Föreläsning 5
Exponentiell utjämning

Kapital 4

Tre typer av utjämningar

- Enkel exponentiell utjämning: Används när tidsserien rör sig runt en viss nivå.
  - Bok: First order exponential smoothing.
  - Minitab: Single exponential smoothing
- Dubbel exponentiell utjämning: Använd då en trend finns i tidsserien.
  - Bok: Second order exponetial smoothing
  - Minitab: Double exponential smoothing
- Holt Winters metod: Används när trend- och säsongsvariation finns i tidsserien.
  - Bok: Higher order exponential smoothing
  - Minitab: Winters method

- Exponentiell utjämning liknar glidande medelvärden (MA) men nyare obs får mer vikt.
- Exponentiell utjämning baseras dock på en <u>modell</u> vilket inte MA gör.
- Istället för att skatta parametrarna till ett fixt värde, såsom görs vid minsta-kvadrat-skattning vid regressionsanalys så tillåts parameterskattningarna att ändra sig vid varje ytterligare tidpunkt vid exponentiell utjämning.
- Parameterskattningarna går inte att tolka vid exponentiell utjämning.
- Exponentiell utjämning används för prognostisering eller för trendanalys.

Enkel exponentiell utjämning Kapital 4,2

- Används för att göra prognoser för en tidsserie som inte innehåller varken trend- eller säsongskomponenter, t ex årlig försäljning av en vara.
- Tänkbar modell: $y_t = \beta_0 + \varepsilon_t$
- Modellen ska *inte* ses som statisk utan nivån (β_0) kan tillåtas ändras, men inte enligt någon statisk trendstruktur.

- Enkel exponentiell utjämning innebär att man använder historiska data för att ”jämna ut” serien och därmed plocka bort den rent slumpmässiga variationen.
- Vid utjämningen kan man låta gamla värden och nyare värden spela olika stor roll
- Den utjämnade serien använder vi sen för att göra prognoser efter den sista observationen.

Beteckna de tillgängliga historiska observationerna $y_1, y_2, \ldots, y_T$

För enkel exponentiell utjämning används utjämningsekvationen:

$$\tilde{y}_T = \lambda \cdot y_T + (1-\lambda) \cdot \tilde{y}_{T-1}, \qquad T = 1, \ldots, n$$

dvs vi har här infört termen $\tilde{y}_T$ som anger det utjämnade värdet vid tidpunkt T.

$\tilde{y}_T$ *är skattningen av* β_0 vid tiden T

λ är den så kallade *utjämningskonstanten (discount factor)* eller *utjämningsparametern* (*smoothing parameter*). 0 < λ < 1, och den styr hur mycket vikt det nyaste värdet i serien ska ha.

Val av utjämningskonstant λ

Med ett lågt värde på λ (nära 0) spelar de tidigare värdena i serien en större roll än de senare: Serien blir mer utjämnad (mer lik ett medelvärde av samtliga observationer)

Med ett stort värde på λ spelar de senare värdena i serien en större roll än de äldre: Serien blir mindre utjämnad och $\tilde{y}_T$ kommer i högre grad att fånga upp de successiva förändringarna i tidsserien

Välj λ så att något valideringsmått minimeras. Dvs minimera MSD, MAD eller MAPE

Val av startvärde $\tilde{y}_0$

Valet av $\tilde{y}_0$ kan göras på olika sätt beroende hur stabil serien är:

Ej stabil serie:

- Använd 10-50% av de historiska värdena och beräkna ett medelvärde av dessa. Detta medelvärde är en skattning av β_0 i modellen och blir också det värde vi sätter $\tilde{y}_0$ till. Dvs $\tilde{y}_0 = \bar{y}$

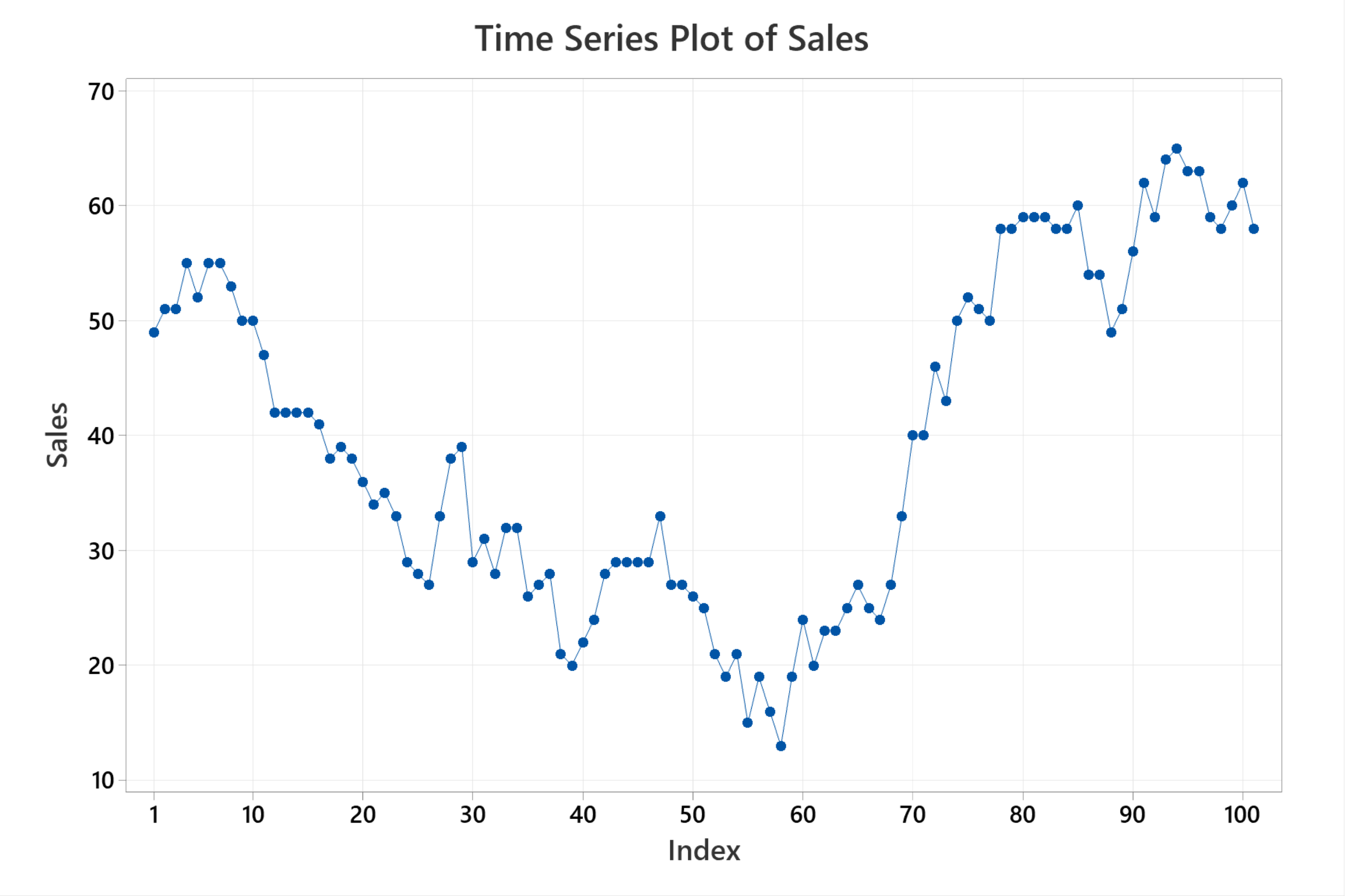
Stabil serie

- Sätt $\tilde{y}_0 = y_1$

- den första observationen i det *resterande* datamaterialet och börja utjämningen från denna, eller
- den första observationen i *hela* datamaterialet och börja utjämningen från denna.

Exempel: Försäljning av tandkrämstuber, veckodata, 101 obs Hämtat från MINITAB

Medelvärdet över alla veckor ligger på 39,6 tuber.



Modell: $y_t = \beta_0 + \varepsilon_t$

Skattning av β_0 med minstakvadrat-metoden ger $b_0 = \bar{y} = 39{,}6$

Vi ska nu istället skatta β_0 succesivt. Dvs skatta β_0 på nytt vid varje ny tidpunkt. Så $\hat{\beta}_0 = b_0 = \tilde{y}_T$

Börja med ett startvärde $\tilde{y}_0$ för att sätta igång rekursionen. Ta t ex medelvärdet av de första 20 observationerna.

$$\tilde{y}_0 = \frac{49 + 51 + 51 + 55 + \cdots + 36}{20} = 46{,}4$$

Anta först att försäljningen är ganska stabil, dvs, under den studerade perioden antas inte genomsnittsvärdet β_0 ändra sig nämnvärt.

Då kan man välja ett relativt lågt värde på λ. Detta innebär att de tidigare värdena i serien kommer att spela en större roll i prognoserna än de senare.

Vi låter $\lambda = 0.2$

Vi använder nu uppdateringsformeln, som egentligen uppdaterar skattningen av β_0. Vi låter y_1 vara <u>det första värdet</u> i tidsserien.

Nu ska vi beräkna värden på $\tilde{y}_0, \tilde{y}_1, \tilde{y}_2, \dots, \tilde{y}_T$ med formeln:

$$\tilde{y}_T = \lambda \cdot y_T + (1-\lambda) \cdot \tilde{y}_{T-1}, \qquad T = 1, \dots, n$$

De första 3 värden på y är $49, 51, 51$ och $\tilde{y}_0 = 46{,}4$

$$\tilde{y}_1 = \lambda \cdot y_1 + (1-\lambda) \cdot \tilde{y}_0 \qquad \tilde{y}_1 = 0{,}2 \cdot 49 + 0{,}8 \cdot 46{,}4 = 46{,}9$$
$$\tilde{y}_2 = \lambda \cdot y_2 + (1-\lambda) \cdot \tilde{y}_1 \qquad \tilde{y}_2 = 0{,}2 \cdot 51 + 0{,}8 \cdot 46{,}9 = 47{,}7$$
$$\tilde{y}_3 = \lambda \cdot y_3 + (1-\lambda) \cdot \tilde{y}_2 \qquad \tilde{y}_3 = 0{,}2 \cdot 51 + 0{,}8 \cdot 47{,}7 = 48{,}4$$

osv

$\tilde{y}_T$ är det utjämnade värdet för y_T (smoothed value)
$\tilde{y}_{T+1}$ är det predikterade värdet för y_T (fitted value, predicted value)

