \vee q) \to (p \wedge q)$
5. $(p \to q) \leftrightarrow (\neg q \to \neg p)$
6. $(p \to q) \to (q \to p)$
7. $p \oplus (p \vee q)$
8. $(q \to \neg p) \leftrightarrow (p \leftrightarrow q)$
9. $(p \leftrightarrow q) \oplus (p \leftrightarrow \neg q)$

Бодолт 1.

1. $p \wedge \neg p$

p	$\neg p$	$p \wedge \neg p$
1	0	0
0	1	0

2. $p \vee \neg p$

p	$\neg p$	$p \vee \neg p$
1	0	1
0	1	1

3. $(p \vee \neg q) \to q$

p	q	$\neg q$	$p \vee \neg q$	$(p \vee \neg q) \to q$
1	1	0	1	1
1	0	1	1	0
0	1	0	0	1
0	0	1	1	0

4. $(p \vee q) \to (p \wedge q)$

p	q	$p \vee q$	$p \wedge q$	$(p \vee q) \to (p \wedge q)$
1	1	1	1	1
1	0	1	0	0
0	1	1	0	0
0	0	0	0	1

5. $(p \to q) \leftrightarrow (\neg q \to \neg p)$

p	q	$p \to q$	$\neg q$	$\neg p$	$\neg q \to \neg p$	$(p \to q) \leftrightarrow (\neg q \to \neg p)$
1	1	1	0	0	1	1
1	0	0	1	0	0	1
0	1	1	0	1	1	1
0	0	1	1	1	1	1

6. $(p \to q) \to (q \to p)$

p	q	$p \to q$	$q \to p$	$(p \to q) \to (q \to p)$
1	1	1	1	1
1	0	0	1	1
0	1	1	0	0
0	0	1	1	1

7. $p \oplus (p \vee q)$

p	q	$p \vee q$	$p \oplus (p \vee q)$
1	1	1	0
1	0	1	0
0	1	1	1
0	0	0	0

8. $(q \to \neg p) \leftrightarrow (p \leftrightarrow q)$

p	q	$\neg p$	$q \to \neg p$	$p \leftrightarrow q$	$(q \to \neg p) \leftrightarrow (p \leftrightarrow q)$
1	1	0	0	1	0
1	0	0	1	0	0
0	1	1	1	0	0
0	0	1	1	1	1

9. $(p \leftrightarrow q) \oplus (p \leftrightarrow \neg q)$

p	q	$\neg q$	$p \leftrightarrow q$	$p \leftrightarrow \neg q$	$(p \leftrightarrow q) \oplus (p \leftrightarrow \neg q)$
1	1	0	1	0	1
1	0	1	0	1	1
0	1	0	0	1	1
0	0	1	1	0	1

8. Дараах томьёоны үнэний утгын хүснэгтийг бич.

1. $p \to (\neg q \vee r)$
2. $\neg p \to (q \to r)$
3. $(p \to q) \vee (\neg p \to r)$
4. $(p \to q) \wedge (\neg p \to r)$
5. $(p \leftrightarrow q) \vee (\neg q \leftrightarrow r)$
6. $(\neg p \leftrightarrow \neg q) \leftrightarrow (q \leftrightarrow r)$

Бодолт 1.

1. $p \to (\neg q \vee r)$

p	q	r	$\neg q$	$\neg q \vee r$	$p \to (\neg q \vee r)$
1	1	1	0	1	1
1	1	0	0	0	0
1	0	1	1	1	1
1	0	0	1	1	1
0	1	1	0	1	1
0	1	0	0	0	1
0	0	1	1	1	1
0	0	0	1	1	1

2. $\neg p \to (q \to r)$

p	q	r	$\neg p$	$q \to r$	$\neg p \to (q \to r)$
1	1	1	0	1	1
1	1	0	0	0	1
1	0	1	0	1	1
1	0	0	0	1	1
0	1	1	1	1	1
0	1	0	1	0	0
0	0	1	1	1	1
0	0	0	1	1	1

3. $(p \to q) \vee (\neg p \to r)$

p	q	r	$\neg p$	$p \to q$	$\neg p \to r$	$(p \to q) \vee (\neg p \to r)$
1	1	1	0	1	1	1
1	1	0	0	1	1	1
1	0	1	0	0	1	1
1	0	0	0	0	1	1
0	1	1	1	1	1	1
0	1	0	1	1	0	1
0	0	1	1	1	1	1
0	0	0	1	1	0	1

4. $(p \to q) \wedge (\neg p \to r)$

p	q	r	$\neg p$	$p \to q$	$\neg p \to r$	$(p \to q) \wedge (\neg p \to r)$
1	1	1	0	1	1	1
1	1	0	0	1	1	1
1	0	1	0	0	1	0
1	0	0	0	0	1	0
0	1	1	1	1	1	1
0	1	0	1	1	0	0
0	0	1	1	1	1	1
0	0	0	1	1	0	0

