Дискрет мат, Семинар №05

1. Гүйлтийн тэмцээнд 25 хүн оролцов. Бүгд барианд орсон ба зэрэг ирсэн 2 хүн байгаагүй бол

1. Эдгээр хүмүүс нийт хэчнээн ялгаатай янзаар барианд орж болох вэ?
2. Эхний 3 байрыг хэчнээн ялгаатай янзаар эзэлж болох вэ?

Бодолт 1.
Заавар:
Бодолт:

1. 25 хүнийг нэг эгнээнд жагсаах боломжийн тоо буюу $P_{25} = 25!$ байна.
2. 25 хүнээс 3-аар авсан сэлгэмэлийн тоо буюу $A_{25}^2 = 25 \cdot 24 \cdot 23 = 1380$ байна.

2. Шатрын хөлөг дээр

1. 2 хар, 1 цагаан тэргийг
2. 2 цагаан тэргийг
3. 1 хар, 1 цагаан, 1 ногоон тэргийг
4. 3 цагаан тэргийг
5. 3 цагаан, 4 хар тэргийг

нийт хэчнээн ялгаатай янзаар байрлуулж болох вэ?
Бодолт 1.
Заавар:
Бодолт:

1. 2 хар тэргийг C_{64}^2 янзаар байрлуулах ба цагаан тэргийг үлдсэн 62 нүдний аль нэгэнд C_{62}^1 янзаар байрлуулах тул нийт
$$C_{64}^2 \cdot C_{62}^1 = \frac{64!}{62!2!} \cdot \frac{62!}{61!1!} = \frac{62 \cdot 63 \cdot 64}{2} = 127008$$
ялгаатай янзаар байрлуулж болно.
2. 2 цагаан тэргийг $C_{64}^2 = 2016$ янзаар байрлуулж болно.
3. 1 хар, 1 цагаан, 1 ногоон тэргийг A_{64}^3 янзаар байрлуулж болно.
4. 3 цагаан тэргийг C_{64}^3 янзаар байрлуулж болно.
5. 3 цагаан, 4 хар тэргийг
$$C_{64}^3 \cdot C_{64-3}^4 = P(3, 4, 57) = \frac{64!}{57!3!4!} = 21742566720$$
янзаар байрлуулж болно.

3. 8 оронтой тоо хэчнээн ширхэг тоо байх вэ? Үүнээс хэчнээн нь

1. хөрш цифрүүд нь ялгаатай
2. 7-ийн цифр агуулаагүй
3. 7-ийн цифр агуулсан

байх вэ?
Бодолт 1.
Заавар:
Бодолт: Нийт $9 \cdot 10^7$ ширхэг 8 оронтой тоо бий. Учир нь эхний цифрийг 9 янзаар, бусад цифрүүдийг тус бүр 10 янзаар сонгох боломжтой.

1. Эхний цифрийг 9 янзаар, бусад цифрүүдийг нь өмнөх цифрээсээ ялгаатай байхаар тус бүр 9 янзаар сонгох боломжтой тул хөрш цифрүүд нь ялгаатай нийт 9^8 ширхэг 8 оронтой тоо байна.

2. 7-ийн цифр агуулаагүй гэвэл эхний цифр 8 боломжтой, бусад цифрүүд нь 9 боломжтой тул $8 \cdot 9^7$ ширхэг 8 оронтой тоо бий.

3. 7-ийн цифр агуулсан нийт $9 \cdot 10^8 - 8 \cdot 9^8$ ширхэг тоо байна.

4. 0, 1, 2, 3, 4, 5 цифрүүдээр 5-д хуваагддаг, ижил цифр агуулаагүй, 6 оронтой тоо хэчнээнийг зохиож болох вэ? Хэрэв ижил цифр агуулж болох бол хэчнээн тоо зохиож болох вэ?

Бодолт 1.

Заавар:

Бодолт: 0-ээр төгссөн бол үлдэх 5 цифрийг $A_5^5 = 120$ янзаар сонгон 5-д хуваагдах 6 оронтой тоо зохиож болно. 5 цифрээр төгссөн бол эхний цифрийг 0-ээс ялгаатай байхаар 4 янзаар сонгох ба үлдэх цифрүүдийг $A_4^4 = 24$ янзаар сонгох тул нийт $4 \cdot 24 = 96$ янзаар 5-д хуваагдах 6 оронтой тоо үүсгэж болно. Иймд нийт $120 + 96 = 216$ ширхэг 5-д хуваагддаг, ижил цифр агуулаагүй 6 оронтой тоо зохиож болно.