Som prognos för ett framtida värden används:

$$\hat{y}_{T+\tau}(T) = \tilde{y}_T$$ *Prognos* τ steg fram i tiden

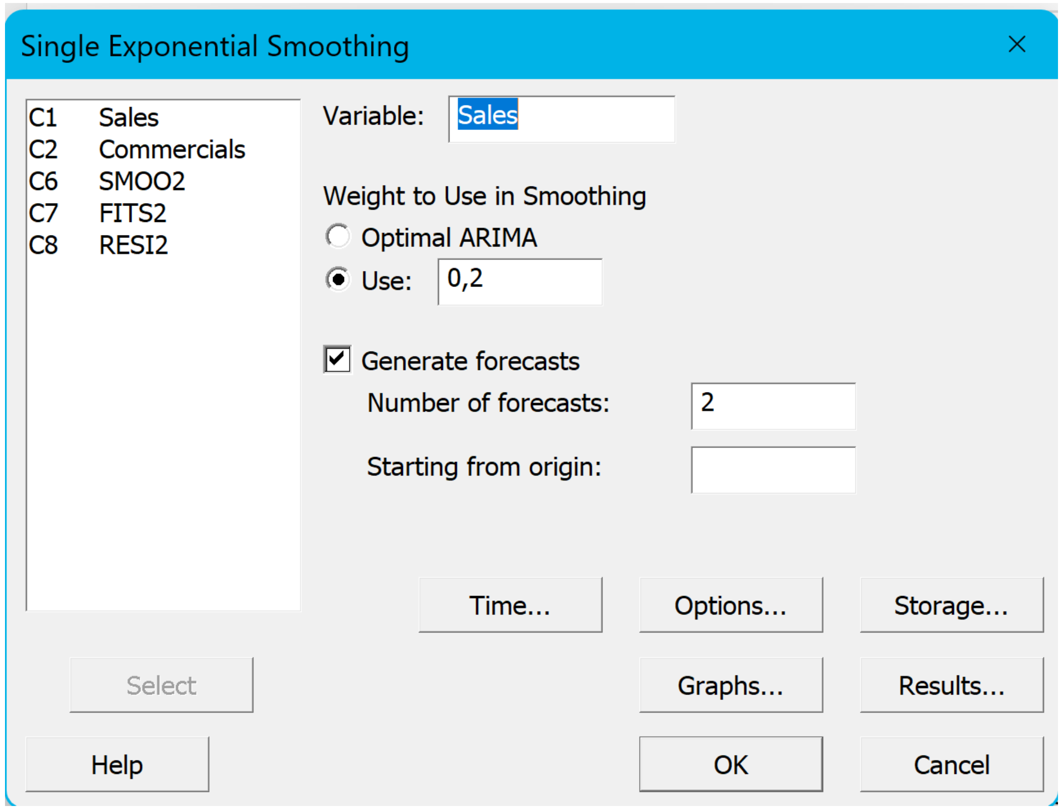
Uppdateringsformeln

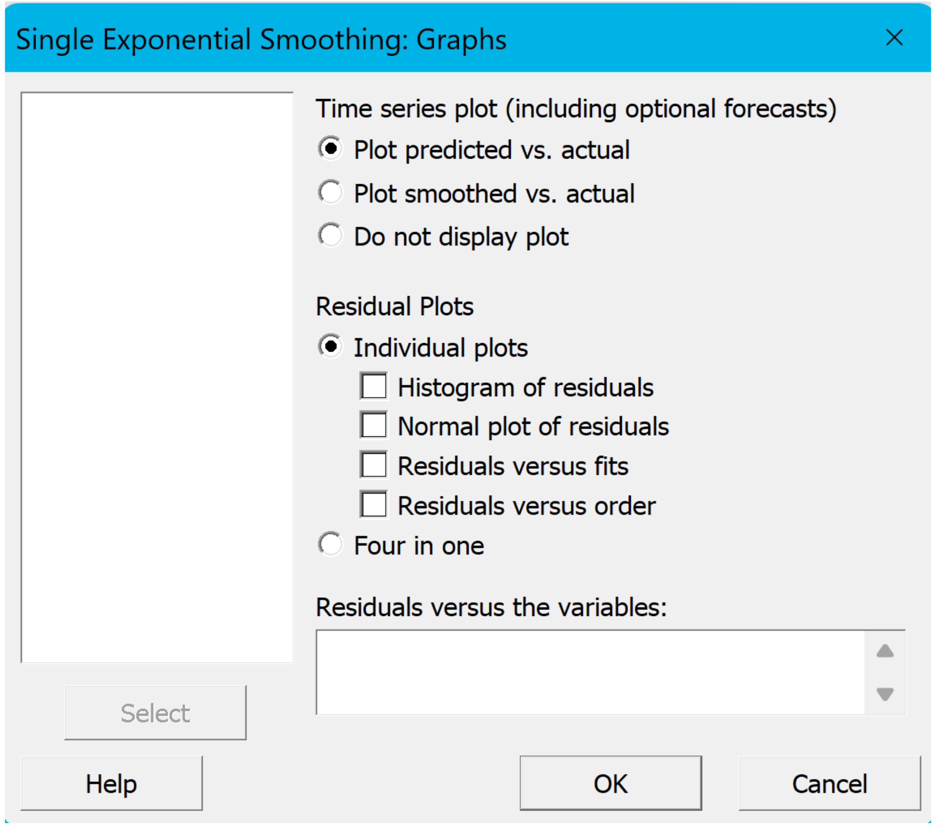
$$\tilde{y}_T = \lambda \cdot y_T + (1-\lambda) \cdot \tilde{y}_{T-1}, \qquad T = 1, \ldots, n$$

är en *rekursionsformel*

Analys med hjälp av Minitab

Stat→Time Series→Single Exp Smoothing…

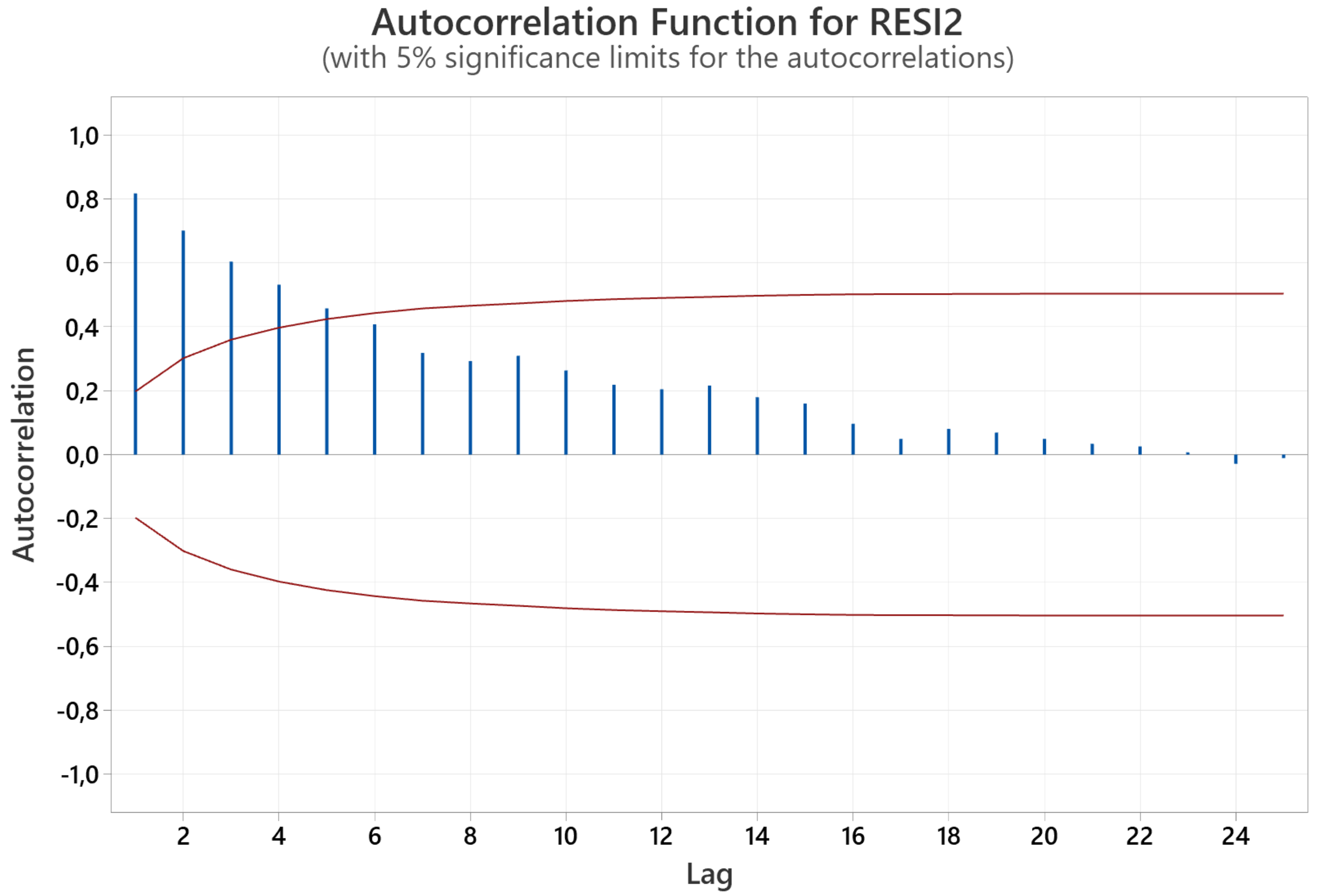




Ur MINITAB.

SMOO1$= \tilde{y}_T$
FITS1$= \tilde{y}_{T-1}$

vecka	SMOO1	FITS1
99	59,8712	59,8390
100	60,2969	59,8712
101	59,8376	60,2969


Autocorrelation Function for RESI2
(with 5% significance limits for the autocorrelations)
Autocorrelation
1,0
0,8
0,6
0,4
0,2
0,0
-0,2
-0,4
-0,6
-0,8
-1,0
2
4
6
8
10
12
14
16
18
20
22
24
Lag

Prognos vid enkel exponentiell utjämning

Som prognos för ett framtida värden används:

$\hat{y}_{T+\tau}(T) = \tilde{y}_T$ *Prognos* τ steg fram i tiden

Prognoser för veckorna $102, 103, 104$

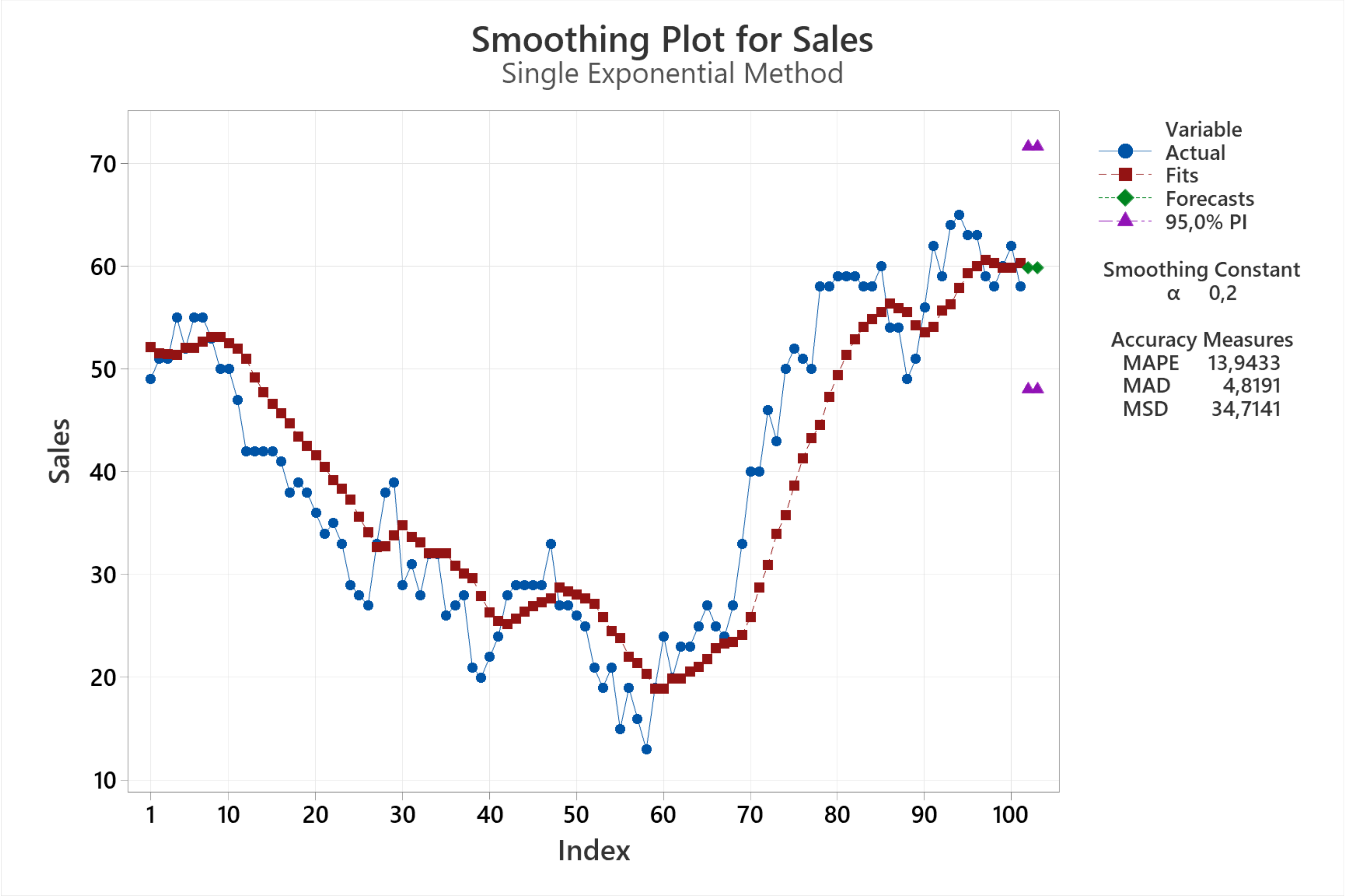
$$\tilde{y}_{101} = 59{,}8$$

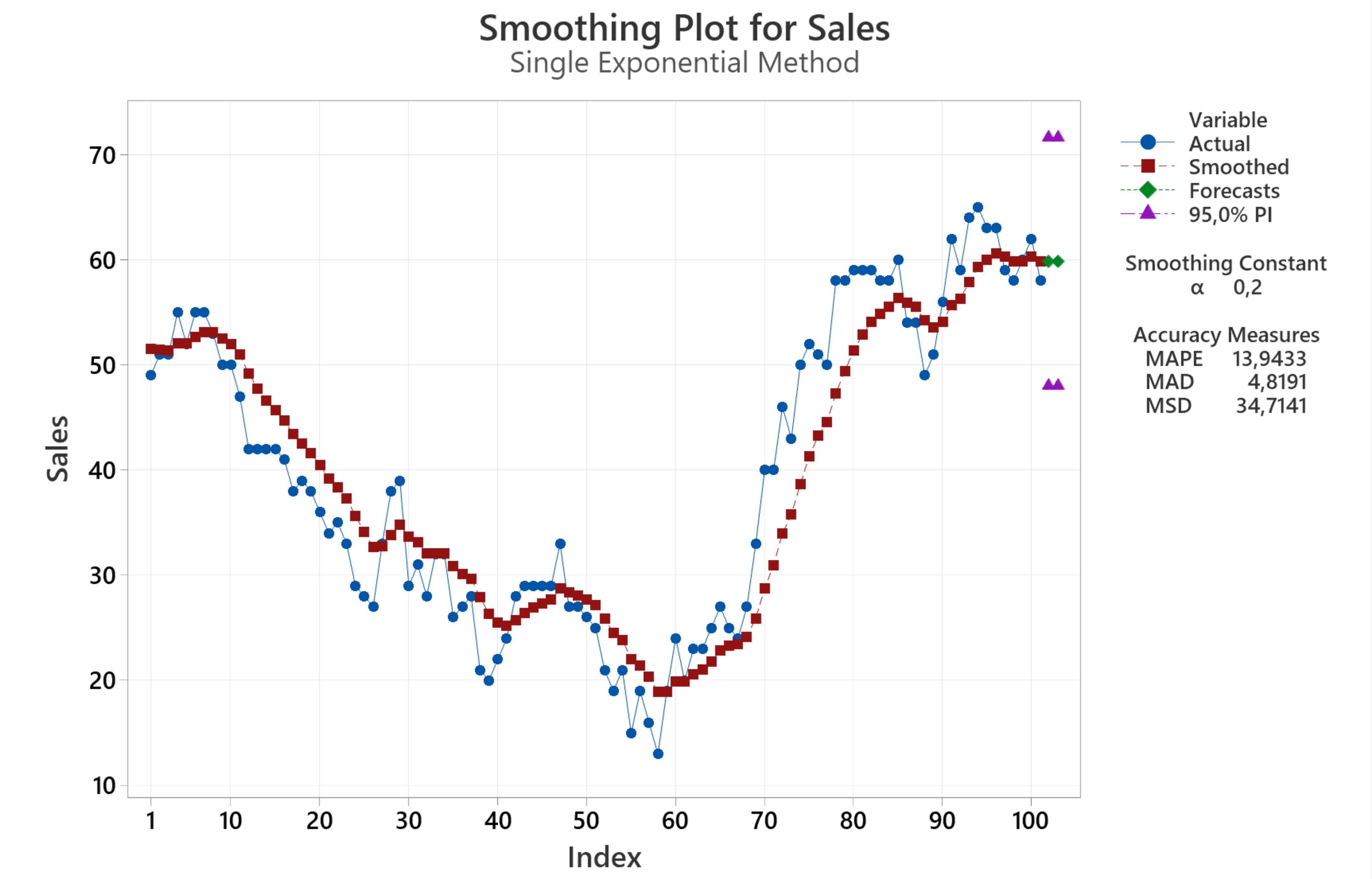
$$\hat{y}_{T+\tau}(T) = l_T$$

$$\hat{y}_{102}(101) = \tilde{y}_{101} = 59{,}8$$

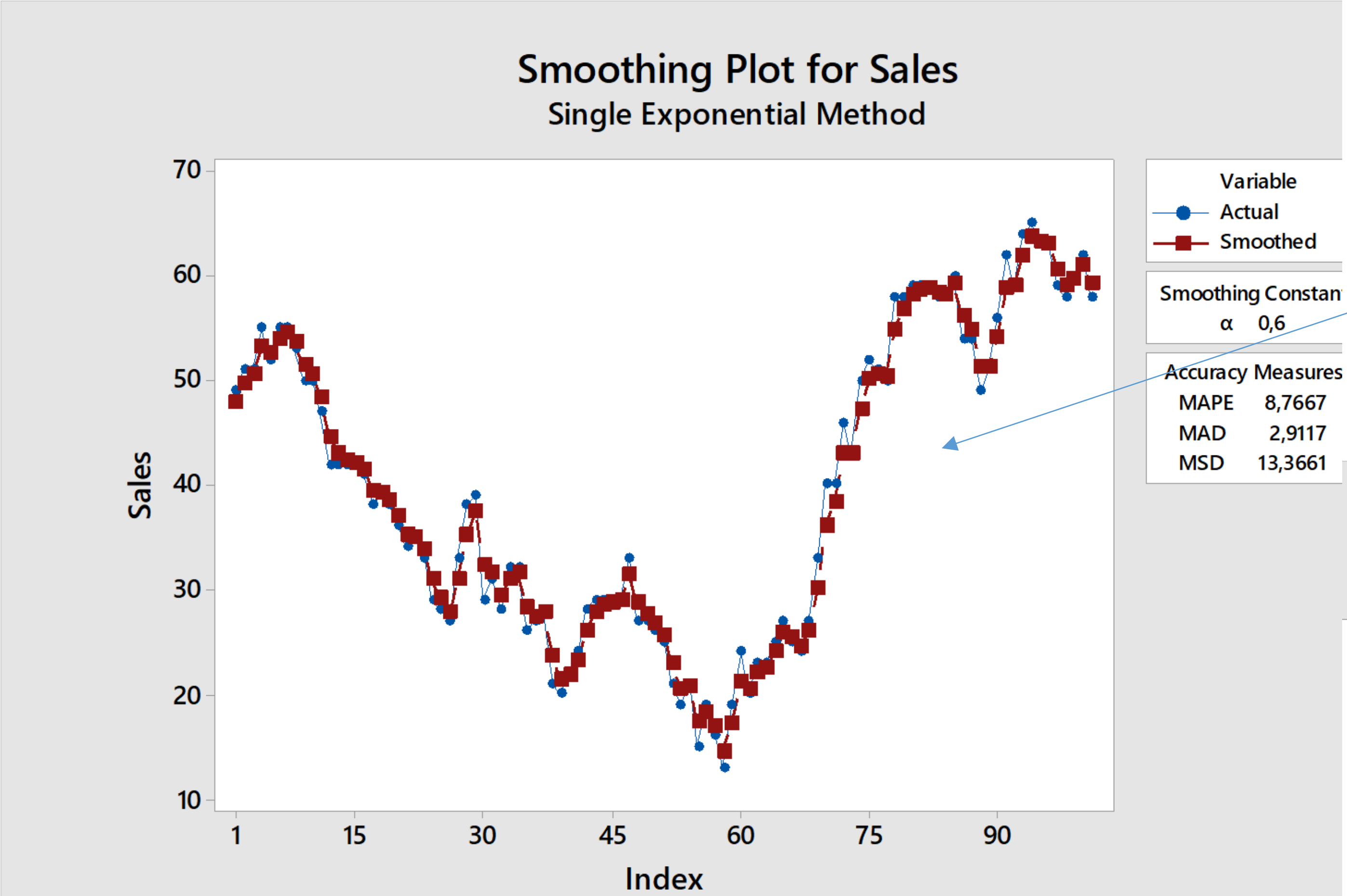
$$\hat{y}_{103}(101) = \tilde{y}_{101} = 59{,}8$$

$$\hat{y}_{104}(101) = \tilde{y}_{101} = 59{,}8$$


Smoothing Plot for Sales
Single Exponential Method
Sales
Index
Variable
Actual
Fits
Forecasts
95,0% PI
Smoothing Constant
α 0,2
Accuracy Measures
MAPE 13,9433
MAD 4,8191
MSD 34,7141
70
60
50
40
30
20
10
1
10
20
30
40
50
60
70
80
90
100