5. $(p \leftrightarrow q) \vee (\neg q \leftrightarrow r)$

p	q	r	$\neg q$	$p \leftrightarrow q$	$\neg q \leftrightarrow r$	$(p \leftrightarrow q) \vee (\neg q \leftrightarrow r)$
1	1	1	0	1	0	1
1	1	0	0	1	1	1
1	0	1	1	0	1	1
1	0	0	1	0	0	0
0	1	1	0	0	0	0
0	1	0	0	0	1	1
0	0	1	1	1	1	1
0	0	0	1	1	0	1

6. $(\neg p \leftrightarrow \neg q) \leftrightarrow (q \leftrightarrow r)$

p	q	r	$\neg p$	$\neg q$	$\neg p \leftrightarrow \neg q$	$q \leftrightarrow r$	$(\neg p \leftrightarrow \neg q) \leftrightarrow (q \leftrightarrow r)$
1	1	1	0	0	1	1	1
1	1	0	0	0	1	0	0
1	0	1	0	1	0	0	1
1	0	0	0	1	0	1	0
0	1	1	1	0	0	1	0
0	1	0	1	0	0	0	1
0	0	1	1	1	1	0	0
0	0	0	1	1	1	1	1

9. Усан сэлэлтийн тэмцээний өмнө А, Б, В, Г дөрөв сурвалжлага өгчээ. А нь “Би түрүүлнэ” гэв. “Би сүүлийн байрыг эзлэхгүй” гэж Б хэлэв. В нь “Би эхэнд ч орохгүй, эцэст ч орохгүй ” гэв. Г нь “Би сүүлийн байранд орно” гэжээ. Тэмцээний дараа зөвхөн нэг нь худал хэлж бусад нь үнэн хэлсэн нь тодорхой болжээ. Хэн худал хэлсэн бэ?

Бодолт 1.

X_y нь X нь y дүгээр байрт орсон гэсэн өгүүлбэр байг. Тэгвэл тамирчдын хэлсэн өгүүлбэрүүдийг

1. A_1
2. $\overline{Б_4} = Б_1 \vee Б_2 \vee Б_3$
3. $\overline{В_1}\,\overline{В_4} = В_2 \vee В_3$
4. $Г_4$

эдгээрийн 1 нь худал бусад нь үнэн гэвэл эсвэл $\overline{A_1}\,\overline{Б_4}\,\overline{В_1}\,\overline{В_4}Г_4$, эсвэл $A_1Б_4\overline{В_1}\,\overline{В_4}Г_4$, эсвэл $A_1\overline{Б_4}\,\overline{В_2}\,\overline{В_3}Г_4$, эсвэл $A_1\overline{Б_4}\,\overline{В_1}\,\overline{В_4}\,\overline{Г_4}$ байна. Иймд

$$\overline{A_1}\,\overline{Б_4}\,\overline{В_1}\,\overline{В_4}Г_4 \vee A_1Б_4\overline{В_1}\,\overline{В_4}Г_4 \vee A_1\overline{Б_4}\,\overline{В_2}\,\overline{В_3}Г_4 \vee A_1\overline{Б_4}\,\overline{В_1}\,\overline{В_4}\,\overline{Г_4} = 1$$

байна. Гэтэл $A_1Б_4\overline{В_1}\,\overline{В_4}Г_4$ бол 2 хүн 4-рт байрт орсон, $A_1\overline{Б_4}\,\overline{В_2}\,\overline{В_3}Г_4$ бол $В$ аль ч байрт орох боломжгүй, $A_1\overline{Б_4}\,\overline{В_1}\,\overline{В_4}\,\overline{Г_4}$ бол хэн нь ч 4-р байрт орох боломжгүй болно. Иймд зөвхөн эхний өгүүлбэр үнэн бусад нь худал болно. Иймд A хүн худал хэлжээ.

10. Алтан зоос хийсэн хайрцагуудын нэгэнд дан хуурамч зоос, бусад хайрцагуудад жинхэнэ зоос байв. Хуурамч зоос жинхэнэ зооснос 1 граммаар хөнгөн ба жинхэнэ зоос 10 грамм жинтэй байсан бол зөвхөн ганц жинлэлтээр хуурамч зоостой хайрцгийг олж болох уу?

Бодолт 1.

