Дискрет мат, Семинар №07

1. Дараах рекурент харьцаагаар өгөгдсөн дарааллын ерөнхий гишүүний томъёог ол.

1. $a_n = a_{n-1} + 6a_{n-2}$, $a_0 = 3$, $a_1 = 6$.
2. $a_n = 7a_{n-1} - 10a_{n-2}$, $a_0 = 2$, $a_1 = 1$.
3. $a_n = 6a_{n-1} - 8a_{n-2}$, $a_0 = 4$, $a_1 = 10$.
4. $a_n = 2a_{n-1} - a_{n-2} + 2^n$, $a_0 = 4$, $a_1 = 1$.
5. $a_n = -6a_{n-1} - 9a_{n-2}$, $a_0 = 3$, $a_1 = -3$.
6. $a_n = -4a_{n-1} + 5a_{n-2} + 2^n$, $a_0 = 2$, $a_1 = 8$.

Бодолт 1.

Заавар:

1. $a_n = a_{n-1} + 6a_{n-2}$, $a_0 = 3$, $a_1 = 6$ бол характеристик тэгшитгэл нь

$$x^2 = x + 6 \Rightarrow x_1 = -2, x_2 = 3$$

шийдийг $a_n = c_1 \cdot (-2)^n + c_2 \cdot 3^n$ хэлбэртэй хайя. $n = 0, 1$ үед

$$\begin{cases} a_0 = c_1 \cdot (-2)^0 + c_2 \cdot 3^0 \\ a_1 = c_1 \cdot (-2)^1 + c_2 \cdot 3^1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} c_1 + c_2 = 3 \\ -2c_1 + 3c_2 = 6 \end{cases}$$

тул $c_1 = \dfrac{3}{5}$, $c_2 = \dfrac{12}{5}$ болно. Иймд

$$a_n = \frac{3 \cdot (-2)^n + 12 \cdot 3^n}{5}$$

2. $a_n = 7a_{n-1} - 10a_{n-2}$, $a_0 = 2$, $a_1 = 1$ бол характеристик тэгшитгэл нь

$$x^2 = 7x - 10 \Rightarrow x_1 = 2, x_2 = 5$$

шийдийг $a_n = c_1 \cdot 2^n + c_2 \cdot 5^n$ хэлбэртэй хайя. $n = 0, 1$ үед

$$\begin{cases} a_0 = c_1 \cdot 2^0 + c_2 \cdot 5^0 \\ a_1 = c_1 \cdot 2^1 + c_2 \cdot 5^1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} c_1 + c_2 = 2 \\ 2c_1 + 5c_2 = 1 \end{cases}$$

тул $c_1 = 3$, $c_2 = -1$ болно. Иймд

$$a_n = 3 \cdot 2^n - 5^n$$

3. $a_n = 6a_{n-1} - 8a_{n-2}$, $a_0 = 4$, $a_1 = 10$ бол характеристик тэгшитгэл нь

$$x^2 = 6x - 8 \Rightarrow x_1 = 2, x_2 = 4$$

шийдийг $a_n = c_1 \cdot 2^n + c_2 \cdot 4^n$ хэлбэртэй хайя. $n = 0, 1$ үед

$$\begin{cases} a_0 = c_1 \cdot 2^0 + c_2 \cdot 4^0 \\ a_1 = c_1 \cdot 2^1 + c_2 \cdot 4^1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} c_1 + c_2 = 4 \\ 2c_1 + 4c_2 = 10 \end{cases}$$

тул $c_1 = 3$, $c_2 = 1$ болно. Иймд

$$a_n = 3 \cdot 2^n + 4^n$$

4. I бодолт. Характеристик тэгшитгэл нь $x^2 = 2x - 1 \Rightarrow x_1 = x_2 = 1$ тул ерөнхий шийд нь

$$a_n = c_1 + c_2 n + a_n^*$$

хэлбэртэй байна. a_n^* тухайн шийдийг $a_n^* = c2^n$ хэлбэртэй хайвал

$$c2^n = 2c2^{n-1} - c2^{n-2} + 2^n \Rightarrow c = 4$$

болно. Иймд

$$a_n = c_1 + c_2 n + 4 \cdot 2^n$$

болно. $n=0,1$ анхны нөхцөлүүдийг тооцвол

$$\begin{cases} c_1+4=4 \\ c_1+c_2+8=1 \end{cases} \Rightarrow c_1=0, c_2=-7$$

Иймд

$$a_n = 4\cdot 2^n - 7n$$

II бодолт. $a_n = 2a_{n-1} - a_{n-2} + 2^n$, $a_0=4$, $a_1=1$ ба $b_n = \dfrac{a_n}{2^n}$ гэвэл $b_0 = \dfrac{4}{2^0} = 4$, $b_1 = \dfrac{1}{2^1} = \dfrac{1}{2}$, $a_n = 2^n b_n$ байна. Иймд

