

Дискрет мат, Семинар №07

1. Дараах рекурент харьцаагаар өгөгдсөн дарааллын ерөнхий гишүүний томъёог ол.

1. $a_n = a_{n-1} + 6a_{n-2}$, $a_0 = 3$, $a_1 = 6$.
2. $a_n = 7a_{n-1} - 10a_{n-2}$, $a_0 = 2$, $a_1 = 1$.
3. $a_n = 6a_{n-1} - 8a_{n-2}$, $a_0 = 4$, $a_1 = 10$.
4. $a_n = 2a_{n-1} - a_{n-2} + 2^n$, $a_0 = 4$, $a_1 = 1$.
5. $a_n = -6a_{n-1} - 9a_{n-2}$, $a_0 = 3$, $a_1 = -3$.
6. $a_n = -4a_{n-1} + 5a_{n-2} + 2^n$, $a_0 = 2$, $a_1 = 8$.

Бодолт 1.

Заавар:

1. $a_n = a_{n-1} + 6a_{n-2}$, $a_0 = 3$, $a_1 = 6$ бол характеристик тэгшитгэл нь

$$x^2 = x + 6 \Rightarrow x_1 = -2, x_2 = 3$$

шийдийг $a_n = c_1 \cdot (-2)^n + c_2 \cdot 3^n$ хэлбэртэй хайя. $n = 0, 1$ үед

$$\begin{cases} a_0 = c_1 \cdot (-2)^0 + c_2 \cdot 3^0 \\ a_1 = c_1 \cdot (-2)^1 + c_2 \cdot 3^1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} c_1 + c_2 = 3 \\ -2c_1 + 3c_2 = 6 \end{cases}$$

тул $c_1 = \frac{3}{5}$, $c_2 = \frac{12}{5}$ болно. Иймд

$$a_n = \frac{3 \cdot (-2)^n + 12 \cdot 3^n}{5}$$

2. $a_n = 7a_{n-1} - 10a_{n-2}$, $a_0 = 2$, $a_1 = 1$ бол характеристик тэгшитгэл нь

$$x^2 = 7x - 10 \Rightarrow x_1 = 2, x_2 = 5$$

шийдийг $a_n = c_1 \cdot 2^n + c_2 \cdot 5^n$ хэлбэртэй хайя. $n = 0, 1$ үед

$$\begin{cases} a_0 = c_1 \cdot 2^0 + c_2 \cdot 5^0 \\ a_1 = c_1 \cdot 2^1 + c_2 \cdot 5^1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} c_1 + c_2 = 2 \\ 2c_1 + 5c_2 = 1 \end{cases}$$

тул $c_1 = 3$, $c_2 = -1$ болно. Иймд

$$a_n = 3 \cdot 2^n - 5^n$$

3. $a_n = 6a_{n-1} - 8a_{n-2}$, $a_0 = 4$, $a_1 = 10$ бол характеристик тэгшитгэл нь

$$x^2 = 6x - 8 \Rightarrow x_1 = 2, x_2 = 4$$

шийдийг $a_n = c_1 \cdot 2^n + c_2 \cdot 4^n$ хэлбэртэй хайя. $n = 0, 1$ үед

$$\begin{cases} a_0 = c_1 \cdot 2^0 + c_2 \cdot 4^0 \\ a_1 = c_1 \cdot 2^1 + c_2 \cdot 4^1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} c_1 + c_2 = 4 \\ 2c_1 + 4c_2 = 10 \end{cases}$$

тул $c_1 = 3$, $c_2 = 1$ болно. Иймд

$$a_n = 3 \cdot 2^n + 4^n$$

4. I бодолт. Характеристик тэгшитгэл нь $x^2 = 2x - 1 \Rightarrow x_1 = x_2 = 1$ тул ерөнхий шийд нь

$$a_n = c_1 + c_2 n + a_n^*$$

хэлбэртэй байна. a_n^* тухайн шийдийг $a_n^* = c2^n$ хэлбэртэй хайвал

$$c2^n = 2c2^{n-1} - c2^{n-2} + 2^n \Rightarrow c = 4$$

болно. Иймд

$$a_n = c_1 + c_2 n + 4 \cdot 2^n$$

болно. $n = 0, 1$ анхны нөхцөлүүдийг тооцвол

$$\begin{cases} c_1 + 4 = 4 \\ c_1 + c_2 + 8 = 1 \end{cases} \Rightarrow c_1 = 0, c_2 = -7$$

