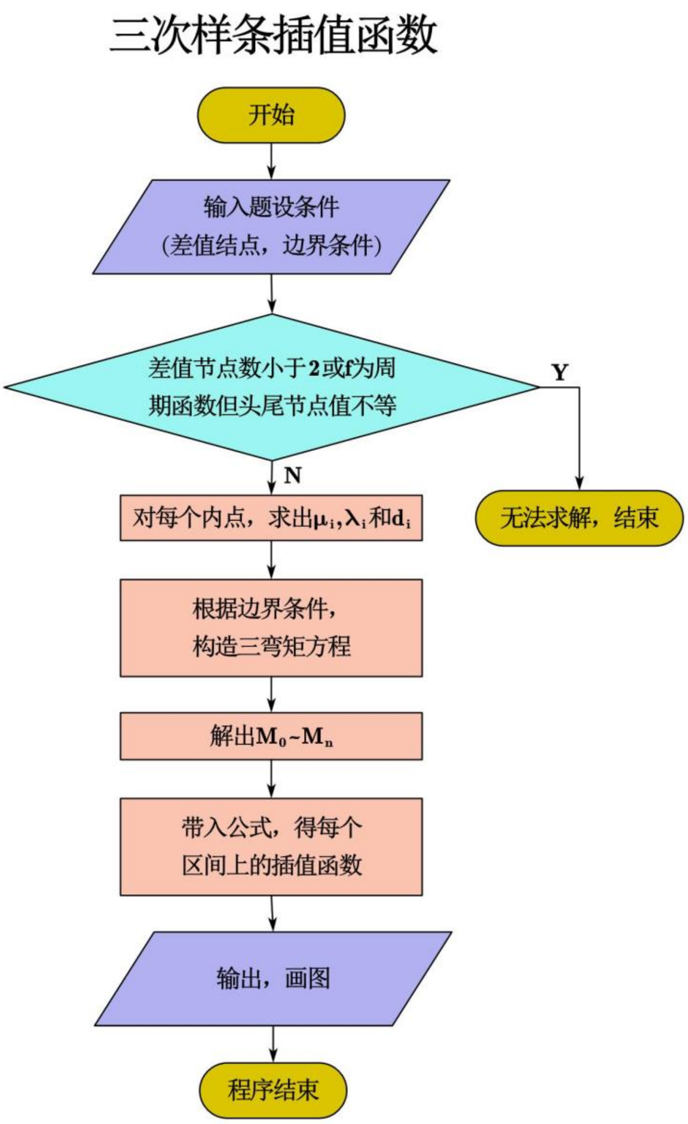
数值分析上机实验报告

王嘉禾 计算机试验班 001 2193211079

一、三次样条插值函数

算法原理：已知 n+1 个插值节点，n 个区间，每个区间上的三次函数有 4 个未知量，共 4n 个未知量。根据函数二阶导数连续的原则，可得在每个内点处函数的左右极限、左右一阶导数和左右二阶导数均相等，由此得到 3*(n-1)=3n-3 个方程，又由 n+1 个结点处的函数值得到 n+1 个方程，由边界条件得到 2 个方程，共 4n 个方程，可求出待求的 4n 个未知量。

