

# Chapitre 1 : Éléments de Probabilité

---

## Définitions

---

**Expérience aléatoire** : est une expérience où le hasard intervient.

**Espace d'échantillonnage ( $\Omega$ )** : l'ensemble de toutes les issues possibles d'une expérience aléatoire.

**Événement** : tout sous-ensemble de  $\Omega$ .

**Événement Impossible ( $\Phi$ )** : événement qui ne se produira jamais.

## Lois de probabilités

---

$$P(\phi) = 0$$

$$P(\Omega) = 1$$

$$B \subseteq A \rightarrow P(A/B) = P(A) - P(B)$$

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) : \text{Relation de Boole}$$

$$0 \leq P(A) \leq 1$$

$$\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$$

$$A \setminus B = A \cap \overline{B}$$

$$0 \leq Pr(A) \leq 1$$

$$Pr(\overline{A}) = 1 - P(A)$$

## Probabilité conditionnelle

---

Probabilité de A sachant que B est réalisé :  $P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$

$$P(A \cap B) = P(A|B) \cdot P(B)$$

$$P(A \cap B) = P(B|A) \cdot P(A)$$

Nota-bene : Si dans un exercice, on utilise "Au moins un", c'est équivalent à dire que "tout sauf rien"  $\rightarrow 1 - \text{Probabilité de ne rien avoir}$

## 5.3 Probabilités des causes (Théorème de Bayes)

---

Formule de Bayes:

$$Pr(B|A) = \frac{Pr(A|B) \cdot Pr(B)}{Pr(A)}$$

**Une partition** : Quand la somme des probabilités vaut 1 et que les probabilités sont mutuellement exclusives.

$$Pr(A) = \sum_{i=1}^n Pr(A|B_i) \cdot Pr(B_i)$$

Formule de Bayes "améliorée":

$$Pr(B_k|A) = \frac{Pr(A|B_k).Pr(B_k)}{Pr(A)} = \frac{Pr(A|B_k).Pr(B_k)}{\sum_{i=1}^n Pr(A|B_i).Pr(B_i)}$$

## Le filtre Anti-Spam

Les filtres anti-spam des boîtes d'e-mail fonctionnent sur le principe que plus un mot contenu dans le mail a tendance à se retrouver dans spam au plus, si le mot se trouve dans ce mail, ce mot a tendance à être un spam.

$$Pr(S|M) = \frac{Pr(M|S)*Pr(S)}{Pr(M|S)*Pr(S)+Pr(M|H)*Pr(H)}$$

## Evénements statistiquement indépendants

---

Les deux équations suivantes ne sont valables que si A et B sont *statistiquement indépendants*

$$Pr(A|B) = Pr(A)$$

$$Pr(A \cap B) = Pr(A).Pr(B)$$

## 5.4 Evénements statistiquement indépendants

---

Deux événements sont statistiquement indépendants ssi :  $P(A|B) = P(A)$

Nota-bene : Une indépendance statistique n'est pas forcément vraie dans le monde réel. car la statistique est calculée sur un échantillon qui peut ne pas être représentatif

##