Иймд

$$a_n = 4 \cdot 2^n - 7n$$

II бодолт. $a_n = 2a_{n-1} - a_{n-2} + 2^n$, $a_0 = 4$, $a_1 = 1$ ба $b_n = \frac{a_n}{2^n}$ гэвэл $b_0 = \frac{4}{2^0} = 4$, $b_1 = \frac{1}{2^1} = \frac{1}{2}$, $a_n = 2^n b_n$ байна. Иймд

$$2^n b_n = 2 \cdot 2^{n-1} b_{n-1} - 2^{n-2} b_{n-2} + 2^n$$

буюу

$$b_n = b_{n-1} - \frac{1}{4} b_{n-2} + 1$$

байна. Характеристик тэгшитгэл нь

$$x^2 = x - \frac{1}{4} \Leftrightarrow x_{1,2} = \frac{1}{2}$$

гэсэн давхар язгууртай тул $b_n = (an + b) \cdot \frac{1}{2^n} + c$ болно (энд $(an + b) \cdot \frac{1}{2^n}$ нь нэгэн төрлийн рекуррент харьцааны ерөнхий шийд, характеристик тэгшитгэл нь 1 гэсэн шийдгүй тул $s_0 = 0$, $w(n) = c$ нь $\deg w(x) = \deg 1 + s_0 = 0$ гэж гарч байгаа). Үүнийг рекуррент томъёонд нь орлуулбал

$$(an + b) \cdot \frac{1}{2^n} + c = [a(n-1) + b] \cdot \frac{1}{2^{n-1}} + c - \frac{1}{4} \left\{ [a(n-2) + b] \cdot \frac{1}{2^{n-2}} + c \right\} + 1$$

болов ба $(an + b) \cdot \frac{1}{2^n}$ нь нэгэн төрлийн рекуррент харьцааных нь ерөнхий шийд тул

$$c = c - \frac{1}{4}c + 1 \Rightarrow c = 4$$

байна. Анхны нөхцөлөө ашиглан a , b коэффициентүүдийг ольё.

$$\begin{cases} b_0 = (a \cdot 0 + b) \cdot \frac{1}{2^0} + 4 \\ b_1 = (a \cdot 1 + b) \cdot \frac{1}{2^1} + 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (a \cdot 0 + b) \cdot \frac{1}{2^0} + 4 = 4 \\ (a \cdot 1 + b) \cdot \frac{1}{2^1} + 4 = \frac{1}{2} \end{cases}$$

тул $a = -7$, $b = 0$ болно. Иймд

$$b_n = -7n \cdot \frac{1}{2^n} + 4 \Rightarrow a_n = 2^n b_n = 4 \cdot 2^n - 7n$$

5. $a_n = -6a_{n-1} - 9a_{n-2}$, $a_0 = 3$, $a_1 = -3$ бол характеристик тэгшитгэл нь

$$x^2 = -6x - 9 \Rightarrow x_1 = x_2 = -3$$

тул шийдийг $a_n = (c_1 \cdot n + c_2) \cdot (-3)^n$ хэлбэртэй хайя (давхар язгууртай үед коэффициент нь тогтмол тоо биш давхардлынх тооноос 1-ээр бага зэргийн олон гишүүнт байна). $n = 0, 1$ үед

$$\begin{cases} a_0 = (c_1 \cdot 0 + c_2) \cdot (-3)^0 \\ a_1 = (c_1 \cdot 1 + c_2) \cdot (-3)^1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} c_2 = 3 \\ -3c_1 - 3c_2 = -3 \end{cases}$$

