A comprehensive summary of limit exercises

— 3rd Edition —

极限求法大总结

（ 第三版 ）

前言 / PREAMBLE

我相信大家在第一次学习大学数学时，无论学的是高等数学还是数学分析，遇到的第一个难点可能都是极限部分. 我们的教科书之所以把极限这一章节排在如此靠前的位置，是因为极限理论确实在整个严格的微积分中都有着不可撼动的地位. 具体来说，函数的连续性是用极限来定义的，函数的导数是用极限来定义的，定积分是用极限来定义的，偏导数、重积分、曲线积分、曲面积分，全是用极限来定义的. 因此只有把严格的极限的概念阐述清楚，才能产生后面精彩纷呈的内容. 其实，历史告诉我们，严格的极限概念在人们初创微积分时并没有出现得很及时，牛顿等人在这件事情上走了一些“弯路”，不过好在后来柯西等人最终阐明了严格的极限概念，使得整个微积分体系日趋严密.

虽然在历史上，严格的极限理论出现较晚，但对我们来说，它却是整门课程的基础，是我们翻开教材后首先映入眼帘的部分. 心理学上有个概念叫“首因效应”，说的是，人与人之间的第一印象对以后的交往活动产生的影响是巨大的. 这个效应不仅适用于人与人，人与事物也适用. 极限理论就是我们与高数或数分见面后学习的第一件事情（可能教材在极限前面还有一些内容，不过我相信那都很容易），所以我们极有必要把这一部分学好，利用好首因效应. 如果这一部分学得好，可能你会对整门课程的印象都是好的，愿意学它；反之，可能你会对整门课程的感觉都是糟糕的，不愿触碰. 这也是我们从心理学角度出发对学好极限理论的重要性所作的简单分析.

然而，很多人对极限的定义并不理解. 其实，如果说得通俗一点，极限就是这么一个东西：当自变量越来越靠近某个值，数列值或函数值越来越靠近另一个值，要多靠近就有多靠近，这个值就是极限. 教材上为什么不能这么写呢？数学需要严格. 什么是“越来越”？什么是“靠近”？什么叫“要多靠近就有多靠近”？多近算近？这些都是不严格之处. 因此，我们才有了极限的严格定义，通过最“数学化”的方式描述了一个其实很好理解的概念——用“任意”“存在”这样的逻辑语言表达了“要多靠近就有多靠近”这样一层意思. 请读者仔细品味.

考虑到极限理论的重要性，2016 年 9 月，我萌生了写这本《极限求法大总结》的想法，当然，这本书没有涉及到极限的方方面面，只是介绍关于极限的基本知识以及如何利用它们来“求”极限，对于一些关于极限的其他综合问题，没有较多地提及. 2016 年 10 月，第一版诞生了，但是这个版本非常简略，内容较少. 直到 2018 年 8 月，我决定再次修订一下文本内容，很快第二版完工了，在第一版的基础上，我修改了一些说法，扩充了一些内容. 2018 年 10 月，再次动工修订第三版，这一次，我对文章内容做了大幅度修改与增添，页码数已经是上一版的两倍多. 2019 年 1 月，第三版修订结束. 以上是我写这本书的原因和简单写作历程.

依我看来，求极限的能力大致能分为五级水平.

第一级，入门级水平. 这级水平对应的能力是，对极限仅能作一些简单的判断，不能很好地利用各种定理进行极限计算，仅仅停留在对极限概念的初步认识阶段. 处在这个水平的人，若想提升能力，大可先阅读最基础的微积分教材，掌握最基本的知识，做基础练习. 在掌握知识的时候，应当留意课本上的每一句话，定理的每一个使用条件，如“两函数的和的极限，想要拆成两个极限，必须保证

极限都存在”“在加减运算中，不能使用等价无穷小替换的方法”等等. 微积分是一门严谨的学科——更应当说，数学是一门严谨的学科，容不得半点不精确.

第二级，非数学专业本科水平. 处在这个水平的人，大致可以较好地对付学校的期末考试，能够掌握许多求极限的方法，也可以相对灵活地选择合适的方法来计算极限. 想要达到这个层级，只需要在课堂上认真学习，把课本上的每个定理与每种方法学明白，把在学习过程中出现的不懂的题目搞懂即可.

第三级，非数学专业考研水平. 处在这个水平上的人，已可以轻松解决考研难度的问题，已经具有较高的水平. 但常常现实是，有些题目一旦变得复杂，则可能会出现计算失误或无法计算的问题. 这时若想提升能力，达到这个层级，就需要掌握更进一步、更先进的方法，如拉格朗日中值定理、定积分方法、压缩映射原理等等，做更加有难度的题目. 当然，这些方法在本书中都有详细介绍.

第四级，数学专业与竞赛水平. 处在这个水平的人，已经可以相当灵活地应对各种极限问题，方法已经积累了很多，已经可以算是领域内的高手了. 如果想要达到这个能力层级，那就需要往专业和竞赛方面发展，这时可以学习一些比较新奇的方法与定理，如施笃兹定理、华里士公式、斯特林公式等等，并建议刷一本习题集，开阔思路，见多识广. 但是，如果目标只是考研而非数学专业，如果不是为了兴趣，其实暂时无需掌握这些专业的方法，只需要把考研大纲内的内容不停地夯实即可. 如果是对数学要求比较高的专业，要求还需进一步提高，则应将这些方法掌握.

第五级，神的水平. 处在这个水平的人，会利用各种特殊函数和特殊结论，以及各种意想不到的偏僻而又巧妙的方法来解决问题. 若想达到这个水平，需要接受各种冷门的专业知识学习与超高强度的训练，并可能还需要一些天分，但并不是不可触及的. 其实，有了足够的知识与练习，每个人都可以无限地提升自己的能力层级. 毕竟，世上无难事，只要肯登攀.

本书本版本（第三版）大约限于上述的第四级水平（我觉得只是第四级水平的一个初步），书中各方法大致上是按照由常见、基础到罕见、深入的顺序排列的. 对于数学专业的内容，读者若没有事先学过相关知识，可以跳过不读；如果实在感兴趣，可以学完该部分知识后再读.

我在每个例题下所配的解答，不一定是最简单的. 很多时候我只是为了讲一个方法而去讲一道例题. 在这里，我们当然提倡读者积极思考其他方法，做到“一题多解”；同时也提倡读者善于将类似的题目归纳总结，形成自己的解题模式，做到“多题一解”.

极限本应分为数列极限与函数极限两类，但事实上，它们在很大程度上都是相通的，所以在正文部分我并没有将这两类极限分开叙述. 若某处需要读者格外注意，我都一一作出了警示.

感谢编辑过程中所有支持我的人与给我意见和建议的人，你们都是编写团队中的一员. 倘若没有这些帮助与鼓励，这本书也不可能诞生.

给自己信心，相信自己一定能把极限理论学好，继而把整个微积分（数学分析）学好. 终有一天，你能把微积分（数学分析）征服！

编　者

2018 年 11 月

目录 / CATALOGUE

引 言

计算一元函数或数列的极限是高等数学或数学分析中比较重要的题型，题目内容千变万化，但常见的方法却就那么多. 本文总结了共 35 种极限的计算方法. 我认为本书适合于已经学过一遍高数或数分的读者阅读，因为数学知识就是这样，如果要写成一份总结，就不得不把很多知识融合起来，所以这份总结中经常会涉及到很多后面要学的内容，知识点交纵错杂. 如果有不懂的，当学完相应部分内容以后再来看，兴许会容易很多. 在总结极限的计算方法之前，开宗明义，概念先行，我们先来梳理一下关于极限的定义和相关性质.

第一部分 关于极限的定义和相关性质

一、极限的定义

1.（数列极限的 $\varepsilon-N$ 定义）设 $\{x_n\}$ 为一数列，如果存在常数 a，对于任意给定的正数 ε（不论它多么小），总存在正整数 N，使得当 $n>N$ 时，不等式 $|x_n-a|<\varepsilon$ 都成立，那么就称常数 a 是数列 $\{x_n\}$ 的极限，记作 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a$.

2.（函数在 $x\to x_0$ 时的极限的 $\varepsilon-\delta$ 定义）设函数 $f(x)$ 在点 x_0 的某一去心邻域内有定义. 如果存在常数 A，对于任意给定的正数 ε（不论它多么小），总存在正数 δ，使得当 x 满足不等式 $0<|x-x_0|<\delta$ 时，对应函数值 $f(x)$ 都满足不等式 $|f(x)-A|<\varepsilon$，则称常数 A 是函数 $f(x)$ 当 $x\to x_0$ 时的极限，记作 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=A$.

3.（函数在 $x\to+\infty$ 时的极限的 $\varepsilon-X$ 定义）设函数 $f(x)$ 在开区间 $(a,+\infty)$ 内有定义. 如果存在常数 A，对于任意给定的正数 ε（不论它多么小），总存在正数 X，使得当 $x>X$ 时，恒有 $|f(x)-A|<\varepsilon$ 成立，那么就称常数 A 是函数 $f(x)$ 当 $x\to+\infty$ 时的极限，记作 $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=A$.

4.（函数在 $x\to-\infty$ 时的极限的 $\varepsilon-X$ 定义）设函数 $f(x)$ 在开区间 $(-\infty,a)$ 内有定义. 如果存在常数 A，对于任意给定的正数 ε（不论它多么小），总存在正数 X，使得当 $x<-X$ 时，恒有 $|f(x)-A|<\varepsilon$ 成立，那么就称常数 A 是函数 $f(x)$ 当 $x\to-\infty$ 时的极限，记作 $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=A$.

5. （函数在 $x\to\infty$ 时的极限的 $\varepsilon-X$ 定义）设函数 $f(x)$ 在集合 $\{x\,\|x|>a\}$ 内有定义. 如果存在常数 A，对于任意给定的正数 ε（不论它多么小），总存在正数 X，使得当 $|x|>X$ 时，恒有 $|f(x)-A|<\varepsilon$ 成立，那么就称常数 A 是函数 $f(x)$ 当 $x\to\infty$ 时的极限，记作 $\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=A$.

6.（函数在 $x\to x_0$ 时的左极限的 $\varepsilon-\delta$ 定义）设函数 $f(x)$ 在点 x_0 的某一去心左邻域内有定义. 如果存在常数 A，对于任意给定的正数 ε（不论它多么小），总存在正数 δ，使得当 x 满足不等式 $x_0-\delta<x<x_0$ 时，对应的函数值 $f(x)$ 都满足不等式 $|f(x)-A|<\varepsilon$，那么就称常数 A 是函数 $f(x)$ 当 $x\to x_0$ 时的左极限，记作 $\lim\limits_{x\to x_0^-}f(x)=A$.

7. （函数在 $x\to x_0$ 时的右极限的 $\varepsilon-\delta$ 定义）设函数 $f(x)$ 在点 x_0 的某一去心右邻域内有定义. 如果存在常数 A，对于任意给定的正数 ε（不论它多么小），总存在正数 δ，使得当 x 满足不等式 $x_0<x<x_0+\delta$ 时，对应的函数值 $f(x)$ 都满足不等式 $|f(x)-A|<\varepsilon$，那么就称常数 A 是函数 $f(x)$ 当 $x\to x_0$ 时的右极限，记作 $\lim\limits_{x\to x_0^+}f(x)=A$.

以上七条定义，都是大同小异，读者应善于从这些叙述中寻求规律.

二、极限的相关性质

这里以函数极限为例介绍. 实际上，数列是特殊的函数. 一般说来，函数的相关性质，数列都适用. 类似的思想，只要改一改说法即可.

1.（唯一性）如果 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)$ 存在，那么这极限唯一.

2.（局部有界性）如果 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=A$，那么存在常数 $M>0$ 和 $\delta>0$，使得当 $0<|x-x_0|<\delta$ 时，有 $|f(x)|\le M$.

3.（局部保号性）如果 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=A$，且 $A>0$（或 $A<0$），那么存在常数 $\delta>0$，使得当 $0<|x-x_0|<\delta$ 时，有 $f(x)>0$（或 $f(x)<0$）.

推论：如果 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=A$，且存在常数 $\delta>0$，使得当 $0<|x-x_0|<\delta$ 时有 $f(x)\ge0$（或 $f(x)\le0$），那么 $A\ge0$（或 $A\le0$）.

4.（局部保序性）如果 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=A$， $\lim\limits_{x\to x_0} g(x)=B$，且存在常数 $\delta>0$，使得当 $0<|x-x_0|<\delta$ 时，有 $f(x)\ge g(x)$（或 $f(x)\le g(x)$）成立，则 $A\ge B$（或 $A\le B$）.

推论：如果 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=A$， $\lim\limits_{x\to x_0} g(x)=B$，且有 $A>B$（或 $A<B$）成立，则存在常数 $\delta>0$，使得当 $0<|x-x_0|<\delta$ 时，有 $f(x)>g(x)$（或 $f(x)<g(x)$）.

5.（极限的四则运算法则）

① $\lim\left[f(x)\pm g(x)\right]=\lim f(x)\pm\lim g(x)$；

② $\lim\left[f(x)\cdot g(x)\right]=\lim f(x)\times\lim g(x)$；

③ $\lim\dfrac{f(x)}{g(x)}=\dfrac{\lim f(x)}{\lim g(x)}$ （$g(x)\ne 0$，且 $\lim g(x)\ne 0$）；

④ $\lim f(x)^{g(x)}=\lim f(x)^{\lim g(x)}$（这里必须要求底数的极限 $\lim f(x)>0$）. 特别地， $\lim \mathrm{e}^{g(x)}=\mathrm{e}^{\lim g(x)}$ 是成立的.

要格外注意，其中 $f(x)$ 和 $g(x)$ 的极限都要存在. 这些法则可以推广到有限个函数的运算.

第二部分 极限的计算方法总结

一、利用定义证明

利用定义证明一个极限等式成立，首先要知道这个极限等于几. 有时你不知道极限等于几，也可以通过直觉或归纳或其他方法猜出它等于几，再证明.

证明之前，首先要熟谙关于极限的全部定义，前面都有.

接下来说明一下怎么证明一个极限等式成立. 我以数列极限为例说明一下吧，其实函数极限也类似，精髓都在于：在任取 $\varepsilon>0$ 以后，只要找到一个 N 或者 X 或者 δ 满足定义条件，就能说明原极限等式成立.

[例 1] 证明 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{2n^2+3}{n^2+2n}=2$.

证明：任取 $\varepsilon>0$，要使得 $\left|\dfrac{2n^2+3}{n^2+2n}-2\right|<\varepsilon$ 成立，即 $\left|\dfrac{4n-3}{n^2+2n}\right|\overset{\text{这里可以适当放大}}{<}\dfrac{4n}{n^2}=\dfrac{4}{n}<\varepsilon$ 成立，只需 $n>\dfrac{4}{\varepsilon}$ 即可. 取 $N=\left[\dfrac{4}{\varepsilon}\right]$，则当 $n>N$ 时，恒有 $\left|\dfrac{2n^2+3}{n^2+2n}-2\right|<\dfrac{4}{n}<\varepsilon$ 成立，

所以原极限 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{2n^2+3}{n^2+2n}=2$ 成立.

在以上的解题过程中，我对 $\left|\dfrac{4n-3}{n^2+2n}\right|$ 放大了一下，这是没问题的，$\dfrac{4n}{n^2}<\varepsilon$ 都成立了，$\left|\dfrac{4n-3}{n^2+2n}\right|<\varepsilon$ 更成立了，而且这便于我们反解出 n. 事实上，如果不放大，要解出 n 是十分困难的，但理论上也不是不能解. 这也说明了一个观点，正整数 N 是不唯一的，只要找到那么一个正整数 N 即可，不同的人找的可能是不同的，只要逻辑正确即可.

用定义计算极限一般用于证明题，如果不事先知道极限的结果，是无法证明的.

再举一个函数极限的例子.

[例 2] 证明 $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\sin x}{\sqrt{2x}}=0$.

证明：任取 $\varepsilon>0$，要使得不等式 $\left|\dfrac{\sin x}{\sqrt{2x}}-0\right|=\dfrac{|\sin x|}{\sqrt{2x}}\le\dfrac{1}{\sqrt{2x}}<\dfrac{1}{\sqrt{x}}<\varepsilon$ 成立，只需 $x>\dfrac{1}{\varepsilon^2}$ 即可. 取 $X=\dfrac{1}{\varepsilon^2}$，则当 $x>X$ 时，就有 $\left|\dfrac{\sin x}{\sqrt{2x}}-0\right|<\dfrac{1}{\sqrt{x}}<\varepsilon$ 成立，因此极限 $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\sin x}{\sqrt{2x}}=0$ 成立.

这种方法的使用频率比较低，但还是应以掌握为上策. 一旦遇到，不要手足无措.

二、函数极限的直接代入法

能直接把趋向点代入函数的这种极限最简单了，代个数就出来了.

什么样的极限，可以往里代？答案是：在那一点处连续的函数的极限，可以代. 因为连续有个定义是“极限等于函数值”，所以连续函数在某点的极限，一定等于连续函数在该点的函数值.

我们还有一个结论，初等函数在其定义区间内都是连续的. 所以只要是初等函数（很多分段函数不是初等函数），而且在某点处有定义，那如果想求这点处的极限，直接代就行了.

当我们做题进行到某一步时，如果发现条件满足，能够直接代入，那么就可以直接代入得到答案了，千万不要继续求下去了（尤其是洛必达法则的题目，如果继续求的话，结果一定是错的）.

这里不举例题了吧，毕竟不难.

关于“连续”，还有一件事情应当注意，极限符号与连续函数是可以交换的，

这点不难. 如$\lim\limits_{x\to0}f(\sin x)=f\left(\lim\limits_{x\to0}\sin x\right)$，其中函数$f(u)$连续.

三、通过计算单侧极限求分段函数极限

这种方法是针对分段函数极限而言的，而且题目一般会让你求分段函数在分界点处的极限. 做法就是先求左极限，再求右极限. 如果都存在且相等，那答案就是这个数了；如果左右极限有至少一个不存在，或者都存在但不相等，那这个原极限就不存在了.

需要注意的是，求左极限的时候，用的就是小于分界点时的解析式，并想象x略小于分界点的情况；求右极限的时候，用的就是大于分界点时的解析式，并想象x刚过分界点的情况；跟分界点处的函数值半毛钱关系都没有. 举一个例题：

[例 3]已知函数$f(x)=\begin{cases}x\sin\dfrac{1}{x},x>0\\ a+x^2,\ x\le0\end{cases}$在$x=0$处极限存在，求$a$的值.

先求左极限$\lim\limits_{x\to0^-}f(x)$. 当$x$略小于0时，用的是$f(x)=a+x^2$这个解析式，它趋近于$a$. 再求右极限$\lim\limits_{x\to0^+}f(x)$，当$x$略大于0时，用的是$f(x)=x\sin\dfrac{1}{x}$这个解析式，无穷小乘以有界函数，趋于0（详见方法4.1）.

为了让这个极限存在，只需要左右极限相等即可，所以$a=0$，此时的极限$\lim\limits_{x\to0}f(x)$就等于0.

这种题型一般不会太难，谨慎地分析左右极限都等于谁，就不会做错.

还有一种情况，含有指数函数、反正切函数、反余切函数、取整函数（不超过某实数的最大整数）等函数的极限可能也要分左右极限去考虑，因为它们在正负无穷处、或者某点左右的极限是完全不同的.

[例 4]计算$\lim\limits_{x\to0}\mathrm{e}^{\frac{1}{x}}$.

由于当$x\to0^+$时，$\dfrac{1}{x}$趋于正无穷；当$x\to0^-$时，$\dfrac{1}{x}$趋于负无穷，而正负无穷对于指数函数而言是完全不同的，因此必须分左右极限讨论.

由于$\lim\limits_{x\to0^+}\mathrm{e}^{\frac{1}{x}}=+\infty$，而$\lim\limits_{x\to0^-}\mathrm{e}^{\frac{1}{x}}=0$，因此$\lim\limits_{x\to0}\mathrm{e}^{\frac{1}{x}}$不存在.

[例 5]计算$\lim\limits_{x\to0}[x]$，其中$[x]$为取整函数.

由于$\lim\limits_{x\to0^+}[x]=0$，$\lim\limits_{x\to0^-}[x]=-1$，它们并不相等，因此$\lim\limits_{x\to0}[x]$不存在.

四、概念判断法

在我们拿到一道题的时候，首先要做的就是把趋近于的那个数带进去看看这是一道什么题型，有哪些是无穷小、有哪些是无穷大，哪些是有界的部分. 只有看清这些，我们才能有针对性地选择方法.

4.1 “有界量”乘以“无穷小量”趋近于0

[例 6] $\lim\limits_{x\to\infty}\underbrace{\boxed{\mathrm{e}^{\cos x}}}_{\text{有界}}\underbrace{\boxed{\ln\left(1+\dfrac{1}{x}\right)}}_{\text{无穷小}}=0$.

[例 7] $\lim\limits_{x\to 0}\underbrace{\boxed{x}}_{\text{无穷小}}\underbrace{\boxed{D(x)}}_{\text{有界}}=0$.

这里的函数 $D(x)=\begin{cases}1, & x\in\mathbf{Q},\\ 0, & x\in\mathbf{Q}^c\end{cases}$ 称为狄利克雷函数，$\mathbf{Q}$ 为有理数集，$\mathbf{Q}^c$ 为无理数集.

4.2 “有界量”除以“无穷大量”趋近于0

[例 8] $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\overbrace{\boxed{2+\sin(\cot x)}}^{\text{有界}}}{\underbrace{\boxed{2+\cot x}}_{\text{无穷大}}}=0$.

4.3 “趋于非零常数的量”乘以“无穷大量”趋近于∞

[例 9] $\lim\limits_{x\to\infty}\underbrace{\boxed{x}}_{\text{无穷大}}\underbrace{\boxed{\ln\left(\sqrt{2}+\dfrac{1}{x}\right)}}_{\text{趋于非零常数}}=\infty$（注意这也叫极限不存在）.

4.4 “绝对值小于 1 的数”的无穷大次幂趋于0，“绝对值大于 1 的数”的无穷大次幂趋于∞

[例 10] $\lim\limits_{n\to\infty}q^n=\begin{cases}0, & |q|<1,\\ 1, & q=1,\\ \text{非}\infty\text{不存在}, & q=-1,\\ \infty, & |q|>1.\end{cases}$

4.5 正的常数开无穷大次方趋近于1

[例 11] $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{A}=1\,(A>0)$.

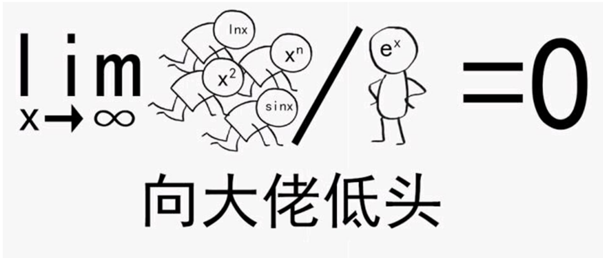
此外，还有一个结论，$\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{n}=1$.

4.6 自变量趋于无穷时，比较函数或数列值趋于无穷的速度

有些$\dfrac{\infty}{\infty}$型的极限，是一眼就能看出来的，而这凭借的就是分子和分母趋于

无穷的速度. 对于不同函数类型的分子分母，如果分母趋于无穷的速度比分子快，那这个极限就等于 0；如果分母没分子快，极限就是无穷（不存在）.

应该记住当n趋于正无穷大的时候，一些常见的数列（或函数）趋于无穷的速度：n^n快于$n!$快于a^n快于n^a快于$\left(\log_a n\right)^b$（当然，a和b的取值要保证它们是$n\to\infty$时的无穷大）. 网上有个比较有意思的表情包（如右图所示），说的就是这种道理.



[例 12] $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{3^n}{n!}=0$.

[例 13] $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{2}{n}\right)^n=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{2^n}{n^n}=0$.

以上这两道例题，更严谨些的做法是利用级数收敛的必要条件，见后面方法二十四.

这一大类方法讲的都是“一眼就能看出来”的极限，非常简单. 所以遇到题目应该先观察一下，是不是能只通过分析就迅速得到答案呢，如果把一道简单的题当成压轴题来做，那就太浪费时间了.

五、根据子列极限情况推导原数列极限情况

在这种方法中，我们仅谈论数列极限. 对于函数极限的类似结论可参考方法六（利用海涅定理）.

5.1 取两不同子列，极限不相等

子列是从一个数列中按原次序挑选出无数项而构成的新数列. 若一个数列的极限存在，则它的任何一个子列的极限都存在，并且等于原极限值. 这给我们一种启示：如果选取两个子列，使得极限值不相等，那么就可以说明原极限不存在. 请看下列例题：

[例 14] 研究极限$\lim\limits_{n\to\infty}\sin\dfrac{n\pi}{2}$的存在情况.

我们取两个子列$\left\{\sin\dfrac{2n\cdot\pi}{2}\right\}$和$\left\{\sin\dfrac{(4n-3)\cdot\pi}{2}\right\}$，其中$n\in\mathbf{N}_+$. 这两个数列都是从原数列中挑选出来的项. 我们可以发现，对于第一个子列，有

$$\lim_{n\to\infty}\sin\frac{2n\cdot\pi}{2}=\lim_{n\to\infty}\sin n\pi=0\text{；}$$

而对于第二个子列中却有

$$\lim_{n\to\infty}\sin\frac{(4n-3)\cdot\pi}{2}=\lim_{n\to\infty}\sin\left(2n\pi-\frac{3}{2}\pi\right)=1.$$

由此可见，原数列的不同子列的极限值是不同的，故原极限不存在.

这道理反过来说不一定成立. 如果你选取了两个子列，发现极限是相等的，那也不能说明极限就存在，因为我们的要求是“任意子列的极限都存在且相等”.

不过，我刚才用了一个词语，叫“不一定成立”．请看下面的方法.

5.2 所有奇数项以及偶数项组成的两子列极限均存在且相等

可以证明，在求数列极限时，把所有奇数项选出作为一个新的子列，再把所有偶数项选出也作为一个新的子列，若这两个子列的极限都存在且相等，那么我们可以说明原极限存在且等于这个值.

[例 15] 求极限 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\left|1-2+3-\cdots+(-1)^{n+1}n\right|}{n}$.

可以令 $x_n=\dfrac{\left|1-2+3-\cdots+(-1)^{n+1}n\right|}{n}$，

则 $\lim\limits_{n\to\infty}x_{2n}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\left|1-2+3-\cdots+(-1)^{2n+1}2n\right|}{2n}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\left|1-2+3-\cdots-2n\right|}{2n}$

$=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\left|\left[1+3+\cdots+(2n-1)\right]-(2+4+\cdots+2n)\right|}{2n}$（发现分子上出现了两个等差数列，于是想起等差数列的求和公式）

$=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\left|n^2-(n^2+n)\right|}{2n}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n}{2n}$（$n$ 是正整数，去掉绝对值）

$=\dfrac{1}{2}$，

并且还有 $\lim\limits_{n\to\infty}x_{2n-1}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\left|1-2+3-\cdots+(-1)^{2n}(2n-1)\right|}{2n-1}$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{\left|1-2+3-\cdots+(2n-1)\right|}{2n-1}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{\left|\left[1+3+\cdots+(2n-1)\right]-\left[2+4+\cdots+(2n-2)\right]\right|}{2n-1}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{\left|n^2-(n^2-n)\right|}{2n-1}=\lim_{n\to\infty}\frac{n}{2n-1}=\frac{1}{2}.$$

由于奇偶数项构成的子列极限均存在且相等，都是 $\dfrac{1}{2}$，所以原极限也存在，且其值也为 $\dfrac{1}{2}$.

不是任何两个子列存在且相等都可以推知原极限存在的，但根据奇数项和偶

数项这两个子列却可以推知原极限. 像上例这种容易分奇偶讨论的数列极限，可以考虑这种方法.

5.3 取一个子列，极限不存在

若一个数列有一个极限不存在（发散的）的子列，那么这个原数列的极限也不存在.

[例 16] 研究极限$\lim\limits_{n\to\infty}2^{(-1)^n n}$的存在情况.

取一个子列$x_n=2^{(-1)^{2n}\cdot 2n}=4^n$，由于$\lim\limits_{n\to\infty}4^n$不存在，因此，原极限$\lim\limits_{n\to\infty}2^{(-1)^n n}$也不存在.

六、利用海涅定理

海涅（Heine）定理，也叫归结原则，描述了函数极限与数列极限之间的关系. 定理内容是这么说的：

函数极限$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)\overset{\text{存在且记为}}{=\!=\!=}A$的充要条件是，对于任何满足以下三个条件的数列$\{x_n\}$，都有$\lim\limits_{n\to\infty}f(x_n)=A$成立. 第一个条件是对任何正整数$n$，都有$x_n\neq x_0$；第二个条件是对任何正整数$n$，$f(x_n)$都要有定义；第三个条件是$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=x_0$.

若一开始的函数极限中不是$x\to x_0$，而是$x\to\infty$，则只需要把定理中的所有x_0换成∞即可（"对任何正整数n都有$x_n\neq\infty$"这个条件是一定成立的，可以取消）.

海涅定理的基本思想是这样的. 在函数极限中，自变量是"连续地"趋近于点x_0的（但取不到x_0）. 试想，如果自变量不是"连续地"趋近于x_0，而是"离散地"或称"跳跃地"趋近于x_0，极限值是否不变呢？海涅定理告诉我们，答案是肯定的. 海涅定理中的数列$\{x_n\}$就是起到了这样的一种作用——原来的x是"连续地"趋近于x_0，而现在第三个条件$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=x_0$指出了数列$\{x_n\}$是"跳跃地"趋近于$x_0$（因为$\{x_n\}$是个数列，所以它只能离散地取值）. x与x_n就分别相当于连续和离散的自变量，这才有$f(x)$和$f(x_n)$的极限相等这样一种结论.

抛开严谨性，说得形象化一点，这就像是在函数在极限过程中取子列一样，一个极限存在，当且仅当它的任意子列的极限都存在.

在后面的方法十六（洛必达法则）中，将会提到，若想对数列极限应用洛必达法则，必须要先转化为对应的函数极限，然后再利用海涅定理转化回数列极限. 为什么由$x\to+\infty$可以直接转化成$n\to\infty$，但$n\to\infty$不能转化成$x\to+\infty$呢？因为$x\to+\infty$是"连续地"趋近，那么应该可以得出这样的结论——无论如何"跳跃

地”趋近，极限值都不变. 而$n\to\infty$仅仅属于“跳跃地”趋近的某一种方式，而不是任意方式，所以并不能保证“连续地”趋近时极限值不变. 读者可以在阅读完方法十六后再回头阅读这一自然段.

海涅定理除了可以帮助我们由函数极限转化成数列极限之外，还可以证明函数极限不存在. 大致上可以分为两个方面——一是找到一个满足定理中那三个条件的数列$\{x_n\}$使得$\lim\limits_{n\to\infty}f(x_n)$不存在，二是找到两个满足定理中那三个条件的数列$\{x_n\}$和$\{x_n'\}$使得$\lim\limits_{n\to\infty}f(x_n)\neq\lim\limits_{n\to\infty}f(x_n')$. 下面将分别举例介绍.

[例 17] 研究极限$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{1}{x}\sin\dfrac{1}{x}$的存在情况.

构造数列$x_n=\dfrac{1}{2n\pi+\dfrac{\pi}{2}}$. 它取不到零值，代入函数后有意义，且当$n\to\infty$时它趋于$0$，即此数列完全满足海涅定理中的三个条件.

然而，如果将原来的函数极限中的x换成x_n，就会有$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{\dfrac{1}{2n\pi+\dfrac{\pi}{2}}}\sin\dfrac{1}{\dfrac{1}{2n\pi+\dfrac{\pi}{2}}}$$=\lim\limits_{n\to\infty}\left(2n\pi+\dfrac{\pi}{2}\right)\sin\left(2n\pi+\dfrac{\pi}{2}\right)=\lim\limits_{n\to\infty}\left(2n\pi+\dfrac{\pi}{2}\right)=+\infty$，极限不存在. 因此$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{1}{x}\sin\dfrac{1}{x}$也不存在.

[例 18] 研究极限$\lim\limits_{x\to0^+}\sin\dfrac{2\pi}{x}$的存在情况.

我们构造两个数列$x_n=\dfrac{2\pi}{2n\pi+\pi}$和$x_n'=\dfrac{2\pi}{2n\pi+\dfrac{\pi}{2}}$，其中$n\in\mathbf{N}_+$. 这两个数列均满足定理中的三个条件，因为它们均不能取到0，代入函数后均有意义，且当$n\to\infty$时它们均从0的右侧趋于0.

当我们将x换成第一个数列中的项时，会发现

$$\lim_{n\to\infty}\sin\frac{2\pi}{\dfrac{2\pi}{2n\pi+\pi}}=\lim_{n\to\infty}\sin(2n\pi+\pi)=\lim_{n\to\infty}\sin\pi=0;$$

而当我们将x换成第二个数列中的项时，却会发现

$$\lim_{n\to\infty}\sin\frac{2\pi}{\dfrac{2\pi}{2n\pi+\dfrac{\pi}{2}}}=\lim_{n\to\infty}\sin\left(2n\pi+\frac{\pi}{2}\right)=\lim_{n\to\infty}\sin\frac{\pi}{2}=1.$$

由此可见，这两个数列的极限值是不同的，故原极限不存在.

七、因式分解法

因式分解的目的其实就是消去零因子，所以这种方法一般用在分式的极限上

（而且 x 一般不趋于无穷）．当你发现把趋近的那点代入时，分子分母都是零，而且看起来分子或分母好像能因式分解，就不妨试试这个方法. 比如：

[例 19] $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{x^2-2x+1}{x^2-1}=\lim\limits_{x\to1}\dfrac{(x-1)^2}{(x+1)(x-1)}=\lim\limits_{x\to1}\dfrac{x-1}{x+1}=\dfrac{1-1}{1+1}=0$.

有时也需要注意一下，一些看似不能因式分解的式子，在实数范围内就能因式分解了. 比如

[例 20] $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{\sqrt{x}-1}{x-1}=\lim\limits_{x\to1}\dfrac{\sqrt{x}-1}{(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+1)}=\lim\limits_{x\to1}\dfrac{1}{\sqrt{x}+1}=\dfrac{1}{2}$. 当然，这道题也可以分子有理化（见方法 9.1）.

也有时候，需要你先通分，再因式分解. 比如：

[例 21] $\lim\limits_{x\to-1}\left(\dfrac{1}{x+1}-\dfrac{3}{x^3+1}\right)=\lim\limits_{x\to-1}\dfrac{x^2-x-2}{(x+1)(x^2-x+1)}=\lim\limits_{x\to-1}\dfrac{(x+1)(x-2)}{(x+1)(x^2-x+1)}$

$$=\lim_{x\to-1}\frac{x-2}{x^2-x+1}=-1.$$

因式分解法是一种非常基础的方法，我们有必要熟记常见的分解公式（比如完全平方公式 $a^2+2ab+b^2=(a+b)^2$、平方差公式 $a^2-b^2=(a+b)(a-b)$、立方和差公式 $a^3\pm b^3=(a\pm b)(a^2\mp ab+b^2)$，甚至二项式定理 $\sum\limits_{k=0}^{n}C_n^k a^{n-k}b^k=(a+b)^n$ 等)，并能够熟练地运用到题目中去.

补充两个“高次幂和差”的因式分解的公式：

$a^n+b^n=(a+b)\left(a^{n-1}-a^{n-2}b+a^{n-3}b^2-\cdots+(-1)^k a^{n-1-k}b^k+\cdots+b^{n-1}\right)$，$n$ 是正奇数.

$a^n-b^n=(a-b)\left(a^{n-1}+a^{n-2}b+a^{n-3}b^2+\cdots+ab^{n-2}+b^{n-1}\right)$，$n$ 是正整数.

其中第一个公式，当 n 是偶数时，在有理数范围内不能因式分解. 第二个公式在“有理化”中有一种非常巧妙的应用，详见方法九.

八、化无穷大为无穷小

在一个极限式中，无穷大是无法用一个数字代替的，而无穷小却可以用数字 0 代替，所以有时需要设法把一些无穷大转换为无穷小来解决问题. 能用这种方法解决的问题，一般是求分式的极限.

8.1 有理分式函数

这一部分要说的是“多项式除以多项式”当 $x\to\infty$ 时的极限，一般形式是 $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{a_0x^n+a_1x^{n-1}+\cdots+a_n}{b_0x^m+b_1x^{m-1}+\cdots+b_m}$.

当 $x\to\infty$ 时，分子和分母都是无穷大，此时我们的最佳处理方案就是：分子

分母同时除以函数中出现的 x 的最高次幂（即 $x^{\max\{m,n\}}$），这样一来，除了 x 的最高次幂以外，其余各项都转化成了无穷小，可以用 0 来代替. 举个例子：

[例 22] $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3x^2+2x+1}{x^2-x}=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3+\dfrac{2}{x}+\dfrac{1}{x^2}}{1-\dfrac{1}{x}}=\dfrac{3+0+0}{1-0}=3$.

这种题型的一般结论就是（一定注意是 $x\to\infty$ 啊）：

$$\lim_{x\to\infty}\frac{a_0x^n+a_1x^{n-1}+\cdots+a_n}{b_0x^m+b_1x^{m-1}+\cdots+b_m}=\begin{cases}\dfrac{a_0}{b_0}, & \text{当}m=n\text{时},\\ 0, & \text{当}m>n\text{时},\\ \text{不存在}, & \text{当}m<n\text{时}.\end{cases}$$

此外，对于一些只带根号和多项式的式子，也可以用这种方法来求极限. 比如下例.

[例 23] 计算 $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\sqrt{x^2-x+2}}{2x+1}$.

这道例题里的最高次项应该是 x（因为分子上虽有 x^2，但带根号，即 $\dfrac{1}{2}$ 次方，所以仍然可以看作一次的）.

把分子分母同时除以 x，我们就可以得到原极限 $=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\sqrt{1-\dfrac{1}{x}+\dfrac{2}{x^2}}}{2+\dfrac{1}{x}}$，同样化出了很多无穷小，很明显答案应该是 $\dfrac{1}{2}$.

还有一点**应该留意**，求 $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{x}{\sqrt{x^2+1}-x}$，注意这里是负无穷. 如果我们对分子分母同时除以最高次项 x，可能得到 $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{x}{\sqrt{x^2+1}-x}=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{1}{\sqrt{1+\dfrac{1}{x^2}}-1}=+\infty$ 的错误结论.

这里犯了一个初中数学的错误. 当 x 趋于负无穷的时候，想要把 x 放进一个根式里面，是不是应该加个负号呢？所以正确答案应该是

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{x}{\sqrt{x^2+1}-x}=\lim_{x\to-\infty}\frac{1}{-\sqrt{1+\dfrac{1}{x^2}}-1}=-\frac{1}{2}.$$

8.2 其它分式函数

一些含有其它类型函数的分式，如果分子分母也都是无穷大，也可以考虑上下同除以某个东西（这个东西应该尽量是某些项的常数倍，或是比某些项高阶的无穷大[①]，因为这样才能让很多东西变成常数）．比如：

[例 24]计算 $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x+\ln x}{x\ln x}$.

这是 $\dfrac{\infty}{\infty}$ 型的．我们对分子分母同时除以 x，就变成 $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1+\dfrac{\ln x}{x}}{\ln x}$．分子上的 $\dfrac{\ln x}{x}$ 是趋于零的（这可以用前面的方法 4.6，也可以用后面的洛必达法则，还可以先证明当 x 充分大时有不等式 $0<\dfrac{\ln x}{x}<\dfrac{\sqrt{x}}{x}$ 成立，再用夹逼准则），分母上的 $\ln x$ 是趋于正无穷的，所以原极限就是“$\dfrac{1+0}{+\infty}$”，显然等于 0．当然，这道题更简单的做法是 $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x+\ln x}{x\ln x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{1}{\ln x}+\dfrac{1}{x}\right)=0+0=0$.

还有下面这个例子：

[例 25]求极限 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\sqrt{2^n}+\sqrt{3^n}}{\sqrt{2^n}-\sqrt{3^n}}$.

给分子分母同时除以 $\sqrt{3^n}$，原极限 $=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\sqrt{\dfrac{2^n}{3^n}}+1}{\sqrt{\dfrac{2^n}{3^n}}-1}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\sqrt{\left(\dfrac{2}{3}\right)^n}+1}{\sqrt{\left(\dfrac{2}{3}\right)^n}-1}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\sqrt{0}+1}{\sqrt{0}-1}$

$=-1$.

虽说大多数 $\dfrac{\infty}{\infty}$ 型的题目都可以用后面介绍的洛必达法则计算，但对于有些题目，洛必达法则难免会有些麻烦，有时候越用洛必达法则越麻烦，甚至有的题

---

①【比某些项高阶的无穷大】高阶无穷大的意思是：如果 $f(x)$ 和 $g(x)\neq 0$ 在 x 的某一变化过程中都趋于无穷大，且有 $\lim\dfrac{f(x)}{g(x)}=\infty$，那么就称在 x 的这一变化过程中 $f(x)$ 是比 $g(x)$ 高阶的无穷大量. 这个定义跟高阶无穷小类似，后面的方法二十七中还会详细介绍无穷大的比阶问题.

