Дискрет мат, Семинар №04

1. A, B, C олонлогуудын элементийг жагсаан бичээд $A \cup B$, $B \cap C$, $(A \cup B) \cap C$, $A \cap B \cap C$ олонлогуудыг ол.

1. A нь 12-ын натурал хуваагчдын, B нь $x^2 - 6x + 5 = 0$ тэгшитгэлийн язгууруудын, C нь $3 \leq x \leq 12$ байх сондгой бүхэл x тоонуудын олонлог,
2. A нь $3 < x < 10$ байх тэгш бүхэл x тоонуудын, B нь 21-ын натурал хуваагчдын, C нь 12-оос бага анхны тоонуудын олонлог.

Бодолт 1.

Заавар:

Бодолт:

1. $A = \{1, 2, 3, 4, 6, 12\}$, $B = \{1, 5\}$, $C = \{3, 5, 7, 9, 11\}$ тул
$$A \cup B = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 12\},$$
$$B \cap C = \{5\},$$
$$(A \cup B) \cap C = \{1, 5\},$$
$$A \cap B \cap C = \varnothing$$
2. $A = \{4, 6, 8\}$, $B = \{1, 3, 7, 21\}$, $C = \{2, 3, 5, 7, 11\}$ тул
$$A \cup B = \{1, 3, 4, 6, 7, 8, 21\},$$
$$B \cap C = \{3, 7\},$$
$$(A \cup B) \cap C = \{3, 7\},$$
$$A \cap B \cap C = \varnothing$$

2. A, B нь бодит тоон олонлог $\mathbb{R}$-ын дэд олонлогууд байхад $A \cup B$, $A \cap B$, $A \cup \overline{B}$, $\overline{A} \cap B$, $\overline{A \cup B}$ олонлогуудыг олж тоон шулуун дээр дүрсэл ($\overline{X}$ нь X-ийн $\mathbb{R}$ дэх гүйцээлт).

1. $A =]-1; 0]$, $B = [0; 2[$
2. $A = [0; 3[$, $B =]-1; +\infty[$
3. $A =]-\infty; 1]$, $B =]-\infty; -3[$
4. $A =]0; +\infty[$, $B = [-1; 1[$

3. Аливаа A, B, C олонлогуудын хувьд дараах тэнцэтгэлүүд хүчинтэй гэж батал.

1. $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$,
2. $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$,
3. $A \cup (A \cap B) = A$,
4. $A \cap (A \cup B) = A$,
5. $(A \setminus B) \setminus C = (A \setminus C) \setminus B$,
6. $(A \setminus B) \setminus C = (A \setminus C) \setminus (B \setminus C)$,
7. $(A \cup B) \setminus (A \cap B) = (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$,
8. $(B \cup C) \setminus A = (B \setminus A) \cup (C \setminus A)$,
9. $A \setminus (B \cup C) = (A \setminus B) \cap (A \setminus C)$,
10. $A \setminus (B \cap C) = (A \setminus B) \cup (A \setminus C)$.

Бодолт 1.

Заавар: Нэгдэл, огтлолцол, ялгавар үйлдлийн тодорхойлолт ба хоёр олонлог тэнцүү байх бүрэн нөхцөл ашигла.

Бодолт: Зөвхөн 1-ийг баталъя.

$$x \in A \cup (B \cap C) \Leftrightarrow x \in A \vee x \in B \cap C \Leftrightarrow$$
$$x \in A \vee (x \in B \wedge x \in C) \Leftrightarrow (x \in A \vee x \in B) \wedge (x \in A \vee x \in C)$$
$$\Leftrightarrow (x \in A \cup B) \wedge (x \in A \cup C) \Leftrightarrow x \in (A \cup B) \cap (A \cup C)$$

4. A, B нь U олонлогийн дэд олонлогууд байхад дараах тэнцэтгэлүүд хүчинтэй гэж батал.

1. $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$
2. $\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$
3. $A \setminus B = A \cap \overline{B}$,
4. $(A \cup B) \setminus (A \cap B) = (A \cap \overline{B}) \cup (B \cup \overline{A})$
5. $\overline{A \setminus B} = \overline{A} \cup (A \cap B)$

Бодолт 1.