тул $c_1 = -2$, $c_2 = 3$ болно. Иймд

$$a_n = (-2n + 3) \cdot (-3)^n$$

6. $a_n = -4a_{n-1} + 5a_{n-2} + 2^n$, $a_0 = 2$, $a_1 = 8$ бол $b_n = \frac{a_n}{2^n}$, $b_0 = \frac{a_0}{2^0} = 2$, $b_1 = \frac{a_1}{2^1} = \frac{a_1}{2} = 4$ туслах дарааллыг оруулбал

$$2^n b_n = -4 \cdot 2^{n-1} b_{n-1} + 5 \cdot 2^{n-2} b_{n-2} + 2^n$$

буюу

$$b_n = -2b_{n-1} + \frac{5}{4}b_{n-2} + 1$$

b_n -ийн характеристик тэгшитгэл

$$x^2 = -2x + \frac{5}{4} \Rightarrow x_1 = \frac{1}{2}, x_2 = -\frac{5}{2}$$

шийдүүдтэй. Иймд ерөнхий шийд нь

$$b_n = c_1 \left(\frac{1}{2}\right)^n + c_2 \left(-\frac{5}{2}\right)^n + w(n)$$

хэлбэртэй байна. $x_1 = 1$ нь характеристик тэгшитгэлийн шийд биш тул $w(n) = c$ хэлбэртэй байна. Түүнчлэн $w(n)$ нь тухайн шийд тул

$$c = -2c + \frac{5}{4}c + 1 \Rightarrow c = \frac{4}{7}$$

анхны нөхцөлөө тооцвол $n = 0, 1$ үед

$$\begin{cases} b_0 = c_1 \left(\frac{1}{2}\right)^0 + c_2 \left(-\frac{5}{2}\right)^0 + \frac{4}{7} \\ b_1 = c_1 \left(\frac{1}{2}\right)^1 + c_2 \left(-\frac{5}{2}\right)^1 + \frac{4}{7} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} c_1 + c_2 + \frac{4}{7} = 2 \\ \frac{1}{2}c_1 - \frac{5}{2}c_2 + \frac{4}{7} = 4 \end{cases}$$

болно. Тэгшитгэлийг бодож шийдийг олбол $c_1 = \frac{7}{3}$, $c_2 = -\frac{19}{21}$ тул

$$b_n = \frac{7}{3} \left(\frac{1}{2}\right)^n - \frac{19}{21} \left(-\frac{5}{2}\right)^n + \frac{4}{7}$$

буую

$$a_n = \frac{-19 \cdot (-5)^n + 12 \cdot 2^n + 49}{21}$$

байна.

Бодолт:

2. Загасчны жилд барих загасны тоо өмнөх 2 оны дундажтай тэнцүү байдаг байв. Хэрвээ загасчин эхний жилд 100,000 загас, 2 дахь жилд 300,000 загас барьсан бол n дахь жилд хичнээн загас барьсан бэ?

Бодолт 1.

Заавар: a_n - n дэх жил дэх загасны тоо.

$$a_n = \frac{a_{n-1} + a_{n-2}}{2}$$

$a_0 = 100000$, $a_1 = 300000$ болно.

Бодолт:

3. Компанид анх 100,000\$-ийн хөрөнгө оруулалт хийгджээ. Жил бүрийн эцэст 2 төрлийн ашиг авдаг ба тэдгээрийг хөрөнгө оруулалтандaa нэмдэг байв. Эхнийх нь тухайн жилийнхээ хөрөнгө оруулалтын 20%-ийн ашиг ба нөгөөх нь өмнөх жилийнхээ хөрөнгө оруулалтын 45% -ийн ашиг байв. Тэгвэл n жилийн дараа хөрөнгө оруулалт хэд болох вэ?

4. Дараах рекуррент харьцаагаар өгөгдсөн дарааллын ерөнхий гишүүний томъёог ол.

1. $a_n = 2a_{n-1} + a_{n-2} - 2a_{n-3}$, $a_0 = 3$, $a_1 = 6$, $a_2 = 0$.
2. $a_n = 7a_{n-2} + 6a_{n-3}$, $a_0 = 9$, $a_1 = 10$, $a_2 = 32$.
3. $a_n = 5a_{n-2} - 4a_{n-4}$, $a_0 = 3$, $a_1 = 2$, $a_2 = 6$, $a_3 = 8$.
4. $a_n = 2a_{n-1} + 5a_{n-2} - 6a_{n-3}$, $a_0 = 7$, $a_1 = -4$, $a_2 = 8$.

Бодолт 1.