Хайрцгуудаа $1, 2, \ldots, n$ тоогоор дугаарлаад тус бүрээс дугаартай нь тэнцүү тоон зоос авч жинлээд жин нь N байсан гэе. Хэрвээ бүх зоосыг жинхэнэ гэж үзвэл нийт жин нь

$$M = (1 + 2 + \cdots + n) \cdot 10 = \frac{n(n+1)}{2} \cdot 10 = 5n(n+1)$$

байх ёстой ба k ширхэг хуурамч зоос байсан гэвэл $N = M - k$ байх тул $k = M - N$ байна. Иймд k-р хайрцагт хуурамч зооснууд байна.

11. Математикийн улсын олимпиадад оролцохоор 5 өөр аймгаас ирсэн 5 сурагчаас: "Хэн нь хаанаас ирсэн бэ?"гэсэн асуултад дараахь хариулт авчээ.

Амар: “Би Архангайгаас, Дорж Говь-Алтайгаас”,

Ванчиг: “Би Архангайгаас, Сэнгээ Хэнтийгээс”,

Сэнгээ: “Би Архангайгаас, Дорж Булганаас”,

Дорж: “Би Говь-Алтайгаас, Энх Сэлэнгээс”,

Энх: “Би Сэлэнгээс, Амар Булганаас ирсэн” гэжээ. Хэрэв хүн бүрийн хариултын нэг өгүүлбэр нь үнэн, нөгөө нь худал бол сурагчид хаа хаанаас ирсэн бэ?

Бодолт 1.

Хариулт бүрийг хэллэгийн алгебрын хэлэнд шилжүүлье. Дорж Говь-Алтайгаас ирсэн гэхийг $Д_Г$ гэж тэмдэглэвэл Амарын хариулт $А_АД_Г$ болно. Тэгвэл бодлогын нөхцлөөс

$$\begin{cases} А_А \vee Д_Г = 1 \\ В_А \vee С_Х = 1 \\ С_А \vee Д_Б = 1 \\ Д_Г \vee Э_С = 1 \\ Э_С \vee А_Б = 1 \end{cases}$$

болох нь гарна. 2 ба 3-р тэгшитгэлийг үржүүлбэл $В_АС_А \vee С_ХС_А \vee В_АД_Б \vee С_ХД_Б = 1$ болно. $В_АС_А = 0 = С_ХС_А$ байх нь илэрхий тул $1 = В_АД_Б \vee С_ХД_Б = Д_Б(В_А \vee С_Х)$ боллоо. Эндээс $Д_Б = 1$ болно. Иймд 1, 2, 5-р тэгшитгэлээс $А_А = 1,\ С_Х = 1,\ Э_С = 1$ гэж гарах тул эцэст нь $В_Г$ болно.

12. Нэгэн дээрмийн хэрэг гарсан газар дээр очсон 3 сэргийлэгч дараах зүйлийг тогтоож ахлагчдаа өгчээ.

I. “Хэрэв Пүрэв согтуу байсан бол эсвэл Энх дээрэм хийсэн, эсвэл Пүрэв худал хэлсэн”.

II. “Эсвэл Энх дээрэм хийсэн, эсвэл Пүрэв согтуу биш байсан ба дээрэм шөнө дундаас хойш гарсан”.

III. “Хэрэв дээрэм шөнө дундаас хойш гарсан бол эсвэл Энх дээрэм хийсэн, эсвэл Пүрэв худал хэлсэн” гэжээ. Пүрэв эрүүл үедээ худал хэлэхгүй гэдгийг мэдэж байсан ахлагч дээрх мэдүүлгүүдээс үндэслэн хэн дээрэм хийснийг тогтоожээ. Хэн дээрэм хийсэн бэ?

Бодолт 1.

$A =$ “Пүрэв согтуу байсан”, $B =$ “Энх дээрэм хийсэн”, $C =$“Пүрэв худал хэлсэн”, $D =$ “Дээрэм шөнө дундаас хойш гарсан” гэж тэмдэглэвэл бодлогын нөхцөлийг

$$\begin{cases} A \to (B \vee C) = 1 \\ B \vee (\overline{A}D) = 1 \\ D \to (B \vee C) = 1 \end{cases}$$

гэж бичээд энэ гурван томъёоны конъюнкцийг авч хялбарчилъя.

$$\big(A \to (B \vee C)\big)\big(B \vee (\overline{A}D)\big)\big(D \to (B \vee C)\big) = 1 \quad (1)$$

Энд импликацыг дизъюнкцээр сольсоны дараа хаалт задлах чанарыг дараалан хэрэглэвэл

$$\begin{aligned} 1 &= (\overline{A} \vee B \vee C)(B \vee (\overline{A}D))(\overline{D} \vee B \vee C) && \leftarrow X \to Y = \overline{X} \vee Y \\ &= (B \vee C \vee (\overline{A}\,\overline{D}))(B \vee (\overline{A}D)) && \leftarrow (X \vee Y) \wedge (X \vee Z) = X \vee (Y \wedge Z) \\ &= B \vee ((\overline{A}D)(C \vee (\overline{A}\,\overline{D}))) \\ &= B \vee (\overline{A}DC) \vee (D\overline{A}\,\overline{D}) \\ &= B \vee (\overline{A}DC) \vee 0 = B \vee (\overline{A}DC) \end{aligned}$$

