Дискрет мат, Семинар №06

1. 30 ширхэг цэцгийг 15 ялгаатай вааранд

1. хэрэв цэцгүүд бүгд ижил бол
2. цэцгүүд ялгаатай үед
3. цэцгүүд ижил ба ваар бүрт ядаж 1 цэцэг орсон байхаар
4. цэцгүүд ялгаатай ба ваар бүрт ядаж 1 цэцэг орсон байхаар

нийт хэчнээн янзаар хийж болох вэ?

Бодолт 1.

Заавар: n ялгаатай зүйлийг аль ч хэсэгт нь дор хаяж 1 зүйл орсон байхаар яг k ширхэг хэсэгт хуваах боломжийн тоог Стирлингийн II төрлийн тоо гэдэг. Стирлингийн II төрлийн тоог $\left\{ n \atop k \right\}$ гэж тэмдэглэдэг бөгөөд

$$\left\{ n \atop k \right\} = \left\{ n-1 \atop k-1 \right\} + k \left\{ n-1 \atop k \right\}$$

рекуррент томьёоны тусламжтай боддог.

Бодолт:

1. Цэцгүүд бүгд ижил бол $C^{30}_{(15)} = C^{30}_{44}$ янзаар хийж болно. Учир 15 ялгаатай вааранд 30 цэг хийх, 15 ялгаатай ваарнаас 30 цэцэг авах хоёр нь аль вааранд хэдэн цэцэг хийх, аль ваарнаас хэдэн цэцэг авах гэсэн тоогоороо бүрэн тодорхойлогдоно.
2. Цэцгүүд ялгаатай үед цэцэг бүрийг 15 вааранд хийж болох тул 15^{30}.
3. Цэцгүүд ижил ба ваар бүрд ядаж 1 цэцэг орсон байхаар хийхийн тулд эхлээд ваар бүрд 1, 1 цэцэг хийгээд дараа нь үлдсэн 15 цэцгийг нэмж хийх тул $C^{15}_{(15)} = C^{15}_{29}$ янзаар хийж болно.
4. Цэцгүүд ялгаатай ба хэсэг бүрд ядаж 1 цэцэг орсон байхаар 15 хэсэгт хуваах боломжийн тоо нь Стерлингийн $\left\{ 30 \atop 15 \right\}$ тоо байна. 15 хэсгээс 15 ялгаатай вааранд 15! янзаар хийж болох тул нийт боломжийн тоо $\left\{ 30 \atop 15 \right\} \cdot 15!$ байна.

2. a, a, b, b, c, c, d, d, e, e, f, f үсгүүдийг ашиглан 12 үсэгтэй ижил үсэг зэрэгцэж ороогүй хэчнээн үг зохиож болох вэ?

Бодолт 1.

Заавар:

Бодолт: X_a, X_b, X_c, X_d, X_e, X_f-ээр харгалзан a, b, c, d, e, f үсгүүд зэрэгцэж орсон үгүүдийн олонлогийг, U-аар нийт үгүүдийн олонлогийг тэмдэглэе. Тэгвэл бидний олох тоо

$$Z = U \setminus (X_a \cup X_b \cup X_c \cup X_d \cup X_e \cup X_f)$$

олонлогийн чадал буюу

$$|U| - |X_a \cup X_b \cup X_c \cup X_d \cup X_e \cup X_f|$$

байна. $|U| = P(2,2,2,2,2,2) = \dfrac{12!}{(2!)^6}$ ба ижил үсгүүд зэрэгцэж орсон тохиолдолыг нэг үсэг гэж үзээд тооцож болох тул

$$|X_a \cup X_b \cup X_c \cup X_d \cup X_e \cup X_f| = \sum |X_i| - \sum |X_i X_j| + \sum |X_i X_j X_k| - \cdots - |X_a X_b X_c X_d X_e X_f| =$$

$$= C^1_6 \cdot \frac{11!}{(2!)^5} - C^2_6 \cdot \frac{10!}{(2!)^4} + C^3_6 \cdot \frac{9!}{(2!)^3} - C^4_6 \cdot \frac{8!}{(2!)^2} + C^5_6 \cdot \frac{7!}{(2!)^1} - 6! = 4082400$$

байна. Иймд ижил үсэг зэрэгцэж ороогүй байхаар

$$\frac{12!}{(2!)^6} - 4082400 = 2631600$$

үг зохиож болно.

