

Лабораторная работа № 2

Задача о погоне

Тарусов Артём Сергеевич

Содержание

Цель работы	4
Задание	5
Теоретическое введение	6
Выполнение лабораторной работы	7
Выводы	12
Список литературы	13

Список иллюстраций

1	Начальные значения	7
2	Нахождение значений x	8
3	Выражение тангенциальной скорости через v	8
4	Составление и решение уравнений для двух случаев	9
5	Код для построения траекторий движения лодки и катера	10
6	Траектория движения лодки и катера в случае 1	10
7	Траектория движения лодки и катера в случае 2	11

Цель работы

Целью данной работы является решение задачи о погоне.

Задание

- Записать уравнение, описывающее движение катера, с начальными условиями для двух случаев
- Построить траекторию движения катера и лодки для двух случаев
- Найти точку пересечения траектории катера и лодки

Теоретическое введение

- Тангенциальная скорость [1] - составляющая вектора скорости, перпендикулярная линии, соединяющей источник и наблюдателя. Измеряется собственному движению - угловому перемещению источника.
- Радиальная скорость [2] — проекция скорости точки на прямую, соединяющую её с выбранным началом координат.
- Полярная система координат [3] — двумерная система координат, в которой каждая точка на плоскости определяется двумя числами — полярным углом и полярным радиусом.

Выполнение лабораторной работы

1. Опишем начальные значения согласно варианту 8 (fig. 1).

$$k = 6,5; n = 2, 6$$

$$t_0 = 0; x_{л0} = 0; x_{к0} = 6,5$$

Рис. 1: Начальные значения

2. Введем полярные координаты. Считаем, что полюс - это точка обнаружения лодки браконьеров проходит через точку нахождения катера береговой охраны.
3. Траектория катера должна быть такой, чтобы и катер, и лодка все время были на одном расстоянии от полюса, только в этом случае траектория катера пересечется с траекторией лодки. Поэтому для начала катер береговой охраны должен двигаться некоторое время прямолинейно, пока не окажется на том же расстоянии от полюса, что и лодка браконьеров. После этого катер береговой охраны должен двигаться вокруг полюса удаляясь от него с той же скоростью, что и лодка браконьеров.
4. Чтобы найти расстояние x (расстояние после которого катер начнет двигаться вокруг полюса), необходимо составить простое уравнение. Пусть через время t катер и лодка окажутся на одном расстоянии x от полюса. За это время лодка пройдет x ,

а катер $k-x$ (или $k+x$, в зависимости от начального положения катера относительно полюса). Время, за которое они пройдут это расстояние, вычисляется как x/v или $k-x / 2.6v$ (во втором случае $k+x / 2.6v$). Так как время одно и то же, то эти величины одинаковы. Составим уравнения и найдем расстояние x (fig. 2).

$\frac{x}{v} = \frac{k-x}{2,6v}$	ИЛИ	$\frac{x}{v} = \frac{x+k}{2,6v}$
$x = \frac{k-x}{2,6}$		$x = \frac{k+x}{2,6}$
$2,6x = k - x$		$2,6x = k + x$
$3,6x = k$		$1,6x = k$
$x_1 = \frac{k}{3,6} = \frac{6,5}{3,6} = \frac{65}{36}$		$x_2 = \frac{k}{1,6} = \frac{6,5}{1,6} = \frac{65}{16}$

Рис. 2: Нахождение значений x

5. После того, как катер береговой охраны окажется на одном расстоянии от полюса, что и лодка, он должен сменить прямолинейную траекторию и начать двигаться вокруг полюса удаляясь от него со скоростью лодки v . Для этого скорость катера раскладываем на радиальную и тангенциальную скорости (fig. 3).

$$v_r = \frac{dr}{dt} = v ; v_\tau = r \frac{d\theta}{dt}$$

$$v_\tau = \sqrt{(2,6v)^2 - v^2} = \sqrt{6,76v^2 - v^2} = \sqrt{5,76v^2}$$

Рис. 3: Выражение тангенциальной скорости через v

6. Решение исходной задачи сводится к решению системы из двух дифференциальных уравнений (fig. 4).