Эндээс эсвэл $B = 1$ буюу Энх дээрэм хийсэн, эсвэл $\overline{A}DC = 1$ буюу Пүрэв согтуу биш байсан ба дээрэм шөнө дундаас хойш гарч Пүрэв худал хэлсэн гэж гарч байна. Гэтэл ахлагч Пүрэв эрүүл үедээ худлаа хэлэхгүй, ө.х $\overline{A} \to \overline{C} = A \vee \overline{C} = 1$ буюу $\overline{A}C = 0$ гэдгийг мэдэж байснаас шууд $\overline{A}DC = \overline{A}CD = 0D = 0$ гэж гарч байна. Иймд $B = 1$ буюу Энх дээрэм хийжээ.

13. Туйлын экспедицэд явахаар санал өгсөн A, B, C, D, E, F, G, H нараас биологич, ус судлагч, цаг уурч, холбоочин механик, эмч гэсэн 6 мэргэжилтнийг сонгох ёстой байв. E, G нар биологичоор; B, F нар ус судлагчаар; F, G нар цаг уурчаар; C, D нар холбоочноор; C, H нар механикчаар; A, D нар эмчээр ажиллаж чадах байв. Хэдийгээр эдний зарим нь хоёр мэргэжилтэй ч гэсэн экспедицид хүн бүр зөвхөн нэг л үүргийг гүйцэтгэж чадах байв. Гэтэл B-гүйгээр F явж чадахгүй, H ба C-ийн аль нэг нь явахгүй бол D явж чадахгүй байсан ба G-тэй хамт C, мөн B-тэй хамт A явж чадахгүй байсан бол хэн ямар мэргэжлээр экспедицид оролцвол зохих вэ?

Бодолт 1.

$X =$ "X экспедицид явна", $X \in \{A, B, \ldots, H\}$ гэе. Адил мэргэжлийн хоёр хүнээс ядаж нэгийг авах ёстой тул

$$E \vee G = 1, \quad B \vee F = 1, \quad F \vee G = 1$$
$$C \vee D = 1, \quad C \vee H = 1, \quad A \vee D = 1$$

болно. Бодлогын нөхцөлд

$$\overline{B} \to \overline{F} = 1, \quad \overline{H}\,\overline{C} \to \overline{D} = 1, \quad G \to \overline{C} = 1, \quad B \to \overline{A} = 1$$

гэж өгсөн байгаа. Энэ 10 томьёоны конъюнкцийг авч чанар 7-г анхаарвал

$$(B \vee \overline{F})((HC) \vee \overline{D})(\overline{G} \vee \overline{C})(\overline{B} \vee \overline{A})(E \vee G)(B \vee F)(F \vee G)(C \vee D)(C \vee H)(A \vee D) = 1 \qquad (1)$$

Эндээс 1,6 ба 4-р хаалтыг $(B \vee \overline{F})(B \vee F)(\overline{B} \vee \overline{A}) = (B \vee (\overline{F}F))(\overline{B} \vee \overline{A}) = (B\overline{B}) \vee (B\overline{A}) = B\overline{A}$ гэж хялбарчилсны дараа 10 ба 2-р хаалтаар үржүүлбэл

$$B\overline{A}(A \vee D)((HC) \vee \overline{D}) = B\overline{A}D((HC) \vee \overline{D}) = B\overline{A}DHC$$

болно. Иймд (1) нь

$$\begin{aligned}1 &= B\overline{A}DHC(\overline{G} \vee \overline{C})(E \vee G)(F \vee G)(C \vee D)(C \vee H)\\ &= B\overline{A}DHC\overline{G}(G \vee (EF))(C \vee (DH))\\ &= B\overline{A}DHCEF(C \vee DH) = B\overline{A}DHC\overline{G}EF \vee B\overline{A}DHC\overline{G}EF\\ &= B\overline{A}DHC\overline{G}EF\end{aligned}$$

буюу экспедицид A, G-ээс бусдыг нь авна гэж гарлаа. Нэгэнт A яваагүй учраас D эмчээр, G яваагүй учраас E биологичоор ба F цаг уурчаар, иймд B ус судлагчаар явна.

14. Байг 3 бууджээ. $A_k =$ "Байг k-р буудалтаар онов" гэсэн хэллэг байг. Дараах хэллэгүүдийг үгээр тайлбарла.