Заавар: $x \in \overline{X} \Leftrightarrow x \notin X$ болохыг ашигла.

Бодолт: Зөвхөн эхний тэнцэлийг баталъя.

$$x \in \overline{A \cup B} \Leftrightarrow x \notin A \cup B \Leftrightarrow \neg(x \in A \cup B) \Leftrightarrow$$
$$\neg(x \in A \vee x \in B) \Leftrightarrow \neg(x \in A) \wedge \neg(x \in B) \Leftrightarrow$$
$$x \notin A \cap x \notin B \Leftrightarrow x \in \overline{A} \cap x \in \overline{B} \Leftrightarrow x \in \overline{A} \cap \overline{B}$$

5. $|A| = n$ үед $P(A)$-ын чадлыг ол.

Бодолт 1.

Заавар: $|X| = m$, $|Y| = n$ бол $f\colon X \to Y$ буулгалтын тоо нь n^m байдаг.

Бодолт: $\chi_B(x) = \begin{cases} 1, & x \in B \\ 0, & x \notin B \end{cases}$ гэж тодорхойлогдох $\chi_B\colon A \to \{0,1\}$ буулгалт нь $B \subseteq A$ дэд олонлогийг бүрэн тодорхойлно. Ийм буулгалтын тоо $|\{0,1\}|^{|A|} = 2^n$ байна.

6. A олонлог эсвэл 2-т, эсвэл 3-т, эсвэл 5-д хуваагдах натурал тоонуудаас тогтож байв. Хэрэв A-ын 70 тоо 2-т, 60 тоо 3-т, 80 тоо 5-д, 32 тоо 6-д, 35 тоо 10-д, 38 тоо 15-д, 20 тоо 30-д хуваагддаг бол A олонлог хэдэн элементтэй вэ?

Бодолт 1.

Заавар:

Бодолт: A-ийн 2-т хуваагддаг тоонуудын дэд олонлогийг A_2, 3-т хуваагддаг тоонуудын дэд олонлогийг A_3, 5-д хуваагддаг тоонуудын дэд олонлогийг A_5 гэвэл бодлогын нөхцөлөөр $A = A_2 \cup A_3 \cup A_5$ байна. Түүнчлэн $|A_2| = 70$, $|A_3| = 60$, $|A_5| = 80$, $|A_2A_3| = 32$, $|A_2A_5| = 35$, $|A_3A_5| = 38$, $|A_2A_3A_5| = 20$ тул

$$|A| = |A_2| + |A_3| + |A_5| - |A_2A_3| - |A_2A_5| - |A_3A_5| + |A_2A_3A_5|$$
$$= 70 + 60 + 80 - 32 - 35 - 38 + 20 = 125$$

байна.

7. 1000-аас бага натурал тоонуудаас хэд нь

1. 2-т хуваагддаг боловч, 3-т хуваагддаггүй,
2. 2 юмуу 3-т хуваагддаг,
3. 2-т ч, 3-т ч хуваагддаггүй байх вэ?

Бодолт 1.

Заавар:

Бодолт:

1. 2-т хуваагддаг боловч, 3-т хуваагддаггүй тоонууд нь 2-т хуваагддаг тоонуудаас 6-д хуваагддаг тоонуудыг хасахад гарна. Иймд
$$\left[\frac{999}{2}\right]-\left[\frac{999}{6}\right]=499-166=333$$
ширхэг тоо байна. Мөн 6-д хуваахад 2 эсвэл 4 үлдэгдэл өгдөг тоонууд гээд бодож болно.

2. 2 юмуу 3-т хуваагддаг
$$\left[\frac{999}{2}\right]+\left[\frac{999}{3}\right]-\left[\frac{999}{6}\right]=499+333-166=666$$

3. 2-т ч, 3-т ч хуваагддаггүй тоонууд нь нийт тоонуудаас 2 юмуу 3-т хуваагддаг тоонуудыг хасахад гарах тул
$$999-666=333$$
байна.

8. $A=\{4n+2 \mid n\in\mathbb{N}\}$, $B=\{3n \mid n\in\mathbb{N}\}$ бол $A\cap B$-г ол.

