Дискрет мат, Семинар №03

1. Дараах нөхцөлүүдээс дүгнэлт гарга.

1. "Хэрэв би ажлаасаа чөлөө авбал эсвэл бороо ордог эсвэл цас ордог". "Би Мягмар эсвэл Пүрэв гарагт ажлаасаа чөлөө авсан". "Мягмарт нартай байсан". "Пүрэвт цас ороогүй".
2. "Хэрэв би халуун ногоотой хоол идвэл хар дарж зүүдэлдэг". "Хэрвээ намайг унтаж байх хооронд цахилгаан цахивал би хар дарж зүүдэлдэг". "Би хар дарж зүүдлээгүй".
3. "Компьютерийн мэргэжилтэн бүрд компьютер байдаг". "Батад компьютер байхгүй". "Цэцэгт компьютер байгаа".
4. "Хэрэв компани ашигтай ажиллавал улсад ашигтай". "Хэрэв улс ашигтай байвал чамд ашигтай". "Компанийг ашигтай ажиллуулахын тулд чи худалдан авалт хийх хэрэгтэй".

Бодолт 1.

1. Пүрэвт бороо орсон.
2. Би халуун ногоотой хоол ч идээгүй, цахилгаан цахиж бороо ч ороогүй.
3. Бат компьютерийн мэргэжилтэн биш, харин Цэцэг компьютерийн мэргэжилтэн байж магадгүй.
4. Худалдан авалт хийх нь компани, улс, хувь хүнд бүгдэд нь ашигтай.

2. Дараах дүгнэлтүүдийн зөв бурууг тогтоо.

1. Энэ ангийн бүх оюутан логик ойлгодог. Амар энэ ангид сурдаг. Тиймээс Амар логик ойлгодог.
2. Компьютерийн мэргэжилтэн бүр дискрет математик судалдаг. Нараа дискрет математик судалж байгаа. Тиймээс Нараа комьютерийн мэргэжилтэн болно.
3. Бүх тоть жимсэнд дуртай. Миний тэжээдэг шувуу тоть биш. Тиймээс миний тэжээдэг шувуу жимсэнд дургүй.
4. Дорж инээдмийн кинонд дуртай. Дорж "Мандухай цэцэн хатан" кинонд дуртай. Тиймээс "Мандухай цэцэн хатан" инээдмийн кино.

Бодолт 1.

1. Зөв дүгнэлт.
2. Буруу дүгнэлт. Учир нь дискрет математик судалдаг мөртлөө компьтерийн чиглэлээс өөр чиглэлээр сурдаг оюутан байдаг.
3. Буруу дүгнэлт. Тоть л зөвхөн жимсэнд дуртай гэж хэлээгүй.
4. Буруу дүгнэлт. Дорж зөвхөн инээдмийн кинонд дуртай гэж хэлээгүй.

3. Дараах дүгнэлтүүдийн зөв бурууг тогтоо.

1. Хэрэв n нь $n > 1$ байх бодит тоо бол $n^2 > 1$ байна. $n^2 > 1$ байг. Тэгвэл $n > 1$ байна.
2. Хэрэв n нь $n > 3$ байх бодит тоо бол $n^2 > 9$ байна. $n^2 \leq 9$ байг. Тэгвэл $n \leq 3$ байна.
3. Хэрэв n нь $n > 2$ байх бодит тоо бол $n^2 > 4$ байна. $n \leq 2$ байг. Тэгвэл $n^2 \leq 4$ байна.

Бодолт 1.
Дүгнэлт буруу болохыг жишээ гарган няцаа.

1. Буруу дүгнэлт. Жишээ нь $n = -2$ үед $n^2 > 1$ боловч $n > 1$ биш.
2. Буруу дүгнэлт. Жишээ нь $n = 2$ үед $n^2 \leq 9$ боловч $n \geq 3$ биш.
3. Буруу дүгнэлт. Жишээ нь $n = -3$ үед $n \leq 2$ боловч $n^3 \leq 4$ биш.

4. Хэрэв $\exists x P(x) \wedge \exists x Q(x)$ үнэн бол $\exists x[P(x) \wedge Q(x)]$ үнэн гэж харуулсан цуврал дүгнэлтүүдээс алдааг ол.

1. $\exists x P(x) \wedge \exists x Q(x)$
2. $\exists x P(x)$
3. $P(c)$
4. $\exists x Q(x)$
5. $Q(c)$
6. $P(c) \wedge Q(c)$
7. $\exists x[P(x) \wedge Q(x)]$

Бодолт 1.

$P(x)$-г үнэн байлгах утга нь $Q(x)$-г үнэн байлгах утгатай ижил байх албагүй. Өөрөөр хэлбэл 3 ба 5-р дүгнэлт дээрх c тоонуудыг өөр үсгээр тэмдэглэх шаардагатай.

5. Хэрэв $\forall x[P(x) \vee Q(x)]$ үнэн бол $\forall x P(x) \vee \forall x Q(x)$ үнэн гэж харуулсан цуврал дүгнэлтүүдээс алдааг ол.

1. $\forall x(P(x) \vee Q(x))$
2. $P(c) \vee Q(c)$
3. $P(c)$
4. $\forall x P(x)$
5. $Q(c)$
6. $\forall x Q(x)$
7. $\forall x P(x) \vee \forall x Q(x)$

Бодолт 1.

3-аас 4, 5-аас 6 гэж гаргасан дүгнэлтүүд худлаа юм. Учир нь ямар нэг утга дээр үнэн байвал дурын утганд үнэн байх албагүй.

6. Хэрэв $\forall x[P(x) \to Q(x) \wedge S(x)]$, $\forall x[P(x) \wedge R(x)]$ логик илэрхийллүүд үнэн бол $\forall x[R(x) \wedge S(x)]$ үнэн гэж харуул.

Бодолт 1.

$\forall x[P(x) \to Q(x) \wedge S(x)] = 1$, $\forall x[P(x) \wedge R(x)] = 1$ байг. Тэгвэл

1. $\forall x[P(x) \wedge R(x)] = 1$
2. $\forall x P(x) = 1$
3. $\forall x R(x) = 1$
4. $\forall x[P(x) \to Q(x) \wedge S(x)] = 1$
5. $\forall x[\neg P(x) \vee Q(x) \wedge S(x)] = 1$
6. $\forall x[0 \vee Q(x) \wedge S(x)] = 1$
7. $\forall x[Q(x) \wedge S(x)] = 1$
8. $\forall x S(x) = 1$
9. 2 ба 8-аас $\forall x P(x) \wedge \forall x R(x) = \forall x[P(x) \wedge R(x)] = 1$

7. Хэрэв $\forall x[P(x) \vee Q(x)]$, $\forall x[\neg P(x) \wedge Q(x) \to R(x)]$ хэллэгүүд үнэн бол $\forall x[\neg R(x) \to P(x)]$ үнэн гэж харуул.

Бодолт 1.

$\forall x[P(x) \vee Q(x)] = 1$, $\forall x[\neg P(x) \wedge Q(x) \to R(x)] = 1$ байг. Тэгвэл

1. $\forall x[P(x) \vee Q(x)] = 1$
2. $\forall x[\neg P(x) \wedge Q(x) \to R(x)] = 1$
3. $\forall x\{[P(x) \vee Q(x)] \wedge [\neg P(x) \wedge Q(x) \to R(x)]\} = 1$
4. $\forall x\{[P(x) \vee Q(x)] \wedge [\neg(\neg P(x) \wedge Q(x)) \vee R(x)]\} = 1$

5. $\forall x\{[P(x) \vee Q(x)] \wedge [P(x) \vee \neg Q(x) \vee R(x)]\} = 1$
6. $\forall x\{P(x) \vee [P(x) \wedge \neg Q(x)] \vee [P(x) \wedge R(x)] \vee [Q(x) \wedge P(x)] \vee [Q(x) \wedge \neg Q(x)] \vee [Q(x) \wedge R(x)]\} = 1$
7. $\forall x\{P(x) \vee [P(x) \wedge \neg Q(x)] \vee [P(x) \wedge R(x)] \vee [Q(x) \wedge P(x)] \vee [Q(x) \wedge R(x)]\} = 1$
8. $[P(x) \wedge \neg Q(x)][P(x) \wedge Q(x)] = P(x) \wedge [Q(x) \vee \neg Q(x)] = P(x)$ тул
$$\forall x\{P(x) \vee [P(x) \wedge R(x)] \vee [Q(x) \wedge R(x)]\} = 1$$
ба $a \vee (a \wedge b) = a$ тул
$$\forall x\{P(x) \vee [Q(x) \wedge R(x)]\} = 1$$
9. $\forall x\{[P(x) \vee Q(x)] \wedge [P(x) \vee R(x)]\} = 1$
10. $\forall x[P(x) \vee R(x)] = \forall x[R(x) \vee P(x)] = 1$
11. $\forall x[\neg R(x) \to P(x)] = 1$

8. Хэрэв $\forall x[P(x) \vee Q(x)]$, $\forall x[\neg Q(x) \vee S(x)]$, $\forall x[R(x) \to \neg S(x)]$, $\exists x \neg P(x)$ хэллэгүүд үнэн бол $\exists x \neg R(x)$ үнэн гэж харуул.

9. Хэрэв n бүхэл тооны квадрат бол $n+2$ нь бүхэл тооны квадрат биш гэж харуул.

Бодолт 1.

