Дискрет мат, Семинар №02

1. Дараах хэллэгүүдийн үгүйсгэлийг бич.

1. Бат хичээлдээ явган эсвэл автобусаар ирдэг.
2. Дулмаа авъяастай бөгөөд ажилсаг.
3. Дорж сургуулиа төгсөөд ажиллана эсвэл магистрт элсэнэ.
4. Бид үдийн хоолондоо мах, ногоо иддэг.

Бодолт 1.

1. Бат хичээлдээ явган ч ирдэггүй, автобусаар ч ирдэггүй.
2. Дулмаа авъяасгүй юмуу залхуу.
3. Дорж сургуулиа төгсөөд ажил ч хийхгүй, магистрт ч элсэхгүй.
4. Бид үдийн хоолондоо мах, ногооны аль нэгийг нь иддэггүй.

2. Дараах илэрхийллүүд тавтологи мөн үү?

1. $(p \wedge q) \to p$
2. $\neg p \to (p \to q)$
3. $\neg(p \to q) \to p$
4. $p \to (p \vee q)$
5. $(p \wedge q) \to (p \to q)$
6. $\neg(p \to q) \to \neg q$
7. $[(p \to q) \wedge (q \to r)] \to (p \to r)$
8. $[(p \vee q) \wedge (p \to r) \wedge (q \to r)] \to r$

Бодолт 1.

Тавтолог бол үнэний утгын хүснэгтийг байгуулаад батлах юмуу шууд логик утгаар нь баталж болно. Тавтолог биш бол худал утга авах хувьсагчдын утгыг зааж өгөхөд хангалттай.

1. $(p \wedge q) \to p$ нь тавтолог юм. Учир нь эсрэгээс нь хувьсагчийн ямар нэг утгад худал гэвэл $p \wedge q = 1$ ба $p = 0$ байх ёстой. Гэтэл $p \wedge q = 1$ бол $p = 1$, $q = 1$ байх ёстой. Энэ нь $p = 0$-тэй зөрчилдөж байна.
2. $\neg p \to (p \to q)$ нь тавтолог юм. Учир нь эсрэгээс нь хувьсагчийн ямар нэг утгад худал гэвэл $\neg p = 1$ ба $p \to q = 0$ байх ёстой. Гэтэл $\neg p = 1$ бол $p = 0$, $p \to q = 0$ бол $p = 1$ ба $q = 0$ байх ёстой болж зөрчил үүсч байна.
3. $p \to (p \vee q)$ нь тавтолог юм. Учир нь эсрэгээс нь хувьсагчийн ямар нэг утгад худал гэвэл $p = 1$ ба $p \vee q = 0$ байх ёстой. Гэтэл $p \vee q = 0$ бол $p = 0$ ба $q = 0$ байх ёстой болж зөрчил үүсч байна.
4. $(p \wedge q) \to (p \to q)$ нь тавтолог болно. Учир нь эсрэгээс нь хувьсагчийн ямар нэг утгад худал гэвэл $p \wedge q = 1$ ба $p \to q = 0$ байх ёстой. Гэтэл $p \wedge q = 1$ бол $p = 1$ ба $q = 1$, $p \to q = 0$ бол $p = 1$, $q = 0$ байх ёстой тул q нь нэгэн зэрэг үнэн ба худал авахад хүрч зөрчил үүсч байна.
5. $\neg(p \to q) \to \neg q$ бол

p	q	$p \to q$	$\neg(p \to q)$	$\neg q$	$\neg(p \to q) \to \neg q$
1	1	1	0	0	1
1	0	0	1	1	1
0	1	1	0	0	1
0	0	1	0	1	1

тул тавтолог болно.

6. $[(p \to q) \wedge (q \to r)] \to (p \to r)$ нь тавтолог болно. Учир эсрэгээс нь хувьсагчийн ямар нэг утгад худал утга авдаг гэвэл $(p \to q) \wedge (q \to r) = 1$ ба $p \to r = 0$ байна. Эндээс $p \to r = 0 \Rightarrow p = 1,\ r = 0$ байх ёстой. Гэтэл $q = 0$ бол
$$(p \to q) \wedge (q \to r) = (1 \to 0) \wedge (0 \to 0) = 0 \wedge 1 = 0$$
болж зөрчил үүсэх ба $q = 1$ бол
$$(p \to q) \wedge (q \to r) = (1 \to 1) \wedge (1 \to 0) = 1 \wedge 0 = 0$$
болж мөн л зөрчил үүснэ.

