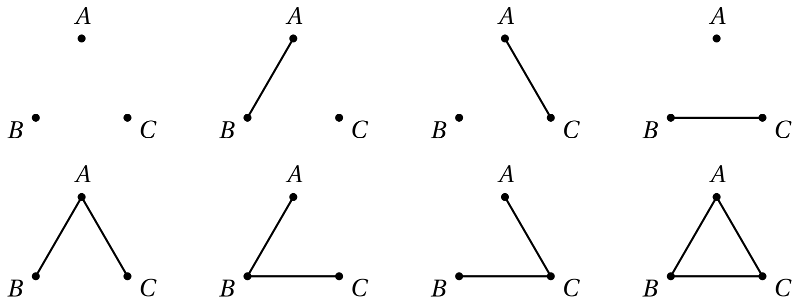
## Дискрет мат, Семинар №12

**1.** $A$, $B$, $C$ дээр оройтой энгийн граф нийт хэчнээн байх вэ? Хэрэв 10 оройтой бол хэчнээн ширхэг байх вэ?

***Бодолт 1.***

**Заавар:**

**Бодолт:**



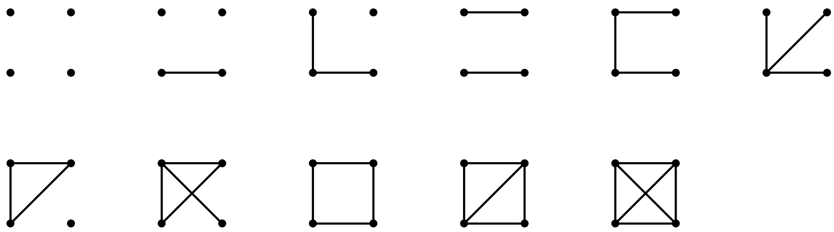

10 оройтой олонлогийн хувьд ирмэгүүд нь оройн олонлогийн хоёр оройтой дэд олонлог тул нийт $\binom{10}{2} = 55$ ялгаатай ирмэг байх боломжтой. Эдгээрийн аливаа дэд олонлог нь ирмэгийн олонлог болох боломжтой тул боломжит графийн тоо нь 55 элементтэй олонлогийн дэд олонлогийн тоо буюу $2^{55}$ байна.

**2.** 4 оройтой бүх энгийн графуудыг зурж оройн зэргийн нийлбэрүүдийг ол.

***Бодолт 1.***

**Заавар:**

**Бодолт:** 4 оройтой изоморф биш графуудыг дүрсэлбэл:



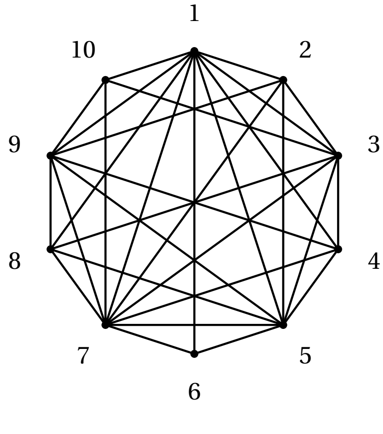
буюу нийт 11 ширхэг байна. Эдгээрийн оройн зэргүүдийн нийлбэр нь харгалзан 0, 2, 4, 4, 6, 6, 6, 8, 8, 10, 12 байна.

**3.** $\{1, 2, 3, \ldots, 10\}$ тоонууд дээр оройтой, харилцан анхны 2 оройг ирмэгээр холбосон граф зур.

***Бодолт 1.***

**Заавар:**

**Бодолт:**




**4.** Бүжгэнд 10 эрэгтэй, 8 эмэгтэй оролцжээ. Эрэгтэй болгон 4 эмэгтэйтэй бүжиглэсэн ба, эмэгтэй болгон ижил тооны эрэгтэйтэй бүжиглэсэн бол нэг эмэгтэй хэдэн эрэгтэйтэй бүжиглэсэн бэ?