$$2^n b_n = 2\cdot 2^{n-1}b_{n-1} - 2^{n-2}b_{n-2} + 2^n$$

буюу

$$b_n = b_{n-1} - \frac{1}{4}b_{n-2} + 1$$

байна. Характеристик тэгшитгэл нь

$$x^2 = x - \frac{1}{4} \Leftrightarrow x_{1,2} = \frac{1}{2}$$

гэсэн давхар язгуууртай тул $b_n = (an+b)\cdot\dfrac{1}{2^n} + c$ болно (энд $(an+b)\cdot\dfrac{1}{2^n}$ нь нэгэн төрлийн рекуррент харьцааны ерөнхий шийд, характеристик тэгшитгэл нь 1 гэсэн шийдгүй тул $s_0=0$, $w(n)=c$ нь $\deg w(x) = \deg 1 + s_0 = 0$ гэж гарч байгаа). Үүнийг рекуррент томьёонд нь орлуулбал

$$(an+b)\cdot\frac{1}{2^n} + c = [a(n-1)+b]\cdot\frac{1}{2^{n-1}} + c - \frac{1}{4}\left\{[a(n-2)+b]\cdot\frac{1}{2^{n-2}} + c\right\} + 1$$

болох ба $(an+b)\cdot\dfrac{1}{2^n}$ нь нэгэн төрлийн рекуррент харьцааных нь ерөнхий шийд тул

$$c = c - \frac{1}{4}c + 1 \Rightarrow c = 4$$

байна. Анхны нөхцөлөө ашиглан a, b коэффициентүүдийг олъё.

$$\begin{cases} b_0 = (a\cdot 0+b)\cdot\dfrac{1}{2^0} + 4 \\ b_1 = (a\cdot 1+b)\cdot\dfrac{1}{2^1} + 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (a\cdot 0+b)\cdot\dfrac{1}{2^0} + 4 = 4 \\ (a\cdot 1+b)\cdot\dfrac{1}{2^1} + 4 = \dfrac{1}{2} \end{cases}$$

тул $a=-7$, $b=0$ болно. Иймд

$$b_n = -7n\cdot\frac{1}{2^n} + 4 \Rightarrow a_n = 2^n b_n = 4\cdot 2^n - 7n$$

5. $a_n = -6a_{n-1} - 9a_{n-2}$, $a_0=3$, $a_1=-3$ бол характеристик тэгшитгэл нь

$$x^2 = -6x - 9 \Rightarrow x_1 = x_2 = -3$$

тул шийдийг $a_n = (c_1\cdot n + c_2)\cdot(-3)^n$ хэлбэртэй хайя (давхар язгууртай үед коэффициент нь тогтмол тоо биш давхардлынх тооноос 1-ээр бага зэргийн олон гишүүнт байна). $n=0,\ 1$ үед

$$\begin{cases} a_0 = (c_1\cdot 0+c_2)\cdot(-3)^0 \\ a_1 = (c_1\cdot 1+c_2)\cdot(-3)^1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} c_2 = 3 \\ -3c_1 - 3c_2 = -3 \end{cases}$$

тул $c_1=-2$, $c_2=3$ болно. Иймд

$$a_n = (-2n+3)\cdot(-3)^n$$

6. $a_n = -4a_{n-1} + 5a_{n-2} + 2^n$, $a_0=2$, $a_1=8$ бол $b_n = \dfrac{a_n}{2^n}$, $b_0 = \dfrac{a_0}{2^0} = 2$, $b_1 = \dfrac{a_1}{2^1} = 4$ туслах дарааллыг оруулбал

$$2^n b_n = -4\cdot 2^{n-1}b_{n-1} + 5\cdot 2^{n-2}b_{n-2} + 2^n$$

буюу

$$b_n = -2b_{n-1} + \frac{5}{4}b_{n-2} + 1$$

b_n-ийн характеристик тэгшитгэл

$$x^2 = -2x + \frac{5}{4} \Rightarrow x_1 = \frac{1}{2}, x_2 = -\frac{5}{2}$$

шийдүүдтэй. Иймд ерөнхий шийд нь

$$b_n = c_1\left(\frac{1}{2}\right)^n + c_2\left(-\frac{5}{2}\right)^n + w(n)$$

хэлбэртэй байна. $x_1 = 1$ нь характеристик тэгшитгэлийн шийд биш тул $w(n) = c$ хэлбэртэй байна. Түүнчлэн $w(n)$ нь тухайн шийд тул

