ОГЛАВЛЕНИЕ

ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ ТЕОРИИ НАДЕЖНОСТИ

Вторая половина XX в. характерна появлением машин и систем высокой конструктивной сложности, способных выполнять ответственные задачи. В процессе их функционирования стало расти число отказов. Если нет устойчивого образования связанных между собой элементов, то не имеет смысла рассматривать какие-либо другие свойства машины или системы: качество, эффективность, безопасность, живучесть, управляемость, устойчивость. Ибо каждое из приведенных свойств имеет смысл при наличии изначального свойства любой системы — надежности. Поэтому было естественным явлением становление в 50-е годы XX в. новой научной дисциплины — теории надежности как науки о закономерностях отказов различных систем: сначала технических, а затем и биологических, экономических и других классов систем.

В нашей стране уделяется большое внимание решению актуальных проблем ускорения научно-технического прогресса, повышения эффективности машин и систем, совершенствования методов управления и планирования народного хозяйства. Научно-техническая революция способствовала бурному росту сложности машин и систем, что особенно характерно для современных летательных аппаратов, нефтехимических и металлургических комплексов, ядерных энергетических установок. Это привело к тому, что проблема обеспечения их надежности стала ключевой проблемой современной техники. Современные сложные системы (СС) отличаются большой разветвленностью технологических подсистем, большим числом и разнотипностью оборудования, сложностью алгоритмов управления.

Научно-технический прогресс приводит к появлению все более сложных конструктивно и чрезвычайно опасных для обслуживающего персонала и окружающей среды уникальных систем. Тяжелая авария на II блоке АЭС TMJ (США) в марте 1979 г., утечка ядовитых газов на химическом комбинате в Бхопале (Индия, 1984), взрыв многоразовых космических аппаратов «Челленджер» (1986) и «Колумбия» (2003), разрушение 4-го блока на Чернобыльской АЭС (1986), гибель атомной подводной лодки «Курск» (2001) показали, что проблема обеспечения безопасной и эффективной эксплуатации СС еще далека от своего решения. Человеческие жертвы, радиоактивное заражение больших участков местности, огромные экономические потери — вот характерные результаты отказов СС. Здесь также необходимо учитывать моральные, психологические и политические аспекты ненадежности СС.

Теория надежности как научная дисциплина изучает закономерности возникновения и устранения отказов объектов. В Большой Советской Энциклопедии (т.17, с.602) теория надежности определяется так: «научная дисциплина, в которой разрабатываются и изучаются методы обеспечения эффективности работы объектов в процессе эксплуатации». Теория надежности изучает:

- критерии и характеристики надежности;
- методы анализа надежности;
- методы синтеза СС по критериям надежности;
- методы повышения надежности;
- методы испытаний объектов на надежность;
- методы эксплуатации объектов с учетом их надежности.

Теория надежности является прикладной технической наукой. Она изучает общие закономерности, которых следует придерживаться при проектировании, изготовлении, испытаниях и эксплуатации объектов для получения максимальной эффективности и безопасности их использования.

В теории надежности исследуются закономерности возникновения отказов объектов, восстановления их работоспособности, рассматривается влияние внешних и внутренних воздействий на процессы, происходящие в объектах, разрабатываются методы расчета систем на надежность, прогнозирования отказов, изыскиваются способы повышения надежности при проектировании и эксплуатации объектов, а также способы сохранения надежности при эксплуатации, определяются методы сбора, учета и анализа статистических данных, характеризующих надежность.

В теории надежности вводятся показатели надежности объектов, устанавливается связь между ними и экономической эффективностью и безопасностью, обосновываются требования к надежности с учетом различных факторов, разрабатываются рекомендации по обеспечению заданных требований на этапах проектирования, изготовления, испытаний, хранения и эксплуатации, решаются эксплуатационные задачи надежности: обоснование сроков и объема профилактических мероприятий и ремонтов, обеспечение запасными элементами, узлами, инструментом и материалами, диагностический контроль и отыскание неисправностей и т.д.

В числе важнейших эксплуатационно-технических характеристик, определяющих эффективность объектов, особое место занимают показатели надежности, безопасности и живучести.

Надежность — свойство объекта сохранять во времени в установленных пределах значения всех параметров, характеризующих способность выполнять требуемые функции в заданных режимах и условиях применения, технического обслуживания, ремонтов, хранения и транспортировки.

В данном определении имеются следующие особенности. Во-первых, подчеркнута непрерывность выполнения объектом заданных функций. В этом аспекте нет смысла говорить о надежности объекта, например, во время проведения на нем планово-предупредительных работ (ППР), ремонтов, замены оборудования, освидетельствований и других мероприятий, связанных с остановом реактора. Ибо в это время объект не выполняет своих функций, а именно, не выдает электроэнергию и промышленное тепло, не перевозит грузы и пассажиров и т.д. Во-вторых, в определение надежности включено понятие «установленные пределы». Сложная система при отказе отдельных элементов или подсистем сохраняет свою работоспособность и может обеспечивать своих потребителей, например, энергией, но в меньшем количестве.

В-третьих, надежность объекта целесообразно определять за определенные промежутки времени, например, между перегрузками топлива, за время работы на заданном уровне мощности, за время до прекращения эксплуатации и др.

В зависимости от условий решаемой задачи один и тот же объект может именоваться *системой* или *элементом*. Под *системой* (системой элементов) обычно понимают объект, в котором необходимо и возможно различать определенные взаимозависимые части, соединенные воедино. *Элемент* — определенным образом ограниченный объект, рассматриваемый как часть другого объекта. Понятия «система» и «элемент» — относительны, любой объект при решении одних задач может рассматриваться как система, а при решении других — как элемент.

Надежность как сложное свойство в зависимости от назначения объекта и условий его применения состоит из сочетаний свойств: безотказности, ремонтопригодности, долговечности и сохраняемости. Для объектов, работающих непрерывно, таких, например, как энергоблок электрической станции, обзорный локатор аэродрома, магистральные нефте- и газопроводы, из этих свойств наиболее важны три первые. Объекты, работающие сезонно, напротив, должны кроме приемлемой безотказности иметь высшие показатели ремонтопригодности, долговечности и сохраняемости (сельскохозяйственная техника). Свойства, составляющие надежность, могут характеризовать и другие особенности объекта.