3. Дараах адилтгалыг батал.

1. $C_n^k = \frac{n}{k}C_{n-1}^{k-1}$
2. $C_n^m C_m^k = C_n^k C_{n-k}^{m-k}$
3. $C_k^k + C_{k+1}^k + C_{k+2}^k + \cdots + C_n^k = C_{n+1}^{k+1}$
4. $C_n^0 - C_n^1 + C_n^2 - \cdots \pm C_n^n = 0$
5. $C_n^0 C_m^k + C_n^1 C_m^{k-1} + \cdots + C_n^k C_m^0 = C_{n+m}^k$
6. $1C_n^1 + 2C_n^2 + \cdots + nC_n^n = n2^{n-1}$

Бодолт 1.

Заавар:

Бодолт:

1. $C_n^k = \frac{n}{k}C_{n-1}^{k-1} \Leftrightarrow kC_n^k = nC_{n-1}^{k-1}$ байна. Энэ нь n хүнээс нэг ахлагч бүхий k хүнтэй багийг сонгох боломжийн тоонууд юм.
2. $C_n^m C_m^k = C_n^k C_{n-k}^{m-k}$. Энэ нь n хүнээс гарааны k гишүүнтэй, m хүнтэй багийг сонгох боломжийн тоонууд юм.
3. $C_{n+1}^k = C_n^k + C_n^{k-1}$-г дараалан хэрэглэхэд гарна.
4. $(1-1)^n = C_n^0 - C_n^1 + C_n^2 - \cdots \pm C_n^n = 0$
5. $C_n^0 C_m^k + C_n^1 C_m^{k-1} + \cdots + C_n^k C_m^0 = C_{n+m}^k$ нь n хүү, m охинтой ангийн сурагчдаас k хүнтэй баг сонгох боломжийн тоо юм. Зүүн гар тал нь яг $0, 1, 2, \ldots, k$ ширхэг хүү орсон тохиолдлуудын нийлбэр юм.
6. $1C_n^1 + 2C_n^2 + \cdots + nC_n^n = n2^{n-1}$ нь n хүнээс нэг ахлагч бүхий баг сонгох боломжийн тоонууд юм.

4. 10^{40} эсвэл 20^{30}-ийн хуваагч болох тоо нийт хэдэн ширхэг байх вэ?

Бодолт 1.

Заавар: $n = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \ldots p_s^{\alpha_s}$ нь n тооны анхны тоон каноник задаргаа бол n тооны хуваагчдын тоо

$$(\alpha_1 + 1)(\alpha_2 + 1) \ldots (\alpha_s + 1)$$

байдаг.

Бодолт: Хоёр тоог зэрэг хуваадаг тоонууд уг тоонуудын ХИЕХ-ийн хуваагч болдог тоонууд юм. A нь $10^{40} = 2^{40} \cdot 5^{40}$ тооны хуваагчдын олонлог, B нь $20^{30} = 2^{60} \cdot 5^{30}$ тооны хуваагчдын олонлог гэвэл 10^{40} эсвэл 20^{30}-ийн хуваагч болох тоо $A \cup B$ олонлогийн элемент ба 10^{40}, 20^{30} тоонуудыг зэрэг хуваадаг тоонуудын олонлог нь $2^{40} \cdot 5^{30}$ тооны хуваагчдын олонлог байна. Иймд

$$|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|$$

болно. $|A| = (40+1)(40+1) = 1681$, $|B| = (60+1)(30+1) = 1891$, $|A \cap B| = (40+1)(30+1) = 1271$ тул

$$|A \cup B| = 1681 + 1891 - 1271 = 2301$$

байна.

5. 12 номноос 6 нь сонирхолгүй, 4 нь урагдсан, 3 нь урагдсан бөгөөд сонирхолгүй бол сонирхолтой бөгөөд урагдаагүй нийт хэдэн ном байгаа вэ?

Бодолт 1.

