

# Exercices

## Exercice du Cours du 11/02/20

On désire faire une estimation ponctuelle, pour une population constituée de 1000 familles, du pourcentage de familles nombreuses, du nombre moyen d'enfants par famille et de la variance du nombre d'enfants. *Une famille est considérée comme nombreuse si il y a trois enfants ou plus.*

Pour cela on interroge 100 familles différentes. Les résultats obtenus sont repris dans le tableau ci-dessous.

### Résolution

- $N = 1000$
- $n = 100$
- $p$  = Pourcentage de familles nombreuses = ?
- $m$  = nombre moyen d'enfant par famille = ?
- $\sigma$  = variance du nombre d'enfant = ?

$X_i$ (nb d'enfants)	$r_i$	$r_i \cdot x_i$	$r_i \cdot x_i^2$
0	12	0	0
1	15	14	15
2	29	58	116
3	22	66	198
4	15	60	240
5	7	35	175
Total	100	234	744

$$f = \frac{22 + 15 + 7}{100} = 44$$

$$\bar{x} = \frac{\sum r_i \cdot x_i}{n} = \frac{234}{100} = 2,34$$

2,34 enfant est une estimation ponctuelle de  $m$

### Non exhaustif

$$S_{n-1}^2 = \frac{n}{n-1} \cdot S_n^2$$

$$S_n^2 = \overline{x^2} - \bar{x}^2 = 7,44 - 2,34^2 = 1,9644(enfant^2)$$

$$S_n = 1,4016(enfant)$$

$$S_{n-1}^2 = \frac{100}{99} \cdot 1,9644 = 1,9842$$

1,9842 est un estimateur ponctuel du paramètre  $\sigma^2$

La variance corrigée est intéressante dans le cas de petits échantillons

## Exhaustif

$$\left(1 - \frac{1}{N}\right) * S_{n-1}^2$$

$$(1 - 1/100) \cdot 1,9842 = 1,9822$$

La réponse est donc de 1,9822.

## Exercice 1

Afin de connaître la proportion d'adultes pratiquant une langue étrangère, nous avons effectué un sondage portant sur 1000 adultes choisis au hasard. Nous avons constaté que 385 d'entre eux parlent couramment au moins une langue étrangère.

1. Présentez un intervalle de confiance pour la proportion évoquée ci-dessus au niveau de confiance 0.95.
2. Quelle devrait être la taille de l'échantillon pour que la marge d'erreur ne dépasse pas les 2% et que le résultat soit fiable à 99%

## Résolution

Les données fournies par l'énoncé sont :

- $n = 1000$
- $f = 385/1000 = 38,5\%$

### Sous-question 1

On recherche un intervalle de confiance avec un  $\alpha = 5\%$ .

L'équation de l'intervalle de confiance est donc :

$$Pr\left(f - 1.96 \cdot \sqrt{\frac{p \cdot (1-p)}{n}} \leq p \leq f + 1.96 \cdot \sqrt{\frac{p \cdot (1-p)}{n}}\right) = 0.95$$

On recherche la solution à :  $1.96 \cdot \sqrt{\frac{p \cdot (1-p)}{n}}$

On remplace dans l'équation et on trouve que :  $1.96 \cdot \sqrt{\frac{0,385 \cdot (1-0,385)}{1000}} = 0,0302$

0,0302 = 3,02% représente l'amplitude de l'intervalle de confiance (Marge d'erreur ME)

On met le résultat dans l'équation de l'intervalle de confiance :

$$Pr(f - 0,0302 \leq p \leq f + 0,0302) = 0.95$$

$$Pr(0,385 - 0,0302 \leq p \leq 0,385 + 0,0302) = 0.95$$

On obtiens donc un intervalle de confiance à 5% de [35,48%; 41,52%].

## Sous-question 2

On recherche une ME = 0,02.

$$\begin{aligned}ME &= 2,58 \cdot \sqrt{\frac{0,385 \cdot 0,615}{n}} = 0,02 \\0,02^2 &= 2,58^2 \cdot \left( \sqrt{\frac{0,385 \cdot 0,615}{n}} \right)^2 \\ \frac{0,02^2}{2,58^2} &= \frac{0,385 \cdot 0,615}{n} \\ n \cdot 0,02^2 &= 2,58^2 \cdot 0,385 \cdot 0,615 \\ n &= \frac{2,58^2 \cdot 0,385 \cdot 0,615}{0,02^2} \\ n &\approx 3924,92\end{aligned}$$

Il faut donc 3925 personnes interrogées pour obtenir une marge d'erreur de 2% et un  $\alpha = 1\%$

## Exercice 2

Chaque bouteille d'un échantillon aléatoire de 65 bouteilles en plastique de 1,5 litre d'eau a été pesée et les résultats sont les suivants :

$$\bar{x} = 1,5 \text{ kg et } \sum_i (x_i - \bar{x}) = 0,44 \text{ kg}^2$$

Sur base de ces résultats un intervalle de confiance pour le poids moyen d'une bouteille d'eau avec un niveau d'incertitude de 5%.

## Résolution

$$\begin{aligned}S_n^2 &= 1/n \sum (x_i - \bar{x})^2 = 0,44/65 = 0,00676923 \\ S_{n-1}^2 &= \frac{n}{n-1} \cdot \sqrt{\frac{\sigma^2}{n}} = \frac{0,44}{65} = 0,006875 \\ ME &= 1,96 \cdot \sqrt{\frac{0,006875}{65}} = 0,02016\end{aligned}$$

On obtiens donc un intervalle de confiance de : [1,47984kg; 1,52016kg]

On a donc une marge d'erreur de 20 grammes.

## Exercice 3

Durant la saison d'hiver, les ventes journalières de pommes de terre chez un grossiste suivent une loi normale de moyenne inconnue et d'écart-type 2.2 tonnes.

- Un échantillon aléatoire de 50 jours de vente a fourni une moyenne de 14.5 tonnes. Sur base de cet échantillon et des résultats observés, donnez un intervalle de confiance pour le paramètre inconnu ( $\alpha = 0.10$ ) .
- Quelle devrait être la taille de l'échantillon pour que l'étendue de l'intervalle de confiance soit égale à 1 tonne ( $\alpha = 0.05$ )?

## Résolution

### Sous-question 1 :

$$ME = 1,645 \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$
$$ME = 1,645 \cdot \frac{2,2}{\sqrt{50}} = 0,51...$$

L'intervalle de confiance est  $IC_{10\%} [13,99\%; 15,01\%]$  tonnes

### Sous-question 2

On recherche un  $IC_{5\%}$  sachant que  $\alpha = 5\%$ .

Notre ME = 0,5 tonnes

$$ME = 0,5 = 1,96 \cdot \frac{2,2}{\sqrt{n}}$$

## Exercice 4

Soit un échantillon aléatoire de 38 arbres, échantillon représentant 10% de la population de référence. Une mesure du volume de chacun de ces arbres a donné, après regroupement en classes et assimilation de chaque classe à son centre, les résultats suivants :

Volume ( $C_i$ )	$r_i$
20 $m^3$	8
40 $m^3$	16
60 $m^3$	12
80 $m^3$	2

- Calculez un intervalle de confiance pour le volume moyen de la population (échantillon non exhaustif,  $\alpha = 6\%$ ).
- Même question mais en travaillant avec un échantillon exhaustif.

## Résolution

??Estimation ponctuelle de sigma 243,746

## Exercice 5

Afin d'effectuer une analyse de l'apprentissage de l'anglais sur l'ensemble des enfants entrant en humanités, un examen est organisé après la première année d'étude. Soit  $X$  le score (sur 100) obtenu par l'élève.  $X$  suit une loi normale.

Sur un échantillon de 25 enfants, la moyenne est de 42.12 et l'écart-type de 3.47. Déterminez un intervalle de confiance du score moyen que cette population pourrait réaliser au niveau de confiance de 99%.

# Résolution

XXXXXXX

## Exercice 6

---

*Un professeur de l'Henallux désire faire une enquête auprès des anciens étudiants de sa section. Il dispose d'un fichier avec les adresses électroniques de 400 anciens. L'enquête consiste en une série de questions auxquelles il faut répondre « oui » ou « non ». Combien de réponses doit-il recevoir pour pouvoir afficher un résultat avec une marge d'erreur maximale de 6% ( $\alpha = 0.06$ ) ?*

# Résolution

XXXXXXXXXX

### Exercices

Exercice du Cours du 11/02/20

Résolution

Non exhaustif

Exhaustif

Exercice 1

Résolution

Sous-question 1

Sous-question 2

Exercice 2

Résolution

Exercice 3

Résolution

Sous-question 1 :

Sous-question 2

Exercice 4

Résolution

Exercice 5

Résolution

Exercice 6

Résolution