$$c = -2c + \frac{5}{4}c + 1 \Rightarrow c = \frac{4}{7}$$

анхны нөхцөлөө тооцвол $n = 0,\ 1$ үед

$$\begin{cases} b_0 = c_1\left(\frac{1}{2}\right)^0 + c_2\left(-\frac{5}{2}\right)^0 + \frac{4}{7} \\ b_1 = c_1\left(\frac{1}{2}\right)^1 + c_2\left(-\frac{5}{2}\right)^1 + \frac{4}{7} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} c_1 + c_2 + \frac{4}{7} = 2 \\ \frac{1}{2}c_1 - \frac{5}{2}c_2 + \frac{4}{7} = 4 \end{cases}$$

болно. Тэгшитгэлийг бодож шийдийг олбол $c_1 = \frac{7}{3}$, $c_2 = -\frac{19}{21}$ тул

$$b_n = \frac{7}{3}\left(\frac{1}{2}\right)^n - \frac{19}{21}\left(-\frac{5}{2}\right)^n + \frac{4}{7}$$

буюу

$$a_n = \frac{-19\cdot(-5)^n + 12\cdot 2^n + 49}{21}$$

байна.

Бодолт:

2. Загасчны жилд барих загасны тоо өмнөх 2 оны дундажтай тэнцүү байдаг байв. Хэрвээ загасчин эхний жилд 100,000 загас, 2 дахь жилд 300,000 загас барьсан бол n дахь жилд хичнээн загас барьсан бэ?

Бодолт 1.

Заавар: a_n - n дэх жил дэх загасны тоо.

$$a_n = \frac{a_{n-1} + a_{n-2}}{2}$$

$a_0 = 100000$, $a_1 = 300000$ болно.

Бодолт:

3. Компанид анх $100,000$\$-ийн хөрөнгө оруулалт хийгджээ. Жил бүрийн эцэст 2 төрлийн ашиг авдаг ба тэдгээрийг хөрөнгө оруулалтандаа нэмдэг байв. Эхнийх нь тухайн жилийнхээ хөрөнгө оруулалтын 20%-ийн ашиг ба нөгөөх нь өмнөх жилийнхээ хөрөнгө оруулалтын 45% -ийн ашиг байв. Тэгвэл n жилийн дараа хөрөнгө оруулалт хэд болох вэ?

4. Дараах рекуррент харьцаагаар өгөгдсөн дарааллын ерөнхий гишүүний томъёог ол.

1. $a_n = 2a_{n-1} + a_{n-2} - 2a_{n-3}$, $a_0 = 3$, $a_1 = 6$, $a_2 = 0$.
2. $a_n = 7a_{n-2} + 6a_{n-3}$, $a_0 = 9$, $a_1 = 10$, $a_2 = 32$.
3. $a_n = 5a_{n-2} - 4a_{n-4}$, $a_0 = 3$, $a_1 = 2$, $a_2 = 6$, $a_3 = 8$.
4. $a_n = 2a_{n-1} + 5a_{n-2} - 6a_{n-3}$, $a_0 = 7$, $a_1 = -4$, $a_2 = 8$.

Бодолт 1.

Заавар:

Бодолт: $a_n = 2a_{n-1} + a_{n-2} - 2a_{n-3}$, $a_0 = 3$, $a_1 = 6$, $a_2 = 0$

$$x^3 = 2x^2 + x - 2 \Leftrightarrow$$

$$x^3 - 2x^2 - x + 2 = x^2(x-2) - (x-2) = (x^2-1)(x-2) = 0$$

$x_1 = -1$, $x_2 = 1$, $x_3 = 2$.

$$a_n = c_1\cdot(-1)^n + c_2\cdot 1^n + c_3\cdot 2^n$$

$$\begin{cases} c_1 + c_2 + c_3 = 3 \\ -c_1 + c_2 + 2c_3 = 6 \\ c_1 + c_2 + 4c_3 = 0 \end{cases}$$

$3c_3 = -3 \Rightarrow c_3 = -1$

$$\begin{cases} c_1 + c_2 = 4 \\ -c_1 + c_2 = 8 \end{cases}$$

$c_2 = 6$, $c_1 = -2$ болно.

$$a_n = -2 \cdot (-1)^n + 6 - 2^n$$

болно.

5. $a_n = 7a_{n-1} - 15a_{n-2} + 9a_{n-3} + 2n + 1$, $a_0 = 1, a_1 = 2, a_3 = 3$ рекуррент харьцааг бодож a_n дарааллын ерөнхий гишүүний томьёог ол.