Заавар:

Бодолт: $a_n = 2a_{n-1} + a_{n-2} - 2a_{n-3}$, $a_0 = 3$, $a_1 = 6$, $a_2 = 0$

$$x^3 = 2x^2 + x - 2 \Leftrightarrow$$

$$x^3 - 2x^2 - x + 2 = x^2(x - 2) - (x - 2) = (x^2 - 1)(x - 2) = 0$$

$x_1 = -1$, $x_2 = 1$, $x_3 = 2$.

$$a_n = c_1 \cdot (-1)^n + c_2 \cdot 1^n + c_3 \cdot 2^n$$

$$\begin{cases} c_1 + c_2 + c_3 = 3 \\ -c_1 + c_2 + 2c_3 = 6 \\ c_1 + c_2 + 4c_3 = 0 \end{cases}$$

$$3c_3 = -3 \Rightarrow c_3 = -1$$

$$\begin{cases} c_1 + c_2 = 4 \\ -c_1 + c_2 = 8 \end{cases}$$

$c_2 = 6, c_1 = -2$ болно.

$$a_n = -2 \cdot (-1)^n + 6 - 2^n$$

болно.

5. Дараах дарааллын үүсгэгч функц ба түүний битүү хэлбэрийг ол.

1. $\{-1, -1, -1, -1, -1, -1, 0, 0, 0, 0, 0, 0, \dots\}$
2. $\{1, 3, 9, 27, 81, 243, 729, \dots\}$
3. $\{0, 0, 3, -3, 3, -3, 3, -3, \dots\}$
4. $\{1, 2, 1, 1, 1, 1, 1, \dots\}$
5. $\{-3, 3, -3, 3, -3, 3, \dots\}$
6. $\{0, 1, -2, 4, -8, 16, -32, 64, \dots\}$
7. $\{1, 0, 1, 0, 1, 0, 1, 0, \dots\}$
8. $\{C_7^0, 2C_7^1, 2^2C_7^2, 2^3C_7^3, \dots, 2^7C_7^7, 0, 0, 0, \dots\}$

Бодолт 1.

Заавар:

Бодолт:

1. $\{-1, -1, -1, -1, -1, -1, 0, 0, 0, 0, 0, 0, \dots\}$ дарааллын үүсгэгч функц нь

$$f(x) = -1 - x - x^2 - x^3 - x^4 - x^5 - x^6$$

2. $\{1, 3, 9, 27, 81, 243, 729, \dots\}$ дарааллын үүсгэгч функц нь

$$\begin{aligned} f(x) &= 1 + 3x + 9x^2 + 27x^3 + \dots + 3^n x^n + \dots \\ &= 1 + 3x + (3x)^2 + (3x)^3 + \dots + (3x)^n + \dots = \frac{1}{1 - 3x} \end{aligned}$$

3. $\{0, 0, 3, -3, 3, -3, 3, -3, \dots\}$ дарааллын үүсгэгч функц нь

$$\begin{aligned} f(x) &= 0 + 0x + 3x^2 - 3x^3 + 3x^4 - \dots + 3(-x)^n + \dots \\ &= 3x^2(1 - x + x^2 - x^3 + \dots + (-x)^n + \dots) = \frac{3x^2}{1 + x} \end{aligned}$$

4. $\{1, 2, 1, 1, 1, 1, 1, \dots\}$ дарааллын үүсгэгч функц нь

$$\begin{aligned} f(x) &= 1 + 2x + x^2 + x^3 + x^4 + \dots + x^n + \dots \\ &= x + (1 + x + x^2 + x^3 + \dots + x^n + \dots) \\ &= x + \frac{1}{1 - x} = \frac{1 + x - x^2}{1 - x} \end{aligned}$$

5. $\{-3, 3, -3, 3, -3, 3, \dots\}$ дарааллын үүсгэгч функц нь

$$\begin{aligned} f(x) &= -3 + 3x - 3x^2 + 3x^3 - 3x^4 + \dots + (-1)^{n-1} x^n + \dots \\ &= -3(1 - x + x^2 - x^3 + \dots + (-x)^n + \dots) = -\frac{3}{1 + x} \end{aligned}$$

6. $\{0, 1, -2, 4, -8, 16, -32, 64, \dots\}$ дарааллын үүсгэгч функц нь

$$\begin{aligned} f(x) &= 0 + 1 \cdot x - 2x^2 + 4x^3 - 8x^4 + \dots + (-2)^{n-1} x^n + \dots \\ &= x(1 + (-2x) + (-2x)^2 + (-2x)^3 + \dots + (-2x)^n + \dots) = \frac{x}{1 + 2x} \end{aligned}$$