目不可能用洛必达法则得出答案. 所以不妨试着掌握这种“化∞为 0”的方法，有时可以大幅简化计算.

九、有理化

有理化这个名词我们最早在初中就接触过，当时是在化简二次根式时用到的. 这就提醒我们，在遇到根号的时候，可能会用到有理化的方法. 其实看名字也能看出来，要想“有理化”，它至少要先是“无理”的. 我们分三种情况去讨论这种方法.

9.1 分子有理化

既然要分子有理化，分子至少要带根号，所以当你看见分子是根号减去某个东西的时候，就应该考虑这种方法.

具体做法就是：分子分母同乘以那个根式的共轭根式②，然后展开，就会变成熟悉的题型. 比如：

[例 26] $$\lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{2x+1}-\sqrt{x+1}}{x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\left(\sqrt{2x+1}-\sqrt{x+1}\right)\left(\sqrt{2x+1}+\sqrt{x+1}\right)}{x\left(\sqrt{2x+1}+\sqrt{x+1}\right)}$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{x}{x\left(\sqrt{2x+1}+\sqrt{x+1}\right)}=\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{\sqrt{2x+1}+\sqrt{x+1}}=0.$$

有时候的题目并没有分子分母，只是单纯的根号减根号，或者根号减去一个不带根号的式子. 此刻你应该意识到，这可能也是在考你分子有理化. 哪来的分子呢？只要把原式看成$\frac{\text{原式}}{1}$，就有分子了. 然后剩下的套路跟前面一样. 再举个例子：

[例 27] $$\lim_{x\to+\infty}\sqrt{x}\left(\sqrt{x+1}-\sqrt{x}\right)=\lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{x}\left(\sqrt{x+1}-\sqrt{x}\right)\left(\sqrt{x+1}+\sqrt{x}\right)}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x}}$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{x}}+1}=\frac{1}{2}.$$

9.2 分母有理化

分母中带有根号和相减的形式，多半就是用分母有理化了. 也很简单，就不多说了，只举一个例子：

---

②【共轭根式】如果两个根式的乘积不含根号，就称这两种形式互为共轭根式，比如$\sqrt{1+x^2}-1$和$\sqrt{1+x^2}+1$就互为共轭根式. 一般来说，$\sqrt{A}+\sqrt{B}$与$\sqrt{A}-\sqrt{B}$就互为共轭根式（其中A,B为有理式）.

[例 28] $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x}{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x\left(\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}\right)}{\left(\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}\right)\left(\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}\right)}$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}}{2}=1.$$

9.3 分子分母同时有理化

如果分子分母都有根号，可以考虑用这个方法，即分子分母同乘以分子的共轭根式，再同乘以分母的共轭根式，展开以后绝大多数问题都将变得明朗. 比如：

[例 29] $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\sqrt{n+4}-\sqrt{n}}{\sqrt{n+5}-\sqrt{n}}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\left(\sqrt{n+4}-\sqrt{n}\right)\left(\sqrt{n+4}+\sqrt{n}\right)\left(\sqrt{n+5}+\sqrt{n}\right)}{\left(\sqrt{n+5}-\sqrt{n}\right)\left(\sqrt{n+5}+\sqrt{n}\right)\left(\sqrt{n+4}+\sqrt{n}\right)}$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{4\left(\sqrt{n+5}+\sqrt{n}\right)}{5\left(\sqrt{n+4}+\sqrt{n}\right)}=\lim_{n\to\infty}\frac{4\left(\sqrt{1+\frac{5}{n}}+1\right)}{5\left(\sqrt{1+\frac{4}{n}}+1\right)}=\frac{4\times 2}{5\times 2}=\frac{4}{5}.$$

总之，有理化是应对根号的绝佳方案，所以每次遇到根号，都请不要吝惜自己的时间，来尝试一下这种变形方法. 不过，虽说“有理化”的方法应对根号问题的能力很强，但有时候用等价无穷小代换等方法可能会更简单，比如当你遇到 $\sqrt{1+x}-1$ 这种形式，你在想到有理化之前，应该意识到它跟 $\dfrac{x}{2}$ 是 $x\to 0$ 时的一对等价无穷小. 所以当做题熟练以后，不能对方法不加选择，而是要有一个整体思路，怎么简单怎么来.

然后我想问一句，遇到高次根号，怎么有理化？比如，举一个夸张的例子，求 $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{\sqrt[6]{x+h}-\sqrt[6]{x}}{h}$. 大家都知道，这应该是 $\sqrt[6]{x}$ 的导数，但在这里我们不能用导数公式（否则会造成循环论证：在求出这个极限之前你怎么知道 $\sqrt[6]{x}$ 的导数是什么呢？），这里可以用有理化的方法. 当我们想对高次根号有理化的时候，可以考虑方法七的最后提到的第二个因式分解公式

$$a^n-b^n=(a-b)\left(a^{n-1}+a^{n-2}b+a^{n-3}b^2+\cdots+ab^{n-2}+b^{n-1}\right),$$

原极限里的 $\sqrt[6]{x+h}-\sqrt[6]{x}$ 就看成公式右边的 $a-b$，只要对原极限分子分母同时乘以 $a^5+a^4b+a^3b^2+a^2b^3+ab^4+b^5$，问题就得以解决. 下面展示过程（我举的例子根指数有点高了，可能过程比较夸张，但重点在于领悟精神，一般不会让你对六次根号有理化的）.

[例 30] $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{\sqrt[6]{x+h}-\sqrt[6]{x}}{h}$ （其中 $x>0$）

$$=\lim_{h\to 0}\frac{\left(\sqrt[6]{x+h}-\sqrt[6]{x}\right)\left[(x+h)^{\frac{5}{6}}+(x+h)^{\frac{4}{6}}x^{\frac{1}{6}}+(x+h)^{\frac{3}{6}}x^{\frac{2}{6}}+(x+h)^{\frac{2}{6}}x^{\frac{3}{6}}+(x+h)^{\frac{1}{6}}x^{\frac{4}{6}}+x^{\frac{5}{6}}\right]}{h\left[(x+h)^{\frac{5}{6}}+(x+h)^{\frac{4}{6}}x^{\frac{1}{6}}+(x+h)^{\frac{3}{6}}x^{\frac{2}{6}}+(x+h)^{\frac{2}{6}}x^{\frac{3}{6}}+(x+h)^{\frac{1}{6}}x^{\frac{4}{6}}+x^{\frac{5}{6}}\right]}$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{1}{(x+h)^{\frac{5}{6}}+(x+h)^{\frac{4}{6}}x^{\frac{1}{6}}+(x+h)^{\frac{3}{6}}x^{\frac{2}{6}}+(x+h)^{\frac{2}{6}}x^{\frac{3}{6}}+(x+h)^{\frac{1}{6}}x^{\frac{4}{6}}+x^{\frac{5}{6}}}=\frac{1}{6x^{\frac{5}{6}}}.$$

如果遇到高次根号想要有理化，就这么考虑.

还有一件事情，如果式子中出现了两个根指数不同的根式，如何解决？如下例.

[例 31] 求极限 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{\cos x}-\sqrt[3]{\cos x}}{\sin^2 x}$.

这里面既有二次根号，又有三次根号. 这种情况我们可以考虑令 $t=\sqrt[6]{\cos x}$（关于变量替换的知识见方法十四），这里的 6 就是 2 与 3 的最小公倍数（这种思想在求不定积分时也是非常重要的）. 当 $x\to 0$ 时，$t\to 1^-$. 此时就有 $t^6=\cos x$，$t^{12}=\cos^2 x=1-\sin^2 x$，则 $\sin^2 x=1-t^{12}$.

$$\text{原极限}=\lim_{t\to 1^-}\frac{\sqrt{t^6}-\sqrt[3]{t^6}}{1-t^{12}}=\lim_{t\to 1^-}\frac{t^3-t^2}{1-t^{12}}=\lim_{t\to 1^-}t^2\cdot\lim_{t\to 1^-}\frac{t-1}{1-t^{12}}=1\cdot\lim_{t\to 1^-}\frac{t-1}{1-t^{12}}$$

$$=\lim_{t\to 1^-}\frac{t-1}{(1-t)\left(1+t+t^2+\cdots+t^{11}\right)}\text{（因式分解）}$$

$$=-\lim_{t\to 1^-}\frac{1}{1+t+t^2+\cdots+t^{11}}=-\frac{1}{12}.$$

在方法 10.2 的例 36 中，我还举了一个比较综合的问题，那里需要我们先拆项分组，再有理化，读者不妨去看看.

十、先变形再求极限

有一些极限，乍看感觉不知所措、无从下手，但如果先不顾极限符号，而是先把被求极限的式子本身变一下形，或许就能柳暗花明.

10.1 先求和或求积再求极限

这种题型往往带有省略号，或带有求和的 $\sum$ 或求积的 $\prod$ 符号.

先说求和. 当你遇到这种题目，可以尝试这一串式子能不能求和，求和的方法就是高中学过的那些（比如裂项相消法、错位相减法、等差等比数列求和公式等等），能求和就最好了，求完和一般都很好求极限了. 如果不能求和，请考虑

夹逼准则（方法十七）、积分的定义（方法二十二）等方法.

我见过很多人（当然，并不是全部人）读大学以后，以前高中学过的数学方法已经忘干净了. 有很多知识，因为在大学阶段并不常用它，所以许多人已经全然忘记这些知识是什么. 话说回来，由于这些知识确实不是大学数学的重点，所以遗忘也不足为奇，但是有人可以通过简单复习就能再次掌握这些知识，有人可能需要从头学起. 其实，我们在数学的学习过程中，辛辛苦苦培养出的数学能力与数学素养不应该丧失，要常常锻炼自己的数学思维. 若对每个知识点都深深刻在骨子里，打下坚实的数学基础，并能产生很多自己的想法，那么我相信以后即使多年不碰数学，也很容易重新拾起来. 当然，不止是数学，许多事情都是这样. 常锻炼，常思考，没有什么做不好的.

扯远了，在此强调几个求和公式：

$$1^2+2^2+\cdots+n^2=\frac{1}{6}n\left(n+1\right)\left(2n+1\right);$$

$$1^3+2^3+\cdots+n^3=\left[\frac{n\left(n+1\right)}{2}\right]^2;$$

$$\sum_{k=1}^{n}k\left(k+1\right)=\frac{1}{3}n\left(n+1\right)\left(n+2\right).$$

人们还总结出了一些常用的各种形式的裂项公式：

$$\frac{1}{n\left(n+1\right)}=\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1};$$

$$\frac{1}{n\left(n+1\right)\left(n+2\right)}=\frac{1}{2}\left[\frac{1}{n\left(n+1\right)}-\frac{1}{\left(n+1\right)\left(n+2\right)}\right];$$

$$\frac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}=\sqrt{n+1}-\sqrt{n};$$

$$\frac{\left(a-1\right)a^n}{\left(a^n+b\right)\left(a^{n+1}+b\right)}=\frac{1}{a^n+b}-\frac{1}{a^{n+1}+b};$$

$$\log_a\frac{a_{n+1}}{a_n}=\log_a a_{n+1}-\log_a a_n;$$

$$\left(1+\tan a_{n+1}\tan a_n\right)\tan\left(a_{n+1}-a_n\right)=\tan a_{n+1}-\tan a_n;$$

$$n\cdot n!=\left(n+1\right)!-n!;$$

$$\mathrm{C}_n^{m-1}=\mathrm{C}_{n+1}^m-\mathrm{C}_n^m;$$

……

除此之外，还有很多有用的求和公式，希望读者在学习的过程中注意总结.

这里不举例了哈，没有新的技巧. 你可以拿$\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{1}{n^2}+\dfrac{2}{n^2}+\dfrac{3}{n^2}+\cdots+\dfrac{n}{n^2}\right)$练练手. 答案见后面的方法 22.1.

同理，对于连乘式也可以先求积再求极限. 由于无论是中学还是大学，对于求积公式介绍都不多，所以一般的考试也并不会出一些“连变形公式都没听说过”的题目，当然，数学竞赛算另一码事了. 对于求积，我能想到的比较经典的例子就是：

[例 32]求极限$\lim\limits_{n\to\infty}\cos\dfrac{x}{2}\cos\dfrac{x}{2^2}\cdots\cos\dfrac{x}{2^n}$（其中$x\neq 0$）.

对于这道题，我们首先可能感到的是大脑一片空白，无从下手. 我们不妨先看这么一道高一数学题：求$\cos 20^\circ\cos 40^\circ\cos 80^\circ$的值. 这是我高一时的一次作业中的题，至今记忆犹新. 当时这道题出现在了“倍角公式”这一节后面. 应该这么做：$\cos 20^\circ\cos 40^\circ\cos 80^\circ=\dfrac{\boxed{2\sin 20^\circ\cos 20^\circ}\cos 40^\circ\cos 80^\circ}{2\sin 20^\circ}$（给原式乘以$2\sin 20^\circ$再除以$2\sin 20^\circ$）$=\dfrac{\sin 40^\circ\cos 40^\circ\cos 80^\circ}{2\sin 20^\circ}$（二倍角公式）$=\dfrac{\boxed{2\sin 40^\circ\cos 40^\circ}\cos 80^\circ}{2^2\sin 20^\circ}$（分子分母同时乘以 2）$=\dfrac{\sin 80^\circ\cos 80^\circ}{2^2\sin 20^\circ}$（二倍角公式）$=\dfrac{\boxed{2\sin 80^\circ\cos 80^\circ}}{2^3\sin 20^\circ}$（分子分母同时乘以 2）$=\dfrac{\sin 160^\circ}{8\sin 20^\circ}$（二倍角公式）$=\dfrac{\sin\left(180^\circ-20^\circ\right)}{8\sin 20^\circ}=\dfrac{\sin 20^\circ}{8\sin 20^\circ}$（诱导公式）$=\dfrac{1}{8}$. 我当时做完这道题时，不禁感叹题目的精妙之处，竟然只需要先乘以$2\sin 20^\circ$再除以$2\sin 20^\circ$，就可以不断地出现二倍角公式的形式，不断地化简下去，产生“连锁反应”. 每使用一次二倍角公式，角度就会放大一倍！问题回到我们这个极限题$\lim\limits_{n\to\infty}\cos\dfrac{x}{2}\cos\dfrac{x}{2^2}\cdots\cos\dfrac{x}{2^n}$，这也是余弦的连乘积，是不是也可以借鉴上述方法呢？答案是肯定的. 由于每使用一次二倍角公式，角度就会放大一倍，所以我们仿照上述过程，可以先乘以一个最小的角度的正弦的两倍，即$2\sin\dfrac{x}{2^n}$，再除以$2\sin\dfrac{x}{2^n}$，这样就会不断地出现二倍角公式的形式：

$$\lim_{n\to\infty}\cos\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2^2}\cdots\cos\frac{x}{2^n}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{\boxed{2}\cos\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2^2}\cdots\boxed{\cos\frac{x}{2^n}\sin\frac{x}{2^n}}}{2\sin\frac{x}{2^n}}$$ （给原式乘以 $2\sin\frac{x}{2^n}$ 再除以 $2\sin\frac{x}{2^n}$）

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{\cos\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2^2}\cdots\cos\frac{x}{2^{n-1}}\sin\frac{x}{2^{n-1}}}{2\sin\frac{x}{2^n}}$$ （二倍角公式）

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{\boxed{2}\cos\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2^2}\cdots\boxed{\cos\frac{x}{2^{n-1}}\sin\frac{x}{2^{n-1}}}}{2^2\sin\frac{x}{2^n}}$$ （分子分母同时乘以 2）

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{\cos\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2^2}\cdots\cos\frac{x}{2^{n-2}}\sin\frac{x}{2^{n-2}}}{2^2\sin\frac{x}{2^n}}$$ （二倍角公式）

$=\cdots$（一直重复这个过程）

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{\cos\frac{x}{2}\sin\frac{x}{2}}{2^{n-1}\sin\frac{x}{2^n}}$$ （二倍角公式）

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{\boxed{2\cos\frac{x}{2}\sin\frac{x}{2}}}{2^n\sin\frac{x}{2^n}}$$ （分子分母同时乘以 2）

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{\sin x}{2^n\sin\frac{x}{2^n}}$$ （二倍角公式），

题目做到这里，应该注意，这里的 n 是变量，x 是常数．当 $n\to\infty$ 时，$\sin\frac{x}{2^n}$ 和 $\frac{x}{2^n}$ 是一对等价无穷小（参见方法十五），所以我们继续有：原极限 $=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\sin x}{2^n\cdot\frac{x}{2^n}}$（等价无穷小量替换）$=\frac{\sin x}{x}$．

与此类似，还有另外一道经典的题目也是利用了“连锁反应”，不过它用的不是二倍角公式，而是平方差公式．请读者大胆思考如何才能引起“连锁反应”呢？

[例 33] $\lim\limits_{n\to\infty}(1+x)(1+x^2)(1+x^4)\cdots\left(1+x^{2^n}\right)$，其中 $|x|<1$.

$$\begin{aligned}
&\lim_{n\to\infty}(1+x)(1+x^2)(1+x^4)\cdots\left(1+x^{2^n}\right)\\
=&\lim_{n\to\infty}\frac{\boxed{(1-x)}(1+x)(1+x^2)(1+x^4)\cdots\left(1+x^{2^n}\right)}{\boxed{1-x}}\\
=&\lim_{n\to\infty}\frac{(1-x^2)(1+x^2)(1+x^4)\cdots\left(1+x^{2^n}\right)}{1-x}\\
=&\lim_{n\to\infty}\frac{(1-x^4)(1+x^4)\cdots\left(1+x^{2^n}\right)}{1-x}\\
=&\cdots\\
=&\lim_{n\to\infty}\frac{\left(1-x^{2^n}\right)\left(1+x^{2^n}\right)}{1-x}\\
=&\lim_{n\to\infty}\frac{1-x^{2^{n+1}}}{1-x}
\end{aligned}$$

当 $n\to\infty$ 时，2^{n+1} 是无穷大量，而题设又给出条件 $|x|<1$. 因此 $x^{2^{n+1}}\to 0$. 原极限 $=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1-0}{1-x}=\dfrac{1}{1-x}$.

10.2 对式子简单地恒等变形

有时的题目看似很陌生，但本质上其实是我们熟知的极限，这就需要我们合理地处理一下原式（恒等变形），让它变成我们熟悉的样子. 在这儿举三个例子吧，其中用到了重要极限和等价无穷小量替换（后面会讲），例 36 些许复杂：

[例 34] $\lim\limits_{x\to\infty}x\sin\dfrac{1}{x}=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\sin\frac{1}{x}}{\frac{1}{x}}=1$.

[例 35] $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln\left(\sin^2x+\mathrm{e}^x\right)-x}{\ln\left(x^2+\mathrm{e}^{2x}\right)-2x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln\left(\sin^2x+\mathrm{e}^x\right)-\ln\mathrm{e}^x}{\ln\left(x^2+\mathrm{e}^{2x}\right)-\ln\mathrm{e}^{2x}}$（对数的性质）

$=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln\left(\dfrac{\sin^2x}{\mathrm{e}^x}+1\right)}{\ln\left(\dfrac{x^2}{\mathrm{e}^{2x}}+1\right)}$（对数的差等于商的对数）

$=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\dfrac{\sin^2x}{\mathrm{e}^x}}{\dfrac{x^2}{\mathrm{e}^{2x}}}$（等价无穷小量替换，注意这里 $\dfrac{\sin^2x}{\mathrm{e}^x}$ 和 $\dfrac{x^2}{\mathrm{e}^{2x}}$ 均是 $x\to 0$ 时的无穷小）

$=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\mathrm{e}^{2x}\sin^2x}{\mathrm{e}^xx^2}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\mathrm{e}^{2x}x^2}{\mathrm{e}^xx^2}$（等价无穷小量替换）$=1$.

[例 36] $\lim\limits_{x\to+\infty} x^{\frac{3}{2}}\left(\sqrt{x+2}-2\sqrt{x+1}+\sqrt{x}\right)$

$$=\lim_{x\to+\infty} x^{\frac{3}{2}}\left[\left(\sqrt{x+2}-\sqrt{x+1}\right)-\left(\sqrt{x+1}-\sqrt{x}\right)\right]\text{（拆项分组）}$$

$$=\lim_{x\to+\infty} x^{\frac{3}{2}}\left(\frac{1}{\sqrt{x+2}+\sqrt{x+1}}-\frac{1}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x}}\right)\text{（分子有理化）}$$

$$=\lim_{x\to+\infty} x^{\frac{3}{2}}\times\frac{\sqrt{x}-\sqrt{x+2}}{\left(\sqrt{x+2}+\sqrt{x+1}\right)\left(\sqrt{x+1}+\sqrt{x}\right)}\quad\text{（通分）}$$

$$=\lim_{x\to+\infty} x^{\frac{3}{2}}\times\frac{-2}{\left(\sqrt{x+2}+\sqrt{x+1}\right)\left(\sqrt{x+1}+\sqrt{x}\right)\left(\sqrt{x+2}+\sqrt{x}\right)}\text{（分子有理化）}$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{-2\left(\sqrt{x}\right)^3}{\left(\sqrt{x+2}+\sqrt{x+1}\right)\left(\sqrt{x+1}+\sqrt{x}\right)\left(\sqrt{x+2}+\sqrt{x}\right)}\text{（对 }x^{\frac{3}{2}}\text{ 稍加变形）}$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{-2}{\frac{\sqrt{x+2}+\sqrt{x+1}}{\sqrt{x}}\times\frac{\sqrt{x+1}+\sqrt{x}}{\sqrt{x}}\times\frac{\sqrt{x+2}+\sqrt{x}}{\sqrt{x}}}\text{（把三个 }\sqrt{x}\text{ 都除下来）}$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{-2}{\left(\sqrt{1+\frac{2}{x}}+\sqrt{1+\frac{1}{x}}\right)\left(\sqrt{1+\frac{1}{x}}+1\right)\left(\sqrt{1+\frac{2}{x}}+1\right)}\text{（对分母稍加变形）}$$

$$=\frac{-2}{(1+1)(1+1)(1+1)}=-\frac{1}{4}.$$

当然，变形的方法远不止这些，还是需要我们对具体问题作具体分析，应该学会灵活变通.

十一、利用对数恒等式

$N=a^{\log_a N}$，这个式子，叫做对数恒等式. 我们在这里一般用的是自然对数（即以 e 为底的对数），所以一般写成 $N=\mathrm{e}^{\ln N}$. 什么时候要用它呢？当底数和指数上都出现了变量（幂指型），如果不能直接用 $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x=\mathrm{e}$ 这个重要极限，就可以考虑用对数恒等式了，好处就是能把指数上的变量提到对数之前，变成容易处理的乘法运算. 同样举一个例子：

[例 37] $\lim\limits_{x\to0}\left(1-\sin x^2\right)^{\frac{1}{x\ln(1+2x)}}=\lim\limits_{x\to0}\mathrm{e}^{\ln\left(1-\sin x^2\right)^{\frac{1}{x\ln(1+2x)}}}=\lim\limits_{x\to0}\mathrm{e}^{\frac{1}{x\ln(1+2x)}\ln\left(1-\sin x^2\right)}$

$$=\mathrm{e}^{\lim\limits_{x\to0}\frac{\ln\left(1-\sin x^2\right)}{x\ln(1+2x)}}\xlongequal{\text{等价无穷小代换}}\mathrm{e}^{\lim\limits_{x\to0}\frac{-\sin x^2}{x\cdot(2x)}}\xlongequal{\text{等价无穷小代换}}\mathrm{e}^{\lim\limits_{x\to0}\frac{-x^2}{2x^2}}=\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}}.$$

上面这个例题中，取了对数以后出现了$\ln\left(1-\sin^2 x\right)$，正好能背诵出对应的等价无穷小. 但并不是每一次都如此容易看出. 举个例子，$\lim\limits_{x\to0}\left(\cos x\right)^{\frac{1}{x^2}}$，它用了对数恒等式以后变成$\mathrm{e}^{\lim\limits_{x\to0}\frac{\ln\cos x}{x^2}}$，这时，只要给$\cos x$前面加 1，后面再减 1（这是常见的操作），就能看出等价无穷小了：原极限$=\mathrm{e}^{\lim\limits_{x\to0}\frac{\ln\cos x}{x^2}}=\mathrm{e}^{\lim\limits_{x\to0}\frac{\ln(1+\cos x-1)}{x^2}}=\mathrm{e}^{\lim\limits_{x\to0}\frac{\cos x-1}{x^2}}$

$=\mathrm{e}^{\lim\limits_{x\to0}\frac{-\frac{1}{2}x^2}{x^2}}=\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}}$.

这种方法有时跟洛必达法则也可以完美结合. 具体请看方法十六.

除了以上所举的例题以外，还有几种情形也适合使用对数恒等式.

有时在函数或数列中，其中一部分出现了幂指结构，也可以对这一部分应用对数恒等式，再结合一些别的方法解决. 具体如下例.

[例 38] 计算极限$\lim\limits_{x\to0}\frac{1}{x^3}\left[\left(\frac{2+\cos x}{3}\right)^x-1\right]$.

$$\text{原极限}=\lim_{x\to0}\frac{1}{x^3}\left(\mathrm{e}^{x\ln\frac{2+\cos x}{3}}-1\right)=\lim_{x\to0}\frac{x\ln\frac{2+\cos x}{3}}{x^3}=\lim_{x\to0}\frac{x\ln\left(1+\frac{\cos x-1}{3}\right)}{x^3}$$

$$=\lim_{x\to0}\frac{x\cdot\frac{\cos x-1}{3}}{x^3}=\lim_{x\to0}\frac{x\left(\cos x-1\right)}{3x^3}=\lim_{x\to0}\frac{-\frac{1}{2}x^2\cdot x}{3x^3}=-\frac{1}{6}.$$

对数可以将乘除转换成加减，也可以将幂与方根转化为系数. 当遇到一些因式的乘、除、乘方、开方等运算时，尤其是这样的乘积结构与常数 1 进行减法运算时（便于下一步进行等价无穷小替换），可以考虑对数恒等式. 请看下例.

[例 39] 计算极限$\lim\limits_{x\to0}\frac{1-\cos x\cdot\sqrt{\cos 2x}\cdot\sqrt[3]{\cos 3x}\cdot\cdots\cdot\sqrt[n]{\cos nx}}{x^2}$，其中$n$为正整数.

$$\text{原极限}=\lim_{x\to0}\frac{1-\mathrm{e}^{\ln\left(\cos x\cdot\sqrt{\cos 2x}\cdot\sqrt[3]{\cos 3x}\cdot\cdots\cdot\sqrt[n]{\cos nx}\right)}}{x^2}$$

$$=\lim_{x\to0}\frac{1-\mathrm{e}^{\ln\cos x+\frac{1}{2}\ln\cos 2x+\frac{1}{3}\ln\cos 3x+\cdots+\frac{1}{n}\ln\cos nx}}{x^2}$$

$$=-\lim_{x\to 0}\frac{\ln\cos x+\frac{1}{2}\ln\cos 2x+\frac{1}{3}\ln\cos 3x+\cdots+\frac{1}{n}\ln\cos nx}{x^2}\text{（等价无穷小替换）}$$

$$=-\lim_{x\to 0}\frac{-\tan x-\tan 2x-\tan 3x-\cdots-\tan nx}{2x}\text{（洛必达法则，请看方法十六）}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\tan x}{2x}+\lim_{x\to 0}\frac{\tan 2x}{2x}+\lim_{x\to 0}\frac{\tan 3x}{2x}+\cdots+\lim_{x\to 0}\frac{\tan nx}{2x}$$

$$=\sum_{k=1}^{n}\lim_{x\to 0}\frac{\tan kx}{2x}=\sum_{k=1}^{n}\frac{k}{2}=\frac{1}{2}\cdot\frac{(1+n)n}{2}=\frac{1}{4}n(n+1).$$

这道题还可以先添项、拆分极限，再用等价无穷小.

$$\text{原极限}=\lim_{x\to 0}\frac{1\boxed{-\cos x+\cos x}-\cos x\cdot\sqrt{\cos 2x}\cdot\sqrt[3]{\cos 3x}\cdot\cdots\cdot\sqrt[n]{\cos nx}}{x^2}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2}+\lim_{x\to 0}\frac{\cos x\left(1-\sqrt{\cos 2x}\cdot\sqrt[3]{\cos 3x}\cdot\cdots\cdot\sqrt[n]{\cos nx}\right)}{x^2}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2}+\lim_{x\to 0}\frac{1-\sqrt{\cos 2x}\cdot\sqrt[3]{\cos 3x}\cdot\cdots\cdot\sqrt[n]{\cos nx}}{x^2}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2}+\lim_{x\to 0}\frac{1\boxed{-\sqrt{\cos 2x}+\sqrt{\cos 2x}}-\sqrt{\cos 2x}\cdot\sqrt[3]{\cos 3x}\cdot\cdots\cdot\sqrt[n]{\cos nx}}{x^2}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2}+\lim_{x\to 0}\frac{1-\sqrt{\cos 2x}}{x^2}+\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{\cos 2x}\left(1-\sqrt[3]{\cos 3x}\cdot\cdots\cdot\sqrt[n]{\cos nx}\right)}{x^2}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2}+\lim_{x\to 0}\frac{1-\sqrt{\cos 2x}}{x^2}+\lim_{x\to 0}\frac{1-\sqrt[3]{\cos 3x}\cdot\cdots\cdot\sqrt[n]{\cos nx}}{x^2}$$

$$=\cdots$$

$$=\sum_{k=1}^{n}\lim_{x\to 0}\frac{1-\sqrt[k]{\cos kx}}{x^2}$$

$$=\sum_{k=1}^{n}\lim_{x\to 0}\frac{-\left[\sqrt[k]{1+(\cos kx-1)}-1\right]}{x^2}$$

$$=\sum_{k=1}^{n}\lim_{x\to 0}\frac{-\frac{1}{k}(\cos kx-1)}{x^2}=\sum_{k=1}^{n}\lim_{x\to 0}\frac{-\frac{1}{k}\cdot\left(-\frac{1}{2}k^2x^2\right)}{x^2}=\sum_{k=1}^{n}\frac{k}{2}=\frac{1}{4}n(n+1).$$

十二、利用三角恒等变换公式

三角恒等变换公式是我们高中就学过的内容，包含了倍角公式、半角公式、和角公式、差角公式、积化和差公式、和差化积公式等内容（不过有些公式可能

高中略去没讲）．在此全部列在下面，随时查阅：

倒数关系：
$$\sin x\cdot\csc x=1,$$
$$\cos x\cdot\sec x=1,$$
$$\tan x\cdot\cot x=1.$$

商的关系：
$$\tan x=\frac{\sin x}{\cos x}=\frac{\sec x}{\csc x},$$
$$\cot x=\frac{\cos x}{\sin x}=\frac{\csc x}{\sec x}.$$

平方关系：
$$\sin^2 x+\cos^2 x=1,$$
$$1+\tan^2 x=\sec^2 x,$$
$$1+\cot^2 x=\csc^2 x.$$

诱导公式（为了记忆方便，表中加了方框的表示带正号，其余不加方框的表示带负号，这样只需记住方框的位置即可记住这张表；对于余切、正割、余割的诱导公式，读者只需分别把它们当作正切、余弦、正弦的倒数，即可得到正确的结论. 当然，也有很多人是通过口诀“奇变偶不变，符号看象限”来记忆的，这也可以.)：

三角函数名 / 角 度	sin	cos	tan
$\pi+\alpha$	$-\sin\alpha$	$-\cos\alpha$	$\boxed{\tan\alpha}$
$\pi-\alpha$	$\boxed{\sin\alpha}$	$-\cos\alpha$	$-\tan\alpha$
$\frac{\pi}{2}+\alpha$	$\boxed{\cos\alpha}$	$-\sin\alpha$	$-\cot\alpha$
$\frac{\pi}{2}-\alpha$	$\boxed{\cos\alpha}$	$\boxed{\sin\alpha}$	$\boxed{\cot\alpha}$
$\frac{3\pi}{2}+\alpha$	$-\cos\alpha$	$\boxed{\sin\alpha}$	$-\cot\alpha$
$\frac{3\pi}{2}-\alpha$	$-\cos\alpha$	$-\sin\alpha$	$\boxed{\cot\alpha}$

二倍角公式：
$$\sin 2x=2\sin x\cos x,$$
$$\cos 2x=\cos^2 x-\sin^2 x=2\cos^2 x-1=1-2\sin^2 x,$$
$$\tan 2x=\frac{2\tan x}{1-\tan^2 x}.$$

由二倍角公式变形得到的公式们：

（1）降幂扩角公式：$$\sin x\cos x=\frac{1}{2}\sin 2x,$$

$$\sin^2 x=\frac{1-\cos 2x}{2},$$

$$\cos^2 x=\frac{1+\cos 2x}{2}.$$

（2）升幂缩角公式：$$1\pm\sin 2x=\left(\sin x\pm\cos x\right)^2,$$

$$1+\cos 2x=2\cos^2 x,$$

$$1-\cos 2x=2\sin^2 x.$$

半角公式：

$$\left.\begin{array}{l}\sin\dfrac{x}{2}=\pm\sqrt{\dfrac{1-\cos x}{2}},\\ \cos\dfrac{x}{2}=\pm\sqrt{\dfrac{1+\cos x}{2}},\\ \tan\dfrac{x}{2}=\pm\sqrt{\dfrac{1-\cos x}{1+\cos x}}.\end{array}\right\}\text{根号前的正负号由}\frac{x}{2}\text{所在的象限决定.}$$

（正切半角公式的有理形式：$\tan\dfrac{x}{2}=\dfrac{\sin x}{1+\cos x}=\dfrac{1-\cos x}{\sin x}$. ）

三倍角公式：$$\sin 3x=3\sin x-4\sin^3 x,$$

$$\cos 3x=4\cos^3 x-3\cos x,$$

$$\tan 3x=\frac{\tan^3 x-3\tan x}{3\tan^2 x-1}.$$

和角公式与差角公式：$$\sin\left(x\pm y\right)=\sin x\cos y\pm\cos x\sin y,$$

$$\cos\left(x\pm y\right)=\cos x\cos y\mp\sin x\sin y,$$

$$\tan\left(x\pm y\right)=\frac{\tan x\pm\tan y}{1\mp\tan x\tan y}.$$

积化和差公式：$$\sin x\sin y=-\frac{1}{2}\left[\cos\left(x+y\right)-\cos\left(x-y\right)\right],$$

$$\sin x\cos y=\frac{1}{2}\left[\sin\left(x+y\right)+\sin\left(x-y\right)\right],$$

$$\cos x\sin y=\frac{1}{2}\left[\sin\left(x+y\right)-\sin\left(x-y\right)\right],$$

$$\cos x\cos y=\frac{1}{2}\left[\cos\left(x+y\right)+\cos\left(x-y\right)\right].$$

和差化积公式： $\sin x+\sin y=2\sin\dfrac{x+y}{2}\cos\dfrac{x-y}{2},$

$$\sin x-\sin y=2\cos\frac{x+y}{2}\sin\frac{x-y}{2},$$

$$\cos x+\cos y=2\cos\frac{x+y}{2}\cos\frac{x-y}{2},$$

$$\cos x-\cos y=-2\sin\frac{x+y}{2}\sin\frac{x-y}{2}.$$

辅助角公式（求极限时不是很常用）：

$a\sin x\pm b\cos x=\sqrt{a^2+b^2}\sin\left(x\pm\varphi\right)$，其中 $\tan\varphi=\dfrac{b}{a}$，a,b 同为正.

万能公式（这三条公式在求不定积分时用得相对多一些）：

$\sin x=\dfrac{2t}{1+t^2}$，$\cos x=\dfrac{1-t^2}{1+t^2}$，$\tan x=\dfrac{2t}{1-t^2}$，其中 $t=\tan\dfrac{x}{2}$.

在掌握了这些公式以后，要能熟练地应用到极限的计算当中. 在含有三角函数的极限当中，有时你不会做仅仅是因为一点小变化，只要你恰当地用公式给它变回去，问题会变得相当简单.

[例 40] $\displaystyle\lim_{x\to0}\frac{\tan x-\sin x}{x^3}=\lim_{x\to0}\frac{\tan x\left(1-\cos x\right)}{x^3}\overset{\text{二倍角公式}}{=\!=\!=}\lim_{x\to0}\frac{\sin x\cdot2\sin^2\frac{x}{2}}{x^3\cos x}$

$$=\lim_{x\to0}\frac{2\sin x\cdot\sin^2\frac{x}{2}}{4x\cdot\cos x\cdot\left(\frac{x}{2}\right)^2}=\lim_{x\to0}\frac{2}{4}\cdot\frac{\sin x}{x}\cdot\frac{1}{\cos x}\cdot\left(\frac{\sin\frac{x}{2}}{\frac{x}{2}}\right)^2=\frac{1}{2}.$$

注意，这道题如果用“等价无穷小量代换”的方法，会更简单一些. 具体过程请读者学习该部分以后自行思考.

[例 41] $\lim\limits_{x\to-\frac{\pi}{2}}\frac{(2x+\pi)(1-\tan^2 x)}{\tan x}=\lim\limits_{x\to-\frac{\pi}{2}}\frac{4x+2\pi}{\frac{2\tan x}{1-\tan^2 x}}\xlongequal{\text{二倍角公式}}\lim\limits_{x\to-\frac{\pi}{2}}\frac{4x+2\pi}{\tan 2x}$

$$\xlongequal{\text{诱导公式}}\lim_{x\to-\frac{\pi}{2}}\frac{4x+2\pi}{\tan(2x+\pi)}=\lim_{x\to-\frac{\pi}{2}}\frac{2(2x+\pi)}{\tan(2x+\pi)}\xlongequal{\text{等价无穷小代换}}\lim_{x\to-\frac{\pi}{2}}\frac{2(2x+\pi)}{2x+\pi}=2.$$

除了三角函数以外，关于反三角函数的一些恒等式也是很有用的，我们同样地将它们罗列于下（对于反正割函数和反余割函数的相关结论，由于实际用得很少，故从略）.

余角关系：
$$\arcsin x+\arccos x=\frac{\pi}{2},$$

$$\arctan x+\operatorname{arccot} x=\frac{\pi}{2}.$$

负角的反三角函数：
$$\arcsin(-x)=-\arcsin x,$$

$$\arccos(-x)=\pi-\arccos x,$$

$$\arctan(-x)=-\arctan x,$$

$$\operatorname{arccot}(-x)=\pi-\operatorname{arccot} x.$$

倒数的反三角函数：
$$\arcsin\frac{1}{x}=\operatorname{arccsc} x,$$

$$\arccos\frac{1}{x}=\operatorname{arcsec} x,$$

$$\arctan\frac{1}{x}=\begin{cases}\operatorname{arccot} x=\frac{\pi}{2}-\arctan x, & x>0,\\ \operatorname{arccot} x-\pi=-\frac{\pi}{2}-\arctan x, & x<0,\end{cases}$$

$$\operatorname{arccot}\frac{1}{x}=\begin{cases}\frac{\pi}{2}-\operatorname{arccot} x=\arctan x, & x>0,\\ \frac{3\pi}{2}-\operatorname{arccot} x=\pi+\arctan x, & x<0.\end{cases}$$

反正切函数的和角公式与差角公式：

$$\arctan x+\arctan y=\begin{cases}\arctan\dfrac{x+y}{1-xy}, & xy<1,\\ \pi+\arctan\dfrac{x+y}{1-xy}, & x>0,xy>1,\\ -\pi+\arctan\dfrac{x+y}{1-xy}, & x<0,xy>1,\end{cases}$$

$$\arctan x-\arctan y=\begin{cases}\arctan\dfrac{x-y}{1+xy}, & xy>-1,\\ \pi+\arctan\dfrac{x-y}{1+xy}, & x>0,xy<-1,\\ -\pi+\arctan\dfrac{x-y}{1+xy}, & x<0,xy<-1.\end{cases}$$

事实上，关于三角函数与反三角函数，还有很多奇妙的恒等式，可惜这里不可能悉数列出. 如果以后遇到，读者可以逐渐积累.

十三、利用两个重要极限

两个重要极限，是人们总结出的非常有用的结论. 许多题目都可以转化到它们身上. 这两个重要极限的证明，见方法 26.2 的例 89 与例 92（对于第二个重要极限，一般教材上是用二项式定理和单调有界准则去证明的，这种方法随处可见，此书中就不再讲述了. 在方法 26.2 中我们用了一个更有力的工具——均值不等式——取代了二项式定理，详见该部分）.

13.1 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x}=1$

这个重要极限的框架是：$\lim\limits_{x\to\triangle}\dfrac{\sin\square}{\square}=1$. 只要两个$\square$里的形式完全一致，并且$x$的趋向方式能使得两个$\square$都趋于零，那这个极限就等于 1. 在课本上，这个极限是用夹逼准则证明的，这也是最佳的证明方法. 我们最好不要用洛必达法则，因为在使用洛必达法则时，会遇到$\sin x$的求导问题，我们现在当然知道$\sin x$的导数是$\cos x$，但是事实上$(\sin x)'=\cos x$正是利用这第一个重要极限证明的. 所以一旦用洛必达法则证明了第一个重要极限，会产生循环论证的问题.