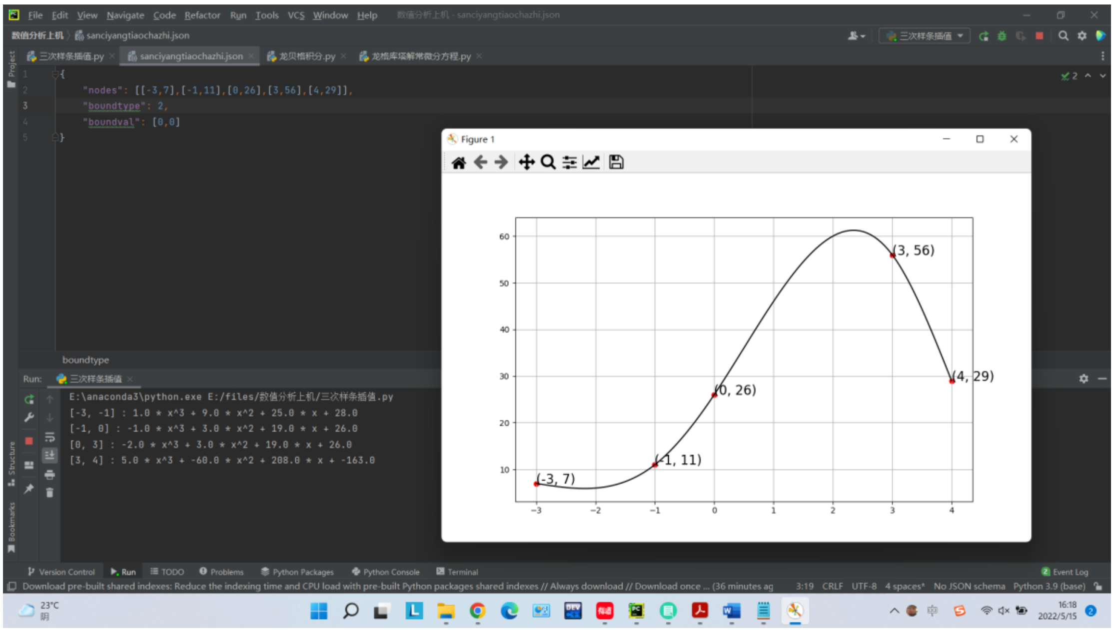
程序框图：



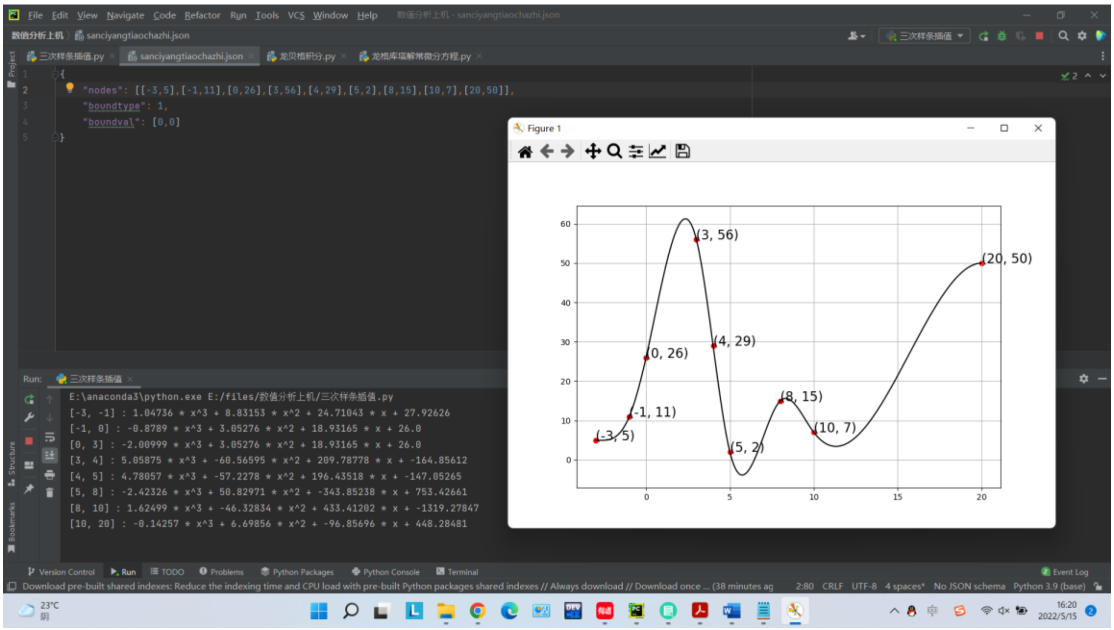
程序使用说明：本程序从配套的 json 文件'sanciyangtiaochazhi.json'中读取数据，'nodes'代表插值节点，'boundtype'代表边界条件类型，其中 2 代表已知边界二阶导数值，1 代表已知边界一阶导数值，0 代表周期边界条件，'boundval'代表边界条件的值，当'boundtype'为 0 时无效。并且程序要求至少两个插值节点。运行可打印出每个区间上的函数表达式，画出函数图像。