Заавар:

Бодолт: U бүх номнууд, A сонирхолгүй номнууд, B урагдсан номнууд гэвэл

$$|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B| = 6 + 4 - 3 = 7$$

болно. Иймд

$$|\overline{A} \cap \overline{B}| = |\overline{A \cup B}| = |U| - |A \cup B| = 12 - 7 = 5$$

байна.

6. Ангийн 30 сурагчдын 12 нь математикийн хичээлд сонирхолтой, 14 нь физикийн хичээлд сонирхолтой, 13 нь химийн хичээлд сонирхолтой, 5 нь математик ба физикт сонирхолтой, 4 нь математик ба химид сонирхолтой, 7 нь физик ба химид сонирхолтой, ба 3 хичээлд бүгдэд нь сонирхолтой 3 сурагч байгаа бол дээрх 3 хичээлд бүгдэд нь дургүй хэдэн сурагч байгаа вэ?

Бодолт 1.

Заавар:

Бодолт: $|U| = 30$, $|M| = 12$, $|F| = 14$, $|C| = 13$, $|MF| = 5$, $|MC| = 4$, $|FC| = 7$, $|MFC| = 3$ тул

$$|M \cup F \cup C| = |M| + |F| + |C| - |MF| - |MC| - |FC| + |MFC| =$$
$$= 12 + 14 + 13 - 5 - 4 - 7 + 3 = 26$$

сурагч ямар нэг дугуйланд явдаг тул $30 - 26 = 4$ сурагч ямар ч дугуйланд явдаггүй.

7. Дугуй ширээний ард сууж буй n хүнээс аль ч 2 нь зэрэгцэж суугаагүй байхаар 3 хүнийг нийт хэчнээн янзаар сонгож болох вэ?

Бодолт 1.

Заавар: Эхлээд 3 хүнээ эрэмбэтэйгээр сонгож байгаа гэж үзээд бод.

Бодолт: Хүмүүсээ эрэмбэтэйгээр буюу 1, 2, 3-р хүн гэж сонгоё. A_{ij} нь i-р хүн ба j-р хүн зэрэгцэж сууж байсан сонголтын олонлог гэе. Тэгвэл аль нэг хоёр нь зэрэгцэж сууж байсан нь

$$|A_{12} \cup A_{13} \cup A_{23}| = |A_{12}| + |A_{13}| + |A_{23}| - |A_{12}A_{13}| - |A_{12}A_{23}| - |A_{13}A_{23}| + |A_{12}A_{13}A_{23}|$$
$$= 3 \cdot n \cdot 2 \cdot (n-2) - 3 \cdot n \cdot 2 \cdot 1 + 3! \cdot [n = 3] = 6n^2 - 18n + 3! \cdot [n = 3]$$

Тул аль ч хоёр нь зэрэгцэж суугаагүй нь

$$A_n^3 - (6n^2 - 18n + 3! \cdot [n = 3]) = n(n-1)(n-2) - 6n^2 + 18n - 3! \cdot [n = 3]$$
$$= n^3 - 9n^2 + 20n - 3! \cdot [n = 3]$$

$n < 6$ үед бодлогын нөхцөлийг хангаж байхаар 3 хүн сонгох боломжгүй буюу боломжийн тоо нь 0 байна. Цаашид $n \geq 6$ гэж үзээд бодъё. $n \neq 3$ тул

$$n^3 - 9n^2 + 20n - 3! \cdot [n = 3] = n^3 - 9n^2 + 20n$$

болох ба хүмүүсээ эрэмбэгүйгээр сонгосон гэвэл бидний олох тоо

$$\frac{n^3 - 9n^2 + 20n}{3!} = \frac{n(n-4)(n-5)}{6}$$

болно.

8. 10 хос гутлаас нэг ч хос гутал сонгогдоогүй байхаар 6 гутлыг хэчнээн янзаар сонгож болох вэ?

Бодолт 1.