1. $A_1 \vee A_2 \vee A_3$,
2. $A_1 A_2 A_3$,
3. $A_1\overline{A}_2\overline{A}_3 \vee \overline{A}_1 A_2 \overline{A}_3 \vee \overline{A}_1\overline{A}_2 A_3$,
4. $A_1 A_2 \vee \overline{A}_1 A_2 A_3 \vee A_1 \overline{A}_2 A_3$

Бодолт 1.

1. Байг ядаж нэг удаа онов.
2. Байг бүх буудалтаар онов.
3. Байг яг нэг удаа онов.
4. $A_1 A_2 = A_1 A_2 A_3 \vee A_1 A_2 \overline{A_3}$ тул

   $$A_1 A_2 \vee \overline{A}_1 A_2 A_3 \vee A_1 \overline{A}_2 A_3 = A_1 A_2 A_3 \vee \overline{A}_1 A_2 A_3 \vee (A_1 \overline{A}_2 A_3 \vee A_1 A_2 \overline{A_3})$$

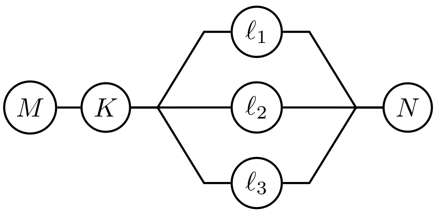
   буюу байг яг 3 удаа онов эсвэл баг яг 2 удаа онов гэсэн хэллэгүүдийн дизъюнкц болно. Энэ нь байг ядаж 2 удаа онов гэсэн хэллэгтэй ижил юм.

15. M, N цэгийн хоорондох цахилгаан хэлхээ зураг дээрх байдалтай байв.
$A =$ "k хэлхээний элемент ажиллахгүй байна", $B_i =$ "ℓ_i хэлхээний элемент ажиллахгүй байна", $i = 1, 2, 3$ гэсэн хэллэгүүд байг.

1. $A \vee (B_1 B_2 B_3)$ үнэн

2. $\overline{A}(\overline{B}_1 \vee \overline{B}_2 \vee \overline{B}_3)$ үнэн

бол хэлхээ битүү байх уу? Энэ хэллэгүүдийн нэг нь нөгөөгийнхөө үгүйсгэл болж чадах уу?



Бодолт 1.

1. $A \vee (B_1B_2B_3)$ үнэн бол хэлхээ битүү биш байна. Өөрөөр хэлбэл ажиллаж байгаа хэлхээний элементүүдээр дамжин M, N холбогдохгүй.

2. $\overline{A}(\overline{B}_1 \vee \overline{B}_2 \vee \overline{B}_3)$ үнэн бол хэлхээ битүү байна. Энэ тохиолдолд ажиллаж байгаа хэлхээний элементүүдээр дамжин M, N холбогдох боломжтой юм.

16. $(\overline{X \vee A}) \vee (\overline{X \vee \overline{A}}) = B$ бол X-г ол.

Бодолт 1.

$$\begin{aligned}B &= (\overline{X \vee A}) \vee (\overline{X \vee \overline{A}})\\ &= (\overline{X} \wedge \overline{A}) \vee (\overline{X} \wedge \overline{\overline{A}})\\ &= (\overline{X} \wedge \overline{A}) \vee (\overline{X} \wedge A)\\ &= \overline{X} \wedge (\overline{A} \vee A)\\ &= \overline{X} \wedge 1 = \overline{X}\end{aligned}$$

Эндээс $X = \overline{B}$ болов.

17. $n > 3$ үед $A_n = A_{n-1}(A_{n-2} \vee A_{n-3})$ рекуррент харьцаагаар $\{A_n\}$ хэллэгийн дараалал өгчээ. A_1, A_2, A_3 нь өгөгдсөн хэллэгүүд бөгөөд A_1 ба A_3 үнэн, A_2 нь худал бол A_n үнэн үү? A_n-ийг A_1, A_2, A_3-аар илэрхийл.

Бодолт 1.

$$A_4 = A_3(A_2 \vee A_1) = 1(0 \vee 1) = 1$$
$$A_5 = A_4(A_3 \vee A_2) = 1(1 \vee 0) = 1$$
$$A_6 = A_5(A_4 \vee A_3) = 1(1 \vee 1) = 1$$

ба өмнөх 3 гишүүн нь үнэн утгатай бол дараагийн гишүүн мөн үнэн утгатай байх нь ойлгомжтой юм. Иймд $n > 3$ үед $a_n = 1$ байна.