5.

1. 0, 1, 2, 3, 4, 5

2. 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6

3. 1, 2, 3, 4, 5, 6

цифрүүдийг ашиглан 7 оронтой 6-д хуваагддаг тоо хэчнээнийг зохиож болох вэ?

Бодолт 1.

Заавар: 2 ба 3-д зэрэг хуваагддаг тоонууд л 6-д хуваагддаг.

Бодолт:

1. 0, 1, 2, 3, 4, 5 тоонуудаас 0, 2, 4 нь тэгш тоонууд тул эдгээрийн аль нэгээр төгссөн тоо байх ёстой. Эдгээрээс 6 оронтой тоог $5 \cdot 6^5$ янзаар зохиож болох ба тоо бүрийн ард шинээр үүсэх тоо нь 3-д хуваагдаж байхаар 0, 2, 4 цифрүүдийн яг нэгийг нь бичиж болно. Иймд $5 \cdot 6^5 = 38880$ ширхэг 6-д хуваагдах тоо бичиж болно.

2. 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6 өмнөхийн адил 6 оронтой тоог $6 \cdot 7^5$ янзаар зохиож болох бөгөөд сүүлийн цифр нь 6 биш байхаар 3-д хуваагдах тэгш цифрийг цор ганц янзаар нэмж 6-д хуваагдах тоо үүсгэж болно. Одоо 6-аар төгссөн 6-д хуваагддаг тоог тоолоод нэмэхэд хангалттай. Сүүлийн цифр нь 6 бол өмнөх цифрүүдийн нийлбэр нь 3-д хуваагдах ёстой тул 3-д хуваагдах 6 оронтой хэдийг зохиож болохыг олъё. Өмнөхтэй ижлээр сэтгэвэл эхний 5 оронг $6 \cdot 7^4$ янзаар сонгох эдгээрийн ард 6 цифр нэмж бичихгүй гэвэл 3-д хуваагддаг байхаар тус бүр 2 янзаар нэмж бичиж болно. Иймд $6 \cdot 7^4 \cdot 2$ янзаар 3-д хуваагддаг 6 оронтой тоо бичиж болно. Иймд сүүлийн 2 цифр нь 6 байдаг тоонуудыг 3-д хуваагдах тоог тоолоод нэмэх шаардлагатай. Энэ мэтчилэн тоолбол нийт

$$6 \cdot 7^5 + 6 \cdot 7^4 \cdot 2 + 6 \cdot 7^3 \cdot 2 + 6 \cdot 7^2 \cdot 2 + 6 \cdot 7^1 \cdot 2 + 6 \cdot 2 + 2 = 134456$$

ширхэг 6-д хуваагддаг 7 оронтой тоо бичиж болно.

3. 1, 2, 3, 4, 5, 6 тоонуудаас 2, 4, 6 нь тэгш тоонууд тул эдгээрийн аль нэгээр төгссөн тоо байх ёстой. Эдгээрээс 6 оронтой тоог 6^6 янзаар зохиож болох ба тоо бүрийн ард шинээр үүсэх тоо нь 3-д хуваагдаж байхаар 2, 4, 6 цифрүүдийн яг нэгийг нь бичиж болно. Иймд $6^6 = 46656$ ширхэг 6-д хуваагдах тоо бичиж болно.

6. $ANAGRAMMA$ гэдэг үгийн үсгүүдийн байрыг солин нийт хэчнээн янзын үг үүсгэх вэ?

Бодолт 1.

Заавар:

Бодолт: A үсэг 4 ш, N үсэг 1 ш, G үсэг 1 ш, R үсэг 1 ш, M үсэг 2 ш орсон тул

$$P(4,1,1,1,2) = \frac{9!}{4! \cdot 1! \cdot 1! \cdot 1! \cdot 2!} = 7560$$

7. 12 хүүхдэд 4 хар, 8 сүүтэй шоколадыг хүүхэд бүрд нэг шоколад оногдож байхаар хэчнээн янзаар хувааж болох вэ?

Бодолт 1.

