Lösning till Lektion 4 och 5

1, $T = 27$ år 2007

$\alpha = 0.4$ $\gamma = 0.05$ Dubbel exp utj

$l_{26} = 85.16$ $b_{26} = -17.07$

$y_{25} = 98$ $y_{26} = 111$ $y_{27} = 84$

a) $\hat{y}_{28}(27) = l_{27} + b_{27} = ?$

$l_{27} = 0.4 y_{27} + 0.6(l_{26} + b_{26}) =$

$= 0.4 \cdot 84 + 0.6(85.16 - 17.07) = 74.45$

$b_{27} = 0.05(l_{27} - l_{26}) + 0.95 b_{26} =$

$= 0.05(74.45 - 85.16) + 0.95(-17.07) =$

$= -16.75$

$\hat{y}_{28}(27) = 74.45 - 16.75 = \underline{57.7}$

$\hat{y}_{29}(27) = 74.45 - 2 \cdot 16.75 = \underline{40.95}$

b) SAC avtar snabbt, SPAC en spik i början

$\Rightarrow$ AR(1)

c) $\hat{y}_t = 535.25 - 17.639 \cdot t = 0$

$t = \dfrac{535.25}{17.639} = 30.34$

27 = år 2007 30 = år 2010

Under år 2010 når antal gallar 0

d) $DW = 0.544 < 1 \Rightarrow$ residualerna är positivt autokorrelerade

2) TFR = antalet barn en kvinna föder i snitt.

a) SAC och SPAC tyder på en AR(p) där p = 2 eller möjligen 3
Ingen av modellerna har en AR(3) anpassad.

Modell	ARMA	t-kvoter	Box-P	MS	Modell
1	2 0	OK	Ej	0.0034	OK
2	0 2	OK	Ej	0.0053	
3	2 2	ej	OK	0.0028	OK
4	2 1	ej	ej	0.0048	
5	1 2	sämst	ej	0.0132	
6	1 1	ej	ej	0.0042	

Modell 1: Här saknas antagligen AR(3)
Då hade nog Box-P för residualerna blivit OK och MS lägre
Modell 3: Här är θ_2 ej sign men tas den bort så fås modell 4 som inte alls är bra. Denna modell har antagligen bättre MS och Box-P än modell 1 för modell 3 försöker kompensera för AR(3) saknas.
Både modell 1 och 3 är väl OK men en AR(3) borde anpassas.

b) $T = 39$ = år 2008 y_t = TFR Stockholm
Beräkna $\hat{y}_{40}(39)$ och $\hat{y}_{41}(39)$
Modell 1: $y_t = 0.239 + 1.46y_{t-1} - 0.602y_{t-2} + a_t$
a_t prognostiseras till 0 då $t = 40$ och 41

$\hat{y}_{40}(39) = 0.239 + 1.46\,y_{39} - 0.602\,y_{38} =$
$= 0.239 + 1.46 \cdot 1.86 - 0.602 \cdot 1.84 =$
$= 1.85\ (1.8469)$

$\hat{y}_{41}(39) = 0.239 + 1.46 \cdot 1.8469 - 0.602 \cdot 1.86 =$
$= 1.82\ (1.8158)$

2c) Modell 3: ARMA(2,2)

$$y_t = \hat{\delta} + \hat{\phi}_1 y_{t-1} + \hat{\phi}_2 y_{t-2} + $$
$$+ a_t - \hat{\theta}_1 a_{t-1} - \hat{\theta}_{t-2}$$

$$(1 - \hat{\phi}_1 B - \hat{\phi}_2 B^2) y_t = \delta + (1 - \hat{\theta}_1 B - \hat{\theta}_2 B^2) a_t$$

$$\Phi_2(B) y_t = \delta + \Theta_2(B) a_t$$

---

3) a)
$$\hat{y}_t = \hat{\beta}_0 + \hat{\beta}_1 t$$

$$\hat{\beta}_1 = \frac{\sum xy - \frac{\sum x \sum y}{n}}{\sum x^2 - \frac{(\sum x)^2}{n}} =$$

$$= \frac{41694.8 - \frac{4851 \cdot 881.4}{98}}{318549 - \frac{4851^2}{98}} = \frac{-1934.5}{78424.5} =$$

$$= -0.0247$$

$$\hat{\beta}_0 = \bar{y} - \hat{\beta}_1 \bar{x} = \frac{881.4}{98} + 0.0247 \cdot \frac{4851}{98} =$$
$$= 10.22$$

$$\hat{y}_t = 10.22 - 0.025 \cdot t$$

b) $-0.025 \cdot 98 = -2.45$

Under de 98 åren så har sjön sjunkit 2.45 fot enligt modellen (i snitt)

c) AR(2) SAC avtar snabbt och 2 spikar i SPAC

d)

Modell	ARMA	t-kvoter	Box-P	MS
1	2 0	OK	OK	0.452
2	0 2	OK	ej	0.522
3	2 2	ej	OK	0.452
4	1 1	OK	OK	0.447

(4)

3d) Modell 1 och 4 är värt att titta vidare på
Båda är bra men modell 4 har lägst MS men SAC och SPAC säger Modell 1. Enklare att förstå en AR. Jag tycker därför Modell 1

e) $y_t = 1.739 + 1.102 y_{t-1} - 0.294 y_{t-2} + a_t$

$\Phi_2(B) y_t = \hat{\delta} + a_t$

$\Phi_2(B) = 1 - 1.102B + 0.294B^2$

---

4) Den första är dubbelexponentiell utjämning och används då det finns en trend. Data visar inte på någon tydlig trend.
Den andra är Winters metod och är rimlig då man dessutom har säsongsvariation. Data har tydlig säsongsvariation så denna borde vara mer lämplig.
Studeras valideringsmåtten så är den sista modellen bäst. Alla måtten är lägre här.