18. Наадмаар Алимаа, Цэцгээ, Навчаа гурав нэг нь улаан, нөгөө хоёр нь ногоон ба цэнхэр өнгийн дээлтэй явжээ. Алимаа улаан дээлтэй, Цэцгээгийн дээл улаан биш, Навчаагийн дээл цэнхэр өнгөтэй байгаагүй гэсэн өгүүлбэрүүдийн нэг нь үнэн, нөгөө хоёр нь худал бол хэн нь ямар дээлтэй явсан бэ?

Бодолт 1.

$_y$, $_{\overline{y}}$, $\cdot$ гэсэн 3 өгүүлбэрийн нэг нь үнэн, нөгөө хоёр нь худал гэдгийг хэрхэн бичих вэ?

$_y$, $_{\overline{y}}$, $\cdot$ өгүүлбэрүүдийн 1 нь үнэн, 2 нь худал тул

$$_{y\,y} \vee _{\overline{y}\,\overline{y}} \vee _{\overline{y}\,y\,\cdot} = 1$$

байна. Зөвхөн нэг хүн улаан дээлтэй тул $_{y\,y} = 0$ ба $_{\overline{y}\,\overline{y}} = 0$ байна. Иймд

$$_{\overline{y}\,y\,\cdot} = 1$$

буюу Цэцгээ улаан дээлтэй болов. Түүнчлэн Навчаагийн дээл цэнхэр биш тул ногоон, харин Алимаагийн дээл цэнхэр байжээ.

19. Амар, Ванчиг, Сэнгээ нарын бичгийн ажлыг багш шалгаад тэд нарт “Та нарын ажлыг шалгасан, харин гурвуул өөр дүн (3,4,5) авсан. Гэхдээ Сэнгээ 5 аваагүй, Ванчиг 4 аваагүй, харин Амар 4 авсан байх” гэжээ. Сүүлд үзэхэд багш нь нэг сурагчийн дүнг үнэн, хоёрыг нь буруу хэлсэн байжээ. Сурагч бүр ямар дүн авсан бэ?

Бодолт 1.

${}_{\overline{5}}$, ${}_{\overline{4}}$, ${}_4$ хэллэгүүдийн нэг нь үнэн, нөгөө хоёр нь худал тул

$${}_{\overline{5}}\,{}_4\,{}_{\overline{4}} \vee {}_5\,{}_{\overline{4}}\,{}_{\overline{4}} \vee {}_{544} = 1$$

болно. ${}_5\,{}_{\overline{4}}\,{}_{\overline{4}} = 1$ бол 4 дүнтэй сурагч байгаагүй, ${}_{544} = 1$ бол 4 дүнтэй сурагч хоёр болоход хүрэх тул зөвхөн ${}_{\overline{5}}\,{}_4\,{}_{\overline{4}} = 1$ байх боломжтой. Сурагчид өөр өөр дүн авсан тул ${}_4$, ${}_3$, ${}_5$ байжээ.

20. Спортын уралдаанд 1, 2, 3, 4 гэсэн хувийн дугаартай тамирчид оролцож эхний дөрвөн байр эзэлжээ. Эдний эзэлсэн байр хувийн дугаартай нь тохироогүй бөгөөд IY байр эзэлсэн тамирчны дугаар нь 2 дугаартай тамирчны эзэлсэн байрын дугаартай адил дугаар бүхий тамирчны эзэлсэн байрын дугаартай ижил, 3 дугаартай тамирчин I байранд ороогүй гэвэл тамирчид ямар байр эзлэв.

Бодолт 1.

X_Y нь X тамирчин Y байрт орсон гэсэн хэллэг гэе. Бодлогын өгүүлбэрийг дээрх тэмдэглэгээг ашиглан бичвэл

$$X_4 2_Y Y_X (3_2 \vee 3_4) = X_4 2_Y Y_X 3_2 \vee X_4 2_Y Y_X 3_4 = 1$$

болно. Хэрэв $X_4 2_Y Y_X 3_2 = 1$ бол

$$1_4 2_Y Y_1 3_2 \vee 2_4 2_Y Y_2 3_2 \vee 3_4 2_Y Y_3 3_2 = 1$$

ба $1_4 2_Y Y_1 3_2$-ийн $Y \neq 1, 2$ ба $Y = 3$ бол $3_1 3_2 = 0$, $Y = 4$ бол $1_4 2_4$ тул үнэн байх боломжгүй. $2_4 2_Y Y_2 3_2$-ийн хувьд нэг талаас $2_4 2_Y$ тул $Y = 4$, нөгөө талаас $Y_2 3_2$ тул $Y = 3$ болж зөрчил. $3_4 2_Y Y_3 3_2$-ийн хувьд $3_4 3_2$ тул худал юм. Иймд $X_4 2_Y Y_X 3_2 = 0$ байна. Иймд

$$X_4 2_Y Y_X 3_4 = 1$$

байна. $X_4 3_4 = 1 \Rightarrow X = 3$, $3_4 2_Y Y_3 = 1$ байна. $Y \neq 2, 3$ тул $3_4 2_Y$ тул $Y \neq 4$. Иймд $Y = 1$ болно. Иймд $3_4 2_1 1_3 4_2 = 1$ буюу 1 дугаартай тамирчин 3-р байрт, 2 дугаартай тамирчин 1-р байрт, 3 дугаартай тамирчин 4-р байрт, 4 дугаартай тамирчин 2-р байрт оржээ.