7. $[(p \vee q) \wedge (p \to r) \wedge (q \to r)] \to r$ нь тавтолог юм. Учир нь эсрэгээс нь хувьсагчийн ямар нэг утга худал гэвэл
$$[(p \vee q) \wedge (p \to r) \wedge (q \to r)] \to r = 0 \Rightarrow (p \vee q) \wedge (p \to r) \wedge (q \to r) = 1 \wedge (r = 0)$$
байна. $r = 0$ ба $p \to r = q \to r = 1$ тул $p = q = 0$ байна. Энэ үед $p \vee q = 0$ болох тул
$$(p \vee q) \wedge (p \to r) \wedge (q \to r) = 0 \wedge 1 \wedge 1 = 0$$
болж зөрчил үүсч байна.

3. Дараах илэрхийллүүдийг логик эквивалент гэж харуул.

1. $p \leftrightarrow q = (p \wedge q) \vee (\neg p \wedge \neg q)$
2. $\neg(p \leftrightarrow q) = p \leftrightarrow \neg q$
3. $p \to q = \neg q \to \neg p$
4. $\neg(p \leftrightarrow q) = \neg p \leftrightarrow q$
5. $(p \to q) \wedge (p \to r) = p \to (q \wedge r)$
6. $(p \to r) \wedge (q \to r) = (p \vee q) \to r$
7. $(p \to q) \vee (p \to r) = p \to (q \vee r)$
8. $(p \to r) \vee (q \to r) = (p \wedge q) \to r$
9. $\neg p \to (q \to r) = q \to (p \vee r)$

Бодолт 1.
Томьёо тус бүрийн үнэний утгын хүснэгтийг харьцуул.
4. Дараах илэрхийллүүд логик эквивалент мөн үү?

1. $(p \to q) \to r$ ба $p \to (q \to r)$
2. $(p \vee q) \to r$ ба $(p \to r) \wedge (q \to r)$
3. $(p \to q) \to (r \to s)$ ба $(p \to r) \to (q \to s)$

Бодолт 1.
Үнэний утгын хүснэгтийг нь байгуулах замаар шалгах юмуу логик утгаар нь хөөж бодож болно.

1. $(p \to q) \to r = 0$ байх зайлшгүй бөгөөд хүрэлцээтэй нөхцөл нь $(p \to q = 1) \wedge (r = 0)$ болно. Эндээс зөвхөн $p = 0,\ r = 0$ эсвэл $p = 1,\ q = 1,\ r = 0$ байна.

   $p \to (q \to r) = 0$ байх зайлшгүй бөгөөд хүрэлцээтэй нөхцөл нь $(p = 1) \wedge (q \to r = 0)$ байна. Эндээс зөвхөн $p = 1,\ q = 1,\ r = 0$ болно. Өөрөөр хэлбэл $p = r = 0$ үед хоёр томьёо тэнцэхгүй. Үнэхээр $p = 0,\ q = 0,\ r = 0$ үед
$$(p \to q) \to r = (0 \to 0) \to 0 = 1 \to 0 = 0$$
   ба
$$p \to (q \to r) = 0 \to (0 \to 0) = 0 \to 1 = 1$$
   байна. Иймд хоёр томьёо эквивалент биш юм.

2. $(p \vee q) \to r$ ба $(p \to r) \wedge (q \to r)$ эквивалент. Учир нь $x \to y = \neg x \vee y$ тул

$$\begin{aligned}(p \vee q) \to r &= \neg(p \vee q) \vee r \\ &= (\neg p \wedge \neg q) \vee r \\ &= (\neg p \vee r) \wedge (\neg q \vee r) \\ &= (p \to r) \wedge (q \to r)\end{aligned}$$

3. $(p \to q) \to (r \to s)$ ба $(p \to r) \to (q \to s)$ эквивалент биш юм.

   q, r тэгш хэмтэй тул $(p \to q) \to (r \to s) = 0$ ба $(p \to r) \to (q \to s) = 1$ байх хувьсагчийн утгууд олдох эсэхийг шалгая. $(p \to q) \to (r \to s) = 0$ тул $p \to q = 1$, $r \to s = 0$ байна. Эндээс $\neg p \vee q = 1$, $r = 1$, $s = 0$ болно. Эндээс тохиолдол салгаж шалгая. Хэрэв $\neg p = 1$ бол $p = 0$ ба

$$(p \to r) \to (q \to s) = (0 \to 1) \to (q \to 0) = 1 \to (q \to 0)$$

   болно. Энэ нь $q = 0$ үед

$$1 \to (0 \to 0) = 1 \to 1 = 1$$

   буюу үнэн утга авч байна. Өөрөөр хэлбэл $p = 0$, $q = 0$, $r = 1$, $s = 0$ үед

$$(p \to q) \to (r \to s) = 0 \neq 1 = (p \to r) \to (q \to s)$$

   тул эквивалент биш.