***Бодолт 1.***

**Заавар:**

**Бодолт:** Туйлт графын ирмэгийн тоо нь аль ч туйл дээрх оройнуудын зэргүүдийн нийлбэр байдаг. Иймд эмэгтэй болгон $k$ ширхэг эрэгтэйтэй бүжиглэсэн гэвэл

$$\text{И} = 10 \cdot 4 = 8 \cdot k \Rightarrow k = 5$$

байна.

**5.** Оройн зэрэг нь

1. 1, 1, 3, 3, 3, 3
2. 1, 1, 3, 3, 3

байх граф оршин байх уу?

***Бодолт 1.***

**Заавар:** Графын оройн зэрэг нь тухайн оройг агуулж байгаа ирмэгийн тоо бөгөөд гогцоо буюу өөрийг нь өөртэй нь холбосон ирмэгийг 2-ирмэг гэж тооцож тоолдог. Гогцоог 1 удаа тоолно гэж андуурсан байсан тул үүнийг анхаараарай!

**Бодолт:**

1. $K_2$, $K_4$ графуудыг нийлүүлэхэд граф нь бодлогын нөхцөлийг хангана.
2. Аливаа графын оройн зэргүүдийн нийлбэр нь ирмэгийн тоог 2 дахин авсантай тэнцүү байдаг. Тул оройн зэргүүдийн нийлбэр ямагт тэгш тоо байх ёстой. Гэтэл

   $$1 + 1 + 3 + 3 + 3 = 11$$

   нь сондгой тоо тул ийм граф оршин байх боломжгүй.

**6.** Оройн зэрэг нь

1. 12, 3, 3, 2, 2
2. 6, 6, 6, 6, 3, 3, 2, 2

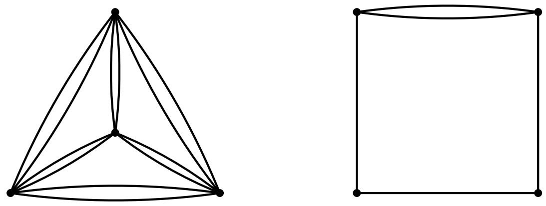
байх гогцоогүй граф орших уу?

***Бодолт 1.***

**Заавар:**

**Бодолт:**

1. Оршин байхгүй. Учир нь эсрэгээс нь ийм граф оршин байдаг гэж үзвэл оройн зэрэг нь 12 байх оройгоос бусад оройнууд руу 12 ирмэг гарах боловч бусад оройнуудаас хамгийн олондоо $3 + 3 + 2 + 2 = 10$ ирмэг энэ орой руу гарах боломжтой тул зөрчил үүсч байна. Иймд ийм оройн зэргүүдтэй граф оршин байхгүй.
2. Дараах мультиграфын хувьд бодлогын нөхцөл биелэнэ.



**7.** Оройн зэрэг нь

1. 3, 3, 3, 2, 2, 2, 1, 1, 1
2. 6, 6, 5, 4, 4, 3, 2, 2, 1, 1
3. 6, 6, 6, 6, 3, 3, 2, 2

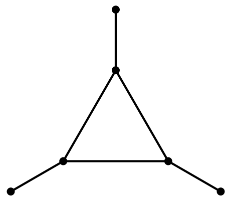
байх энгийн граф орших уу?

***Бодолт 1.***

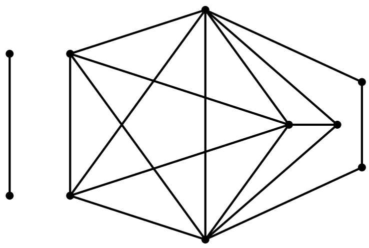
**Заавар:**

**Бодолт:**

1. Бодлогын нөхцөлийг хангах графын жишээ.



2. Бодлогын нөхцөлийг хангах графын жишээ.