21. Хичээлийн дараа Амар, Ванчиг, Дорж, Сэнгээ нарт 7, 8, 9, 10-р ангиудыг цэвэрлэх ажил оногджээ. Жижүүр ангийн шалгалтаар 10-р ангийг муу цэвэрлэсэн нь илрэв. Дээрх сурагчдаас асуухад:

Амар: “Би 7-р ангийг, Дорж 8-р ангийг”,

Ванчиг: “Би 9-р ангийг, Амар 8-р ангийг”,

Сэнгээ: “Би 8-р ангийг, Ванчиг 10-р ангийг цэвэрлэсэн”

гэж хариулцгаав. Хэрэв сурагчдын хариулт бүрийн нэг нь үнэн, нөгөө нь худал байсан бол хэн нь хэддүгээр ангийг цэвэрлэсэн бэ?

Бодолт 1.

Сурагч бүрийн нэг хариулт нь зөв тул

$$A_7 \vee Д_8 = 1, \quad B_9 \vee A_8 = 1, \quad C_8 \vee B_{10} = 1$$

байна. Иймд

$$(A_7 \vee Д_8)(B_9 \vee A_8) = A_7 B_9 \vee A_7 A_8 \vee Д_8 B_9 \vee Д_8 A_8 = 1$$

$A_7 A_8 = Д_8 A_8 = 0$ тул

$$A_7 B_9 \vee Д_8 B_9 = (A_7 \vee Д_8) B_9 = 1$$

болно. Иймд Ванчиг 9-р ангийг цэвэрлэсэн байна. Иймд $B_{10} = 0$ тул $C_8 = 1$, $Д_8 = 0$ тул $A_7 = 1$ болох ба үлдсэн ангийг Дорж цэвэрлэсэн буюу $Д_{10} = 1$ болов.

22. Үйлдвэрийн нэг цехийн A, B, C, D, E, F зургаан ажилчдын хоёр нь сарынхаа төлөвлөгөөг биелүүлжээ. Аль хоёр нь төлөвлөгөө биелүүлсэн бэ? гэсэн асуултанд 5 хариулт өгчээ. Төлөвлөгөө: а) A, C, б) B, F, в) F, A, г) B, E, д) D, A хоёр биелүүлсэн гэв. Эдгээр хариултын дөрөвт төлөвлөгөө биелүүлсэн хоёр хүний нэгийг үнэн ба нэгд хоёуланг буруу хэлсэн бол аль хоёр нь төлөвлөгөө биелүүлсэн бэ?

Бодолт 1.

Хоёуланг нь буруу хариулсан байх боломжоор нь 5 тохиолдол салгаж бод.

1. $\overline{A}\,\overline{C} = 1$ ба $B \vee F = 1$, $F \vee A = 1$, $B \vee E = 1$, $D \vee A = 1$ байг. Тэгвэл $F = 1$, $D = 1$, $B = 0$, $E = 1$ буюу 3 хүн төлөвлөгөө биелүүлсэн болоход хүрнэ.

2. $\overline{B}\,\overline{F} = 1$ ба $A \vee C = 1$, $F \vee A = 1$, $B \vee E = 1$, $D \vee A = 1$ байг. Тэгвэл $A = 1$, $E = 1$ ба $C = D = 0$ болно. Өөрөөр хэлбэл A, E ажилчид төлөвлөгөөгөө биелүүлжээ.

3. $\overline{F}\,\overline{A} = 1$ ба $A \vee C = 1$, $B \vee F = 1$, $B \vee E = 1$, $D \vee A = 1$ байг. Тэгвэл $C = 1$, $B = 1$, $D = 1$ буюу 3 хүн төлөвлөгөө биелүүлсэн болоход хүрнэ.

4. $\overline{B}\,\overline{E} = 1$ ба $A \vee C = 1$, $B \vee F = 1$, $F \vee A = 1$, $D \vee A = 1$ байг. Тэгвэл $F = 1$ ба $F\overline{A} \vee \overline{F}A = 1$ тул $A = 0$ болно. Иймд $C = D = 1$ болж зөрчил үүсч байна.