算例计算结果：

1. 课本 p137 样例



2. 自定义样例



二、龙贝格积分

算法原理：由复化梯形求积公式，复化辛普森求积公式，复化科茨求积公式之间的推导关系可得$S_n = T_{2n} + \frac{1}{3}(T_{2n} - T_n)$

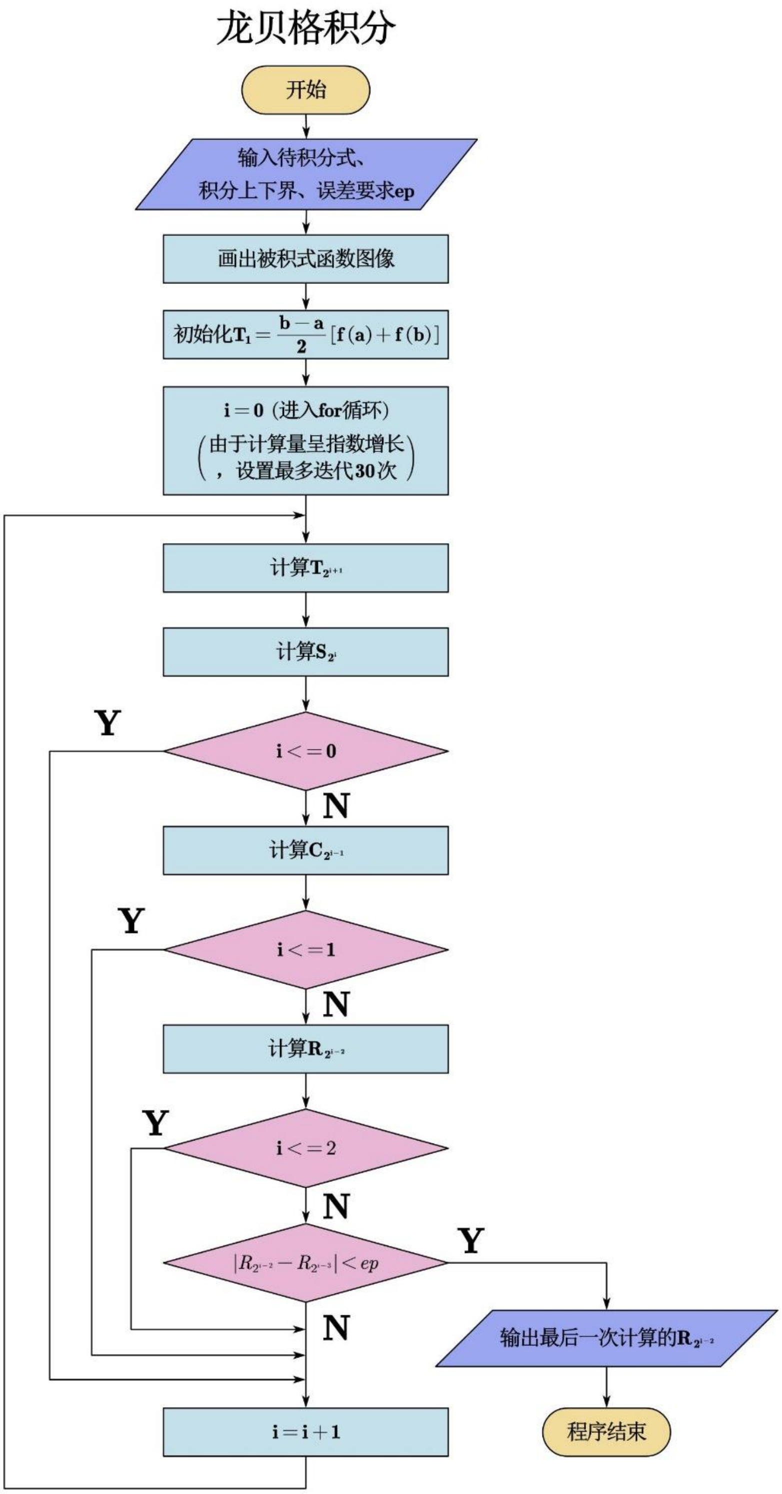
$$C_n = S_{2n} + \frac{1}{15}(S_{2n} - S_n)$$