Безотказность — одно из самых важных свойств надежности элементов и систем. Безотказность — это свойство объектов сохранять работоспособное состояние в течение некоторого времени или некоторой наработки. Обычно безотказность рассматривается применительно к режиму эксплуатации объекта. При оценке безотказность объекта пере- рывы в его работе (плановые и внеплановые) не учитываются. Безотказность характеризуется техническим состоянием объекта: исправностью, неисправностью, работоспособностью, неработоспособностью, дефектом, повреждением и отказом. Каждое из этих состояний характеризуется совокупностью значений параметров, описывающих состояние объекта, и качественных признаков. Номенклатура этих параметров и признаков, а также пределы допустимых их изменений устанавливаются нормативной документацией на объект.

Исправное состояние объекта — это такое состояние, при котором он соответствует всем требованиям нормативно-технической и конструкторской документации. В противоположность этому, *неисправное состояние объекта* — это состояние, при котором он не соответствует хотя бы одному из требований нормативно-технической и конструкторской документации. При *работоспособном состоянии объекта* значения всех параметров, характеризующих способность выполнять заданные функции, соответствуют требованиям нормативно-технической и конструкторской документации. Если значения хотя бы одного параметра, характеризующего способность элемента выполнять заданные функции, не соответствуют требованиям нормативно-технической и конструкторской документации, то такое состояние называется *неработоспособным*. А событие, заключающееся в нарушении работоспособного состояния объекта, называется отказом. Событие, состоящее в нарушении исправного состояния объекта, но сохраняющего его работоспособность, носит название *повреждения (дефекта).*

Границы между исправным и неисправным, между работоспособным и неработоспособным состояниями обычно условны и представляют собой, в основном, совокупность определенных значений параметров объектов. Эти значения одновременно являются границами соответствующих допусков. Работоспособность и неработоспособность могут быть как полными, так и частичными. Если объект полностью работоспособен, то в определенных условиях эксплуатации возможно достижение максимальной эффективности его применения. Эффективность применения в тех же условиях частично работоспособного объекта меньше максимально возможной, но значения ее показателей еще находятся в пределах, установленных для такого функционирования, которое считается нормальным для данного объекта.

Работоспособность должна рассматриваться применительно к определенным внешним условиям эксплуатации объекта. Элемент, работоспособный в одних условиях, может, оставаясь исправным, оказаться неработоспособным в других.

Переход объектов из одного состояния в другое обычно происходит вследствие *повреждения* или *отказа*. Работоспособный объект в отличие от исправного должен удовлетворять лишь тем требованиям нормативно-технической и конструкторской документации, выполнение которых обеспечивает нормальное его применение по назначению. Очевидно, что работоспособный элемент может быть неисправным, например, не удовлетворяющим эстетическим требованиям, если ухудшение внешнего вида не препятствует его применению по назначению. Переход элемента из исправного в неисправное состояние происходит вследствие дефектов. Термин «дефект» применяют, в основном, на этапах изготовления и ремонта. В этих случаях требуется учитывать отдельно каждое конкретное несоответствие объекта требованиям, установленным нормативной документацией. Термин «неисправность» применяется при эксплуатации объектов, когда требуется учитывать изменения технического состояния элементов, независимо от числа обнаруженных дефектов. Находясь в неисправном состоянии, объект имеет один или несколько определенных дефектов.

Ремонтопригодность — это свойство объекта, заключающееся в приспособленности к предупреждению и обнаружению причин отказов, повреждений и восстановлению работоспособного состояния путем проведения технического обслуживания и ремонтов. Ремонтопригодность представляет собой совокупность технологичности при техническом обслуживании и ремонтной технологичности объектов. Свойство ремонтопригодности полностью определяется его конструкцией, т. е. предусматривается и обеспечивается при разработке, изготовлении и монтаже объектов, с учетом будущего целесообразного уровня их восстановления, который определяется соотношением ремонтопригодности и внешних условий для выполнения ремонта, в том числе устанавливаемых для этого пределов соответствующих затрат. Отсюда происходит относительность деления объектов на *восстанавливаемые* и *невосстанавливаемые* применительно к определенным внешним условиям (точнее, на подлежащие и не подлежащие восстановлению). Один и тот же элемент в зависимости от окружающих условий и этапов эксплуатации может считаться восстанавливаемым или невосстанавливаемым. Деление объектов на восстанавливаемые и невосстанавливаемые зависит от рассматриваемой ситуации и в значительной степени условно. Однако необходимо и безусловное деление этих же элементов на вообще доступные для ремонта и не подлежащие ему применительно ко всему времени их существования, т. е. на ремонтируемые и неремонтируемые. Деление по обоим признакам для многих объектов совпадает: ремонтируемый элемент может быть восстанавливаемым на протяжении всего срока службы, а неремонтируемый элемент остается невосстанавливаемым в течение всего времени существования. Однако имеются ремонтируемые объекты, которые в определенных ситуациях в случае возникновения отказа в течение данного интервала времени (например, времени компании) не подлежат восстановлению. С другой стороны, есть не ремонтируемые элементы, обладающие самовосстанавливаемостью работоспособности в случае возникновения некоторых отказов, в частности, при наличии резервных элементов и соответствующих автоматических устройств, осуществляющих в таких случаях переход на использование резерва.

Следовательно, при формулировании и решении задач обеспечения, прогнозирования и оценивания надежности существенное практическое значение имеет решение, которое должно приниматься в случае отказа объекта — восстанавливать его или нет. Отнесение объекта к восстанавливаемым или невосстанавливаемым влечет за собой выбор определенных показателей надежности. Например, очевидно, что для невосстанавливаемого объекта не имеет смысла такой показатель надежности как среднее время восстановления.