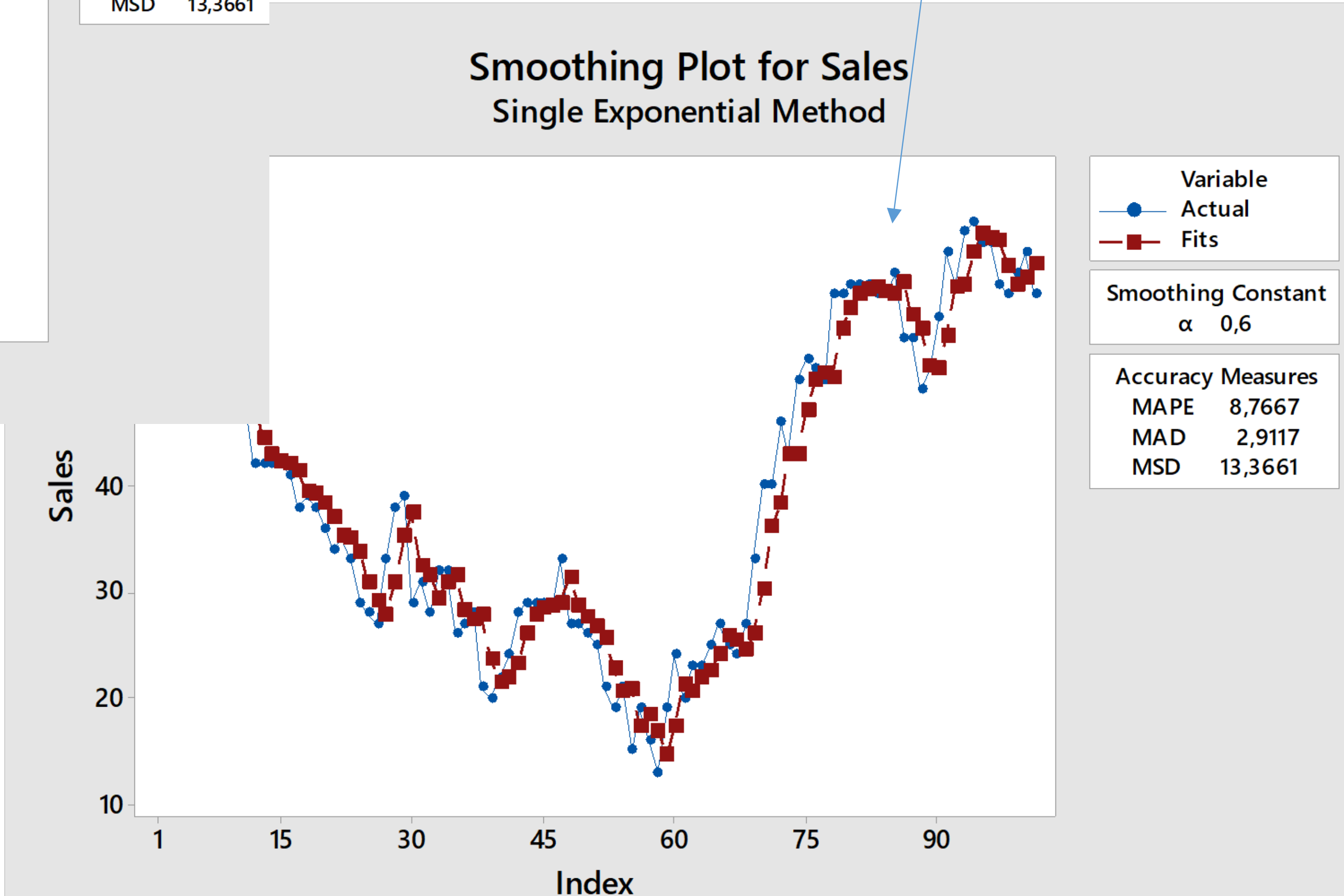


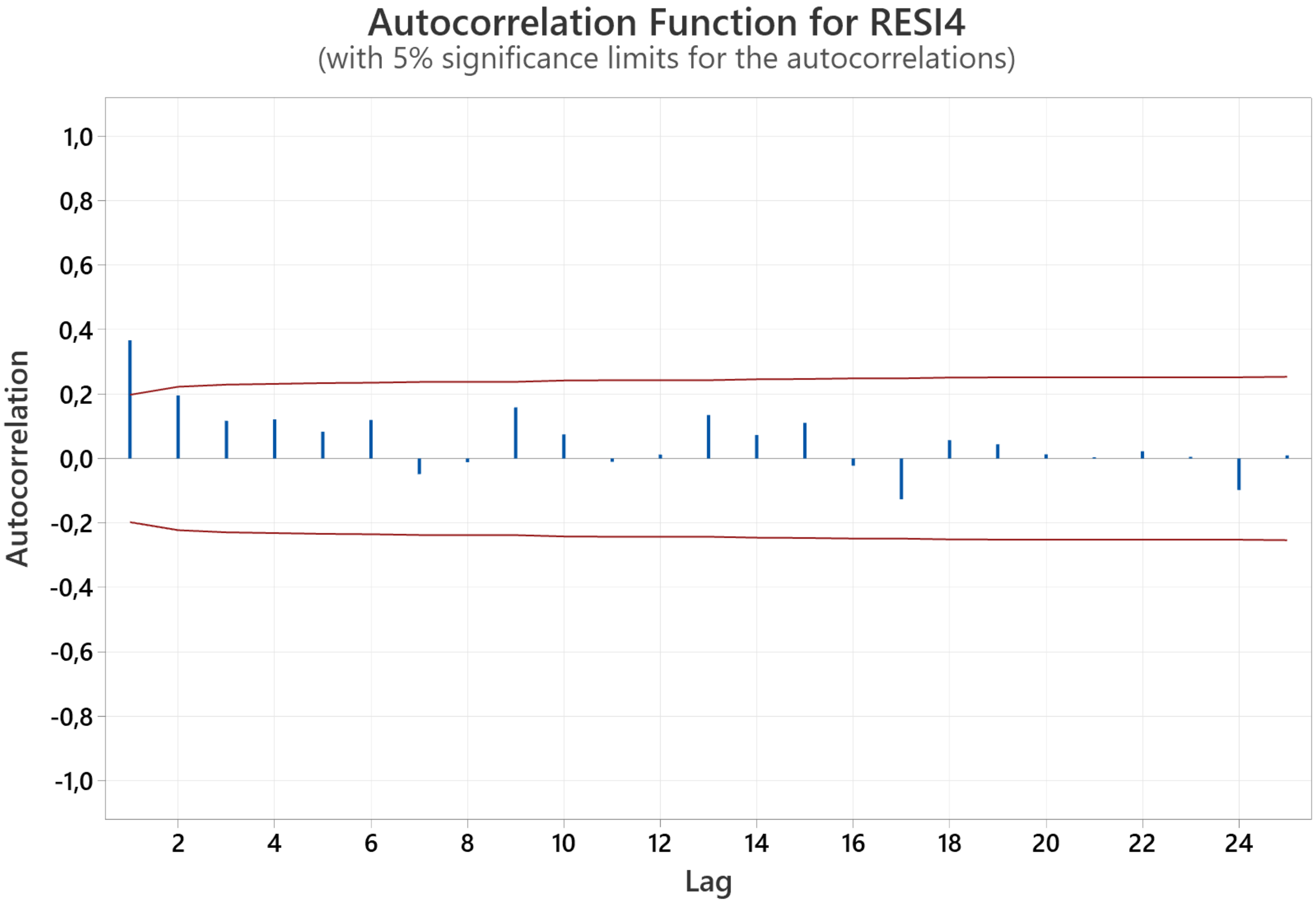
Smoothing Plot for Sales
Single Exponential Method
Sales
Index
70
60
50
40
30
20
10
1
10
20
30
40
50
60
70
80
90
100
Variable
Actual
Smoothed
Forecasts
95,0% PI
Smoothing Constant
α 0,2
Accuracy Measures
MAPE 13,9433
MAD 4,8191
MSD 34,7141

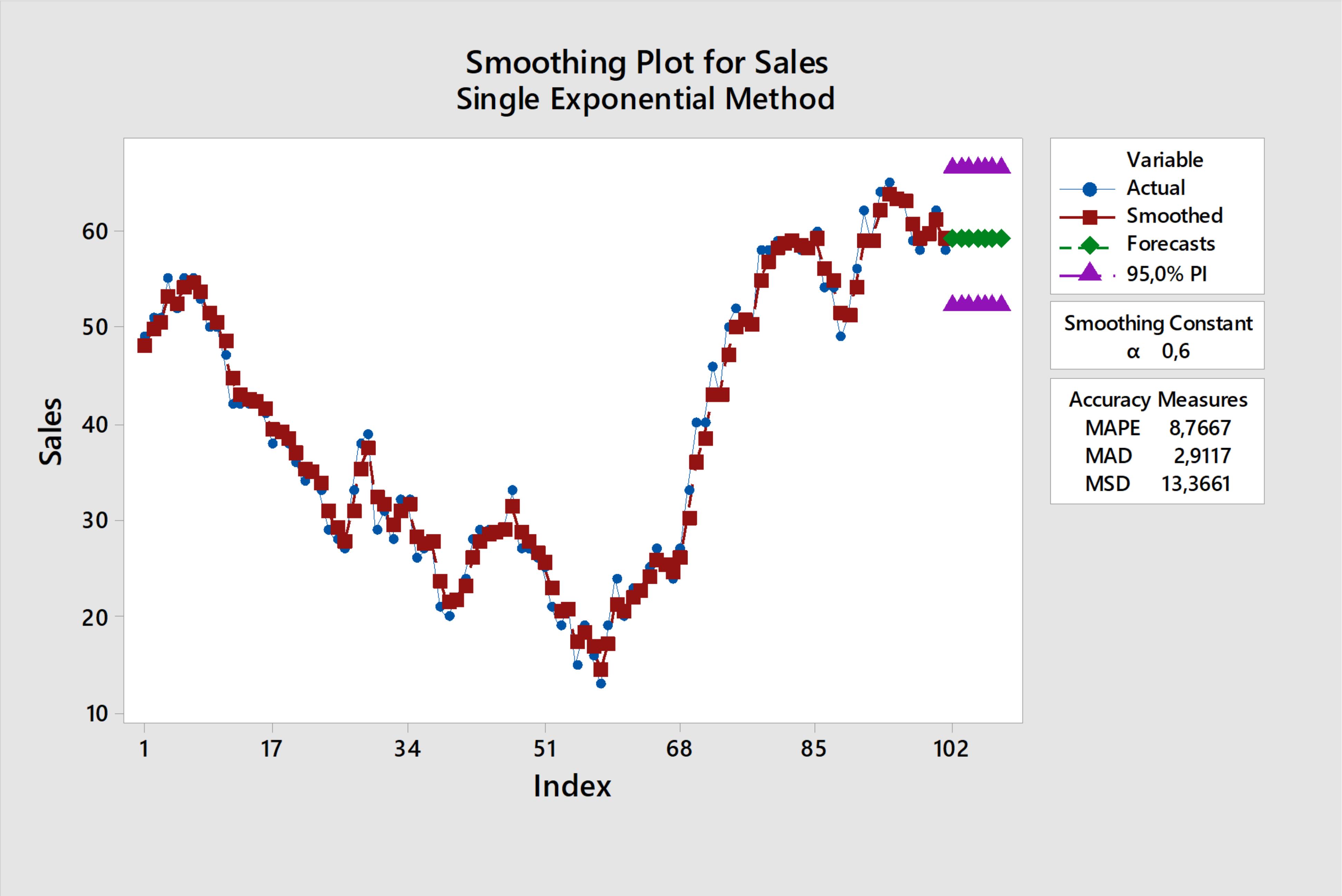


Utjämnad

Predikterad




Autocorrelation Function for RESI4
(with 5% significance limits for the autocorrelations)
Autocorrelation
1,0
0,8
0,6
0,4
0,2
0,0
-0,2
-0,4
-0,6
-0,8
-1,0
2
4
6
8
10
12
14
16
18
20
22
24
Lag


