Дискрет мат, Семинар №09

1. Батал.

1. $0 \in \mathbb{Z}$ нь ямар ч бүхэл тоо $b \neq 0$-д хуваагдана.
2. $c \mid b$, $b \mid a$ бол $c \mid a$ байна.
3. $d \mid a$, $d \mid a+b$ бол $d \mid b$ байна.
4. $m \mid a$, $m \mid b$, $x, y \in \mathbb{Z}$ бол $m \mid ax+by$.
5. $m \mid a$, $n \mid b$ бол $mn \mid ab$ байна. Эндээс $n \in \mathbb{N}$ бол $a \mid b \Leftrightarrow a^n \mid b^n$ гэж гарна.
6. $a \mid b$, $b \mid a$ бол $a = \pm b$.
7. $a \neq b$, $n \in \mathbb{N}$ бол $a - b \mid a^n - b^n$.
8. а) n сондгой тоо ба $a + b \neq 0$ бол $a + b \mid a^n + b^n$
   б) $n > 1$ ба $2^n + 1$ анхны тоо бол $n = 2^s$ гэж батал.
9. $m, n, k \in \mathbb{N}$ ба $m^n \mid n^m$, $n^k \mid k^n$ бол $m^k \mid k^m$.
10. $57 \mid 7^{n+2} + 8^{2n+1}$, $73 \mid 8^{n+2} + 9^{2n+1}$.

Бодолт 1.
Заавар: Тодорхойлолт болон өмнө баталсан чанаруудаа ашигла.
Бодолт:

1. $0 = b \cdot 0$ учраас тодорхойлолт ёсоор $b \mid 0$ байна.
2. $c \mid b \Rightarrow b = cq_1$, $b \mid a \Rightarrow a = bq_2$ тул $a = cq_1q_2$ байна. $q_1q_2 \in \mathbb{Z}$ тул $c \mid a$.
3. $a = dq_1$, $a + b = dq_2$ тул $b = (a + b) - a = dq_2 - dq_1 = d(q_2 - q_1)$.
4. $a = mq_1$, $b = mq_2$ тул $ax + by = mq_1x + mq_2y = m(q_1x + q_2y)$, $q_1x + q_2y \in \mathbb{Z}$ тул $m \mid ax + by$.
5. $a = mq_1$, $b = nq_2$ тул $ab = (mn) \cdot (q_1q_2)$ тул $mn \mid ab$ байна.
6. $a = bq_1$, $b = aq_2$ тул $a = bq_1 = aq_2q_1 \Rightarrow q_1q_2 = 1$ тул $q_1 = q_2 = \pm 1$ байна. Иймд $a = \pm b$.
7. $$a^n - b^n = (a - b)(a^{n-1} + a^{n-2}b + a^{n-3}b^2 + \cdots + b^{n-1})$$
   тул $a - b \mid a^n - b^n$.
8. а) n сондгой тоо бол
   $$a^n + b^n = (a + b)(a^{n-1} - a^{n-2}b + a^{n-3}b^2 - \cdots + b^{n-1})$$
   тул $a + b \mid a^n + b^n$
   б) $n = 2^s q$ байх q сондгой тоо олдоно. Эндээс
   $$2^{2^s} + 1 \mid 2^n + 1 = (2^{2^s})^q + 1^q$$
   болно. $2^n + 1$ анхны тоо, $2^{2^s} + 1 > 1$ тул $2^n + 1 = 2^{2^s} + 1$ болно. Иймд $q = 1$ буюу $n = 2^s$ байна..
9. $m, n, k \in \mathbb{N}$ ба $m^n \mid n^m$, $n^k \mid k^n$ бол $m^k \mid k^m$. 5-аас $a \mid b \Leftrightarrow a^n \mid b^n$. Иймд
   $$m^n \mid n^m \Leftrightarrow (m^n)^k \mid (n^m)^k \Leftrightarrow m^{nk} \mid n^{mk},$$
   $$n^k \mid k^n \Leftrightarrow (n^k)^m \mid (k^n)^m \Leftrightarrow n^{km} \mid k^{nm}$$
   болно. Одоо 2-ийг ашиглавал $m^{nk} \mid k^{nm}$ болно. Дахин 5-ийг ашиглавал
   $$(m^k)^n \mid (k^m)^n \Leftrightarrow m^k \mid k^m$$
   болж батлагдав.

10. $n \geq 0$ үед $57 \mid 7^{n+2} + 8^{2n+1}$ болохыг n-ээр индукцлэн баталъя. $n = 0$ үед $57 \mid 7^2 + 8 = 57$ тул үнэн байна. $n = k$ үед үнэн гээд $n = k + 1$ үед үнэн болохыг харуулъя.

$$7^{k+2} + 8^{2(k+1)} = 7 \cdot 7^{k+1} + 64 \cdot 8^{2k+1} = 7 \cdot (7^{k+1} + 8^{2k+1}) + 57 \cdot 8^{2k+1}$$

болно. Индункцийн таамаглал ёсоор $57 \mid 7^{k+1} + 8^{2k+1}$ тул $57 \mid 7 \cdot (7^{k+1} + 8^{2k+1})$ ба $57 \mid 57 \cdot 8^{2k+1}$ тул эдгээр нийлбэр нь

$$57 \mid 7 \cdot (7^{k+1} + 8^{2k+1}) + 57 \cdot 8^{2k+1}$$

болж батлагдав.

2. Батал.

