Tidsserieanalys – Föreläsning 10 (ARCH, GARCH och VAR)

Frank Miller, Department of Computer and Information Science, Linköping University

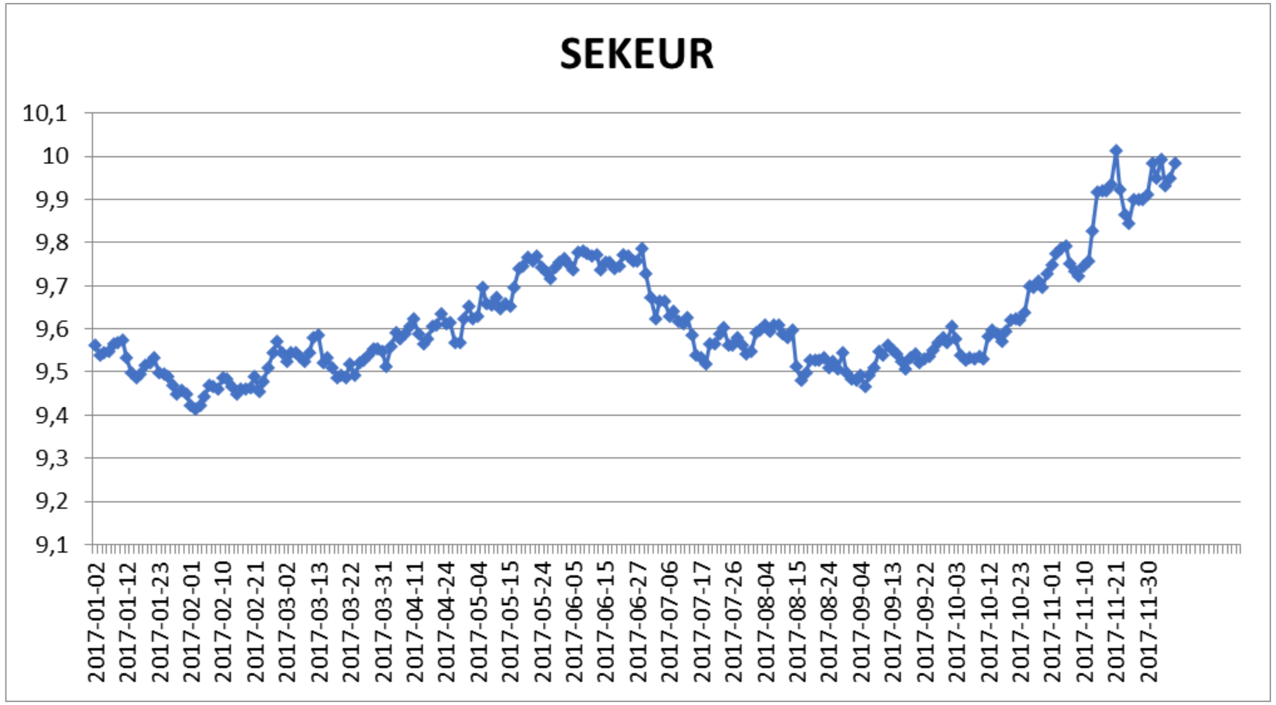
frank.miller@liu.se

December 9, 2024

LINKÖPING UNIVERSITY

Exempel 10.1

- Y_t växelkurs SEK per EUR, 2017-01-01 till 2017-12-08



Modellering av aktie- eller valutakurs

- Vi har en aktie- eller valutakurs Y_t upp till tid t-1 och önskar förutsäga Y_t
- Om marknadsaktörerna hade information om att kursen kommer att stiga markant från tidpunkt t-1 till t, skulle de redan har köpt aktien/valutan och därmed påverkat kursen
- Därför: rimligt att anta att väntevärdet för kursen vid tidpunkt t är detsamma som vid tidpunkt t-1, eller att det ökar med ett konstant belopp: (*) $E[Y_t] = Y_{t-1} + \mu$
- (*) följer om vi antar modellen: $Y_t = \mu + Y_{t-1} + \varepsilon_t$ med oberoende ε_t, $E[\varepsilon_t] = 0$
- Med $Z_t = Y_t - Y_{t-1}$ betyder det $Z_t = \mu + \varepsilon_t$, dvs. Z_t är ARMA(0,0), Y_t är ARIMA(0,1,0)
- $Y_t = \mu + Y_{t-1} + \varepsilon_t$ kallas för ”slumpvandring (med drift)”