5. $\overline{D}\,\overline{A} = 1$ ба $A \vee C = 1$, $B \vee F = 1$, $F \vee A = 1$, $B \vee E = 1$ байг. Тэгвэл $C = 1$, $F = 1$ ба $B \vee E = 1$ тул дор хаяж 3 хүн төлөвлөгөө биелүүлсэн болно.

Иймд зөвхөн 2-р тохиолдол л боломжтой тул A, E ажилчид төлөвлөгөөгөө биелүүлжээ.

23. 5 сурагчдын (A, B, C, D, E) хэн нь шатар тоглодог вэ? гэсэн асуултанд:

1) A тоглодог бол B тоглодог,

2) D, E хоёрын ядаж нэг нь тоглодог,

3) B, C хоёрын зөвхөн нэг нь тоглодог,

4) C, D хоёул тоглодог эсвэл хоёул тоглодоггүй,

5) E тоглодог бол A, D хоёр хоёулаа тоглодог гэжээ. Хэн шатар тоглодог вэ?

Бодолт 1.

$$\begin{cases} A \to B = 1 \\ D \vee E = 1 \\ B\,\overline{C} \vee \overline{B}\,C = 1 \\ CD \vee \overline{C}\,\overline{D} = 1 \\ E \to AD = 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} A \to B = 1 \\ D \vee E = 1 \\ B\,\overline{C} \vee \overline{B}\,C = 1 \\ CD \vee \overline{C}\,\overline{D} = 1 \\ E \to AD = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \overline{A} \vee B = 1 \\ D \vee E = 1 \\ B\,\overline{C} \vee \overline{B}\,C = 1 \\ CD \vee \overline{C}\,\overline{D} = 1 \\ \overline{E} \vee AD = 1 \end{cases}$$

2 ба 5-р тэгшитгэлийг үржүүлбэл

$$(D \vee E)(\overline{E} \vee AD) = D\overline{E} \vee AD \vee E\overline{E} \vee ADE = 1$$

болох ба $E\overline{E} = 0$ тул

$$D\overline{E} \vee AD \vee ADE = D(\overline{E} \vee A \vee AD) = 1$$

болно. Иймд $D = 1$ болно. Эндээс $CD \vee \overline{C}\,\overline{D} = 1$ тул $C = 1$, $B\,\overline{C} \vee \overline{B}\,C = 1$ тул $B = 0$, $\overline{A} \vee B = 1$ тул $A = 0$, $\overline{E} \vee AD = \overline{E} \vee 0 = 1$ тул $E = 0$ байна.

24. Аялагч M, N хотын аль нэгд нь иржээ гэдгийг мэдэвч чухам алинд нь байгаагаа мэдэхгүй байв. Тэр зөвхөн "тийм" эсвэл "үгүй" гэсэн хариулт авах ганц асуулт тавих ба хариулт нь ч мөн үнэн эсвэл худал байж болох байв. Аялагч аль хотод ирснээ мэдэхийн тулд юу гэж асуувал зохих вэ?

Бодолт 1.

Аялагч "Би M хотод байгаа ба надад үнэнийг хэлж байна эсвэл би N хотод байгаа ба надад худал хэлж байна гэдэг нь үнэн үү?" гэж асууна. Үнэхээр $A \equiv$ "Аялагч M хотод байна.", $B \equiv$ "Надад үнэнийг хэлж байна." гэвэл

$$A\,B \vee \overline{A}\,\overline{B}$$

хэллэг үнэн үү гэж асуух юм. Хэрвээ "тийм" гэж хариулбал хариулт үнэн эсвэл худал эсэхээс үл хамааран аялагч M хотод байх ба "үгүй" гэсэн хариулт авсан тохиолдолд хариулт үнэн эсвэл худал эсэхээс үл хамааран аялагч N хотод байна. Үнэндээ "тийм" гэсэн хариулт авсан бөгөөд хариулт нь үнэн бол

$$A\,B \vee \overline{A}\,\overline{B} = 1$$

ба $B = 1$ тул $A = 1$ болно. Харин хариулт нь худал бол

$$A\,B \vee \overline{A}\,\overline{B} = 0$$

ба $\overline{B} = 1$ тул $\overline{A} = 0$ буюу $A = 1$ болно.

Хэрэв "үгүй" гэсэн хариулт авсан бөгөөд хариулт нь үнэн бол

$$A\,B \vee \overline{A}\,\overline{B} = 0$$

ба $B = 1$ тул $A = 0$ болно. Харин хариулт нь худал бол

$$A\,B \vee \overline{A}\,\overline{B} = 1$$

ба $\overline{B} = 1$ тул $\overline{A} = 1$ буюу $A = 0$ болно.