5a) Winters multiplikativa modell

$y_t = (\beta_0 + \beta_1 t) \cdot sn_t + \varepsilon_t$

Nivå, trend och säsong har utjämningsekvationer som uppdateras genom hela tidsserien.
Utjämningskonstanterna välis så att ett valideringsmått minimeras

5a) Modellen följer data ganska bra (5)
Utjämningskonstanterna kunde dock väljas bättre. Multiplikativ är bra här
SAC skulle kunna bli bättre

b) Serien uppvisar ett multiplikativt mönster. Ökad variation med ökad trend. Ska ARIMA modeller anpassas så måste då data logaritmeras.
Annan transform skulle kanske också funka bra men här är ln bra.

c) SAC och SPAC har intressanta spika i lag 4. Inget mer

Modell 2: SMA 4 sign
Box-P ok MS = 0.0014
Parameterskattningarna har konvergerat

Modell 3: SMA 4 sign
Box-P ok MS = 0.0017
Parameterskattningarna har nästan konvergerat.

Modell 3 är en reducerad variant av modell 2. Modell 3 bättre
Borde gå vidare och ta bort SAR 4.

d) Jag räknar om för t = 100 och 101
Ta exp på alla värden

t	$\hat{y}$	Low	Upper
100	687.8	605.6	781.2
101	663.9	573.1	769.0

Modell 1 (Skriver av)

100	673.6	646.6	700.6
101	650.0	621.0	679.1

6

5d) Prognosintervallen från modell 1 är smalare.
Ingen av modellerna är riktigt bra. Jag skulle jobba mera med ARMA och ta den.

e) $Z_t = -0.0 + 0.232 \cdot Z_{t-4} + a_t - 0.886 a_{t-4}$

f) ARIMA$(1,1,1)(1,1,1)_4$

$\Phi_1(B)\Phi_1^*(B^4)(1-B)(1-B^4)y_t = \hat{\delta} + \Theta_1(B)\Theta_1^*(B^4)a_t$

$\Phi_1(B) = 1 + 0.339B \quad \Phi_1^*(B) = 1 - 0.243B$

$\Theta_1(B) = 1 + 0.203B \quad \Theta_1^*(B) = 1 - 0.886B$

$\hat{\delta} = -0.0$

---

6) a) Modell 1: I kvartal 4 är hh disp inkomster 1135.5 mnkr lägre jämfört med trenden

Modell 2: I kvartal 4 är hh disp inkomst 5702 mnkr högre jämfört med kvartal 1

b) Modell 2: $2678.35 \cdot 4 = 10713.4$ mnkr ökning per år

c) Modell 1: $T = 73$ 2011 KR

k2 $\hat{y}_{74}(73) = 147508 + 2679 \cdot 74 + 6593.9 = 352348$ mnkr

k3 $\hat{y}_{75}(73) = 147508 + 2679 \cdot 75 + 1824.7 = 350258$ mnkr

6c) Modell 2:

$\hat{y}_{74}(73) = 140754 + 2678.4 \cdot 74 + 13090$
$= 352046$ mnkr

$\hat{y}_{75}(73) = 140754 + 2678.4 \cdot 75 + 8259 =$
$= 349893$ mnkr

d) $DW = 0.259 < 1 \Rightarrow$ Residualerna har positiv autokorr

e) Mod 3 har lägst MS
Box-P är OK för alla modeller
Mod 3 o 5 har en icke-sign param.
Modell 4 har sign param och näst lägst MS så ta modell 4
De andra är onödigt stora.

f) $v_t = y_t - y_{t-1}$
$z_t = v_t - v_{t-4}$
$z_t = y_t - y_{t-1} - (y_{t-4} - y_{t-5})$
$= y_t - y_{t-1} - y_{t-4} + y_{t-5} = z_t$

g) Modell 4:

$z_t = 91.3 + a_t - 0.805 a_{t-4}$
$\hat{z}_{74} = 91.3 + 0 - 0.805 \hat{a}_{70}$
$= 91.3 - 0.805 \cdot 2243.86 = -1715.04$
$\hat{y}_{74} = \hat{z}_{74} + y_{73} + y_{70} - y_{69} =$
$= -1715.04 + 339988 + 340928 - 321673$
$= 357528$

6g forts,

$$\hat{z}_{75} = 91.3 + 0 - 0.805\hat{a}_{71} =$$

$$= 91.3 - 0.805 \cdot 1063.9 = -765.1$$

$$\hat{y}_{75} = \hat{z}_{75} + \hat{y}_{74} + y_{71} - y_{70} =$$

$$= -765.1 + 357528 + 339827$$

$$- 340928 = \underline{355662}$$