Бодолт 1.

Заавар:

Бодолт: $x^3 = 7x^2 - 15x + 9 \Leftrightarrow (x-1)(x-3)^2 = 0$ тул

$$a_n = c_1 \cdot 1^n + (c_2 + c_3 n) \cdot 3^n + a_n^*$$

байна. $a_n^* = an^2 + bn$ хэлбэрээр хайя.

$$an^2 + bn = 7\{a(n-1)^2 + b(n-1)\} - 15\{a(n-2)^2 + b(n-2)\} + 9\{a(n-3)^2 + b(n-3)\} + 2n + 1$$

n^2, n^1, n^0-ийн коэффициентүүдийг олж тэнцүүлбэл

$$\begin{cases} a = 7a - 15a + 9a \\ b = 7(-2a+b) - 15(-4a+b) + 9(-6a+b) + 2 \\ 0 = 7(a-b) - 15(4a-2b) + 9(9a-3b) + 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 7a - 15a + 9a \\ b = -8a + b + 2 \\ 0 = 28a - 4b + 1 \end{cases}$$

тул $a = \dfrac{1}{4} \Rightarrow 0 = 7 - 4b + 1$ буюу $b = 2$. Иймд

$$a_n = c_1 + (c_2 + c_3 n) \cdot 3^n + \frac{n^2}{4} + 2n$$

болов. $n = 0, 1, 2$ анхны утгуудад бодвол

$$\begin{cases} 1 = c_1 + c_2 - \dfrac{0^2}{4} + 2 \cdot 0 \\ 2 = c_1 + 3(c_2 + c_3) + \dfrac{1^2}{4} + 2 \cdot 1 \\ 3 = c_1 + 9(c_2 + 2c_3) + \dfrac{2^2}{4} + 2 \cdot 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 1 = c_1 + c_2 \\ -\dfrac{1}{4} = c_1 + 3c_2 + 3c_3 \\ -2 = c_1 + 9c_2 + 18c_3 \end{cases}$$

болно. Эндээс $c_1 = \dfrac{17}{8}$, $c_2 = -\dfrac{9}{8}$, $c_3 = \dfrac{1}{3}$ тул

$$a_n = \frac{17}{8} + \left(\frac{n}{3} - \frac{9}{8}\right) \cdot 3^n + \frac{n^2}{4} + 2n$$

болно. $n = 3$ үед шалгавал

$$a_3 = 7 \cdot 3 - 15 \cdot 2 + 9 \cdot 1 + 2 \cdot 3 + 1 = 7$$

ба

$$a_3 = \frac{17}{8} + \left(\frac{3}{3} - \frac{9}{8}\right) \cdot 3^3 + \frac{3^2}{4} + 2 \cdot 3 = 7$$

тул таарч байна.

6. Дараах дарааллын үүсгэгч функц ба түүний битүү хэлбэрийг ол.

1. $\{-1, -1, -1, -1, -1, -1, -1, 0, 0, 0, 0, 0, 0, \dots\}$
2. $\{1, 3, 9, 27, 81, 243, 729, \dots\}$
3. $\{0, 0, 3, -3, 3, -3, 3, -3, \dots\}$
4. $\{1, 2, 1, 1, 1, 1, 1, \dots\}$
5. $\{-3, 3, -3, 3, -3, 3, \dots\}$
6. $\{0, 1, -2, 4, -8, 16, -32, 64, \dots\}$
7. $\{1, 0, 1, 0, 1, 0, 1, 0, \dots\}$

8. $\{C_7^0, 2C_7^1, 2^2C_7^2, 2^3C_7^3, \ldots, 2^7C_7^7, 0, 0, 0, \ldots\}$

Бодолт 1.

Заавар:

Бодолт:

1. $\{-1,-1,-1,-1,-1,-1,-1,0,0,0,0,0,0,\ldots\}$ дарааллын үүсгэгч функц нь
$$f(x) = -1 - x - x^2 - x^3 - x^4 - x^5 - x^6$$

2. $\{1,3,9,27,81,243,729,\ldots\}$ дарааллын үүсгэгч функц нь
$$\begin{aligned} f(x) &= 1 + 3x + 9x^2 + 27x^3 + \cdots + 3^n x^n + \cdots \\ &= 1 + 3x + (3x)^2 + (3x)^3 + \cdots + (3x)^n + \cdots = \frac{1}{1-3x} \end{aligned}$$