当我们遇到有关三角函数的极限时，要善于往这个重要极限身上考虑，毕竟这个重要极限就是关于三角函数的嘛. 因为这个重要极限中只有正弦，所以当遇到切函数（正切余切）和割函数（正割余割）的时候，要尝试一下能不能通过“切割化弦”，即利用“$\tan x=\dfrac{\sin x}{\cos x},\cot x=\dfrac{\cos x}{\sin x},\sec x=\dfrac{1}{\cos x},\csc x=\dfrac{1}{\sin x}$”来解决问题. 而对于余弦，则可以考虑用二倍角公式的变形$\cos x=1-2\sin^2\dfrac{x}{2}$来换走它.

当然，我们也不能不管三七二十一地一换了之，有些本不必换走就能做出来的，如果强行换走，会南辕北辙. 所以你的变形一定要有目的地进行，不能乱变一通.

[例 42] $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1}{x}\left(\dfrac{1}{\sin x}-\dfrac{1}{\tan x}\right)=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1}{x}\left(\dfrac{1}{\sin x}-\dfrac{\cos x}{\sin x}\right)=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos x}{x\sin x}$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{2\sin^2\frac{x}{2}}{2x\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}}=\lim_{x\to 0}\frac{\sin\frac{x}{2}}{x\cos\frac{x}{2}}=\lim_{x\to 0}\frac{\sin\frac{x}{2}}{\frac{x}{2}}\cdot\frac{1}{2\cos\frac{x}{2}}=\frac{1}{2}.$$

还有一个值得注意的例题，极限 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin\left(x\sin\frac{1}{x}\right)}{x\sin\frac{1}{x}}$ 是不是等于 1 呢？它看起来确实非常符合上述框架，但它也确实不等于 1. 本书的一开始就已指出函数在 $x\to x_0$ 时的极限的 $\varepsilon-\delta$ 定义，第一句话是“设函数 $f(x)$ 在点 x_0 的某一去心邻域内有定义”，而对于那些在去心邻域内没有定义的函数，是不能讨论极限的. 这个极限 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin\left(x\sin\frac{1}{x}\right)}{x\sin\frac{1}{x}}$ 的分母上有一个 $\sin\dfrac{1}{x}$，在 $x\to 0$ 时能够非常频繁地取到零值，而且 x 越趋于 0，$\sin\dfrac{1}{x}$ 越频繁地等于 0，$\dfrac{\sin\left(x\sin\frac{1}{x}\right)}{x\sin\frac{1}{x}}$ 越频繁地无意义，在 $x=0$ 的任何一个去心邻域内都无法保证一直有意义. 所以从根本上说，这个所谓“极限”是不符合函数极限的定义的，更不用提它的计算方法了. 因此 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin\left(x\sin\frac{1}{x}\right)}{x\sin\frac{1}{x}}$ 不存在.

13.2 $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^x=\mathrm{e}$ 或者 $\lim\limits_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}}=\mathrm{e}$

这个重要极限的框架是 $\lim\limits_{x\to\triangle}\left(1+\dfrac{1}{\square}\right)^{\square}=\mathrm{e}$. 只要两个 $\square$ 里的形式完全一致，并且 x 的趋向方式能使得两个 $\square$ 都趋于无穷，那这个极限就等于 e.

当我们看到指数上含有 x 的时候，要善于往这个重要极限身上想. 不过有时

候这个指数是“隐形”的，打眼儿一看没有指数，比如$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1+x)}{x}$. 这的确没有指数，但是我们通过对数的运算性质，就能变出指数：$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1+x)}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1}{x}\ln(1+x)$ $=\lim\limits_{x\to 0}\ln(1+x)^{\frac{1}{x}}=\ln\lim\limits_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}}=\ln \mathrm{e}=1$. 有时候对数真的挺神奇的~（这道题可不可以用等价无穷小呢？对这道题而言，最好不要，因为既然让你做这道题，应该出题者的意思是让你证明它俩是等价无穷小. 你都不知道这个极限是 1，怎么知道它俩是等价无穷小呢？）

还有的时候，括号里面并不是$1+\dfrac{1}{\square}$的形式，这就需要我们凑出来. 怎么凑呢？首先，如果没分离常数[③]，就先分离常数. 分离完常数以后，把分离剩下的那个分式取个倒数放在分母上，应该就是一个$1+\dfrac{1}{\square}$的形式（一般你分出的常数都是 1）. 比如$\dfrac{x-2}{x+3}=\dfrac{x+3-5}{x+3}=1-\dfrac{5}{x+3}=1+\dfrac{1}{-\frac{x+3}{5}}$.

接下来处理指数. 首先要把指数变成跟刚才分母上一样的形式，然后再看看与原本的指数相比有什么变化，多加了再减掉，多乘了再除掉. 比如：

[例 43] $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x-2}{x+3}\right)^x$，通过刚才的分离常数，我们变形成了$\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{-\frac{x+3}{5}}\right)^x$. 所以我们先暂时写成$\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{-\frac{x+3}{5}}\right)^{-\frac{x+3}{5}}$，再跟$x$作比较，发现这个指数比$x$多加了 3，多除以了$-5$. 所以应该倒回去就应该是

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{-\frac{x+3}{5}}\right)^x=\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{-\frac{x+3}{5}}\right)^{-\frac{x+3}{5}\times(-5)-3}.$$

接下来就很容易得到答案e^{-5}. 当然除此之外我们还有一种方法来解决这道题：

③【分离常数】由一个分子分母都有变量的分式，变成“常数+分式”的形式，而且你新得到的分式中只有分母有变量，这个处理过程叫分离常数. 比如$\dfrac{2x+1}{2x-1}=\dfrac{2x-1+2}{2x-1}=1+\dfrac{2}{2x-1}$.

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x-2}{x+3}\right)^{x}=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{1-\frac{2}{x}}{1+\frac{3}{x}}\right)^{x}=\lim_{x\to\infty}\frac{\left(1+\frac{1}{-\frac{x}{2}}\right)^{-\frac{x}{2}\times(-2)}}{\left(1+\frac{1}{\frac{x}{3}}\right)^{\frac{x}{3}\times 3}}=\mathrm{e}^{-2-3}=\mathrm{e}^{-5}.$$

$\boxed{一般地，我们有\lim_{x\to\infty}\left(\frac{mx+b}{mx+a}\right)^{cx+d}=\mathrm{e}^{\frac{(b-a)c}{m}}.}$ 证明方法就是把上面的过程走一遍.

有了这个，我们就瞬间知道 $\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x+100}{x+10}\right)^{50x-1000}=\mathrm{e}^{4500}$. 填空直接填，再也不怕啦~

有一件神奇的事情是，通过结论能看出，指数上的 d 对这个极限值并没有影响.

还有一个很多人容易犯错的问题，见下例.

[例 44] 求极限 $\lim_{x\to+\infty}\frac{\mathrm{e}^{x}}{\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x^2}}$.

这道题决不能这样做：$\cancel{\lim_{x\to+\infty}\frac{\mathrm{e}^{x}}{\left[\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x}\right]^{x}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\mathrm{e}^{x}}{\mathrm{e}^{x}}=1}$. 这是完全错误的！ 因为当 $x\to+\infty$ 时，所有的 x 都是同时变化的，因此绝对不能先将一部分极限求出，再考虑剩下的部分.

正确的方法是使用对数恒等式、变量替换法与等价无穷小，具体知识见方法十一、方法十四和方法十五.

应该这样做，原极限 $=\lim_{x\to+\infty}\frac{\mathrm{e}^{x}}{\mathrm{e}^{x^2\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)}}=\lim_{x\to+\infty}\mathrm{e}^{x-x^2\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)}=\mathrm{e}^{\lim\limits_{x\to+\infty}\left[x-x^2\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)\right]}$（这时令 $t=\frac{1}{x}$）$=\mathrm{e}^{\lim\limits_{t\to0^+}\frac{t-\ln(1+t)}{t^2}}=\mathrm{e}^{\lim\limits_{t\to0^+}\frac{\frac{1}{2}t^2}{t^2}}=\mathrm{e}^{\frac{1}{2}}$.

以上两个重要极限，是解决很多极限问题的钥匙，有太多题目都可以转化成这两种题型，一定要灵活运用.

十四、变量替换法

这种方法其实就是以前常说的“换元法”，把一个整体看成一个新字母，让整个式子变得简洁明了. 需要注意的是，我们换了新字母后，一定要根据旧字母的趋向方式，来分析出新字母的趋向方式（就是分析出新字母趋向于谁）. 举两个例子：

[例 45] $\lim_{x\to0}\frac{\arcsin x}{x}\xlongequal[\text{当}x\to0\text{时},t\to0]{\text{令}t=\arcsin x,\text{则}x=\sin t}\lim_{t\to0}\frac{t}{\sin t}=1$.

[例 46] $\lim\limits_{x\to1}(x-1)\tan\dfrac{\pi x}{2}\xlongequal[\text{当}x\to1\text{时，}t\to0]{\text{令}t=x-1\text{，则}x=t+1}\lim\limits_{t\to0}t\tan\left(\dfrac{\pi t}{2}+\dfrac{\pi}{2}\right)=-\lim\limits_{t\to0}t\cot\dfrac{\pi t}{2}$

$$=-\frac{2}{\pi}\lim_{t\to0}\frac{\frac{\pi t}{2}\cos\frac{\pi t}{2}}{\sin\frac{\pi t}{2}}=-\frac{2}{\pi}.$$

在分析新变量的趋向方式时，你可能会忽视一个隐蔽的问题：当 $x\to0$ 时，若令 $t=1-\cos x$，则 t 趋向于谁？ $t\to0$ 吗？不是的，答案是 $t\to0^+$. 这里需要注意，$1-\cos x$ 天生非负，它只能从 0 的右边趋向于 0. 有人说，$t\to0$ 和 $t\to0^+$ 有什么区别吗？它们有天壤之别！前者是双侧极限，后者是单侧极限. 如果前者存在，后者必存在且等于前者；如果后者存在，前者却不一定存在. 在一些涉及到概念分析的题目中，需要格外注意这些细节.

在这里，我还想交代一个比较隐蔽的细节：如果在进行变量替换时，替换后的函数不连续，那么你换元时要保证一件事情——要保证新元趋向的数值不能被新元取到. 什么意思呢？意思就是说，有一个极限 $\lim\limits_{x\to x_0}f\left(g(x)\right)$，如果我们想令 $t=g(x)$ 使式子变得简洁一些，首先分析出新字母 t 的趋向值 t_0，然后紧接着就得考察一下换元后的函数 $f(t)$ 点在 t_0 处是否连续. 若连续，可以替换；若不连续，分析出新字母 t 的趋向值 t_0 后，要保证 t 在 $x\to x_0$ 的过程中取不到 t_0，否则不能换元.

比如函数 $f(x)=\begin{cases}0, & x\sin\dfrac{1}{x}=0,\\ 1, & x\sin\dfrac{1}{x}\neq0.\end{cases}$ 我们想求极限 $\lim\limits_{x\to0}f(x)$. 这个函数在 $x=0$ 处是没有定义的，但这并不妨碍我们求 $x\to0$ 时的极限. 方法 13.1 中已经分析过，当 $x\to0$ 时，$x\sin\dfrac{1}{x}$ 是拥有无限多个零点的，也就是说，当 $x\to0$ 时，$x\sin\dfrac{1}{x}$ 在零与非零之间不停改变，导致 $f(x)$ 的取值在 0 与 1 之间不停改变，致使极限不存在. 这是正解.

下面再看错误的方法. 如果令 $t=x\sin\dfrac{1}{x}$，那么当 $x\to0$ 时也有 $t\to0$，不过注意这里 $t=x\sin\dfrac{1}{x}$ 在 $x\to0$ 的过程中是可以取到 0 的. 应该发现，换元之后的函数 $f(x)=\begin{cases}0, & t=0,\\ 1, & t\neq0\end{cases}$ 在 $t=0$ 处不连续，此时若不注意“$t=x\sin\dfrac{1}{x}$ 在 $x\to0$ 的过程

中可以取到 0”这一事实，强行换元，将会导致“$\lim\limits_{x\to 0} f(x)=\lim\limits_{t\to 0} f(x)\xlongequal{\text{用第二段解析式}}1$”的错误.

变量代换法在求极限的时候能帮助你看清一个极限的本质特征，从而让你豁然开朗.

十五、等价无穷小量代换

我们先来介绍一下关于无穷小及其阶数比较的相关知识.

说一个函数 $f(x)$ 在 $x\to x_0$ 时是无穷小量（简称“无穷小”），指的是 $f(x)$ 满足 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=0$. 当然，数列也是同样的道理. 换句话说，“无穷小”指的是“趋于零的变量”. 我们有时把“无穷小”记作“0”，但读者要时刻注意，无穷小不是 0. 但反过来说，0 却是一种无穷小. 这是因为，常数的极限是它本身，因此常数 0 的极限就是 0 本身，0 是可以作为无穷小的唯一常数.

两个无穷小量有时是可以比较阶数高低的. 设函数 $f(x)$ 与函数 $g(x)$ 均为当 $x\to x_0$ 时的无穷小量，即 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=0$ 且 $\lim\limits_{x\to x_0} g(x)=0$，并且对于被比阶的无穷小量 $g(x)$ 有这样的要求，即存在 x_0 的某去心邻域 $\mathring{U}(x_0)$，使得当 $x\in\mathring{U}(x_0)$ 时，$g(x)$ 恒不为零. 对此，我们可以对这两个无穷小量 $f(x)$ 与 $g(x)$ 阶数的高低给出如下定义：

1. 若极限 $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)}{g(x)}=0$，则称当 $x\to x_0$ 时 $f(x)$ 是**比 $g(x)$ 高阶的无穷小量**，简称 $f(x)$ 是 $g(x)$ 的**高阶无穷小**，记作 $f(x)=o(g(x))$.

2. 若极限 $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)}{g(x)}=\infty$，则称当 $x\to x_0$ 时 $f(x)$ 是**比 $g(x)$ 低阶的无穷小量**，简称 $f(x)$ 是 $g(x)$ 的**低阶无穷小**，记作 $f(x)=\omega(g(x))$.

3. 若存在正数 K 与 L，使得在 x_0 的某个去心邻域 $\mathring{U}(x_0)$ 内恒有

$$K\le\left|\frac{f(x)}{g(x)}\right|\le L \qquad (*)$$

成立，则称当 $x\to x_0$ 时 $f(x)$ 是**与 $g(x)$ 同阶的无穷小量**，简称 $f(x)$ 是 $g(x)$ 的**同**

阶无穷小，记作 $f(x)=\Theta(g(x))$. 事实上，这又包含了以下两种情况：

①若极限 $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)}{g(x)}=c\neq 0$，则函数 $f(x)$ 与 $g(x)$ 一定满足条件（*），从而当 $x\to x_0$ 时 $f(x)$ 一定是与 $g(x)$ 同阶的无穷小量，特别地，当 $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)}{g(x)}=c=1$ 时，称当 $x\to x_0$ 时 $f(x)$ 是**与 $g(x)$ 等价的无穷小量**，简称 $f(x)$ 是 $g(x)$ 的**等价无穷小**，记作 $f(x)\sim g(x)$，此时也一定有 $g(x)\sim f(x)$. $f(x)\sim g(x)$ 的充分必要条件是，$f(x)=g(x)+o(g(x))$.

②若极限 $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)}{g(x)}$ 不存在，但函数 $f(x)$ 与 $g(x)$ 也有可能满足条件（*），则这时仍称当 $x\to x_0$ 时 $f(x)$ 是与 $g(x)$ 同阶的无穷小量.

注意，这里我们对同阶无穷小的定义是在数学专业中更加认可的定义. 在某些教科书中，可能只给出了上述情况①中的定义，即“若 $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)}{g(x)}=c\neq 0$，则 $f(x)$ 是 $g(x)$ 的同阶无穷小”，我们不妨称满足这种定义的一对无穷小为“狭义的同阶无穷小”. 在这里，我们又给出了情况②中的定义，实质上我们已经对“狭义的同阶无穷小”进行了适当的广义化. 以下要推广的 k 阶无穷小与此同理.

我们还可对同阶无穷小作如下推广：若存在正数 K 与 L，使得在 x_0 的某个去心邻域 $\mathring{U}(x_0)$ 内恒有

$$K\leq\left|\frac{f(x)}{\left[g(x)\right]^k}\right|\leq L \qquad (**)$$

成立，则称当 $x\to x_0$ 时 $f(x)$ 是**关于 $g(x)$ 的 k 阶无穷小量**，简称 $f(x)$ 是 $g(x)$ 的 **k 阶无穷小**，显然，同阶无穷小只是 k 阶无穷小当 $k=1$ 时的一种特例. 这同样包含了以下两种情况：

①若极限 $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)}{\left[g(x)\right]^k}=c\neq 0$，则函数 $f(x)$ 与 $g(x)$ 一定满足条件（**），从而当 $x\to x_0$ 时 $f(x)$ 一定是关于 $g(x)$ 的 k 阶无穷小量；

②若极限$\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)}{\left[g(x)\right]^k}$不存在，但函数$f(x)$与$g(x)$也有可能满足条件（**），则这时仍称当$x\to x_0$时$f(x)$是关于$g(x)$的$k$阶无穷小量.

4. 若当$x\to x_0$时，函数$f(x)$既不是比$g(x)$高阶的无穷小量，也不是比$g(x)$低阶的无穷小量，又不是与$g(x)$同阶的无穷小量，则称当$x\to x_0$时$f(x)$无法与$g(x)$比阶.

除此之外，我们还可以定义一种符号表示：如果函数$\dfrac{f(x)}{g(x)}$在x_0的某个去心邻域$\mathring{U}(x_0)$内有界，也就是说，存在正数L，使得在x_0的某个去心邻域$\mathring{U}(x_0)$内恒有不等式$\left|\dfrac{f(x)}{g(x)}\right|\le L$成立，则我们可以将其记作$f(x)=O\left(g(x)\right)$（$x\to x_0$）. 当$f(x)=O\left(g(x)\right)$（$x\to x_0$）时，$f(x)$可能是比$g(x)$高阶的无穷小量，可能是与$g(x)$同阶的无穷小量，还可能无法与$g(x)$比阶.

这里还有两个问题必须解释一下：

1. 在以上的讨论与分析中，我们假定了自变量x的趋向是$x\to x_0$. 事实上，如果把自变量x的趋向改成$x\to x_0^+$，$x\to x_0^-$，$x\to+\infty$，$x\to-\infty$，$x\to\infty$，只需要把原定义中的“邻域”概念修改一下即可——分别修改成x_0的去心右邻域$(x_0,x_0+\delta)$、x_0的去心左邻域$(x_0-\delta,x_0)$、$+\infty$邻域$(X,+\infty)$、$-\infty$邻域$(-\infty,-X)$以及∞邻域$(-\infty,-X)\cup(X,+\infty)$，其中$\delta$和$X$都是某个正数.

2. 高阶无穷小、低阶无穷小与同阶无穷小的记号，即$o\left(g(x)\right)$，$\omega\left(g(x)\right)$与$\Theta\left(g(x)\right)$，以及符号$O\left(g(x)\right)$，均由德国数学家巴赫曼和朗道发明、推广. 其中，符号o与O比较常见（它们本来是希腊字母 omicron，后来发展成了英文字母 O），ω与Θ却实属罕见. 最值得强调的一点是，在这里，记号$f(x)=o\left(g(x)\right)$并不表示$f(x)$“等于”$o\left(g(x)\right)$，而是表示$f(x)$“属于”“比$g(x)$高阶的无穷小量构成的函数集合”. 也就是说，这里的等于号理解成“$\in$”会更准确，而$o\left(g(x)\right)$应

当理解为一个由一类函数组成的集合. 符号O,ω,Θ与之同理.

以上内容的理论性比较强，下面我们来看应用.

在这里，我们主要应用的是等价无穷小，即，如果两个无穷小量相比之后，极限恰好为 1，则可称这两个无穷小量互为等价无穷小量，简称“等价无穷小”.

这是一种超级厉害的方法，如果运用地巧妙，能把很多像 sin，tan，ln 之类的函数瞬间消灭，让整个式子变得无比简洁，心理压力也瞬间减轻很多. 这种方法的理论依据就是“等价无穷小量代换定理”. 定理的内容，说白了，就是一个分式$\frac{0}{0}$型的极限，如果把分子分母都变成各自的等价无穷小，极限值不变.

那么都有哪些等价无穷小呢？我们先将一些相对常见的等价无穷小罗列如下：

当$x\to 0$时，首先有一些最基本的：

$$x\sim\sin x\sim\tan x\sim\arcsin x\sim\arctan x\sim\ln(1+x)\sim e^x-1.$$

$$\frac{1}{2}x^2\sim 1-\cos x\sim\sec x-1.$$

$$\log_a(1+x)\sim\frac{x}{\ln a}，\ a>0,a\neq 1.$$

$$a^x-1\sim x\ln a，\ a>0.$$

$$x^2-\sin^2 x\sim\frac{1}{3}x^4.$$

$$(1+x)^a-1\sim ax\text{（}a\text{为任意非零实数④）}.$$

$$ax^m+bx^n\sim\text{两项中次数较小的那一项（}m,n>0，m\neq n，ab\neq 0\text{）}.$$

$$e-(1+x)^{\frac{1}{x}}\sim\frac{e}{2}x；\qquad 1-\frac{\sin x}{x}\sim\frac{1}{6}x^2.$$

然后还有两组关于双曲函数和反双曲函数的：

$$x\sim\sinh x\sim\tanh x\sim\operatorname{arsinh}x\sim\operatorname{artanh}x.$$

$$\frac{x^2}{2}\sim\cosh x-1.$$

这里的双曲函数是指双曲正弦$\sinh x=\frac{e^x-e^{-x}}{2}$，双曲余弦$\cosh x=\frac{e^x+e^{-x}}{2}$与

④【a为任意实数】尤其关注一下a是分数，即$(1+x)^a$是根式的情况.

双曲正切 $\tanh x=\dfrac{\sinh x}{\cosh x}$；反双曲函数是指反双曲正弦 $\operatorname{arsinh} x=\ln\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)$，反双曲余弦 $\operatorname{arcosh} x=\ln\left(x+\sqrt{x^2-1}\right)$ 与反双曲正切 $\operatorname{artanh} x=\dfrac{1}{2}\ln\dfrac{1+x}{1-x}$.

然后还有一些关于变限积分的：

$$\frac{x^2}{2}=\int_0^x t\mathrm{d}t\sim\int_0^x \sin t\mathrm{d}t\sim\int_0^x \tan t\mathrm{d}t\sim\int_0^x \arcsin t\mathrm{d}t\sim\int_0^x \arctan t\mathrm{d}t\sim\int_0^x\left(\mathrm{e}^t-1\right)\mathrm{d}t\sim\int_0^x \ln(1+t)\mathrm{d}t.$$

当然，这里的 x 在形式上不一定必须是 x，只要形式一致并且都趋于零就好了. 比如当 $x\to\infty$ 时，有 $\dfrac{2}{x}\sim\sin\dfrac{2}{x}$. 再比如 $x\to 0$ 时，有 $\sin(\sin x)\sim\sin x\sim x$. 又比如 $x\to 0$ 时，$\displaystyle\int_0^{\sin x}\sin t\mathrm{d}t\sim\frac{\sin^2 x}{2}\sim\frac{x^2}{2}$.

此外，还经常会见到一对等价无穷小，当 $x\to 1$ 时，有 $\ln x\sim x-1$.

作为应用，首先举个简单例子：

[例 47] 求极限 $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt[3]{1+x^2}-1}{\cos x-1}$.

解：当 $x\to 0$ 时，有 $\sqrt[3]{1+x^2}-1\sim\dfrac{1}{3}x^2$，$\cos x-1\sim-\dfrac{1}{2}x^2$，

所以原极限 $=\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{3}x^2}{-\frac{1}{2}x^2}=-\frac{2}{3}$.

再举一个需要先变形再进行替换的例子.

[例 48] 计算极限 $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\mathrm{e}^{\tan x}-\mathrm{e}^{\sin x}}{x^2\ln(1+x)}$.

对于分子上这种指数相减的结构，常用的手段是把其中一个提出来.

$$\text{原极限}=\lim_{x\to 0}\frac{\mathrm{e}^{\sin x}\left(\mathrm{e}^{\tan x-\sin x}-1\right)}{x^2\ln(1+x)}=\lim_{x\to 0}\mathrm{e}^{\sin x}\cdot\lim_{x\to 0}\frac{\tan x-\sin x}{x^2\ln(1+x)}$$

$$=1\cdot\lim_{x\to 0}\frac{\tan x(1-\cos x)}{x^2\cdot x}=\lim_{x\to 0}\frac{x\cdot\frac{1}{2}x^2}{x^3}=\frac{1}{2}.$$

请读者在阅读了后面的“利用中值定理”这一方法后，再回过头来思考一下，例 48 如何根据拉格朗日中值定理求解.

不过，真的只有无穷小相除才能进行替换吗？我们分五种类型讨论.

第一种，相除型，就是上面那道例题. 这是最传统的类型，当然可以替换，不过一定要检查好是不是无穷小（只有“无穷小”才有“等价无穷小”可言），代换时要有整体思想，注意形式一致.

第二种，相乘型，这也是可以替换的. 比如：

[例 49]求极限$\lim\limits_{x\to\infty} x\sin\dfrac{x}{x^2+3}$.

当$x\to\infty$时，$\dfrac{x}{x^2+3}$是趋于0的，所以此时$\sin\dfrac{x}{x^2+3}\sim\dfrac{x}{x^2+3}$，所以

$$\lim_{x\to\infty} x\sin\frac{x}{x^2+3}=\lim_{x\to\infty}\frac{x^2}{x^2+3}=1.$$

第三种，相减型. 这似乎有些异想天开，老师一直强调，无穷小相加减时是绝对不能用等价无穷小代换的！但挑战权威的精神是我们一直应该倡导的.

不过老师说的也不是全错，在无穷小的加减中，我们确实不能不加辨别地进行替换，防止出现“$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x-\sin x}{x^3}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x-x}{x^3}=0$”这种错误. 而实际上，除了这种“被减数和减数是等价无穷小量”的情况，其余情况的相减，都是可以进行等价无穷小代换的. 比如$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2x-\sin x}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2x-x}{x}=1$. 分子的$2x$和$\sin x$不是等价无穷小，所以可以进行替换. 再比如说$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 2x-\tan x}{x-\ln(1+2x)}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2x-x}{x-2x}=-1$. 这都不是巧合，都是可以证明的，在此只介绍结论，暂不作证明了. 需要指出，由于这个方法不是课本上讲的正统方法，很多人不承认，所以大题不要用，选择填空可以用.

第四种，相加型，同样可以替换，只要把“加”改成“减去负的”就可以转化为上面的“相减型”了. 比如$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x+\tan x}{e^x-1}$，即$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x-(-\tan x)}{e^x-1}$. 由于$x$和$-\tan x$不是等价无穷小，所以可以换. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x+\tan x}{e^x-1}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2x}{x}=2$. 依然不要在大题中使用，这些方法都太偏了.

必须指出，以上的相减型和相加型，更加严谨的做法是根据后面的方法二十——泰勒公式展开法，详见该部分. 如果你用的是泰勒公式，那就可以把过程正大光明地写在试卷大题上了.

第五种，幂指型. 我们学的幂指型极限，一共有三种：0^0，∞^0，1^∞. 它们在进行等价无穷小代换的时候，遵循以下规律（α,β是无穷小量，$\tilde{\alpha},\tilde{\beta}$分别是它们的等价无穷小，$u$是无穷大量）：

①$0^0$型：$\lim\alpha^{\beta}=\lim\tilde{\alpha}^{\tilde{\beta}}$.

②∞^0型：$\lim u^{\alpha}=\lim u^{\tilde{\alpha}}$.

③$1^{\infty}$型：$\lim(1+\alpha)^{\frac{1}{\beta}}=\lim(1+\tilde{\alpha})^{\frac{1}{\beta}}$，或者$\lim(1+\alpha)^{u}=\lim(1+\tilde{\alpha})^{u}$.

[例 50]求$\lim\limits_{x\to 0}\left[1+\ln(1+x)\right]^{\frac{2}{x}}$.

根据上述替换规则，$\lim\limits_{x\to 0}\left[1+\ln(1+x)\right]^{\frac{2}{x}}=\lim\limits_{x\to 0}(1+x)^{\frac{2}{x}}=\lim\limits_{x\to 0}\left[(1+x)^{\frac{1}{x}}\right]^{2}=\mathrm{e}^{2}$.

以上介绍了能用等价无穷小代换的五种类型，注意大题中最好只用前两种.

我们继续试着探索，如果在减法中用等价无穷小代换，如果双方不是等价无穷小，我们可以换，比如$2x-\sin x\sim 2x-x=x$，我们也就相当于找到了$2x-\sin x$的一个等价无穷小量. 但如果双方确实是等价无穷小怎么办？换句话说，遇到了$x-\sin x$这种式子，我们真的就无计可施了吗？而实际上容易验证，$x-\sin x$和$\frac{x^3}{6}$在$x\to 0$时是一对等价无穷小，问题在于，你怎么一下子知道$x-\sin x$可以整体换成$\frac{x^3}{6}$呢？

试想，x为什么会消掉呢？因为相减的两个无穷小是等价无穷小，所以它们被代换成了相同的式子，相减才会等于 0. 我们注意到，跟x互为等价无穷小的函数挺多的，其中常见的，加上x本身一共有七个. 任意拿出两个相减，都无法用减法的等价无穷小代换，而实际上，各自都存在一个等价无穷小. 我们先把结论罗列出来，然后再说为什么、怎么记.

被减数 \ 减数	x	$\sin x$	$\tan x$	$\arcsin x$	$\arctan x$	$\ln(1+x)$	e^x-1
x	0	$-\frac{x^3}{6}$	$\frac{x^3}{3}$	$\frac{x^3}{6}$	$-\frac{x^3}{3}$	$-\frac{x^2}{2}$	$\frac{x^2}{2}$
$\sin x$	$\frac{x^3}{6}$	0	$\frac{x^3}{2}$	$\frac{x^3}{3}$	$-\frac{x^3}{6}$	$-\frac{x^2}{2}$	$\frac{x^2}{2}$
$\tan x$	$-\frac{x^3}{3}$	$-\frac{x^3}{2}$	0	$-\frac{x^3}{6}$	$-\frac{2x^3}{3}$	$-\frac{x^2}{2}$	$\frac{x^2}{2}$
$\arcsin x$	$-\frac{x^3}{6}$	$-\frac{x^3}{3}$	$\frac{x^3}{6}$	0	$-\frac{x^3}{2}$	$-\frac{x^2}{2}$	$\frac{x^2}{2}$
$\arctan x$	$\frac{x^3}{3}$	$\frac{x^3}{6}$	$\frac{2x^3}{3}$	$\frac{x^3}{2}$	0	$-\frac{x^2}{2}$	$\frac{x^2}{2}$
$\ln(1+x)$	$\frac{x^2}{2}$	$\frac{x^2}{2}$	$\frac{x^2}{2}$	$\frac{x^2}{2}$	$\frac{x^2}{2}$	0	x^2
e^x-1	$-\frac{x^2}{2}$	$-\frac{x^2}{2}$	$-\frac{x^2}{2}$	$-\frac{x^2}{2}$	$-\frac{x^2}{2}$	$-x^2$	0

这张表应该可以看懂. 比如我们要找$\tan x-\ln(1+x)$在$x\to 0$时的等价无穷

小量，只要找到被减数 $\tan x$ 那一列，减数 $\ln\left(1+x\right)$ 那一行，对应的 $\frac{x^2}{2}$ 就是要找的等价无穷小. 但是这张表是很难记住的. 我们不直接记，我们找规律.

我们首先要弄清等价无穷小的本质，在阅读下面的文字之前，建议先阅读后面的方法二十，因为接下来的解释要涉及到泰勒公式. 我们见到的等价无穷小（以 $x\to 0$ 为例），一般都是一个任意函数向着“几倍的 x 的几次方”这种形式转化的，实际上这种“几倍的 x 的几次方”的形式，就是那个任意函数在 $x=0$ 处的泰勒展开式的第一项. 比如 $\sin x = x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-\cdots$，第一项是 x，所以 $\sin x\sim x$；再比如 $1-\cos x=\frac{x^2}{2}-\frac{x^4}{24}+\frac{x^6}{720}-\cdots$，第一项是 $\frac{x^2}{2}$，所以 $1-\cos x\sim\frac{x^2}{2}$. 为什么呢？因为等价无穷小有一条性质，是 $f\left(x\right)\sim g\left(x\right)\Leftrightarrow f\left(x\right)=g\left(x\right)+o\left(g\left(x\right)\right)$，于是根据

$$1-\cos x=\frac{x^2}{2}-\frac{x^4}{24}+\frac{x^6}{720}-\cdots=\frac{x^2}{2}+o\left(x^2\right),$$

我们就可以知道 $1-\cos x$ 和 $\frac{x^2}{2}$ 是一对等价无穷小.

那么像 $x-\sin x$，$\tan x-\sin x$ 这种的，本质上跟前面的有什么不同呢？我们暂时先抛开这两个函数，来看一个更好理解的函数，$\tan 2x-\sin x$，我们想要求它的等价无穷小，也就是要把它在 $x=0$ 处泰勒展开. 因为 $\tan 2x=2x+\frac{8}{3}x^3+\cdots$，$\sin x=x-\frac{x^3}{6}+\cdots$，所以

$$\tan 2x-\sin x=2x+\frac{8}{3}x^3-x+\frac{x^3}{6}+\cdots=x+\frac{17}{6}x^3+\cdots,$$

其泰勒展开式的首项是 x，因此 $\tan 2x-\sin x\sim x$. 那么 $\tan x-\sin x$ 是怎么个情况呢？实际上 $\tan x$ 和 $\sin x$ 的首项都是 x，所以相减以后就没有 x 这一项了，这仅仅代表着 $\tan x-\sin x$ 的展开式的首项是更高次的！所以我们可以把 $\tan x$ 和 $\sin x$ 再多展开几项相减试试，这样就可以得到 $\tan x-\sin x$ 真正的首项了. 事实上，$\tan x-\sin x$ 的展开式的首项是三次的，所以就用 $\tan x$ 的三阶展开，减去 $\sin x$ 的三阶展开，结果就会和上面的表格一致. 你可以练习一下.

关于泰勒展开式的更加深入的内容，可以参见后面的方法二十.

我们还有一个关于等价无穷小的实用小结论：一个非零的无穷小，如果乘以或除以一个“趋于 1 的变量”，得到的新函数与原来的无穷小是等价的.

我们还有两个关于积分上限函数的等价无穷小的结论：

①若 $f'(x)$ 连续，$f(0)=0$，$f'(0)\neq 0$，则当 $x\to 0$ 时，$\int_0^x f(t)\mathrm{d}t\sim\frac{f'(0)}{2}x^2$；

②若 $f'(x)$ 连续，$f(0)=0$，$f'(0)\neq 0$，且 $\varphi'(x)$ 连续，$\varphi(x_0)=0$，则当 $x\to x_0$ 时，$\int_0^{\varphi(x)} f(t)\mathrm{d}t\sim\frac{f'(0)}{2}\varphi^2(x)$.

平常求极限的时候，一定要对 $1-\cos x$ 啊，$(1+x)^a-1$ 啊，$\tan x-\sin x$ 啊这些东西敏感，它们在暗示你，很可能需要你运用等价无穷小量代换的方法！甚至，有些题目可能会让我们根据等价无穷小的传递性，导出一些不经常使用的替换，比如 $\sin x\sim \mathrm{e}^x-1$. 极限 $\lim\limits_{t\to 0}\frac{f(x+\mathrm{e}^t-1)-f(x)}{\sin t}$ 是否等于 $f'(x)$ 呢？这就需要灵活运用等价无穷小了，包括正用、逆用、传递着用.（答案：该极限等于 $f'(x)$.）

十六、洛必达法则

洛必达法则是解决 $\frac{0}{0}$ 型或 $\frac{\infty}{\infty}$ 型极限的一种相当重要的方法. 很多原本不会做的题目，通过洛必达法则，能够很轻松地算出来. 下面介绍一下法则的使用条件和使用方法.

16.1 $\frac{0}{0}$ 型

先介绍使用条件，有三个：

①被求极限的式子必须是分式 $\frac{f(x)}{F(x)}$，而且分子分母当 $x\to a$（或 $x\to\infty$）时必须都趋于 0；

②在点 a 的某去心邻域内（或当 $|x|$ 充分大[⑤]时），分子分母的导数都存在，当然分母的导数不能为零；

③ $\lim\limits_{\substack{x\to a\\(\text{或}x\to\infty)}}\frac{f'(x)}{F'(x)}$ 必须存在或为无穷大；

当 $\frac{f(x)}{F(x)}$ 满足以上三个条件时，就有 $\lim\limits_{\substack{x\to a\\(\text{或}x\to\infty)}}\frac{f(x)}{F(x)}=\lim\limits_{\substack{x\to a\\(\text{或}x\to\infty)}}\frac{f'(x)}{F'(x)}$. 简单地说，

⑤【充分大】这里的充分大的内涵是：存在一个正数 X，使得当 $|x|>X$ 时，分子分母的导数都存在. 这里 x 的范围称为“∞ 邻域”.

如果一个极限满足上述三个条件，就可以对分子分母分别求导再求极限. 比如：

$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\ln(1+x)}{x}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\frac{1}{1+x}}{1}=1$（$\dfrac{0}{0}$型、在 0 的某去心邻域内导数存在、求完导后的极限存在，三个条件都满足）.

如果使用了一次洛必达法则后，还是$\dfrac{0}{0}$型，依然满足三个条件，那我们就可以继续用洛必达法则，即继续求导. 再不行再求，再不行再求，直到求出来为止. 比如：

[例 51] $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{x-\sin x}{x^3}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{1-\cos x}{3x^2}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin x}{6x}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\cos x}{6}=\dfrac{1}{6}$.

但要特别说明的是，每次使用洛必达法则，都一定要检验三个条件是否都满足，如果有任何一个不满足而你却用了洛必达法则，那你完了.

16.2 $\dfrac{\infty}{\infty}$型

这跟$\dfrac{0}{0}$型差不多，还是那三种条件：

①被求极限的式子必须是分式$\dfrac{f(x)}{F(x)}$，而且分子分母当$x\to a$（或$x\to\infty$）时必须都趋于无穷（正负无穷无所谓）；

②在点a的某去心邻域内（或当$|x|$充分大时），分子分母的导数都存在，当然分母的导数还是不能为零；

③$\lim\limits_{\substack{x\to a\\(\text{或}x\to\infty)}}\dfrac{f'(x)}{F'(x)}$必须存在或为无穷大；

当$\dfrac{f(x)}{F(x)}$满足以上三个条件时，就有$\lim\limits_{\substack{x\to a\\(\text{或}x\to\infty)}}\dfrac{f(x)}{F(x)}=\lim\limits_{\substack{x\to a\\(\text{或}x\to\infty)}}\dfrac{f'(x)}{F'(x)}$.还是分别求导再求极限. 比如$\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\ln x}{x}=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\frac{1}{x}}{1}=0$（三个条件也都是满足的）.

还跟前面一样，可以连续多次运用洛必达法则，但每次都一定要检查条件！如果漏掉条件，会出现这种情况：$\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x+\sin x}{x}=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1+\cos x}{1}=1+\lim\limits_{x\to\infty}\cos x=\text{不存在}$.

实际上，求完导以后，$1+\cos x$在$x\to\infty$时的极限是既非∞又不存在的，所以不能用洛必达法则. 应该这样做：$\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x+\sin x}{x}=\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{\sin x}{x}\right)=1+\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\sin x}{x}=1$（有

界比无穷趋于 0）.

再举一个因忽视洛必达法则使用条件而产生错误的经典例子. “证明”命题：~~若 $f(x)$ 可导，则其导函数 $f'(x)$ 一定连续.~~ 这当然是个错误的结论！但请看下列“证明”过程.

因为 $f(x)$ 可导，故由导数定义，在任意一点 x_0 处都有

$$f'(x_0)=\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0},$$

根据洛必达法则进一步计算，有

$$f'(x_0)=\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}\overset{\text{洛必达法则}}{=\!=\!=}\lim_{x\to x_0}\frac{f'(x)}{1}=\lim_{x\to x_0}f'(x).$$

因为对任意一点 x_0 都有 $f'(x_0)=\lim\limits_{x\to x_0}f'(x)$，所以函数 $f'(x)$ 在每一点处都连续，即 $f'(x)$ 连续. “证明”完毕.