$$\begin{cases} \frac{dr}{dt} = v \\ r \frac{d\theta}{dt} = \sqrt{5,76}v \end{cases} \quad \begin{cases} \theta_0 = 0 \\ r_0 = x_1 = \frac{65}{36} \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases} \theta_0 = -\pi \\ r_0 = x_1 = \frac{65}{16} \end{cases}$$

$$\frac{dr}{d\theta} = \frac{r}{\sqrt{5,76}}$$

$$\frac{dr}{r} = \frac{d\theta}{\sqrt{5,76}}$$

$$\ln r = \int \frac{d\theta}{\sqrt{5,76}} = \frac{\theta}{\sqrt{5,76}}$$

$$r = C e^{\frac{\theta}{\sqrt{5,76}}}$$

$$C_1 = \frac{65}{36}$$

$$C_2 = \frac{65}{16} e^{\frac{\sqrt{5,76}}{-\pi}}$$

$$r = \frac{65}{36} e^{\frac{\theta}{\sqrt{5,76}}}$$

$$r = \frac{65}{16} e^{\frac{\sqrt{5,76}}{-\pi}} e^{\frac{\theta}{\sqrt{5,76}}} = \frac{65}{16} e^{\frac{\theta+\pi}{\sqrt{5,76}}}$$

Рис. 4: Составление и решение уравнений для двух случаев

7. Построим траектории движения катера береговой охраны и лодки с помощью Julia (fig. 5 - fig. 7).

```

using Plots
using DifferentialEquations

function ode_fn(du,u,p,t)
    r, θ = u
    du[1] = 1
    du[2] = sqrt(5.76) / u[1]
end

r_0 = 65/36
h = 0.1
θ_0 = 0.0
tspan = (0, 25]
prob = ODEProblem(ode_fn, [r_0, θ_0], tspan)
sol = solve(prob, dtmax=h)

R = [u[1] for u in sol.u]
θ = [u[2] for u in sol.u]

boat_r = Float64[0.0, 25.0]
boat_θ = Float64[7π/4]

intersection_r = 0
for (i,θ) in enumerate(θ)
    if (round(θ, digits=2) == round(boat_θ[1], digits=2))
        global intersection_r = R[i]
        break
    end
end

plt = plot(
    proj = :polar,
    aspect_ratio=:equal,
    dpi=300,
    title="Задача о погоне",
    legend=true)

plot!(
    plt,
    θ,
    R,
    label="Траектория катера",
    color=:green)

plot!(
    plt,
    boat_θ,
    boat_r,
    label="Траектория лодки",
    color=:red)

savefig(plt, "lab02_1.png")

r_0 = 65/16
θ_0 = 1π
prob = ODEProblem(ode_fn, [r_0, θ_0], tspan)
sol = solve(prob, dtmax=h)

R = [u[1] for u in sol.u]
θ = [u[2] for u in sol.u]

boat_r = Float64[0.0, 25.0]

for (i,θ) in enumerate(θ)
    if (round(θ, digits=2) == round(boat_θ[1], digits=2))
        global intersection_r = R[i]
        break
    end
end

plt2 = plot(
    proj = :polar,
    aspect_ratio=:equal,
    dpi=300,
    title="Задача о погоне",
    legend=true)

plot!(
    plt2,
    θ,
    R,
    label="Траектория катера",
    color=:green)

plot!(
    plt2,
    boat_θ,
    boat_r,
    label="Траектория лодки",
    color=:red)

plot!(
    plt2,
    [intersection_r],
    [intersection_r],
    seriestype = :scatter,
    label="Точка пересечения",
    color=:blue)

savefig(plt2, "lab02_2.png")