Smoothing Plot for Sales
Single Exponential Method
Sales
Index
10
20
30
40
50
60
1
17
34
51
68
85
102
Variable
Actual
Smoothed
Forecasts
95,0% PI
Smoothing Constant
α 0,6
Accuracy Measures
MAPE 8,7667
MAD 2,9117
MSD 13,3661

Dubbel exponentiell utjämning Kapitel 4,4

Data antas här innehålla en linjär trend. (Nu följer jag inte beteckningarna i boken)

Modell: $y_t = \beta_0 + \beta_1 t + \varepsilon_t$

Två utjämningsparametrar α och γ (Holt's metod):

Utjämningsekvationer: $l_T = \alpha y_T + (1-\alpha)(l_{T-1} + b_{T-1})$

$$b_T = \gamma(l_T - l_{T-1}) + (1-\gamma)b_{T-1}$$

$$T = 1, \ldots, n$$

Val av startvärden

Detta görs automatiskt i MINITAB

En dator tar några värden i början av serien och anpassar en enkel linjär regressionslinje. Sätt $l_0 = \hat{\beta}_0$ och $b_0 = \hat{\beta}_1$ där $\hat{\beta}_0$ och $\hat{\beta}_1$ är de skattade regressionskoefficienterna.

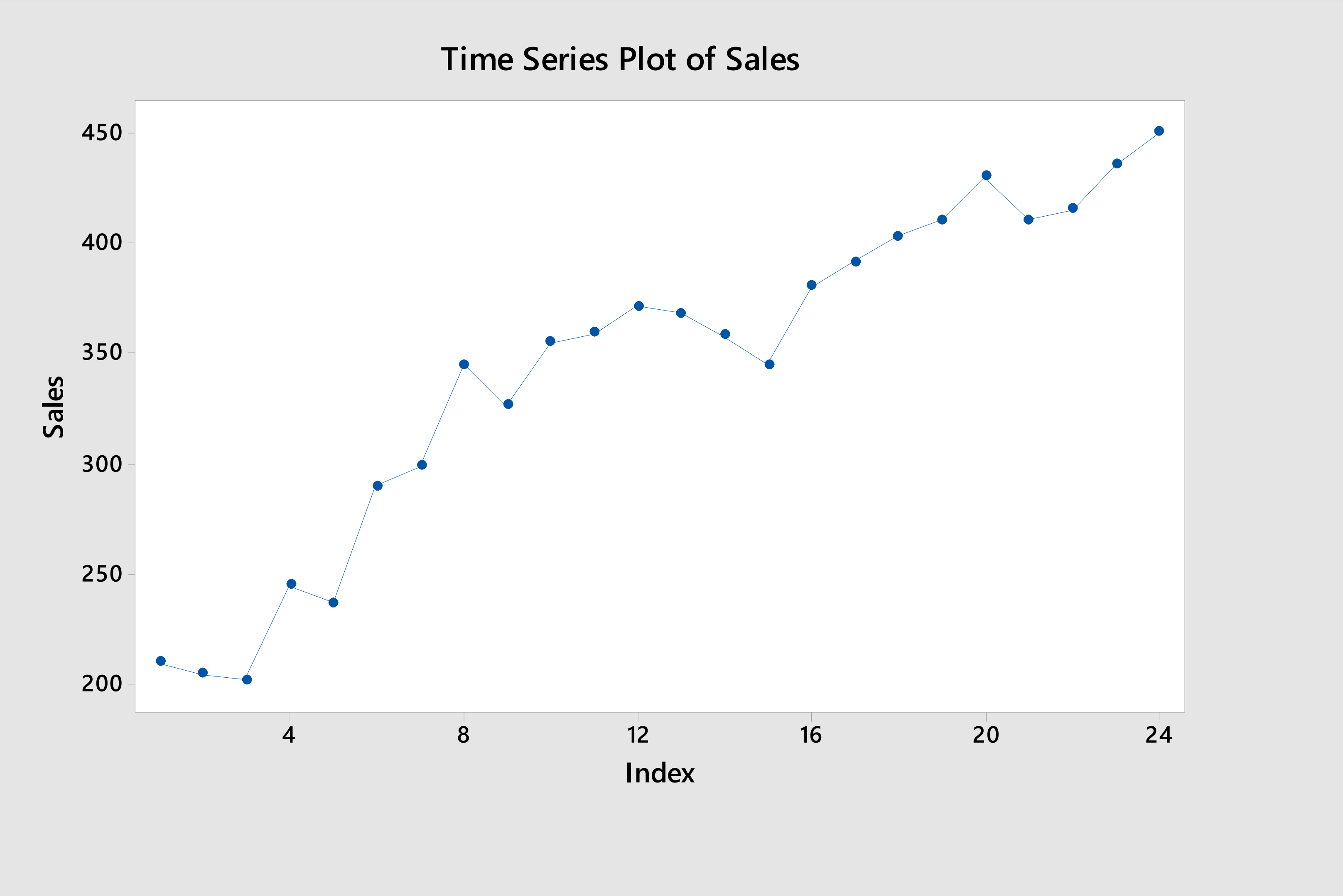
Val av utjämningskonstanter α och γ

Välj en combination av dessa så att något av valideringsmåtten minimeras. Dvs MSD, MAD eller MAPE

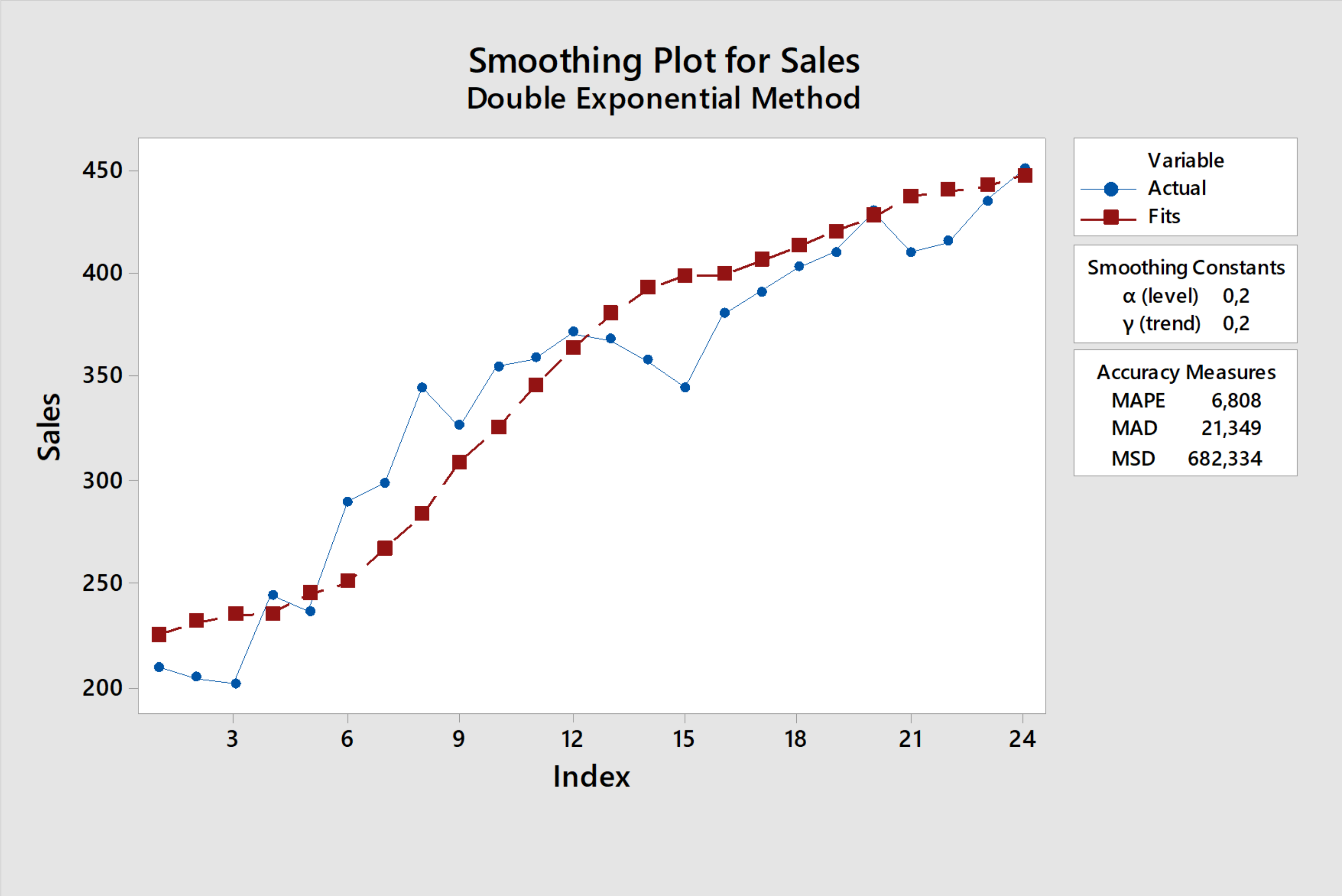
Prognoser:

$$\hat{y}_{T+\tau}(T) = l_T + b_T\tau$$

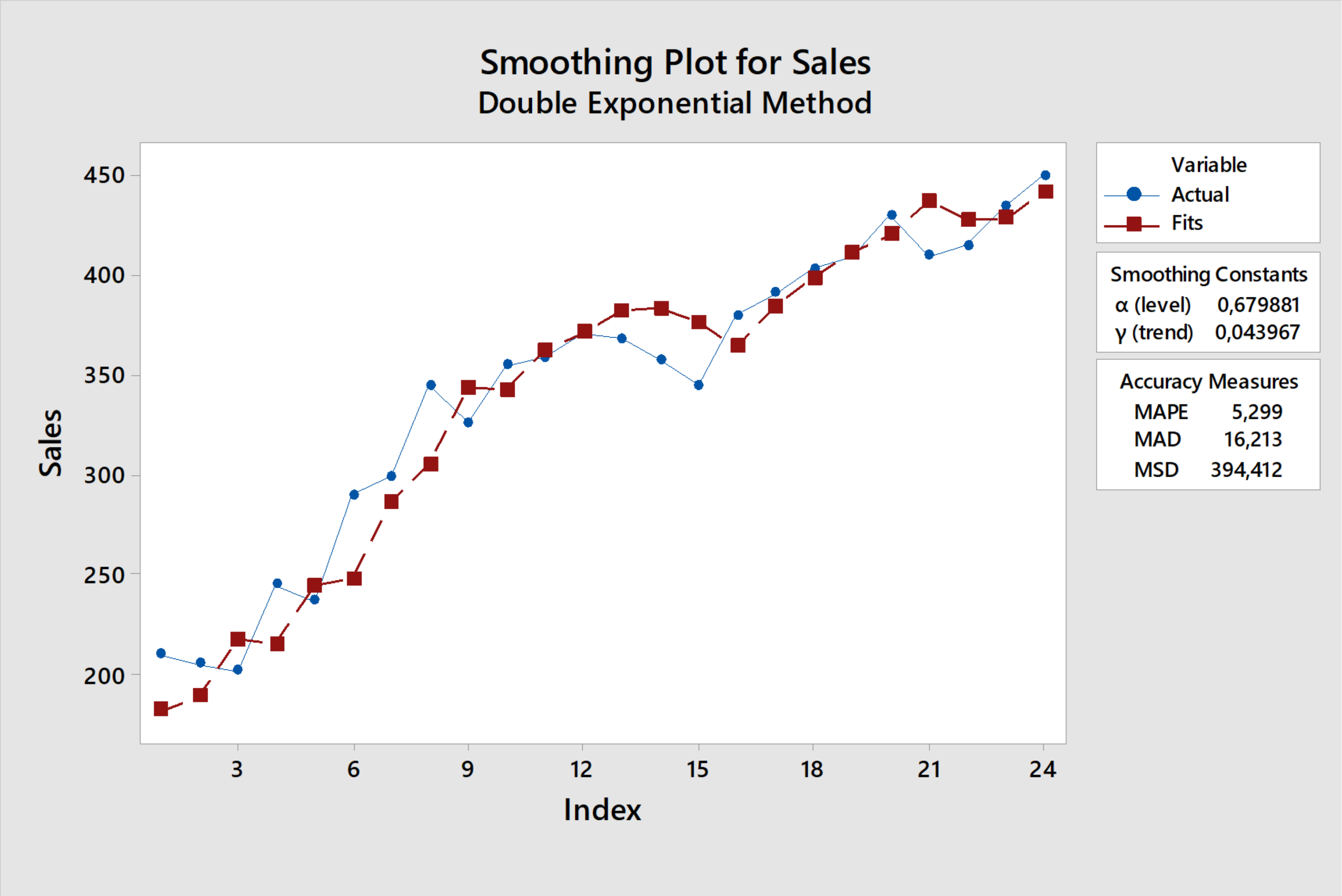
Exempel: Försäljningsintäkter i tusentals dollar



Små utjämningskonstanter



Optimalt val av utjämningskonstanter



Exponentiell utjämning av tidsserier med trend och säsong   Kapitel 4,7

- (Holt-)Winters' additiva metod
- (Holt-)Winters' multiplikativa metod

Bägge metoderna använder tre utjämningsparametrar α, γ, δ för nivå, lutning och säsongssvängning.

Val av metod (additiv eller multiplikativ) görs enligt samma principer som vid klassisk komponentuppdelning

Additiv Holt-Winter

Modell: $y_t = \beta_0 + \beta_1 t + sn_t + \varepsilon_t$

Utjämningsekvationer:

$$l_T = \alpha(y_T - sn_{T-L}) + (1-\alpha)(l_{T-1} + b_{T-1})$$

$$b_T = \gamma(l_T - l_{T-1}) + (1-\gamma)b_{T-1}$$

$$sn_T = \delta(y_T - l_{T-L}) + (1-\delta)sn_{T-L}$$

$T = 1, \ldots, n$ $\quad L =$ säsongslängd

Prognoser: $\hat{y}_{T+\tau}(T) = l_T + b_T\tau + sn_{T+\tau-L}$

Multiplikativ Holt-Winter

Modell: $y_t = (\beta_0 + \beta_1 t) sn_t + \varepsilon_t$

Utjämningsekvationer:

$$l_T = \alpha(y_T / sn_{T-L}) + (1-\alpha)(l_{T-1} + b_{T-1})$$

$$b_T = \gamma(l_T - l_{T-1}) + (1-\gamma) b_{T-1}$$

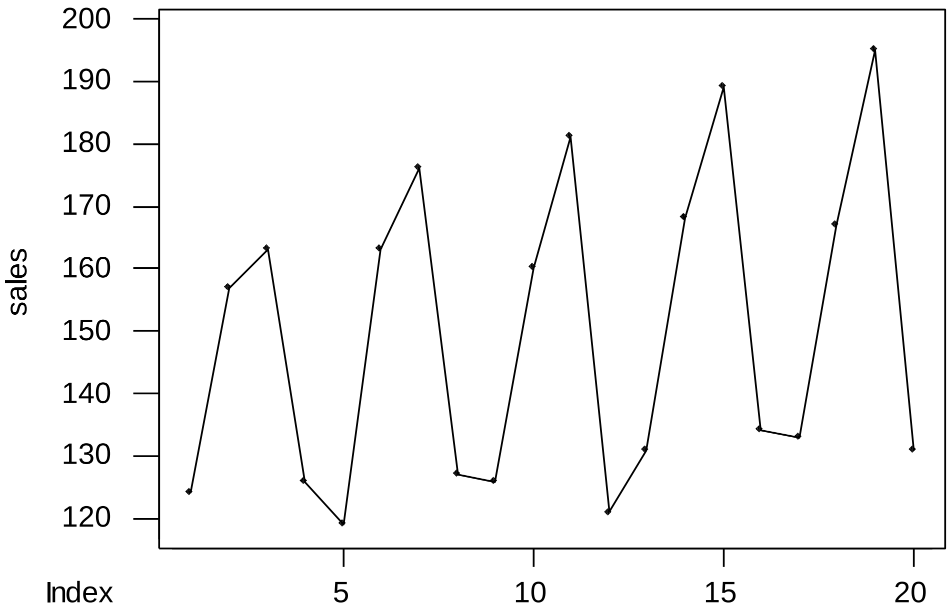
$$sn_T = \delta(y_T / l_{T-L}) + (1-\delta) sn_{T-L}$$

$T = 1, \dots, n$ $\quad L =$ säsongslängd

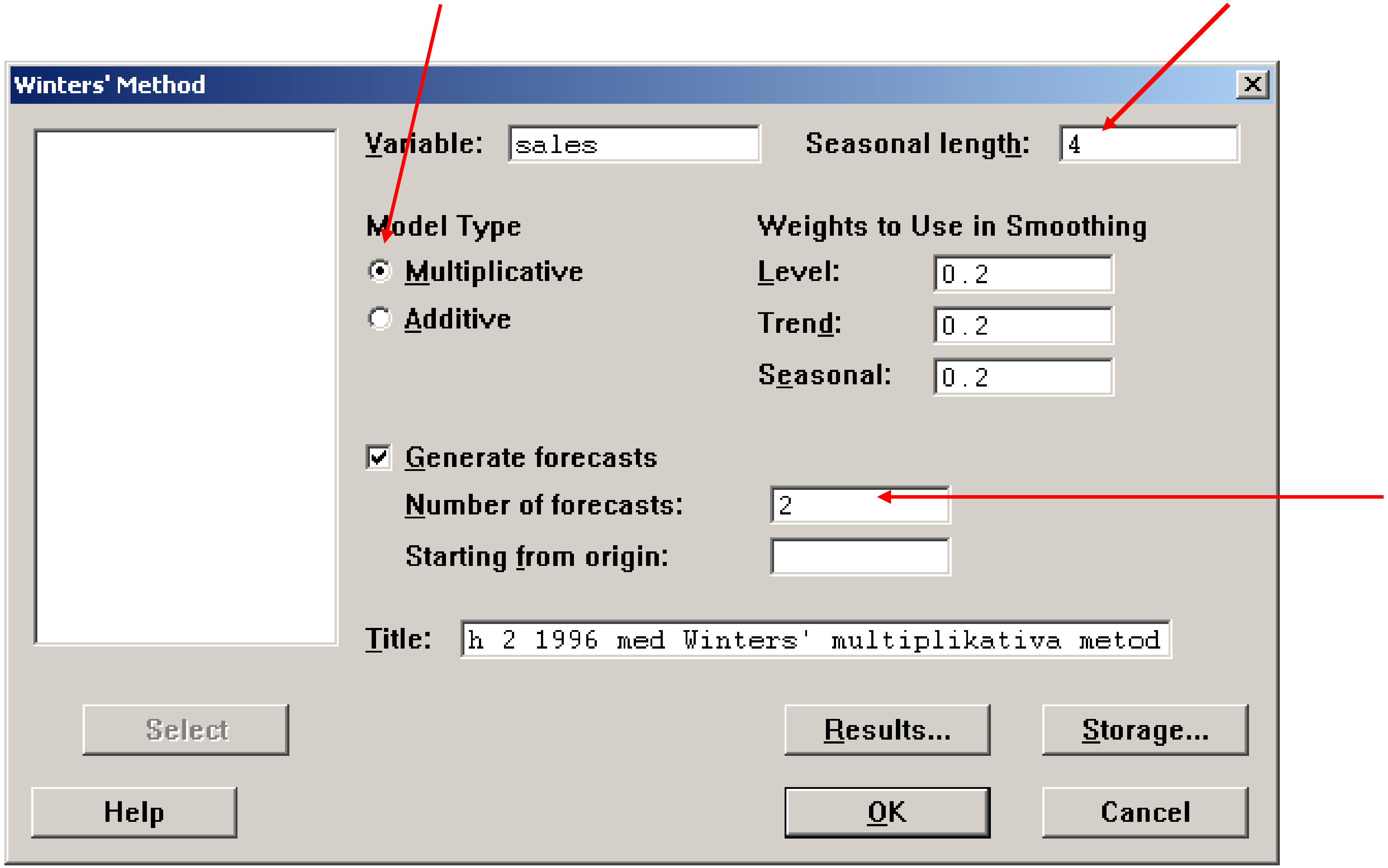
Prognoser: $\hat{y}_{T+\tau}(T) = (l_T + b_T \tau) sn_{T+\tau-L}$

Exempel: Kvartalsvisa försäljningsdata

year	**quarter**	**sales**
1991	1	124
1991	2	157
1991	3	163
1991	4	126
1992	1	119
1992	2	163
1992	3	176
1992	4	127
1993	1	126
1993	2	160
1993	3	181
1993	4	121
1994	1	131
1994	2	168
1994	3	189
1994	4	134
1995	1	133
1995	2	167
1995	3	195
1995	4	131