$$R_n = C_{2n} + \frac{1}{63}(C_{2n} - C_n)$$

由此可迭代计算，当相邻两次算出的R_n和R_{2n}之间的差值小于误差要求 ep 时，可视为

满足精度要求，迭代结束，输出最后一次算出的R_{2n}

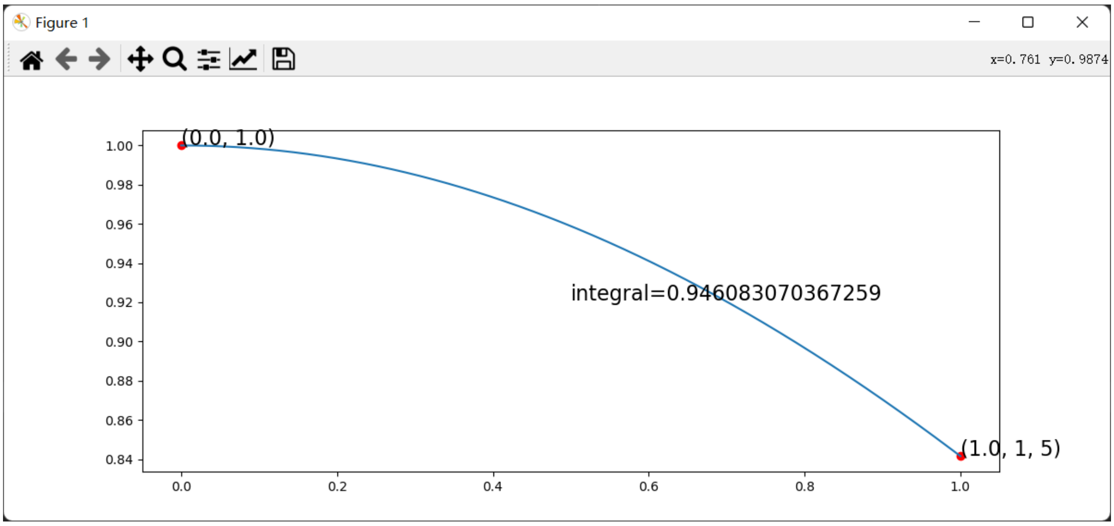
程序框图：



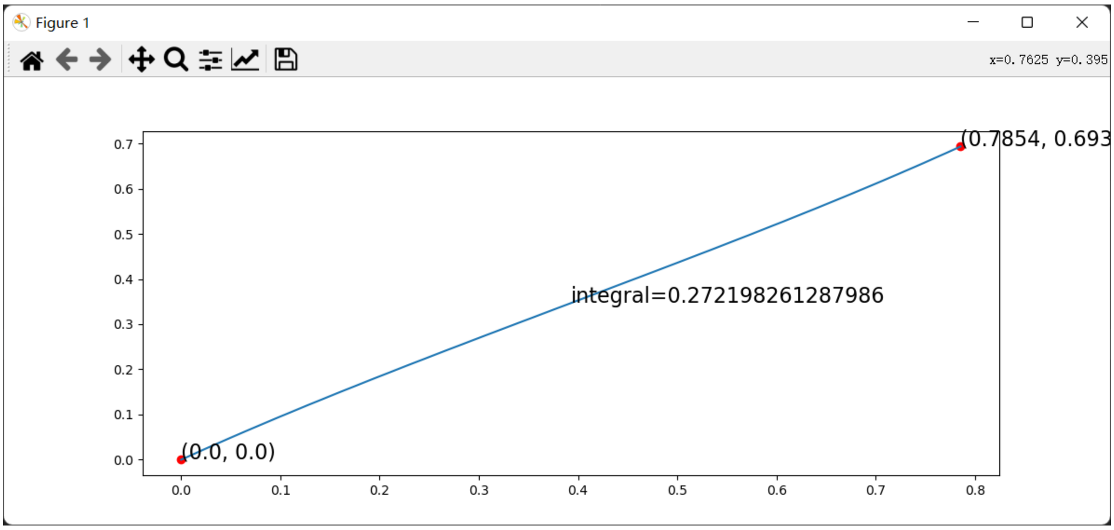
程序使用说明：该程序需要在程序中修改输入参数，其中'y'代表被积函数表达式（使用 sympy 库，例如 sin(x)写作 sp.sin(x)），'low'代表积分下界，'high'代表积分上界，'ep'代表精度要求。由于计算T_{2^n}的时间复杂度呈指数增长，设定最多迭代 30 次（最坏情况下约计算2^{32}次）首次计算边界值时，由于考虑到反常积分的存在，采用极限值而非直接计算。

算例计算结果：

1. 课本 p187 样例 $\int_0^1 \frac{\sin x}{x} dx$