Долговечность — это свойство объектов сохранять работоспособное состояние до наступления предельного состояния при установленной системе технического обслуживания и ремонта. *Предельное состояние объекта* характеризуется таким состоянием, при котором дальнейшее его применение по назначению недопустимо или нецелесообразно, либо восстановление исправного или работоспособного состояний невозможно или нецелесообразно. Критерием предельного состояния служит признак или совокупность признаков предельного состояния объекта, установленных в нормативно-технической и конструкторской документации. Объект может перейти в предельное состояние, оставаясь работоспособным, если его дальнейшее применение по назначению станет недопустимым по требованиям безопасности, экономичности или эффективности.

Переход объекта в предельное состояние влечет за собой временное или окончательное прекращение его эксплуатации. Для неремонтируемых объектов имеет место предельное состояние двух видов. Первый совпадает с неработоспособным состоянием. Второй вид предельного состояния обусловлен тем обстоятельством, что, начиная с некоторого момента времени, дальнейшая эксплуатация пока еще работоспособного элемента согласно определенным критериям оказывается недопустимой в связи с безопасностью. Переход ремонтируемого объекта в предельное состояние второго вида происходит раньше момента возникновения отказа. Для ремонтируемых объектов можно выделить три вида предельных состояний. Для двух видов требуется капитальный или средний ремонт, т. е. временное прекращение эксплуатации. Третий вид предельного состояния предполагает окончательное прекращение эксплуатации объекта.

Таким образом, в общем случае долговечность объектов, измеряемая техническим ресурсом либо сроком службы, ограничена не отказом объекта, а переходом в предельное состояние, что означает возникновение необходимости в капитальном или среднем ремонтах, либо вообще невозможность дальнейшей эксплуатации.

Одним из центральных понятий теории надежности является понятие «*наработка*», так как отказы и переходы в предельное состояние объектов обусловлены, в основном, их работой. Под наработкой понимается продолжительность или объем работы объекта. Наработка измеряется в единицах времени и единицах объема выполненной работы. Объект может работать непрерывно (за исключением вынужденных перерывов, обусловленных возникновением отказа и ремонтом) или с перерывами, не обусловленными изменением технического состояния. Во втором случае различают *непрерывную* и *суммарную наработку*. Оба вида наработки могут представлять собой случайные и детерминированные величины (например, наработка за смену в случае отсутствия вынужденных простоев). Суммарную наработку в ряде случаев сопоставляют с определенным интервалом календарного времени. Если объект работает в различные интервалы времени с различной нагрузкой (на разных уровнях мощности), различают непрерывную и суммарную наработку для каждого вида или степени нагрузки (для разного уровня мощности).

Кроме упомянутых видов наработки применяют термины «наработка до отказа», «наработка между отказами», «ресурс», «срок службы».

Наработка до отказа — это наработка объекта от начала его эксплуатации до возникновения первого отказа. *Наработка между отказами* — это наработка объекта от окончания восстановления его работоспособного состояния после отказа до возникновения следующего отказа. Под *техническим ресурсом (ресурсом)* понимается наработка объекта от начала его эксплуатации или ее возобновления после ремонта определенного вида до перехода в предельное состояние. *Срок службы* — календарная продолжительность от начала эксплуатации объекта или возобновления после ремонта определенного вида до перехода в предельное состояние. Наработка до отказа, наработка между отказами и ресурс - всегда случайные величины. Параметры их распределений служат показателями безотказности и долговечности.

Наработка до отказа характеризует безотказность как неремонтируемых (невосстанавливаемых), так и ремонтируемых (восстанавливаемых) объектов. Наработка между отказами определяется продолжительностью работы объекта от i-го до (i +1)-го отказа, где i = 1,2,... Эта наработка относится только к восстанавливаемым объектам.

Физический смысл ресурса — зона возможной наработки объекта. Для неремонтируемых элементов он совпадает с запасом нахождения в работоспособном состоянии при эксплуатации, если переход в предельное состояние обусловлен только возникновением отказа. Начало отсчета наработки, образующей ресурс, может совпадать с началом эксплуатации объекта либо после выполнения ремонта. В каждый момент времени можно различать две части любого ресурса: израсходованную к этому моменту в виде состоявшейся суммарной наработки и оставшуюся до перехода в предельное состояние. *Остаточный ресурс* оценивают ориентировочно, поскольку ресурс в целом является случайной величиной. Как всякая случайная величина, ресурс полностью характеризуется распределением вероятностей. Параметры этого распределения служат показателями долговечности (средний и гамма-процентный ресурсы). Все сказанное о видах ресурса в полной мере относится и к видам срока службы, за исключением того, что срок службы в отличие от ресурса измеряется календарным временем. Соотношение значений ресурса и срока службы одного и того же вида зависит от распределения наработки в непрерывном времени, т. е. от интенсивности эксплуатации объекта.

Сохраняемость — это свойство объекта сохранять значение показателей безотказности, долговечности и ремонтопригодности в течение и после хранения и (или) транспортирования. Проблема сохраняемости для большинства объектов, работающих непрерывно, не стоит достаточно остро по сравнению с обеспечением трех первых свойств надежности. Однако для подвижных объектов вопросы обеспечения надежности при транспортировании весьма важны.

Следует отметить, что методы оценки и повышения надежности систем в значительной мере зависят от типа исследуемой системы. Благодаря огромному разнообразию таких типов, по сути, мы можем говорить не об одной дисциплине «Теория надежности», а о целом классе дисциплин, занимающихся вопросами обеспечения надежности.

Если в качестве объекта (системы) рассматривают здания, конструкции, корпуса оборудования и т.д., то основными задачами теории надежности являются расчет допустимых нагрузок, влияние факторов окружающей среды на прочность и долговечность систем. Подобными вопросами, например, занимается дисциплина «Сопротивление материалов».

В случае систем передачи информации (СПИ), отказом можно считать искажение передаваемого сообщения. Тогда, повышение надежности СПИ связано с разработкой и применением разного рода помехозащищенных кодов.