Заавар:

Бодолт: Эхлээд сонголтоо эрэмбэтэй гэж үзье. Тэгвэл сонгогдсон гутал ба хосыг нь дараагийн ээлжинд сонгох боломжгүй тул эхний гутлыг 20 янзаар, хоёр дахь гутлыг 18 янзаар, гурав дахь гутлыг 16 янзаар, дөрөв дэх гутлыг 14 янзаар, тав дахь гутлыг 12 янзаар, зургаа дахь гутлыг 10 янзаар сонгож болно. Иймд эрэмбэтэй сонголтын тоо

$$20 \cdot 18 \cdot 16 \cdot 14 \cdot 12 \cdot 10$$

тул нэг хос гутал сонгогдоогүй байхаар 6 гутал сонгох боломжийн тоо

$$\frac{20 \cdot 18 \cdot 16 \cdot 14 \cdot 12 \cdot 10}{6!} = 13440$$

байна.

9. Өлгүүрчин 10 хүнд гадуур хувцасыг нь өгөхдөө ямар ч хувцасыг эзэнд нь өгөөгүй байхаар нийт хэчнээн янзаар тарааж болох вэ?

Бодолт 1.

Заавар:

Бодолт: $X_{i_1,i_2,\ldots,i_k}$ нь $i_1, i_2, \ldots, i_k$- хүмүүст өөрийнх нь хувцасыг тараасан тараалт гэвэл $|X_{i_1,i_2,\ldots,i_k}| = (n-k)!$ байна.

$$|X_1 \cup X_2 \cup \cdots \cup X_{10}| = \sum |X_i| - \sum_{i<j} |X_iX_j| + \sum_{i<j<k} |X_iX_jX_k| - \cdots - |X_1X_2 \ldots X_{10}|$$
$$= \sum |X_i| - \sum_{i<j} |X_{i,j}| + \sum_{i<j<k} |X_{i,j,k}| - \cdots - |X_{1,2,\ldots,10}|$$
$$= 10 \cdot 9! - C_{10}^2 \cdot 8! + C_{10}^3 \cdot 7! - C_{10}^4 \cdot 6! + C_{10}^5 \cdot 5! - C_{10}^6 \cdot 4! +$$
$$+ C_{10}^7 \cdot 3! - C_{10}^8 \cdot 2! + C_{10}^9 \cdot 1! - 1 = 2293839$$

Нөгөө талаас нийт тараалтын тоо 10! тул ямар ч хувцасыг эзэнд нь өгөөгүй байхаар нийт
$10! - 2293839 = 1334961$ янзаар тарааж болно.

10. 2, 3, 5, 7 ын алинд нь ч хуваагддаггүй 1000-аас бага хэдэн тоо байх вэ?

Бодолт 1.

Заавар: Ядаж нэгд нь хуваагддаг тоонуудыг нийт тоонуудаас хасна.

Бодолт: X_i нь i тоонд хуваагддаг 1000-аас бага тоонуудын олонлог байг. Тэгвэл 2, 3, 5, 7-ын ядаж нэгд нь хуваагддаг тоонуудын олонлог нь

$$\begin{aligned}|X_2 \cup X_3 \cup X_5 \cup X_7| &= |X_2| + |X_3| + |X_5| + |X_7| - |X_2X_3| - |X_2X_5| - |X_2X_7| - \\ &- |X_3X_5| - |X_3X_7| - |X_5X_7| + |X_2X_3X_5| + |X_2X_3X_7| + \\ &+ |X_2X_5X_7| + |X_3X_5X_7| - |X_2X_3X_5X_7| \\ &= \left[\frac{999}{2}\right] + \left[\frac{999}{3}\right] + \left[\frac{999}{5}\right] + \left[\frac{999}{7}\right] - \left[\frac{999}{6}\right] - \left[\frac{999}{10}\right] - \left[\frac{999}{14}\right] - \\ &- \left[\frac{999}{15}\right] - \left[\frac{999}{21}\right] - \left[\frac{999}{35}\right] + \left[\frac{999}{30}\right] + \left[\frac{999}{42}\right] + \\ &+ \left[\frac{999}{70}\right] + \left[\frac{999}{105}\right] - \left[\frac{999}{210}\right] \\ &= 499 + 333 + 199 + 142 - 166 - 99 - 71 - 66 - 47 - 28 + \\ &+ 33 + 23 + 14 + 9 - 4 = 771\end{aligned}$$

тул эдгээрийн алинд ч хуваагдахгүй тоо $999 - 771 = 228$ ширхэг байна.