3. Хэрэв иим энгийн граф оршин байдаг гэж үзвэл оройн зэргүүд нь 6 байх оройнуудын хувьд тэдгээрийг өөр хооронд нь холбосон ирмэг хамгийн олондоо 6 ширхэг байх тул дор хаяж $6 \cdot 4 - 2 \cdot 6 = 12$ ирмэг бусад оройнууд руу гарах ёстой. Иймд бусад оройнуудын зэргүүдийн нийлбэр нь дор хаяж 12 байх ёстой. Гэтэл бусад оройнуудын зэргийн нийлбэр $3 + 3 + 2 + 2 = 10$ тул зөрчил үүсч байна. Иймд бодлогын нөхцөлийг хангах энгийн граф оршин байхгүй.

**8.** Дурын энгийн графд оройн зэрэг нь ижил байх 2 орой олдохыг батал. Дээрх өгүүлбэр энгийн биш графийн хувьд үнэн үү?

***Бодолт 1.***

**Заавар:**

**Бодолт:** Эсрэгээс нь бүгдээрээ өөр өөр зэрэгтэй гэвэл оройн зэргүүд нь $0, 1, \ldots, n-1$ байна. Гэтэл 0 зэрэгтэй орой байвал бусад бүх оройтой холбогдсон орой буюу $n-1$ зэргийн орой байх боломжгүй юм. Иймд ижил зэрэгтэй хоёр орой олдоно.

**9.** 8 хүнээс "Бусад 7 хүн дотроос та хэдийг нь таних вэ?" гэдэг асуулт тавихад Амар 2, Болд 5, Сугар 4, Дорж 0, Энхээ 3, Марал 5, Цэцгээ 6, Чимгээ 4 гэсэн хариултуудыг тус тус өгсөн бол хэн нэг нь андуурсан гэж батал.

***Бодолт 1.***

**Заавар:**

**Бодолт:** Хэрвээ бүгд үнэн хэлсэн гэвэл 8 хүнийг графын орой болгон аваад танилуудыг ирмэгээр холбоход үүсэх графын оройн зэргүүдийн нийлбэр

$$2 + 5 + 4 + 0 + 3 + 5 + 6 + 4 = 25$$

болно. Гэтэл энэ тоо нь ирмэгийн тоог 2 дахин авсантай тэнцүү буюу тэгш тоо байх ёстой тул зөрчил үүсч байна. Иймд хэн нэг нь худал хэлжээ.

**10.** 100 элементтэй олонлогоос 27 дэд олонлогийг дэд олонлог бүр яг 7 дэд олонлогтой ерөнхий огтлолцолтой байхаар сонгож болох уу?

***Бодолт 1.***

**Заавар:** Графын оройн зэргүүдийн нийлбэр тэгш тоо байдаг.

**Бодолт:** Дэд олонлог бүрийг орой гээд ерөнхий элементтэй бол ирмэгээр холбоё. Тэгвэл оройн зэргүүдийн нийлбэр нь $27 \cdot 7 = 189$ гэсэн сондгой тоо болоход хүрч байна. Иймд ийм 27 дэд олонлог сонгох боломжгүй.

**11.** Оройн зэрэг нь

1. 7, 7, 7, 6, 6, 6, 5, 5, 5
2. 5, 4, 3, 3, 3

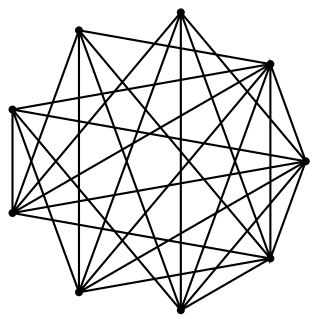
байх энгийн граф орших уу?

***Бодолт 1.***

**Заавар:**

**Бодолт:**

1. 7, 7, 7, 6, 6, 6, 5, 5, 5 оройн зэргүүдтэй энгийн графын жишээ.



2. 5, 4, 3, 3, 3 оройн зэргүүдтэй энгийн граф оршин байхгүй. Учир нь 5 оройтой энгийн графын оройн зэрэг хамгийн ихдээ 4 байх боломжтой.