问题出在前面使用洛必达法则的那一步. 在使用了洛必达法则之后，得到极限 $\lim\limits_{x\to x_0}f'(x)$. 因为这个表达式是抽象的，所以这里我们不能保证这个 $\lim\limits_{x\to x_0}f'(x)$ 存在或为无穷，因此洛必达法则是不能用的. 这个过程不管三七二十一就使用了洛必达法则，当然会得出荒唐的结论.

所以说，检查条件很重要！每一次使用洛必达法则都要十分小心. 还有，如果没告诉你具体函数，题目里只是用 $f(x),g(x)$ 这些抽象函数描述的，如果没有其他条件，那可能也不能用洛必达法则，因为我们可能不知道它们在趋近点邻域是不是可导，导数极限又是不是存在……

实际上，对于 $\frac{\infty}{\infty}$ 型的极限，我们可以放宽一下洛必达法则的使用条件，怎么放宽呢？不用非得“无穷比无穷”，只要是“任意比无穷”，洛必达法则都成立，也就是说，如果我们判断不出分子是不是无穷（或懒得判断，或根本不是无穷），但能确定分母趋于无穷，那这时也是可以用洛必达法则的（即分子分母分别求导）. 不过由于这个结论不是课本上直接出现的，所以大题不能直接用，小题里面可以用.

还有一个需要注意的地方，对于数列极限是坚决不能用洛必达法则的，因为数列不能求导！如果碰到数列极限，想用洛必达法则，可以先用 x 表示，转化成函数在 $x\to+\infty$ 时的极限，再在检查条件后使用洛必达法则，最后再转化回数列极限（由 $x\to+\infty$ 是可以直接转化成 $n\to\infty$ 的，但 $n\to\infty$ 不能转化成 $x\to+\infty$，理论依据就是方法六中讲过的“海涅定理”，这个原则描述了数列极限和函数极限之间的关系）.

上面说的 $\frac{0}{0}$ 型和 $\frac{\infty}{\infty}$ 型的式子都叫做“未定式”，它们理论上都能用洛必达法

则计算，但有些题会越算越麻烦. 当你发现越求导情况越不妙，建议立即停止求导，另想别的办法. 还有，如果中途发现式子能化简，或者能等价无穷小代换，一定先化简、代换.

16.3 其余类型的未定式

未定式一共有七种，上面已经说了两种. 除了上面的两种$\frac{0}{0}$和$\frac{\infty}{\infty}$，还有$0\cdot\infty$，$\infty-\infty$，0^0，∞^0，1^∞. 做法就是“向着$\frac{0}{0}$或$\frac{\infty}{\infty}$转化”，其实方法在上文中大致都已经零碎地总结过了，下面重新完整地讨论一下.

对于$0\cdot\infty$型，可以把“乘以无穷”看成“除以零”，这就转化成了$\frac{0}{0}$型；或者把“乘以零”看作“除以无穷”，这就转化成了$\frac{\infty}{\infty}$型. 比如：

[例 52] 求$\lim\limits_{x\to0^+}x\ln x$（注意这里左极限没有意义，所以我们只求右极限）.

根据洛必达法则，$\lim\limits_{x\to0^+}x\ln x=\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{\ln x}{\frac{1}{x}}=\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}}=\lim\limits_{x\to0^+}(-x)=0$.

这里我们是转化成了$\frac{\infty}{\infty}$型，对于这道题，我们最好不要转化成$\frac{0}{0}$型，因为那样求导比较麻烦，而且好像用一次洛必达法则做不出来. 所以$\frac{0}{0}$和$\frac{\infty}{\infty}$两种类型有时是需要你选择的，不能只认一种方法. 一般来说，一些简单的因式放到分母上是比较合适的.

对于$\infty-\infty$型，有一个$\infty-\infty$向着$\frac{0}{0}$转化的通法，即

$$\infty_1-\infty_2=\frac{\infty_1\times\infty_2}{\infty_2}-\frac{\infty_1\times\infty_2}{\infty_1}=\left(\frac{1}{\infty_2}-\frac{1}{\infty_1}\right)\infty_1\times\infty_2=\frac{\frac{1}{\infty_2}-\frac{1}{\infty_1}}{\frac{1}{\infty_1\times\infty_2}}=\frac{0}{0},$$

但建议最好别一遇到题就这么想，大脑会爆炸. 在这里简单地描述一下各种常见的思考方法，主要分三种情况吧：①“分式减分式”类型的，只要通分一下，就可以转化成一个大分式，一般会是$\frac{0}{0}$型或$\frac{\infty}{\infty}$型，然后就用洛必达法则或其他方

法. 没有分式有时候也可以创造分式，比如把 $\tan x$ 看成 $\dfrac{1}{\cot x}$；②“根式减根式”或“根式减有理式”，一般就是分子有理化了，这样又可以转化成一个大分式，又可以用前面的方法了；③“什么也不是”类型的，这种情况比较复杂，很难统一论述，不过你可以考虑设 $x=\dfrac{1}{t}$，进行倒代换，整理一下可能又是个大分式，这样就又可以用前面的方法了.

[例 53] 计算极限 $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1}{x^2}-\dfrac{1}{\sin^2 x}\right)$. 这是 $\infty-\infty$ 型极限，可以通分.

$$原极限=\lim_{x\to 0}\frac{\sin^2 x-x^2}{x^2\sin^2 x}=\lim_{x\to 0}\frac{(\sin x-x)(\sin x+x)}{x^4}=\lim_{x\to 0}\frac{-\frac{1}{6}x^3\cdot 2x}{x^4}=-\frac{1}{3}.$$

这里指出一个问题，如果一个“$\infty-\infty$”型的极限存在，则两个无穷大一定是“等价无穷大”（即它们相除后极限为 1）. 这是因为，如果两个同号的无穷大 u 和 v 之差的极限 $\lim(u-v)$ 存在，且将其极限值记为 A，则 $\lim\dfrac{u}{v}=\lim\left(\dfrac{u-v}{v}+1\right)$ $=\lim(u-v)\lim\dfrac{1}{v}+1=A\times 0+1=1$. 由此可以知道，如果两个无穷大之比的极限不是 1，则它们相减后的极限也一定不存在. 比如，如果想求极限 $\lim\limits_{x\to+\infty}(x-\ln x)$，那么我们可以先验证 $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x}{\ln x}$，发现它是 $+\infty$，不是 1，因此 $\lim\limits_{x\to+\infty}(x-\ln x)$ 就不存在. 但话反过来说，如果两个无穷大之比极限确实是 1，那仅能说明原来“无穷减无穷”的极限有可能存在，而并不一定存在，到底存不存在还要靠具体的计算来检验.

剩下三个 0^0，∞^0，1^∞ 一起说，它们有一个共同的特点——都是幂指函数. 在求幂指函数的极限的时候，一般有两种思路：第一种思路是利用一个重要极限 $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^x=\mathrm{e}$，这一般是针对 1^∞ 这种类型的，这种思路就不举例题了，前面的方法 13.2 都有；第二种思路对 0^0，∞^0，1^∞ 这三种类型都奏效，就是用前面方法十一讲的对数恒等式 $N=\mathrm{e}^{\ln N}$，通过这个恒等式，我们总可以把这三种类型转化为 $\dfrac{0}{0}$ 型或 $\dfrac{\infty}{\infty}$ 型：

$$\left.\begin{array}{l} 0^0=\mathrm{e}^{\ln 0^0}=\mathrm{e}^{0\ln 0} \\ \infty^0=\mathrm{e}^{\ln\infty^0}=\mathrm{e}^{0\ln\infty} \\ 1^\infty=\mathrm{e}^{\ln 1^\infty}=\mathrm{e}^{\infty\ln 1} \end{array}\right\}=\mathrm{e}^{0\cdot\infty}=\left\{\begin{array}{l} \mathrm{e}^{\frac{0}{\frac{1}{\infty}}}=\mathrm{e}^{\frac{0}{0}} \\ \mathrm{e}^{\frac{\infty}{\frac{1}{0}}}=\mathrm{e}^{\frac{\infty}{\infty}} \end{array}\right. .$$

总之，只需要进行这样的操作：$\lim u^v=\lim \mathrm{e}^{\ln u^v}=\mathrm{e}^{\lim v\ln u}$，问题就变得明朗了.

下面分别举一个例子：

[例 54] 0^0 型：$\lim\limits_{x\to0^+}x^x=\lim\limits_{x\to0^+}\mathrm{e}^{\ln x^x}=\lim\limits_{x\to0^+}\mathrm{e}^{x\ln x}=\mathrm{e}^0=1$．其中的 $\lim\limits_{x\to0^+}x\ln x$ 刚才讲 $0\cdot\infty$ 型的时候已经算出来了.

[例55] ∞^0 型：$\lim\limits_{x\to+\infty}(1+x)^{\frac{1}{x}}=\lim\limits_{x\to+\infty}\mathrm{e}^{\ln(1+x)^{\frac{1}{x}}}=\lim\limits_{x\to+\infty}\mathrm{e}^{\frac{1}{x}\ln(1+x)}=\mathrm{e}^{\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\ln(1+x)}{x}}=\mathrm{e}^{\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\frac{1}{1+x}}{1}}=\mathrm{e}^0=1$.

这个极限跟第二个重要极限的推论 $\lim\limits_{x\to0}(1+x)^{\frac{1}{x}}=\mathrm{e}$ 有点像，就是 x 的趋向方式不一样，注意不要弄混．这个解题过程是把 ∞^0 型变形成了 $\dfrac{\infty}{\infty}$ 型.

[例 56] 1^∞ 型：

$\lim\limits_{x\to0}\left(x+\mathrm{e}^x\right)^{\frac{1}{x}}=\lim\limits_{x\to0}\mathrm{e}^{\ln\left(x+\mathrm{e}^x\right)^{\frac{1}{x}}}=\lim\limits_{x\to0}\mathrm{e}^{\frac{1}{x}\ln\left(x+\mathrm{e}^x\right)}=\mathrm{e}^{\lim\limits_{x\to0}\frac{\ln\left(x+\mathrm{e}^x\right)}{x}}=\mathrm{e}^{\lim\limits_{x\to0}\frac{\left(1+\mathrm{e}^x\right)\times\frac{1}{x+\mathrm{e}^x}}{1}}=\mathrm{e}^2$．这里我们是把 1^∞ 型变形成了 $\dfrac{0}{0}$ 型.

至此七种未定式已经全部总结完毕，理论上都是可以转化成 $\dfrac{0}{0}$ 型或 $\dfrac{\infty}{\infty}$ 型进而应用洛必达法则的，一定要灵活运用，不过不要寄全部的希望于其上，有时候洛必达法则的优越感十足，但也有时候它比任何一种方法都麻烦.

16.4 施笃兹定理

我们介绍一个新定理，有着“数列极限的洛必达法则”的称誉．定理的名字叫“施笃兹定理”（英文名字叫 Stolz 定理）.

定理是这么说的：设有两个数列 $\{a_n\},\{b_n\}$，其中 $\{b_n\}$ 必须是单调递增数列，而且有 $\lim\limits_{n\to\infty}b_n=+\infty$，那么如果 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_n-a_{n-1}}{b_n-b_{n-1}}$ 存在或为无穷，那么

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{a_n-a_{n-1}}{b_n-b_{n-1}}.$$

这定理乍一看，个别地方跟洛必达法则有点像. 而且，洛必达法则是对分子分母分别求导，而施笃兹定理是对分子分母分别取了逆向的差分（相邻两项之差叫差分）. 求差分在一定意义上可以理解成“离散地求导”，所以洛必达法则和施笃兹定理是非常相像的.

研究一下施笃兹定理的使用条件. 对分母上的那个数列$\{b_n\}$有两个条件. 第一是单调递增. 事实上，我们可以放宽一下条件，不用一直单调递增，只需要从某一项开始$\{b_n\}$单调递增就可以了，因为n是趋于无穷的，所以数列一开始那几项怎么变，并不影响无穷远处的极限，所以只要保证存在那么一项，使得在这一项之后数列$\{b_n\}$是递增的，就没问题. 对分母上的数列$\{b_n\}$的第二个限定条件是，$\lim\limits_{n\to\infty} b_n = +\infty$. 这个没啥说的，趋于正无穷就算满足这个条件（负无穷可不行，因为还要满足递增这个条件呢）.

满足了这两个条件，就可以对分子分母同时减去数列的前一项，再求极限，或许问题就解决了. 这个定理属于数学竞赛的内容，其它场合最好不要用.

[例 57] 计算极限$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1+\sqrt{2}+\sqrt[3]{3}+\cdots+\sqrt[n]{n}}{n}$，分母数列$b_n = n$单调递增且趋于正无穷，所以我们可以使用施笃兹定理. 其中，分母的前一项是$n-1$，分子的前一项是$1+\sqrt{2}+\sqrt[3]{3}+\cdots+\sqrt[n-1]{n-1}$. 根据施笃兹定理，分子分母同时减去前一项，即

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1+\sqrt{2}+\sqrt[3]{3}+\cdots+\sqrt[n]{n}}{n} = \lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt[n]{n}}{1} = \lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{n} = 1.$$

根据施笃兹定理，我们还可以很轻易地证明一个结论：收敛数列的前n项的算术平均值构成的新数列依然收敛，且等于原数列的极限，即若$\lim\limits_{n\to\infty} x_n$存在且值为$A$，则$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{x_1+x_2+\cdots+x_n}{n}$也存在且也等于$A$. 这是因为，此极限满足施笃兹定理的使用条件，根据施笃兹定理，$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{x_1+x_2+\cdots+x_n}{n} = \lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{x_n}{n-(n-1)} = \lim\limits_{n\to\infty} x_n = A$. 有时，直接套用这个结论会比较方便（仅限竞赛）.

此外，对于“零比零”类型的数列极限，只要改变一下条件，施笃兹定理也是成立的，在这里简单地叙述一下：对于数列极限$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_n}{b_n}$，如果当$n\to\infty$时分子数列$\{a_n\}$趋于零，分母数列$\{b_n\}$单调递减且趋于零，并且$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_n-a_{n-1}}{b_n-b_{n-1}}$存在或者为无穷大，那么$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_n}{b_n} = \lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_n-a_{n-1}}{b_n-b_{n-1}}$.

十七、利用夹逼准则

夹逼准则（或叫夹逼定理）是一个名字相当奇怪的准则……准则的内容是，如果在你要趋近的那点的去心邻域内有 $g(x) \le f(x) \le h(x)$（或 $y_n \le x_n \le z_n$）恒成立，而且函数 $g(x)$ 与函数 $h(x)$（或数列 $\{y_n\}$ 与数列 $\{z_n\}$）在那点处的极限都存在而且相等，那么函数 $f(x)$（或数列 $\{x_n\}$）在那点处的极限也存在且等于这个数. 这个准则也叫“追敛性”.

在夹逼准则的条件中，所有的不等号（≤）都可以改成严格不等号（<），并不影响定理的结论. 事实上在实际应用中，我们可以不管是否能取到等号，直接统一写不严格不等号（如“≤”）也没问题.

比较常见的能用这个准则做的题目有很多，比如说求和的形式，而且一般是无法直接求和的那种形式. 比如：

[例 58] $\lim\limits_{n\to\infty} n\left(\frac{1}{n^2}+\frac{1}{n^2+1}+\cdots+\frac{1}{n^2+n}\right)$.

为了应用夹逼准则，我们需要找出这一大串式子大于谁、小于谁. 我们先来找它大于谁，就是要把这个式子缩小，只要把每项的分母都放大，整个式子一定比以前小！所以有

$$n\left(\frac{1}{n^2}+\frac{1}{n^2+1}+\cdots+\frac{1}{n^2+n}\right) \ge n\underbrace{\left(\frac{1}{n^2+n}+\frac{1}{n^2+n}+\cdots+\frac{1}{n^2+n}\right)}_{(n+1)\text{项}} = \frac{n(n+1)}{n^2+n},$$

把所有项的分母都变成相同的，不用通分，容易求和.

然后找它小于谁，就是要把这个式子放大，只要把每项的分母都缩小，整个式子一定比以前大！所以有

$$n\left(\frac{1}{n^2}+\frac{1}{n^2+1}+\cdots+\frac{1}{n^2+n}\right) \le n\underbrace{\left(\frac{1}{n^2}+\frac{1}{n^2}+\cdots+\frac{1}{n^2}\right)}_{(n+1)\text{项}} = \frac{n(n+1)}{n^2},$$

至此，我们就成功地找出了原数列的上下界——$\frac{n(n+1)}{n^2+n} \le$ 原数列 $\le \frac{n(n+1)}{n^2}$. 因为 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n(n+1)}{n^2+n} = \lim\limits_{n\to\infty}\frac{n(n+1)}{n^2} = 1$，所以原极限也等于1.

再举一个经典的例子.

[例 59] 求极限 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(a^n+b^n+c^n+d^n\right)^{\frac{1}{n}}$，其中 a,b,c,d 均为正数.

本题的精彩之处在于左右放缩方式不一样. 我们先假设 $m=\max\{a,b,c,d\}$，意思就是 m 为 a,b,c,d 中最大的那个数. 左边(下界)的放缩方法是，只留下 m^n，

把其余项看成0，整个式子一定比以前小，即$\left(m^n+0+0+0\right)^{\frac{1}{n}}\le\left(a^n+b^n+c^n+d^n\right)^{\frac{1}{n}}$.
右边（上界）的放缩方法是，把每一项都放大成m^n，整个式子一定比以前大，即$\left(a^n+b^n+c^n+d^n\right)^{\frac{1}{n}}\le\left(m^n+m^n+m^n+m^n\right)^{\frac{1}{n}}$. 这样，我们就有

$$\left(m^n\right)^{\frac{1}{n}}\le\left(a^n+b^n+c^n+d^n\right)^{\frac{1}{n}}\le\left(4m^n\right)^{\frac{1}{n}},$$

即$m\le\left(a^n+b^n+c^n+d^n\right)^{\frac{1}{n}}\le\sqrt[n]{4}m$. 由于$\lim\limits_{n\to\infty}m=\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{4}m=m$（注意$m$是常数），故而$\lim\limits_{n\to\infty}\left(a^n+b^n+c^n+d^n\right)^{\frac{1}{n}}=m=\max\{a,b,c,d\}$.

这道例题可以推广到任意有限个正数的乘方和再开同次方根的情况，答案都是取了最大的那一个正数.

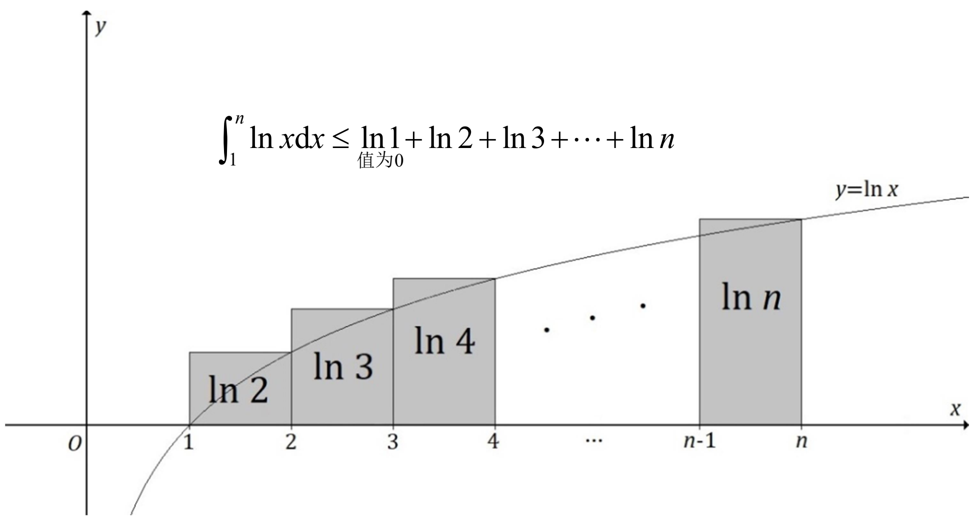
有时候，对于一些求和式，你可能会感觉放缩总是难以进行，找不到一个合适的放缩方法使得两端极限相等. 这时，可以考虑“积分放缩”的方法. 这是一种根据函数的单调性和定积分的几何意义来找出数列上下界的方法，是一种非常精准的放缩法. 具体见下例.

[例 60]求极限$\lim\limits_{n\to\infty}(n!)^{\frac{1}{n\ln n}}$.

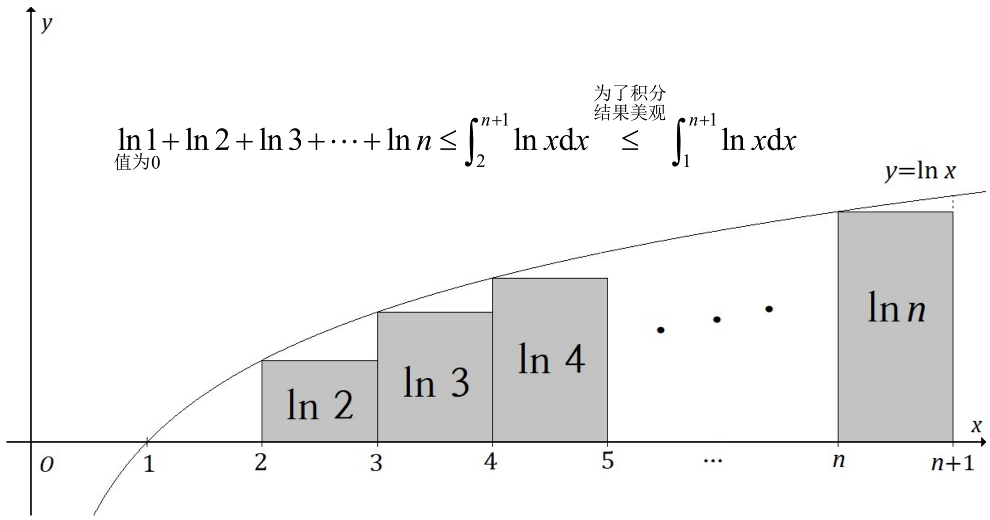
对这道题来说，之前的放缩方法不再奏效. 但由于这属于幂指型的极限，所以首先考虑对数恒等式，即原极限$=\mathrm{e}^{\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\ln(n!)}{n\ln n}}$. 这时，应该想到要把阶乘的对数转化为对数的和，即$\mathrm{e}^{\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\ln1+\ln2+\ln3+\cdots+\ln n}{n\ln n}}$. 问题解决到这里，就化成一个求和形式的极限了. 接下来单独把指数部分拿出来计算，正式进入“积分放缩”环节.

指数部分$=\ln$原极限$=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\ln1+\ln2+\ln3+\cdots+\ln n}{n\ln n}$. 我们先来把分子放缩.

对于分子的下界，可以作如下图形来帮助我们理解. 阴影部分的面积恰好为$\ln1+\ln2+\ln3+\cdots+\ln n$（其中$\ln1$的值为0，可不予考虑），而这一部分面积一定是大于$\int_1^n\ln x\mathrm{d}x$的. 因此，$\int_1^n\ln x\mathrm{d}x$就是$\ln1+\ln2+\ln3+\cdots+\ln n$的一个下界.



对于分子的上界，也可作类似图形来帮助我们理解. 阴影部分的面积仍然为 $\ln 1+\ln 2+\ln 3+\cdots+\ln n$（其中 $\ln 1$ 的值为 0，不予考虑），而这一部分面积一定是小于 $\int_2^{n+1}\ln x\mathrm{d}x$ 的. 因此，$\int_2^{n+1}\ln x\mathrm{d}x$ 就是 $\ln 1+\ln 2+\ln 3+\cdots+\ln n$ 的一个上界. 在这里，为了使积分的结果美观，我们又再一次把它放大到了 $\int_1^{n+1}\ln x\mathrm{d}x$（最后没有影响到极限）. 图形如下：



因此，$\int_1^n\ln x\mathrm{d}x\le\ln 1+\ln 2+\ln 3+\cdots+\ln n\le\int_1^{n+1}\ln x\mathrm{d}x$. 利用分部积分法，不等式左右的这两个定积分都是容易计算的：

$$\int_1^n\ln x\mathrm{d}x=\left[x\ln x-x\right]_1^n=n\ln n-n+1;$$

$$\int_1^{n+1}\ln x\mathrm{d}x=\left[x\ln x-x\right]_1^{n+1}=(n+1)\ln(n+1)-n,$$

因此有 $\dfrac{n\ln n-n+1}{n\ln n}\le\dfrac{\ln 1+\ln 2+\ln 3+\cdots+\ln n}{n\ln n}\le\dfrac{(n+1)\ln(n+1)-n}{n\ln n}$，又由于

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n\ln n-n+1}{n\ln n}=\lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)\ln(n+1)-n}{n\ln n}=1,$$

因此 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\ln 1+\ln 2+\ln 3+\cdots+\ln n}{n\ln n}=1$，原极限 $\lim\limits_{n\to\infty}(n!)^{\frac{1}{n\ln n}}=\mathrm{e}^1=\mathrm{e}$.

像这种需要精确放缩的题目，只需要把两种图象画出（一种是阶梯线包着曲线，一种是曲线包着阶梯线），根据定积分的几何意义，就可以分析出和式的上下界. 另外，考虑到这道例题中含有阶乘，我们还可以利用比较高级的斯特林公式来解决，感兴趣的读者可以参照方法三十三.

此外一些不是求和的式子，也可以用夹逼准则做，比如当初的 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x}=1$ 就是用夹逼准则首先推出的. 还有很多其它形式的极限，夹逼准则都很好用. 读者应注意多积累、多实战.

后面的方法 18.2 中，我还举了一个用夹逼准则求“连分数”极限的例子，感兴趣可以去看看.

十八、单调有界准则及压缩映射原理

18.1 单调有界准则

对于数列的极限来说，单调有界准则的内容是：单调有界数列必有极限. 一般分为两种情况——单调递增且有上界，或单调递减且有下界. 这两种情况满足其中一种，就可以说明数列极限是存在的了. 事实上，数列不需要一直单调，只需从某项以后开始单调就可以了.

对于函数的极限来说，情况要稍微显得复杂一些，有四个类别，分别是 $x\to x_0^-$，$x\to x_0^+$，$x\to-\infty$，$x\to+\infty$. 如果函数 $f(x)$ 在 $\begin{cases} x_0\text{的某个去心左邻域}\left(x_0-\delta,x_0\right) \\ x_0\text{的某个去心右邻域}\left(x_0,x_0+\delta\right) \\ \text{某个}-\infty\text{邻域}\left(-\infty,-X\right) \\ \text{某个}+\infty\text{邻域}\left(X,+\infty\right) \end{cases}$ 内

$\begin{cases} \text{单调递增且有上界，或单调递减且有下界} \\ \text{单调递增且有下界，或单调递减且有上界} \\ \text{单调递增且有下界，或单调递减且有上界} \\ \text{单调递增且有上界，或单调递减且有下界} \end{cases}$，则 $\begin{cases} \lim\limits_{x\to x_0^-} f(x) \\ \lim\limits_{x\to x_0^+} f(x) \\ \lim\limits_{x\to-\infty} f(x) \\ \lim\limits_{x\to+\infty} f(x) \end{cases}$ 存在.

对于函数极限版本的单调有界准则，应用不多，下面只介绍数列版本的.

接下来介绍的方法是针对单调有界数列的极限的. 当你看到像 $\sqrt{2+\sqrt{2+\cdots}}$ 这种连环形式的极限，就可以考虑用这种方法. 当然，还有很多题目可以用单调有界准则来解决，尤其是某些抽象的极限，这些题目的基本思想都是类似的——分两步进行，即证明数列单调递增且有上界，或证明数列单调递减且有下界. 在后面的方法 31.3 中，我又举了一个用单调有界准则证明极限存在的例子，你可以去看看. 下面我们继续讨论刚才的 $\sqrt{2+\sqrt{2+\cdots}}$.

我们求极限的思路是，写出数列的首项和递推公式，并设极限值为 x，对递推公式两边同取极限，构造一个关于 x 的方程，从而解出极限值.

不过，上面这些不是重点，重点在于证明数列极限存在！这一个大步骤千万不能少！如果不证明极限存在，凭什么设它是 x 呀？根据单调有界准则，我们的证明就从两个方面进行，一是证明数列单调，二是证明数列有界. 很多题目都可以用数学归纳法[⑥]证明这两点. 有时也会用求导的方法（要先把数列改写成函数

---

⑥【数学归纳法】这是证明“与自然数相关的命题”的一种方法. 具体步骤是：先证明命题对第一个数（或第一个关系）是成立的，再假设对第 k 个数或关系成立，在这种假设下，只要证明命题对第 k+1 个数或关系成立，就能说明原命题对所有数或关系都成立. 具体过程参看接下来的内容. 本文所叙方法为第一数学归纳法，此外还有第二数学归纳法、逐差法、无穷递降法、超限归纳法等其它归纳法，读者若感兴趣可参考有关资料.

才能求导)、作差法（考察$a_{n+1}-a_n$的符号)、作比法（考察$\frac{a_{n+1}}{a_n}$与1的大小关系）等方法来证明数列单调，用放缩的方法或根据已知的不等式（如均值不等式）来证明数列有界.

[例 61]我们就以刚才提到的数列$\sqrt{2},\sqrt{2+\sqrt{2}},\sqrt{2+\sqrt{2+\cdots}},\cdots$为例，求它的极限值.

首先，我们写出首项及递推公式：$a_1=\sqrt{2},a_n=\sqrt{2+a_{n-1}}$，这很容易．然后就要证明它有极限，即证这个数列单调、有界．本例中均采用数学归纳法.

先证单调.

第一步，归纳奠基．非常显然，$a_2>a_1$（看样子是递增数列）.

第二步，归纳假设．我们假设$a_k>a_{k-1}$.

第三步，归纳递推．我们来看看$a_{k+1}>a_k$成不成立．因为$a_{k+1}=\sqrt{2+a_k}$，所以$a_k=\sqrt{2+a_{k-1}}$，而我们刚刚假设了$a_k>a_{k-1}$，所以容易得出$\sqrt{2+a_k}>\sqrt{2+a_{k-1}}$，即$a_{k+1}>a_k$成立．所以这个数列单调递增.

再证有界，只要证明数列中所有数都小于某个数就好了．我们考虑证明它们都小于2．依然是数学归纳法.

第一步，归纳奠基．第一项$\sqrt{2}<2$这没问题.

第二步，归纳假设．我们假设$a_k<2$.

第三步，归纳递推．根据归纳假设，$a_{k+1}=\sqrt{2+a_k}<\sqrt{2+2}=2$，也小于2.

所以数列中的每一项都小于2，即数列有上界．一个重要的问题是，为什么非要证明它都小于2呢？这个2是怎么想到的呢？一会儿告诉你怎么找到这个2.

在证明了单调增、有上界之后，我们根据单调有界准则，就有理由下结论：这个数列的极限是存在的．所以可以设极限值为x，对递推公式$a_n=\sqrt{2+a_{n-1}}$两边同取极限，就是$\lim\limits_{n\to\infty}a_n=\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt{2+a_{n-1}}$，也就是$\lim\limits_{n\to\infty}a_n=\sqrt{2+\lim\limits_{n\to\infty}a_{n-1}}$．其中$\lim\limits_{n\to\infty}a_n$和$\lim\limits_{n\to\infty}a_{n-1}$都是相等的，都等于$x$（因为数列相同、趋向方式相同)，所以我们就能构造出一个关于x的方程$x=\sqrt{2+x}$，解得$x=2$（增根舍去）．所以极限值等于2.

知道刚才是怎么找到2的了吗？你先在草稿纸把答案解出来啊，既然递增了，

所有数肯定都正好小于这个极限值啊！这是一种很管用的“歪门邪道”．这个 2，也叫“不动点”．

再举一例.

[例 62] 设 $a>0$，$x_1>0$，$x_{n+1}=\frac{1}{4}\left(3x_n+\frac{a}{x_n^3}\right)$（$n\in\mathbf{N}_+$），求 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n$.

对这道题来说，先证明有界性会对单调性的证明提供一些便利，所以我们先证明有界.

对于任意的 n，都有 $x_{n+1}=\frac{1}{4}\left(3x_n+\frac{a}{x_n^3}\right)=\frac{1}{4}\left(x_n+x_n+x_n+\frac{a}{x_n^3}\right)$（这一步拆开的目的是下一步使用均值不等式时能把 x_n 都约掉）$\overset{\text{均值不等式}}{\geq}\frac{1}{4}\cdot 4\sqrt[4]{x_n\cdot x_n\cdot x_n\cdot\frac{a}{x_n^3}}=\sqrt[4]{a}$.

关于均值不等式的内容参见方法 26. 1.

这也就是说，数列 $\{x_n\}$ 有下界 $\sqrt[4]{a}$.

然后证明数列单调递减．因为 $\frac{x_{n+1}}{x_n}=\frac{\frac{1}{4}\left(3x_n+\frac{a}{x_n^3}\right)}{x_n}=\frac{1}{4}\left(3+\frac{a}{x_n^4}\right)$，其中 $x_n\geq\sqrt[4]{a}$，故 $x_n^4\geq a$，$\frac{a}{x_n^4}\leq 1$，因此 $\frac{x_{n+1}}{x_n}=\frac{1}{4}\left(3+\frac{a}{x_n^4}\right)\leq 1$，从而数列 $\{x_n\}$ 单调递减.

由单调有界准则可知，$\lim\limits_{n\to\infty}x_n$ 是存在的，设其为 A．对 $x_{n+1}=\frac{1}{4}\left(3x_n+\frac{a}{x_n^3}\right)$ 两边同取极限可以得到 $A=\frac{1}{4}\left(3A+\frac{a}{A^3}\right)$.

因为 $x_n\geq\sqrt[4]{a}>0$，根据极限的保号性，所以一定有 $A=\lim\limits_{n\to\infty}x_n\geq 0$．由此解得 $A=\sqrt[4]{a}$，即为所求极限值.

本例使用的是作比法来证明数列单调，而对于作差法的步骤展示，可参见方法 31.3——证明极限 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}-\ln n\right)$ 的存在性.

事实上，对于同一道题来说，作比法和作差法或许都奏效，但可能会存在一个相对简单的方法.

18.2 压缩映射原理

还有一些数列，比如下例：

[例 63]数列$5,5+\frac{6}{5},5+\frac{6}{5+\frac{6}{5}},5+\frac{6}{5+\frac{6}{5+\frac{6}{5}}},5+\frac{6}{5+\frac{6}{5+\frac{6}{5+\cdots}}}$，首项是$5$，递推公式是$a_n=5+\frac{6}{a_{n-1}}$．这看似也跟前面的例子类似，但如果你有心做一下，会发现用数学归纳法根本证不出它单调！你知道为什么吗？

哈哈，因为它根本就不单调！所以不能通过单调有界准则说明它极限存在！那怎么办呢？我们用夹逼准则证明它极限存在．但在这之前，还是需要你用“歪门邪道”算出答案：应该是6．（夹逼准则和单调有界准则堪称高数里的两大极限存在准则，非常重要．）

我们的证明思路是：先设法用夹逼准则证明得到$\lim\limits_{n\to\infty}(a_n-6)=0$，实际上也就等价于证明$\lim\limits_{n\to\infty}|a_n-6|=0$．这个$6$，就是你事先在草稿纸上算出的答案．

于是我们要设法找到$|a_n-6|$的上下界，因为我们心中清楚这个极限就是0，不妨下界就找0，绝对值肯定大于等于0啊．接下来找上界．

首先要注意数列中数字的特点，由递推公式$a_n=5+\frac{6}{a_{n-1}}$可以看出数列中每一项都是大于等于5的，即$a_n\geq 5$，也就是$\frac{1}{a_n}\leq\frac{1}{5}$（取倒数是为了后面证明方便，还有，这里的$a_n$在形式上并不一定必须是$a_n$，而是指“数列中每一项都大于等于$5$，每一项的倒数都小于等于$\frac{1}{5}$”）．所以根据递推公式，有

$$|a_n-6|\xlongequal{\text{递推公式代入}}\left|5+\frac{6}{a_{n-1}}-6\right|\xlongequal{\text{通分}}\left|\frac{6-a_{n-1}}{a_{n-1}}\right|=\frac{|a_{n-1}-6|}{a_{n-1}}\leq\frac{1}{5}|a_{n-1}-6|,$$

可以看出，$\{|a_n-6|\}$这个新数列中的每一项，都小于等于前一项的$\frac{1}{5}$．

我们一不做二不休，继续下去：

$$0\leq|a_n-6|\leq\frac{1}{5}|a_{n-1}-6|\leq\frac{1}{5^2}|a_{n-2}-6|\leq\cdots\leq\frac{1}{5^{n-1}}|a_1-6|=\frac{1}{5^{n-1}},$$

这就成功地找出了$|a_n-6|$的上下界——$\frac{1}{5^{n-1}}$和0．非常显然，当$n\to\infty$时，

它们都趋于0，所以$\lim\limits_{n\to\infty}\left|a_n-6\right|=0$，也就等价于$\lim\limits_{n\to\infty}\left(a_n-6\right)=0$（一个量的绝对值趋于零，和它本身趋于零是等价的）. 所以

$$\lim_{n\to\infty}a_n=\lim_{n\to\infty}\left(6+a_n-6\right)=\lim_{n\to\infty}6+\lim_{n\to\infty}\left(a_n-6\right)=6+0=6.$$

这就很完美地把这个极限证出来了！在以上的这个过程中，我们推导出了一个至关重要的式子：$\left|a_n-6\right|\le\frac{1}{5}\left|a_{n-1}-6\right|$. 这个式子说明了，后一项总不超过前一项的五分之一. 有许多类似的题目，都是可以推导出类似这样的式子的，这个过程叫做“压缩映射”，也叫“压缩映像”.

压缩映射原理，本来是泛函分析（一门数学专业课）中的一个概念，它的涵义是非常深刻的，但在这里我们只讨论它在求数列极限时的应用. 如果翻译成数列的语言，这个原理是这么说的——

设$0<k<1$是一个常数，A也是一个常数. 有两种情况：

①如果对于数列$\{x_n\}$，有$\left|x_{n+1}-x_n\right|\le k\left|x_n-x_{n-1}\right|$，那么$\lim\limits_{n\to\infty}x_n$一定存在；

②如果对于数列$\{x_n\}$，有$\left|x_{n+1}-A\right|\le k\left|x_n-A\right|$，那不仅能说明$\lim\limits_{n\to\infty}x_n$一定存在，还能说明极限就等于$A$. 上述题目就属于这种情况，$k=\frac{1}{5}$，$A=6$.

这道例 63 涉及到了“连分数”的极限，根据德国数学家高斯的理论，这个极限可以记作$5+\underset{n=1}{\overset{\infty}{\mathrm{K}}}\frac{6}{5}$（这不是乱码，就是字母 K），其中大型运算符$\underset{n=1}{\overset{\infty}{\mathrm{K}}}$的含义是：后一个分数加在前一个分数的分母上，一个套一个，无穷无尽. 读者可以对比题目来体会. 连分数的问题是数学中的一个十分令人着迷的话题. 关于连分数的极限求解，有一些题目是可以模仿上面展示的过程来解决的，但也有些题目连递推公式都难以写出，甚至还有某些连分数的极限问题至今仍是世界未解之谜.

总结一句，当你遇到“牵扯到递推公式”的数列极限，就可以考虑证明单调有界；如果数列确实不单调，就可以考虑压缩映射的思想，然后用夹逼准则. 一样的是，都需要你提前把答案算出来.

十九、利用中值定理

中值定理在微积分学中可以分为两大类，分别是微分中值定理和积分中值定理，反映的是函数值与导数值或积分值之间的关系. 如果将中值定理巧妙地运用到极限的计算中，将起到事半功倍的效果.

19.1 微分中值定理

微分中值定理主要包括罗尔定理、拉格朗日中值定理、柯西中值定理等等. 用微分中值定理求极限，主要运用的是拉格朗日中值定理和柯西中值定理，关于泰勒公式，见下一个方法.

先说拉格朗日中值定理，我们首先描述一下这个定理：

（拉格朗日中值定理）如果函数$f(x)$满足

（1）在闭区间$[a,b]$上连续；

（2）在开区间(a,b)内可导，

那么在(a,b)内至少有一点ξ（$a<\xi<b$），使等式$f(b)-f(a)=f'(\xi)(b-a)$成立.

这是什么意思呢？你把这个等式右边的$b-a$（它一定不为零）除到左边，会得到$\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}=f'(\xi)$，这就是说，在满足上述两个条件的函数$f(x)$图形上任取一段弧$\overset{\frown}{AB}$，那么在这段弧上一定存在一点，使得该点处的切线斜率等于直线AB的斜率，这也就是拉格朗日中值定理的几何意义. 关于这个定理的其它应用，这里不谈，下面只讨论怎么利用这个定理求极限.

用例子说事吧，这样比较好理解.

[例 64]求$\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{2}x^2\left[\ln\arctan(x+1)-\ln\arctan x\right]$.

这个极限真够长的……我们试着把$+\infty$“代”进去，会发现这是一道$0\cdot\infty$型的题目，你如果想用洛必达法则，估计你试试就疯了.