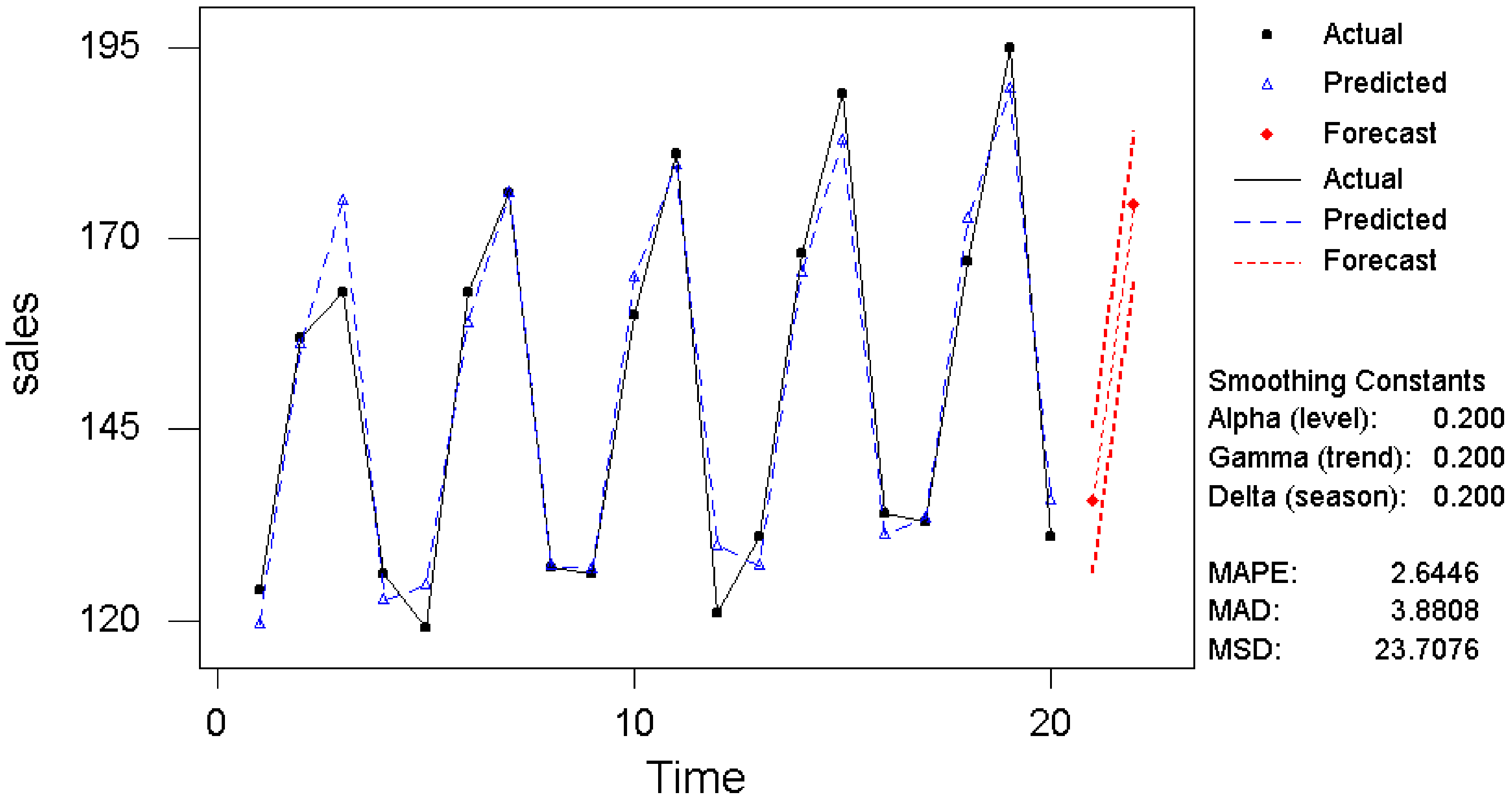
Stat→Time Series→Winters' Method…

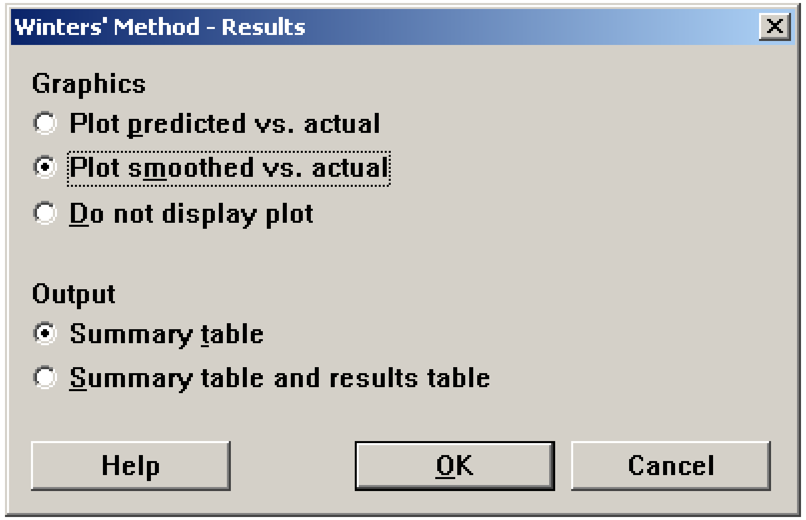


Winters' multiplicative model

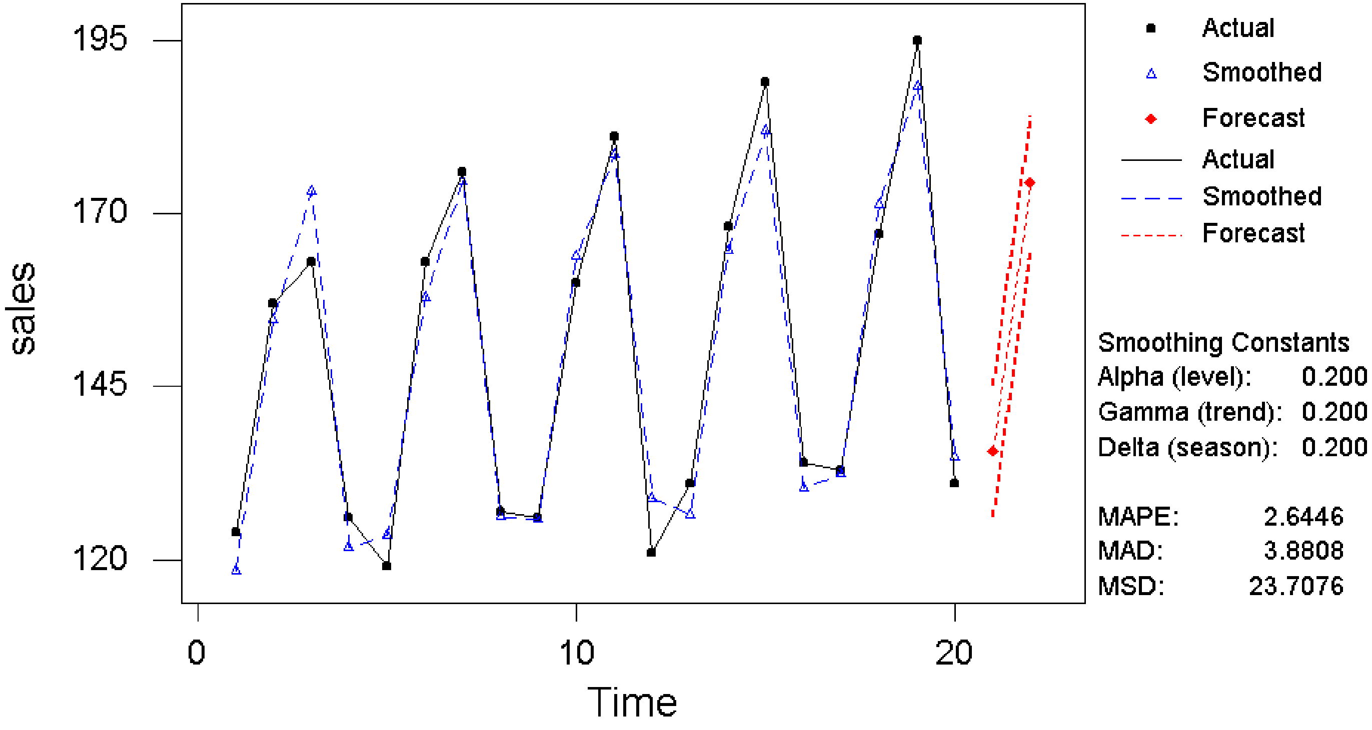
```
Data         sales
Length       20.0000
NMissing     0

Smoothing Constants
Alpha (level):    0.2
Gamma (trend):    0.2
Delta (seasonal): 0.2

Accuracy Measures
MAPE:  2.6446
MAD:   3.8808
MSD:  23.7076

Row  Period  Forecast     Lower     Upper
   1      21   135.625   126.117   145.133
   2      22   174.430   164.724   184.136
```

Prognoser för kvartal 1 och 2 1996 med Winters' multiplikativa metod





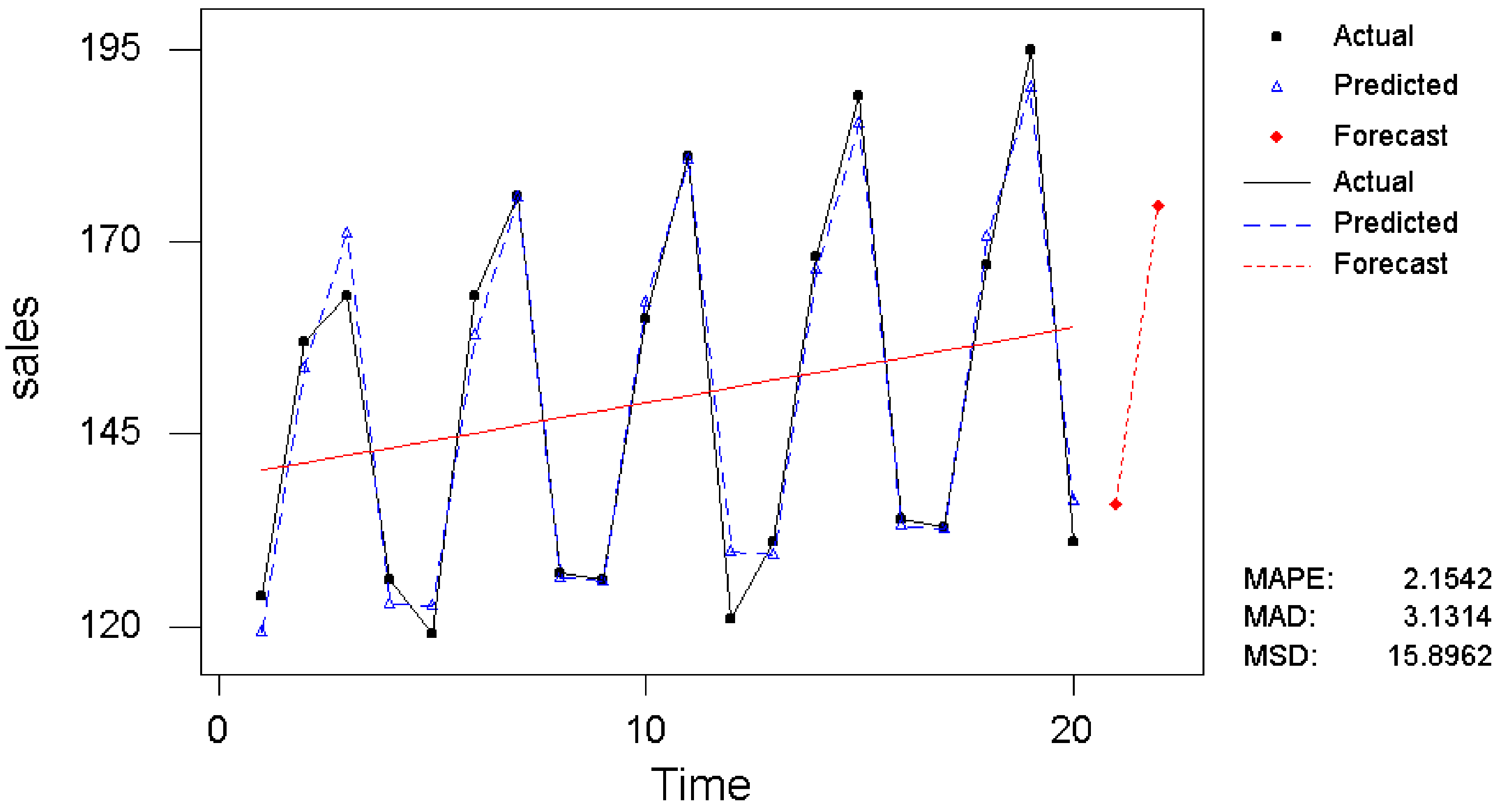
Prognoser för kvartal 1 och 2 1996 med Winters' multiplikativa metod



Ingen möjlighet att låta MINITAB välja den bästa uppsättningen av parametrar. Man måste prova sig fram.