3. $\{0,0,3,-3,3,-3,3,-3,\ldots\}$ дарааллын үүсгэгч функц нь
$$\begin{aligned} f(x) &= 0 + 0x + 3x^2 - 3x^3 + 3x^4 - \cdots + 3(-x)^n + \cdots \\ &= 3x^2(1 - x + x^2 - x^3 + \cdots + (-x)^n + \cdots) = \frac{3x^2}{1+x} \end{aligned}$$

4. $\{1,2,1,1,1,1,1,\ldots\}$ дарааллын үүсгэгч функц нь
$$\begin{aligned} f(x) &= 1 + 2x + x^2 + x^3 + x^4 + \cdots + x^n + \cdots \\ &= x + (1 + x + x^2 + x^3 + \cdots + x^n + \cdots) \\ &= x + \frac{1}{1-x} = \frac{1+x-x^2}{1-x} \end{aligned}$$

5. $\{-3,3,-3,3,-3,3,\ldots\}$ дарааллын үүсгэгч функц нь
$$\begin{aligned} f(x) &= -3 + 3x - 3x^2 + 3x^3 - 3x^4 + \cdots + (-1)^{n-1}x^n + \cdots \\ &= -3(1 - x + x^2 - x^3 + \cdots + (-x)^n + \cdots) = -\frac{3}{1+x} \end{aligned}$$

6. $\{0,1,-2,4,-8,16,-32,64,\ldots\}$ дарааллын үүсгэгч функц нь
$$\begin{aligned} f(x) &= 0 + 1\cdot x - 2x^2 + 4x^3 - 8x^4 + \cdots + (-2)^{n-1}x^n + \cdots \\ &= x(1 + (-2x) + (-2x)^2 + (-2x)^3 + \cdots + (-2x)^n + \cdots) = \frac{x}{1+2x} \end{aligned}$$

7. $\{1,0,1,0,1,0,1,0,\ldots\}$ дарааллын үүсгэгч функц нь
$$\begin{aligned} f(x) &= 1 + 0\cdot x + 1\cdot x^2 + 0\cdot x^3 + 1\cdot x^4 + \cdots \\ &= 1 + x^2 + x^4 + \cdot + x^{2n} + \cdots = \frac{1}{1-x^2} \end{aligned}$$

8. $\{C_7^0, 2C_7^1, 2^2C_7^2, 2^3C_7^3, \ldots, 2^7C_7^7, 0, 0, 0, \ldots\}$ дарааллын үүсгэгч функц нь
$$\begin{aligned} f(x) &= C_7^0 + 2^1C_7^1\cdot x^1 + 2^2C_7^2\cdot x^2 + 2^3C_7^3\cdot x^3 + 2^4C_7^4\cdot x^4 + 2^5C_7^5\cdot x^5 + 2^6C_7^6\cdot x^6 + 2^7C_7^7\cdot x^7 \\ &= C_7^0(2x)^0 + C_7^1(2x)^1 + C_7^2(2x)^2 + C_7^3(2x)^3 + C_7^4(2x)^4 + C_7^5(2x)^5 + C_7^6(2x)^6 + C_7^7(2x)^7 \\ &= (1+2x)^7 \end{aligned}$$

7. a_n дарааллын үүсгэгч функцийн битүү хэлбэрийг ол.

1. $a_n = 5,\ n = 0,1,2,\ldots.$

2. $a_n = 3^n,\ n = 0,1,2,\ldots.$

3. $a_n = 2,\ n = 3,4,5,\ldots \quad a_0 = a_1 = a_2 = 0.$

4. $a_n = 2n+3,\ n = 0,1,2,\ldots.$

5. $a_n = C_n^8,\ n = 0, 1, 2, \dots.$

6. $a_n = C_n^{n+4},\ n = 0, 1, 2, \dots.$

Бодолт 1.

Заавар:

Бодолт:

1. $a_n = 5$, $n = 0, 1, 2, \dots$ бол
$$f(x) = 5 + 5x + 5x^2 + \cdots = \frac{5}{1-x}$$

2. $a_n = 3^n,\ n = 0, 1, 2, \dots$ бол
$$\begin{aligned} f(x) &= 3^0 + 3^1x^1 + 3^2x^2 + 3^3x^3 + \cdots \\ &= 1 + (3x) + (3x)^2 + (3x)^3 + \cdots = \frac{1}{1-3x} \end{aligned}$$

3. $a_n = 2$, $n = 3, 4, 5, \dots$, $a_0 = a_1 = a_2 = 0$ дарааллын үүсгэгч функц нь
$$f(x) = 2x^3 + 2x^4 + 2x^5 + \cdots = \frac{2x^3}{1-x}$$