7. $\{1, 0, 1, 0, 1, 0, 1, 0, \dots\}$ дарааллын үүсгэгч функц нь

$$\begin{aligned} f(x) &= 1 + 0 \cdot x + 1 \cdot x^2 + 0 \cdot x^3 + 1 \cdot x^4 + \dots \\ &= 1 + x^2 + x^4 + \dots + x^{2n} + \dots = \frac{1}{1-x^2} \end{aligned}$$

8. $\{C_7^0, 2C_7^1, 2^2C_7^2, 2^3C_7^3, \dots, 2^7C_7^7, 0, 0, 0, \dots\}$ дарааллын үүсгэгч функц нь

$$\begin{aligned} f(x) &= C_7^0 + 2^1C_7^1 \cdot x^1 + 2^2C_7^2 \cdot x^2 + 2^3C_7^3 \cdot x^3 + 2^4C_7^4 \cdot x^4 + 2^5C_7^5 \cdot x^5 + 2^6C_7^6 \cdot x^6 + 2^7C_7^7 \cdot x^7 \\ &= C_7^0(2x)^0 + C_7^1(2x)^1 + C_7^2(2x)^2 + C_7^3(2x)^3 + C_7^4(2x)^4 + C_7^5(2x)^5 + C_7^6(2x)^6 + C_7^7(2x)^7 \\ &= (1+2x)^7 \end{aligned}$$

6. a_n дарааллын үүсгэгч функцийн битүү хэлбэрийг ол.

1. $a_n = 5, n = 0, 1, 2, \dots$
2. $a_n = 3^n, n = 0, 1, 2, \dots$
3. $a_n = 2, n = 3, 4, 5, \dots, a_0 = a_1 = a_2 = 0$.
4. $a_n = 2n + 3, n = 0, 1, 2, \dots$
5. $a_n = C_n^8, n = 0, 1, 2, \dots$
6. $a_n = C_n^{n+4}, n = 0, 1, 2, \dots$

Бодолт 1.

Заавар:

Бодолт:

1. $a_n = 5, n = 0, 1, 2, \dots$ бол

$$f(x) = 5 + 5x + 5x^2 + \dots = \frac{5}{1-x}$$

2. $a_n = 3^n, n = 0, 1, 2, \dots$ бол

$$\begin{aligned} f(x) &= 3^0 + 3^1x^1 + 3^2x^2 + 3^3x^3 + \dots \\ &= 1 + (3x) + (3x)^2 + (3x)^3 + \dots = \frac{1}{1-3x} \end{aligned}$$

3. $a_n = 2, n = 3, 4, 5, \dots, a_0 = a_1 = a_2 = 0$ дарааллын үүсгэгч функц нь

$$f(x) = 2x^3 + 2x^4 + 2x^5 + \dots = \frac{2x^3}{1-x}$$

4. $a_n = 2n + 3, n = 0, 1, 2, \dots$ дарааллын үүсгэгч функц нь

$$\begin{aligned} f(x) &= (2 \cdot 0 + 3) + (2 \cdot 1 + 3)x + (2 \cdot 2 + 3)x^2 + (2 \cdot 3 + 3)x^3 + \dots \\ &= 2x(1 + 2x^1 + 3x^2 + 4x^3 + \dots) + 3(1 + x + x^2 + x^3 + \dots) \\ &= 2x(1 + x + x^2 + x^3 + x^4 + \dots)' + 3(1 + x + x^2 + x^3 + \dots) \\ &= 2x \left(\frac{1}{1-x} \right)' + \frac{3}{1-x} = \frac{2x}{(1-x)^2} + \frac{3}{1-x} = \frac{3-x}{(1-x)^2} \end{aligned}$$