Заавар:

Бодолт: Хар шоколад оноох 4 хүүхдийг $C_{12}^4 = \dfrac{12!}{8! \cdot 4!} = 495$ янзаар сонгох ба үлдсэн хүүхдэд сүүтэй шоколад оноход хүүхэд бүрт нэг шоколад оногдоно. Иймд 495 янзаар оноож болно.

8. 30 сурагчийг дугуй ширээний ард хэчнээн янзаар суулгаж болох вэ?

Бодолт 1.

Заавар: Дугуй ширээн дээр суух тохиолдолд хүн бүрийн баруун, зүүн хөршүүд нь ижил байдаг буюу эргүүлэлтээр давхцах байрлалуудыг ижил гэж үздэг.

Бодолт: 30 сурагчийг 30 сандал дээр 30! янзаар суулгаж болох ба эргүүлэлтээр давхцах хоёр байрлалыг ижил гэж үзэх тул байрлал бүр 30 удаа давтагдсан байна. Иймд $\dfrac{30!}{30} = 29!$ янзаар суулгаж болно.

9. Аль ч хоёрынх нь ялгавар 8-д хуваагдахгүй байхаар хамгийн олондоо хэдэн ширхэг натурал тоо сонгож болох вэ?

Бодолт 1.

Заавар: 8-д хуваахад ижил үлдэгдэл өгдөг хоёр тооны ялгавар л 8-д хуваагддаг.

Бодолт: Хэрвээ 9 ширхэг тоо бол 8-д хуваахад ижил үлдэгдэл өгдөг 2 тоо эдгээр дотроос олдоно. Иймд 9-өөс цөөн тоо байна. $1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8$ тоонуудын аль ч хоёрынх нь ялгавар 8-д хуваагдахгүй. Иймд хамгийн олондоо 8 ширхэг натурал тоо сонгож болно.

10. Цифр бүр яг 2 удаа орсон 20 оронтой тоо хэдэн ширхэг байх вэ?

Бодолт 1.

Заавар:

Бодолт: Цифр бүр нь 2 удаа орсон тоонуудын сэлгэмэл нь $P(2, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2) = \dfrac{20!}{(2!)^{10}}$ ширхэг байх ба эдгээрээс 0 цифрээр эхэлсэн нь $P(2, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 1) = \dfrac{19!}{(2!)^9}$ тул 0-ээс ялгаатай цифрээр эхэлсэн сэлгэмэл буюу 20 оронтой тооны тоо

$$\frac{20!}{(2!)^{10}} - \frac{19!}{(2!)^9} = \frac{18 \cdot 19!}{1024}$$

байна.

11. 100 гишүүнтэй клубийн удирдах зөвлөлийг 4 хүнтэйгээр хэчнээн янзаар сонгож болох вэ? Хэрэв нэгэн зэрэг удирдах зөвлөлд орж болдоггүй 2 хүн байдаг бол хэчнээн янзаар сонгож болох вэ?

Бодолт 1.

Заавар:

Бодолт: 4 хүнийг C_{100}^4 янзаар сонгоно. Үүнээс цуг орж болохгүй хоёр хүн хоёулаа орсон нь C_{98}^2 тул цуг ороогүй нь $C_{100}^4 - C_{98}^2$ байна.

12. 100 ширхэг ялгаатай зүйлийг а) 1 улаан, 1 цэнхэр б) 2 ижил хайрцагт хайрцаг тус бүрд 50 зүйл орсон байхаар хэчнээн янзаар байрлуулж болох вэ?

Бодолт 1.

Заавар:

Бодолт: а) Улаан хайрцаг орох 50 зүйлийг C_{100}^{50} янзаар сонгоход үлдсэн нь хөх хайрцагт орно.

б) Хоёр ижил хайрцаг бол өмнөхөөс 2 дахин цөөн тул $C_{100}^{50}/2$ янзаар хоёр хайрцагт хувааж болно.

13. Яг 3 ялгаатай сондгой цифрээс бүрдэх ба цифр бүр яг 2 удаа орсон байх 6 оронтой тоо хэчнээн байх вэ?

Бодолт 1.

Заавар:

Бодолт: 3 сондгой цифрийг $C_5^3 = 10$ янзаар сонгож ба эдгээрээр цифрүүд тус бүр 2 удаа орсон 6 оронтой тоог $\dfrac{6!}{(2!)^3} = 90$ янзаар зохиох тул нийт $10 \cdot 90 = 900$ ширхэг тоо бий.