Бодолт 1.

Заавар:

Бодолт: $4n+2$ тоо нь B-ийн элемент болохын тулд $n=3k-2$, $k\in\mathbb{N}$ хэлбэрийн тоо байх ёстой. Иймд
$$A\cap B=\{4(3k-2)+2 \mid k\in\mathbb{N}\}=\{12n-6 \mid n\in\mathbb{N}\}$$
байна.

9. Координатууд нь дараах нөхцөлд тохирох (x,y) цэгүүдийн олонлогийг Oxy хавтгай дээр дүрсэл.

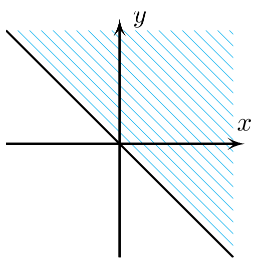
1. $|x+y|=x+y$
2. $|y|-|x|\geq 0$
3. $x^2+y^2-4y\leq 0$
4. $x^2+y^2\leq 2|x|+2|y|$
5. $|x-y|=|x-y+1|$
6. $\log_{\frac{1}{2}}(2-x^2-y^2)<0$
7. $(x-|x|)^2+(y-|y|)^2\leq 4$

Бодолт 1.

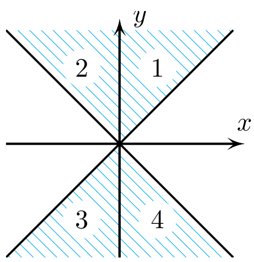
Заавар:

Бодолт:

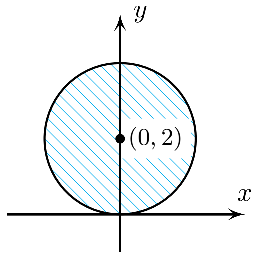
1. $|x+y|=x+y$ нь $x+y\geq 0$ үед $x+y=x+y$ болох тул ямагт үнэн тул $x+y\geq 0$ мужийн бүх цэг шийд болно. Нөгөө талаас $x+y<0$ бол тэгшитгэлээс $-x-y=x+y$ буюу $x+y=0$ болж зөрчил үүсч байна. Иймд



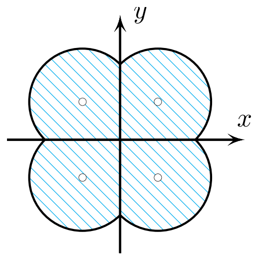
2. $|y|-|x|\geq 0$ тэнцэтгэл биш нь координатын I мужид $y-x\geq 0$, II мужид $y+x\geq 0$, III мужид $-y+x\geq 0$, IV мужид $-y-x\geq 0$ болно.



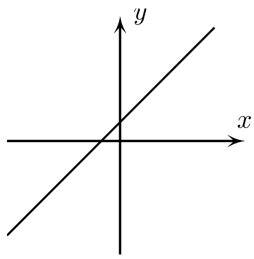
3. $x^2 + y^2 - 4y \leq 0 \Leftrightarrow x^2 + (y-2)^2 \leq 2^2$



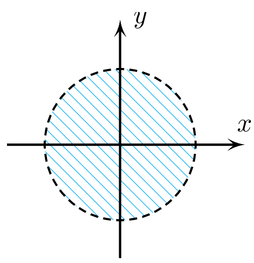
4. $x^2 + y^2 \leq 2|x| + 2|y|$ тэнцэтгэл биш нь координатын I мужид $x^2 + y^2 \leq 2x + 2y$, II мужид $x^2 + y^2 \leq -2x + 2y$, III мужид $x^2 + y^2 \leq -2x - 2y$, IV мужид $x^2 + y^2 \leq 2x - 2y$ болно. Иймд



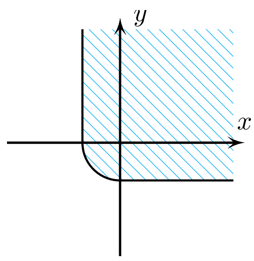
5. $|x - y| = |x - y + 1| \Leftrightarrow x - y = -\dfrac{1}{2} \Leftrightarrow y = x + 0.5$ тул



6. $\log_{\frac{1}{2}}(2 - x^2 - y^2) < 0 \Leftrightarrow 2 - x^2 - y^2 > 1 \Leftrightarrow x^2 + y^2 < 1$ тул



7. $(x - |x|)^2 + (y - |y|)^2 \leq 4$ нь координатын I мужид $0 \leq 4$, II мужид $(2x)^2 \leq 4$, III мужид $(2x)^2 + (2y)^2 \leq 4$, IV мужид $(2y)^2 \leq 4$ тул



10. $A \times B$, $B \times A$, B^2, A^3 олонлогуудыг ол.