5. Дараах илэрхийллүүдийн нийцтэй эсэхийг тогтоо.

1. $(p \vee \neg q) \wedge (\neg p \vee q) \wedge (\neg p \vee \neg q)$
2. $(p \leftrightarrow q) \wedge (\neg p \leftrightarrow q)$
3. $(p \vee q \vee \neg r) \wedge (p \vee \neg q \vee \neg s) \wedge (p \vee \neg r \vee \neg s) \wedge (\neg p \vee \neg q \vee \neg s) \wedge (p \vee q \vee \neg s)$
4. $(\neg p \vee \neg q \vee r) \wedge (\neg p \vee q \vee \neg s) \wedge (p \vee \neg q \vee \neg s) \wedge (\neg p \vee \neg r \vee \neg s) \wedge (p \vee q \vee \neg r) \wedge (p \vee \neg r \vee \neg s)$

Бодолт 1.

Хувьсагчдын ямар нэг утгад үнэн байдаг томьёог *нийцтэй томьёо* гэдэг.

1. $(p \vee \neg q) \wedge (\neg p \vee q) \wedge (\neg p \vee \neg q)$ нь нийцтэй томьёо юм. Учир нь $p = 0$, $q = 0$ үед

$$(p \vee \neg q) \wedge (\neg p \vee q) \wedge (\neg p \vee \neg q) = (0 \vee 1) \wedge (1 \vee 0) \wedge (1 \vee 1) = 1$$

   байна.

2. $(p \leftrightarrow q) \wedge (\neg p \leftrightarrow q)$ нь нийцгүй томьёо юм. Учир нь

$$\begin{aligned}(p \leftrightarrow q) \wedge (\neg p \leftrightarrow q) &= [(p \wedge q) \vee (\neg p \wedge \neg q)] \wedge [(\neg p \wedge q) \wedge (p \wedge \neg q)] \\ &= [(p \wedge q) \vee (p \wedge \neg q)] \wedge [(\neg p \wedge q) \wedge (\neg p \wedge \neg q)] \\ &= [p \wedge (q \vee \neg q)] \wedge [\neg p \wedge (q \vee \neg q)] \\ &= (p \wedge 1) \wedge (\neg p \wedge 1) = p \wedge \neg p\end{aligned}$$

   мэдээж сүүлийн томьёо p-ийн ямар ч утгад үнэн байх боломжгүй юм.

3. $(p \vee q \vee \neg r) \wedge (p \vee \neg q \vee \neg s) \wedge (p \vee \neg r \vee \neg s) \wedge (\neg p \vee \neg q \vee \neg s) \wedge (p \vee q \vee \neg s)$ нь нийцтэй томьёо юм. Учир нь $p = 1$, $s = 0$ бол $\neg s = 1$ болох тул

$$\begin{aligned}\text{Томьёо} &= (1 \vee q \vee \neg r) \wedge (1 \vee \neg q \vee 1) \wedge (1 \vee \neg r \vee 1) \wedge (0 \vee \neg q \vee 1) \wedge (1 \vee q \vee 1) \\ &= 1 \vee 1 \vee 1 \vee 1 = 1\end{aligned}$$

   буюу үнэн утга авч байна.

4. $(\neg p \vee \neg q \vee r) \wedge (\neg p \vee q \vee \neg s) \wedge (p \vee \neg q \vee \neg s) \wedge (\neg p \vee \neg r \vee \neg s) \wedge (p \vee q \vee \neg r) \wedge (p \vee \neg r \vee \neg s)$ нь нийцтэй томьёо юм жишээ нь $p = q = r = s = 0$ үед хаалт бүрийн ядаж нэг гишүүн 1-тэй тэнцэх тул конъюнкц нь 1 гэсэн утга авна.

6. Хэрэв $P(x) =$ "Оюутан x нь 7 хоногт 10-аас олон цаг сургууль дээр өнгөрөөдөг." бол дараах илэрхийллүүдийг үгээр бич.