Если же рассматривается надежность человека, как оператора какой-либо системы, в расчет берутся факторы, влияющие на внимательность оператора. В этом случае задачами повышения надежности будут являться расчет оптимальной продолжительности рабочих смен, повышение информативности дисплеев устройств и т.д. Подобными вопросами занимается, например, дисциплина «Человеко-машинное взаимодействие».

Стоит отдельно упомянуть надежность программного обеспечения (ПО). Это относительно новая дисциплина рассматривает вопросы обнаружения ошибок в программном коде, планирования тестовых мероприятий и т.д. Значительным отличием систем ПО от других систем является нефизическая (абстрактно-математическая) природа ПО. Отсутствие физических компонентов делает невозможным износ программ, а отладка (удаление ошибок из кода) приводит к тому, что надежность ПО повышается со временем – чего не наблюдается, например, в технических системах.

В нашем курсе мы сосредоточимся на надежности технических систем, где под отказом будем понимать выход из работоспособного состояния элементов и узлов сложных систем, а повышение надежности связывается в основном с введением резервирования малонадежных блоков. Основным математическим аппаратом является аппарат теории вероятностей и математической статистики.

ЕДИНИЧНЫЕ ПОКАЗАТЕЛИ НАДЕЖНОСТИ

Показатели надежности — это количественная характеристика одного или нескольких свойств, составляющих надежность объекта. Если показатель надежности характеризует одно из свойств надежности, то он называется *единичным*, если же несколько свойств — *комплексным показателем надежности*.

Вероятность безотказной работы. Под вероятностью безотказной работы (ВБР) объекта понимается вероятность того, что в пределах заданной наработки отказ объекта не возникнет. ВБР является основной количественной характеристикой безотказности объекта на заданном временном интервале. Если обозначить через T время непрерывной исправной работы объекта от начала работы до первого отказа, а через t — время, за которое необходимо определить ВБР, то ВБР записывается в виде

$$P(t) = \Pr\{T \geq t\}, \; t \geq 0. \tag{1}$$

Случайная величина T является неотрицательной и имеет дискретное или непрерывное распределение. Функция ВБР наиболее полно определяет надежность объекта. Она обладает следующими очевидными свойствами:

$$1)\, 0 \leq P(t) \leq 1; \quad 2)\, P(0) = 1; \quad 3)\, P(\infty) = 0. \tag{2}$$

Примерный график функции $P(t)$ приведен на рис. 1.

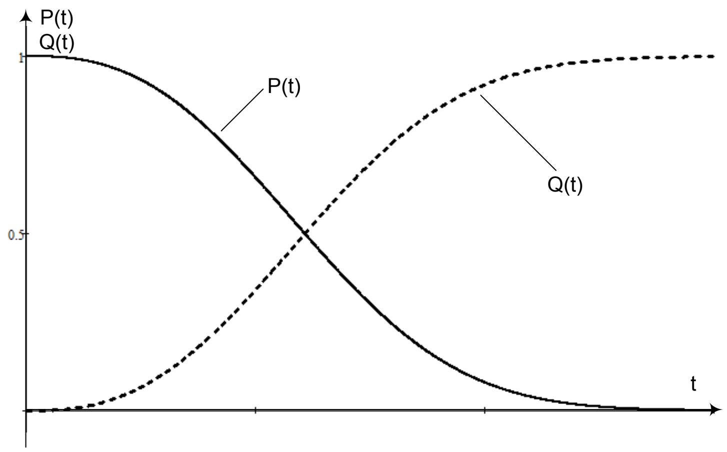


Рисунок 1. Примерный вид функций ВБР и вероятности отказа

Статистическая оценка функции ВБР равна

$$\hat{P}(t) \approx \frac{N(t)}{N_0}, \tag{3}$$

где N_0 - число объектов в начале испытаний, $N(t)$ - число объектов, исправно работающих на интервале $[0,t]$.

Вероятность того, что отказ объекта произойдет за время, не превышающее заданной величины *T*, т.е. что $T < t$, как вероятность события, противоположного тому, при котором $T \geq t$, равна

$$Q(t) = \Pr\{T < t\} = 1 - \mathrm{P}(t),\ t \geq 0. \tag{4}$$

Функция *Q(t) – вероятность отказа* - представляет собой интегральную функцию распределения случайной величины, т.е. *Q(t) = F(t).* Если функция *Q(t)* дифференцируема, то производная от интегральной функции распределения есть дифференциальный закон (плотность) распределения случайной величины *T* — времени исправной работы:

$$\frac{dF(t)}{dt} = \frac{dQ(t)}{dt} = f(t), \quad f(t) = -\frac{dP(t)}{dt}. \tag{5}$$

Функция *f(t)* также называется *плотностью отказов.*

Статистически оценка функции вероятности отказа равна

$$\hat{Q}(t) \approx 1 - \frac{N(t)}{N_0} = \frac{N_0 - N(t)}{N_0}, \tag{6}$$

Примерный график функции $Q(t)$ также изображен на рис. 1.

Исходя из определений интеграла и функции плотности распределения, можно записать

$$Q(t) = \int_0^t f(\tau)d\tau; \quad P(t) = \int_t^\infty f(\tau)d\tau \tag{7}$$

Средняя наработка до отказа. Функции распределения (интегральная функция или плотность) полностью характеризуют случайную величину. Однако для решения некоторых задач достаточно знать только несколько моментов случайной величины. Момент первого порядка (математическое ожидание) наработки до первого отказа обозначают T_{cp} и называют средней наработкой до отказа (или средним временем безотказной работы):

$$T_{cp} = \int_0^\infty tf(t)dt = \int_0^\infty P(t)dt \tag{8}$$

Статистическая средняя наработка до отказа однотипных объектов равна

$$\hat{T}_{cp} \approx \frac{1}{N_0}\sum_{i=1}^{N_0} t_i, \tag{9}$$

где t_i – время исправной работы i-го объекта.

Гамма-процентная наработка до отказа $T_{\gamma\%}$ — это наработка, в течение которой отказ объекта не возникнет с вероятностью γ, выраженной в процентах. Гамма-процентная наработка определяется из уравнения

$$1-Q\left(T_{\gamma\%}\right)=1-\int\limits_{0}^{T_{\gamma\%}} f\left(t\right)dt=\frac{\gamma}{100}. \tag{10}$$

Интенсивность отказов — это отношение числа отказавших объектов в единицу времени к среднему числу объектов, продолжающих исправно работать в данный интервал времени

$$\lambda\left(t\right)=\frac{\Delta n\left(\Delta t\right)}{N\left(t\right)\Delta t}, \tag{11}$$

где $\Delta n\left(\Delta t\right)$ - число отказов объекта за промежуток времени от $\left(t-\frac{\Delta t}{2}\right)$ до $\left(t+\frac{\Delta t}{2}\right)$, а $N\left(t\right)=\frac{N_{i-1}+N_i}{2}$, N_{i-1} - число исправно работающих объектов в начале интервала времени Δt, N_i - число исправно работающих объектов в конце интервала времени Δt.

Интенсивность отказов часто называют λ-характеристикой, она показывает, какая часть объектов выходит из строя в единицу времени по отношению к среднему числу исправно работающих объектов. Характерная кривая интенсивности отказов объектов показана на рис. 2, из которого видно, что кривая изменения интенсивности отказов имеет три участка: период приработки (0-t_1), период нормальной эксплуатации (t_1-t_2), период интенсивного износа и старения (t_2 и далее). В период приработки выявляются отказы по вине проектировщиков, конструкторов и изготовителей. Здесь характерны внезапные отказы объекта. Период нормальной эксплуатации характерен наименьшим количеством отказов и приблизительным постоянством интенсивности отказов. Третий период обусловлен таким значением износа и старения объекта, что его дальнейшая эксплуатация нецелесообразна.

Между большинством показателей надежности существует легко прослеживаемая взаимосвязь, поэтому, зная один из показателей, можно легко определить почти все остальные (см. Приложение 1).

Таблица в Приложении 1 позволяет выразить каждый показатель через любой другой. Следует, однако, отметить, что среднее время безотказной работы T_{cp} является числом, а не функцией; поэтому, зная только T_{cp}, другие показатели определить невозможно.

Также, формулы, записанные в затемненных ячейках таблицы, являются достаточно громоздкими и, что самое главное, вторичными по отношению к остальным формулам. Гораздо проще, к примеру, не определять плотность отказов по известной интенсивности, а найти сначала функцию ВБР и взять от нее производную, изменив при этом знак.

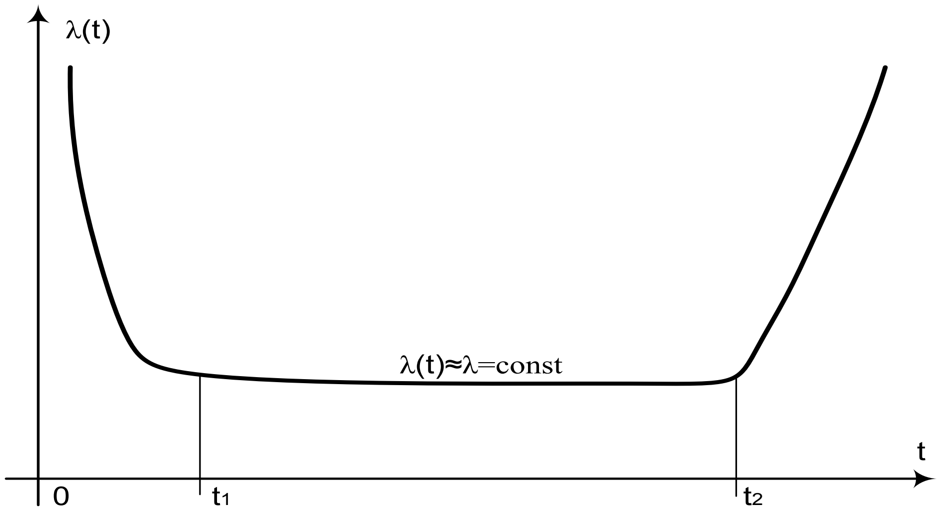


Рисунок 2. Характерная форма кривой интенсивности отказов

Воспользовавшись формулами из Приложения 1, можно получить еще одно полезное соотношение для определения функции интенсивности отказов:

$$\lambda(t) = \frac{f(t)}{P(t)}. \tag{12}$$

Важно помнить, что данные выражения не подразумевают конкретное распределение случайной величины и являются общими, справедливыми для любой системы.

Пример 1.

По известной функции ВБР $P(t) = 2e^{-\alpha t} - \mathrm{e}^{-2\alpha t}$ ($\alpha > 0$) определить среднее время безотказной работы, функции интенсивности и плотности отказов, а также функцию вероятности отказа.

Решение:

Воспользовавшись выражением (4), получим функцию вероятности отказов

$$Q(t) = 1 - P(t) = 1 - 2e^{-\alpha t} + \mathrm{e}^{-2\alpha t}.$$

Согласно (5) функция плотности отказов равна производной функции вероятности отказа:

$$f(t)=\frac{dQ(t)}{dt}=2\alpha e^{-\alpha t}-2\alpha\,\mathrm{e}^{-2\alpha t}=2\alpha e^{-\alpha t}\left(1-e^{-\alpha t}\right).$$

Определим интенсивность отказов по формуле (12):

$$\lambda(t)=\frac{f(t)}{P(t)}=\frac{2\alpha e^{-\alpha t}-2\alpha\,\mathrm{e}^{-2\alpha t}}{2e^{-\alpha t}-\mathrm{e}^{-2\alpha t}}=\frac{2\alpha e^{-\alpha t}\left(1-e^{-\alpha t}\right)}{e^{-\alpha t}\left(2-e^{-\alpha t}\right)}=\frac{2\alpha\left(1-e^{-\alpha t}\right)}{2-e^{-\alpha t}}.$$