1. $A = \{1, 2\}$, $B = \{1, 3, 4\}$

2. $A = \{3\}$, $B = \{1, 2, 3, 4\}$

Бодолт 1.

Заавар: Зөвхөн 1-ийг нь бодъё. $A = \{1,2\}$, $B = \{1,3,4\}$ бол

$$A \times B = \{(1,1),(1,3),(1,4),(2,1),(2,3),(2,4)\}$$

$$B \times A = \{(1,1),(1,2),(3,1),(3,2),(4,1),(4,2)\}$$

$$B^2 = \{(1,1),(1,3),(1,4),(3,1),(3,3),(3,4),(4,1),(4,3),(4,4),\}$$

$$A^3 = \{(1,1,1),(1,1,2),(1,2,1),(1,2,2),(2,1,1),(2,1,2),(2,2,1),(2,2,2)\}$$

байна.

Бодолт:

11. Дараах ϕ харгалзаа буулгалт мөн үү? Мөн бол инъектив, суръектив, биектив чанартай юу?

1. $\phi = \{(x,y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \mid y = x^2\}$
2. $\phi = \{(x,y) \in [0;+\infty[\times \mathbb{R} \mid y = x^2\}$
3. $\phi = \{(x,y) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} \mid y = x^2\}$
4. $\phi = \{(x,y) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} \mid x - y = 3\}$
5. $\phi = \{(x,y) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} \mid |x - y| = 3\}$

Бодолт 1.

Заавар:

Бодолт:

1. $\phi = \{(x,y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \mid y = x^2\}$ буулгалт мөн. $1 \neq -1$ бол $1^2 = (-1)^2$ тул инъектив биш, $-1 = x^2$ байх $x \in \mathbb{R}$ too олдохгүй тул сюръектив биш.
2. $\phi = \{(x,y) \in [0;+\infty[\times \mathbb{R} \mid y = x^2\}$ буулгалт мөн. $\forall x_1 \neq x_2$, $x_1, x_2 \in [0;+\infty[$ тоонуудын хувьд $x_1^2 \neq x_2^2$ тул инъектив. Сюръектив биш гэдэг нь өмнөхтэй ижил.
3. $\phi = \{(x,y) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} \mid y = x^2\}$ буулгалт мөн. $\forall x_1 \neq x_2$, $x_1, x_2 \in \mathbb{N}$ тоонуудын хувьд $x_1^2 \neq x_2^2$ тул инъектив. $2 = x^2$ байх $x \in \mathbb{N}$ тоо оршин байхгүй тул сюръектив биш.
4. $\phi = \{(x,y) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} \mid x - y = 3\}$ буулгалт биш. $x = 1$, $x = 2$, $x = 3$ элементүүдийн дүр оршин байхгүй.
5. $\phi = \{(x,y) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} \mid |x - y| = 3\}$ буулгалт биш. $x = 4$ нь $y_1 = 1$, $y_2 = 7$ гэсэн хоёр дүртэй.

12. Дараах харьцаа ямар чанартай вэ? (рефлексив, симметр, транзитив г.м)

1. Хавтгайн шулуунуудын параллелийн харьцаа,
2. Хавтгайн шулуунуудын перпендикулярын харьцаа,
3. Хавтгайн шулуунуудын огтлолцлын харьцаа,
4. Бодит тоонуудын $=, <, \leq$ байх харьцаа,
5. Гурвалжнуудын төсөөтэйн харьцаа,
6. A олонлогийн дэд олонлогуудын агуулагдлын $(\subset, \subseteq)$ харьцаа.

Бодолт 1.