11. $0, 1, \ldots, 9$ цифрүүдийн хэдэн сэлгэмэлд 0, 1 цифрүүд зэрэгцэн орсон ба 1, 2 цифрүүд зэрэгцэн ороогүй байх вэ?

Бодолт 1.

Заавар:

Бодолт: 01 гэж дараалж орсон сэлгэмэл 9! ширхэг байх ба эдгээрт $1, 2$ зэрэгцэж орсон бол 012 байх ёстой тул 8! байх ёстой. Иймд бодлогын нөхцөлийг хангах 01 гэсэн сэлгэмэлийн тоо $9! - 8!$ байна. Үүнтэй адилаар 10 гэж дараалж орсон бодлогын нөхцөлийг хангах сэлгэмэлийн тоо $9! - 8!$ тул нийт $2(9! - 8!) = 16 \cdot 8!$ сэлгэмэл бодлогын нөхцөлийг хангана.

12. 10 охиныг 7 хүү бүжигт урих ёстой байв. Нэр заасан 2 охин заавал бүжиглэх ёстой байсан бол хэчнээн янзаар бүжигт урьж болох вэ?

Бодолт 1.

Заавар: Эхлээд бүжиглэх ёстой 2 охин 2 хүү сонгоод, дараа нь үлдсэн 5 хүү өөрсдийн бүжиглэх хосоо сонгоно гэж тооц.

Бодолт: $A_7^2 \cdot A_8^5$

13. $A = 3 \cdot 5 \cdot 7$ тооны хуваагчдын тоог ол.

Бодолт 1.

Натурал тооны хуваагчдын тоо.

n тооны анхны тоон каноник задаргаа

$$n = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \ldots p_s^{\alpha_s}$$

бол хуваагчдын тоо нь

$$(\alpha_1 + 1)(\alpha_2 + 1) \ldots (\alpha_s + 1)$$

байна.

Заавар: Хуваагчдын тоог олох томьёо ашигла.

Бодолт: $A = 3^1 \cdot 5^1 \cdot 7^1$ тул хуваагчдын тоо нь

$$(1 + 1)(1 + 1)(1 + 1) = 8$$

байна

14. 1, 2, 3, 4, 5 элементийн хэчнээн сэлгэмэлд

1. 1 нь 2-ын зүүн талд орох вэ?
2. 2 нь 1-ийн яг ард орох вэ?

Бодолт 1.

Заавар:

Бодолт:

1. Нийт сэлгэмэлийн хагасд нь 1 нь 2-ын зүүн талд орно. Иймд $\frac{5!}{2} = 60$.

2. 1 ба 2-ыг нийлүүлээд нэг цифр гэж сэтгээд бодож болох тул 4! байна.

15. Хайрцагт 8 хар, 9 шар, 5 ногоон бөмбөг байв. Тэгвэл таамгаар авсан бөмбөгөнд ижил өнгийн бөмбөг заавал орсон байхаар хамгийн багадаа хэдийг авах хэрэгтэй вэ?

Бодолт 1.

Заавар: Дирихлейн зарчим ашигла:

$n+1$ туулайг n торонд дурын аргаар хийхэд дор хаяж 2 туулай орсон тор заавал олдоно.

Бодолт: 3 бөмбөг авахад тэдгээр нь хар, шар, ногоон байж болох тул заавал ижилхэн байх албагүй. Иймд дор хаяж 4 ширхэг бөмбөг авах шаардлагатай. 3 өөр өнгийн (тор) 4 бөмбөг (туулай) дотор Дирихлейн зарчмаар ижил өнгийн хоёр бөмбөг заавал олдоно.

16. Ээжид 4 алим, 3 жүрж, 6 нимбэг байв. Ээж өдөр болгон хүүдээ нэг жимс өгдөг бол хэчнээн янзаар өгч чадах вэ?

Бодолт 1.

Заавар:

Бодолт: Ээжийн өгсөн жимснүүдийн нэрийг дараалаар нь бичихэд А үсэг 4, Ж үсэг 3, Н үсэг 6 орсон нийт 13 урттай үг үүснэ. Эдгээрийн үгийн тоо нь ээжийн жимс өгөх боломжийн тоотой тэнцүү байх нь ойлгомжтой юм. Иймд

$$P(4,3,6) = \frac{13!}{4! \cdot 3! \cdot 6!} = 60060$$

ялгаатай янзаар өгч чадна.