2. 自定义样例$\int_0^{\frac{\pi}{4}} ln(1+\tan x)\, dx\,(手动计算答案为\frac{\pi \ln 2}{8} \approx 0.2721982613)$



三、四阶龙格－库塔法求解常微分方程的初值问题

算法原理：通过将 m 级龙格库塔法的局部截断误差 R[y]=y(xi+1) – yi+1 在 xi 处泰勒展开，适当选取 h 的系数，使得局部截断误差 R[y]的阶数尽可能高，当 m=4 时，可得标准 4 寄 4 阶 R-K 法如下

$$y_{i+1} = y_i + \frac{1}{6}(K_1 + K_2 + K_3 + K_4)$$

$$K_1 = hf(x_i, y_i)$$

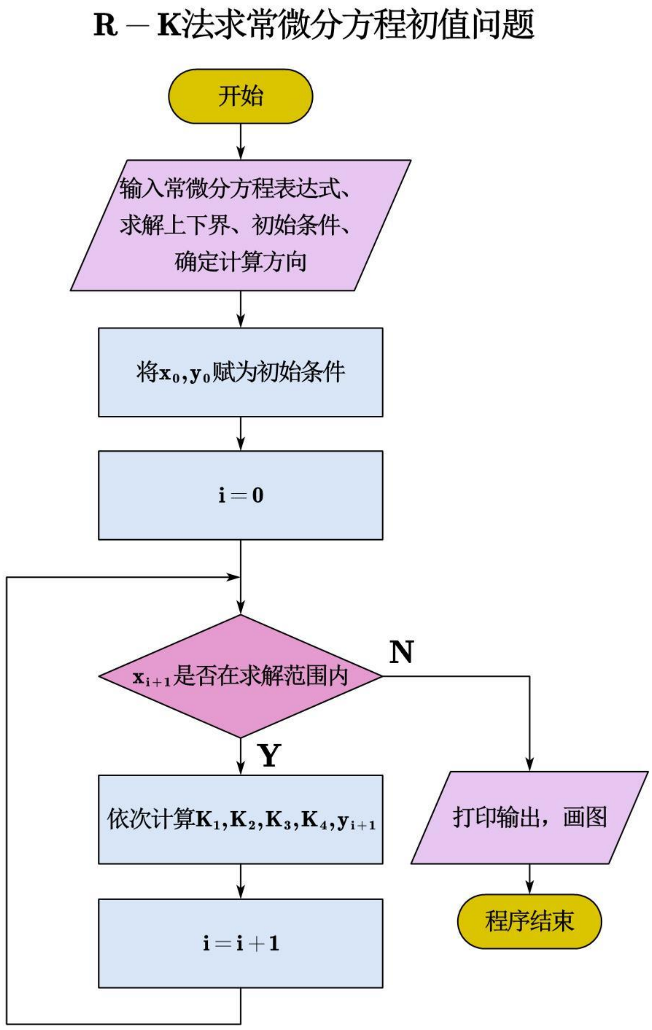
$$K_2 = hf\left(x_i + \frac{h}{2}, y_i + \frac{K_1}{2}\right)$$