我们另寻出路，来试一试拉格朗日中值定理有什么好处. 我们应该注意到，$\ln\arctan(x+1)-\ln\arctan x$，它是函数$f(x)=\ln\arctan x$在$[x,x+1]$上的函数值增量，也就是拉格朗日中值定理中的$f(b)-f(a)$. 那么按照定理，应该至少存在一个$\xi\in(x,x+1)$，使得$\ln\arctan(x+1)-\ln\arctan x=f'(\xi)(x+1-x)=f'(\xi)$成立. 求一下$f'(\xi)$，它应该等于$\dfrac{1}{(1+\xi^2)\arctan\xi}$. 考虑到原题前面还乘了一个$\dfrac{1}{2}x^2$，为了统一变量，我们把$\xi$也用$x$表示. 一个自然的想法是：因为$\xi\in(x,x+1)$，所以$\xi$可以改写成$x+\theta$（其中$\theta\in(0,1)$）. 这样一来原极限就变成了：

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{2}x^2\left[\ln\arctan(x+1)-\ln\arctan x\right]=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2}{2}\cdot\frac{1}{\left[1+(x+\theta)^2\right]\arctan(x+\theta)}.$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2}{1+(x+\theta)^2}\cdot\frac{1}{2\arctan(x+\theta)}=1\times\frac{1}{2\times\frac{\pi}{2}}=\frac{1}{\pi}.$$

由这道例题不难总结出，当在极限中遇到函数值增量的时候，可以使用且非常建议使用拉格朗日中值定理，这个定理可以将函数的差值转化成某一点的导数值，从而简化运算. 而且我们可以看出，中间设的辅助参数ξ,θ，到了最后与极限值无关，所以不要怕增加参数，大胆地设就行.

再来说一说柯西中值定理.

（柯西中值定理）如果函数$f(x)$与$g(x)$满足

（1）在闭区间$[a,b]$上连续；

（2）在开区间(a,b)内可导；

（3）对任一$x\in(a,b)$，$g'(x)\neq 0$，

那么在(a,b)内至少有一点ξ（$a<\xi<b$），使等式$\dfrac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}=\dfrac{f'(\xi)}{g'(\xi)}$成立.

我们同样举一道例题. 相信有了上面的铺垫，下面的例题将很好理解.

[例 65]求极限$\lim\limits_{x\to2}\dfrac{\sin\left(x^x\right)-\sin\left(2^x\right)}{2^{x^x}-2^{2^x}}$.

这道题的分子分母一看就是两个不同函数的增量形式，可以立即想到柯西中值定理. 根据题目特点，我们容易看出，定理中的$f(x)$就是$\sin x$，定理中的$g(x)$就是2^x，它们的导数是$f'(x)=\cos x$，$g'(x)=2^x\ln 2$. 根据柯西中值定理，一定存在一点ξ介于x^x和2^x之间（x^x和2^x谁大谁小不知道，但ξ一定介于它俩之间），使得$\dfrac{\sin\left(x^x\right)-\sin\left(2^x\right)}{2^{x^x}-2^{2^x}}=\dfrac{\cos\xi}{2^\xi\ln 2}$.

因为$\lim\limits_{x\to2}x^x=4$，并且$\lim\limits_{x\to2}2^x=4$，根据夹逼准则，也有$\lim\limits_{x\to2}\xi=4$，即当$x\to2$时，ξ是趋于4的. 因此，原极限$=\lim\limits_{\xi\to4}\dfrac{\cos\xi}{2^\xi\ln 2}=\dfrac{\cos 4}{16\ln 2}$.

19.2 积分中值定理

积分中值定理是积分学中的重要定理，它主要包括积分第一中值定理与积分第二中值定理. 我们在这里使用的是积分第一中值定理，它的内容是这样的：

如果函数 $f(x)$ 在积分区间 $[a,b]$ 上连续，那么在 $[a,b]$ 上（或说 (a,b) 上也行）至少存在一点 ξ，使得 $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = f(\xi)(b-a)$ 成立. 这道理也很好想，这就相当于把一个宽为 $b-a$ 曲边梯形想象成一块面积不变的"平面橡皮泥"，任我们蹂躏，宽是 $b-a$ 不变的话，我们总能把它捏成一个高为 $f(\xi)$ 的矩形——把曲边压平就行了！积分中值定理的强大之处就在于可以把积分号去掉.

我们依然只讨论积分中值定理在极限中的应用，其它应用暂且不谈. 还是举一个具体例子：

[例 66] 求极限 $\lim\limits_{n\to\infty}\int_0^{\frac{\pi}{4}}\sin^n x\mathrm{d}x$（积分中值定理解决的一般都是带定积分的极限）.

由积分第一中值定理，在 $\left[0,\frac{\pi}{4}\right]$ 上至少存在一点 ξ，使得

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}}\sin^n x\mathrm{d}x = \left(\frac{\pi}{4}-0\right)\sin^n\xi = \frac{\pi}{4}\sin^n\xi$$

成立. 因为 $0\le\xi\le\frac{\pi}{4}$，所以我们根据函数 $y=\sin^n x$ 在区间 $\left[0,\frac{\pi}{4}\right]$ 上的单调性知道 $0\le\sin^n\xi\le\sin^n\frac{\pi}{4}=\left(\sin\frac{\pi}{4}\right)^n=\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^n$. 由于 0 和 $\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^n$ 在 $n\to\infty$ 时的极限都是 0，根据夹逼准则，$\sin^n\xi$ 的极限也是 0. 所以

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^{\frac{\pi}{4}}\sin^n x\mathrm{d}x = \lim_{n\to\infty}\frac{\pi}{4}\sin^n\xi = \frac{\pi}{4}\lim_{n\to\infty}\sin^n\xi = 0.$$

这就很巧妙地把一个含有定积分的极限求出来了！

在上面的解题过程中，我们可不可以根据 $0\le\xi\le\frac{\pi}{4}$ 得到 $0\le\sin\xi\le\frac{\sqrt{2}}{2}<1$，然后利用等比数列极限 $\lim\limits_{n\to\infty}q^n$ 的结论直接得到 $\lim\limits_{n\to\infty}\sin^n\xi=0$ 呢？虽然结果碰巧正确，但是这里的思考过程是错误的. 这是因为，对于不同的 n，也就是对于不同的被积函数，ξ 的值可能是不一样的. 换句话说，ξ 其实可能是与 n 有关的一个量，严格一点的话，ξ 应该记作 ξ_n. 它是个变量，而具体的表达式我们是不知道

的（但理论上能求出来）．既然我们不知道ξ关于n的表达式，也就不确定$\sin^n\xi$本质上是否还是一个等比数列，那我们也就不能运用等比数列极限的结论了——该结论仅仅适用于底数q为常数的情形.

再来一道例题.

[例 67]求$\lim\limits_{n\to\infty}\int_n^{n+1}\dfrac{\sin x}{x}\mathrm{d}x$.

根据积分中值定理，在闭区间$[n,n+1]$上一定存在一点ξ，使等式$\int_n^{n+1}\dfrac{\sin x}{x}\mathrm{d}x$ $=\dfrac{\sin\xi}{\xi}(n+1-n)=\dfrac{\sin\xi}{\xi}$成立. 由于$\xi\in[n,n+1]$，因此当$n\to\infty$时，$\xi\to+\infty$. 故原极限$=\lim\limits_{\xi\to+\infty}\dfrac{\sin\xi}{\xi}=0$.

中值定理是一系列看起来都是废话的定理，但有时候起到的作用却不可估量，所以还是要重视. 多多体会这种方法.

二十、泰勒（麦克劳林）公式展开法

泰勒公式是一种解决复杂函数极限的绝佳方法. 当初我们学了“等价无穷小量代换”这个方法以后，有很多原来不会算的极限可以瞬间解决，把一些乱七八糟的函数换成了十分简单的x啊，$\dfrac{1}{2}x^2$啊. 有一个事实，“等价无穷小量代换”，其实就是泰勒公式展开的特例. 仅仅是特例就这么厉害，相信“泰勒公式展开”这整套方法一定更厉害的！当然，泰勒公式跟泰勒·斯威夫特没啥关系.

首先，什么是泰勒公式？麦克劳林公式又是什么？泰勒公式就是一个任意可导函数用多项式近似表示的式子. 把一个函数按照后面讲的规则展开成多项式的过程，就是泰勒展开的过程. 泰勒展开有“在哪一点处展开”之说，如果你在$x=0$处展开，那越靠近 0，展开的项数越多，原来的函数和多项式值也就越接近. 在$x=0$处展开的泰勒展开式，又叫麦克劳林展开式. 看来麦克劳林展开式是泰勒展开式的一种特殊情况. 我们在极限运算中，常用到的还是麦克劳林展开式. 那么怎么对一个函数进行麦克劳林展开呢？举一个具体例子：展开$\sin x$. 在这儿只讲步骤，就不讲为什么了.

第一步，求出函数的各阶导函数. 对于$f(x)=\sin x$，我们就有$f'(x)=\cos x$，$f''(x)=-\sin x$，$f'''(x)=-\cos x$，$f^{(4)}(x)=\sin x$，…，$f^{(n)}(x)=\sin\left(x+\dfrac{n\pi}{2}\right)$.

第二步，求出函数在展开点的各阶导数值（麦克劳林展开的话就求 0 处的导数值）. 对于$\sin x$，就有$f(0)=0,f'(0)=1,f''(0)=0,f'''(0)=-1,f^{(4)}(x)=0$，看来是$0,1,0,-1$四个数循环.

第三步，将各阶导数值代进麦克劳林公式

$$\boxed{f(x)=f(0)+f'(0)x+\frac{f''(0)}{2!}x^2+\cdots+\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n+o(x^n)}$$

中去. 其中最后的$o(x^n)$是比x^n高阶的无穷小，在这里还有个名字，叫“佩亚诺余项”. 对于$\sin x$就有$\sin x=0+x+0-\frac{x^3}{3!}+0+\frac{x^5}{5!}+0-\cdots=x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-\cdots$. 最后加到$x$的几次方，就再在最后加上一个比$x$的几次方高阶的无穷小，此时我们也就说这是一个几阶的麦克劳林公式. 比如$\sin x$的五阶麦克劳林公式就是

$$\sin x=x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}+o(x^5),$$

我们把高阶无穷小略去，就得到$\sin x$的一个近似计算公式$\sin x\approx x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}$，而且我前面说了，$x$越靠近 0，公式的精确度是越高的. 如果拿计算器检验一下，会发现$\sin 0.1=0.09983341664\cdots$，而把 0.1 代进上述的近似多项式，会得到它的值是$0.09983341666\cdots$这精确度很赞吧？

以下列举了几个常见函数的带佩亚诺余项的麦克劳林公式（背过比较好）：

①$\mathrm{e}^x=1+x+\frac{x^2}{2!}+\cdots+\frac{x^n}{n!}+o(x^n)$；

②$\sin x=x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-\cdots+(-1)^{m-1}\frac{x^{2m-1}}{(2m-1)!}+o(x^{2m-1})$；

③$\cos x=1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}-\cdots+(-1)^m\frac{x^{2m}}{(2m)!}+o(x^{2m})$；

④$\ln(1+x)=x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\cdots+(-1)^{n-1}\frac{x^n}{n}+o(x^n)$；

⑤$\frac{1}{1-x}=1+x+x^2+\cdots+x^n+o(x^n)$；

⑥$(1+x)^m=1+\underbrace{\boxed{m}}_{\text{等于}\mathrm{C}_m^1}x+\underbrace{\boxed{\frac{m(m-1)}{2!}}}_{\text{如果}m,n\text{都是整数，实际上就是组合数}\mathrm{C}_m^2}x^2+\cdots+\underbrace{\boxed{\frac{m(m-1)\cdots(m-n+1)}{n!}}}_{\text{如果}m,n\text{都是整数，实际上就是组合数}\mathrm{C}_m^n}x^n+o(x^n).$

为了便于应用，以下是实用版本的麦克劳林公式：

$$\sin x=x-\frac{1}{6}x^3+o(x^3)；\qquad \cos x=1-\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{24}x^4+o(x^4)；$$

$$\arcsin x = x + \frac{1}{6}x^3 + o\left(x^3\right); \qquad \ln\left(1+x\right) = x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 + o\left(x^3\right);$$

$$\tan x = x + \frac{1}{3}x^3 + o\left(x^3\right); \qquad \mathrm{e}^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + o\left(x^3\right);$$

$$\arctan x = x - \frac{1}{3}x^3 + o\left(x^3\right); \qquad \left(1+x\right)^\alpha = 1 + \alpha x + \frac{\alpha\left(\alpha-1\right)}{2}x^2 + o\left(x^2\right)$$

如果在做题时有更高阶的展开式的需要，或有其他函数的展开式的需要，可以自行推导. 一般来说，我们在实际应用时很少用直接套用公式的方法得出一个较为陌生的函数的泰勒公式，而是通过间接的方式得出. 如$\arctan\left(\mathrm{e}^x - 1\right)$，只需要将$\mathrm{e}^x - 1$的展开式代入$\arctan x$的展开式中即可，此处化简时应当特别当心，极容易出现计算失误.

我们还是只讨论怎么用麦克劳林展开式计算极限，而不讲展开式的其他应用. 对于在其它点处展开的一般的泰勒公式，在极限的计算中并不太常用，所以这里也不讲了.

依然举具体例子：

[例 68]求极限$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin x - x\cos x}{\sin^3 x}$.

这道题用等价无穷小代换和洛必达法则也很简单：

$$\lim_{x\to0}\frac{\sin x - x\cos x}{\sin^3 x} = \lim_{x\to0}\frac{\sin x - x\cos x}{x^3} \xlongequal{\text{洛必达法则}} \lim_{x\to0}\frac{x\sin x}{3x^2} = \lim_{x\to0}\frac{\sin x}{3x} = \frac{1}{3}.$$

接下来用泰勒公式法（实际上用的是麦克劳林公式，但大家习惯称之为泰勒公式法）来做这道题. 方法是：把分子分母展成相同阶数的麦克劳林公式，由于分母$\sin^3 x$比较容易利用等价无穷小代换变成x^3，所以我们考虑把分子展开成带佩亚诺余项的三阶麦克劳林公式. 分子上的两项展开后分别是

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + o\left(x^3\right) \text{和} x\cos x = x - \frac{x^3}{2!} + o\left(x^3\right).$$

所以它们相减应该是

$$\sin x - x\cos x = x - \frac{x^3}{3!} + o\left(x^3\right) - x + \frac{x^3}{2!} - o\left(x^3\right) = \frac{1}{3}x^3 + o\left(x^3\right)^{⑦},$$

其中一定要注意，两个比x^3高阶的无穷小相加或相减，还是比x^3高阶的无穷小（这个一会儿会详细介绍）！

⑦【$\frac{1}{3}x^3 + o\left(x^3\right)$】如果你看了前面的方法十五，应该知道，这意味着$\sin x - x\cos x$和$\frac{1}{3}x^3$是当$x\to0$时的一对等价无穷小.

所以原极限 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x - x\cos x}{\sin^3 x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\frac{1}{3}x^3+o\left(x^3\right)}{x^3}=\dfrac{1}{3}$.

这其中的高阶无穷小可以直接略去，原理是：若把分子分母同时除以 x^3，则有 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\frac{1}{3}x^3+o\left(x^3\right)}{x^3}=\lim\limits_{x\to 0}\left[\dfrac{\frac{1}{3}x^3}{x^3}+\dfrac{o\left(x^3\right)}{x^3}\right]=\dfrac{1}{3}+0=\dfrac{1}{3}$. 也可以这么想：当 $x\to 0$ 时，x 应该是很小的一个数，远远小于 1，而对于一个小于 1 的数字，它的次数越高，结果会越小（这道理很好理解，$0.5^2=0.25$，$0.5^3=0.125$）. 所以对于分子上的 $\frac{1}{3}x^3+o\left(x^3\right)$ 而言，$o\left(x^3\right)$ 代表着某个比三次方次数更高的多项式，与 $\frac{1}{3}x^3$ 不同阶，$o\left(x^3\right)$ 的值在 $\frac{1}{3}x^3$ 面前显得微不足道，不值一提，略去它将不会影响到极限值.

这乍一看好像比洛必达法则麻烦不少对吧？因为我出了一道简单题，而且一开始对这个方法还不熟练. 一会儿来一道麻烦的，就体现出泰勒展开法的优越性了.

在这里先对这个方法进行一点补充说明. 泰勒展开法解决的一般是当 $x\to 0$ 时的极限，本质上就是“把分子分母都用多项式代替，再加一个比多项式中每一项都高阶的无穷小，使得当 $x\to 0$ 时多项式里可以把 x 的低次幂全抵消掉，只留下一项，高阶无穷小直接略去，快速得到极限值”. 其中最关键的步骤就在于，怎么把一个函数展开，或者说需要我们展到几阶. 其实展开很容易，就是求导，对于一些简单的函数我们还可以直接背诵展开式，现在的问题是展到几阶比较合适呢？实际上，没有一个理论可以直接确定该展开到第几阶，但做题经验告诉我们，一般需要把加减运算的整体展开到“一项加一个高阶无穷小”这样一种程度，就比如刚才把加减运算整体“$\sin x - x\cos x$”展开成了“$\frac{1}{3}x^3+o\left(x^3\right)$”，即为一项 $\frac{1}{3}x^3$ 加一个高阶无穷小 $o\left(x^3\right)$. 此外，一般来说，分子分母展开的阶数是相同的，如果你看到分母上是三次方的（即 x 的三阶无穷小），那分子也展开成三阶就好（上下同阶）.

有时候，我们需要展开的是两个简单函数相乘的形式，比如上面的 $x\cos x$，这时候其实不用逐阶展开，因为对函数的乘积求导太麻烦了. 我们可以直接背 $\cos x$ 的展开式，再乘上 x 就好. 再比如像三阶展开 $\sin x\cdot\sqrt{1+x}$，完全可以把 $\sin x$ 和 $\sqrt{1+x}$ 的公式背下来，都展到三阶，然后乘起来，把高于三阶的都略去，变成高阶无穷小 $o\left(x^3\right)$. 在此介绍一下高阶无穷小的运算律（注意，在前面的方法十五里我已经讲过，这里的“等于号”应理解为“$\in$”；而等号右边的 $o(\cdot)$ 符号应理解为一个函数集合，等号左边的 $o(\cdot)$ 符号应理解为对应函数集合中的任何一个

函数）：

①$o\left(x^{n}\right)\pm o\left(x^{m}\right)=o\left(x^{\min\{n,m\}}\right)$；

②$o\left(x^{n}\right)\cdot o\left(x^{m}\right)=o\left(x^{m+n}\right)$；

③$x^{n}\cdot o\left(x^{m}\right)=o\left(x^{m+n}\right)$.

作为练习，我们三阶展开一下$\sin x\cdot\sqrt{1+x}$.首先$\sin x=x-\dfrac{x^{3}}{3!}+o\left(x^{3}\right)$，$\sqrt{1+x}$其实就是$(1+x)^{\frac{1}{2}}$，按照前面第⑥条，展开应该是$1+\dfrac{1}{2}x-\dfrac{1}{4\times 2!}x^{2}+\dfrac{3}{8\times 3!}x^{3}+o\left(x^{3}\right)$.

所以，它们乘起来就是：

$$\sin x\cdot\sqrt{1+x}=\left[x-\frac{x^{3}}{3!}+o\left(x^{3}\right)\right]\left[1+\frac{1}{2}x-\frac{1}{4\times 2!}x^{2}+\frac{3}{8\times 3!}x^{3}+o\left(x^{3}\right)\right]$$

$$=x-\frac{x^{3}}{3!}\boxed{+o\left(x^{3}\right)}+\frac{1}{2}x^{2}\boxed{-\frac{x^{4}}{2\times 3!}+\frac{1}{2}xo\left(x^{3}\right)}-\frac{1}{4\times 2!}x^{3}\boxed{+\frac{1}{4\times 2!\times 3!}x^{5}}$$

$$\boxed{-\frac{1}{4\times 2!}x^{2}o\left(x^{3}\right)+\frac{3}{8\times 3!}x^{4}-\frac{3}{8\times 3!\times 3!}x^{6}+\frac{3}{8\times 3!}x^{3}o\left(x^{3}\right)}$$

$$\boxed{+xo\left(x^{3}\right)-\frac{x^{3}}{3!}o\left(x^{3}\right)+o\left(x^{3}\right)\cdot o\left(x^{3}\right)}$$

$$=x+\frac{1}{2}x^{2}-\frac{7}{24}x^{3}\underbrace{+o\left(x^{3}\right)}_{\substack{\text{框里的}\\\text{合起来}\\\text{记作它}}}.$$

其中我用框圈出来的，都不要，因为框里的都是比x^{3}高阶的无穷小，所以合起来最后记作一个$o\left(x^{3}\right)$就行. 以后看见高于三次就直接不用写了，我写出来是为了让思路更清晰. 虽说看上去这过程挺麻烦的，但如果你自己展一个，会发现根本没有想象得那么困难.

再多的理论分析也不如“题感”，还是要多加练习. 这种方法可谓是很多极限的通法，如果学会了这方法，在极限这一方面你就很厉害了.

[例 69]接下来实战一下，求一个前所未有的极限$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1+\frac{1}{2}x^{2}-\sqrt{1+x^{2}}}{\left(\cos x-\mathrm{e}^{x^{2}}\right)\sin x^{2}}$.

我们一点一点地展开，先展分子. 上面的$1+\dfrac{1}{2}x^{2}$，本来就是多项式，就不用

动了. 先展开这个$\sqrt{1+x^2}$，这其实就是把上面讲的$\sqrt{1+x}$中的x换成x^2了，所以很容易就能背出展开式：$\sqrt{1+x^2}=1+\dfrac{1}{2}x^2-\dfrac{1}{4\times 2!}x^4+o\left(x^4\right)$. 所以整个分子应该是$1+\dfrac{1}{2}x^2-\sqrt{1+x^2}=1+\dfrac{1}{2}x^2-\left[1+\dfrac{1}{2}x^2-\dfrac{1}{4\times 2!}x^4+o\left(x^4\right)\right]=\dfrac{1}{8}x^4+o\left(x^4\right)$（展开到"一项加一个高阶无穷小"的程度）.

再展开分母. 因为刚才我们展到了四阶，所以下面也展成四阶. 首先$\cos x=1-\dfrac{x^2}{2!}+\dfrac{x^4}{4!}+o\left(x^4\right)$，$\mathrm{e}^{x^2}=1+x^2+\dfrac{x^4}{2!}+o\left(x^4\right)$（把$x^2$看成整体），所以它们相减就是$\cos x-\mathrm{e}^{x^2}=1-\dfrac{x^2}{2!}+\dfrac{x^4}{4!}+o\left(x^4\right)-1-x^2-\dfrac{x^4}{2!}-o\left(x^4\right)=-\dfrac{3}{2}x^2-\dfrac{11}{24}x^4+o\left(x^4\right)$；然后还有一个$\sin x^2=x^2+o\left(x^4\right)$（还是把$x^2$看成整体）.

分母这两部分乘起来就是

$$\left(\cos x-\mathrm{e}^{x^2}\right)\sin x^2=\left[\boxed{-\frac{3}{2}x^2}-\frac{11}{24}x^4+o\left(x^4\right)\right]\left[\boxed{x^2}+o\left(x^4\right)\right],$$

你会发现除了$-\dfrac{3}{2}x^2$和x^2相乘，其余的都比x^4高阶，所以

$$\left(\cos x-\mathrm{e}^{x^2}\right)\sin x^2=-\frac{3}{2}x^4+o\left(x^4\right).$$

那么原极限$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1+\dfrac{1}{2}x^2-\sqrt{1+x^2}}{\left(\cos x-\mathrm{e}^{x^2}\right)\sin x^2}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\dfrac{1}{8}x^4+o\left(x^4\right)}{-\dfrac{3}{2}x^4+o\left(x^4\right)}=\dfrac{\dfrac{1}{8}}{-\dfrac{3}{2}}=-\dfrac{1}{12}$.

这道题我为了让大家看明白，写得啰嗦了点，做的时候不算麻烦的. 在以上呈现出的过程中，我对函数中的每一个部分都展开了，我那只是为了把展开的步骤讲清楚. 实际上，在做题之前，应该看一看题目中是否可以先用等价无穷小替换等方法化简一下. 比如这道题的分母上的$\sin x^2$就可以先替换成x^2. 这样在展开的时候，效率会提高很多.

这道题除了泰勒公式展开，别的办法似乎都充满困难，就算是用加减法的等价无穷小代换（前面方法十五有介绍），分子也是会被消掉的. 看得出来，泰勒公式展开在处理一些复杂极限的时候，拥有着无可比拟的优越性，所以遇到很难很难的极限的时候，可以考虑用泰勒公式展开的方法，如果练得熟练，不会耗费很多时间，不过错误率也挺高的，因此应当多加练习. 当然，如果是很简单的极限题，就犯不着用这个方法了，否则就有些大炮打蚊子——大材小用的意味了.

再举一个例子.

[例 70] $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt[6]{x^6+x^5}-\sqrt[6]{x^6-x^5}\right)$.

这道题是无穷减无穷型的，一般需要我们进行通分. 但这里没有分母，所以先进行倒代换，设 $x=\dfrac{1}{t}$（此时 $t\to0^+$），来创造分母.

$$\text{原极限}=\lim_{t\to0^+}\left(\sqrt[6]{\frac{1}{t^6}+\frac{1}{t^5}}-\sqrt[6]{\frac{1}{t^6}-\frac{1}{t^5}}\right)=\lim_{t\to0^+}\left(\sqrt[6]{\frac{1+t}{t^6}}-\sqrt[6]{\frac{1-t}{t^6}}\right)=\lim_{t\to0^+}\frac{\sqrt[6]{1+t}-\sqrt[6]{1-t}}{t}.$$

由于分母是一次的，所以一般需要我们把分子也展开到一阶就够了. 根据前面介绍的公式，有 $\sqrt[6]{1+x}=1+\dfrac{1}{6}x+o(x)$，分别设 $x=t$ 及 $x=-t$ 可得

$$\sqrt[6]{1+t}=1+\frac{1}{6}t+o(t),$$
$$\sqrt[6]{1-t}=1-\frac{1}{6}t+o(t),$$

因此就有 $\sqrt[6]{1+t}-\sqrt[6]{1-t}=1+\dfrac{1}{6}t-1+\dfrac{1}{6}t+o(t)=\dfrac{1}{3}t+o(t)$，故原极限 $=\lim\limits_{t\to0^+}\dfrac{\frac{1}{3}t+o(t)}{t}$ $=\dfrac{1}{3}$.

二十一、利用导数定义

导数的定义本身就是个极限，所以当你看见与导数定义类似的极限，可以把它转化成导数运算. 比如 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\cos(x+a)-\cos a}{x}=(\cos x)'\big|_{x=a}=-\sin a$.

导数的定义是 $f'(x)=\lim\limits_{\Delta x\to0}\dfrac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}$，这个极限有三个特点：一是，分子与分母都是趋于 0 的；二是，分子两个括号内的式子相减恰好等于分母；三是，当 $\Delta x\to0$ 时，分子上的两个括号中前一个是变化着的（$x+\Delta x$），后一个是没有变化的（x）. 只要满足这三个特点的极限，就可以直接写成函数在某点处的导数. 哪点处的导数呢？分子上的第二个括号中的那一点（x）处的导数！ 再举两个例子：

[例 71] $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{\tan x-\tan 1}{x-1}=(\tan x)'\big|_{x=1}=\sec^2 1$.

[例 72] $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\ln\left(2+\frac{1}{x}\right)-\ln\left(2-\frac{1}{x}\right)}{\frac{2}{x}}$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{\left[\ln\left(2+\frac{1}{x}\right)-\ln 2\right]-\left[\ln\left(2-\frac{1}{x}\right)-\ln 2\right]}{\frac{2}{x}}$$

$$\xlongequal{令t=\frac{1}{x}}\lim_{t\to0}\frac{\ln(2+t)-\ln 2}{2t}+\lim_{t\to0}\frac{\ln(2-t)-\ln 2}{-2t}$$

$$=\frac{1}{2}(\ln t)'\big|_{t=2}+\frac{1}{2}(\ln t)'\big|_{t=2}=\frac{1}{2}.$$

从上例中也能看出，对于某些极限，看似是导数定义的形式，但不完全满足上述两个特点，比如上例中的$\lim\limits_{t\to0}\frac{\ln(2+t)-\ln 2}{2t}$，又如$\lim\limits_{x\to0}\frac{\arctan(x+1)-\arctan 1}{2x}$，分子两个括号相减并不等于分母！这时候你只要把整个式子乘以 2，外面再乘以$\frac{1}{2}$，以后者为例，就变成了$\frac{1}{2}\lim\limits_{x\to0}\frac{\arctan(x+1)-\arctan 1}{x}$，这就跟导数定义一致了，答案应该是$\frac{1}{2}(\arctan x)'\big|_{x=1}=\frac{1}{4}$. 这种不完全满足两个特点的极限，通过乘以或除以一些常数，让分母恰好等于分子两括号之差，这样就能转化成导数的标准定义了.

但是要注意，大题让你求那种“能转化为比较简单的函数的导数”的极限，或者说导数表里有的，最好就不要直接转化成导数了，这是选择填空用的方法. 毕竟导数是由极限定义的，如果用导数去求极限，在大题中就显得有些颠倒关系、循环论证了（让你求这个极限，即简单函数的导数，出题者的意思应该是假设认为这个导数还未知）. 所以我们还是应该按部就班地用前面的方法解决问题. 但如果转化成的函数比较复杂，或者说导数表里没有的，也可以采用导数定义的方法（这时不涉及导数表中的函数，应认为导数表中简单函数的求导结果均已知，从而可以用简单函数导数的四则运算法则间接求出复杂函数的导数）. 请读者仔细体会上述逻辑关系. 在应试的过程中，我们可以揣测出题者的意图，主动地让题目难度适中.

二十二、利用定积分或重积分定义

22.1 利用定积分定义

利用导数定义能求极限，利用定积分定义也能求. 定积分的定义是：

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x=\lim_{\lambda\to0}\sum_{i=1}^{n}f(\xi_i)\Delta x_i .$$

所以当我们遇到上式右边的极限形式时，可以考虑转化成定积分的计算. 这个形式有什么特点呢？第一，它是个和式，而且有无限多项（λ是区间条的最大长度，当$\lambda\to0$时$n\to\infty$）；第二，和式的各项都是两部分的乘积，一部分是函

数值，一部分是自变量的增量（一般来说，每一项的自变量增量Δx_i都取相等的，这样容易计算，而且这个自变量增量Δx_i是要趋于 0 的；至于前面那一部分的函数值$f\left(\xi_i\right)$，其中的ξ_i是在每一个区间$\left[x_{i-1},x_{i-1}+\Delta x_i\right]$中任意取的，但为了方便，我们一般有三种取法：取区间的左端点、右端点或中点，但最可能取右端点）．为了方便理解，我们先举一个简单的例子：

[例 73] 求极限$\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{1}{n^2}+\dfrac{2}{n^2}+\dfrac{3}{n^2}+\cdots+\dfrac{n}{n^2}\right)$.

这道题最简单的方法是直接求和，里面分子就是个等差数列，你会很轻易地得到答案$\dfrac{1}{2}$．我们现在用定积分定义做一下．首先我们应该看看这个式子具不具有刚才说的两个特点．第一，它是个和式，而且有无限多项，这没问题．第二，每一项都是自变量增量和函数值的乘积．事实上，我们如果把$\dfrac{1}{n^2}$拆成$\dfrac{1}{n}\times\dfrac{1}{n}$，$\dfrac{2}{n^2}$拆成$\dfrac{2}{n}\times\dfrac{1}{n}$，…，$\dfrac{n}{n^2}$拆成$\dfrac{n}{n}\times\dfrac{1}{n}$．这样一来，每一项后面的$\dfrac{1}{n}$，就可以看作是一个长度为 1 的闭区间被平均分成了n份后每份的长度，这也就是自变量的增量，如果假设这个区间是$[0,1]$，也就是整个区间$[0,1]$被分成了n个小区间$\left[0,\dfrac{1}{n}\right],\left[\dfrac{1}{n},\dfrac{2}{n}\right],\cdots,\left[\dfrac{n-1}{n},\dfrac{n}{n}\right]$，每一个区间的增量都是$\dfrac{1}{n}$，各个小区间的右端点分别为$\dfrac{1}{n},\dfrac{2}{n},\cdots,\dfrac{n}{n}$．函数$f(x)=x$在这些右端点处的函数值恰好也为$\dfrac{1}{n},\dfrac{2}{n},\cdots$，$\dfrac{n}{n}$．所以原极限$=\int_0^1 x\mathrm{d}x=\left[\dfrac{1}{2}x^2\right]_0^1=\dfrac{1}{2}$.

以上展现了寻找被积函数的过程，但我们没有必要每遇到一道题就像上面一样思考一遍，下面介绍一种较为简单的思考方法. 实际上，让你用定积分定义计算的极限，被积区间一般都可以看作$[0,1]$，看成$[0,1]$最方便，所以一般需要你分离出一个增量$\dfrac{1}{n}$，也就是区间$[0,1]$被分成了n个小区间

$$\left[0,\frac{1}{n}\right],\left[\frac{1}{n},\frac{2}{n}\right],\cdots,\left[\frac{n-1}{n},\frac{n}{n}\right].$$

剩下的工作就是观察一下：你刚才分离完$\frac{1}{n}$以后剩下的部分，是各区间内哪个点（一般是右端点$\frac{i}{n}$）代进哪个函数所形成的函数值？在这里有一个技巧，当你提出一个$\frac{1}{n}$，可以把剩下的部分整理成一个关于$\frac{i}{n}$的式子，再把所有的$\frac{i}{n}$换成x，这就是区间$[0,1]$上的被积函数了. 当我们找到这么一个被积函数，整个定积分式也就确定下来了，就可以用求积分来代替求极限了.

总结成四步，就是：①写成含有$\sum$符号的求和式，对通项提出一个$\frac{1}{n}$；②对提走$\frac{1}{n}$后剩下的部分整理，整理成一个关于$\frac{i}{n}$的式子；③把$\frac{i}{n}$换成x，就是被积函数；④计算这个被积函数在$[0,1]$上的定积分，即为原极限值. 一式以蔽之，即$\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{i=1}^{n} f\left(\frac{i}{n}\right)\frac{1}{n}=\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x$.

再举一个例子：

[例 74]求极限$\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{n}{n^2+1^2}+\frac{n}{n^2+2^2}+\cdots+\frac{n}{n^2+n^2}\right)$.

怎么拆呢？先把每一项都拆出一个$\frac{1}{n}$. 那么第i项就可以拆成$\frac{n^2}{n^2+i^2}\times\frac{1}{n}$. 前面的$\frac{n^2}{n^2+i^2}$怎么整理呢？我们只要把$\frac{n^2}{n^2+i^2}$上下同除以$n^2$就可以出现$\frac{i}{n}$，这样原式就会变成$\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{i=1}^{n}\frac{1}{1+\left(\frac{i}{n}\right)^2}\times\frac{1}{n}$. 按照前面描述的步骤，把$\frac{i}{n}$换成$x$，所以被积函数就是$f(x)=\frac{1}{1+x^2}$. 至此我们就能成功把它转化成一个定积分了. 故原极限$=\int_0^1\frac{1}{1+x^2}\mathrm{d}x=[\arctan x]_0^1=\frac{\pi}{4}$.

再举一个例子.

[例 75]求极限$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n}{\sqrt[n]{n!}}$.

这很难让人联想到定积分，因为没有求和的影子. 但转念一想，这里面其实有一个阶乘，只要想办法在阶乘前加个对数，就能把“连乘”转化成“连加”. 具体过程是$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n}{\sqrt[n]{n!}}=\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{\dfrac{n^n}{n!}}=\lim\limits_{n\to\infty}\mathrm{e}^{\ln\sqrt[n]{\frac{n^n}{n!}}}=\mathrm{e}^{\lim\limits_{n\to\infty}\ln\sqrt[n]{\frac{n^n}{n!}}}=\mathrm{e}^{\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}\ln\frac{n^n}{n!}}=\mathrm{e}^{\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}\ln\frac{n\cdot n\cdot\cdots\cdot n}{1\cdot 2\cdot\cdots\cdot n}}$

$$=\mathrm{e}^{\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}\left(\ln\frac{n}{1}+\ln\frac{n}{2}+\cdots+\ln\frac{n}{n}\right)}=\mathrm{e}^{\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}\ln\frac{n}{i}}=\mathrm{e}^{\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}\ln\frac{1}{\frac{i}{n}}}=\mathrm{e}^{\int_0^1\ln\frac{1}{x}\mathrm{d}x}=\mathrm{e}.$$

在上面的过程中，最后那个积分其实已经不是定积分了，它是一个瑕积分，但我们仍然可以使用分部积分法计算出其值，其值为 1. 求积转化成求和就得靠对数. 在试卷上展示解题过程时，像$\mathrm{e}^{\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}\ln\frac{1}{\frac{i}{n}}}$这种写法可能会太折磨眼睛，可以记作$\exp\left\{\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}\ln\dfrac{1}{\frac{i}{n}}\right\}$，或干脆单独计算指数，最后再写上底数$\mathrm{e}$. 除了定积分的方法以外，本例题还可以用斯特林公式来解决，详见方法三十三.

有时，可能无论如何也无法整理成关于$\dfrac{i}{n}$的式子. 这时说不定可以整理成关于$\dfrac{i-1}{n}$的式子，或$\dfrac{2i-1}{2n}$的式子，这也都是可以把$\dfrac{i-1}{n}$或$\dfrac{2i-1}{2n}$换成x的，即有

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}f\left(\frac{i-1}{n}\right)\frac{1}{n}=\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}f\left(\frac{2i-1}{2n}\right)\frac{1}{n}=\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x,$$

这只不过是取了每个小区间的左端点和中点. 其实，理论上说，取区间内的任意一点都能满足定积分的定义，即$\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{i=1}^{n}f\left(\dfrac{i-\theta}{n}\right)\dfrac{1}{n}=\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x$，其中$\theta\in[0,1]$.

下面再举一个较为新颖的例子.

[例 76]求极限$\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{n+1}{\sqrt{n^2+1^2}}+\dfrac{n+\frac{1}{2}}{\sqrt{n^2+2^2}}+\cdots+\dfrac{n+\frac{1}{n}}{\sqrt{n^2+n^2}}\right)\sin\dfrac{1}{n}$.

首先，当我们看到$\sin\dfrac{1}{n}$时，应意识到，它能进行等价无穷小替换，变为$\dfrac{1}{n}$.

原极限$=\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{i=1}^{n}\dfrac{n+\frac{1}{i}}{\sqrt{n^2+i^2}}\cdot\dfrac{1}{n}$. 似乎遇到了瓶颈，好像根本无法转化成定积分. 如

果按照往常的思路，看到$\sqrt{n^2+i^2}$这种形式，一般需要我们给分子分母同时除以n来构造出$\frac{i}{n}$，但除以n以后会变成$\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{i=1}^{n}\frac{1+\frac{1}{ni}}{\sqrt{1+\left(\frac{i}{n}\right)^2}}\cdot\frac{1}{n}$，依然无法化为只含有$\frac{i}{n}$的式子，因为分子上有一个$\frac{1}{ni}$比较烦人．这时候，我们应该想起一句话，“既然我们无法解决问题，不妨就解决掉制造问题的人”，因此直接把$\frac{1}{ni}$省略掉．由于$\frac{1}{ni}$恒为正值，所以如果将其省略掉，整个式子应该比以前要小，即

$$\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{1+\left(\frac{i}{n}\right)^2}}\cdot\frac{1}{n}\le\sum_{i=1}^{n}\frac{1+\frac{1}{ni}}{\sqrt{1+\left(\frac{i}{n}\right)^2}}\cdot\frac{1}{n},$$

相信很多人看到这里就知道我要怎么做了——夹逼准则．

有了下界，再找上界．怎么才能让这个式子变大呢？分母已经凑好$\frac{i}{n}$了，就不要再处理它了，我们依然处理分子，只要让分子变大，整个式子就比以前大，而且我们还要给分子凑出$\frac{i}{n}$．可以把$\frac{1}{ni}$放大成$\frac{i^2}{ni}$，也就是$\frac{i}{n}$吗？看似可行，实际上，如果这样放大，会导致上下界极限不一致的问题，夹逼准则不能用．也就是说，这样做的话就“放大得太过分了”．既然放大成$\frac{i^2}{ni}$太过分，那么放大成$\frac{i}{ni}$，也就是$\frac{1}{n}$可以吗？有人说，这里面没有$\frac{i}{n}$啊！事实上这是没问题的，因为：

$$\sum_{i=1}^{n}\frac{1+\frac{1}{ni}}{\sqrt{1+\left(\frac{i}{n}\right)^2}}\cdot\frac{1}{n}\le\sum_{i=1}^{n}\frac{1+\frac{1}{n}}{\sqrt{1+\left(\frac{i}{n}\right)^2}}\cdot\frac{1}{n}=\left(1+\frac{1}{n}\right)\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{1+\left(\frac{i}{n}\right)^2}}\cdot\frac{1}{n},$$

也就是说，求和指标是i，我们可以把$1+\frac{1}{n}$提出去．

这样一来，我们就得到了

$$\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{1+\left(\frac{i}{n}\right)^2}}\cdot\frac{1}{n}\le\sum_{i=1}^{n}\frac{1+\frac{1}{ni}}{\sqrt{1+\left(\frac{i}{n}\right)^2}}\cdot\frac{1}{n}\le\left(1+\frac{1}{n}\right)\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{1+\left(\frac{i}{n}\right)^2}}\cdot\frac{1}{n},$$

因为 $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{i=1}^{n}\dfrac{1}{\sqrt{1+\left(\dfrac{i}{n}\right)^2}}\cdot\dfrac{1}{n}=\int_0^1\dfrac{1}{\sqrt{1+x^2}}\mathrm{d}x=\ln\left(1+\sqrt{2}\right)$，

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{1+\left(\frac{i}{n}\right)^2}}\cdot\frac{1}{n}=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)\cdot\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{1+\left(\frac{i}{n}\right)^2}}\cdot\frac{1}{n}=1\cdot\int_0^1\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}\mathrm{d}x$$

$$=\ln\left(1+\sqrt{2}\right),$$

所以根据夹逼准则，$\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{i=1}^{n}\dfrac{1+\dfrac{1}{ni}}{\sqrt{1+\left(\dfrac{i}{n}\right)^2}}\cdot\dfrac{1}{n}=\ln\left(1+\sqrt{2}\right)$，即为原极限.

