Probabilité et Statistiques

Contents

Chapitre 1 : Eléments de Probabilité

Définitions

Expérience aléatoire : est une expérience où le hasard intervient.
Espace d'échantillonnage (Ω) : l'ensemble de toute les issues possibles d'une expérience aléatoire.
Evénement : tout sous ensemble de Ω.
Evénement Impossible(Φ) : évémenement qui ne se produira jamais.

Lois de probabilités

$P(\phi) = 0$

$P(\Omega) = 1$

$B \subseteq A \rightarrow P(A/B) = P(A) - P(B)$

$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$: Relation de Boole

$0 \leq P(A) \leq 1$

$\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$

$A \backslash B = A \cap \overline{B}$

$0 \leq Pr(A) \leq 1$

$Pr(\overline{A}) = 1 - P(A)$

Probabilité conditionnellere

Probabilité de A sachant que B est réalisé :

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

P(A∩B) = P(A|B).P(B)
P(A∩B) = P(B|A).P(A)

> Nota-bene : Si dans un exercice, on utilise "Au moins un", c'est équivalent à dire que "tout sauf rien" → 1 - Probabilité de ne rien avoir

5.3 Probabilités des causes (Théorème de Bayes)

Formule de Bayes:

$$Pr(B|A) = \frac{Pr(A|B).Pr(B)}{Pr(A)}$$

Une partition : Quand la somme des probabilités vaut 1 et que les probabilités sont mutuelement exclusives.

$$Pr(A) = \sum_{i=1}^{n} Pr(A|B_i).Pr(B_i)$$

Formule de Bayes "améliorée":

$$Pr(B_k|A) = \frac{Pr(A|B_k).Pr(B_k)}{Pr(A)} = \frac{Pr(A|B_k).Pr(B_k)}{\sum_{i=1}^{n} Pr(A|B_i).Pr(B_i)}$$

Evénements statistiquement indépendants

Les deux équations suivantes ne sont valables que si A et B sont *statistquement indépendants*

$Pr(A|B) = Pr(A)$
$Pr(A \cap B) = Pr(A).Pr(B)$

5.4 Evénements statistiquement indépendants

Deux événements sont statstiquements indépendants ssi : P(A|B) = P(A)

> Nota-bene : Une indépendance statistique n'est pas forcément vraie dans le monde réele. car la statistique est calculée sur un échantillon qui peut ne pas être représentatif

Chapitre 2: Variables Aléatoires

Introduction

Variable Aléatoire (*généralement noté X*) : Une variable aléatoire est une quantité qui varie en fonction du hasard.

> Une Variable aléatoire peut (par exemple) désigner le nombre de points obtenus en lançant un dé.

Une *variable aléatoire* peut avoir un caractere **discret** ou **continu**

Les Variables aléatoires discrètes

Pour définir une variable aléatoire discrète, il faut donner l'ensemble des valeurs $\{x_i\}$ qu'elle peut prendre et donner la probabilité que la variable a de prendre chacune de ces valeurs.

ex Pr{X=0} = ...= 1/8

$$X = \begin{pmatrix} x_i \\ p_i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 \\ \frac{1}{8} & \frac{3}{8} & \frac{3}{8} & \frac{1}{8} \end{pmatrix}$$

$P = (p_i)$ est la loi de probabilité associée à $X = (x_i)$

$(p_i = Pr\{X = x_i\})$

$\sum_i p_i = 1$

Fonction de répartition d'une variable aléatoire discrète

Une focntion de répartition de la variable aléatoire X(ou FR_X) est la probabilité qu'une variable aléatoire prenne une valeur inférieure ou égale à x.

$$\sum_{i=1}^{k} Pr\{X = x_i\}$$

Espérence mathématique d'une variable aléatoire

L'espérence mathématique peut être vue comme la moyenne arithmétique. C'est une valeur vers laquelle on va tendre si on répète une infinité de fois l'expérience.

Soit $X = \begin{pmatrix} x_i \\ p_i \end{pmatrix}$

Propriétés

$$E(\alpha * X + \beta) = \alpha * E(X) + \beta$$

$$E(X \pm Y) = E(X) \pm E(Y)$$

$$E(X * Y) = E(X) * E(Y)$$

> Ici, X et Y doivent être deux variables aléatoires indépendantes

Variance et écart-type d'une variable aléatoire discrète

La variance décrit la mesure de la dispersion autour de la moyenne.

$$Var(X) = E[(X - E(X))^2]$$

L'écart-type de X est noté $\sigma(X)$ et on a :

$$\sigma(X) = \sqrt{Var(X)}$$

On peut cependant simplifier la formule de la variance :

$$Var(X) = E(X^2) - [E(X)]^2$$

Propriétés

$$Var(\alpha * X + \beta) = \alpha^2 * Var(X)$$

$$Var(X \pm Y) = E(X) + var(Y)$$

Variables aléatoires continues