$$K_3 = hf\left(x_i + \frac{h}{2}, y_i + \frac{K_2}{2}\right)$$

$$K_4 = hf(x_i + h, y_i + K_3)$$

用程序按步长从初始条件出开始迭代计算可得函数数值解。

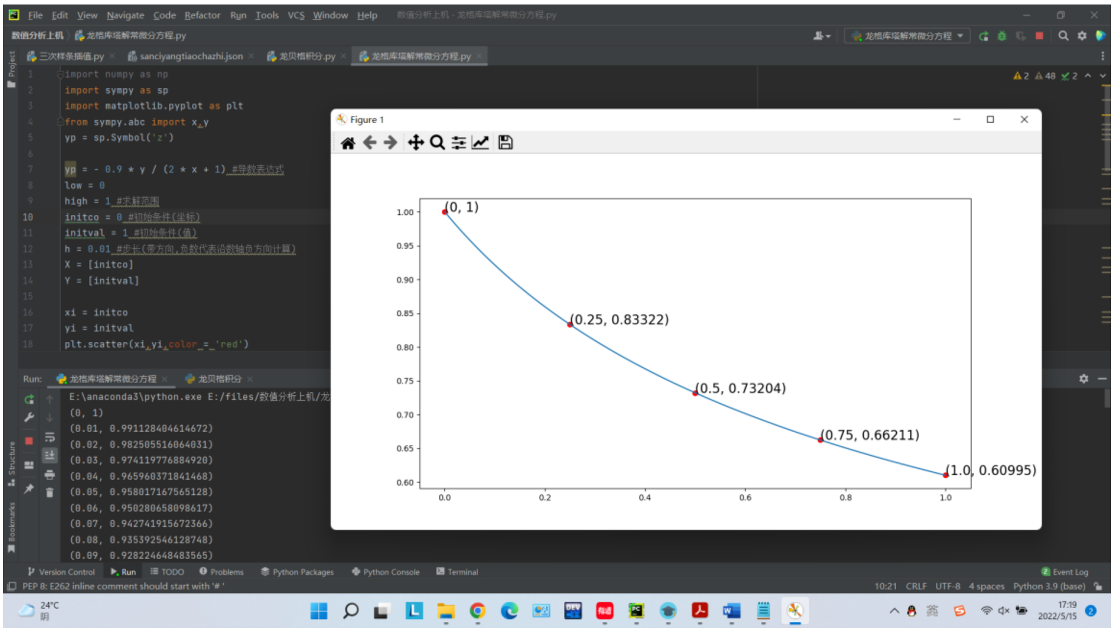
程序框图：



程序使用说明:在程序内部初始化部分输入导数的隐函数表达式 yp, 求值区间[low,high], 初始条件(initco,initval)和迭代步长 h，其中步长 h 包含方向信息，若初始条件在区间的右边界处，则步长 h 应为负数。程序打印出所求函数数值解，画出函数图像。

算例计算结果：

1. 课本 p277 样例



2. 自定义样例

$$y' = 4\pi x^3 y + 4x^3 \quad (x = 0, y = 0) \text{ 经手算得} y = \frac{1}{\pi}\left(e^{\pi x^4} - 1\right)\text{，验证正确}$$