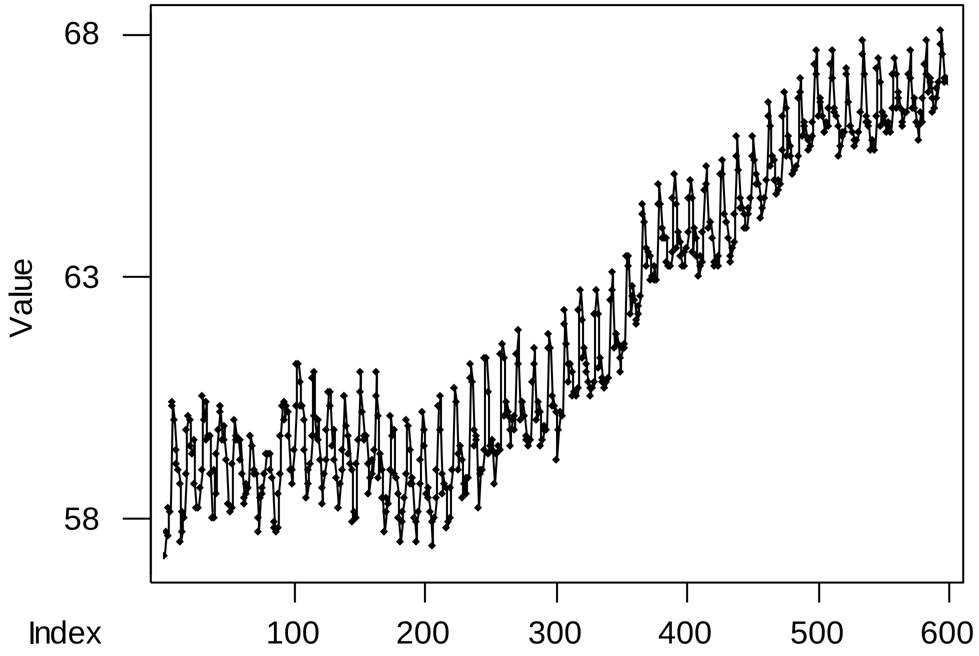
Om man har en tidsserie som ovan, med tydliga säsongskomponenter som inte ändrar sig över tiden och en linjär trend, så finns det inga fördelar med exponentiell utjämning framför tidsserieregression (eller klassisk komponentuppdelning).

Prognoser för kvartal 1 och 2 1996 med klassisk mult. metod



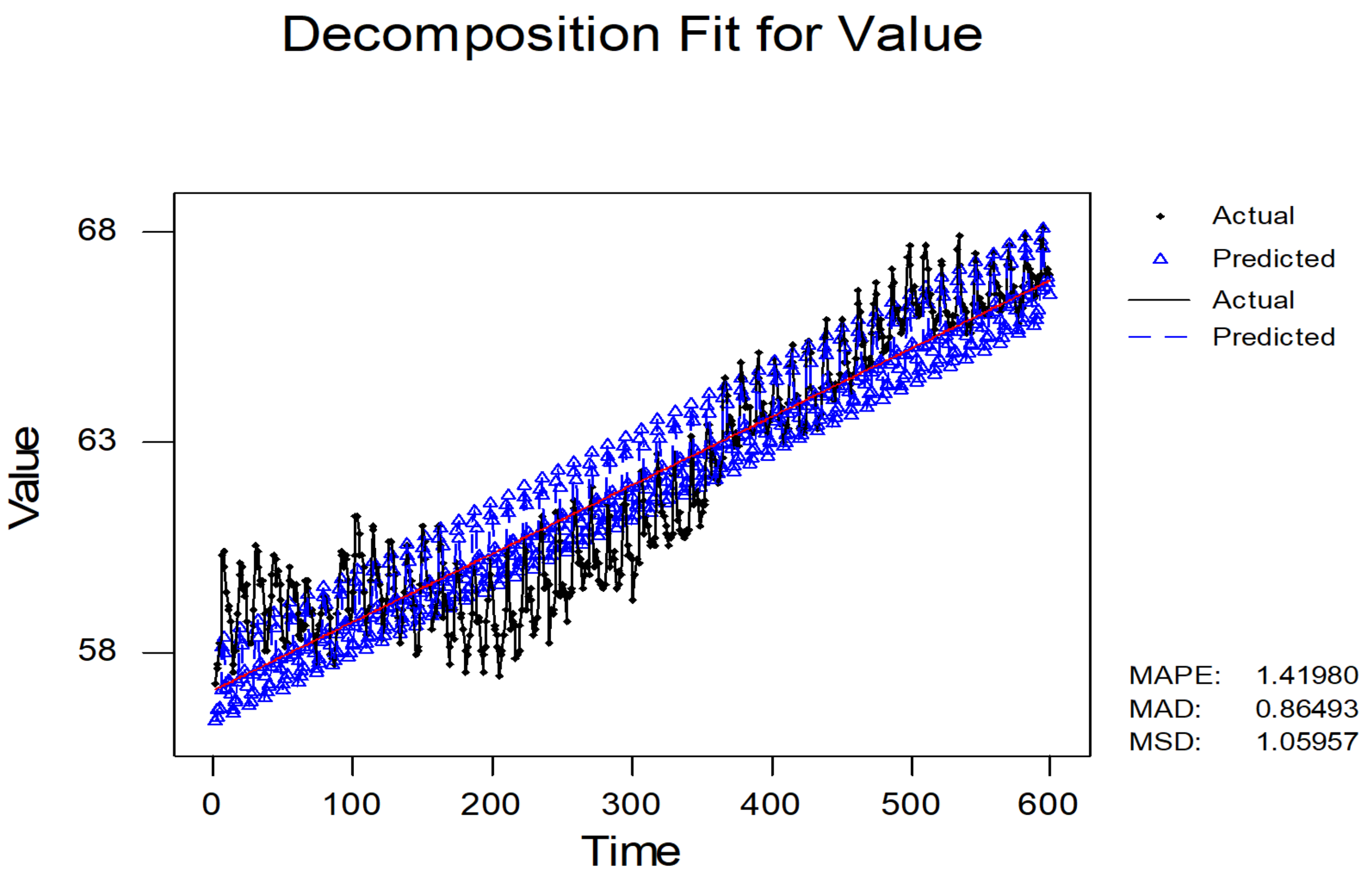
Tidsserie över andelen anställda i USA

Däremot kan det vara bra att använda exponentiell utjämning om komponenterna ändras över tiden och om det finns tydliga cykliska komponenter.

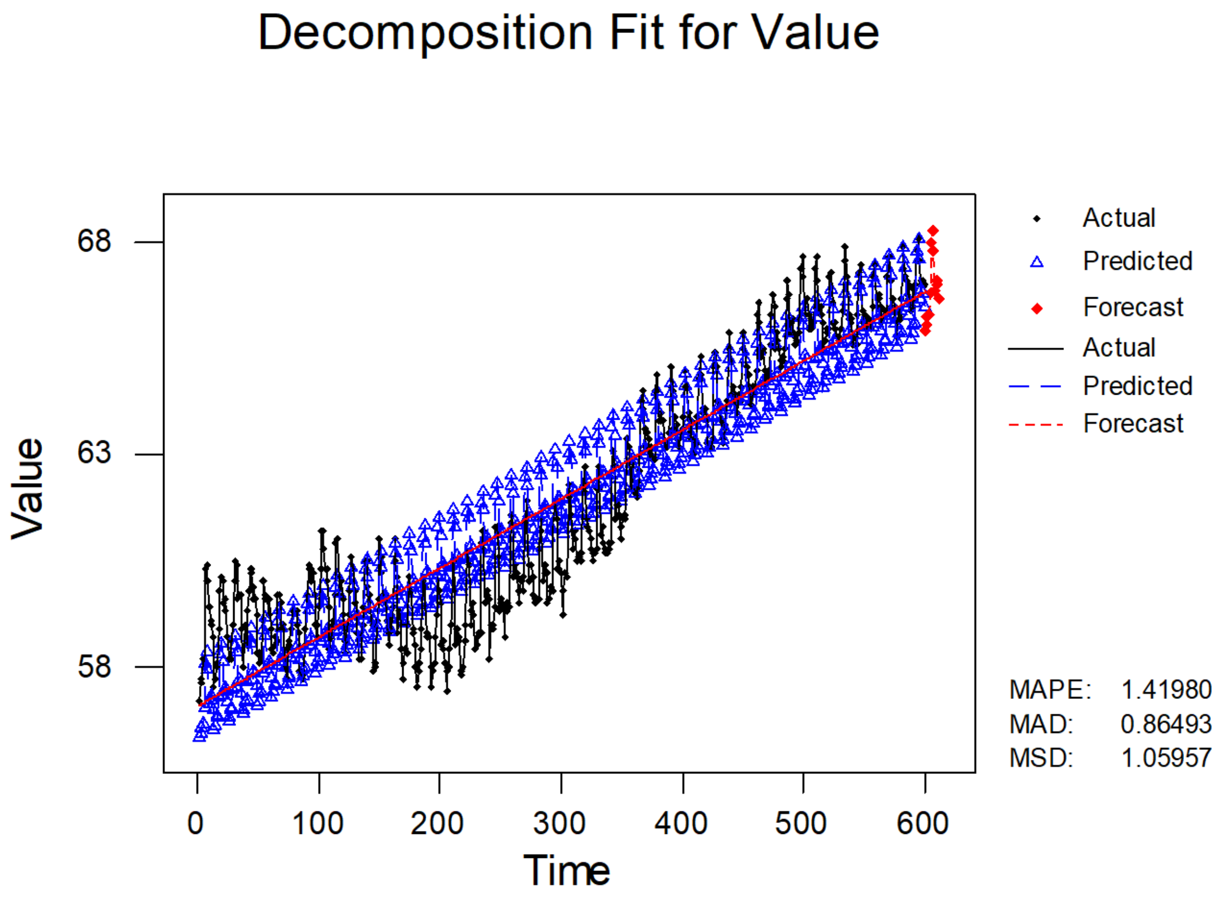


Tidsserie över andelen anställda i USA

Komponentuppdelning



Klassisk komponentuppdelning med prognos för 12 månader



Winters’ metod: