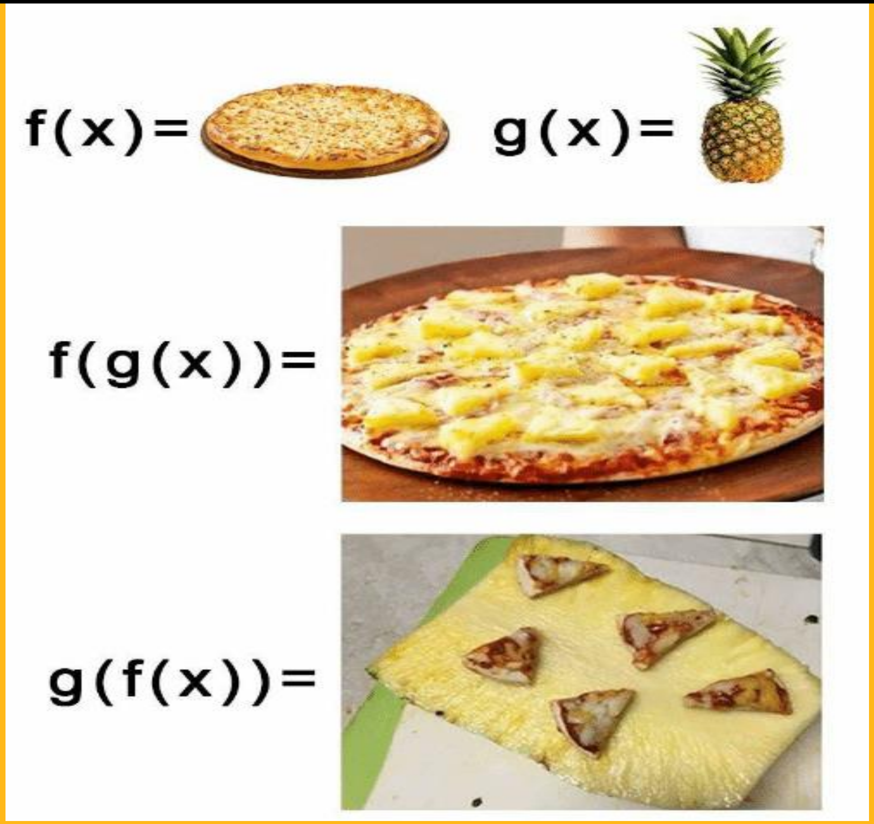
COMPLEMENTO MATEMÀTICO PARA INGENIEROS

SESIÓN 11: Composición de funciones, función inyectiva, función inversa y aplicaciones



Departamento de Ciencias

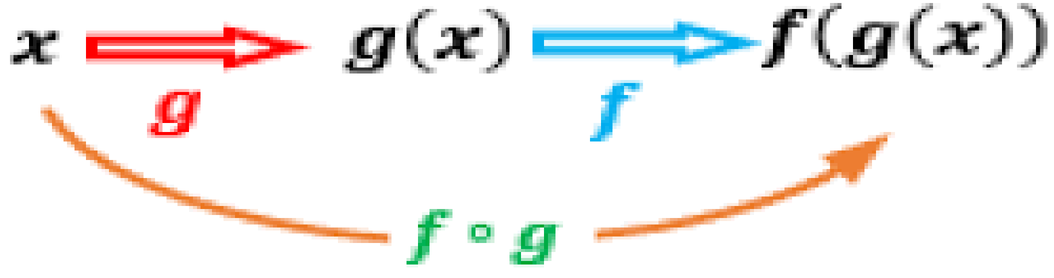
INTRODUCCIÓN

Fabricación de celulares

En una compañía de celulares Ericsson, los ingenieros eléctricos han determinado que el costo total de elaborar q unidades durante un día de trabajo es $C(q) = 2q^2 + 50$ dólares y en un día de trabajo, durante las primeras t horas se fabrican $q(t) = 30t$ unidades.

¿Se podrá expresar el costo de fabricación total como una función de t? ¿Cuánto se habrá gastado en la producción después de 7 horas?

SABERES PREVIOS



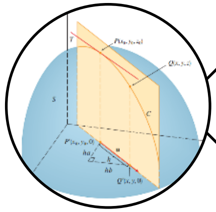
Composición de funciones

Enlace: https://quizizz.com

LOGRO DE SESIÓN

Al finalizar la sesión de aprendizaje, el estudiante resuelve problemas de ingeniería y gestión empresarial, construyendo un modelo matemático, haciendo uso de la composición de funciones, función inyectiva y función inversa.

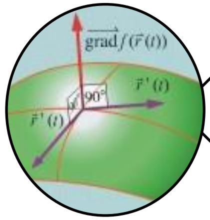
CONTENIDOS



1. Composición de funciones. Definición y aplicaciones

∇f

2. Función inyectiva.



3. Función inversa.

4. Aplicaciones

DEFINICIÓN DE LA COMPOSICIÓN DE FUNCIONES

Sean f y g dos funciones. Tomemos x en el dominio de g, de tal manera que $g(x)$ pertenezca al dominio de f.

Luego la **composición $\boldsymbol{f \circ g}$** (f compuesta con g) en el punto x se define como:

$$\boxed{(f \circ g)(x) = f\big(g(x)\big)}$$

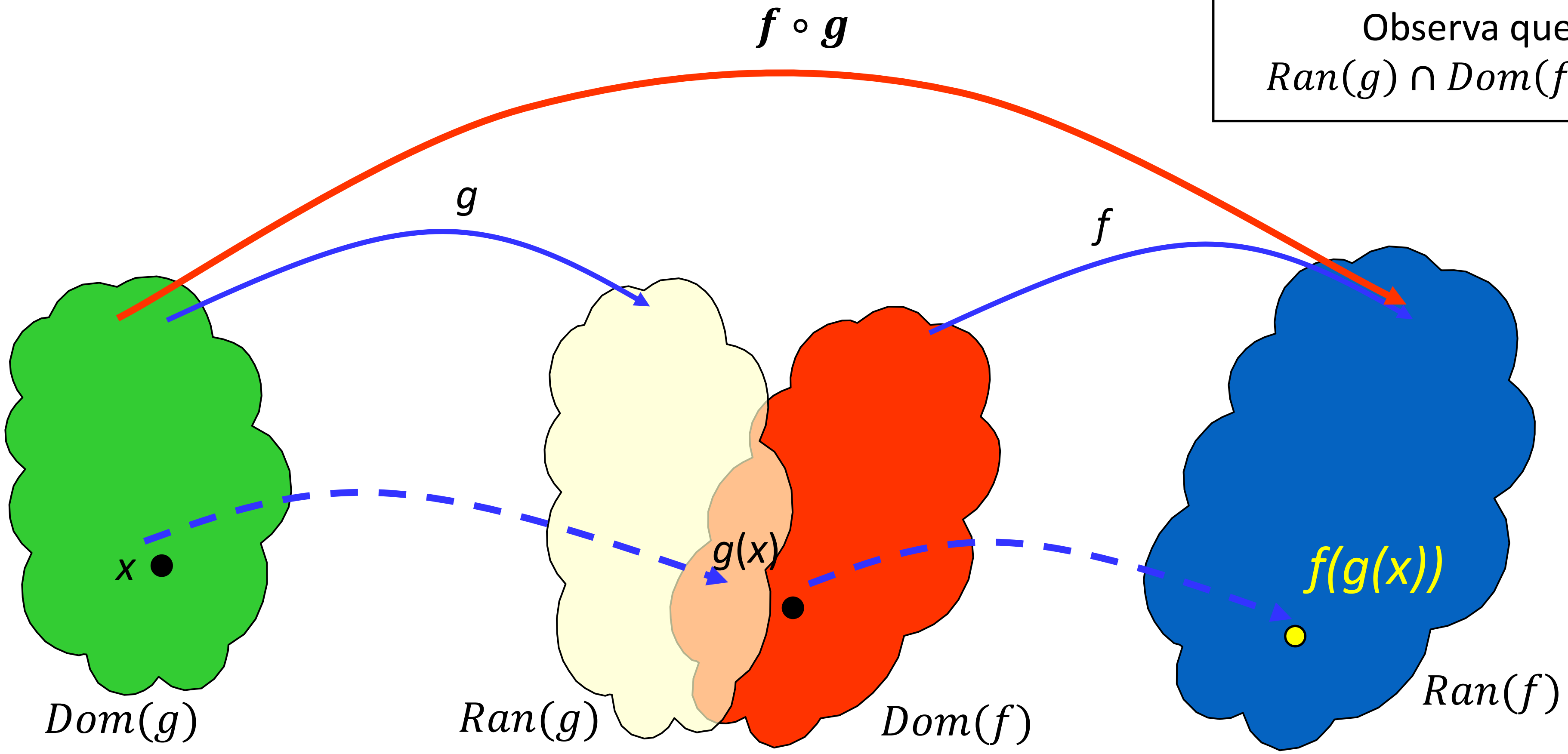
$$Dom(f \circ g) = \{x \in \mathbb{R} \ / \ x \in Dom(g) \wedge g(x) \in Dom(f)\ \}$$

Observación: También se define $(g \circ f)(x) = g(f(x))$. Su dominio está dado por:

$$Dom(g \circ f) = \{x \in \mathbb{R} \ / \ x \in Dom(f) \wedge f(x) \in Dom(g)\ \}$$

Interpretación de la composición de dos funciones

Observa que
$Ran(g) \cap Dom(f) \neq \emptyset$



$$(f \circ g)(x) = f\big(g(x)\big) \qquad Dom(f \circ g) = \{x \,/\, x \in Dom(g) \wedge g(x) \in Dom(f)\}$$

Ejemplo 1

Dadas las funciones:

$$f(x) = \sqrt{x} \quad y \quad g(x) = x + 1$$

Determine: a) $f \circ g$ b) $g \circ f$

Solución:

a) Para hallar $f \circ g$:

$$(f \circ g)(x) = f\big(g(x)\big) = f\,(x+1) = \sqrt{(x+1)}$$

$$con \quad Dom(f \circ g) = [-1; +\infty[$$

b) Para hallar $g \circ f$:

$$(g \circ f)(x) = g\big(f(x)\big) = g\,(\sqrt{x}) = \sqrt{x} + 1$$

$$con \quad Dom(g \circ f) = [0;\ +\infty[$$

Ejemplo 2

Dadas las funciones: $f = \{(5;4);(6;5);(7;6);(8;7);(9;-2)\}$

$g = \{(2;5);(3;6);(4;7);(6;10);(7;-1)\}$

Determine: $f \circ g$

Solución: Para hallar $f \circ g$, debemos conocer previamente el rango de g y el dominio de f, así:

$$Ran(g) = \{5;6;7;10;-1\} \qquad Dom(f) = \{5;6;7;8;9\}$$

Entonces: $\boxed{Ran(g) \cap Dom(f) = \{5;6;7\}}$

Buscamos los pares de g y f que tengan como segundas y primeras componentes a: 1, 2, 3, respectivamente. Luego:

$$(2;5) \in g \wedge (5;4) \in f \rightarrow (2;4) \in f \circ g$$

$$(3;6) \in g \wedge (6;5) \in f \rightarrow (3;5) \in f \circ g$$

$$(4;7) \in g \wedge (7;6) \in f \rightarrow (4;6) \in f \circ g$$

Por lo tanto, tenemos: $\boxed{f \circ g = \{(2;4);(3;5);(4;6)\}}$

Ejemplo 3

Dadas las funciones f y g con las reglas de correspondencia:

$$f(x) = \sqrt{x-2} \text{ y } g(x) = \frac{1}{x}$$

Determine si existe $f \circ g$ y $Dom(f \circ g)$

Solución:

✓ Determinado los dominios de f y g

$$f(x) = \sqrt{x-2}; \quad Dom(f) = [2; +\infty[$$

$$g(x) = \frac{1}{x}; \quad Dom(g) = \mathbb{R} \setminus \{0\}$$

✓ Determinamos $Dom(f \circ g)$

$$Dom(f \circ g) = \{x \mid \underbrace{x \in Dom(g)}_{x \neq 0} \wedge \underbrace{g(x) \in Dom(f)}_{\frac{1}{x} \in [2; +\infty[}\}$$

$$\frac{1}{x} \geq 2 \rightarrow \frac{1-2x}{x} \geq 0 \rightarrow x \in \left]0; \frac{1}{2}\right]$$

Así,

$$Dom(f \circ g) = \left]0; \frac{1}{2}\right]$$

De este modo, $f \circ g$ existe

Ejemplo 3 (cont.)

Dadas las funciones f y g con las reglas de correspondencia:

$$f(x) = \sqrt{x-2} \text{ y } g(x) = \frac{1}{x}$$

Determine si existe $f \circ g$ y $Dom(f \circ g)$

Solución:

✓ Determinado la regla de correspondencia de $f \circ g$

$$\begin{aligned}(f\ o\ g)(x) &= f\big(g(x)\big)\\ &= f\left(\frac{1}{x}\right)\\ &= \sqrt{\frac{1}{x}-2}\\ &= \sqrt{\frac{1-2x}{x}}\end{aligned}$$

Propiedades de la composición de funciones

Sean las funciones f, g y h; entonces tenemos las siguientes propiedades:

P1) $f \circ g \neq g \circ f$ no es conmutativa

P2) $(f \circ g) \circ h = f \circ (g \circ h)$ asociativa

P3) $(f + g) \circ h = (f \circ h) + (g \circ h)$ distributiva

P4) $(f \cdot g)\, o\, h = (f \circ h) \cdot (g \circ h)$

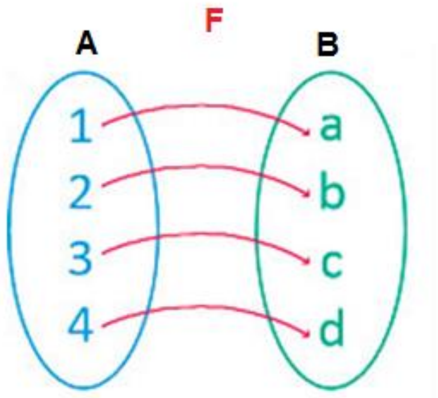
Si $I: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $I(x) = x$, es la función identidad, se tiene:

P5) $f \circ \mathrm{I} = f$ y $\mathrm{I} \circ f = f$

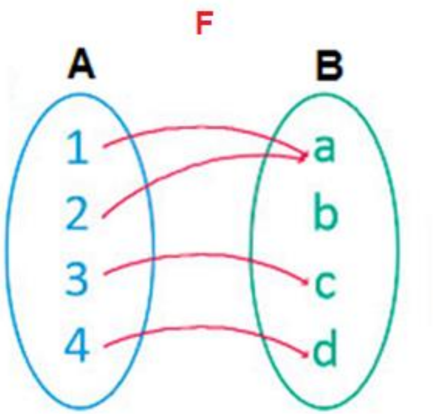
Funciones inyectivas

Una función f se denomina inyectiva si no existe dos elementos en su dominio que tenga la misma imagen, es decir:

$$\text{Si } a \neq b \text{ entonces } f(a) \neq f(b)$$



F es inyectiva



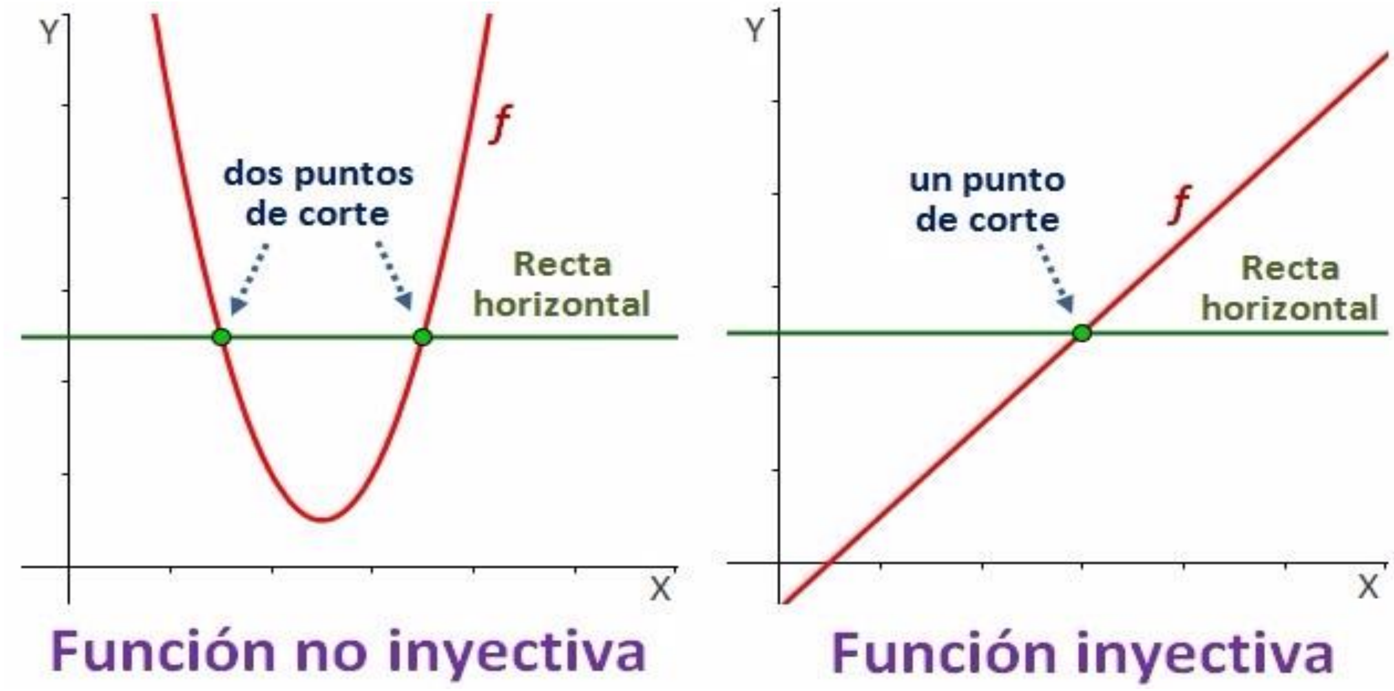
F no es inyectiva

Una forma equivalente de definir una función f es inyectiva es:

$$\text{Si } f(a) = f(b) \text{ entonces } a = b$$

Criterio de la recta horizontal

Si trazamos rectas horizontales a la grafica de una función y éstas cortan a lo mucho en un punto, entonces podemos afirmar que la función es inyectiva.



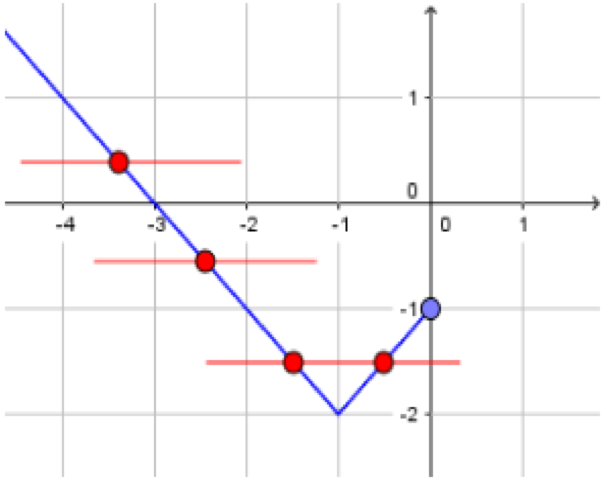
Ejemplo 4

Determine si la función f con regla de correspondencia $f(x) = |x+1| - 2$ definida en el intervalo $]-\infty; 0]$ es inyectiva.

Solución:

Construyendo la gráfica de la función $f(x) = |x+1| - 2$, definida en el intervalo $]-\infty; 0]$ es:

Trazando rectas horizontales, observamos rectas que cortan en dos puntos a la gráfica de la función. Es decir, por el CRH la función no es inyectiva.



Función inversa

Sea f una función inyectiva con dominio en A y rango en B. Luego, podemos definir su *función inversa*, denotada por f^{-1}, de la siguiente forma:

$$f^{-1}(y) = x \; si \; y \; solo \; si \; f(x) = y$$

Observación:

- $Dom(f^{-1}) = Ran(f)$
- $Ran(f^{-1}) = Dom(f)$
- Si $(a;b) \in f \;\; \rightarrow \;\; (b;a) \in f^{-1}$

REGLA PARA HALLAR LA INVERSA DE UNA FUNCIÓN.

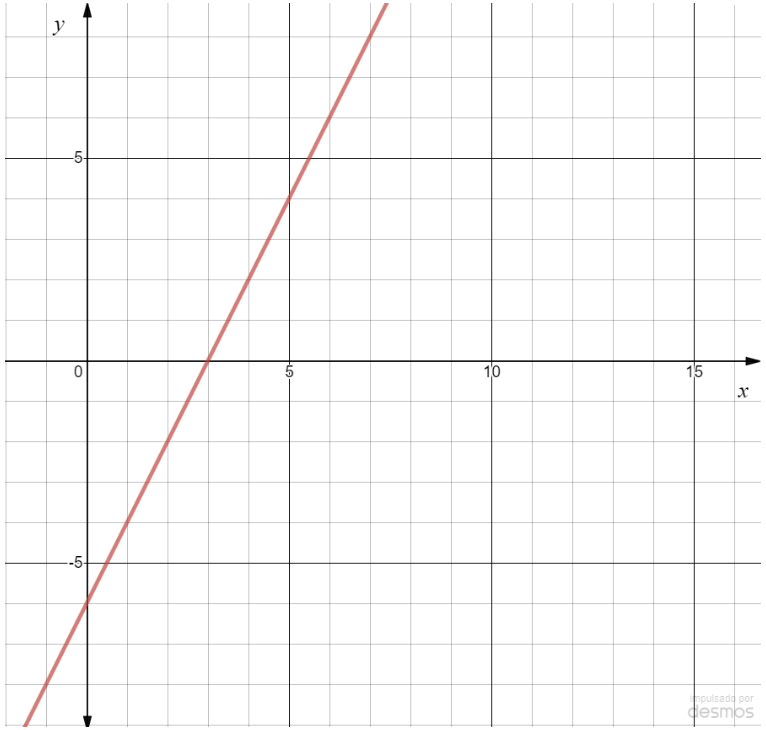
Pasos:

1. Verifica que la función sea inyectiva.
2. Escribe: $y = f(x)$.
3. Luego, despeja x (de la función) en términos de y.
4. Intercambia x e y. La ecuación resultante es
$$y = f^{-1}(x)$$
5. Finalmente, determine el dominio de f^{-1}

Ejemplo 5

Sea $f(x) = 2x - 6$. Calcula $f^{-1}(x)$.

De la gráfica, observamos que f es inyectiva.



Pasos:

1. Hacemos $y = 2x - 6$
2. Despejamos x: $x = \frac{y+6}{2}$
3. Intercambiamos x por y:
$$y = \frac{x+6}{2}$$
4. Finalmente
$$f^{-1}(x) = \frac{x+6}{2}$$
5. $Dom(f^{-1}) = Ran(f) = \mathbb{R}$

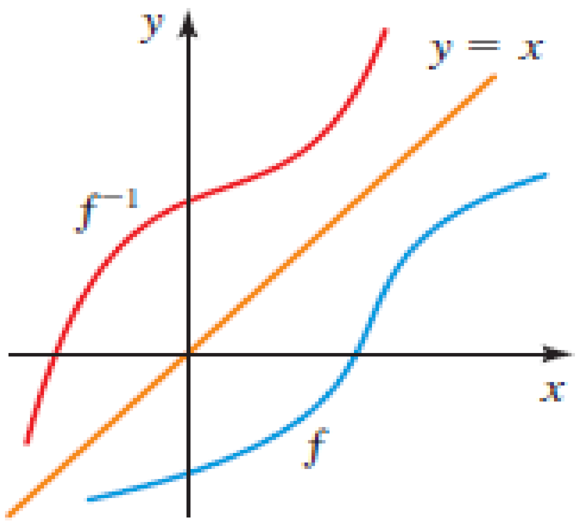
Gráfica de la inversa de una función

Dada la gráfica de una función f inyectiva, si se desea graficar la función f^{-1} se debe tener en cuenta lo siguiente:

La gráfica de f^{-1} se obtiene al reflejar la gráfica de f respecto a la recta $y = x$

Observe que se cumple:

Si $(a; b) \in f \;\rightarrow\; (b; a) \in f^{-1}$



TRABAJO EN EQUIPO

Instrucciones

1. Ingrese a la sala de grupos reducidos asignada.
2. Desarrolle las actividades asignadas
3. Presente su desarrollo en el Padlet del curso.

METACOGNICIÓN

¿Para qué nos sirve el aprendizaje de este tema?

¿Qué dificultades enfrentaste? Y ¿Cómo las solucionaste?

¿Qué fenómenos en la vida real, se pueden modelar utilizando álgebra de funciones?

¿Conoces algunas aplicaciones de la composición de funciones en tu profesión?

REFERENCIAS

- Stewart, J., & Romo, J. H. (2008). Cálculo de una variable: Trascendentes tempranas / James Stewart (6a. ed.). México D.F.: Cengage Learning.

- Zill, D. G., & Wright, W. S. (2011). Cálculo de una variables: Trascendentes tempranas/ Dennis G. Zill y Warren S. Wright (4a. ed. --.). México D.F.: McGraw-Hill.

- Arya, J. & Lardner, R. Matemáticas aplicadas a ala administración y a la Economía. (5a. ed.). México: Pearson.

GRACIAS

UPN

UNIVERSIDAD
PRIVADA
DEL NORTE