Среднее время до отказа, согласно (8), равно

$$T_{cp}=\int_0^\infty P(t)\,dt=\int_0^\infty\left(2e^{-\alpha t}-\mathrm{e}^{-2\alpha t}\right)dt=2\int_0^\infty e^{-\alpha t}dt-\int_0^\infty e^{-2\alpha t}dt=$$

$$=\left.\left(\frac{2e^{-\alpha t}}{\alpha}\right)\right|_0^\infty-\left.\left(\frac{e^{-2\alpha t}}{2\alpha}\right)\right|_0^\infty=\frac{2}{\alpha}-\frac{1}{2\alpha}=\frac{3}{2\alpha}.$$

МОДЕЛИ НАДЕЖНОСТИ

Зачастую определить конкретный закон распределения времени до отказа элемента или системы очень сложно или невозможно. В этих случаях подразумевают, что случайная величина – время до отказа – распределена по известному закону, т.е. что закон распределения известен *априорно*. В качестве таких законов может быть использовано любое распределение, определенное на положительной полуоси времени (или комбинация распределений). Наиболее часто в теории надежности используются экспоненциальный закон распределения, распределения Вейбулла и Рэлея, логнормальный закон распределения и др. Выбрав конкретный закон распределения, говорят, что для элемента (системы) справедлива соответствующая *модель надежности*.

Рассмотрим некоторые из них.

Экспоненциальная модель надежности (ЭМН) подразумевает, что интенсивность отказов объекта (системы) постоянна:

$$\lambda(t) = \lambda = const, \quad \lambda > 0, \tag{13}$$

а время до отказа является непрерывной случайной величиной, распределенной экспоненциально, т.е. функция вероятности отказа принимает вид

$$Q(t) = 1 - e^{-\lambda t}. \tag{14}$$

Воспользовавшись Приложением 1 или формулами (4), (5) и (8), получим следующие выражения для функций ВБР, плотности отказов, а также для среднего времени до отказа:

$$P(t) = e^{-\lambda t}; \tag{15}$$

$$f(t) = \lambda e^{-\lambda t}; \tag{16}$$

$$T_{cp} = \frac{1}{\lambda}. \tag{17}$$

Графики функций ВБР и вероятности отказа для ЭМН приведены на рис. 3, а для плотности и интенсивности отказов на рис. 4.

Несомненным достоинством ЭМН является простота зависимостей между показателями надежности, а также простота расчета надежности для сложных систем (в чем впоследствии студенты смогут убедиться). Однако ЭМН не может похвастаться аккуратностью. В самом деле, достаточно сравнить график функции интенсивности для ЭМН с характерной формой кривой на рис. 2, чтобы убедиться: экспоненциальная модель адекватна только в период нормальной эксплуатации объекта (системы), т.к. игнорирует периоды приработки и износа.

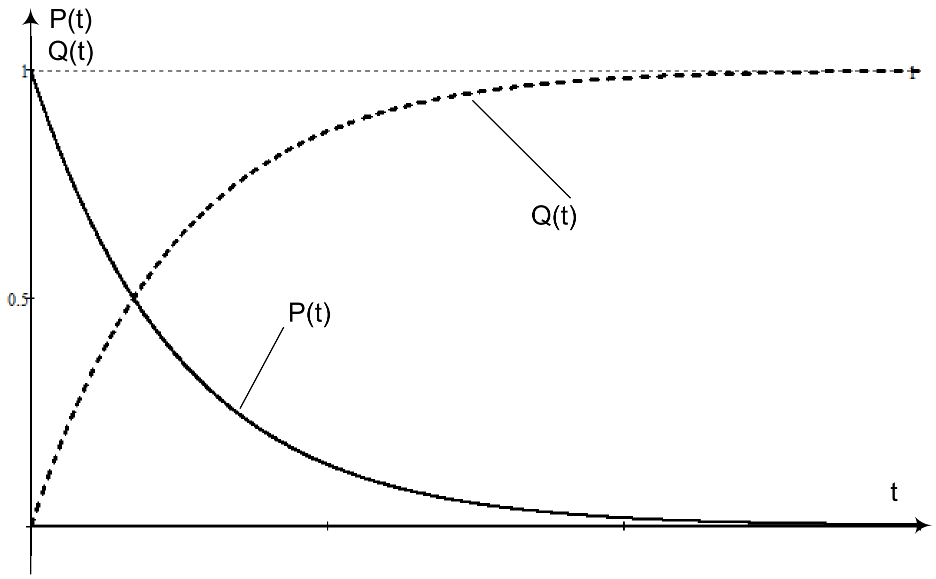


Рисунок 3. Графики функций ВБР и вероятности отказа для ЭМН

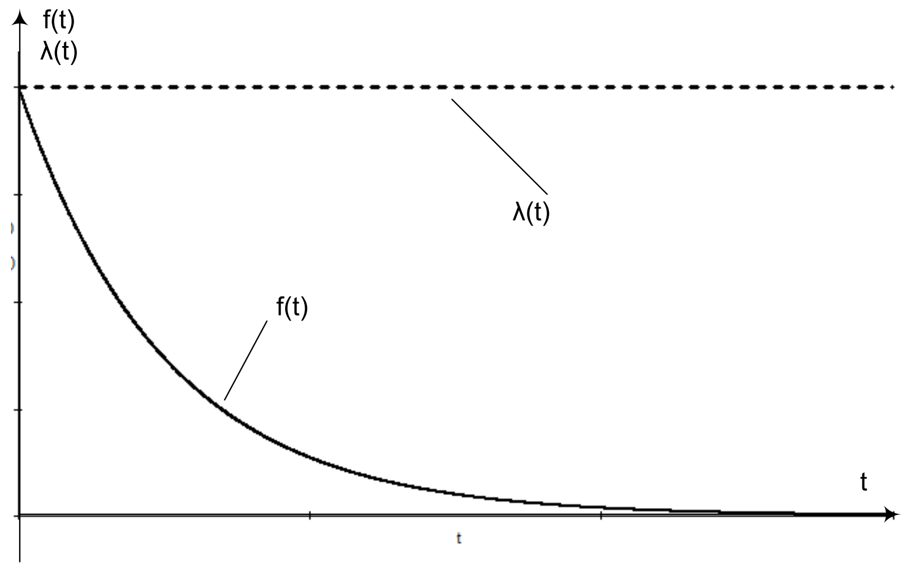


Рисунок 4. Графики функций плотности и интенсивности отказов для экспоненциальной МН

Справедливости ради стоит отметить, что если изготовитель произвел выбраковку, прежде чем изделие поступило в продажу (исключен период приработки), и если изделие эксплуатируется до момента, когда в расчет следует принимать износ, ЭМН может быть отдано предпочтение.