1. $\exists x P(x)$
2. $\forall x P(x)$
3. $\exists x \neg P(x)$
4. $\forall x \neg P(x)$

Бодолт 1.
$P(x) =$ "Оюутан x нь 7 хоногт 10-аас олон цаг сургууль дээр өнгөрөөдөг."

1. 7 хоногт хоногт 10-аас олон цагийг сургууль дээрээ өнгөрөөдөг оюутан байдаг.
2. Бүх оюутан 7 хоногт 10-аас олон цагийг сургууль дээрээ өнгөрөөдөг.
3. 7 хоногт хоногт 10-аас олон цагийг сургууль дээрээ өнгөрөөдөггүй оюутан байдаг.
4. Бүх оюутан 7 хоногт 10-аас олон цагийг сургууль дээрээ өнгөрөөдөггүй.

7. X нь ангийн сурагчдын олонлог ба $x \in X$ байг. Түүнчлэн $N(x) =$ "x хүн нохой тэжээдэг", $M(x) =$ "x хүн муур тэжээдэг" $Z(x) =$ "x хүн загас тэжээдэг" бол дараах өгүүлбэрүүдийг логик илэрхийллээр бич.

1. Нохой, муур, загас гурвууланг нь тэжээдэг сурагч бий.
2. Ангийн бүх сурагч нохой, муур, загас гурвууланг нь тэжээдэг.
3. Ангийн зарим сурагч нохой, муур тэжээдэг боловч загас тэжээдэггүй.
4. Ангид нохой, муур, загас гурвууланг нь тэжээдэг сурагч байхгүй.
5. Эдгээр 3 амьтаны ядаж нэгийг нь тэжээдэг сурагч ангид бий.

Бодолт 1.
X нь ангийн сурагчдын олонлог ба $x \in X$ байг. Түүнчлэн $N(x) =$ "x хүн нохой тэжээдэг", $M(x) =$ "x хүн муур тэжээдэг" $Z(x) =$ "x хүн загас тэжээдэг" бол дараах өгүүлбэрүүдийг логик илэрхийллээр бич.

1. $\exists x[N(x) \wedge M(x) \wedge Z(x)]$
2. $\forall x[N(x) \wedge M(x) \wedge Z(x)]$
3. $\exists x[N(x) \wedge M(x) \wedge \overline{Z(x)}]$
4. $\neg\exists x[N(x) \wedge M(x) \wedge Z(x)] = \forall x[\neg N(x) \vee \neg M(x) \vee \neg Z(x)]$
5. $\exists x[N(x) \vee M(x) \vee Z(x)]$

8. Хэрэв тодорхойлогдох муж нь $\mathbb{R}$ бол дараах илэрхийллийн үнэн эсэхийг тогтоо.

1. $\exists x(x^3 = -1)$
2. $\exists x(x^4 < x^2)$
3. $\forall x[(-x)^2 = x^2]$
4. $\forall x(2x > x)$

Бодолт 1.

1. $\exists x(x^3 = -1)$ үнэн. Учир нь $x = -1$ үед $x^3 = -1$ байна.
2. $\exists x(x^4 < x^2)$ үнэн. Учир нь $x \in]-1; 1[$ үед $x^4 < x^2$ байдаг.
3. $\forall x[(-x)^2 = x^2]$ үнэн. Учир нь
$$(-x)^2 = (-1 \cdot x)^2 = (-1)^2 \cdot x^2 = 1 \cdot x^2 = x^2.$$
4. $\forall x(2x > x)$ худал. Учир нь $x \leq 0$ үед $2x \leq x$ байдаг.

9. Хэрэв тодорхойлогдох муж нь $\mathbb{Z}$ бол дараах илэрхийллийн үнэн эсэхийг тогтоо.

1. $\exists n(n^2 = 2)$
2. $\exists n(n^2 < 0)$
3. $\forall n(n^2 \geq 0)$
4. $\forall n(n^2 \geq n)$

Бодолт 1.

1. $\exists n(n^2 = 2)$ худал. Учир нь $\pm\sqrt{2} \notin \mathbb{Z}$.
2. $\exists n(n^2 < 0)$ худал. Учир нь ямар бүхэл тооны квадрат нь сөрөг тоо биш.
3. $\forall n(n^2 \geq 0)$ үнэн. Учир нь ямар ч бүхэл тооны квадрат нь сөрөг тоо биш.
4. $\forall n(n^2 \geq n)$ үнэн. $x^2 \geq x$ тэнцэтгэл бишийн шийдийн муж нь $]-\infty; 0] \cup [1; +\infty]$ ба бүхэл тоонууд нь энэ мужид бүхлээрээ агуулагдана.