**12.** $\{1, 2, \dots, 100\}$ нь $G$ графийн оройнууд ба $i$ болон $j$ оройнуудыг

1. $i - j$ сондгой
2. $i \neq j$ үед $i - j$ нь 3 т хуваагдаж байвал
3. $|i - j| = 3$ эсвэл $|i - j| = 8$ тохиолдлуудад тус тус ирмэгээр холбоё.

Тэгвэл дээрх 3 тохиолдол бүрийн хувьд $G$ граф холбоост граф мөн үү?

***Бодолт 1.***

**Заавар:**

**Бодолт:**

1. $i - j$ сондгой бол $i$, $j$ оройг холбох бол дараалсан хоёр оройн хувьд $i - (i - 1) = 1$ буюу сондгой тул ирмэгээр холбогдоно. Иймд
$$1 \to 2 \to 3 \to \cdots \to 100$$
гээд бүх орой холбогдоно. Иймд холбост граф юм.

2. $i \neq j$ үед $i - j$ нь 3-т хуваагдаж байвал ирмэгээр холбох бол $\{1, 4, 7, \dots, 100\}$, $\{2, 3, 4, \dots, 98\}$, $\{3, 6, 9, \dots, 99\}$ гэсэн оройнуудтай гурван гүйцэт граф буюу $K_{34}$, $K_{33}$, $K_{33}$ графуудыг нийлүүлэхэд үүсэх граф гарна. Аль ч хоёр хэсгийг холбох ирмэг байхгүй тул 3 компоненттэй холбоост биш граф үүснэ.

3. $|i - j| = 3$ тохиолдолд ирмэгээр холбоё. Тэгвэл
$$1 \to 4 \to 7 \to 10 \to \cdots \to 100$$
$$2 \to 5 \to 8 \to 11 \to \cdots \to 98$$
$$3 \to 6 \to 9 \to 12 \to \cdots \to 99$$
гэсэн 3 холбоост хэсэг үүсэх ба $|1 - 9| = 8$ тул 1 ба 3 дугаар хэсгүүд $|2 - 10| = 8$ тул 1 ба 2-р хэсгүүд холбогдох тул бүх оройнууд ирмэгээр дамжин холбогдоно. Иймд холбоост граф юм.

**13.** Оройнууд нь 1 ээс 100 хүртлэх тоонууд байх графийн $i$ ба $j$ оройнуудыг

1. $1 < |i - j|$
2. $i - j$ нь тэгш ба 0 ээс ялгаатай

тохиолдлуудад тус тус ирмэгээр холбосон бол эдгээр графууд тус тус хэдэн ирмэгтэй вэ?

***Бодолт 1.***

**Заавар:**

**Бодолт:**

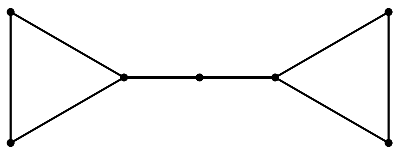
1. Аль ч хоёр орой ирмэгээр холбогдсон гэвэл $C_{100}^2$ ирмэг болох ба эдгээрээс дугааруудынх нь ялгавар 1 байх
$$1-2, 2-3, \dots, 99-100$$
гэсэн 99 ирмэгийг хасвал
$$C_{100}^2 - 99 = \frac{100 \cdot 99}{2} - 99 = 4891$$
ирмэг байна.
2. Ялгавар нь тэгш байдаг оройнуудыг холбовол $\{1, 3, 5, \dots, 99\}$, $\{2, 4, 6, \dots, 100\}$ гэсэн тус бүр 50 оройтой хоёр гүйцэт граф үүсэх тул ирмэгийн тоо нь $2 \cdot C_{50}^2 = 2450$ байна.

**14.** Графийн оройн зэрэг бүр 2-оос багагүй бол граф цикл агуулна гэж батал. Орой бүрийг ямар нэгэн цикл дайрч гарна гэж үнэн үү?