```

Рис. 5: Код для построения траекторий движения лодки и катера

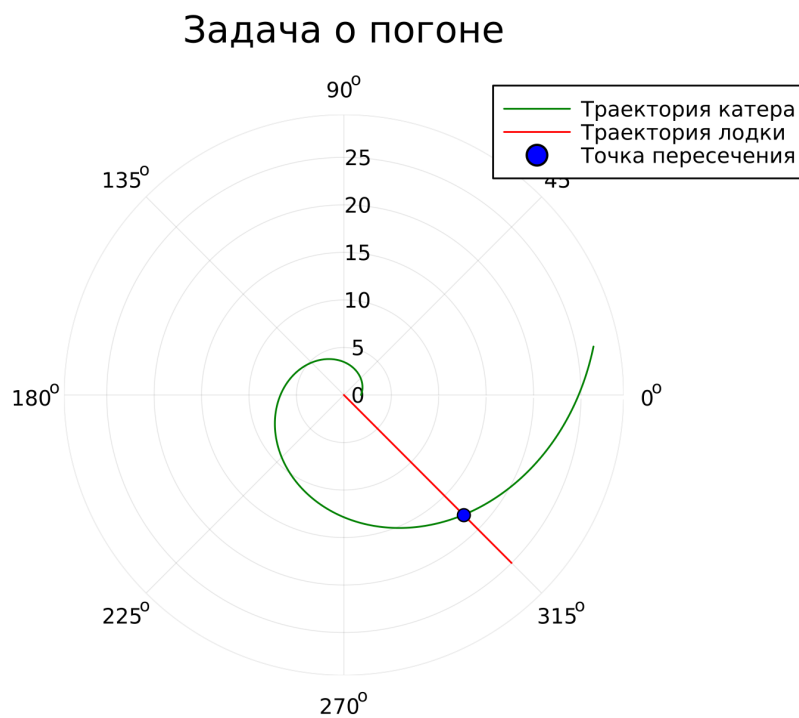


Рис. 6: Траектория движения лодки и катера в случае 1

Задача о погоне

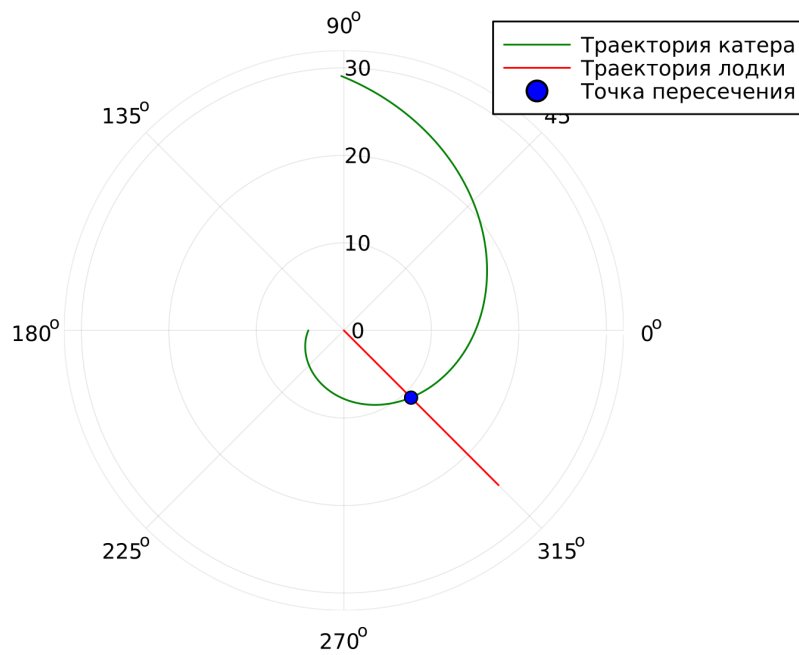


Рис. 7: Траектория движения лодки и катера в случае 2

8. Построение траекторий с помощью языка OpenModelica не имеет смысла, так как это невозможно сделать, используя базовые средства.

Выводы

В итоге проделанной работы мы решили задачу о погоне и построили траектории движения лодки и катера с помощью языка Julia. Также мы выяснили, что построение траекторий движения для данного случая не является подходящей задачей для языка OpenModelica.

Список литературы

- [illegible]