14. 10 төрлийн чихрээс

1. 1 найздаа 2 ялгаатай чихрийг
2. 1 найздаа 3 ширхэгийг
3. 5 найздаа тус бүр 2 ялгаатай чихрийг
4. 5 найздаа тус бүр 3 ширхэгийг

хэчнээн янзаар өгч болох вэ?

Бодолт 1.

Заавар:

Бодолт: 10 төрлийн чихрээс

1. 1 найздаа 2 ялгаатай чихрийг $C_{10}^2 = 45$
2. 1 найздаа 3 ширхэгийг $C_{(10)}^3 = C_{10+3-1}^3 = C_{12}^3 = 220$
3. 5 найздаа тус бүр 2 ялгаатай чихрийг $(C_{10}^2)^5 = 45^5$
4. 5 найздаа тус бүр 3 ширхэгийг $(C_{(10)}^3)^5 = 220^5$

янзаар өгч болно.

15. 50 самрыг 10 хүнд хүн бүр ядаж хоёрыг авсан байхаар хэчнээн янзаар хувааж болох вэ?

Бодолт 1.

Заавар:

Бодолт: Эхлээд хүн бүрт 2-ийг өгье. Үдэх 30 самарыг 10 хүнд хувааж өгөх нь 10 төрлийн зүйлээс 30-ийг сонгохтой ижил тул $C_{(10)}^{30}$ байна.

16. 1-4 тоогоор дугаарлагдсан хайрцагт мөн 1-4 тоогоор дугаарлагдсан 4 бөмбөг хийжээ. Хайрцаг болон бөмбөгний дугаар ялгаатай байхаар хэдэн янзаар хийх вэ?

Бодолт 1.

Заавар: U бүх ялгаатай хуваарилалтын олонлог, A_i нь i-р хайрцагт i дугаартай бөмбөг орсон байх хуваарилалтын олонлог гэе. Бидний олох боломжийн тоо нь

$$|\overline{A}_1\overline{A}_2\overline{A}_3\overline{A}_4| = |\overline{A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup A_4}| = |U| - |A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup A_4|$$

байна.

Бодолт: $U = 4!$ ба

$$|A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup A_4| = \sum |A_i| - \sum_{1\le i<j\le 4} |A_iA_j| + \sum_{1\le i<j<k\le 4} |A_iA_jA_k| - |A_1A_2A_3A_4| =$$

$$= 4\cdot 3! - C_4^2 \cdot 2! + C_4^3 \cdot 1! - 1 = 24 - 12 + 4 - 1 = 15.$$

тул $|\overline{A}_1\overline{A}_2\overline{A}_3\overline{A}_4| = 24 - 15 = 9$.

17. $a + b + c = 38$ байх сөрөг биш бүхэл тоон $(a; b; c)$ гурвал хэчнээн байх вэ?

Бодолт 1.

Заавар: $z \ge 0$ бол $x + y = 38 - z$ тэгшитгэл бүрийн шийдийн тоог ол.

Бодолт: $a + b = T$ тэгшитгэл $T + 1$ ширхэг бүхэл шийдтэй. $T = 38 - c$ нь $0, 1, \ldots, 38$ байж болох тул нийт $\sum\limits_{T=0}^{38}(T + 1) = 1 + 2 + 3 + \cdots + 39 = 780$ гурвал байна.

Бодолт 2.

Заавар:

Бодолт: 3 төрлийн зүйлээс 38-ийг авах боломжийн тоо буюу

$$C_{(3)}^{38} = C_{3+38-1}^{38} = C_{40}^{38} = \frac{40!}{2!\cdot 38!} = 780$$

байна.

18. Ангийн 35 сурагчийн 20 нь тооны, 11 нь физикийн дугуйланд явдаг ба 10 сурагч эдгээр дугуйлангийн алинд нь ч явдаггүй байв. Хэдэн сурагч 2 дугуйланд зэрэг явдаг ба хэдэн сурагч зөвхөн тооны дугуйланд явдаг вэ?

Бодолт 1.