17. Алгебрын 3, анализын 4, геометрийн 8 номоор ангийн 30 сурагчийн талыг шагнах болов. Хэчнээн янзаар шагнаж чадах вэ?

Бодолт 1.

Заавар:

Бодолт: Сурагчдаа нэрсийн дараалаар нь жагсаагаад алгебрын номоор шагнуулсан бол А-г, анализийн номоор шагнуулсан бол Б-г, геометрийн номоор шагнуулсан бол В-г, номоор шагнуулаагүй бол Г-г харгалзуулъя. Эдгээр нь дараалалдараа А үсэг 3 удаа, Б үсэг 4 удаа, В үсэг 8 удаа, Г үсэг 15 удаа орсон 30 урттай үг үүснэ. Энэ үгийн тоо нь нийт шагнах боломжийн тоотой тэнцэх нь ойлгомжтой юм. Иймд

$$P(3,4,8,15) = \frac{30!}{3! \cdot 4! \cdot 8! \cdot 15!}$$

янзаар шагнаж болно.

18. Айл: 10 малтай байх боломжийг ол. 10 малтай айл:

1. дан бодтой байх,

2. яг 3 хоньтой байх,

3. 5 бод, 5 богтой байх,

4. хоньтой байх,

5. бодтой ба богтой байх,

6. 3-аас цөөнгүй бодтой байх

боломжуудыг тус тус ол.

Бодолт 1.

Заавар:

Бодолт: Айл: 10 малтай байх боломжийг ол. 10 малтай айл:

1. дан бодтой байх нь 3 төрлийн малтай байх боломж тул $C_{(3)}^{10} = C_{12}^{10} = 66$.

2. яг 3 хоньтой байх нь бусад 4 төрлийн малаас 7-той байх тул $C_{(4)}^{7} = C_{10}^{7} = 120$.

3. 5 бод, 5 богтой байх нь $C^5_{(3)} \cdot C^5_{(2)} = C^5_7 \cdot C^5_6 = 126$ боломжтой.

4. хоньтой байх нь нийт боломжоос хоньгүй байхыг хасахад тул $C^{10}_{(5)} - C^{10}_{(4)} = C^{10}_{14} \cdot C^{10}_{13}$ байна.

5. бодтой ба богтой байх нь $C^{10}_{(5)} - C^{10}_{(2)} - C^{10}_{(3)}$

6. 3-аас цөөнгүй бодтой байх нь

$$C^3_{(3)} \cdot C^7_{(2)} + C^4_{(3)} \cdot C^6_{(2)} + \cdots + C^{10}_{(3)} \cdot C^0_{(2)} = C^{10}_{(5)} - C^0_{(3)} \cdot C^{10}_{(2)} - C^1_{(3)} \cdot C^9_{(2)} - C^2_{(3)} \cdot C^8_{(2)}$$

байна.

19. Шуудан дээр 10 төрлийн захидал худалдаж байв. 12 ил захидлыг хэчнээн янзаар худалдаж авч чадах вэ? 8 өөр захидлыг хэчнээн янзаар худалдаж авах вэ?

Бодолт 1.

Заавар:

Бодолт: $C^{12}_{(10)}$, C^8_{10}.

20. Ангийн 40 сурагчийн 24 нь эрэгтэй байв. Ангийн ахлагч, эвлэлийн үүрийн дарга, спортын дарга, тэдний орлогчид гэсэн 6 орон тоог сонгох ёстой байв.

1. сонгох бүх боломжийг ол,
2. эдний дотор эмэгтэй сурагчид байх,
3. ангийн дарга эрэгтэй байх,
4. жинхэнэ дарга нар нь эрэгтэй байх,
5. дарга нарын талаас цөөнгүй нь эрэгтэй байх

боломжийг ол.

Бодолт 1.

Заавар:

Бодолт: Ангийн 40 сурагчийн 24 нь эрэгтэй байв. Ангийн ахлагч, эвлэлийн үүрийн дарга, спортын дарга, тэдний орлогчид гэсэн 6 орон тоог сонгох ёстой байв.