Модель надежности Рэлея (МНР) подразумевает, что время до отказа является непрерывной случайной величиной, распределенной по закону Рэлея:

$$Q(t) = 1 - \exp\left(-\frac{t^2}{2\sigma^2}\right), \quad \sigma > 0, \tag{18}$$

где σ – параметр распределения, имеющий размерность времени. Тогда, остальные показатели надежности будут выражаться следующими зависимостями:

$$P(t) = \exp\left(-\frac{t^2}{2\sigma^2}\right); \tag{19}$$

$$f(t) = \frac{t}{\sigma^2}\exp\left(-\frac{t^2}{2\sigma^2}\right); \tag{20}$$

$$\lambda(t) = \frac{f(t)}{P(t)} = \frac{t}{\sigma^2}; \tag{21}$$

$$T_{cp} = \sigma\sqrt{\frac{\pi}{2}}. \tag{22}$$

На рис. 5 и 6 можно увидеть графики функций показателей для модели Рэлея.

Выражение (21) говорит нам о том, что интенсивность отказов для МНР – возрастающая прямая линия. Такая форма функции интенсивности определяет ограничения по использованию этой модели – отказы механических систем (где в силу трения интенсивность постоянно возрастает) или моделирование процессов износа.

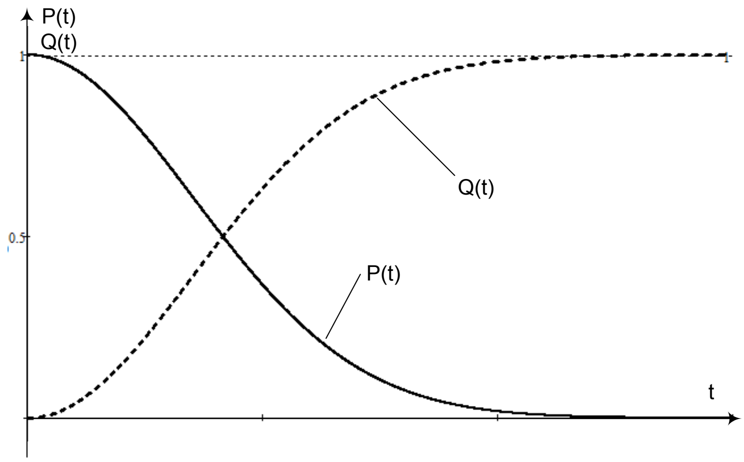


Рисунок 5. Графики функций ВБР и вероятности отказа для МНР

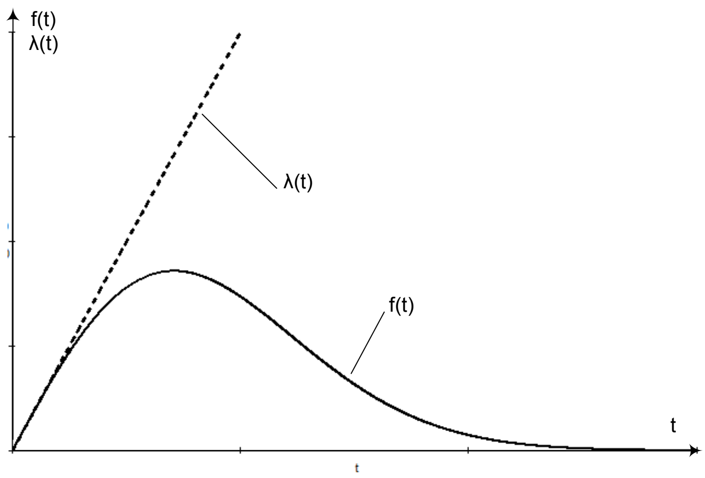


Рисунок 6. Графики функций плотности и интенсивности отказов для МНР

Модель надежности Вейбулла (МНВ) подразумевает, что время до отказа является непрерывной случайной величиной, распределенной по закону Вейбулла:

$$Q(t) = 1 - \exp\left[-\left(\frac{t}{\eta}\right)^{\beta}\right], \quad \eta, \beta > 0, \tag{23}$$

где β – безразмерный параметр формы, η – параметр масштаба, измеряемый в единицах времени (часах). Остальные показатели надежности будут выражаться следующими зависимостями:

$$P(t) = \exp\left[-\left(\frac{t}{\eta}\right)^{\beta}\right]; \tag{24}$$

$$f(t) = \frac{\beta}{\eta}\left(\frac{t}{\eta}\right)^{\beta-1} \exp\left[-\left(\frac{t}{\eta}\right)^{\beta}\right]; \tag{25}$$

$$\lambda(t) = \frac{f(t)}{P(t)} = \frac{\beta}{\eta}\left(\frac{t}{\eta}\right)^{\beta-1}; \tag{26}$$

$$T_{cp} = \eta \cdot \Gamma\left(1 + \frac{1}{\beta}\right), \tag{27}$$

где $\Gamma(x) = \int\limits_0^{\infty} t^{x-1} e^{-t} dt$ - гамма-функция, задаваемая обычно в табличном виде (см. Приложение 2).

На рис. 7 приведены графики функций ВБР и функций вероятности отказа для различных значений параметра формы.