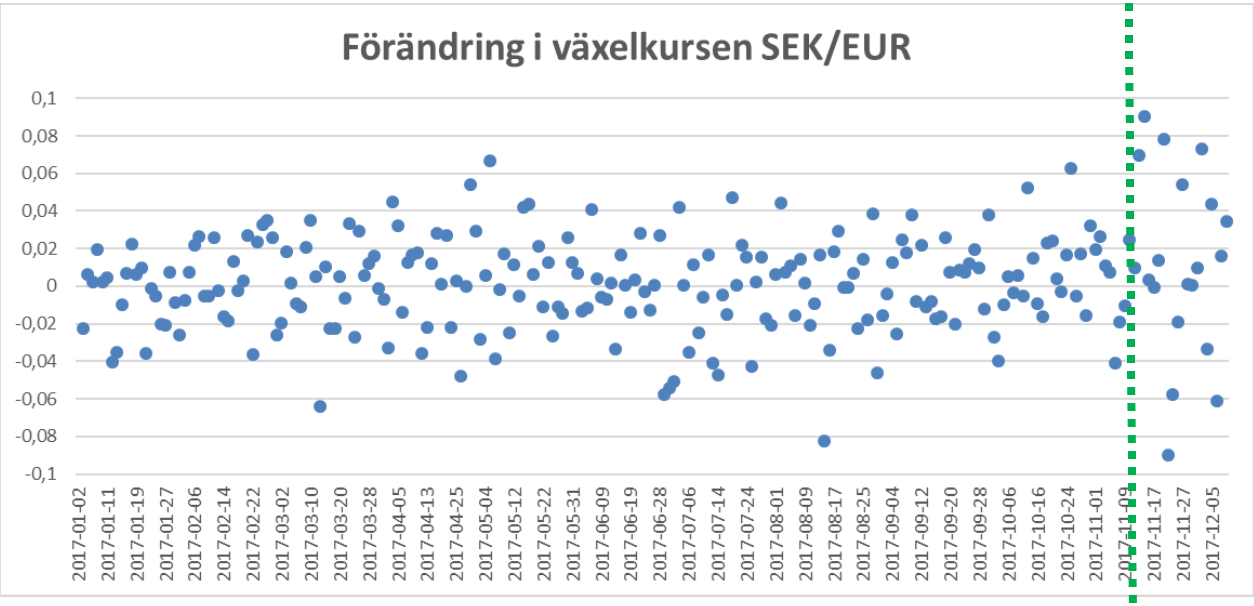
Modellering av variabilitet

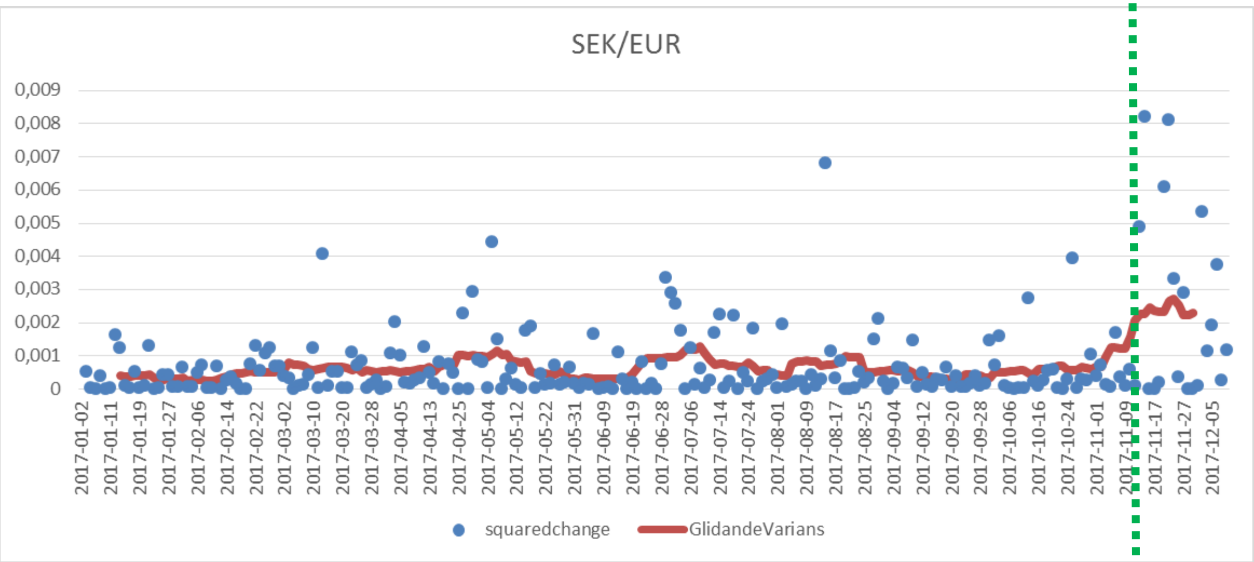
- Även om vi inte kan lära oss något om framtida medelvärden från data, vill vi lära oss något om variabiliteten (volatiliteten) för att bedöma risker
- Att kunna förutsäga osäkerhet är viktigt i finansiella sammanhang
- **Variabiliteten brukar inte vara konstant utan visar ofta upp kluster** med större variation och kluster med mindre variation
- Tanken med volatilitetskluster i verkligheten leder till idén att variansen för kommande observation beror på storleken av förändringen en tidpunkt innan

➢ARCH, GARCH modeller för variansmodellering läggs till en ARIMA modell för medelvärden (här idag antar vi ARIMA(0,1,0) för medelvärdet, men man kan ha ett annat modell för andra tidsserier)

Exempel 10.1

- Y_t växelkurs SEK per EUR, 2017-01-01 till 2017-12-08
- Dagliga förändringar $Z_t = Y_t - Y_{t-1}$
- $(Z_t)^2$ och glidande medel över 15 $(Z_t)^2$ värden ("Glidande Varians")





ARCH(1)-modell

- För Y_t antar vi att feltermens varians h_t (betingat för vad som har hänt innan) är
  $$h_t = \omega + \alpha_1 \varepsilon_{t-1}^2,$$
  där $\omega>0$ och $\alpha_1 \geq 0$; processen kallas då ARCH(1) (ARCH=”Autoregressive Conditional Heteroscedasticity”)
- Vi betraktar här slumpvandringsprocessen (ev. med drift)
  $$Y_t = \mu + Y_{t-1} + \varepsilon_t,$$
  med oberoende ε_t som har $E[\varepsilon_t]=0$ och $Var(\varepsilon_t)=\mathbf{h_t}$

ARCH(1)-modell

- Exempel 10.1 (forts.): ARCH(1)-modellering av växelkursen; resultat från R (paket `rugarch`)

	Estimate	Std. Error	t value	Pr(>|t|)
mu	0.0019	0.00167	1.16	0.247
omega	0.0006	0.00007	9.05	<0.0001
alpha1	0.1600	0.07137	2.24	0.024

$Y_t = \mu + Y_{t-1} + \varepsilon_t$; $Var(\varepsilon_t)=h_t=\omega+\alpha_1\varepsilon_{t-1}^2$

- Tolkning?

ARCH(1)-modell

- Exempel 10.2: För en ARCH(1)-tidsserie Y_t utan drift ($Y_t = Y_{t-1} + \varepsilon_t$; $Var(\varepsilon_t)=h_t=\omega+\alpha_1\varepsilon_{t-1}^2$) antar vi $\omega=0{,}0006$, $\alpha_1=0{,}16$ och normalfördelade ε_t
- Vi har följande observationer: $y_1=9{,}71$, $y_2=9{,}70$, $y_3=9{,}90$
- Beräkna standardavvikelserna $\sqrt{h_3}$, $\sqrt{h_4}$ för tidpunkterna t=3 och 4. Vad är $P(Y_4>10)$ enlig modellen?

Observerade förändringar: $e_2 = Y_2 - Y_1 = -0{,}01$, $e_3 = Y_3 - Y_2 = 0{,}2$

$h_3 = \omega + \alpha_1 e_2^2 = 0{,}0006 + 0{,}16 \cdot (0{,}01)^2 = 0{,}000616$ Stdavv.: $\sqrt{h_3} = 0{,}0248$

$h_4 = \omega + \alpha_1 e_3^2 =$ " " $0{,}2^2 = 0{,}007$ $\sqrt{h_4} = 0{,}0836$

Väntevärdet för X_4 enlig modellen: $E[Y_4 | Y_3] = X_3 = 9{,}90$

Betingade variansen är $V(Y_4 | Y_1, Y_2, Y_3) = h_4$

$P(Y_4 > 10) = P\left(\frac{Y_4 - 9{,}9}{0{,}0836} > \frac{10 - 9{,}9}{0{,}0836}\right) = P(Z > 1{,}2) = 0{,}115$

11,5% risk att växelkursen överstiger 10kr per EUR nästa dag

ARCH(q)- och GARCH(p,q)-modell

- Om feltermens varians h_t för Y_t får beror på q stycken tidigare ε_t,
  $$h_t = \omega + \alpha_1\varepsilon_{t-1}^2 + \ldots + \alpha_q\varepsilon_{t-q}^2,$$
  kallas modellen ARCH(q)
- Om feltermens varians h_t för Y_t är
  $$h_t = \omega + \alpha_1\varepsilon_{t-1}^2 + \ldots + \alpha_q\varepsilon_{t-q}^2 + \beta_1 h_{t-1} + \ldots + \beta_p h_{t-p},$$
  kallas modellen GARCH(p,q) (”Generalized ARCH”)
- Notera: GARCH(0,q) = ARCH(q)

ARCH(q)- och GARCH(p,q)-modellval

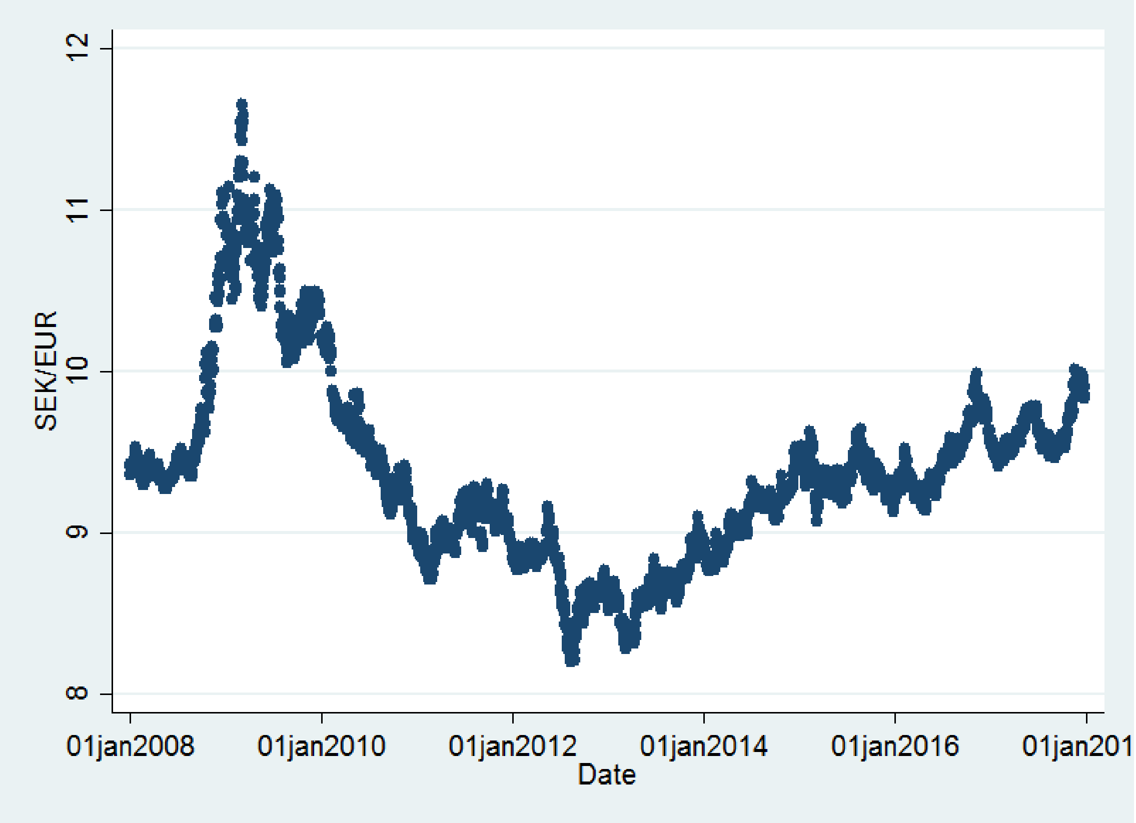
- Modellval kan göras genom att jämföra informationskriterier som AIC eller BIC; alternativt med att jämföra kvalitet av prognoserna genom att dela in data i tränings, validerings och test data

- För att skatta parametrar i ARCH(q)- eller GARCH(p,q) med större p eller q behövs vanligtvis större datamängder som innehåller flera volatilietskluster
- Vi tittar nu på daglig data över en 10-års period

- Exempel 10.3: Växelkursen SEK per EUR från 2008-2017. Medelvärdet följer en slumpvandring (ARIMA(0,1,0)). Vi vill använda en lämplig GARCH(p,q)-variansmodell.

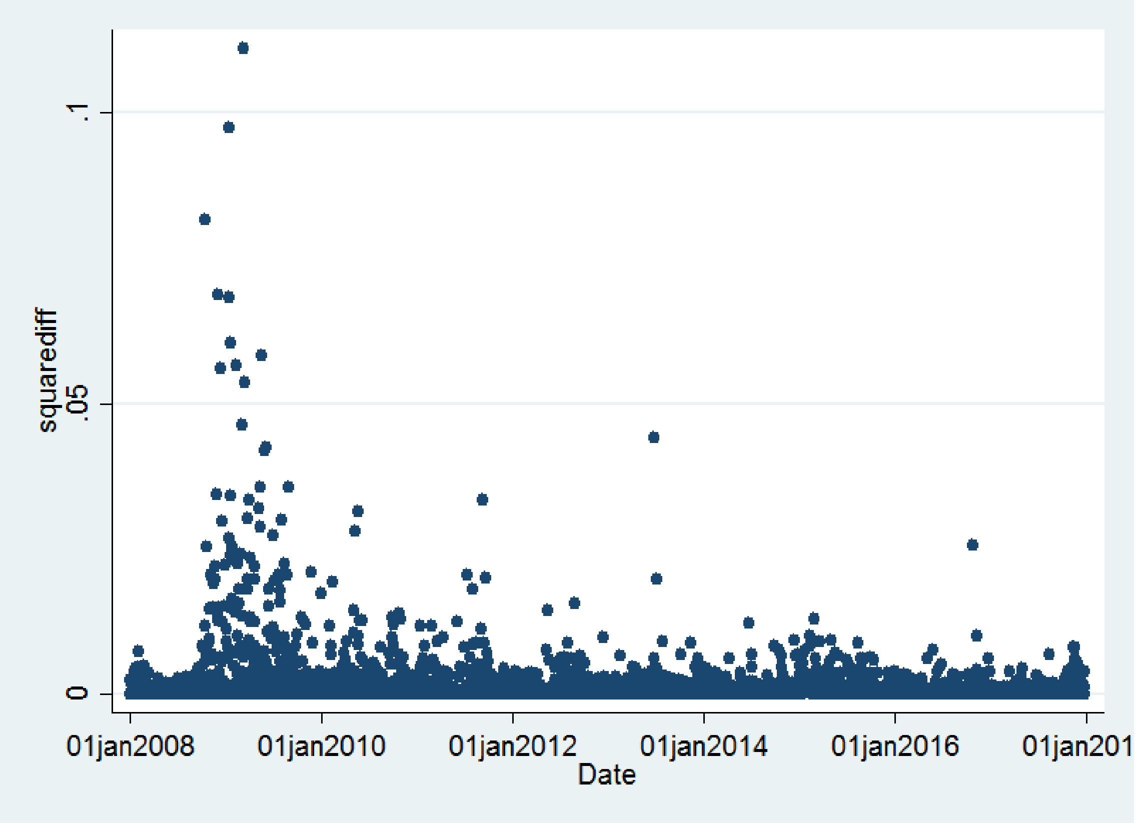
ARCH(q)- och GARCH(p,q)-modellering

- Exempel 10.3:
- Kursförloppet Y_t 2008-2017 visas i figuren
- Slumpvandring för medelvärdet:
  $Y_t = \mu + Y_{t-1} + \varepsilon_t$



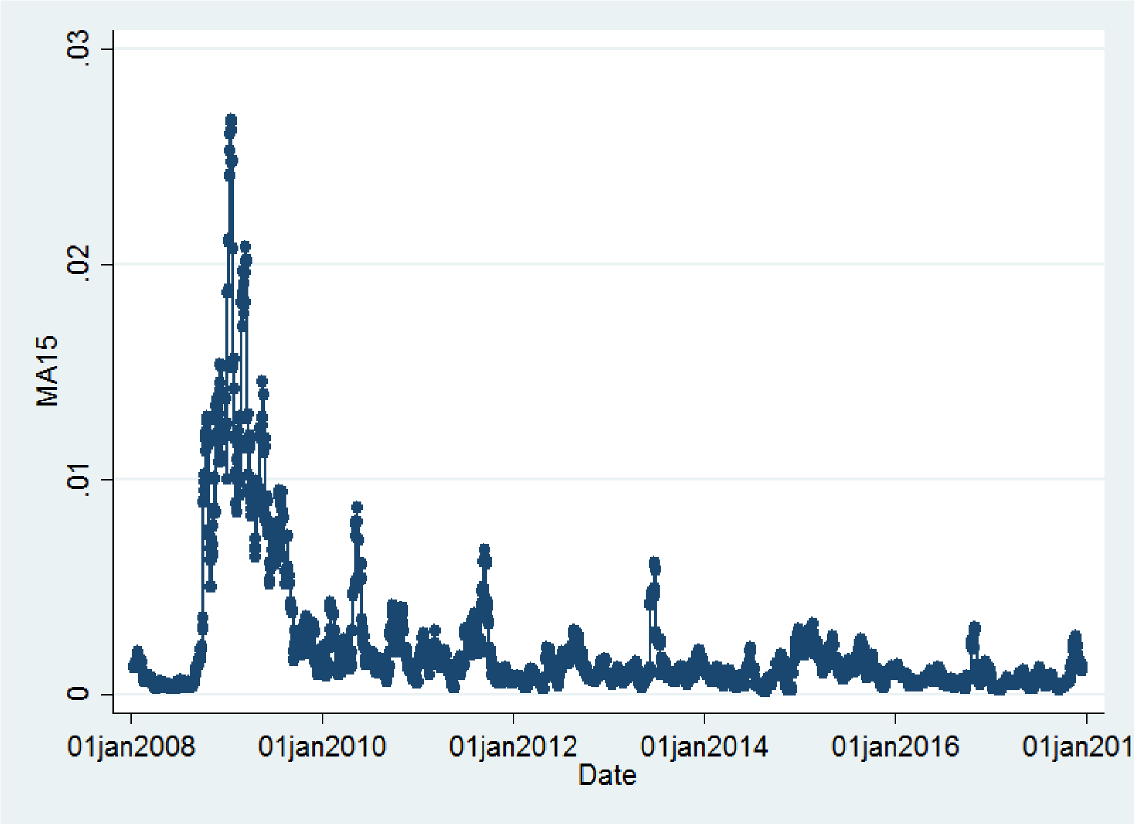
ARCH(q)- och GARCH(p,q)-modellering

- Exempel 10.3:
- Kvadrerade kursför-ändringar $(Y_t - Y_{t-1})^2$ 2008-2017 visas i figuren
- För att få ett bättre intryck över volatilitetskluster beräknar vi glidande medelvärden, MA(15), av dessa



ARCH(q)- och GARCH(p,q)-modellering

- Exempel 10.3:
- MA15 av kvadrerade kursförändringar visas i figuren
- Man ser en lång kluster av mycket stor volatilitet slutet av 2008 till mitten av 2009, och flera andra volatilitetskluster



ARCH(q)- och GARCH(p,q)-modellering

- Exempel 10.3: Efter analys av olika GARCH(p,q)-modeller väljer vi GARCH(1,1)-modellen vilken gav bäst BIC; analysen:

	Estimate	Std. Error	t value	Pr(>|t|)
mu	0.00052	0.00070	0.74	0.4587
omega	0.00002	0.00001	3.69	0.0002
alpha1	0.06594	0.00963	6.85	<0.0001
beta1	0.92139	0.01133	81.30	<0.0001

- Feltermens varians: $h_t = 0{,}00002+0{,}06594\varepsilon_{t-1}^2+0{,}92139h_{t-1}$
- Med den skattade modellen kan vi predicera variansen för morgondagen

T.ex. om variansen för idag hade beräknats till h_t=0,001 (baserad på tidigare data med hjälp av denna GARCH(1,1)-modell) och

a) Ingen kursförändring från igår till idag ($Y_t=Y_{t-1}$),
b) Kursändring 0,1 från igår till idag ($|Y_t-Y_{t-1}|=0{,}1$)

så blir variansen för imorgon

a) $h_{t+1} = 0{,}000023+0{,}0659\cdot 0 \quad +0{,}921\cdot 0{,}001 = 0{,}000944$,
b) $h_{t+1} = 0{,}000023+0{,}0659\cdot 0{,}1^2+0{,}921\cdot 0{,}001 = 0{,}001603$

R kod för analyserna innan

```
library(rugarch)
setwd("C:/Users/...") # write here where you have saved the data-files on your computer, if necessary
eursek2017   <- read.csv("SEKEUR_2017.csv", header = TRUE, sep = ";", dec=",")
eursek200817 <- read.csv("SEKEUR20082017.csv", header = TRUE, sep = ";", dec=",")

# ARCH(1) example
spec   <- ugarchspec(variance.model = list(model="sGARCH",garchOrder = c(1, 0)), mean.model = list(armaOrder = c(0, 0),
                     include.mean = TRUE))
fit_a1 <- ugarchfit(spec = spec, data = eursek2017[-1, 3])
fit_a1

# GARCH(p, q) models, p=0, 1, 2, q=1, 2, 3; jämför Bayes Information Criterion; p=q=1 ger bäst resultat
for (p in 0:2){
  for (q in 1:2){
    spec <- ugarchspec(variance.model = list(model="sGARCH",garchOrder = c(q, p)), mean.model = list(armaOrder = c(0, 0),
                       include.mean = TRUE))
    fit  <- ugarchfit(spec = spec, data = eursek200817[-1, 3])
    print(fit)
  }
}

spec     <- ugarchspec(variance.model = list(model="sGARCH",garchOrder = c(1, 1)), mean.model = list(armaOrder = c(0, 0),
                       include.mean = TRUE))
fit_a1b1 <- ugarchfit(spec = spec, data = eursek200817[-1, 3])
fit_a1b1
```

Notera att GARCH-modellens parametrar ska vara i ordningen q, p

VAR modeller

- Med modellerna som vi betraktade hittills försöker man predicera framtiden av en serie med seriens egna historia
- Till exempel:
  - Framtidens växelkurs baserad på samma växelkursens historia
  - Framtidens BNP baserad på BNP-data bara
  - Sysselsättning i kommande kvartal baserad på sysselsättningen några år tillbaka
- Verkligheten är inte endimensionell: i många fall påverkar flera variabler en tidsserie
- Exempel: Framtidens BNP i Sverige skulle kunna bero på nutidens BNP, sysselsättningen och växelkursen

VAR modeller

- Vi har två tidsserier
  - $Y_{1,t}=a_1Y_{1,t-1}+\varepsilon_{1,t}$
  - $Y_{2,t}=a_2Y_{2,t-1}+\varepsilon_{2,t}$

  som ”påverkar varandra”
- En VAR (”Vector Autoregressive”) modell där serierna antas påverka varandra kan formuleras som ett system där man tillåter samspel mellan variablerna:
  - $Y_{1,t} = a_{11}Y_{1,t-1} + a_{12}Y_{2,t-1}+ u_{1,t}$
  - $Y_{2,t} = a_{21}Y_{1,t-1} + a_{22}Y_{2,t-1}+ u_{2,t}$
- Antaganden: $E[u_{1,t}]=E[u_{2,t}]=0$ för alla t,
  $E[u_{1,s}\cdot u_{2,t}]=0$ för alla s och t (u_1 och u_2 är okorrelerade)
- Se 12.3 Vector autoregressions | Forecasting: Principles and Practice (3rd ed)

VAR modeller

- Bra om vi undersöker dem individuella tidsserierna ($Y_{1,t}$, $Y_{2,t}$, …) först och transformerar dem för att närma sig stationaritet (ska serien logaritmeras, säsongrensas, differentieras?)
- Analysera sedan dem transformerade tidsserierna med VAR
- Resultatet från VAR modellen kan undersökas om det finns signifikanta samband, men kausalitetsfrågan är här särskild knepig

VAR modeller

- Ränteläget i ekonomier påverkar växelkurserna och växelkurserna kan påverkar ränteläget
- Exempel 10.4: Vi söker en modell samtidigt för räntor från 10-åriga statsobligationer från Sverige och Europa och för växelkursen SEK per EUR. Vi har daglig data för alla tre tidsserier. Hur kan en meningsfull modell ser ut?

	Stats-obligationer	**Internationella statsobligationer 10-års löptid**	**Valutor mot svenska kronor**
Datum	SE GVB 10Y	EU 10Y	1 EUR
2017-11-27	0,711	0,341	9,8991
2017-11-28	0,695	0,34	9,9002
2017-11-29	0,739	0,389	9,9009
2017-11-30	0,732	0,367	9,9109
2017-12-01	0,718	0,31	9,984
2017-12-04	0,695	0,341	9,9504
2017-12-05	0,686	0,318	9,9942
2017-12-06	0,663	0,302	9,9329
2017-12-07	0,682	0,297	9,9488
2017-12-08	0,671	0,31	9,9831