1. A^6_{40}.
2. $A^6_{40} - A^6_{24}$.
3. $24 \cdot A^5_{39}$.
4. $A^3_{40} \cdot A^3_{37}$.
5. $6!(C^3_{24}C^3_{16} + C^4_{24}C^2_{16} + C^5_{24}C^1_{16} + C^6_{24}C^0_{16})$.

боломжийг ол.

21. 1234567 тооны цифрүүдийн байрыг солиход гарах бүх 7! тооны нийлбэрийг ол.

Бодолт 1.

Заавар: Цифр тус бүр нэгж, аравт, зуут, мянгат, арван мянгат, зуун мянгат, саятын орон дээр хэдэн удаа орж байгааг тоол.

Бодолт: Цифр тус бүр тэгш эрхтэй тул орон бүрд $\frac{7!}{7} = 6!$ удаа орж байгаа. Бүх тоонуудыг баганаар нэмэхээд $6! \cdot (1+2+3+4+5+6+7) = 28 \cdot 6!$ гэсэн нийлбэр гарах тул нийт $28 \cdot 6!$ нэгж, $28 \cdot 6!$ аравт, $28 \cdot 6!$ зуут, $28 \cdot 6!$ мянгат, $28 \cdot 6!$ арван мянгат, $28 \cdot 6!$ зуун мянгат, $28 \cdot 6!$ саят нэмэгдэх тул эдгээр тоонуудын нийлбэр

$$28 \cdot 6! \cdot 1111111 = 22399997760$$

байна.

22. $x_1 + \ldots + x_m = k$ тэгшитгэлийн натурал шийдийн тоог ол.

Бодолт 1.

Заавар: $y_i = x_i - 1$ гэвэл $y_1 + \cdots + y_m = k - m$ болно.

Бодолт: $(x_1, \ldots, x_m) \to (x_1 - 1, \ldots, x_m - 1)$ нь ХНУ буулгалт тул $x_1 + \cdots + x_m = k$ тэгшитгэлийн натурал шийдийн тоо нь $y_1 + \cdots + y_m = k - m$ тэгшитгэлийн сөрөг биш бүхэл шийдийн тоотой тэнцүү тул $C^{k-m}_{(m)} = C^{k-m}_{k+1} = C^{m+1}_{k+1}$ байна.

23. $1, 2, \ldots, n$ тоонуудын сэлгэмэл $(x_1, \ldots, x_n)$-д дурын k бүрийн хувьд $x_k \neq k$ бол түүнийг *эрэмбэгүй* гэж нэрлээ. Бүх эрэмбэгүйн тоо $N_n(0)$-г ол.

Бодолт 1.

Заавар:

Бодолт: $X_i = \{(x_1, x_2, \ldots, x_n) \mid x_i = i\}$ гэе. Тэгвэл ядаж нэг тоо байрандаа байх сэлгэмэлийн тоо

$$\begin{aligned}
\Big|\bigcup_{i=1}^{n} X_i\Big| &= \sum |X_i| - \sum |X_i X_j| + \sum |X_i X_j X_k| - \cdots - (-1)^t \sum |X_{i_1} X_{i_2} \ldots X_{i_t}| + \cdots - (-1)^n |X_1 X_2 \ldots X_n| \\
&= C_n^1 (n-1)! - C_n^2 (n-2)! + C_n^3 (n-3)! - \cdots - (-1)^t C_n^t (n-t)! + \cdots + (-1)^{n+1} \\
&= n! \left(\frac{1}{1!} - \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} - \cdots - (-1)^t \frac{1}{t!} + \cdots + (-1)^{n+1} \frac{1}{n!} \right)
\end{aligned}$$

Нөгөө талаас нийт сэлгэмэлийн тоо $n!$ тул эрэмбэгүйн тоо

$$N_n(0) = n! - n! \left(\frac{1}{1!} - \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} - \cdots - (-1)^t \frac{1}{t!} + \cdots + (-1)^{n+1} \frac{1}{n!} \right) \approx n!/e$$

буюу $n!/e$-д хамгийн ойр бүхэл тоо байна.