我们在上面都把极限转化成了$[0,1]$上的定积分，但可不可以不转化成$[0,1]$上的定积分而转化成一般闭区间上的积分呢？这是可以的，事实上我们有如下公式：$\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{i=1}^{n}f\left(a+\dfrac{b-a}{n}i\right)\dfrac{b-a}{n}=\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$. 但是这种情形也可以转化成$[0,1]$上的情形，具体转化方式为$\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{i=1}^{n}f\left(a+\dfrac{b-a}{n}i\right)\dfrac{b-a}{n}=(b-a)\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{i=1}^{n}f\left[a+(b-a)\dfrac{i}{n}\right]\dfrac{1}{n}$ $=(b-a)\int_0^1 f\left[a+(b-a)x\right]\mathrm{d}x$. 虽说区间可以转化，但是还是以掌握上述的一般公式为好.

我们在上面还假设了每一个自变量增量Δx_i都取相等的，即对区间划分时是等距离划分的，如果取消这一假定呢？也就是说，如果各个自变量增量不相等呢？请看下例.

[例 77]求极限$\lim\limits_{n\to\infty}\left(b^{\frac{1}{n}}-1\right)\sum\limits_{i=0}^{n-1}b^{\frac{i}{n}}\sin b^{\frac{2i+1}{2n}}$，其中$b>1$.

首先，注意到求和指标是i，所以我们可以把$b^{\frac{1}{n}}-1$放进求和号里面，则有原极限$=\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{i=0}^{n-1}b^{\frac{i}{n}}\left(b^{\frac{1}{n}}-1\right)\sin b^{\frac{2i+1}{2n}}=\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{i=0}^{n-1}\left(b^{\frac{i+1}{n}}-b^{\frac{i}{n}}\right)\sin b^{\frac{2i+1}{2n}}$. 这里面的$\sin b^{\frac{2i+1}{2n}}$就可以看作是函数值，$b^{\frac{i+1}{n}}-b^{\frac{i}{n}}$就可以看作是自变量的增量. 当$i$从0取到$n-1$时，从增量的形式可以看出，这是区间$[1,b]$按照$\left[1,b^{\frac{1}{n}}\right],\left[b^{\frac{1}{n}},b^{\frac{2}{n}}\right],\cdots,\left[b^{\frac{n-1}{n}},b\right]$这种方式划

分的，每一个小区间的长度正好是$b^{\frac{i+1}{n}}-b^{\frac{i}{n}}$.

我们再来检验一下最大的区间长度λ是否趋于0．由于各个区间端点上的指数$\frac{i}{n}$是均匀分布着的，而函数b^x的态势又是爆炸般增长，因此，指数部分越大，b^x应该增长得越厉害，所以最后一个区间$\left[b^{\frac{n-1}{n}},b\right]$应该是所有区间当中长度最长的一个了．随着$n\to\infty$，它的长度的极限$\lim\limits_{n\to\infty}\left(b-b^{\frac{n-1}{n}}\right)=b\lim\limits_{n\to\infty}\left(1-b^{-\frac{1}{n}}\right)=b\times 0$ $=0$．故$\lambda\to 0$没问题.

再来看看$\sin b^{\frac{2i+1}{2n}}$是区间中的哪个点代进哪个函数后得到的函数值．可以看出，这恰恰是在每个区间$\left[b^{\frac{i}{n}},b^{\frac{i+1}{n}}\right]$内取了一点$b^{\frac{i+\frac{1}{2}}{n}}=b^{\frac{2i+1}{2n}}$，再将其代入函数$\sin x$后所得到的函数值.

因此，原极限$=\int_1^b \sin x\mathrm{d}x=\cos 1-\cos b$.

可见，用定积分求极限是一种技巧性很高的方法，如果被积函数与积分区间寻找恰当，效率也是很高的.

22.2 利用重积分定义

有了上面的基础，利用重积分定义求极限也十分简单了. 在这里只讲步骤，思想与定积分类似.

如果是利用二重积分求极限，题目应该会给出两个求和号，求和指标分别为i和j. 第一步，先提出$\frac{1}{n^2}$；第二步，把剩下的式子整理成关于$\frac{i}{n}$和$\frac{j}{n}$的形式；第三步，把$\frac{i}{n}$换成x，把$\frac{j}{n}$换成y，写出一个二元函数$f(x,y)$；第四步，求这个二元函数在$[0,1]\times[0,1]$⑧上的二重积分，即为原极限值. 一式以蔽之：

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}f\left(\frac{i}{n},\frac{j}{n}\right)\frac{1}{n^2}=\int_0^1\mathrm{d}x\int_0^1 f(x,y)\mathrm{d}y=\iint\limits_{[0,1]\times[0,1]}f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

[例 78] 求极限$\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{i=1}^{n}\sum\limits_{j=1}^{n}\frac{n}{(n+i)(n^2+j^2)}$. 看到两个求和号，我们很可能就需要将

---

⑧【$[0,1]\times[0,1]$】这是一种“直积”的表述方式，也可以记作$[0,1]^2$. 两个集合的直积就是以第一个集合中的元素作为横坐标，以第二个集合中的元素作为纵坐标，组成的所有点的集合. 这里$[0,1]\times[0,1]=\{(x,y)|0\le x\le 1,0\le y\le 1\}$. 直积也称为笛卡尔积.

其转化为二重积分. 首先提出$\dfrac{1}{n^2}$，变成$\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{i=1}^{n}\sum\limits_{j=1}^{n}\dfrac{n^3}{(n+i)(n^2+j^2)}\cdot\dfrac{1}{n^2}$，然后把剩下的式子整理一下，变成$\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{i=1}^{n}\sum\limits_{j=1}^{n}\dfrac{1}{\left(1+\dfrac{i}{n}\right)\left[1+\left(\dfrac{j}{n}\right)^2\right]}\cdot\dfrac{1}{n^2}$，然后根据上述规则，我们就可以知道，这个二重积分的被积函数应该是$\dfrac{1}{(1+x)(1+y^2)}$，因此，原极限$=\iint\limits_{D}\dfrac{1}{(1+x)(1+y^2)}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$，其中$D=\{(x,y)|0\le x\le 1,0\le y\le 1\}$. 可以计算出其值为$\dfrac{\pi}{4}\ln 2$.

同理，我们也可以利用三重积分的定义求极限：

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{n}f\left(\frac{i}{n},\frac{j}{n},\frac{k}{n}\right)\frac{1}{n^3}=\iiint\limits_{[0,1]^3}f(x,y,z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z.$$

如果你是数学专业，甚至可以利用m重积分的定义求极限：

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{i_1=1}^{n}\sum_{i_2=1}^{n}\cdots\sum_{i_m=1}^{n}f\left(\frac{i_1}{n},\frac{i_2}{n},\cdots,\frac{i_m}{n}\right)\frac{1}{n^m}=\overbrace{\int\int\cdots\int}^{m\text{个积分号}}_{[0,1]^m}f(x_1,x_2,\cdots,x_m)\mathrm{d}x_1\mathrm{d}x_2\cdots\mathrm{d}x_m.$$

这类题目的相同点，就是都具有相似的解题程序. 关键在于转化为合适的积分，然后正确地计算积分.

二十三、积分上限函数的极限

所谓积分上限函数，无非就是自变量出现在了积分上限的位置上. 如果纯粹地让你求一个积分上限函数的极限，实际上就是求反常积分的值，可以先求原函数再求极限. 而我们在此讨论的，主要是积分上限函数出现在分式中的情况.

首先我们来看$\dfrac{0}{0}$型的情况. 我们一般不把积分上限函数当成定积分，计算出它的值再求极限，那样不仅太麻烦，而且对于许多题目来说是不可能的. 我们有更先进的方法，就是洛必达法则. 为什么这么说呢？因为你如果要用洛必达法则，就一定要对积分上限函数求导，而它的导数是很好得到的——对于连续的$f(x)$而言，积分上限函数$\varPhi(x)=\int_a^x f(t)\mathrm{d}t$的导数，恰好就等于$f(x)$. 这就大大减少了你求原函数耽误的时间.

[例 79]求极限$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\int_0^x\cos t^2\mathrm{d}t}{x}$.

这就是一个$\frac{0}{0}$型的极限，洛必达法则的三个使用条件在这一部分题目中一般都是成立的．我们开始分别求导，分母的导数就是1，分子的导数就是$\cos x^2$，所以$\lim\limits_{x\to 0}\frac{\int_0^x \cos t^2\mathrm{d}t}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{\cos x^2}{1}=1$．

来一个稍难一点的：

[例 80] 求极限$\lim\limits_{x\to 0}\frac{\int_{\cos x}^1 \mathrm{e}^{-t^2}\mathrm{d}t}{x^2}$．这也是$\frac{0}{0}$型的，但分子上并不是标准的积分上限函数．为了给它求导方便，我们把它变成一个标准的积分上限函数．首先，把下限的变量变到上限，$\lim\limits_{x\to 0}\frac{\int_{\cos x}^1 \mathrm{e}^{-t^2}\mathrm{d}t}{x^2}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{-\int_1^{\cos x} \mathrm{e}^{-t^2}\mathrm{d}t}{x^2}$．其次容易观察，分子是由函数$y=-\int_1^u \mathrm{e}^{-t^2}\mathrm{d}t$（积分上限函数）和$u=\cos x$复合而成的，根据复合函数的求导法则，就有$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}u}\times\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}=-\mathrm{e}^{-u^2}\times\left(-\sin x\right)=\sin x\mathrm{e}^{-\cos^2 x}$．分母的导数容易，是$2x$．

所以$\lim\limits_{x\to 0}\frac{\int_{\cos x}^1 \mathrm{e}^{-t^2}\mathrm{d}t}{x^2}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x\mathrm{e}^{-\cos^2 x}}{2x}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{2x}\cdot\frac{1}{\mathrm{e}^{\cos^2 x}}=\frac{1}{2\mathrm{e}}$．

来一个更难一点的：

[例 81] 求极限$\lim\limits_{x\to 0}\frac{\int_0^x\int_0^u\left(\mathrm{e}^{t^2}-1\right)\mathrm{d}t\mathrm{d}u}{\arctan^4 x}$．没别的办法，也只能用洛必达法则了．当然，在用洛必达法则之前，应当注意要先用等价无穷小量代换的方法将分母变得简单一点．

$$\text{原极限}=\lim_{x\to 0}\frac{\int_0^x\int_0^u\left(\mathrm{e}^{t^2}-1\right)\mathrm{d}t\mathrm{d}u}{x^4}=\lim_{x\to 0}\frac{\int_0^x\left(\mathrm{e}^{t^2}-1\right)\mathrm{d}t}{4x^3}=\lim_{x\to 0}\frac{\mathrm{e}^{x^2}-1}{12x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{x^2}{12x^2}=\frac{1}{12}.$$

遇到$\frac{0}{0}$型的积分上限函数，就考虑洛必达法则；对于不是标准形式的“伪”积分上限函数，通过交换积分上下限、复合函数分析等一系列手段，把它化成标准的积分上限函数，再求导.

我们再来看一下$\frac{\infty}{\infty}$型的情况. 对于这种类型，也可以用洛必达法则. 我们曾在方法 16.2 中指出，$\frac{\infty}{\infty}$的条件可以放宽一些，只要“任意比无穷”就可以用洛必达法则. 所以，如果我们不易判断分子的情况，而易于判断分母是无穷大，就可以使用洛必达法则. 如下例.

[例 82]求极限 $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\int_1^x\left[t^2\left(e^{\frac{1}{t}}-1\right)-t\right]dt}{x^2\ln\left(1+\dfrac{1}{x}\right)}$.

首先对分母应用一下等价无穷小替换 $\ln\left(1+\dfrac{1}{x}\right)\sim\dfrac{1}{x}$（$x\to+\infty$），原极限就变成了 $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\int_1^x\left[t^2\left(e^{\frac{1}{t}}-1\right)-t\right]dt}{x}$. 容易判断，分母在 $x\to+\infty$ 时是无穷大，所以不必判断分子是否为无穷大，我们就可以使用洛必达法则.（有人问，它怎么可能不是无穷大呢？若反常积分 $\int_1^{+\infty}\left[t^2\left(e^{\frac{1}{t}}-1\right)-t\right]dt$ 收敛，它就不是无穷大了. 事实上，它不收敛，确实是无穷大，但是我们已经没有必要判别了.）

$$原极限=\lim_{x\to+\infty}\frac{\int_1^x\left[t^2\left(e^{\frac{1}{t}}-1\right)-t\right]dt}{x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2\left(e^{\frac{1}{x}}-1\right)-x}{1}=\lim_{t\to0^+}\left[\frac{1}{t^2}\left(e^t-1\right)-\frac{1}{t}\right]$$

$$=\lim_{t\to0^+}\frac{e^t-1-t}{t^2}=\lim_{t\to0^+}\frac{\dfrac{t^2}{2}+o\left(t^2\right)}{t^2}=\frac{1}{2}.$$

最后我们来看一下需要拆项或换元的情形.

有时在积分上限函数的被积函数中，不仅出现了积分变量，还出现了其它变量（称为参变量）. 对于含参变量的积分，我们一般有两种解决方案. 第一是考虑拆项，使得被积函数中只含有积分变量而不含有其他任何变量；若无法拆项，第二就是考虑换元，将无法拆项的部分整体令成一个新变量，进行定积分的换元（此时一定要注意，连同积分上下限要一起换）. 下面仍以例题说明.

[例 83]求极限 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\int_0^x(x-t)\cos t\,dt}{x\int_0^x\cos(x-t)\,dt}$.

这个极限若直接运用洛必达法则，求导时会遇到困难. 因为分子和分母都不是积分上限函数，而是含参变量积分，因此我们先对两个含参变量积分处理成积分上限函数，再取极限. 在处理的过程中，应注意，t 是积分变量，x 应看作常数.

对于分子 $\int_0^x(x-t)\cos t\,dt$，我们可以考虑拆项，将其化作两个积分上限函数，即 $\int_0^x(x-t)\cos t\,dt=\int_0^x x\cos t\,dt-\int_0^x t\cos t\,dt=x\int_0^x\cos t\,dt-\int_0^x t\cos t\,dt$.

对于分母 $x\int_0^x\cos(x-t)\,dt$，由于 x 和 t 在余弦函数中，不能直接分离，因此令 $u=x-t$（注意现在 u 是新变量，t 是旧变量，x 看成常数），进行定积分的换元.

当 $t=x$ 时，$u=0$；当 $t=0$ 时，$u=x$，并且有 $\mathrm{d}t=-\mathrm{d}u$．因此，分母 $x\int_0^x\cos(x-t)\mathrm{d}t$ $=-x\int_x^0\cos u\mathrm{d}u=x\int_0^x\cos u\mathrm{d}u$．由于定积分的值与积分变量的形式无关，所以我们可以把字母 u 重新写成字母 t，即 $x\int_0^x\cos(x-t)\mathrm{d}t=x\int_0^x\cos t\mathrm{d}t$．其实，对于这道题而言，还可以应用区间再现公式 $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x=\int_a^b f(a+b-x)\mathrm{d}x$ 直接化简到位.

因此，$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\int_0^x(x-t)\cos t\mathrm{d}t}{x\int_0^x\cos(x-t)\mathrm{d}t}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{x\int_0^x\cos t\mathrm{d}t-\int_0^x t\cos t\mathrm{d}t}{x\int_0^x\cos t\mathrm{d}t}=\lim\limits_{x\to0}\left(1-\dfrac{\int_0^x t\cos t\mathrm{d}t}{x\int_0^x\cos t\mathrm{d}t}\right)$ 就变成了易于使用洛必达法则来求导的积分上限函数形式了.

$$\text{故原极限}=\lim_{x\to0}\left(1-\frac{\int_0^x t\cos t\mathrm{d}t}{x\int_0^x\cos t\mathrm{d}t}\right)=1-\lim_{x\to0}\frac{\int_0^x t\cos t\mathrm{d}t}{x\int_0^x\cos t\mathrm{d}t}=1-\lim_{x\to0}\frac{x\cos x}{\int_0^x\cos t\mathrm{d}t+x\cos x}$$

$$=1-\lim_{x\to0}\frac{1}{\frac{\int_0^x\cos t\mathrm{d}t}{x}+\cos x}\cdot\lim_{x\to0}\cos x=1-\frac{1}{\lim\limits_{x\to0}\frac{\cos x}{1}+1}=1-\frac{1}{1+1}=\frac{1}{2}.$$

本例题中的两个积分若直接计算也不困难，读者可以自行尝试.

对于积分上限函数，一定要善于利用“$\Phi(x)=\int_a^x f(t)\mathrm{d}t$ 的导数等于 $f(x)$”这一重要结论.

二十四、利用级数收敛的必要条件

这种方法利用的是级数收敛的必要条件，即“如果级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ 收敛，那么它的通项 u_n 趋于 0”．所以当你求收敛级数通项的极限时，可以考虑先证明这个无穷级数收敛，然后就可以得到通项趋于 0. 举一个例子：

[例 84] 求极限 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{2^n\cdot n!}{n^n}$.

这个极限用前面的方法 4. 6 不太容易判断，因为这里有三类函数．我们尝试判别正项无穷级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{2^n\cdot n!}{n^n}$ 的敛散性——这里可以用达朗贝尔判别法（只要通项的后一项和前一项的比值的极限小于1，正项级数就收敛）.

设通项 $u_n=\dfrac{2^n\cdot n!}{n^n}$，那么就有

$$\lim_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{\dfrac{2^{n+1}\cdot(n+1)!}{(n+1)^{n+1}}}{\dfrac{2^n\cdot n!}{n^n}}=\lim_{n\to\infty}\frac{2^{n+1}\cdot(n+1)!}{(n+1)^{n+1}}\cdot\frac{n^n}{2^n\cdot n!}\overset{\text{约分}}{=\!=}\lim_{n\to\infty}\frac{2\times n^n}{(n+1)^n}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{2}{\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n}=\frac{2}{\mathrm{e}}<1.$$

由达朗贝尔判别法可以知道，正项级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^n\cdot n!}{n^n}$ 收敛，所以通项趋于 0. 即 $\lim_{n\to\infty}\frac{2^n\cdot n!}{n^n}=0$.

当然，如果你判断出一个无穷级数是发散的，那么你得不出任何结论.

在计算数列极限感觉走投无路的时候，可以试试这种方法. 当然，一定要熟练掌握各种无穷级数的相关知识，才能按题目需要去选择合适的审敛法.

二十五、利用级数求和的方法

级数的和本身就是用极限定义的. 因此，有些极限可以借助级数的工具进行计算，最常见的即为幂级数与傅里叶级数.

25.1 利用幂级数求和

幂级数有两条性质，即逐项可导性与逐项可积性，这可以帮助我们方便地求出幂级数的和函数，把收敛域内的点代入就可以求得一些数项级数的和.

[例 85] 求极限 $\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\frac{i}{2^i}$.

方法一：这其实就是在求级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{2^n}$ 的和. 为此，我们可以构造幂级数 $\sum_{n=1}^{\infty}nx^n$. 欲求此幂级数的和函数，可作如下变形：

当 $x\neq 0$ 时，$\sum_{n=1}^{\infty}nx^n=x\sum_{n=1}^{\infty}nx^{n-1}=x\sum_{n=1}^{\infty}\left(x^n\right)'=x\left(\sum_{n=1}^{\infty}x^n\right)'=x\left(\frac{x}{1-x}\right)'=\frac{x}{(1-x)^2}$，

当 $x=0$ 时，根据和函数的连续性可知和为 0. 并且不难求得此幂级数的收敛域为 $(-1,1)$. 于是当我们把 $x=\frac{1}{2}$（在收敛域里）代入此幂级数，就可以知道 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{2^n}=\frac{\frac{1}{2}}{\left(1-\frac{1}{2}\right)^2}=2$. 从而 $\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\frac{i}{2^i}=2$.

对于这道题，由于它的通项属于“等差乘等比”型的，所以我们也可以用高中学过的所谓“错位相减法”先来求级数的前n项部分和，然后再取极限.

方法二：对于数列$a_n=\dfrac{n}{2^n}$，我们先用错位相减法求其前n项部分和.

前n项部分和$S_n=\dfrac{1}{2^1}+\dfrac{2}{2^2}+\dfrac{3}{2^3}+\quad\cdots\quad+\dfrac{n}{2^n}$，①

则有 $\dfrac{1}{2}S_n=\qquad\dfrac{1}{2^2}+\dfrac{2}{2^3}+\dfrac{3}{2^4}+\cdots+\dfrac{n-1}{2^n}+\dfrac{n}{2^{n+1}}$，②

①−②，有 $\dfrac{1}{2}S_n=\dfrac{1}{2^1}+\dfrac{1}{2^2}+\dfrac{1}{2^3}+\quad\cdots\quad+\dfrac{1}{2^n}-\dfrac{n}{2^{n+1}}=\dfrac{\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{2^n}\right)}{1-\frac{1}{2}}-\dfrac{n}{2^{n+1}}$

$$=1-\frac{n+2}{2^{n+1}},$$

因此$S_n=\displaystyle\sum_{i=1}^{n}\frac{i}{2^i}=2\left(1-\frac{n+2}{2^{n+1}}\right)=2-\frac{n+2}{2^n}$. 再取极限得$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\frac{i}{2^i}=\lim_{n\to\infty}\left(2-\frac{n+2}{2^n}\right)$
$=2$.

除了上面介绍的这种可以利用“逐项可导”或“逐项可积”性质计算和函数的幂级数，还有一类幂函数，如指数函数、三角函数等函数的幂级数，它们的展开式中含有阶乘，不便于使用“逐项可导”或“逐项可积”的性质. 这时可以通过对恒等变形等手段，利用已知的麦克劳林级数（即$x=0$处的幂级数）或一般幂级数展开式直接获得答案. 如下例.

[例 86]求极限$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\left[1+\frac{1}{2!}+\frac{1}{4!}+\cdots+\frac{1}{(2n)!}\right]$.

方法一：函数$f(x)=\mathrm{e}^x$的麦克劳林级数为$\mathrm{e}^x=\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!}$，收敛域为$(-\infty,+\infty)$.

将$x=1$代入，可得$\mathrm{e}=\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\frac{1}{4!}+\cdots+\frac{1}{n!}\right)$；再将$x=-1$代入，

可得$\dfrac{1}{\mathrm{e}}=\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n!}=\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}-\frac{1}{3!}+\frac{1}{4!}+\cdots+(-1)^n\frac{1}{n!}\right)$，两式相加，即得到

$$\mathrm{e}+\frac{1}{\mathrm{e}}=2\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{2!}+\frac{1}{4!}+\cdots+\frac{1}{(n-n\bmod 2)!}\right),$$

其中$n\bmod 2$表示n除以2后所得到的余数，则就有$n-n\bmod 2=\begin{cases}n-1, & n\text{为奇数},\\ n, & n\text{为偶数}.\end{cases}$

将$n-n\bmod 2$写在这里的作用，是保证上式中的最后一项为“偶数”的阶乘的倒数（因为两式相加后只会留下含有偶数阶乘的项，含有奇数阶乘的项会全部被抵

消掉）．我们设 $n-n\bmod 2=2m$（$m\in\mathbf{N}$），当 $n\to\infty$ 时，也有 $m\to\infty$，则就有 $\mathrm{e}+\dfrac{1}{\mathrm{e}}$

$=2\lim\limits_{m\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{2!}+\dfrac{1}{4!}+\cdots+\dfrac{1}{(2m)!}\right)$．因此原极限 $=\dfrac{\mathrm{e}+\dfrac{1}{\mathrm{e}}}{2}=\dfrac{\mathrm{e}^2+1}{2\mathrm{e}}$．

在本题的这一解答中，我们导出了常数 e 不同于 $\mathrm{e}=\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n$ 的另一个定义，即 $\mathrm{e}=\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{1}{n!}$．

对于含有阶乘的幂级数，我们要善于联想已知的幂级数展开式，合理变形，得出结果.

事实上，对于本例 86，我们还可以使用关于复变函数论的简单知识解决．有时用复变函数工具来解决实数问题是非常方便的.

方法二：复变余弦函数 $f(z)=\cos z$ 的泰勒展开式为 $\cos z=\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{(-1)^n z^{2n}}{(2n)!}$，其收敛圆为 $|z|<+\infty$，则 $\cos \mathrm{i}=\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{(-1)^n \mathrm{i}^{2n}}{(2n)!}=\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{(-1)^n(-1)^n}{(2n)!}=\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{1}{(2n)!}$ 就是我们要求的极限．另一方面，根据复变余弦函数的定义，有 $\cos z=\dfrac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}z}+\mathrm{e}^{-\mathrm{i}z}}{2}$（$z\in\mathbf{C}$），因此 $\cos \mathrm{i}=\dfrac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}^2}+\mathrm{e}^{-\mathrm{i}^2}}{2}=\dfrac{\mathrm{e}^{-1}+\mathrm{e}}{2}=\dfrac{\mathrm{e}^2+1}{2\mathrm{e}}$，即为原极限值.

如果题目所给的极限当中本来就含有一个可以直接求和函数的级数，也可以先把和函数求出来，如下例.

[例 87] 计算极限 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{2^n x^{2n+1}}{(2n+1)n!}}{\ln\left(1+x^3\right)}$．

见到分母这种形式，先等价无穷小替换：原极限 $=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{2^n x^{2n+1}}{(2n+1)n!}}{x^3}$．

如果想求出式中级数的和函数，应当先逐项求导，再逐项积分．但由于后续步骤中要使用洛必达法则，所以又要再次求导，因此不妨直接使用洛必达法则.

$$\text{原极限}=\lim_{x\to0}\frac{\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{2^n x^{2n+1}}{(2n+1)n!}}{x^3}=\lim_{x\to0}\frac{\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{2^n x^{2n}}{n!}}{3x^2}=\lim_{x\to0}\frac{\sum\limits_{\boxed{n=1}}^{\infty}\dfrac{\left(2x^2\right)^n}{n!}}{3x^2}=\lim_{x\to0}\frac{\sum\limits_{\boxed{n=0}}^{\infty}\dfrac{\left(2x^2\right)^n}{n!}-1}{3x^2}$$

$=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{e^{2x^2}-1}{3x^2}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{2x^2}{3x^2}=\dfrac{2}{3}$.

25.2 利用傅里叶级数求和·经典的平方倒数和问题

还有一些和式的极限适合结合傅里叶级数来计算. 举一个最经典的例子:

[例 88] 求极限 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{2^2}+\dfrac{1}{3^2}+\cdots+\dfrac{1}{n^2}\right)$. 这是全体正整数的平方倒数和.

方法一: 假设 $f(x)$ 是一个周期为 2π 的周期函数, 且它在 $[-\pi,\pi)$ 上的解析式为 $f(x)=|x|$. 这个函数是处处连续的, 故根据傅里叶级数的收敛定理(也叫狄利克雷充分条件), $f(x)$ 的傅里叶级数处处收敛且收敛于 $f(x)$ 本身. $f(x)$ 是个偶函数, 所以其展开式是余弦级数. 我们容易求出其傅里叶系数, 将其展开成余弦级数:

$$f(x)=\frac{\pi}{2}-\frac{4}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{(2k-1)^2}\cos(2k-1)x \quad (x\in(-\infty,+\infty)).$$

令 $x=0$ (在收敛域中), 得 $f(0)=0=\dfrac{\pi}{2}-\dfrac{4}{\pi}\sum\limits_{k=1}^{\infty}\dfrac{1}{(2k-1)^2}$, 解得

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{(2k-1)^2}=\frac{\pi^2}{8},$$

这就是全体正奇数的平方倒数和.

为了进一步求出全体正整数的平方倒数和, 我们可以作如下考虑: 将全体正整数的平方倒数和看作全体正奇数平方倒数和, 加上全体正偶数平方倒数和, 即 $\sum\limits_{k=1}^{\infty}\dfrac{1}{k^2}=\sum\limits_{k=1}^{\infty}\dfrac{1}{(2k-1)^2}+\sum\limits_{k=1}^{\infty}\dfrac{1}{(2k)^2}$, 其中, 根据级数的性质, 等号右边第二项可以写成 $\dfrac{1}{4}\sum\limits_{k=1}^{\infty}\dfrac{1}{k^2}$, 第一项刚才已经算出是 $\dfrac{\pi^2}{8}$ 了. 于是我们有 $\sum\limits_{k=1}^{\infty}\dfrac{1}{k^2}=\dfrac{\pi^2}{8}+\dfrac{1}{4}\sum\limits_{k=1}^{\infty}\dfrac{1}{k^2}$, 解得 $\sum\limits_{k=1}^{\infty}\dfrac{1}{k^2}=\dfrac{\pi^2}{6}$, 即为原极限.

这是一个十分神奇的结论, 所有整数的平方的倒数之和, 怎么看都像是一个只有有理数参与的游戏, 没想到最后竟然出现了 π, 还带着平方. 每次看到这个结论, 都无不让人感慨数学的美妙! 此例题的结论其实有很多种证明方法, 上面利用傅里叶级数的方法算是一种. 除此以外, 还可以利用幂级数证明——只不过不是求幂级数的和, 而是对比系数. 请看下述证明过程. 注意, 下面的方法是历史上第一个证明出此结论的数学家——欧拉给出的方法, 但这个方法事实上并不

是很严格.

[例 88 续] 求极限 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{2^2}+\dfrac{1}{3^2}+\cdots+\dfrac{1}{n^2}\right)$.

方法二：将 $\sin x$ 展开成幂级数，可以得到 $\sin x=\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{(-1)^n}{(2n+1)!}x^{2n+1}$，收敛域是 $(-\infty,+\infty)$．两边同时除以 x，得 $\dfrac{\sin x}{x}=\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{(-1)^n}{(2n+1)!}x^{2n}$．

我们考察关于 x 的方程 $\dfrac{\sin x}{x}=0$，非常显然，π 的任何非零整数倍都是这个方程的解，包括 $\pm\pi,\pm 2\pi,\pm 3\pi$ 等等，当然，这些 $\pm\pi,\pm 2\pi,\pm 3\pi$ 也正是关于 x 的方程 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{(-1)^n}{(2n+1)!}x^{2n}=0$ 的解.

后者这个方程是个无穷项的多项式，它一定能因式分解成下面这个样子：

$$\left(1-\frac{x^2}{\pi^2}\right)\left(1-\frac{x^2}{4\pi^2}\right)\left(1-\frac{x^2}{9\pi^2}\right)\cdots=0,$$

因为这样恰好可以解出上述的各个解.

若将这个方程的等号左边重新展开，x^2 项的系数将是 $-\dfrac{1}{\pi^2}-\dfrac{1}{4\pi^2}-\dfrac{1}{9\pi^2}-\cdots$，这也就是我们要求的极限的 $-\dfrac{1}{\pi^2}$ 倍．从另一方面看，无穷级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{(-1)^n}{(2n+1)!}x^{2n}$ 的 x^2 项的系数即为令 $n=1$ 时得出的那一项的系数，容易计算出是 $\dfrac{(-1)^1}{(2\times1+1)!}=-\dfrac{1}{6}$.

因此，$-\dfrac{1}{\pi^2}\times$原极限$=-\dfrac{1}{6}$，于是原极限$=\dfrac{\pi^2}{6}$.

以上的方法二虽比方法一稍微“初等”一些，但是存在着一个漏洞——我们没有给出“无穷项多项式的因式分解理论”，要知道，无穷的世界与有穷的世界有时是相去甚远的. 因此相对来说，方法一是比较好的.

为了深入贯彻落实一题多解的思想，我们接下来再给出一个方法——利用夹逼准则. 这个方法仅供欣赏，虽利于锻炼思维，但实用性不强.

[例 88 续] 求极限 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{2^2}+\dfrac{1}{3^2}+\cdots+\dfrac{1}{n^2}\right)$.

方法三：我们从一个不等式出发：当$0<x<\dfrac{\pi}{2}$时，恒有不等式$\sin x<x<\tan x$成立（事实上，这可以利用导数轻易证明）．三边同取平方，再同取倒数，不等号要反向，于是得到$\cot^2 x<\dfrac{1}{x^2}<\cot^2 x+1$．这个不等式一会儿会用到.

下面我们先致力于证明一个恒等式：$\sum\limits_{k=1}^{m}\cot^2\dfrac{k\pi}{2m+1}=\dfrac{m(2m-1)}{3}$，证明如下.

根据棣莫弗定理，对任何正整数n，都有$(\cos x+\mathrm{i}\sin x)^n=\cos nx+\mathrm{i}\sin nx$．我们在这里假设$n$是一个正奇数，且至少为3．对于这样的$n$，棣莫弗定理当然也是成立的.

另一方面，把棣莫弗定理的等号左边用二项式定理展开，可以得到

$(\cos x+\mathrm{i}\sin x)^n=\mathrm{C}_n^0\cos^n x+\mathrm{C}_n^1\cos^{n-1}x(\mathrm{i}\sin x)+\mathrm{C}_n^2\cos^{n-2}x(\mathrm{i}\sin x)^2+\cdots+\mathrm{C}_n^n(\mathrm{i}\sin x)^n$，这个展开式的各项是实虚相间的，比如其中第一项为实项，最后一项为虚项（已经假设过n为奇数）.

虽然棣莫弗定理和二项式定理给出了不同的展开形式，但展开后的虚部应该是相等的，即有

$$\mathrm{C}_n^1\cos^{n-1}x\sin x-\mathrm{C}_n^3\cos^{n-3}x\sin^3 x+\cdots+(-1)^m\mathrm{C}_n^n\sin^n x=\sin nx,$$

其中$n=2m+1$，m为正整数.

对这个式子两边同时除以$\sin^n x$，即$\sin^{2m+1}x$，可以得到

$$\mathrm{C}_n^1\cot^{n-1}x-\mathrm{C}_n^3\cot^{n-3}x+\cdots+(-1)^m\mathrm{C}_n^n=\frac{\sin nx}{\sin^n x},$$

即

$$\mathrm{C}_{2m+1}^1\cot^{2m}x-\mathrm{C}_{2m+1}^3\cot^{2m-2}x+\cdots+(-1)^m\mathrm{C}_{2m+1}^{2m+1}=\frac{\sin(2m+1)x}{\sin^{2m+1}x},$$

亦即$\mathrm{C}_{2m+1}^1\left(\cot^2 x\right)^m-\mathrm{C}_{2m+1}^3\left(\cot^2 x\right)^{m-1}+\cdots+(-1)^m\mathrm{C}_{2m+1}^{2m+1}=\dfrac{\sin(2m+1)x}{\sin^{2m+1}x}$.

再令$t=\cot^2 x$，可以得到

$$\mathrm{C}_{2m+1}^1 t^m-\mathrm{C}_{2m+1}^3 t^{m-1}+\cdots+(-1)^m\mathrm{C}_{2m+1}^{2m+1}=\frac{\sin(2m+1)x}{\sin^{2m+1}x}.$$

我们可以注意到，当$x=\dfrac{k\pi}{2m+1}$，$k=1,2,\cdots,m$时，等号右边恰好为零，换句

话说，$t=\cot^2\dfrac{k\pi}{2m+1}$，$k=1,2,\cdots,m$ 刚好是关于 t 的一元 m 次方程

$$\mathrm{C}_{2m+1}^{1}t^{m}-\mathrm{C}_{2m+1}^{3}t^{m-1}+\cdots+(-1)^{m}\mathrm{C}_{2m+1}^{2m+1}=0$$

的 m 个根（当 k 取大于 m 的值时，这些根会循环出现）.

根据高次方程的韦达定理，一个高次多项式方程的所有根之和，恰好就等于 $-\dfrac{\text{比最高次低一次项的系数}}{\text{最高次项系数}}$，即

$$\sum_{k=1}^{m}\cot^2\frac{k\pi}{2m+1}=-\frac{-\mathrm{C}_{2m+1}^{3}}{\mathrm{C}_{2m+1}^{1}}=\frac{\dfrac{(2m+1)(2m)(2m-1)}{6}}{2m+1}=\frac{m(2m-1)}{3},$$

于是恒等式证毕. 接下来，我们就利用这个恒等式，以及证明伊始给出的不等式 $\cot^2 x<\dfrac{1}{x^2}<\cot^2 x+1$ 来寻找原数列的上下界.

对任何 $1\le$ 正整数 $k\le m$，都有 $0<\dfrac{k\pi}{2m+1}\le\dfrac{m\pi}{2m+1}<\dfrac{m\pi}{2m}=\dfrac{\pi}{2}$，因此 $x=\dfrac{k\pi}{2m+1}$，$1\le k\le m$ 满足不等式 $\cot^2 x<\dfrac{1}{x^2}<\cot^2 x+1$，$1\le k\le m$，即

$$\cot^2\frac{k\pi}{2m+1}<\left(\frac{2m+1}{k\pi}\right)^2<\cot^2\frac{k\pi}{2m+1}+1,\quad 1\le k\le m,$$

将这 m 个不等式三端分别相加，得到

$$\sum_{k=1}^{m}\cot^2\frac{k\pi}{2m+1}<\sum_{k=1}^{m}\left(\frac{2m+1}{k\pi}\right)^2<\sum_{k=1}^{m}\left(\cot^2\frac{k\pi}{2m+1}+1\right),$$

根据刚才证明的恒等式，即有

$$\frac{m(2m-1)}{3}<\sum_{k=1}^{m}\frac{(2m+1)^2}{k^2\pi^2}<\frac{m(2m-1)}{3}+m,$$

三边同时除以 $\dfrac{(2m+1)^2}{\pi^2}$，并通分整理得

$$\frac{(2m^2-m)\pi^2}{12m^2+12m+3}<\sum_{k=1}^{m}\frac{1}{k^2}<\frac{(2m^2+2m)\pi^2}{12m^2+12m+3},$$

于是我们成功找出一组原数列的上下界，且若令 $m\to\infty$，则有

$$\lim_{m\to\infty}\frac{\left(2m^2-m\right)\pi^2}{12m^2+12m+3}=\frac{\pi^2}{6}，\quad \lim_{m\to\infty}\frac{\left(2m^2+2m\right)\pi^2}{12m^2+12m+3}=\frac{\pi^2}{6}，$$

于是由夹逼准则，也有 $\lim\limits_{m\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{m}\dfrac{1}{k^2}=\sum\limits_{k=1}^{\infty}\dfrac{1}{k^2}=\dfrac{\pi^2}{6}$，此即原极限.

这种证明方法最漂亮的地方，就在于用几乎初等的方法证明出了这个结论. 过程相对比较复杂，你可以拿来锻炼思维. 纵观上述列举的证明“平方倒数和”问题的三种方法，第一种（傅里叶级数法）是最佳的.

二十六、利用常见不等式

26.1 常见不等式总结

下面将罗列一些常见的不等式，这些不等式不一定在极限的问题中都能派上用场，有的会在导数的应用方面起重要作用，但我仍然在这里将其写出，以便随时查阅.

（1）三角函数的相关不等式：

当 $x\in\left[0,\dfrac{\pi}{2}\right)$ 时，$0\le\dfrac{2}{\pi}x\le\sin x\le x\le\tan x$.

（2）对数函数与指数函数的相关不等式：

当 $x\in\left(-1,+\infty\right)$ 时，$\dfrac{x}{1+x}\le\ln\left(1+x\right)\le x$；

当 $x\in\left(0,+\infty\right)$ 时，$\dfrac{x-1}{x}\le\ln x\le x-1$；

当 $x\in\left(-\infty,-1\right)\cup\left(0,+\infty\right)$ 时，$\dfrac{1}{1+x}<\ln\left(1+\dfrac{1}{x}\right)<\dfrac{1}{x}$；

对任意实数 x，都有 $e^x\ge x+1$.