5. $a_1 = a_2 = \dots = a_7 = 0, a_n = C_n^8 = \frac{n!}{(n-8)! \cdot 8!} = \frac{1}{8!} n(n-1) \cdots (n-7)$ байна. Иймд

$$(x^n)^{(8)} = n(n-1) \cdots (n-7)x^{n-8} = 8!C_n^8 x^{n-8}$$

ба

$$\begin{aligned} f(x) &= a_8x^8 + a_9x^9 + a_{10}x^{10} + a_{11}x^{11} + \dots \\ &= 8!(C_8^8x^8 + C_9^8x^9 + C_{10}^8x^{10} + C_{11}^8x^{11} + \dots) \\ &= 8!x^8(C_8^8 + C_9^8x + C_{10}^8x^2 + C_{11}^8x^3 + \dots) \\ &= 8!x^8(1 + x + x^2 + x^3 + \dots)^{(8)} \\ &= 8!x^8 \left(\frac{1}{1-x} \right)^{(8)} = \frac{8!x^8}{(1-x)^9} \end{aligned}$$

6. $a_n = C_n^{n+4}$, $n = 0, 1, 2, \dots$ $a_n = 0$ тул $f(x) = 0$ байна.

7. Өгөгдсөн үүсгэгч функцтэй дарааллын ерөнхий гишүүний томъёог ол.

1. $(x^2 + 1)^3$

2. $(3x - 1)^3$

3. $\frac{1}{1 - 2x^2}$

4. $\frac{x^2}{(1 - x)^3}$

5. $\frac{1 + x^3}{(1 + x)^3}$

6. $\frac{x}{1 + x + x^2}$

7. $e^{3x^2} - 1$

Бодолт 1.

Заавар:

Бодолт:

1. $(x^2 + 1)^3 = 1 + 3x^2 + 3x^4 + x^6$ тул $a_0 = a_6 = 1$, $a_2 = a_4 = 3$ ба бусад n -ийн хувьд $a_n = 0$ байна.

2. $(3x - 1)^3 = -1 + 9x - 27x^2 + 27x^3$ тул $a_0 = -1$, $a_1 = 9$, $a_2 = -27$, $a_3 = 27$ ба $n \geq 4$ үед $a_n = 0$ байна.

3.

$$\begin{aligned}\frac{1}{1 - 2x^2} &= 1 + 2x^2 + (2x^2)^2 + (2x^2)^3 + (2x^2)^4 + \dots \\ &= 1 + 2^1 x^2 + 2^2 x^4 + 2^3 x^6 + \dots + 2^n x^{2n} + \dots\end{aligned}$$

тул $n = 2k$ үед $a_n = 2^k$ ба $n = 2k + 1$ үед $a_n = 0$ байна.

4. Өргөтгөсөн биномын томъёогоор

$$\begin{aligned}\frac{x^2}{(1 - x)^3} &= x^2(1 + (-x))^{-3} \\ &= x^2 \left(1 + \binom{-3}{1}(-x) + \binom{-3}{2}(-x)^2 + \binom{-3}{3}(-x)^3 + \dots \right) \\ &= x^2 \left(1 + \frac{-3}{1!}(-x) + \frac{-3(-3-1)}{2!}(-x)^2 + \frac{-3(-3-1)(-3-2)}{3!}(-x)^3 + \dots \right)\end{aligned}$$

5.

$$\begin{aligned}\frac{1 + x^3}{(1 + x)^3} &= \frac{(1 + x)(1 - x + x^2)}{(1 + x)^3} \\ &= \frac{1 - x + x^2}{(1 + x)^2} = 1 - \frac{3}{1 + x} + \frac{3}{(1 + x)^2} \\ &= 1 - 3(1 - x + x^2 + \dots + (-x)^k + \dots) + 3(1 - 2x + 3x^2 + \dots + (k+1)(-x)^k + \dots) \\ &= 1 + 3 \cdot 1 \cdot (-x) + 3 \cdot 2 \cdot (-x)^2 + 3 \cdot 3 \cdot (-x)^3 + \dots + 3 \cdot k \cdot (-x)^k + \dots \\ &= 1 - 3x + 6x^2 - 9x^3 + \dots + (-1)^k 3kx^k + \dots\end{aligned}$$

тул $a_0 = 1$, $n \geq 1$ үед $a_n = (-1)^n 3n$ байна.

6.

$$\begin{aligned}\frac{x}{1 + x + x^2} &= \frac{x(1 - x)}{1 - x^3} \\ &= (x - x^2)(1 + x^3 + x^6 + x^9 + \dots) \\ &= x - x^2 + x^4 - x^5 + x^7 - x^8 + x^{10} - x^{11} + \dots\end{aligned}$$

тул $n = 3k$ үед $a_n = 0$, $n = 3k + 1$ үед $a_n = 1$, $n = 3k + 2$ үед $a_n = -1$ байна.