4. $a_n = 2n + 3$, $n = 0, 1, 2, \dots$ дарааллын үүсгэгч функц нь
$$\begin{aligned} f(x) &= (2\cdot 0 + 3) + (2\cdot 1 + 3)x + (2\cdot 2 + 3)x^2 + (2\cdot 3 + 3)x^3 + \cdots \\ &= 2x(1 + 2x^1 + 3x^2 + 4x^3 + \cdots) + 3(1 + x + x^2 + x^3 + \cdots) \\ &= 2x(1 + x + x^2 + x^3 + x^4 + \cdots)' + 3(1 + x + x^2 + x^3 + \cdots) \\ &= 2x\left(\frac{1}{1-x}\right)' + \frac{3}{1-x} = \frac{2x}{(1-x)^2} + \frac{3}{1-x} = \frac{3-x}{(1-x)^2} \end{aligned}$$

5. $a_1 = a_2 = \cdots = a_7 = 0$, $a_n = C_n^8 = \dfrac{n!}{(n-8)!\cdot 8!} = \dfrac{1}{8!}n(n-1)\cdots(n-7)$ байна. Иймд
$$(x^n)^{(8)} = n(n-1)\cdots(n-7)x^{n-8} = 8!C_n^8x^{n-8}$$
ба
$$\begin{aligned} f(x) &= a_8x^8 + a_9x^9 + a_{10}x^{10} + a_{11}x^{11} + \cdots \\ &= 8!(C_8^8x^8 + C_9^8x^9 + C_{10}^8x^{10} + C_{11}^8x^{11} + \cdots) \\ &= 8!x^8(C_8^8 + C_9^8x + C_{10}^8x^2 + C_{11}^8x^3 + \cdots) \\ &= 8!x^8(1 + x + x^2 + x^3 + \cdots)^{(8)} \\ &= 8!x^8\left(\frac{1}{1-x}\right)^{(8)} = \frac{8!x^8}{(1-x)^9} \end{aligned}$$

6. $a_n = C_n^{n+4},\ n = 0, 1, 2, \dots.$ $a_n = 0$ тул $f(x) = 0$ байна.

8. Өгөгдсөн үүсгэгч функцтэй дарааллын ерөнхий гишүүний томъёог ол.

1. $(x^2+1)^3$
2. $(3x-1)^3$
3. $\dfrac{1}{1-2x^2}$
4. $\dfrac{x^2}{(1-x)^3}$
5. $\dfrac{1+x^3}{(1+x)^3}$
6. $\dfrac{x}{1+x+x^2}$

7. $e^{3x^2} - 1$

Бодолт 1.

Заавар:

Бодолт:

1. $(x^2+1)^3 = 1 + 3x^2 + 3x^4 + x^6$ тул $a_0 = a_6 = 1$, $a_2 = a_4 = 3$ ба бусад n-ийн хувьд $a_n = 0$ байна.
2. $(3x-1)^3 = -1 + 9x - 27x^2 + 27x^3$ тул $a_0 = -1$, $a_1 = 9$, $a_2 = -27$, $a_3 = 27$ ба $n \geq 4$ үед $a_n = 0$ байна.
3. $$\begin{aligned}\frac{1}{1-2x^2} &= 1 + 2x^2 + (2x^2)^2 + (2x^2)^3 + (2x^2)^4 + \cdots \\ &= 1 + 2^1x^2 + 2^2x^4 + 2^3x^6 + \cdots + 2^nx^{2n} + \cdots\end{aligned}$$
   тул $n = 2k$ үед $a_n = 2^k$ ба $n = 2k+1$ үед $a_n = 0$ байна.
4. Өргөтгөсөн биномын томьёогоор
   $$\begin{aligned}\frac{x^2}{(1-x)^3} &= x^2(1+(-x))^{-3} \\ &= x^2\left(1 + \binom{-3}{1}(-x) + \binom{-3}{2}(-x)^2 + \binom{-3}{3}(-x)^3 + \cdots\right) \\ &= x^2\left(1 + \frac{-3}{1!}(-x) + \frac{-3(-3-1)}{2!}(-x)^2 + \frac{-3(-3-1)(-3-2)}{3!}(-x)^3 + \cdots\right)\end{aligned}$$
5. $$\begin{aligned}\frac{1+x^3}{(1+x)^3} &= \frac{(1+x)(1-x+x^2)}{(1+x)^3} \\ &= \frac{1-x+x^2}{(1+x)^2} = 1 - \frac{3}{1+x} + \frac{3}{(1+x)^2} \\ &= 1 - 3(1 - x + x^2 + \cdots + (-x)^k + \cdots) + 3(1 - 2x + 3x^2 + \cdots + (k+1)(-x)^k + \cdots) \\ &= 1 + 3\cdot 1\cdot(-x) + 3\cdot 2\cdot(-x)^2 + 3\cdot 3\cdot(-x)^3 + \cdots + 3\cdot k\cdot(-x)^k + \cdots \\ &= 1 - 3x + 6x^2 - 9x^3 + \cdots + (-1)^k 3kx^k + \cdots\end{aligned}$$
   тул $a_0 = 1$, $n \geq 1$ үед $a_n = (-1)^n 3n$ байна.
6. $$\begin{aligned}\frac{x}{1+x+x^2} &= \frac{x(1-x)}{1-x^3} \\ &= (x-x^2)(1 + x^3 + x^6 + x^9 + \cdots) \\ &= x - x^2 + x^4 - x^5 + x^7 - x^8 + x^{10} - x^{11} + \cdots\end{aligned}$$
   тул $n = 3k$ үед $a_n = 0$, $n = 3k+1$ үед $a_n = 1$, $n = 3k+2$ үед $a_n = -1$ байна.
7. $e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots$ тул
   $$\begin{aligned}e^{3x^2} - 1 &= \frac{3x^2}{1!} + \frac{(3x^2)^2}{2!} + \frac{(3x^2)^3}{3!} + \frac{(3x^2)^4}{4!} + \cdots \\ &= \frac{3x^2}{1!} + \frac{3^2x^4}{2!} + \frac{3^3x^6}{3!} + \frac{3^4x^8}{4!} + \cdots + \frac{3^kx^{2k}}{k!} + \cdots\end{aligned}$$
   тул $n = 2k$ үед $a_n = \frac{3^k}{k!}$, $n = 2k+1$ үед $a_n = 0$ байна.