（3）绝对值函数的相关不等式：

$-|x|\le x\le|x|$；$2|xy|\le x^2+y^2$；

三角不等式：$0\le\big||x|-|y|\big|\le|x\pm y|\le|x|+|y|$；

$|x_1+x_2+\cdots+x_n|\le|x_1|+|x_2|+\cdots+|x_n|$；

$\left|\int_a^b f(x)\mathrm{d}x\right|\le\int_a^b|f(x)|\mathrm{d}x$（这里假设 $f(x)$ 可积，$a\le b$）.

（4）取整函数的相关不等式：

$x-1<[x]\le x<[x]+1$；

$\frac{1}{x}-1<\left[\frac{1}{x}\right]\le\frac{1}{x}$，其中 $x\ne 0$；

$1-x<x\left[\frac{1}{x}\right]\le 1$，其中 $x>0$；　　　　$1\le x\left[\frac{1}{x}\right]<1-x$，其中 $x<0$；

$[x]+[y]\le[x+y]\le[x]+[y]+1$；

$[nx]\ge n[x]$，其中 $n\in\mathbf{N}_+$（正整数集）.

（5）均值不等式：

$$\underbrace{\frac{n}{\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}+\cdots+\frac{1}{x_n}}}_{\text{调和平均数}}\le\underbrace{\sqrt[n]{x_1x_2\cdots x_n}}_{\text{几何平均数}}\le\underbrace{\frac{x_1+x_2+\cdots+x_n}{n}}_{\text{算术平均数}}\le\underbrace{\sqrt{\frac{x_1^2+x_2^2+\cdots+x_n^2}{n}}}_{\text{平方平均数}},$$

其中 $x_1,x_2,\cdots,x_n>0$，等号成立当且仅当 $x_1=x_2=\cdots=x_n$.

（6）柯西不等式（也叫柯西—施瓦茨不等式或施瓦茨不等式）：

①离散形式：$\left(\sum_{i=1}^n a_ib_i\right)^2\le\sum_{i=1}^n a_i^2\sum_{i=1}^n b_i^2$，其中 a_i,b_i，$i=1,2,\cdots,n$ 为任意实数，等号成立当且仅当 $\frac{a_1}{b_1}=\frac{a_2}{b_2}=\cdots=\frac{a_n}{b_n}$ 或 a_i,b_i，$i=1,2,\cdots,n$ 中至少有一个为零；

②连续形式：$\left[\int_a^b f(x)g(x)\mathrm{d}x\right]^2\le\int_a^b f^2(x)\mathrm{d}x\int_a^b g^2(x)\mathrm{d}x$（$a<b$），其中所有的积分都是可积的，等号成立当且仅当函数 $f(x),g(x)$ 线性相关.

这可以简记为"'积的和的平方'不大于'平方的和的积'".

（7）闵可夫斯基不等式：

①离散形式：$\left(\sum_{i=1}^n (x_i+y_i)^p\right)^{\frac{1}{p}}\le\left(\sum_{i=1}^n x_i^p\right)^{\frac{1}{p}}+\left(\sum_{i=1}^n y_i^p\right)^{\frac{1}{p}}$，其中 $p\ge1$，$x_i,y_i>0$，$i=1,2,\cdots,n$；

②连续形式：$\left(\int_a^b [f(x)+g(x)]^p\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{p}}\le\left(\int_a^b f^p(x)\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{p}}+\left(\int_a^b g^p(x)\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{p}}$，其中 $p\ge1$，$f(x)$ 与 $g(x)$ 在 $[a,b]$ 上恒取正值且所有积分可积.

（8）排序不等式：

设有任意两组实数 $a_1,a_2,\cdots,a_n$ 和 $b_1,b_2,\cdots,b_n$，并且它们满足 $a_1\le a_2\le\cdots\le a_n$，

$b_1 \le b_2 \le \cdots \le b_n$，又设 $c_1, c_2 \cdots, c_n$ 是 $b_1, b_2, \cdots, b_n$ 的某种乱序排列，则

$$\underbrace{a_1b_n + a_2b_{n-1} + \cdots + a_nb_1}_{\text{反序和}} \le \underbrace{a_1c_1 + a_2c_2 + \cdots + a_nc_n}_{\text{乱序和}} \le \underbrace{a_1b_1 + a_2b_2 + \cdots + a_nb_n}_{\text{顺序和}},$$

等号成立当且仅当 $a_1 = a_2 = \cdots = a_n$ 或 $b_1 = b_2 = \cdots = b_n$.

（9）伯努利不等式：

对实数 $x > -1$，①当 $\alpha \le 0$ 或 $\alpha \ge 1$ 时，$(1+x)^\alpha \ge 1+\alpha x$；②当 $0 \le \alpha \le 1$ 时，$(1+x)^\alpha \le 1+\alpha x$，等号成立当且仅当 $\alpha = 0$ 或 $\alpha = 1$ 或 $x = 0$.

（10）琴生不等式（也叫詹森不等式）：

①如果函数 $f(x)$ 是区间 (a,b) 上的凹函数（向下凸，即“$\cup$”型），则对于 $\forall x_1, x_2, \cdots, x_n \in (a,b)$，

$$f\left(\frac{x_1+x_2+\cdots+x_n}{n}\right) \le \frac{f(x_1)+f(x_2)+\cdots+f(x_n)}{n},$$

等号成立当且仅当 $x_1 = x_2 = \cdots = x_n$；

②如果函数 $f(x)$ 是区间 (a,b) 上的凸函数（向上凸，即“$\cap$”型），则对于 $\forall x_1, x_2, \cdots, x_n \in (a,b)$，

$$f\left(\frac{x_1+x_2+\cdots+x_n}{n}\right) \ge \frac{f(x_1)+f(x_2)+\cdots+f(x_n)}{n},$$

等号成立当且仅当 $x_1 = x_2 = \cdots = x_n$.

（11）杨格不等式（也叫杨氏不等式或 Young 不等式）：

设 a,b 为非负实数，$p>1$，$q>1$，且 $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$，则 $ab \le \frac{a^p}{p}+\frac{b^q}{q}$，等号成立当且仅当 $a^p = b^q$.

以上所列举的这些不等式是尤为重要的. 除此之外，还有很多很多著名的不等式，读者应注意积累. 这些不等式不一定都在求极限时起作用，而可能会在微积分（数学分析）的其他章节中有重要应用. 不等式应当当成一种常识去看待.

26.2 不等式在求极限方面的应用举例

（1）三角函数的相关不等式的应用——对第一个重要极限的经典证明

[例 89] 证明极限 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1$.

上文写道，当 $x\in\left[0,\dfrac{\pi}{2}\right)$ 时，$0\le\dfrac{2}{\pi}x\le\sin x\le x\le\tan x$. 但我们用不到如此一般性的结论，只需要用到这样一条更为精确的结论：当 $x\in\left(0,\dfrac{\pi}{2}\right)$ 时，恒有不等式 $\sin x<x<\tan x$ 成立. 事实上，这个不等式可以用单位圆中的三角函数线等几何方法导出（这里只承认这个结论而不作推导，推导过程详见于任何一本微积分或数学分析教材）.

由于当 $x\in\left(0,\dfrac{\pi}{2}\right)$ 时，$\sin x$ 恒为正数，所以可以将不等式 $\sin x<x<\tan x$ 的三端同时除以 $\sin x$ 而保持不等号的方向不变，即 $1<\dfrac{x}{\sin x}<\dfrac{1}{\cos x}$. 又因为这三个量都是正数，因此可以给不等式 $1<\dfrac{x}{\sin x}<\dfrac{1}{\cos x}$ 的三端同时取倒数且把不等号的方向改变，即 $\cos x<\dfrac{\sin x}{x}<1$. 又由于函数 $f(x)=\dfrac{\sin x}{x}$ 为偶函数，因此，不等式 $\cos x<\dfrac{\sin x}{x}<1$ 对于任何 $x\in\left(-\dfrac{\pi}{2},0\right)\cup\left(0,\dfrac{\pi}{2}\right)$ 都成立.

当 $x\to 0$ 时，$\cos x$ 的极限为 1（由于很多教材上在介绍这部分内容时还没有引入连续的概念，不能直接把 0 代入，所以先证明不等式 $0<1-\cos x<\dfrac{x^2}{2}$ 对任意 $x\in\left(-\dfrac{\pi}{2},0\right)\cup\left(0,\dfrac{\pi}{2}\right)$ 成立，然后再用夹逼准则说明 $\lim\limits_{x\to 0}(1-\cos x)=0$，进而求出 $\cos x$ 的极限），1 的极限也为 1，因此 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x}=1$.

（2）绝对值函数的相关不等式的应用

我们在下例中应用的是绝对值的三角不等式.

[例 90] 已知极限 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a$，证明 $\lim\limits_{n\to\infty}|x_n|=|a|$.

证明：因为 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a$，所以对任意的 $\varepsilon>0$，都会存在正整数 N 使得当 $n>N$ 时，有 $|x_n-a|<\varepsilon$ 成立. 此时，根据绝对值的三角不等式，$\big||x_n|-|a|\big|\le|x_n-a|<\varepsilon$ 也是成立的，因此，$\lim\limits_{n\to\infty}|x_n|=|a|$ 成立.

注意，一般来说，这个命题的逆命题是不成立的，也就是说，根据 $\lim\limits_{n\to\infty}|x_n|=|a|$ 是无法推知极限 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n$ 的情况的. 但是，在这其中有一个特殊情形，即 $a=0$ 的情

形——$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=0$ 与 $\lim\limits_{n\to\infty}\left|x_n\right|=0$ 是等价的，这一点我们在方法 18.2 中已经有过应用（$\lim\limits_{n\to\infty}\left|a_n-6\right|=0\Leftrightarrow\lim\limits_{n\to\infty}\left(a_n-6\right)=0$）.

（3）取整函数的相关不等式的应用

[例 91] 计算极限 $\lim\limits_{x\to0}x\left[\dfrac{10}{x}\right]$，其中 $[\cdot]$ 为取整函数.

根据取整函数的性质 $x-1<[x]\le x$，有 $\dfrac{10}{x}-1<\left[\dfrac{10}{x}\right]\le\dfrac{10}{x}$ 成立．若 $x>0$，则有 $x\left(\dfrac{10}{x}-1\right)<x\left[\dfrac{10}{x}\right]\le10$ 成立；若 $x<0$，则有 $x\left(\dfrac{10}{x}-1\right)>x\left[\dfrac{10}{x}\right]\ge10$ 成立．总之，$x\left[\dfrac{10}{x}\right]$ 总是介于 $x\left(\dfrac{10}{x}-1\right)$ 与 10 之间（能取到 10）．又由于 $\lim\limits_{x\to0}x\left(\dfrac{10}{x}-1\right)=\lim\limits_{x\to0}10$ $=10$，因此，由夹逼准则，原极限 $\lim\limits_{x\to0}x\left[\dfrac{10}{x}\right]=10$.

对于含有取整函数的极限，如果取整符号内的表达式趋于有限点 x_0（一般为整数），通常需要分左右极限分别讨论；如果取整符号内的表达式趋于无穷大，通常需要结合取整函数的性质和相关定理进行计算（如夹逼准则）.

取整函数在题目中出现时，一般都会在题干中特别标明类似“$[\cdot]$ 为取整函数”的字样，以避免对取整函数与表示运算优先级的方括号产生混淆．如果二者一定要同时出现，取整符号 $[x]$ 可记作 $\lfloor x\rfloor$（意指“向下取整”）.

（4）均值不等式的应用——对第二个重要极限的新颖证明

[例 92] 证明极限 $\mathrm{e}=\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n$ 存在.

根据均值不等式，若干正数的几何平均值不大于它们的算数平均值．取这样的 $(n+1)$ 个正数：1，$1+\dfrac{1}{n}$，…，$1+\dfrac{1}{n}$（$n\in\mathbf{N}_+$），则 $\sqrt[n+1]{\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n}\le\dfrac{1+n\left(1+\dfrac{1}{n}\right)}{n+1}$．两边同取 $n+1$ 次幂，并整理得到 $\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n\le\left(1+\dfrac{1}{n+1}\right)^{n+1}$，即数列 $x_n=\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n$ 单调递增.

重新取这样的 $(n+2)$ 个正数：$\dfrac{1}{2}$，$\dfrac{1}{2}$，$1+\dfrac{1}{n}$，…，$1+\dfrac{1}{n}$（$n\in\mathbf{N}_+$），那么有

$\sqrt[n+2]{\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n}\le\frac{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+n\left(1+\frac{1}{n}\right)}{n+2}$. 两边同取$n+2$次幂，可整理得$\frac{1}{4}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\le 1$，

即$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\le 4$，也就是说数列$x_n=\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$有上界4.

根据单调有界准则，极限$\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$存在，并将其记为e.

这里的字母e只是一个记号，只是把这个极限值“记作”e而已，没有为什么，仅仅算是e的一种定义. 不知道有没有人会有疑惑：常数e已经在高中学习对数时引入过了，这里的e与那里的e似乎并不是同一个定义，它们有关联吗？是同一个e吗？答案是：高中根本就没有引入过e的定义，当时的课本只是说，“我们把以e为底的对数称为自然对数，其中e是一个无理数，约等于 2.71828”等等，而对于e的来历却避之不谈. 我们现在介绍的这个重要极限，只是把e的来历阐述清楚而已，与高中知识并不矛盾.

关于第二个重要极限，较为经典的二项式定理证法可参见几乎任何一本微积分（数学分析）教材.

二十七、等价无穷大量代换

无穷大量指的是在某一极限过程中趋于∞的函数或数列，比如n^2+1就是当$n\to\infty$时的无穷大量. 与无穷小量类似，无穷大量也是可以比较阶数的.

设u与v均为某一极限过程中的无穷大量. 如果

① $\lim\frac{u}{v}=\infty$，则称u是**比v高阶的无穷大量**；

② $\lim\frac{u}{v}=0$，则称u是**比v低阶的无穷大量**；

③ $\lim\frac{u}{v}=c\ne 0$，则称u是**与v同阶的无穷大量**. 特别地，如果$\lim\frac{u}{v}=1$，则称u与v互为**等价无穷大量**（简称**等价无穷大**）.

等价无穷大也是可以和等价无穷小一样进行替换的，同样也是只能在乘除法中替换. 我们有必要记住一些常见的等价无穷大.

当$x\to\infty$（考虑到某些函数定义域限制，可以改成$x\to+\infty$）时，有

$$ax^m+bx^n\sim\text{两项中次数较大的那一项}\ (m,n>0,\ m\ne n,\ ab\ne 0).$$

$$\sqrt{ax^m+\text{比}m\text{次方的次数还低的一些项}}\sim\sqrt{ax^m}.$$

$$f(x)+\text{比}f(x)\text{更低阶的无穷大}\sim f(x).$$

$$\ln\left(1+x^\alpha\right)\sim\alpha\ln x\ (\alpha>0).$$

当$n\to\infty$时，有

$$n!\sim\sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{\mathrm{e}}\right)^n.$$

$$\ln(n!)\sim n\ln n.$$

此外还可以根据如下操作推导出很多等价无穷大：

①通过一些极限存在的“$\frac{\infty}{\infty}$”型的题目推导一些等价无穷大；

②互为等价无穷小的两个函数分别取倒数，互为等价无穷大；

③通过一些极限存在的“$\infty-\infty$”型的题目推导一些等价无穷大（方法 16.3 中有说明）.

[例 93] 求极限 $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{2x^2+3\mathrm{e}^x}{3x^2+2\mathrm{e}^x}$.

因为 $2x^2+3\mathrm{e}^x\sim3\mathrm{e}^x$，$3x^2+2\mathrm{e}^x\sim2\mathrm{e}^x$，故原极限 $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{2x^2+3\mathrm{e}^x}{3x^2+2\mathrm{e}^x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{3\mathrm{e}^x}{2\mathrm{e}^x}=\frac{3}{2}$.

[例 94] 求极限 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{4n^2+2\sin n}{3n^2+6n+\ln n}$.

因为 $4n^2+2\sin n\sim4n^2$，$3n^2+6n+\ln n\sim3n^2$，因此原极限 $=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{4n^2}{3n^2}=\frac{4}{3}$.

[例 95] 求极限 $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{(x+1)(x^2+1)\cdots(x^n+1)}{\left[(nx)^n+1\right]^{\frac{n+1}{2}}}$，其中 n 为正整数.

由于 $x^i+1\sim x^i$，$i=1,2,\cdots,n$，$\left[(nx)^n+1\right]^{\frac{n+1}{2}}\sim\left[(nx)^n\right]^{\frac{n+1}{2}}=(nx)^{\frac{n(n+1)}{2}}$，故原极限 $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{(x+1)(x^2+1)\cdots(x^n+1)}{\left[(nx)^n+1\right]^{\frac{n+1}{2}}}=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x\cdot x^2\cdot\cdots\cdot x^n}{(nx)^{\frac{n(n+1)}{2}}}=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x^{\frac{n(n+1)}{2}}}{(nx)^{\frac{n(n+1)}{2}}}=\frac{1}{n^{\frac{n(n+1)}{2}}}$.

这里的 $\left[(nx)^n+1\right]^{\frac{n+1}{2}}\sim\left[(nx)^n\right]^{\frac{n+1}{2}}$ 是怎么来的呢？原理是这样：$\left[(nx)^n+1\right]^{\frac{n+1}{2}}$ 首先改写成 $\sqrt{\left[(nx)^n+1\right]^{n+1}}$，然后根号里面是乘积的形式，每一个因子都等价于 $(nx)^n$，所以 $\left[(nx)^n+1\right]^{n+1}\sim\left[(nx)^n\right]^{n+1}$，即有 $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\left[(nx)^n+1\right]^{n+1}}{\left[(nx)^n\right]^{n+1}}=1$，两边开算术平

方根即有$\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\sqrt{\left[(nx)^n+1\right]^{n+1}}}{\sqrt{\left[(nx)^n\right]^{n+1}}}=1$，也就是$\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\left[(nx)^n+1\right]^{\frac{n+1}{2}}}{\left[(nx)^n\right]^{\frac{n+1}{2}}}=1$.

[例 96]求极限$\lim\limits_{x\to0^+}\left(\sqrt{1-x}-1\right)\ln\left(1+\mathrm{e}^{\frac{1}{x}}\right)$.

首先先对$\sqrt{1-x}-1$进行等价无穷小替换，即$\sqrt{1-x}-1\sim-\dfrac{1}{2}x$；其次将无穷大量$\mathrm{e}^{\frac{1}{x}}$视为整体，就有$\ln\left(1+\mathrm{e}^{\frac{1}{x}}\right)\ \sim\ln\mathrm{e}^{\frac{1}{x}}=\dfrac{1}{x}$，因此原极限$\lim\limits_{x\to0^+}\left(\sqrt{1-x}-1\right)\ln\left(1+\mathrm{e}^{\frac{1}{x}}\right)$

$=\lim\limits_{x\to0^+}\left(-\dfrac{1}{2}x\right)\cdot\dfrac{1}{x}=-\dfrac{1}{2}$.

二十八、利用柯西收敛准则

前面讲过两个极限存在准则，分别是夹逼准则和单调有界准则，这里我们再介绍第三个极限存在准则，即柯西收敛准则. 柯西收敛准则，又叫柯西审敛原理或柯西极限存在准则. 这个准则描述了数列收敛的充分必要条件.

（柯西收敛准则）数列$\{x_n\}$收敛的充分必要条件是：对于任意给定的正数ε，总存在正整数N，使得当$m>N$，$n>N$时，有$|x_n-x_m|<\varepsilon$.

利用这个准则，仅能判定数列收敛还是发散，既没有用到也不能求出具体的极限值. 想要求出极限值，必须还得辅以别的方法——甚至有的极限结果无法解析地表示出来.

[例 97]证明极限$\lim\limits_{n\to\infty}\left(1-\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{3}-\dfrac{1}{4}+\cdots+(-1)^{n-1}\dfrac{1}{n}\right)$存在，并求其值.

首先我们用柯西收敛准则来判定这个极限是存在的.

设$x_n=1-\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{3}-\dfrac{1}{4}+\cdots+(-1)^{n-1}\dfrac{1}{n}$，则

$$|x_n-x_n|=0<\frac{1}{n+1},$$

$$|x_{n+1}-x_n|=\left|(-1)^n\frac{1}{n+1}\right|=\frac{1}{n+1},$$

$$|x_{n+2}-x_n|=\left|(-1)^n\frac{1}{n+1}+(-1)^{n+1}\frac{1}{n+2}\right|=\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n+2}<\frac{1}{n+1},$$

$$|x_{n+3}-x_n|=\left|(-1)^n\frac{1}{n+1}+(-1)^{n+1}\frac{1}{n+2}+(-1)^{n+2}\frac{1}{n+3}\right|=\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n+2}+\frac{1}{n+3}<\frac{1}{n+1},$$

……

总之，对任意的 $p\in\mathbf{N}$，总有 $\left|x_{n+p}-x_n\right|\le\dfrac{1}{n+1}<\dfrac{1}{n}$ 成立.

任给 $\varepsilon>0$，要想使 $\left|x_{n+p}-x_n\right|\le\dfrac{1}{n+1}<\dfrac{1}{n}<\varepsilon$ 成立，仅需使 $n>\dfrac{1}{\varepsilon}$ 成立即可．只要取 $N=\left[\dfrac{1}{\varepsilon}\right]$，当 $n>N$ 时 $\left|x_{n+p}-x_n\right|\le\dfrac{1}{n+1}<\dfrac{1}{n}<\varepsilon$ 就成立．所以原极限是存在的.

注意，这里的 $n+p$ 和 n 就充当了定理中 m 和 n 的角色——这里的 n 意指定理中 m 和 n 的较小者，这里的 $n+p$ 意指定理中 m 和 n 的较大者（因为 $n+p\ge n$）.

至于如何求出这个极限，就需要借助方法 25.1（幂级数求和）了．这个极限的值，就是交错级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\dfrac{1}{n}$ 的和．我们构造幂级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{x^{n-1}}{n}$，求得其和函数为 $S(x)=\begin{cases}-\dfrac{\ln(1-x)}{x}, & x\ne 0,\\ 1, & x=0,\end{cases}$ 收敛域为 $[-1,1)$．只要将 $x=-1$（在收敛域内）代入，即得 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\dfrac{1}{n}=\ln 2$，也就是原极限值.

[例 98] 证明极限 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{3}+\cdots+\dfrac{1}{n}\right)$ 不存在.

设 $x_n=1+\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{3}+\cdots+\dfrac{1}{n}$，注意到 $\left|x_{2n}-x_n\right|=\dfrac{1}{n+1}+\dfrac{1}{n+2}+\cdots+\dfrac{1}{2n}>\dfrac{n}{2n}=\dfrac{1}{2}$，也就是说，无论 n 多么大，总可以找到排在数列更后面的一项，使得这两项之间的差的绝对值大于一个常数 $\dfrac{1}{2}$．换句话说，我们永远都不可能找到一个正整数 N，使得当 m 和 n 都大于 N 时，x_m 和 x_n 之间的距离就小于任意给定的正数．就算正整数 N 找得再大，我们都能在第 N 项以后选出两项，使得这两项相差大于 $\dfrac{1}{2}$，不会无限接近．因此极限 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{3}+\cdots+\dfrac{1}{n}\right)$ 不存在.

二十九、利用“比值极限”与“根值极限”的关系

有一个定理：若数列极限 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{x_{n+1}}{x_n}=A$（其中 $x_n>0$），则一定有 $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{x_n}=A$．这个定理中出现的两个极限式在形式上分别是正项级数的达朗贝尔判别法（比值判别法）与柯西判别法（根值判别法）的判别式，我们通过这个定理也可以发现，

凡是能用达朗贝尔判别法判别敛散性的正项级数，用柯西判别法也可以判别，但事实上反过来不一定成立——由 $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{x_n}=A$ 推不回 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{x_{n+1}}{x_n}=A$.

有时候，我们利用这个定理可以把一些较复杂的“根值极限”转化成“比值极限”. 如下面两个例子.

[例 99] 求极限 $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{n^3\sin\dfrac{\pi}{3^n}}$.

考虑到根式中较为复杂，因而将其转化为“比值极限”. 在下面展示的过程中，请读者注意等价无穷小的运用.

因为极限 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(n+1)^3\sin\dfrac{\pi}{3^{n+1}}}{n^3\sin\dfrac{\pi}{3^n}}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(n+1)^3}{n^3}\cdot\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\sin\dfrac{\pi}{3^{n+1}}}{\sin\dfrac{\pi}{3^n}}=1\cdot\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\dfrac{\pi}{3^{n+1}}}{\dfrac{\pi}{3^n}}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{3^n}{3^{n+1}}$ $=\dfrac{1}{3}$，所以原极限 $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{n^3\sin\dfrac{\pi}{3^n}}=\dfrac{1}{3}$.

[例 100] 求极限 $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{\ln^2 n}$.

因为极限 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\ln^2(n+1)}{\ln^2 n}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\ln^2 n}{\ln^2 n}$（这一步用了等价无穷大 $\ln(n+1)\sim\ln n$）$=1$，所以原极限 $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{\ln^2 n}=1$.

如果这道题的目的是判定级数敛散性，那么比值判别法或根值判别法给出的结果是 1 就意味着判别法失效，但我们在这里只是求极限，算出来是 1，答案就是 1.

三十、利用上下极限

先说明一下，上下极限属于数学专业内容，因此非数学专业可以不看.

如果在数 A（或 $\pm\infty$）的任何一个邻域内都含有数列 $\{x_n\}$ 中的无数多个项，则称数 A（或 $\pm\infty$）是数列 $\{x_n\}$ 的一个聚点或极限点. 同一个数列，聚点可能不止一个，比如数列 $\left\{(-1)^n\dfrac{n}{n+1}\right\}$ 有两个聚点：1 和 -1（因为它的奇数项趋于 -1，在 -1 的任何一个邻域内都有无数多项；偶数项趋于 1，在 1 的任何一个邻域内也有无数多项）；再比如说，数列 $\left\{\dfrac{1}{n}\right\}$ 只有一个聚点：0（只有在 0 的邻域内才有无限多项）.

对于一个数列 $\{x_n\}$ 来说，在它所有的聚点当中，如果存在一个最大的聚点 $\overline{A}$，

则把这个聚点称为原数列的上极限，记作 $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}} x_n$ 或 $\limsup\limits_{n\to\infty} x_n$，即 $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}} x_n = \limsup\limits_{n\to\infty} x_n$ $=\overline{A}$. 同样地，如果存在一个最小的聚点 $\underline{A}$，则把这个聚点称为原数列的下极限，记作 $\underline{\lim\limits_{n\to\infty}} x_n$ 或 $\liminf\limits_{n\to\infty} x_n$，即 $\underline{\lim\limits_{n\to\infty}} x_n = \liminf\limits_{n\to\infty} x_n = \underline{A}$. 这里的上下极限可以是无穷大的，并认为无穷大也算极限存在，更精确地说是存在非正常极限.（由于这里是数学专业的内容，因此对于极限存在的界定与非数学专业有些出入，所以这里我们特别声明一下，以期读者不要对这里产生误解. 对于非数学专业来说，无穷大仍需当作极限不存在来处理.）

对于有界数列来说，它一定存在正常的（即非无穷的）上下极限；对于无界数列来说，它的上下极限可能为无穷大. 若规定 $-\infty$ 比任何实数都小，$+\infty$ 比任何实数都大，则对任何数列 $\{x_n\}$，都有 $\underline{\lim\limits_{n\to\infty}} x_n \le \overline{\lim\limits_{n\to\infty}} x_n$.

还有一个重要的定理，极限 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = A$ 的充要条件是，$\overline{\lim\limits_{n\to\infty}} x_n = \underline{\lim\limits_{n\to\infty}} x_n = A$. 这里的 A 可以是无穷大. 所以我们可以根据数列的上下极限相等这一点来判定数列极限存在.

还有一些关于上下极限的性质：

① $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}(-x_n) = -\underline{\lim\limits_{n\to\infty}} x_n$； $\underline{\lim\limits_{n\to\infty}}(-x_n) = -\overline{\lim\limits_{n\to\infty}} x_n$；

② $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}(x_n + y_n) \le \overline{\lim\limits_{n\to\infty}} x_n + \overline{\lim\limits_{n\to\infty}} y_n$； $\underline{\lim\limits_{n\to\infty}}(x_n + y_n) \ge \underline{\lim\limits_{n\to\infty}} x_n + \underline{\lim\limits_{n\to\infty}} y_n$；

③若 $x_n, y_n \ge 0$，则 $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}} x_n y_n \le \overline{\lim\limits_{n\to\infty}} x_n \cdot \overline{\lim\limits_{n\to\infty}} y_n$， $\underline{\lim\limits_{n\to\infty}} x_n y_n \ge \underline{\lim\limits_{n\to\infty}} x_n \cdot \underline{\lim\limits_{n\to\infty}} y_n$；

④若 $x_n > 0$， $\underline{\lim\limits_{n\to\infty}} x_n > 0$，则 $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}} \dfrac{1}{x_n} = \dfrac{1}{\underline{\lim\limits_{n\to\infty}} x_n}$， $\underline{\lim\limits_{n\to\infty}} \dfrac{1}{x_n} = \dfrac{1}{\overline{\lim\limits_{n\to\infty}} x_n}$.

由于直接使用上下极限来求数列极限的相关例题太少，故从略.

三十一、利用数学常数

31.1 圆周率 π

π 是圆的周长与直径的比值，约为 3.14159265，是个无理数. 它是一个神秘的数字，许多与圆完全无关的话题，最后都会突然冒出了 π. 关于圆周率 π，我们在此只介绍几个关于它的极限表达的形式，以拓宽读者视野.

（1）根据 $\arctan x$ 的麦克劳林级数 $\arctan x = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \dfrac{(-1)^n x^{2n+1}}{2n+1}$（$x\in[-1,1]$），并将 $x=1$ 代入，可以得到 $\dfrac{\pi}{4} = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \dfrac{(-1)^n}{2n+1} = \lim\limits_{n\to\infty}\left[1-\dfrac{1}{3}+\dfrac{1}{5}-\dfrac{1}{7}+\cdots+\dfrac{(-1)^n}{2n+1}\right]$.

（2）根据华里士公式，有 $\dfrac{\pi}{2} = \lim\limits_{n\to\infty}\left[\dfrac{(2n)!!}{(2n-1)!!}\right]^2 \cdot \dfrac{1}{2n+1}$（详见方法三十二）.

（3）$\sqrt{\pi}=\int_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{e}^{-x^2}\mathrm{d}x=2\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-x^2}\mathrm{d}x=2\lim_{x\to+\infty}\int_0^x\mathrm{e}^{-t^2}\mathrm{d}t$.

（4）圆周率的连分数表达（仅供欣赏，应试用途不大）：

$$①\ \pi=\cfrac{4}{1+\cfrac{1^2}{2+\cfrac{3^2}{2+\cfrac{5^2}{2+\cfrac{7^2}{2\cdots}}}}}=\cfrac{4}{1+\underset{n=1}{\overset{\infty}{\mathrm{K}}}\dfrac{(2n-1)^2}{2}};$$

$$②\ \pi=3+\cfrac{1^2}{6+\cfrac{3^2}{6+\cfrac{5^2}{6+\cfrac{7^2}{6+\cfrac{9^2}{6+\cdots}}}}}=3+\underset{n=1}{\overset{\infty}{\mathrm{K}}}\frac{(2n-1)^2}{6};$$

$$③\ \pi=\cfrac{4}{1+\cfrac{1^2}{3+\cfrac{2^2}{5+\cfrac{3^2}{7+\cfrac{4^2}{9+\cdots}}}}}=\cfrac{4}{1+\underset{n=1}{\overset{\infty}{\mathrm{K}}}\dfrac{n^2}{2n+1}}.$$

31.2 自然对数的底（欧拉数）e

常数e一般有两种定义方式，一种由极限$\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n$给出，另一种由无穷级数$\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{1}{n!}$给出，即$\mathrm{e}=\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n=\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{1}{n!}$. 其中，无穷级数也可以改写成极限形式，即$\mathrm{e}=\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{i=0}^{n}\dfrac{1}{i!}$. 这两种定义的应用都已经分别在方法 13.2 和 25.1 中表述过了，这里只提供索引，不作重复，读者可以参考对应章节来复习.

常数e可以作为自然对数的底数，也叫作欧拉数，约等于 2.71828.

31.3 欧拉常数γ

欧拉常数和上面介绍的欧拉数是两个不同的常数，一字之差，不能混淆.

为了引入欧拉常数，请读者先思考一个问题，数列极限

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}-\ln n\right)$$

存在吗？为什么？

答案是存在的. 在这里，我们可以用单调有界准则来证明这一点.

在证明之前，我们需要清楚一个已知的不等式，在方法二十六中也提到过，即当$x\in\left(-1,+\infty\right)$时，$\ln\left(1+x\right)\le x$一定成立（等号成立当且仅当$x=0$）. 这在我们的证明过程中会用到.

第一步是对单调性的证明. 这次我们用作差法. 设数列

$$a_n=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}-\ln n,$$

则对任意正整数n，都有

$$\begin{aligned}&a_{n+1}-a_n\\&=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}+\frac{1}{n+1}-\ln\left(n+1\right)-1-\frac{1}{2}-\frac{1}{3}-\cdots-\frac{1}{n}+\ln n\\&=\frac{1}{n+1}-\ln\left(n+1\right)+\ln n=\frac{1}{n+1}+\ln\frac{n}{n+1}=\ln\left(1-\frac{1}{n+1}\right)+\frac{1}{n+1},\end{aligned}$$

根据已知的不等式$\ln\left(1+x\right)\le x$，我们取$x=-\frac{1}{n+1}\in\left(-1,+\infty\right)$，立即可以知道$a_{n+1}-a_n<0$，因此数列$\left\{a_n\right\}$单调递减.

第二步是对有界性的证明. 我们若在已知的不等式$\ln\left(1+x\right)\le x$中，取$x=\frac{1}{n}\in\left(-1,+\infty\right)$，则有$\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)\le\frac{1}{n}$，也就是$\frac{1}{n}\ge\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)=\ln\frac{n+1}{n}$对任意正整数$n$成立. 因此，

$$\begin{aligned}a_n&=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}-\ln n\\&\ge\ln\frac{2}{1}+\ln\frac{3}{2}+\ln\frac{4}{3}+\cdots+\ln\frac{n+1}{n}-\ln n\\&=\ln\frac{2}{1}\cdot\frac{3}{2}\cdot\frac{4}{3}\cdot\cdots\cdot\frac{n+1}{n}-\ln n=\ln\left(n+1\right)-\ln n>0.\end{aligned}$$

从而我们找到了数列$\left\{a_n\right\}$的一个下界——0.

根据单调有界准则，我们就证明出了极限$\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}-\ln n\right)$存在.

这个极限值虽然客观上存在，但它无法用已有的符号表示（至少目前人们还无法表示），我们就称这个值为欧拉常数（或称欧拉—马歇罗尼常数），被记作C或γ，但更常记作γ，即

$$\gamma=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}-\ln n\right),$$

欧拉常数γ约等于 0.5772.

这里值得注意的是，方法二十八中曾证明，极限$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}\right)$本来是发散的（这恰好是调和级数$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$），但在通项中减去$\ln n$就变成收敛的了.

利用欧拉常数的定义，我们可以求某些与自然数倒数和有关的极限，如下例.

[例 101]求极限$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\cdots+\frac{1}{2n}\right)$.

这个极限其实可以利用定积分的定义来求，具体过程是：原极限$=\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{n+i}$

$$=\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\frac{n}{n+i}\cdot\frac{1}{n}=\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{1+\frac{i}{n}}\cdot\frac{1}{n}=\int_0^1\frac{\mathrm{d}x}{1+x}=\left[\ln(1+x)\right]_0^1=\ln 2.$$ 这是方法一.

但在这里，我们也可以用欧拉常数的定义来求，此乃方法二.

$$\begin{aligned}
\text{原极限}&=\lim_{n\to\infty}\left[\left(1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{2n}\right)-\left(1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}\right)\right]\\
&=\lim_{n\to\infty}\left[\left(1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{2n}-\ln 2n\right)-\left(1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}-\ln n\right)+\ln 2n-\ln n\right]\\
&=\lim_{n\to\infty}\left[\underbrace{\left(1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{2n}-\ln 2n\right)}_{\text{极限为}\gamma}-\underbrace{\left(1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}-\ln n\right)}_{\text{极限也为}\gamma}+\ln\frac{2n}{n}\right]\\
&=\gamma-\gamma+\ln 2\\
&=\ln 2.
\end{aligned}$$

下面我们再举一个相当综合的例子.

[例 102]设 $f_n(x)=x^n\ln x$，求极限 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{f_n^{(n)}\left(\frac{1}{n}\right)}{n!}$.

这道题确实不易，我决定用大篇幅和最细致的语言来讲这道题．如果读者可以领会这道例题的求解过程，那么你就相当厉害了．

想要求得这个极限值，首先我们要做的，就是把题目中出现的这个 n 阶导数 $f_n^{(n)}\left(\dfrac{1}{n}\right)$ 求出．本题的难点，其实不在极限的求解上，而在于对 $f_n^{(n)}\left(\dfrac{1}{n}\right)$ 的处理．

我们可以先求 $f_n^{(n)}(x)$，即 $\left(x^n\ln x\right)^{(n)}$，再将 $x=\dfrac{1}{n}$ 代入，就能够得到 $f_n^{(n)}\left(\dfrac{1}{n}\right)$ 了．于是，下面我们致力于计算 $\left(x^n\ln x\right)^{(n)}$.

对于两个函数乘积的高阶导数，我们首先想到的应当是“莱布尼茨公式”，即 $(uv)^{(n)}=\sum\limits_{r=0}^{n}\mathrm{C}_n^r u^{(n-r)}v^{(r)}$（假设读者已经会用这个公式）．我们注意到在莱布尼茨公式中，出现了 u 和 v 各自的各阶导数，因此，在套用这个公式之前，我们有必要寻找一下函数 x^n 和 $\ln x$ 的各阶导数（含零阶导数，即函数本身）的规律.

①对函数 x^n 的各阶导数规律的探究

$\left(x^n\right)^{(0)}=x^n$，　　　　$\left(x^n\right)'=nx^{n-1}$，

$\left(x^n\right)''=n(n-1)x^{n-2}$，　$\left(x^n\right)'''=n(n-1)(n-2)x^{n-3}$.

由此归纳出 $\left(x^n\right)^{(m)}=n(n-1)(n-2)\cdots(n-m+1)x^{n-m}$（其中 $0<$ 正整数 $m\le n$），但为了使 $m=0$ 的情况也囊括进去，我们可以用排列数的形式将上式改写成

$$\boxed{\left(x^n\right)^{(m)}=\mathrm{A}_n^m x^{n-m}，\quad 0\le m\le n},$$

其中，当 $m=0$ 时，$\mathrm{A}_n^0=1$.

当 $m>n$ 时，导数结果将会是 0，但在本题中，我们用不到这个结果.

②对函数 $\ln x$ 的各阶导数规律的探究

$(\ln x)^{(0)}=\ln x$，$(\ln x)'=\dfrac{1}{x}$，$(\ln x)''=-\dfrac{1}{x^2}$，$(\ln x)'''=\dfrac{1\cdot 2}{x^3}$，$(\ln x)^{(4)}=-\dfrac{1\cdot 2\cdot 3}{x^4}$.