***Бодолт 1.***

**Заавар:**

**Бодолт:** Хоорондоо ирмэгээр холбогдсон $v_0$, $v_1$ оройнууд авч үзье. $v_1$ оройн зэрэг 2-оос багагүй тул $v_0$ оройгоос ялгаатай $v_2$ гэсэн хөрш оройтой. $v_2$ хэрвээ $v_2$ орой нь $v_0$ оройтой ирмэгээр холбогдсон бол $v_0v_1v_2v_0$ гэсэн цикл олдоно. Үгүй бол $v_2$ оройн зэрэг 2-оос багагүй тул $v_3$ гэсэн хөрш оройтой. Хэрэв $v_3$ нь $v_0$, $v_1$ оройнуудын аль нэгтэй холбогдсон бол өмнөхийн адил цикл олдоно. Эсрэг тохиолдолд эдгээрээс ялгаатай $v_4$ гэсэн хөрш оройтой. Оройн тоо төгсгөлөг тул аль нэг $k$-р алхамд $v_k$ орой $v_0, v_1, \dots, v_{k-2}$ оройнуудын аль нэгтэй холбогдоно. Холбогдсон оройг $v_i$ гэвэл $v_iv_{i+1}\dots v_kv_i$ гэсэн цикл олдно. Орой бүрийг дайрсан цикл олдох албагүй. Жишээ нь



**15.** $G$ нь $2n + 1$ оройтой бүх оройн зэрэг нь $n$ ээс багагүй энгийн граф бол $G$-г холбоост гэж батал.

***Бодолт 1.***

**Заавар:** Хоорондоо холбогдоогүй $a$, $b$ ирмэгүүдийн хувьд тэдгээртэй хоёулантай нь холбогдсон орой бий гэдгийг харуул.

**Бодолт:** $V$ нь графын оройн олонлог ба $a$, $b$ оройнууд хоорондоо холбогдоогүй оройнууд бол эдгээр оройнуудын хөршүүд $X = V \setminus \{a, b\}$, $|X| = 2n - 1$ олонлогт байна. Иймд $N(a) \subseteq X$, $N(b) \subseteq X$ байна. Хэрвээ $|N(a) \cap N(b)| = 0$ буюу ерөнхий хөршгүй гэвэл
$$|X| \geq |N(a) \cup N(b)| = |N(a)| + |N(b)| = n + n$$
буюу $2n - 1 \geq 2n$ болж зөрчил үүсч байна. Иймд ирмэгээр холбогдоогүй аливаа хоёр орой ерөнхий хөрштэй боллоо. Иймд $G$ граф холбоост граф болж батлах зүйл батлагдлаа.

**16.** Энгийн графийн оройн зэрэг бүр $k$-аас багагүй бол графд ядаж $k + 1$ оройг агуулах цикл олдохыг батал.

***Бодолт 1.***

**Заавар:**

**Бодолт:** Аль нэг оройгоос гараад өмнөх $k - 1$ оройн алинтай ч холбогдохгүй байх замаар явахад (оройн зэргүүд $k$-аас багагүй тул ингэж явах боломжтой) хэзээ нэг цагт цикл үүснэ. Энэ цикл нь дор хаяж $k + 1$ оройг агуулна.

**17.** $G$ граф дахь зам бүр $k$-аас хэтрэхгүй урттай. Хэрэв $G$ холбоост бол $k$ урттай ямарч 2 зам ерөнхий оройтой гэж батал.