9. x^9-ийн өмнөх коэффициентийг ол.

1. $(1 + x^3 + x^6 + x^9 + \dots)^3$

2. $(x^2+x^3+x^4+x^5+x^6+\dots)^3$
3. $(x^3+x^5+x^6)(x^3+x^4)(x+x^2+x^3+x^4+\dots)$
4. $(x+x^4+x^7+x^{10}+\dots)(x^2+x^4+x^6+x^8+\dots)$
5. $(1+x+x^2)^3$

Бодолт 1.

Заавар: Зөвхөн 9-өөс хэтрэхгүй зэргүүдийг авч үзэхэд хангалттай.

Бодолт:

1.
$$\begin{aligned}(1+x^3+x^6+x^9+\cdots)^2 &= (1+x^3+x^6+x^9+\cdots)(1+x^3+x^6+x^9+\cdots)\\ &= 1+2x^3+3x^6+4x^9+\cdots\end{aligned}$$
тул
$$\begin{aligned}(1+x^3+x^6+x^9+\cdots)^3 &= (1+2x^3+3x^6+4x^9+\cdots)(1+x^3+x^6+x^9+\cdots)\\ &= 1+3x^3+6x^6+10x^9+\cdots\end{aligned}$$
тул x^9-ийн коэффициент нь 10 болов.

2.
$$\begin{aligned}(x^2+x^3+x^4+x^5+x^6+\dots)^3 &= x^6(1+x+x^2+x^3+\cdots)^3\\ &= x^6(1+2x+3x^2+4x^3+\cdots)(1+x+x^2+x^3+\cdots)\\ &= x^6(1+3x+6x^2+10x^3+\cdots)\\ &= x^6+3x^7+6x^8+10x^9+\cdots\end{aligned}$$
тул x^9-ийн коэффициент нь 10 болов.

3.
$$\begin{aligned}A(x) &= (x^3+x^5+x^6)(x^3+x^4)(x+x^2+x^3+x^4+\cdots)\\ &= x^7(1+x^2+x^3)(1+x)(1+x+x^2+x^3+\cdots)\end{aligned}$$
учир
$$(1+x^2+x^3)(1+x)(1+x+x^2+x^3+\cdots)$$
-ийн x^2-ийн коэффициентийг олоход хангалттай.
$$\begin{aligned}B(x) &= (1+x^2+x^3)(1+x)(1+x+x^2+x^3+\cdots)\\ &= (1+x^2+x^3)(1+2x+2x^2+2x^3+\cdots)\\ &= 1+2x+5x^3+5x^4+5x^5+\cdots\end{aligned}$$
тул $A(x)$-ийн x^9-ийн коэффициент нь 2 байна.

4.
$$\begin{aligned}&(x+x^4+x^7+x^{10}+\dots)(x^2+x^4+x^6+x^8+\dots)=\\ &= x^3+x^5+x^6+x^7+2x^8+2x^9+\cdots\end{aligned}$$
тул 2 байна.