由此归纳出，$(\ln x)^{(m)}=(-1)^{m-1}\dfrac{(m-1)!}{x^m}$，其中正整数 $m>0$．但这时我们很难将 $m=0$ 的情况统一在同一个表达式中，所以我们只好写成分段的形式，即

$$\boxed{(\ln x)^{(m)}=\begin{cases}\ln x, & m=0,\\ (-1)^{m-1}\dfrac{(m-1)!}{x^m}, & m>0.\end{cases}}$$

有了这两项规律，我们就可以方便地套用莱布尼茨公式了．根据公式，首先有$\left(x^n\ln x\right)^{(n)}=\sum\limits_{r=0}^{n}\mathrm{C}_n^r\left(x^n\right)^{(n-r)}(\ln x)^{(r)}$，但根据刚刚推导的规律可以知道，$\ln x$的各阶导数是分段的，阶数为零是一段，阶数不为零又是另一段．所以我们把$r=0$的情况单独拿出来．

$$\begin{aligned}\left(x^n\ln x\right)^{(n)}&=\sum_{r=0}^{n}\mathrm{C}_n^r\left(x^n\right)^{(n-r)}(\ln x)^{(r)}\\&=\sum_{r=\boxed{1}}^{n}\mathrm{C}_n^r\mathrm{A}_n^{n-r}x^r(-1)^{r-1}\frac{(r-1)!}{x^r}+\underset{r=0\text{时拆出来单独写}}{\underline{\underline{\mathrm{C}_n^0\mathrm{A}_n^nx^0\ln x}}}\\&=\sum_{r=1}^{n}\mathrm{A}_n^{n-r}(r-1)!\,\cancel{x^r}\frac{(-1)^{r-1}}{\cancel{x^r}}\mathrm{C}_n^r+n!\ln x\\&=\sum_{r=1}^{n}\frac{(-1)^{r-1}n!}{r}\mathrm{C}_n^r+n!\ln x\end{aligned}$$

（这一步是因为$\mathrm{A}_n^{n-r}(r-1)!=\dfrac{n!}{r}$，这个恒等式很容易证明，读者若将等号左边的排列数与阶乘展开写，就会知道它为什么成立．）

$$=n!\left[\sum_{r=1}^{n}\frac{(-1)^{r-1}}{r}\mathrm{C}_n^r+\ln x\right].$$

化简进行到这里，似乎遇到了瓶颈，但在这里有一个十分巧妙的技巧可以使式子变得更简单．

我们构造一个定积分$I=\int_0^1\dfrac{1-(1-x)^n}{x}\mathrm{d}x$（说句题外话，这个积分是瑕积分吗？答案当然不是的，看似$x=0$是瑕点，实则不是，因为当$x\to0^+$时，被积函数并非无界）．

一方面，如果我们用二项式定理将被积函数中的$(1-x)^n$展开，可以计算出这个定积分的值．计算过程如下：

$$\begin{aligned}I=\int_0^1\frac{1-(1-x)^n}{x}\mathrm{d}x&=\int_0^1\frac{1}{x}\left[1-\sum_{r=0}^{n}\mathrm{C}_n^r1^{n-r}(-x)^r\right]\mathrm{d}x=\int_0^1\frac{1}{x}\left[1-\sum_{r=0}^{n}\mathrm{C}_n^r(-1)^rx^r\right]\mathrm{d}x\\&=\int_0^1\left[\frac{1}{x}-\frac{1}{x}\sum_{r=0}^{n}\mathrm{C}_n^r(-1)^rx^r\right]\mathrm{d}x=\int_0^1\left[\frac{1}{x}-\sum_{r=0}^{n}\mathrm{C}_n^r(-1)^rx^{r-1}\right]\mathrm{d}x\end{aligned}$$

$$=\int_0^1\left[\frac{1}{x}-\underbrace{\underline{\underline{C_n^0(-1)^0x^{0-1}}}}_{r=0\text{时拆出来单独写}}-\sum_{r=\boxed{1}}^{n}C_n^r(-1)^r x^{r-1}\right]dx$$

$$=\int_0^1\left[\cancel{\frac{1}{x}}-\cancel{\frac{1}{x}}\boxed{+}\sum_{r=1}^{n}C_n^r(-1)^{\boxed{r-1}}x^{r-1}\right]dx$$

有限项和的积分等于积分的和，常数可提到积分外

$$=\int_0^1\sum_{r=1}^{n}C_n^r(-1)^{r-1}x^{r-1}dx=\sum_{r=1}^{n}C_n^r(-1)^{r-1}\int_0^1x^{r-1}dx$$

$$=\sum_{r=1}^{n}C_n^r(-1)^{r-1}\left[\frac{x^r}{r}\right]_0^1=\sum_{r=1}^{n}\frac{(-1)^{r-1}}{r}C_n^r.$$

神奇的是，这个形式恰好在刚刚的化简过程中出现了．而另一方面，通过对等比数列求和公式“和$=\dfrac{\text{首项}\left(1-\text{公比}^{\text{项数}}\right)}{1-\text{公比}}$”的逆用，这个积分 I 还可以这样计算：

$$I=\int_0^1\frac{1-(1-x)^n}{x}dx=\int_0^1\frac{1-(1-x)^n}{1-(1-x)}dx=\int_0^1\sum_{r=0}^{n-1}(1-x)^r dx=\sum_{r=0}^{n-1}\int_0^1(1-x)^r dx$$

$$=\sum_{r=0}^{n-1}\left[-\frac{(1-x)^{r+1}}{r+1}\right]_0^1=\sum_{r=0}^{n-1}\frac{1}{r+1}=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}.$$

因此，$I=\sum_{r=1}^{n}\frac{(-1)^{r-1}}{r}C_n^r=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}$.

从而，$\left(x^n\ln x\right)^{(n)}=n!\left[\sum_{r=1}^{n}\frac{(-1)^{r-1}}{r}C_n^r+\ln x\right]=n!\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}+\ln x\right)$．所以我们就有 $f_n^{(n)}\left(\frac{1}{n}\right)=n!\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}+\ln\frac{1}{n}\right)=n!\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}-\ln n\right)$.

于是原极限 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{f_n^{(n)}\left(\frac{1}{n}\right)}{n!}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n!\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}-\ln n\right)}{n!}$

$$=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}-\ln n\right)=\gamma.$$

看得出来，本题最复杂的地方就在于对

$$\left(x^n\ln x\right)^{(n)}=n!\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}+\ln x\right)$$

的推导，事实上，我们也可以通过数学归纳法来证明这一点.

要证明$\left(x^n\ln x\right)^{(n)}=n!\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}+\ln x\right)$，就是要证明

$$\left(x^n\ln x\right)^{(n)}=\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}\right)n!+n!\ln x.$$

第一步，归纳奠基．当$n=1$时，有$\left(x\ln x\right)'=1\cdot 1!+1!\ln x=1+\ln x$，命题显然成立．

第二步，归纳假设．假设当$n=k$时命题成立，即假设

$$\left(x^k\ln x\right)^{(k)}=\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{k}\right)k!+k!\ln x$$

成立．

第三步，归纳递推．我们只需要证明

$$\left(x^{k+1}\ln x\right)^{(k+1)}=\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{k}+\frac{1}{k+1}\right)(k+1)!+(k+1)!\ln x$$

成立就可以了．事实上，根据归纳假设，有

x 的其它各阶导数均为零，
只剩下这两个非零项了

$$\left(x^{k+1}\ln x\right)^{(k+1)}=\left[\left(x\cdot x^k\ln x\right)^{(k)}\right]'=\left[\mathrm{C}_k^0x\left(x^k\ln x\right)^{(k)}+\mathrm{C}_k^1x'\left(x^k\ln x\right)^{(k-1)}\right]'$$

$$=\left[\mathrm{C}_k^0x\left(x^k\ln x\right)^{(k)}\right]'+\left[\mathrm{C}_k^1x'\left(x^k\ln x\right)^{(k-1)}\right]'=\left[\mathrm{C}_k^0x\left(x^k\ln x\right)^{(k)}\right]'+\mathrm{C}_k^1\left(x^k\ln x\right)^{(k)}$$

$$=\left[x\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{k}\right)k!+k!x\ln x\right]'+k\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{k}\right)k!+k!k\ln x$$

这里将归纳假设代入

$$=\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{k}\right)k!+k!(1+\ln x)+k\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{k}\right)k!+k!k\ln x$$

$$=\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{k}\right)k!(k+1)+k!+k!\ln x+k!k\ln x$$

$$=\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{k}\right)k!(k+1)+k!+(k+1)k!\ln x$$

$$=\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{k}\right)(k+1)!+\frac{(k+1)!}{k+1}+(k+1)!\ln x$$

$$=\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{k}+\frac{1}{k+1}\right)(k+1)!+(k+1)!\ln x,$$

可以看出这确实成立．

因此，根据以上三步可知，$\left(x^n\ln x\right)^{(n)}=n!\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}+\ln x\right)$对任何正整数$n$都是成立的，遂有原极限$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{f_n^{(n)}\left(\frac{1}{n}\right)}{n!}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n!\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}-\ln n\right)}{n!}$

$$=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}-\ln n\right)=\gamma.$$

本题以求极限为背景，涉及到了高阶导数、排列组合、定积分、对求和号的变形、等比数列求和公式、数学归纳法、欧拉常数的定义等众多知识点，值得花大量时间好好品味.

最后我想指出，对于欧拉常数，其实还存在着一个举世无解的难题——欧拉常数究竟是有理数还是无理数，现在还不得而知，还没有人给出相关的严格证明. 欧拉常数与数学的一个分支——数论联系十分密切，人们在这个神秘的领域还有着太多无法解决的难题.

31.4 卡塔兰常数G

我们依旧先提出一个问题，无穷级数$\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n+1)^2}$是收敛的还是发散的？答案是收敛的. 这是一个交错级数，根据莱布尼兹判别法，数列$a_n=\frac{1}{(2n+1)^2}$单调递减且极限为 0，因此交错级数$\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n+1)^2}$收敛. 事实上，容易验证它是绝对收敛的.

虽然此无穷级数收敛，但是其和难以求出，人们将这个无穷级数的和称为卡塔兰常数，记作G，约等于 0.915965594. 与欧拉常数类似，卡塔兰常数是有理数还是无理数，也是个未解之谜.

根据卡塔兰常数的定义，即有

$$G=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n+1)^2}=\lim_{n\to\infty}\left[1-\frac{1}{3^2}+\frac{1}{5^2}-\frac{1}{7^2}+\cdots+(-1)^n\frac{1}{(2n+1)^2}\right].$$

关于卡塔兰常数，相关的极限表达式不多，但它在积分的计算中却千变万化，如 $G=\int_1^{+\infty}\frac{\ln x}{1+x^2}\mathrm{d}x=-\int_0^1\frac{\ln x}{1+x^2}\mathrm{d}x=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{x}{\sin x\cos x}\mathrm{d}x=\frac{1}{4}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{x}{\sin x}\mathrm{d}x=-\int_0^{\frac{\pi}{4}}\ln\tan x\mathrm{d}x$ $=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\ln\cot x\mathrm{d}x=\int_0^1\frac{\arccos x}{\sqrt{1+x^2}}\mathrm{d}x=\int_0^{+\infty}\arctan \mathrm{e}^{-x}\mathrm{d}x$ 等等. 这为我们的极限计算和积分计算都提供了很多结论.

三十二、利用华里士公式

在学习定积分时，我们或许会学到这样一条公式：

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^n x\mathrm{d}x=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^n x\mathrm{d}x=\begin{cases}\dfrac{(n-1)!!}{n!!}\cdot\dfrac{\pi}{2}, & n=2k,\\ \dfrac{(n-1)!!}{n!!}\cdot 1, & n=2k+1,\end{cases}\quad \text{其中 } k\in\mathbf{N}_+,$$

这个公式常被叫做“华里士公式”. 在这个公式中，出现了“双阶乘”的符号：一个正整数n的双阶乘，记作$n!!$，指的是不大于n且与n的奇偶性相同的所有正整数的连乘积. 但我们这里说的不是这一条公式，而是以这条公式为基础推出的另一个极限式，也叫华里士公式. 其实，严格来说，真正的华里士公式应该不是上述的定积分公式，而是下面要介绍的这条公式.

华里士公式（也有人翻译成“沃利斯公式”，英文名叫 Wallis 公式）最原本的形式是这样一个极限：

$$\lim_{n\to\infty}\left[\frac{(2n)!!}{(2n-1)!!}\right]^2\cdot\frac{1}{2n+1}=\frac{\pi}{2},$$

或写成无穷乘积的形式，即

$$\prod_{k=1}^{\infty}\frac{(2k)^2}{(2k-1)(2k+1)}=\frac{\pi}{2}.$$

但我们可以根据恒等式$(2n)!!=2^n n!$与$(2n-1)!!=\dfrac{(2n)!}{2^n n!}$（这都不难证明，甚至将$n$取几个特殊值就能想明白这个道理）将上述含有双阶乘的形式等价地改写成只含单阶乘的形式，即

$$\lim_{n\to\infty}\left[\frac{2^{2n}(n!)^2}{(2n)!}\right]^2\cdot\frac{1}{2n+1}=\frac{\pi}{2},$$

除此之外，我们还可以给等号两边同时开平方，并且注意到$\sqrt{2n+1}$和$\sqrt{2}\cdot\sqrt{n}$在$n\to\infty$时是一对等价无穷大，于是华里士公式还可以整理成

$$\lim_{n\to\infty}\frac{2^{2n}(n!)^2}{(2n)!\sqrt{n}}=\sqrt{\pi},$$

上述四种形式都是彼此等价的.

利用华里士公式，我们就可以求某些特殊的极限，如下面的例题.

[例 103]求极限$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1\cdot3\cdot5\cdot\cdots\cdot(2n-1)}{2\cdot4\cdot6\cdot\cdots\cdot(2n)}$.

我们发现分子和分母实际上都是双阶乘的形式，于是想到华里士公式.

$$原极限=\lim_{n\to\infty}\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}=\lim_{n\to\infty}\sqrt{\left[\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}\right]^2\cdot(2n+1)}\cdot\sqrt{\frac{1}{2n+1}}$$
$$=\lim_{n\to\infty}\sqrt{\left[\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}\right]^2\cdot(2n+1)}\cdot\lim_{n\to\infty}\sqrt{\frac{1}{2n+1}}$$
$$=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\cdot 0=0.$$

华里士公式为我们提供了一条现成的结论，可以应用到题目当中. 但由于非数学专业基本不会讲授这个公式，所以这也算比较冷门的方法了.

三十三、利用斯特林公式

利用华里士公式，人们进一步证明出了接下来要介绍的斯特林公式（英文名为 Stirling's approximation）. 斯特林公式本来是一个用来估计 $n!$ 的公式，并且 n 越大，估计效果越好. 公式内容为 $n!\approx\sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{\mathrm{e}}\right)^n$. 我们先来初步感受一下这个公式. 若计算 100 的阶乘（从 1 乘到 100），得到的精确值是（数据由 MATLAB 程序运行结果给出，下同）

93,326,215,443,944,152,681,699,238,856,266,700,490,
715,968,264,381,621,468,592,963,895,217,599,993,229,
915,608,941,463,976,156,518,286,253,697,920,827,223,
758,251,185,210,916,864,000,000,000,000,000,000,000,000.

使用斯特林公式估计出的近似值是

93,248,477,827,412,243,886,605,493,436,888,351,271,
331,400,176,625,432,131,399,840,463,861,127,601,439,
620,743,159,016,235,830,054,594,838,470,303,049,953,
669,244,708,598,331,083,307,724,323,455,642,275,676,288.

虽然看似估计得不是很精确，一共 158 位，却只有前两位能对上，但是在大数的世界里，这已经算很好了（相对误差大约只有 –0.08% ）.

不过，这个近似的形式对求极限这一方面用处不大，我们接下来介绍两种更为精确的形式.

精确的斯特林公式是 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n!}{\sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{\mathrm{e}}\right)^n}=1$，这和前面介绍的华里士公式类似，也提供了一条现成的结论，可以直接应用.

下面我们再介绍一个斯特林公式的推广形式，它可以帮我们求更多含有阶乘的极限，这个推广形式的内容是：一定存在某个 $\theta_n\in(0,1)$，使得 $n!=\sqrt{2\pi n}n^n\mathrm{e}^{-n+\frac{\theta_n}{12n}}$ 成立. 事实上 θ_n 的取值范围还可以更精确，但 $(0,1)$ 这个范围对我们来说基本已经够用了. 这个公式有点中值定理的感觉，用了这个公式，可以把阶乘瞬间去掉. 在

这里，我们主要使用的就是这个斯特林公式的推广形式. 前方高能预警.

[例 75 续]求极限$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n}{\sqrt[n]{n!}}$.

这是在前面讲“利用定积分的定义”这一节中介绍的例题，我们在这里用斯特林公式解决.

根据斯特林公式，一定存在某个$\theta_n\in(0,1)$，使得$n!=\sqrt{2\pi n}n^n\mathrm{e}^{-n+\frac{\theta_n}{12n}}$成立，因此原极限

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n}{\sqrt[n]{n!}}=\lim_{n\to\infty}\frac{n}{\sqrt[n]{\sqrt{2\pi n}n^n\mathrm{e}^{-n+\frac{\theta_n}{12n}}}}=\lim_{n\to\infty}\frac{n}{\sqrt[2n]{2\pi n}n\mathrm{e}^{-1+\frac{\theta_n}{12n^2}}}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt[2n]{2\pi n}\mathrm{e}^{-1+\frac{\theta_n}{12n^2}}}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt[2n]{\pi}\sqrt[2n]{2n}\mathrm{e}^{-1+\frac{\theta_n}{12n^2}}}=\frac{1}{1\times1\times\mathrm{e}^{-1+0}}=\mathrm{e}.$$

注意这里的$\{\theta_n\}$实际上是个数列，随着n取值的不同，θ_n的取值也是不同的，且根据斯特林公式，我们能够确定出数列$\{\theta_n\}$的通项公式

$$\theta_n=12n^2+12n\ln\frac{n!}{\sqrt{2\pi n}n^n},$$

这个数列是有界的. 由于有界数列与无穷小量的乘积极限为零，因此在上述解答过程中，有$\dfrac{\theta_n}{12n^2}\to0$（$n\to\infty$）.

[例 104]求极限$\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n^2]{n!}$.

由斯特林公式，一定存在$\theta_n\in(0,1)$，使得$n!=\sqrt{2\pi n}n^n\mathrm{e}^{-n+\frac{\theta_n}{12n}}$成立，故原极限

$$=\lim_{n\to\infty}\sqrt[n^2]{\sqrt{2\pi n}n^n\mathrm{e}^{-n+\frac{\theta_n}{12n}}}=\lim_{n\to\infty}(2\pi n)^{\frac{1}{2n^2}}n^{\frac{1}{n}}\mathrm{e}^{-\frac{1}{n}+\frac{\theta_n}{12n^3}}=\lim_{n\to\infty}(2\pi n)^{\frac{1}{2n^2}}\cdot\lim_{n\to\infty}n^{\frac{1}{n}}\cdot\lim_{n\to\infty}\mathrm{e}^{-\frac{1}{n}+\frac{\theta_n}{12n^3}}$$

$$=\lim_{n\to\infty}(2\pi n)^{\frac{1}{2n^2}}=\mathrm{e}^{\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{2n^2}\ln2\pi n}\xlongequal[\text{海涅定理}]{\text{数列极限改函数极限}\ \text{洛必达法则}}\mathrm{e}^{\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{4x\cdot x}}=\mathrm{e}^0=1.$$

[例 60 续]求极限$\lim\limits_{n\to\infty}(n!)^{\frac{1}{n\ln n}}$.

这道题我们在方法十七中使用积分放缩与夹逼准则已经解决，现在我们用斯特林公式做一下.

根据斯特林公式，一定存在$\theta_n\in(0,1)$，使得$n!=\sqrt{2\pi n}n^n\mathrm{e}^{-n+\frac{\theta_n}{12n}}$成立，故原极限

$$=\lim_{n\to\infty}\left(\sqrt{2\pi n}n^n\mathrm{e}^{-n+\frac{\theta_n}{12n}}\right)^{\frac{1}{n\ln n}}=\lim_{n\to\infty}\left[\left(\sqrt{2\pi n}n^n\mathrm{e}^{-n+\frac{\theta_n}{12n}}\right)^{\frac{1}{n}}\right]^{\frac{1}{\ln n}}=\lim_{n\to\infty}\left(\sqrt[2n]{\pi}\sqrt[2n]{2n}n\mathrm{e}^{-1+\frac{\theta_n}{12n^2}}\right)^{\frac{1}{\ln n}}$$

$$=\exp\left\{\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\ln n}\ln\left(\sqrt[2n]{\pi}\sqrt[2n]{2nn\mathrm{e}^{-1+\frac{\theta_n}{12n^2}}}\right)\right\}=\exp\left\{\lim_{n\to\infty}\frac{\ln\left(\sqrt[2n]{\pi}\sqrt[2n]{2n\mathrm{e}^{-1+\frac{\theta_n}{12n^2}}}\right)+\ln n}{\ln n}\right\}$$

$$=\exp\left\{\lim_{n\to\infty}\frac{\ln\left(\sqrt[2n]{\pi}\sqrt[2n]{2n\mathrm{e}^{-1+\frac{\theta_n}{12n^2}}}\right)}{\ln n}+1\right\}=\exp\left\{\lim_{n\to\infty}\ln\left(\sqrt[2n]{\pi}\sqrt[2n]{2n\mathrm{e}^{-1+\frac{\theta_n}{12n^2}}}\right)\cdot\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\ln n}+1\right\}$$

$$=\exp\{-1\times 0+1\}=\exp\{1\}=\mathrm{e}.$$

[例 105]求极限$\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{\dfrac{1\cdot 3\cdot 5\cdot\cdots\cdot(2n-1)}{2\cdot 4\cdot 6\cdot\cdots\cdot(2n)}}$.

这道题看起来和前面的[例 103]类似，读者可以先自行尝试使用华里士公式解决（对于这道题，采用华里士公式解决其实要比接下来展示的斯特林公式法要简单得多）. 在这里，我们尝试利用斯特林公式来计算这个极限.

原极限$=\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{\dfrac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2}}$（这里利用了双阶乘与单阶乘的关系）$=\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{\dfrac{(2n)!}{4^n(n!)^2}}$

$=\dfrac{1}{4}\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{\dfrac{(2n)!}{(n!)^2}}$，根据斯特林公式，一定存在$\theta_{2n}\in(0,1)$，$\theta_n\in(0,1)$使得

$$(2n)!=4^n\sqrt{4\pi n}n^{2n}\mathrm{e}^{-2n+\frac{\theta_{2n}}{24n}}\text{（这里把}2n\text{视为整体），}(n!)^2=2\pi n\cdot n^{2n}\mathrm{e}^{-2n+\frac{\theta_n}{6n}}$$

成立，于是原极限$=\dfrac{1}{4}\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{\dfrac{(2n)!}{(n!)^2}}=\dfrac{1}{4}\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{\dfrac{4^n\sqrt{4\pi n}n^{2n}\mathrm{e}^{-2n+\frac{\theta_{2n}}{24n}}}{2\pi n\cdot n^{2n}\mathrm{e}^{-2n+\frac{\theta_n}{6n}}}}=\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{\dfrac{\sqrt{\pi n}\mathrm{e}^{\frac{\theta_{2n}}{24n}}}{\pi n\mathrm{e}^{\frac{\theta_n}{6n}}}}$

$$=\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\frac{\mathrm{e}^{\frac{\theta_{2n}}{24n}-\frac{\theta_n}{6n}}}{\sqrt{\pi n}}}=\lim_{n\to\infty}\frac{\mathrm{e}^{\frac{\theta_{2n}}{24n^2}-\frac{\theta_n}{6n^2}}}{\sqrt[2n]{\pi n}}$$

$$=\frac{\mathrm{e}^{\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{\theta_{2n}}{24n^2}-\frac{\theta_n}{6n^2}\right)}}{\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[2n]{\pi n}}=\frac{\mathrm{e}^{0-0}}{1}=1.$$

若采用华里士公式法解决，过程就是：

$$\text{原极限}=\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\frac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2}}=\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\frac{(2n)!\sqrt{n}}{2^{2n}(n!)^2\sqrt{n}}}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt[n]{\dfrac{2^{2n}(n!)^2}{(2n)!\sqrt{n}}\cdot\sqrt{n}}}=\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\frac{1}{\sqrt{\pi n}}}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt[2n]{\dfrac{\pi}{2}}\cdot\sqrt[2n]{2n}}=\frac{1}{1\times 1}=1.$$

虽然这里华里士公式比斯特林公式要简单，但这只是因为本题与华里士公式十分相像，从而给我们直接套用华里士公式带来了直接便利. 总的来说，斯特林公式还是提供了一条更强的结论，因此，我们仍然不能否认斯特林公式的强大作用.

斯特林公式在含有阶乘的极限中总能起到意想不到的作用，读者可以细细体会一番这种方法. 不过，依旧需要指出的是，这是数学专业的方法，由于非数学专业的高等数学课程一般不会介绍斯特林公式，所以除非万不得已，非数学专业最好不要在试卷的大题中出现. 当然，数学竞赛是另一码事.

三十四、利用线性代数方法

接下来要介绍的这种方法是微积分和线性代数的融合，综合程度比较高. 事实上，各个学科其实都是相通的，当下也有很多新兴的交叉学科正在蓬勃发展着. 学科的交叉会产生新的思想、新的理论，利于科学进步，是我们应当倡导的.

在这里，我们简要地介绍一种利用线性代数知识求一类已知递推公式的数列的通项公式，进而求出数列极限的方法（假定读者已经修过线性代数课程）.

若已知数列$\{x_n\}$的递推公式形如$x_n = px_{n-1} + qx_{n-2}$，其中$p$与$q$为非零常数，即数列中的每一项都是前两项的线性组合，我们就可以按如下思路操作：

第一步，将递推公式$x_n = px_{n-1} + qx_{n-2}$等价地改写成矩阵形式

$$\begin{bmatrix} x_n \\ x_{n-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} p & q \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_{n-1} \\ x_{n-2} \end{bmatrix};$$

第二步，利用矩阵形式的递推公式向前递推，即

$$\begin{bmatrix} x_n \\ x_{n-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} p & q \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_{n-1} \\ x_{n-2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} p & q \\ 1 & 0 \end{bmatrix}^2 \begin{bmatrix} x_{n-2} \\ x_{n-3} \end{bmatrix} = \cdots = \begin{bmatrix} p & q \\ 1 & 0 \end{bmatrix}^{n-2} \begin{bmatrix} x_2 \\ x_1 \end{bmatrix};$$

第三步，利用矩阵的相似对角化等手段求出矩阵$\begin{bmatrix} p & q \\ 1 & 0 \end{bmatrix}^{n-2}$，进而求出数列$\{x_n\}$的通项公式；

第四步，根据通项公式求出数列极限.

[例 106]设数列$\{x_n\}$满足$x_n = \dfrac{3}{4}x_{n-1} + \dfrac{1}{4}x_{n-2}$，且已知$x_1 = 0$，$x_2 = 1$，求$\lim\limits_{n\to\infty} x_n$.

方法一：首先我们把题述的递推公式改写成$\begin{bmatrix} x_n \\ x_{n-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{3}{4} & \frac{1}{4} \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_{n-1} \\ x_{n-2} \end{bmatrix}$，然后不断向前递推，得到$\begin{bmatrix} x_n \\ x_{n-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{3}{4} & \frac{1}{4} \\ 1 & 0 \end{bmatrix}^{n-2} \begin{bmatrix} x_2 \\ x_1 \end{bmatrix}$. 问题的关键在于求出$\begin{bmatrix} \frac{3}{4} & \frac{1}{4} \\ 1 & 0 \end{bmatrix}^{n-2}$.

设矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}\frac{3}{4} & \frac{1}{4}\\ 1 & 0\end{bmatrix}$，求得它的全部特征值为 $\lambda_1=1$ 与 $\lambda_2=-\frac{1}{4}$．矩阵 $\boldsymbol{A}$ 有两个不相等的特征值，因此它可以相似对角化．容易求出，属于特征值 $\lambda_1=1$ 的一个特征向量是 $\boldsymbol{x}_1=\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}$，属于特征值 $\lambda_2=-\frac{1}{4}$ 的一个特征向量是 $\boldsymbol{x}_2=\begin{bmatrix}1\\-4\end{bmatrix}$．

如果令矩阵 $\boldsymbol{P}=\left[\boldsymbol{x}_1,\boldsymbol{x}_2\right]=\begin{bmatrix}1 & 1\\ 1 & -4\end{bmatrix}$，则有 $\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}=\begin{bmatrix}1 & 1\\ 1 & -4\end{bmatrix}^{-1}\begin{bmatrix}\frac{3}{4} & \frac{1}{4}\\ 1 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 1\\ 1 & -4\end{bmatrix}$

$=\begin{bmatrix}\lambda_1 & 0\\ 0 & \lambda_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & -\frac{1}{4}\end{bmatrix}$；进一步，我们也有 $\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}^{n-2}\boldsymbol{P}=\begin{bmatrix}1 & 1\\ 1 & -4\end{bmatrix}^{-1}\begin{bmatrix}\frac{3}{4} & \frac{1}{4}\\ 1 & 0\end{bmatrix}^{n-2}\begin{bmatrix}1 & 1\\ 1 & -4\end{bmatrix}$

$=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & -\frac{1}{4}\end{bmatrix}^{n-2}=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & \left(-\frac{1}{4}\right)^{n-2}\end{bmatrix}$．因此，矩阵

$$\begin{bmatrix}\frac{3}{4} & \frac{1}{4}\\ 1 & 0\end{bmatrix}^{n-2}=\begin{bmatrix}1 & 1\\ 1 & -4\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & \left(-\frac{1}{4}\right)^{n-2}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 1\\ 1 & -4\end{bmatrix}^{-1}=\begin{bmatrix}\frac{4}{5}+\frac{1}{5}\left(-\frac{1}{4}\right)^{n-2} & \frac{1}{5}-\frac{1}{5}\left(-\frac{1}{4}\right)^{n-2}\\ \frac{4}{5}+\frac{1}{5}\left(-\frac{1}{4}\right)^{n-3} & \frac{1}{5}-\frac{1}{5}\left(-\frac{1}{4}\right)^{n-3}\end{bmatrix}.$$

故 $\begin{bmatrix}x_n\\ x_{n-1}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\frac{3}{4} & \frac{1}{4}\\ 1 & 0\end{bmatrix}^{n-2}\begin{bmatrix}x_2\\ x_1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\frac{4}{5}+\frac{1}{5}\left(-\frac{1}{4}\right)^{n-2} & \frac{1}{5}-\frac{1}{5}\left(-\frac{1}{4}\right)^{n-2}\\ \frac{4}{5}+\frac{1}{5}\left(-\frac{1}{4}\right)^{n-3} & \frac{1}{5}-\frac{1}{5}\left(-\frac{1}{4}\right)^{n-3}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_2\\ x_1\end{bmatrix}$，考虑对应位置上的元素相等，就有 $x_n=\left[\frac{4}{5}+\frac{1}{5}\left(-\frac{1}{4}\right)^{n-2}\right]x_2+\left[\frac{1}{5}-\frac{1}{5}\left(-\frac{1}{4}\right)^{n-2}\right]x_1=\frac{4}{5}+\frac{1}{5}\left(-\frac{1}{4}\right)^{n-2}$．

从而 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=\lim\limits_{n\to\infty}\left[\frac{4}{5}+\frac{1}{5}\left(-\frac{1}{4}\right)^{n-2}\right]=\frac{4}{5}$．

以上展示的是线性代数方法. 实际上这类题还可以用差分方程的思路去解决. 差分方程是含有未知函数差分的方程，它的解法与微分方程极其类似. 读者在阅读这种方法之前可以先修关于差分方程的知识.

方法二：将 $x_n=\frac{3}{4}x_{n-1}+\frac{1}{4}x_{n-2}$ 看作是一个二阶常系数齐次线性差分方程，初始条件为 $x_1=0$，$x_2=1$．此二阶差分方程的特征方程为 $\lambda^2-\frac{3}{4}\lambda-\frac{1}{4}=0$，解得特

征根为$\lambda_1=1$，$\lambda_2=-\dfrac{1}{4}$．这是两个不等的实数根，因此，这个差分方程的通解为 $x_n=C_1\cdot 1^n+C_2\cdot\left(-\dfrac{1}{4}\right)^n$．根据初始条件$x_1=0$，$x_2=1$得方程组$\begin{cases}0=C_1-\dfrac{1}{4}C_2,\\1=C_1+\dfrac{1}{16}C_2,\end{cases}$进而定出$\begin{cases}C_1=\dfrac{4}{5},\\C_2=\dfrac{16}{5}.\end{cases}$于是$x_n=\dfrac{4}{5}+\dfrac{16}{5}\cdot\left(-\dfrac{1}{4}\right)^n$．从而$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=\lim\limits_{n\to\infty}\left[\dfrac{4}{5}+\dfrac{16}{5}\cdot\left(-\dfrac{1}{4}\right)^n\right]=\dfrac{4}{5}$.

除以上两种方法之外，我们还有一种方法，属于高中数学的范围. 如果去掉最后求极限的那一步，这就其实是高考数学的常考题.

方法三：将$x_n=\dfrac{3}{4}x_{n-1}+\dfrac{1}{4}x_{n-2}$变形成$x_n-x_{n-1}=-\dfrac{1}{4}\left(x_{n-1}-x_{n-2}\right)$，可以知道，数列$\left\{x_n-x_{n-1}\right\}$是一个等比数列，且公比为$-\dfrac{1}{4}$．因此$x_n-x_{n-1}=\left(x_2-x_1\right)\left(-\dfrac{1}{4}\right)^{n-2}$ $=\left(-\dfrac{1}{4}\right)^{n-2}$．这时我们可以应用所谓的“累加法”，即

$$x_n-x_{n-1}=\left(-\frac{1}{4}\right)^{n-2},$$

$$x_{n-1}-x_{n-2}=\left(-\frac{1}{4}\right)^{n-3},$$

……

$$x_2-x_1=\left(-\frac{1}{4}\right)^{0},$$

将这$(n-1)$个式子加起来，并利用等比数列求和公式，就可以得到

$$x_n-x_1=\frac{1-\left(-\frac{1}{4}\right)^{n-1}}{1-\left(-\frac{1}{4}\right)},$$

即$x_n=\dfrac{4}{5}\left[1-\left(-\dfrac{1}{4}\right)^{n-1}\right]$.

因此$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{4}{5}\left[1-\left(-\frac{1}{4}\right)^{n-1}\right]=\frac{4}{5}$.

三十五、利用概率论方法

概率论属于随机数学的范畴，利用随机数学思想解决很多问题都是方便而高效的，如著名的蒙特卡罗模拟方法就是用随机思想解决现实问题的一个典型例子.

概率论方法，包括前面方法三十四中使用的线性代数方法、方法 25.1 中使用的复变函数方法，以及其他的学科交叉方法等等，都是对知识的高度综合运用后的结果，读者可以仔细体会.

我们在这里简要地介绍两种用概率论中极限定理的思想求极限的方法，包括大数定律和中心极限定理，以例题的形式给出（假定读者已经修过概率论课程）.

[例 107]求极限$\lim\limits_{n\to\infty}\iint\cdots\int_{G_n}\mathrm{d}x_1\mathrm{d}x_2\cdots\mathrm{d}x_n$，其中

$$G_n=\left\{\left(x_1,x_2,\cdots,x_n\right)\middle|x_1^2+x_2^2+\cdots+x_n^2\le\frac{n}{2},0\le x_i\le1,i=1,2,\cdots,n\right\}.$$

这是一道涉及到多重积分的题目，仅限数学专业读者或对其感兴趣的读者参考. 这道题的求解并非易事，但利用辛钦大数定律却可以比较方便地解决它.

假设随机变量$X_1,X_2,\cdots,X_n$独立，且同分布于参数为 0 和 1 的均匀分布，即$X_1,X_2,\cdots,X_n\overset{\text{i.i.d.}}{\sim}U\left(0,1\right)$⑨，则每个随机变量的数学期望为$E\left(X_i\right)=\frac{0+1}{2}=\frac{1}{2}$，方差为$D\left(X_i\right)=\frac{(1-0)^2}{12}=\frac{1}{12}$，进而求得

$$E\left(X_i^2\right)=D\left(X_i\right)+\left[E\left(X_i\right)\right]^2=\frac{1}{12}+\left(\frac{1}{2}\right)^2=\frac{1}{3}\triangleq\mu,$$

其中$i=1,2,\cdots,n$.

由于这些随机变量是独立的，所以它们的联合分布为多维均匀分布.

根据几何概型的思想，服从多维均匀分布的多维随机变量在某空间内取值的概率，就等于这个空间的几何度量在整个样本空间中所占的比例，而n重积分$\iint\cdots\int_{G_n}\mathrm{d}x_1\mathrm{d}x_2\cdots\mathrm{d}x_n$的值恰好就表示点集$G_n$的几何度量，又容易计算整个样本空间的几何度量为$1^n=1$）. 因此，有$P\left\{\left(X_1,X_2,\cdots,X_n\right)\in G_n\right\}=\iint\cdots\int_{G_n}\mathrm{d}x_1\mathrm{d}x_2\cdots\mathrm{d}x_n$，于是问题转化成了求$\lim\limits_{n\to\infty}P\left\{\left(X_1,X_2,\cdots,X_n\right)\in G_n\right\}$的值.

⑨【i.i.d.】独立同分布，这是英文 independent and identically distributed 的缩写，下同.

$$P\left\{\left(X_1,X_2,\cdots,X_n\right)\in G_n\right\}=P\left\{X_1^2+X_2^2+\cdots+X_n^2\le\frac{n}{2}\right\}=P\left\{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i^2\le\frac{1}{2}\right\}$$

$$=P\left\{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i^2-\mu\le\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right\}=P\left\{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i^2-\mu\le\frac{1}{6}\right\}$$

$$\ge P\left\{-\frac{1}{6}\le\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i^2-\mu\le\frac{1}{6}\right\}=P\left\{\left|\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i^2-\mu\right|\le\frac{1}{6}\right\}.$$

我们导出了一个不等式：

$$P\left\{\left|\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i^2-\mu\right|\le\frac{1}{6}\right\}\le P\left\{\left(X_1,X_2,\cdots,X_n\right)\in G_n\right\}\overset{\substack{\text{概率的}\\\text{有界性}}}{\le}1.$$

根据辛钦大数定律有 $\lim\limits_{n\to\infty}P\left\{\left|\frac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}X_i^2-\mu\right|\le\frac{1}{6}\right\}=1$，而且 $\lim\limits_{n\to\infty}1=1$，由夹逼准则就可得 $\lim\limits_{n\to\infty}P\left\{\left(X_1,X_2,\cdots,X_n\right)\in G_n\right\}=1$，亦即原极限 $\lim\limits_{n\to\infty}\iint\cdots\int_{G_n}\mathrm{d}x_1\mathrm{d}x_2\cdots\mathrm{d}x_n=1$.

[例 108] 计算极限 $\lim\limits_{n\to\infty}\mathrm{e}^{-n}\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{n^k}{k!}$.

在下面的讨论中，我们用记号 $P(\cdot)$ 表示泊松分布，用记号 $P\{\cdot\}$ 表示概率.

设随机变量 $X_1,X_2,\cdots,X_n$ 相互独立，并且均服从于参数为 1 的泊松分布，即 $X_1,X_2,\cdots,X_n\overset{\text{i.i.d.}}{\sim}P(1)$. 则每个随机变量的数学期望 $E(X_i)=1$，方差 $D(X_i)=1$，$i=1,2,\cdots,n$. 再设随机变量 $Y_n=\sum\limits_{i=1}^{n}X_i$，由独立随机变量数学期望与方差的性质可知，$E(Y_n)=n$，$D(Y_n)=n$. 且根据泊松分布的可加性知道，$Y_n$ 服从参数为 n 的泊松分布，即 $Y_n\sim P(n)$. 根据泊松分布的分布律，由以上分析，我们能够得出 $\mathrm{e}^{-n}\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{n^k}{k!}=P\{Y_n\le n\}$，于是我们只需求出 $\lim\limits_{n\to\infty}P\{Y_n\le n\}$，其中 $Y_n=\sum\limits_{i=1}^{n}X_i\sim P(n)$，$X_1,X_2,\cdots,X_n\overset{\text{i.i.d.}}{\sim}P(1)$.

根据林德伯格—列维中心极限定理，有 $\lim\limits_{n\to\infty}P\left\{\frac{\sum\limits_{i=1}^{n}X_i-n}{\sqrt{n}}\le x\right\}=\int_{-\infty}^{x}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\mathrm{e}^{-\frac{t^2}{2}}\mathrm{d}t$，

即$\lim\limits_{n\to\infty}P\left\{\dfrac{Y_n-n}{\sqrt{n}}\le x\right\}=\lim\limits_{n\to\infty}P\left\{Y_n\le x\sqrt{n}+n\right\}=\int_{-\infty}^{x}\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}\mathrm{e}^{-\frac{t^2}{2}}\mathrm{d}t$．令$x=0$，就可以得到

$\lim\limits_{n\to\infty}P\left\{Y_n\le n\right\}=\int_{-\infty}^{0}\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}\mathrm{e}^{-\frac{t^2}{2}}\mathrm{d}t\xlongequal[\text{概率密度的规范性}]{\text{考虑标准正态分布}}\dfrac{1}{2}$（所谓概率密度的规范性，是指概率密度函数在区间$(-\infty,+\infty)$上的反常积分一定收敛于1）．因此，原极限$\lim\limits_{n\to\infty}\mathrm{e}^{-n}\sum\limits_{k=1}^{n}\dfrac{n^k}{k!}$

$=\lim\limits_{n\to\infty}P\left\{Y_n\le n\right\}=\dfrac{1}{2}$．

结　语

以上展示了一元函数或数列极限计算的 35 种常见方法，当然也不能排除还有其它巧妙方法的可能，以后也还会涌现出很多关于极限的新兴方法. 我们只有在实战中不停总结，才能把每种方法更扎实地巩固住. 极限的计算是大大小小的考试中几乎必定出现的内容，所以有必要认真对待.

正文部分中的例题，有的是摘自书籍或网络（包括国内外相关教材、考试辅导书、习题集、学术论文、网络论坛、贴吧、公众号等等），有的是我自己命制的，均不用于任何商业用途，仅供交流、学习，以提高个人的数学水平.

另外，教程编写仓促，而且编者水平极其有限，难免会有漏洞甚至错误，所以还请大家多多雅正.