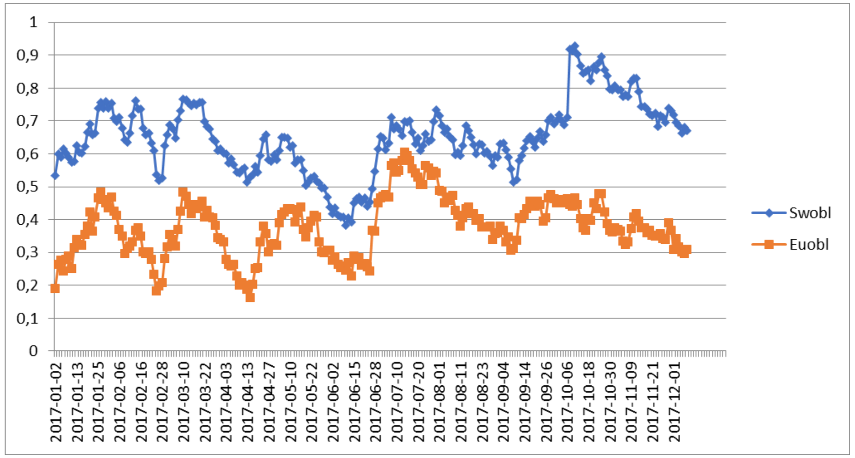
Datakälla: Riksbanken

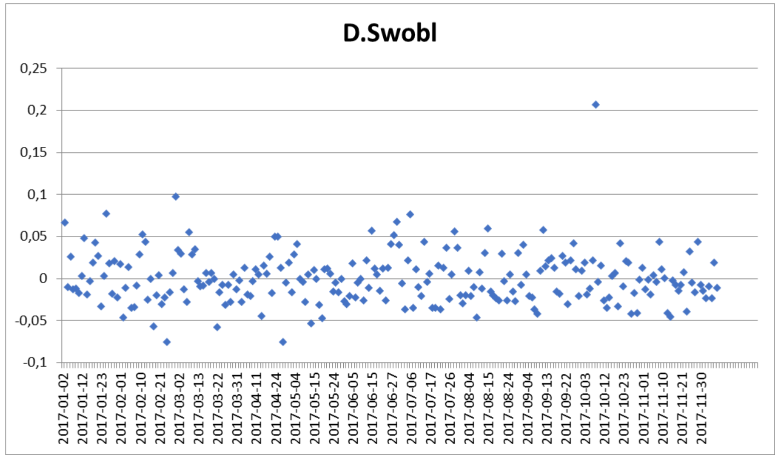
VAR modeller

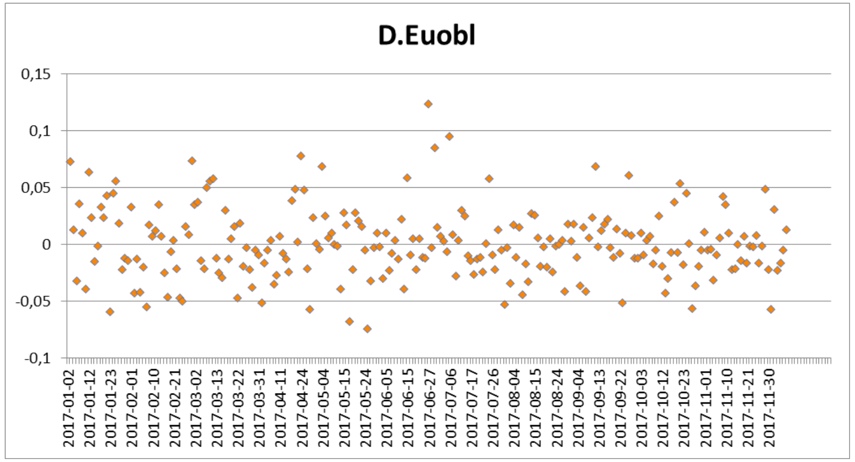
- Exempel 10.4: Vad borde teoretisk hända med de två andra ”variabler” om
  - Sveriges riksbank påverkar marknaden så att räntan för statsobligationer från Sverige ökar?
  - Den Europeiska centralbanken påverkar marknaden så att räntan för statsobligationer från Europa ökar?
  - Växelkursen SEK per EUR ökar (dvs. kronan blir svagare mot euron)?

VAR modeller

- Tidsserier för räntor av 10-åriga statsobligationer från Sverige och Europa och deras dagliga förändringar. Förändringarna visar inte upp ett tydligt mönster och kan vara stationära (vi kan verifiera det med en test):







VAR modeller

- Exempel 10.4: VAR modellens skattningarna och hypotestest
- Två samband verkar vara viktiga:
  - Om den europeiska räntan ökar med 1%-enhet förväntas svenska räntan öka med 0,22%-enheter
  - Om den svenska räntan ökar med 1%-enhet förväntas växelkursen går ned med 22 öre (0,22 kr), dvs. kronan blir starkare mot euron

		Estimate	Pr(>|z|)
D.swobl	D.swobl	-0.0021	0.980
	D.euobl	**0.2201**	**0.007**
	D.eursek	0.0222	0.765
	const	0.0002	0.933
D.euobl	D.swobl	0.0844	0.297
	D.euobl	0.0373	0.648
	D.eursek	0.0105	0.887
	const	0.0001	0.955
D.eursek	D.swobl	**-0.2197**	**0.002**
	D.euobl	0.1054	0.143
	D.eursek	-0.0144	0.826
	const	0.0020	0.250