5. $(1+x+x^2)^3$ олон гишүүнтийн зэрэг 6 тул x^9-ийн коэффициент нь 0 байна.

10. Дараах функцийг цуваа хэлбэрт бичиж x^{12}-ийн өмнөх коэффициентийг ол.

1. $\dfrac{1}{1+3x}$
2. $\dfrac{1}{(1-2x)^2}$

3. $\dfrac{1}{(1+x)^8}$

4. $\dfrac{1}{(1-4x)^3}$

5. $\dfrac{x^3}{(1+4x)^2}$

Бодолт 1.

Заавар:

$$(1+x)^\alpha = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{\alpha}{k} x^k$$

өргөтгөсөн биномын томьёо ашигла. Энд

$$\binom{\alpha}{k} = \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)\cdots(\alpha-k+1)}{k!}$$

байна.

Бодолт:

1.

$$\begin{aligned}\frac{1}{1+3x} &= 1 - 3x + 9x^2 - 27x^3 + \cdots + (-3k)^k + \cdots \\ &= 1 - 3x + 9x^2 - 27x^3 + \cdots + 3^{12}x^{12} + \cdots\end{aligned}$$

2. $\binom{-n}{k} = (-1)^k \binom{n+k-1}{k}$ тул

$$\begin{aligned}\frac{1}{(1-2x)^2} &= (1+(-2x))^{-2} \\ &= 1 + \binom{-2}{1}(-2x) + \binom{-2}{2}(-2x)^2 + \cdots + \binom{-2}{k}(-2x)^k + \cdots \\ &= 1 + (-1)\binom{2}{1}(-2x) + (-1)^2\binom{3}{2}(-2x)^2 + \cdots + (-1)^k\binom{k+1}{k}(-2x)^k + \cdots \\ &= 1 + 2\binom{2}{1}x + 2^2\binom{3}{2}x^2 + \cdots + 2^k\binom{k+1}{k}x^k + \cdots \\ &= 1 + 2\cdot 2x + 2^2 \cdot 3x^2 + \cdots + 2^k \cdot (k+1)x^k + \cdots\end{aligned}$$

тул x^{12}-ийн коэффициент нь $13 \cdot 2^{12}$ байна.

3.

$$\begin{aligned}\frac{1}{(1+x)^8} &= (1+x)^{-8} \\ &= 1 + \binom{-8}{1}x + \binom{-8}{2}x^2 + \binom{-8}{3}x^3 + \cdots + \binom{-8}{k}x^k + \cdots\end{aligned}$$

тул x^{12}-ийн коэффициент нь

$$\binom{-8}{12} = (-1)^{12}\frac{8+12-1}{12} = \binom{19}{12} = \frac{19!}{7!\cdot 12!}$$

байна.

4.

$$\begin{aligned}\frac{1}{(1-4x)^3} &= (1+(-4x))^{-3}\\ &= 1+\binom{-3}{1}(-4x)^1+\binom{-3}{2}(-4x)^2+\binom{-3}{3}(-4x)^3+\cdots\\ &= 1+\frac{-3}{1!}(-4x)+\frac{-3(-3-1)}{2!}(-4x)^2+\frac{-3(-3-1)(-3-2)}{3!}(-4x)^3+\cdots\\ &= 1+4\binom{3}{1}x+4^2\binom{4}{2}x^2+4^3\binom{5}{3}x^3+\cdots+4^k\binom{k+2}{k}x^k+\cdots\end{aligned}$$

тул x^{12}-ийн коэффициент нь $4^{12}\binom{14}{12}$ байна.

5. $\frac{1}{(1+4x)^2}$-ийн x^9-ийн коэффициентийг олоход хангалттай.

$$\begin{aligned}\frac{1}{(1+4x)^2} &= (1+(-4x))^{-2}\\ &= 1+\binom{-2}{1}(4x)^1+\binom{-2}{2}(4x)^2+\binom{-2}{3}(4x)^3+\cdots\\ &= 1+\frac{-2}{1!}(4x)+\frac{-2(-2-1)}{2!}(4x)^2+\frac{-2(-2-1)(-2-2)}{3!}(4x)^3+\cdots\\ &= 1-4\binom{2}{1}x+4^2\binom{3}{2}x^2-4^3\binom{4}{3}x^3+\cdots+(-4)^k\binom{k+1}{k}x^k+\cdots\end{aligned}$$

тул $\frac{x^3}{(1+4x)^2}$-ийн x^{12}-ийн коэффициент нь $(-4)^9\binom{10}{9}$ байна.