$(n+2) - n = 2$ нь $x < y$ байх x, y хоёр натурал тооны үржвэрт $1 \cdot 2$ гэж цор ганц аргаар задарна.
Эсрэгээс нь n ба $n+2$ тоонууд бүхэл тооны квадратууд гэе. $n = a^2$, $n+2 = b^2$, $0 < a < b$ гэе. Тэгвэл
$$2 = (n+2) - n = b^2 - a^2 = (b-a)(b+a)$$
тул $b - a = 1$, $b + a = 2$ буюу $b = 1.5 \notin \mathbb{N}$, $a = 0.5 \notin \mathbb{N}$ болж бүтэн квадрат гэдэгт зөрчиж байна.

10. Хэрэв m, n бүхэл тоонуудын хувьд mn нь тэгш бол эсвэл m эсвэл n тэгш гэж харуул.

Бодолт 1.

Эсрэгээс нь m, n тоонууд хоёулаа сондгой гэе. Тэгвэл $m = 2s+1$, $n = 2t+1$ байхаар s, t бүхэл тоонууд олдох ба
$$mn = (2s+1)(2t+1) = 4st + 2s + 2t + 1 = 2(2st + s + t) + 1$$
болно. Энэ нь mn тэгш гэдэгт зөрчиж байгаа тул m, n-ийн ядаж нэг нь сондгой тоо юм.

11. Хэрэв n бүхэл тооны хувьд $3n+2$ нь тэгш бол n-ийг тэгш гэж эсрэгээс батлах аргаар батал.

Бодолт 1.

Эсрэгээс нь n сондгой тоо буюу $n = 2s+1$ хэлбэртэй гэе. Тэгвэл
$$3n + 2 = 3(2s+1) + 2 = 6s + 5 = 2(3s+2) + 1$$
буюу $3n+2$ тэгш тоо гэсэнтэй зөрчилдөж байна. Иймд n тэгш тоо юм.

12. "Эерэг бүхэл тоо бүр гурван бүхэл тооны квадратуудын нийлбэрт тавигдана" гэдэг өгүүлбэрийг эсрэг жишээ гарган няцаа.

Бодолт 1.

7-г гурван бүхэл тооны квадратуудын нийлбэрт тавьж болохгүй. 7-оос хэтрэхгүй бүтэн квадратууд нь 0, 1, 4 ба эдгээрээс 3-ийг нь нэмээд 7 гаргах боломжгүй юм.

13. Хэллэгийн тоололд

1. $\vdash AB \to BA$
2. $\vdash A \vee A \to A$

гэж батал.

14. Хэллэгийн тооллын дараах томьёонуудын гаргалгааг хий:

1. $A \to A$
2. $\big(A \to (B \to C)\big) \to \big(B \to (A \to C)\big)$
3. $(A \to B) \to \big((A \to C) \to (A \to B \vee C)\big)$
4. $A \to \big(\neg B \to \neg(A \to B)\big)$

15. Хэллэгийн тооллын тэмдэгтийн санд

1. хувьсагч бүр 0, 1 утгатай
2. импликац, дизъюнкц, үгүйсгэл хэллэгийн алгебр дахь утгатай
3. Конъюнкц $a \wedge b = b$ гэсэн утгатай

бол I-II аксиомууд хувьсагчдын бүх боломжит утгад ямар утгатай вэ? Энэ загвараар аль аксиомын үл хамаарах нь батлагдах вэ?

Бодолт 1.

Хэллэгийн тооллын аксиомууд:

1. 1.1 $a \to (b \to a)$
2. 1.2 $(a \to (b \to c)) \to ((a \to b) \to (a \to c))$
3. 2.1 $a \wedge b \to a$
4. 2.2 $a \wedge b \to b$
5. 2.3 $(a \to b) \to ((a \to c) \to (a \to b \wedge c))$
6. 3.1 $a \to a \vee b$
7. 3.2 $b \to a \vee b$
8. 3.3 $(a \to c) \to ((b \to c) \to (a \vee b \to c))$
9. 4.1 $(a \to b) \to (\neg b \to \neg a)$
10. 4.2 $a \to \neg\neg a$
11. 4.3 $\neg\neg a \to a$

a	b	1.1	1.2	2.1	2.2
1	1	1	1	1	1
1	0	1	1	1	1
0	1	1	1	0	1
0	0	1	1	1	1

a	b	c	$a \to b$	$a \to c$	$b \wedge c$	$a \to b \wedge c$	$(a \to c) \to (a \to b \wedge c)$	$(a \to b) \to ((a \to c) \to (a \to b \wedge c))$
1	1	1	1	1	1	1	1	1
1	1	0	1	0	0	0	1	1
1	0	1	0	1	1	1	1	1
1	0	0	0	0	0	0	1	1
0	1	1	1	1	1	1	1	1
0	1	0	1	1	0	1	1	1
0	0	1	1	1	1	1	1	1
0	0	0	1	1	0	1	1	1

эндээс харахад 2.1 аксиом бусдаасаа мөрдөн гарахгүй гэж гарч байна.