7. $e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots$ тул

$$\begin{aligned} e^{3x^2} - 1 &= \frac{3x^2}{1!} + \frac{(3x^2)^2}{2!} + \frac{(3x^2)^3}{3!} + \frac{(3x^2)^4}{4!} + \dots \\ &= \frac{3x^2}{1!} + \frac{3^2x^4}{2!} + \frac{3^3x^6}{3!} + \frac{3^4x^8}{4!} + \dots + \frac{3^kx^{2k}}{k!} + \dots \end{aligned}$$

тул $n = 2k$ үед $a_n = \frac{3^k}{k!}$, $n = 2k + 1$ үед $a_n = 0$ байна.

8. x^9 -ийн өмнөх коэффициентийг ол.

1. $(1 + x^3 + x^6 + x^9 + \dots)^3$
2. $(x^2 + x^3 + x^4 + x^5 + x^6 + \dots)^3$
3. $(x^3 + x^5 + x^6)(x^3 + x^4)(x + x^2 + x^3 + x^4 + \dots)$
4. $(x + x^4 + x^7 + x^{10} + \dots)(x^2 + x^4 + x^6 + x^8 + \dots)$
5. $(1 + x + x^2)^3$

Бодолт 1.

Заавар: Зөвхөн 9-өөс хэтрэхгүй зэргүүдийг авч үзэхэд хангалттай.

Бодолт:

1.

$$\begin{aligned} (1 + x^3 + x^6 + x^9 + \dots)^2 &= (1 + x^3 + x^6 + x^9 + \dots)(1 + x^3 + x^6 + x^9 + \dots) \\ &= 1 + 2x^3 + 3x^6 + 4x^9 + \dots \end{aligned}$$

тул

$$\begin{aligned} (1 + x^3 + x^6 + x^9 + \dots)^3 &= (1 + 2x^3 + 3x^6 + 4x^9 + \dots)(1 + x^3 + x^6 + x^9 + \dots) \\ &= 1 + 3x^3 + 6x^6 + 10x^9 + \dots \end{aligned}$$

тул x^9 -ийн коэффициент нь 10 болов.

2.

$$\begin{aligned} (x^2 + x^3 + x^4 + x^5 + x^6 + \dots)^3 &= x^6(1 + x + x^2 + x^3 + \dots)^3 \\ &= x^6(1 + 2x + 3x^2 + 4x^3 + \dots)(1 + x + x^2 + x^3 + \dots) \\ &= x^6(1 + 3x + 6x^2 + 10x^3 + \dots) \\ &= x^6 + 3x^7 + 6x^8 + 10x^9 + \dots \end{aligned}$$

тул x^9 -ийн коэффициент нь 10 болов.

3.

$$\begin{aligned} A(x) &= (x^3 + x^5 + x^6)(x^3 + x^4)(x + x^2 + x^3 + x^4 + \dots) \\ &= x^7(1 + x^2 + x^3)(1 + x)(1 + x + x^2 + x^3 + \dots) \end{aligned}$$

учир

$$(1 + x^2 + x^3)(1 + x)(1 + x + x^2 + x^3 + \dots)$$

-ийн x^2 -ийн коэффициентийг олоход хангалттай.

$$\begin{aligned} B(x) &= (1 + x^2 + x^3)(1 + x)(1 + x + x^2 + x^3 + \dots) \\ &= (1 + x^2 + x^3)(1 + 2x + 2x^2 + 2x^3 + \dots) \\ &= 1 + 2x + 5x^2 + 5x^3 + 5x^4 + 5x^5 + \dots \end{aligned}$$

тул $A(x)$ -ийн x^9 -ийн коэффициент нь 2 байна.

4.

$$(x + x^4 + x^7 + x^{10} + \dots)(x^2 + x^4 + x^6 + x^8 + \dots) = \\ = x^3 + x^5 + x^6 + x^7 + 2x^8 + 2x^9 + \dots$$

тул 2 байна.

5. $(1 + x + x^2)^3$ олон гишүүнтийн зэрэг 6 тул x^9 -ийн коэффициент нь 0 байна.9. Дараах функцийг цуваа хэлбэрт бичиж x^{12} -ийн өмнөх коэффициентийг ол.