10. Хэрэв A-д x хувьсагч ороогүй бол дараах логик эквивалентууд үнэн үү?

1. $\forall x P(x) \vee A = \forall x(P(x) \vee A)$
2. $\exists x P(x) \wedge A = \exists x(P(x) \wedge A)$
3. $\forall x(A \to P(x)) = A \to \forall x P(x)$
4. $\exists x(P(x) \to A) = \forall x P(x) \to A$

Бодолт 1.

1. $\forall x P(x) \vee A = \forall x(P(x) \vee A)$ нь логик эквивалент мөн. Учир нь $x \vee 0 = x$ тул $A = 0$ бол

$$\begin{aligned}\forall x P(x) \vee A &= \forall x P(x) \vee 0\\ &= \forall x P(x) = \forall x(P(x) \vee 0)\\ &= \forall x(P(x) \vee A)\end{aligned}$$

ба $x \vee 1 = 1$ тул $A = 1$ үед

$$\begin{aligned}\forall x P(x) \vee A &= \forall x P(x) \vee 1\\ &= 1 = \forall x 1\\ &= \forall x(P(x) \vee 1)\\ &= \forall x(P(x) \vee A)\end{aligned}$$

тул

2. Өмнөхтэй адилаар A-р тохиолдол салгаж бодно. $x \wedge 1 = x$, $x \wedge 0 = 0$ байдаг.
3. $y \vee \neg x = \neg x \vee y = x \to y$ тул 1-д $A \to \neg A$ орлуулга хийвэл

$$\forall x P(x) \vee \neg A = \forall x(P(x) \vee \neg A)$$

буюу

$$\forall x(A \to P(x)) = A \to \forall x P(x)$$

гэж гарна.

4. $x \to 0 = x$ ба $x \to 1 = 1$ болохыг ашиглан тохиолдол салгаж бод.

11. Хэрэв тодорхойлогдох муж нь $\mathbb{Z}$ бол дараах илэрхийллийн үнэн эсэхийг тогтоо.

1. $\exists! x(x > 1)$
2. $\exists! x(x + 3 = 2x)$
3. $\exists! x(x^2 = 1)$

4. $\exists! x(x = x + 1)$

Бодолт 1.
$\exists! xP(x)$ нь $P(x)$ предикатыг үнэн байлгах цор ганц x оршин байна гэсэн хэллэг юм.

1. $\exists! x(x > 1)$ худал. Учир нь ийм x цор ганц биш олон олдоно.
2. $\exists! x(x + 3 = 2x)$ үнэн. Зөвхөн $x = 3$ ганц ширхэг бүхэл тоо шийд нь болно.
3. $\exists! x(x^2 = 1)$ худал. $x = 1$, $x = -1$ тоонууд шийд болно.
4. $\exists! x(x = x + 1)$ худал. Ийм x тоо олдохгүй.

12. Дараах илэрхийллүүдийн үнэн худлыг тогтоо.

1. $\exists! xP(x) \to \exists xP(x)$
2. $\forall xP(x) \to \exists! xP(x)$
3. $\exists! x\neg P(x) \to \neg\forall xP(x)$

Бодолт 1.

1. $\exists! xP(x) \to \exists xP(x)$ үргэлж үнэн байна. Хэрвээ худал гэвэл $\exists xP(x) = 0$, $\exists! xP(x) = 1$ байх ёстой. Гэтэл энэ нь боломжгүй юм.
2. $\forall xP(x) \to \exists! xP(x) = \neg\forall xP(x) \vee \exists! xP(x) = \exists x\neg P(x) \vee \exists! xP(x)$ юм. Иймд $P(x)$ нь ядаж нэг утга дээр худал утга авдаг юмуу яг нэг утга дээр үнэн утга авдаг үед үнэн юм. (Семинарын хичээл дээр буруу тайлбар өгсөн тул үүнийг анхаарна уу!)
3. $\exists! x\neg P(x) \to \neg\forall xP(x) = 0$ бол $\exists! x\neg P(x) = 1$ ба $\neg\forall xP(x) = 0$ буюу $\forall xP(x) = 1$ болно. Гэвч бүх x-ийн хувьд үнэн байдаг $P(x)$ нь цор ганц x-ийн утга дээр худал утгатай байж болохгүй тул зөрчил үүсч байна. Иймд
$$\exists! x\neg P(x) \to \neg\forall xP(x) = 1$$
буюу үргэлж үнэн байх нь.