Заавар:

Бодолт: U ангийн сурагчдын олонлог, A тооны дугуйлангийн сурагчид, B физикийн дугуйлангийн сурагчид гэвэл $|U| = 35$, $|A| = 20$, $|B| = 9$, $|U \setminus (A \cup B)| = |U| - |A \cup B| = 10$ байна. Иймд $|A \cup B| = 35 - 10 = 25$. Түүнчлэн

$$|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|$$

тул

$$25 = 20 + 9 - |A \cap B| \Rightarrow |A \cap B| = 4$$

болно. Иймд зөвхөн тооны дугуйланд сурдаг сурагчийн тоо $20 - 4 = 16$ байна.

19. 600 хуудастай номыг дугаарлахад 6-ийн цифр хэдэн удаа ашиглах вэ?

Бодолт 1.

Нийлбэрийн зарчим.

Хэрэв A объектийг m, B объектийг n янзаар сонгон авч болдог ба A объектийн нэг ч сонголт B объектийн аль ч сонголттой давхцахгүй бол эсвэл A, эсвэл B-г $m+n$ янзаар сонгон авч болно.

Үржвэрийн зарчим.

A, B нь өгөгдсөн олонлогууд бол

$$A \times B = \{(a, b) \mid a \in A, B \in B\}$$

олонлогийг A, B олонлогуудын Декарт үржвэр гэж нэрлэдэг. Декарт үржвэрийн элементийн тоо нь A, B олонлогуудын элементийн тоонуудын үржвэртэй тэнцүү байна:

$$|A \times B| = |A| \cdot |B|$$

Заавар: Зуут, аравт, нэгжийн оронд тус бүр хэдэн удаа бичигдэх вэ?

Бодолт: Зуутын оронд 6 цифр бичигдсэн тоо нь зөвхөн 600 байна.

Аравтын оронд нь 6 цифр бичигдсэн 600-аас бага тоонууд нь 6a, 16a, 26a, 36a, 46a, 56a хэлбэртэй байх бөгөөд a-ийн оронд 0-9 цифрүүд байж болох нийт $6 \cdot 10 = 60$ ширхэг тоо байна.

Нэгжийн оронд нь 6 цифр бичигдсэн 600-аас бага тоонуудыг дээрхтэй төстэй аргаар тооцоход 60 ширхэг байна. Иймд нийт $1 + 60 + 60 = 121$ ширхэг 6-ийн цифр ашиглана.

20. Шуудан дээр 10 төрлийн захидал худалдаж байв. 12 ил захидлыг хэчнээн янзаар худалдаж авч чадах вэ? 8 өөр захидлыг хэчнээн янзаар худалдаж авах вэ?

Бодолт 1.

Заавар:

Бодолт: 12 ил захидлыг $C_{(10)}^{12}$ янзаар худалдаж авах ба 8 өөр захидалыг C_{10}^{8} янзаар худалдаж авна.

21. Цифрүүд нь үл буурах эрэмбээр байрлах 4 оронтой тоо хэдэн ширхэг байх вэ? Үл буурах тул цифр давтагдан орж болно.

Бодолт 1.

Заавар: Давталттай хэсэглэлийн томьёог ашигла:

$$C_{(n)}^{k} = C_{n+k-1}^{k} = \frac{(n+k-1)!}{(n-1)! \cdot k!}$$

Бодолт: Дурын 4 цифрийг цор ганц аргаар үл буурах эрэмбээр байрлуулж болох ба эхний цифр нь 0-ээс ялгаатай тул 1-9 цифрүүдээс 4-ийг нь давталттайгаар сонгох тоо буюу

$$C_{(9)}^{4} = C_{12}^{4} = \frac{12 \cdot 11 \cdot 10 \cdot 9}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} = 495$$

байна.

22. Хайрцаг бүрд 7 эдлэл орсон байхаар 28 өөр эдлэлийг 4 хайрцагт байрлуулах боломжийг:

1. хайрцгууд ялгаатай байх,
2. хайрцгууд ялгаагүй байх тохиолдолд тус тус бод.

Бодолт 1.

Заавар: Эдлэл бүрийг жагсааж байгаад хайрцагны нэрийг буюу 4 үсэг бичвэл үсэг бүр 7 удаа орсон байна.

Бодолт: Дасгал ёсоор тийм бүх байрлалын тоо нь

1. $P(7, 7, 7, 7) = \dfrac{28!}{(7!)^4}$ болно.
2. $\dfrac{1}{4!} P(7, 7, 7, 7)$ болно.