***Бодолт 1.***

**Заавар:**

**Бодолт:** Эсрэгээс нь $a_0a_1a_2\dots a_k$, $b_0b_1b_2\dots b_k$ гэсэн $k$ урттай хоёр зам ерөнхий оройгүй гэе. $G$ граф холбоост тул эдгээрийн $a_i$ ба $b_j$ оройнуудыг холбосон, өгөгдсөн хоёр замаас $a_i$, $b_j$-ээс өөр орой агуулаагүй $a_ipb_j$ зам олдоно. Замуудынхаа оройг дахин дугаарлах ($a_i$, $b_j$-ээр хуваагдсан хэсгүүдийн аль уртыг сонгох) замаар $i \geq \dfrac{k}{2}$, $j \geq \dfrac{k}{2}$ гэж үзэж болно. Тэгвэл $a_0a_1\dots a_ipb_jb_{j-1}\dots b_1b_0$ зам дор хаяж $\dfrac{k}{2}+1+\dfrac{k}{2}$ ирмэгтэй буюу дор хаяж $k+1$ урттай болж зөрчил үүсч байна. Иймд аливаа $k$ урттай хоёр зам ерөнхий оройтой байна.

**18.** $G$ графийн оройнууд нь 1 ээс 100 хүртлэх тоонууд ба $|i-j|=4$ эсвэл $|i-j|=6$ үед $i$ ба $j$ оройнуудыг ирмэгээр холбоё. Тэгвэл $G$ граф нийт хэдэн ирмэгтэй вэ? $G$ граф нийт хичнээн компоненттэй вэ?

***Бодолт 1.***

**Заавар:**

**Бодолт:** $d(1)=d(100)=2$, $d(2)=d(99)=2$, $d(3)=d(98)=2$, $d(4)=d(97)=2$, $d(5)=d(96)=3$, $d(6)=d(95)=3$, $d(7)=\cdots=d(94)=4$ байна. Оройн зэргүүдийн нийлбэр нь ирмэгийн тоог 2 дахин авсантай тэнцүү тул ирмэгийн тоо

$$e=\sum_{i=1}^{100} d(i)=\frac{8\cdot 2+4\cdot 3+82\cdot 4}{2}=178$$

байна.

**19.** Гаднаасаа үл ялгагдах а) 9 ширхэг б) $n$ ширхэг зоосон дунд нэг ширхэг бусдаасаа хүнд зоос байжээ. Хоёр тавагтай жинлүүр ашиглан хамгийн багадаа хэдэн удаа жинлэн хуурамч зоосыг олж чадах вэ?

***Бодолт 1.***

**Заавар:**

**Бодолт:** 9 ширхэг зоосоо 3, 3-аар нь хуваагаад аль нэг хоёр хэсгийг нь жинлэе. Хэрвээ аль нэг хэсэг нь хүнд бол хүнд хэсэгт нь хуурамч зоос байна. Тэнцүү бол үлдсэн хэсэгт нь хуурамч зоос байна. Хуурамч зоостой хэсгийн хоёр зоосыг нь жинлэж үзэхэд аль нэг нь хүнд бол тэр нь хуурамч зоос болно. Тэнцвэл үлдэх нэг зоос нь хуурамч болно.

Өмнөхийн адил сэтгэвэл нэг удаагийн жинлэлтээр $\left\lceil\dfrac{n}{3}\right\rceil$ зоосны бодлогод шилжүүлж чадах нь харагдаж байна. Үнэндээ зооснуудаа $A_1$, $A_2$, $A_3$ хэсгүүдээд хуваагаад $A_1$, $A_2$-ийг жинлэсэн гэвэл хуурамч зоос аль хэсэгт байх боломжтой тул муу тохиолдолдоо $|A_1|$, $|A_2|$, $|A_3|$-ийн аль их зоостойгоос нь хуурамч зоос олох бодлогод шилжинэ. Иймд аль болох тэнцүү гурван хэсэгт хувааж ижил зоостой 2 хэсгийг нь жинлэх аргаар хуурамч зоостой хэсгийг илрүүлж бодно. Өөрөөр хэлбэл $f(n)$-ээр хамгийн цөөн жинлэлтийн тоог тэмдэглэвэл

$$f(n)=f(\lceil n/3\rceil)+1$$

рекуррент томьёо биелэнэ. Эндээс $f(n)=\lceil\log_3 n\rceil$ болно. Энд $\lceil n\rceil$ нь $n$ тооноос багагүй, хамгийн бага натурал тоо юм.