1. а) $2 \mid a(a+1)$, $3 \mid a(a+1)(a+2)$-г баталж ерөнхий тохиолдолд томьёол.

   б) $\dfrac{2n+1}{2n(n+1)}$ үл хураагдах бутархай гэж батал.
2. $6 \mid n^3 + 5n$, $6 \mid n^3 + 11n$, $3 \mid nm(n^2 - m^2)$
3. $5 \mid nm(n^2 - m^2)(4n^2 - m^2)$, $5 \mid nm(n^4 - m^4)$, $4 \mid n^2(n^2 - 1)$
4. $30 \mid n^5 - n$, $7 \mid n^7 - n$
5. A тоог 1981 ба 1982-т хуваахад тус бүрт нь 35 үлддэг бол 14-д хуваахад хэд үлдэх вэ?
6. p, $p + 10$, $p + 14$ анхны тоонууд бол p-г ол.
7. $m \mid n \Leftrightarrow a^m - 1 \mid a^n - 1$.

Бодолт 1.

Заавар:

1. а) a тоог 2-д хуваахад гарах үлдэгдлийг авч үз. a тоог 3-д хуваахад гарах үлдэгдлийг авч үз. б) $(a, k) = 1$ бол $(a, kb) = 1$, $(a, b) = (a + bk)$ чанаруудыг ашигла.
2. 2 ба 3-д зэрэг хуваагдах тоо 6-д хуваагдана.
3.
4. $n^5 - n$ үржигдэхүүн болгон задал.

Бодолт:

3. Евклидийн алгоритмаар

1. $(17, 56)$-г ол.
2. $(19, 39)$-г ол.
3. $(11, 101)$-г ол.
4. $(576, 486)$-г ол.

Бодолт 1.

Заавар:

Бодолт:

1.
$$(17, 56) = (17, 56 - 3 \cdot 17) = (17, 5) = (17 - 3 \cdot 5, 5) =$$
$$= (2, 5) = (2, 5 - 2 \cdot 2) = (2, 1) = 1$$
2. $(19, 39) = (19, 39 - 2 \cdot 19) = (19, 1) = 1$
3. $(11, 101) = (11, 101 - 9 \cdot 11) = (11, 2) = (11 - 5 \cdot 2, 2) = (1, 2) = 1$
4.
$$(576, 486) = (576 - 486, 486) = (90, 486) = (90, 486 - 5 \cdot 90) =$$
$$= (90, 36) = (90 - 2 \cdot 36, 36) = (18, 36) = 18$$

4. Дараах тохиолдлуудад $ax - by = 1$ байх x, y бүхэл тоонуудыг ол.

1. $a = 3$, $b = 16$
2. $a = 17$, $b = 56$
3. $a = 19$, $b = 39$
4. $a = 11$, $b = 101$

Бодолт 1.
Заавар:
Бодолт:

1. $3x - 16y = 1$. $16 = 3 \cdot 5 + 1$ тул
$$1 = 3 \cdot (-5) + 16 \cdot 1 = 3 \cdot (-1) - 16 \cdot (-1)$$
тул $x_0 = -5$, $y_0 = -1$ байна. Иймд тэгшитгэлийн ерөнхий шийд нь
$$\begin{cases} x = -5 + 16t \\ y = -1 + 3t \end{cases}$$
2. $17x - 56y = 1$. $56 = 17 \cdot 3 + 5$, $17 = 5 \cdot 3 + 2$, $5 = 2 \cdot 2 + 1$ тул
$$\begin{aligned} 1 &= 5 - 2 \cdot 2 \\ &= 5 - (17 - 5 \cdot 3) \cdot 2 \\ &= 5 \cdot 7 - 17 \cdot 2 \\ &= (56 - 17 \cdot 3) \cdot 7 - 17 \cdot 2 \\ &= 56 \cdot 7 - 17 \cdot 23 \\ &= 17 \cdot (-23) - 56 \cdot (-7) \end{aligned}$$
тул $x_0 = -23$, $y_0 = -7$ гэсэн шийдтэй. Иймд тэгшитгэлийн ерөнхий шийд нь
$$\begin{cases} x = -23 + 56t \\ y = -7 + 17t \end{cases}$$
3. $19x - 39y = 1$. $39 = 19 \cdot 2 + 1$ тул
$$19 \cdot (-2) - 39 \cdot (-1) = 1$$
тул $x_0 = -2$, $y_0 = -1$ гэсэн шийдтэй. Иймд тэгшитгэлийн ерөнхий шийд нь
$$\begin{cases} x = -2 + 39t \\ y = -1 + 19t \end{cases}$$
4. $11x - 101y = 1$. $101 = 11 \cdot 9 + 2$, $11 = 2 \cdot 5 + 1$ тул
$$\begin{aligned} 1 &= 11 - 2 \cdot 5 \\ &= 11 - (101 - 11 \cdot 9) \cdot 5 \\ &= 11 \cdot 46 - 101 \cdot 5 \end{aligned}$$
тул $x_0 = 46$, $y_0 = 5$ гэсэн шийдтэй. Иймд тэгшитгэлийн ерөнхий шийд нь
$$\begin{cases} x = 46 + 101t \\ y = 5 + 11t \end{cases}$$

5. Хэрэв $a^2, a^4, a^8, a^{16}, a^{32}$-г тооцоолсон бол a^{53}-г хэрхэн хялбар аргаар олох вэ?
Бодолт 1.
Заавар:
Бодолт: $a^{53} = a^{32} \cdot a^{16} \cdot a^4 \cdot a$ гэж олно.