Föreläsning 9

Josef Wilzen

2024-11-28

Outline

Introduktion

Tidigare had ARIMA diskuteras. Med ARIMAs förutsätter vi att tidseriens egenskaper inte ändras över tid $\rightarrow$ tidserien ska vara stationär

Nu analyserar vi tidsserien som där egenskaperna eller förhållanden förändras över tid. Exempel kan vara: policyförändringar, naturhändelser eller andra störningar.

Detta leder till varianter av tidserieregression. Baseras på kap 6 i TSAF.

Grundläggande begrepp vi redan har studerat:

- Stationaritet: Datans egenskaper förblir konstanta över tid.
- ARIMA-modeller $\rightarrow$ Grund för transferfunktions och interventionsanalys.

Vad är transferfunktioner?

- Modellerar sambandet mellan en ingående (x) och en utgående (y) tidsserie.
- Fångar upp fördröjda effekter och dynamiska beroenden.
- Vi använder ofta två speciella funktioner som förklarande variabler för att modellera ett förändrat beroende över tid
  - Diracs delta-funktion/Dirac-pulsen/enhetsimpuls:

$$x_t = \delta_{\{t=0\}} = \mathbb{1}_{\{t=0\}} = \begin{cases} 1 & t = 0 \\ 0 & t \neq 0 \end{cases}$$

  - Stegfunktion/enhetsstegfunktionen/Heavisidefunktionen:

$$x_t = \mathbb{1}_{\{t\geq 0\}} = u(t) = \begin{cases} 0 & t < 0 \\ 1 & t \geq 0 \end{cases}$$

Vad är interventionsmodeller?

- Utvärderar effekten av plötsliga eller planerade externa förändringar på en tidsserie.

Transferfunktioner

Vi börjar med modell utan vitt brus:

$$y_t = \sum_{i=0}^{\infty} v_i x_{t-i} = v(B)x_t$$

- $v(B) = \sum_{i=0}^{\infty} v_i B^i$ är *transferfunktion*, B är bakåtskiftsoperatorn
- y_t: Utgående serie.
- x_{t-i}: Fördröjd ingående serie.

Linjära filter

- Linjära filter: Vi har en funktion $y = f(x)$ som är en linjärkombination av input x
- För att få y_t vid tidpunkt t så viktar vi samman olika tidpunkter för x:

$$y_t = \sum_{i=0}^{\infty} v_i x_{t-i} = v_0 x_t + v_1 x_{t-1} + v_2 x_{t-2} + \ldots$$

i anger hur långt bak i tiden som vi går.

Egenskaper/krav:

- Tidsinvariant: koefficienterna ändras inte över tid
- Fysiskt realiserbart: y_t får bara bero på nuvarande och dåtida värden på x (ej framtida värden på x)
- Stabilt:

$$\sum_{i=-\infty}^{\infty} |v_i| < \infty$$

Transferfunktioner

Modell:

$$y_t = \sum_{i=0}^{\infty} v_i x_{t-i} = v(B)x_t$$

v_i i transferfunktion kallas för *impulse response function* eftersom med impuls x_t för $t = 0$ dvs

$$x_t = \mathbb{1}_{\{t=0\}}$$

leder till

$$y_t = \sum_{i=0}^{\infty} v_i x_{t-i} = v_t,$$

Transferfunktioner

Modell:

$$y_t = \sum_{i=0}^{\infty} v_i x_{t-i} = v(B) x_t$$

v_i i transfer funktion kallas för *step response function* eftersom med enhetssteg x_t dvs

$$x_t = \mathbb{1}_{\{t \geq 0\}}$$

leder till

$$y_t = \sum_{i=0}^{t} v_i,$$

- om steg är av storlek X blir $y_t = \left(\sum_{i=0}^{t} v_i\right) X$.

Transfer function-noise model

$$y_t = \sum_{i=0}^{\infty} v_i x_{t-i} + N_t = v(B)x_t + N_t,$$

N_t är icke observerad brusprocess (t.ex. vitt brus) som är oberoende av x_t,

- obs. att vi har oändlig många v_i att skatta $\rightarrow$ för att minska antal parametrar använder man ytteligare en modell - ARMA

$$y_t = \frac{w(B)}{\delta(B)}x_t + N_t,$$

$$w(B) = w_0 - w_1 B - \ldots - w_s B^s, \ \delta(B) = 1 - \delta_1 B - \ldots - \delta_r B^r$$

- Om vi har fördröjning (b) mellan x och respons y blir modell:

$$y_t = \frac{w(B)}{\delta(B)}x_{t-b} + N_t = \frac{w(B)}{\delta(B)}B^b x_t + N_t.$$

Transfer function-noise model

$$y_t = \frac{w(B)}{\delta(B)} B^b x_t + N_t$$

$$w(B) = w_0 - w_1 B - \ldots - w_s B^s, \;\; \delta(B) = 1 - \delta_1 B - \ldots - \delta_r B^r$$

är ändlig antal parametrar beror på b, r och s som kan beräknas via

$$v_j - \delta_1 v_{j-1} - \delta_2 v_{j-2} - \cdots - \delta_r v_{j-r} = \begin{cases} -w_{j-b}, & j = b+1, \ldots, b+s \\ 0, & j > b+s \end{cases} \tag{6.12}$$

with $v_b = w_0$ and $v_j = 0$ for $j < b$.

(Ex.6.1 Case 1 and 2 i TSFA)

Transfer function-noise model

Modell med brusprocess kan anta att N_t kan modelleras med en ARIMA(p,d,q)-modell.

- Transfer funtion-noise modell består därför av en dynamisk komponent och en bruskomponent.
- Olika metoder kan användas för att modellera bruskomponenten.
  - Om y_t är stationär används oftast ARMA för att modellera bruskomponenten
  - Om den inte är stationär kan den istället modelleras med ARIMA-metoden.

Transfer function-noise model in R

- arimax från TSA-paketet:
  - Denna funktion gör det möjligt att anpassa ARIMA-modeller med transfer funktioner. Den stödjer modellering av tidsseriedata med externa kovariater och inkluderar bruskomponenter.
- Se exempelkod: länk

Transfer function-noise model in R

tfarima-paketet:

- Detta paket är specifikt utformat för att modellera transferfunktioner. Funktionen tfm() stödjer modeller med flera inmatningstransferfunktioner.
- Det möjliggör modellering av brus med hjälp av ARIMA-strukturer och erbjuder flexibilitet för att hantera dynamiska komponenter i tidsserier.