Заавар:

Бодолт:

1. Хавтгайн шулуунуудын параллелийн харьцаа рефлексив

   $$\ell \parallel \ell,$$

   симметр

   $$\ell \parallel m \to m \parallel \ell,$$

   транзитив

   $$\ell \parallel m, m \parallel n \to \ell \parallel n$$

   байна. Иймд эквивалентийн харьцаа юм.

2. Хавтгайн шулуунуудын перпендикулярын харьцаа рефлексив биш, симметр, тразитив биш.

3. Хавтгайн шулуунуудын огтлолцлын харьцаа рефлексив биш, симметр, транзитив биш.

4. Бодит тоонуудын $=$ харьцаа нь рефлексив, симметр, транзитив; $<$ харьцаа нь рефлексив биш, симметр биш, транзитив; $\leq$ харьцаа нь рефлексив, симметр биш, транзитив.

5. Гурвалжнуудын төсөөтэйн харьцаа рефлексив, симметр, транзитив.

6. A олонлогийн дэд олонлогуудын агуулагдлын $(\subset, \subseteq)$ харьцаа рефлексив, симметр биш, транзитив.

13. $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ олонлогийг $A_1 = \{1, 2\}$, $A_2 = \{3\}$, $A_3 = \{4, 5, 6\}$ гэж зөв хуваах эквивалентийн харьцаа ол.

Бодолт 1.

Заавар:

Бодолт:

$$\rho = \{(1,1), (1,2), (2,1), (2,2), (3,3), (4,4), (4,5), (4,6), \\ (5,4), (5,5), (5,6), (6,4), (6,5), (6,6)\}$$

14. Рационал тоон коэффициенттэй бүх олон гишүүнтүүдийн олонлог $\mathbb{Q}[x]$ тоологдом олонлог мөн үү?

Бодолт 1.

Заавар: Рационал тоон олонлог тоологдом тул натурал тоон коэффициенттэй олон гишүүнтүүдийн олонлог тоологдом гэж харуулахад хангалттай.

Бодолт: $P(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$ олон гишүүнтийг $a_n + a_1 + \cdots + a_0 + n$ дүгээр төрлийн олон гишүүнт гэе. Өгөгдсөн m натурал тооны хувьд m-р төрлийн олон гишүүнтийн тоо төгсгөлөг тоотой байна. Түүнчлэн төгсгөлөг тооны тоологдом олонлогийн нэгдэл тоологдом олонлог байх тул натурал тоон коэффициенттэй олон гишүүнтүүдийн олонлог тоологдом олонлог болно. Иймд рационал коэффициенттэй олон гишүүнтүүдийн олонлог тоологдом байна.

15. Бодит тооны үл огтлолцох $]a, b[$ завсруудын олонлог тоологдом мөн үү?

Бодолт 1.

Заавар: Бодит тоонуудын аливаа завсарт орших ядаж нэг рационал тоо оршин байна.

Бодолт: Тоон засвар бүрээс нэг, нэг рационал тоо сонгон авъя. Завсарууд маань үл огтлолцох тул сонгон авсан тоонууд маань харилцан ялгаатай бөгөөд өөрийн сонгогдсон завсараа нэг утгатай доторхойлж чадна. Иймд үл огтлолцох завсаруудын олонлог нь рационал тоон олонлогоос хэтрэхгүй чадалтай буюу тоологдом (тоологдомоос бага байж болно) болов.

16. $A = \{a_1, a_2, \dots, a_n\}$ олонлогийн элементээр төгсгөлөг урттай бичигдсэн үгүүдийн олонлог $F(A)$ байг. $F(A)$ олонлогийн дэд олонлог бүрийг A олонлог дээрх хэл гэвэл A олонлог дээрх бүх хэл континуум чадалтай гэж үзэж болох уу?

Бодолт 1.

Заавар:

Бодолт: $F(A)$ тоологдом олонлог байна. Тоологдом чадалыг $\aleph_0$ гэж тэмдэглэдэг. Иймд $2^{\aleph_0} = \mathfrak{c}$ гэж батлах шаардлагатай. Энэ нь Кантор-Бернштейны теоремоос мөрдөн гардаг.