1. $\frac{1}{1+3x}$

2. $\frac{1}{(1-2x)^2}$

3. $\frac{1}{(1+x)^8}$

4. $\frac{1}{(1-4x)^3}$

5. $\frac{x^3}{(1+4x)^2}$

Бодолт 1.

Заавар:

$$(1+x)^\alpha = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{\alpha}{k} x^k$$

өргөтгөсөн биномын томьёо ашигла. Энд

$$\binom{\alpha}{k} = \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)\cdots(\alpha-k+1)}{k!}$$

байна.

Бодолт:

1.

$$\frac{1}{1+3x} = 1 - 3x + 9x^2 - 27x^3 + \dots + (-3k)^k + \dots \\ = 1 - 3x + 9x^2 - 27x^3 + \dots + 3^{12}x^{12} + \dots$$

2. $\binom{-n}{k} = (-1)^k \binom{n+k-1}{k}$ тул

$$\frac{1}{(1-2x)^2} = (1 + (-2x))^{-2} \\ = 1 + \binom{-2}{1}(-2x) + \binom{-2}{2}(-2x)^2 + \dots + \binom{-2}{k}(-2x)^k + \dots \\ = 1 + (-1)\binom{2}{1}(-2x) + (-1)^2\binom{3}{2}(-2x)^2 + \dots + (-1)^k\binom{k+1}{k}(-2x)^k + \dots \\ = 1 + 2\binom{2}{1}x + 2^2\binom{3}{2}x^2 + \dots + 2^k\binom{k+1}{k}x^k + \dots \\ = 1 + 2 \cdot 2x + 2^2 \cdot 3x^2 + \dots + 2^k \cdot (k+1)x^k + \dots$$

тул x^{12} -ийн коэффициент нь $13 \cdot 2^{12}$ байна.

3.

$$\begin{aligned}\frac{1}{(1+x)^8} &= (1+x)^{-8} \\ &= 1 + \binom{-8}{1}x + \binom{-8}{2}x^2 + \binom{-8}{3}x^3 + \cdots + \binom{-8}{k}x^k + \cdots\end{aligned}$$

тул x^{12} -ийн коэффициент нь

$$\binom{-8}{12} = (-1)^{12} \frac{8+12-1}{12} = \binom{19}{12} = \frac{19!}{7! \cdot 12!}$$

байна.

4.

$$\begin{aligned}\frac{1}{(1-4x)^3} &= (1+(-4x))^{-3} \\ &= 1 + \binom{-3}{1}(-4x)^1 + \binom{-3}{2}(-4x)^2 + \binom{-3}{3}(-4x)^3 + \cdots \\ &= 1 + \frac{-3}{1!}(-4x) + \frac{-3(-3-1)}{2!}(-4x)^2 + \frac{-3(-3-1)(-3-2)}{3!}(-4x)^3 + \cdots \\ &= 1 + 4\binom{3}{1}x + 4^2\binom{4}{2}x^2 + 4^3\binom{5}{3}x^3 + \cdots + 4^k\binom{k+2}{k}x^k + \cdots\end{aligned}$$

тул x^{12} -ийн коэффициент нь $4^{12}\binom{14}{12}$ байна.5. $\frac{1}{(1+4x)^2}$ -ийн x^9 -ийн коэффициентийг олоход хангалттай.

$$\begin{aligned}\frac{1}{(1+4x)^2} &= (1+(-4x))^{-2} \\ &= 1 + \binom{-2}{1}(4x)^1 + \binom{-2}{2}(4x)^2 + \binom{-2}{3}(4x)^3 + \cdots \\ &= 1 + \frac{-2}{1!}(4x) + \frac{-2(-2-1)}{2!}(4x)^2 + \frac{-2(-2-1)(-2-2)}{3!}(4x)^3 + \cdots \\ &= 1 - 4\binom{2}{1}x + 4^2\binom{3}{2}x^2 - 4^3\binom{4}{3}x^3 + \cdots + (-4)^k\binom{k+1}{k}x^k + \cdots\end{aligned}$$

тул $\frac{x^3}{(1+4x)^2}$ -ийн x^{12} -ийн коэффициент нь $(-4)^9\binom{10}{9}$ байна.