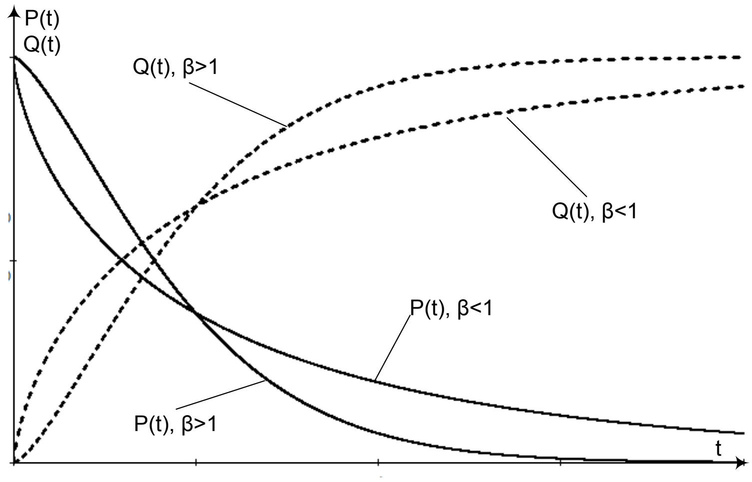


Рисунок 7. Графики ВБР и вероятности отказа для МН Вейбулла при различных β

Параметр формы β значительно влияет на форму функций плотности и интенсивности отказов: при β>1 функция интенсивности монотонно возрастает, а функция плотности имеет характерный «горб»; при β<1 функция интенсивности монотонно убывает, также как и функция плотности отказов (рис. 8).

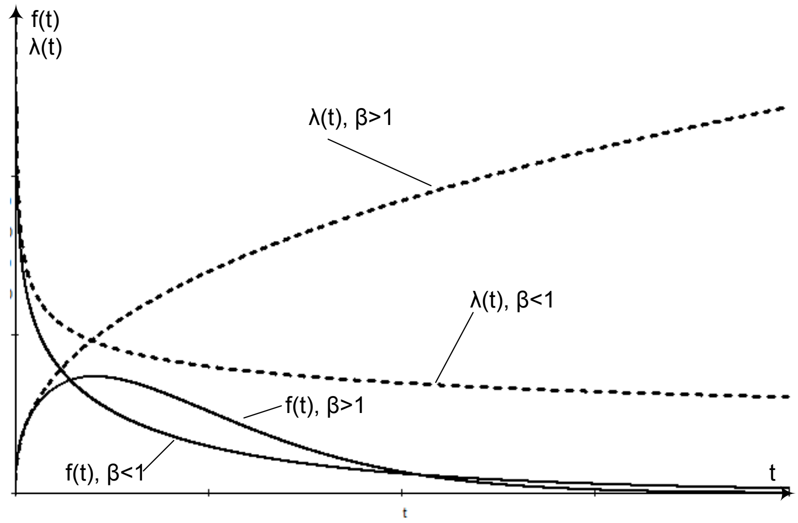


Рисунок 8. Графики функций плотности и интенсивности отказов для МНВ при различных β

Такая «гибкость» и относительная простота МНВ позволила заслужить ей славу профессионального стандарта в области надежности. Хотя и не лишенная недостатков, МНВ широко используется для анализа и расчета надежности технических систем, превосходя по адекватности ЭМН и МНР. Вдобавок ко всему, можно легко увидеть, что ЭМН и МНР являются частными случаями МНВ. В самом деле, если β=1, то

$$P(t)=\exp\left[-\left(\frac{t}{\eta}\right)^{\beta}\right]\xrightarrow{\beta=1}\exp\left[-\frac{t}{\eta}\right]\xrightarrow{\lambda=\frac{1}{\eta}}e^{-\lambda t},$$

и мы получаем экспоненциальную модель надежности. В случае же, когда β=2,

$$P(t)=\exp\left[-\left(\frac{t}{\eta}\right)^{\beta}\right]\xrightarrow{\beta=2}\exp\left[-\frac{t^2}{\eta^2}\right]\xrightarrow{2\sigma^2=\frac{1}{\eta^2}}\exp\left(-\frac{t^2}{2\sigma^2}\right),$$

мы получаем модель надежности Рэлея.

Студентам предлагается попробовать самостоятельно получить формулы для расчета показателей при допущении, что время до отказа распределено по какому-нибудь другому закону: логнормальному, лог-логистическому, закону гамма-распределения и т.д.

РАСЧЕТ НАДЕЖНОСТИ ПРИ ОСНОВНОМ СОЕДИНЕНИИ ЭЛЕМЕНТОВ В СИСТЕМЕ

Рассмотрим систему, состоящую из N элементов. Обозначим через A_i событие, заключающееся в том, что i-й элемент работоспособен, а через A_S событие, заключающееся в том, что работоспособна вся система в целом.

Предположим, что отказы элементов системы статистически независимы, т.е. отказ одного элемента никак не влияет на работоспособность других. Также предположим, что система такова, что для ее работоспособности необходимо, чтобы работоспособными были все ее элементы. Другими словами, отказ любого элемента, приводит к отказу системы. Такие системы называют системами с *основным (последовательным) соединением элементов* или проще *последовательными системами*.

В этом случае мы можем записать

$$A_S = A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_N = \bigcap \qquad (29)$$

Вероятности событий A_i и A_S совпадают с определением ВБР i-го элемента и системы, соответственно, поэтому обозначим вероятность события A_i через P_i, а вероятность события A_S через P_S, т.е.

$$\begin{aligned} &P_i = \Pr\{A_i\}, \;\; i = 1..N; \\ &P_S = \Pr\{A_S\}. \end{aligned} \qquad (30)$$

Поскольку события A_i статистически независимы, можно записать

$$\Pr\{A_S\} = \Pr\{A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_N\} = \Pr\{A_1\} \cdot \Pr\{A_2\} \cdot \ldots \cdot \Pr\{A_N\} = \\ = \prod_{i=1}^{N} \Pr\{A_i\}.$$

Используя соотношения (30), получаем

$$P_S = \prod_{i=1}^{N} P_i. \qquad (31)$$

Таким образом, ВБР системы с основным (последовательным) соединением элементов равна произведению ВБР входящих в нее элементов.

Выражение (31) подразумевает, что ВБР определяется для некоторого фиксированного момента времени. Если же вместо этого необходимо найти зависимость ВБР от времени, то можно записать

$$P_S(t)=\prod_{i=1}^{N} P_i(t). \quad (32)$$

Следствие 1. Поскольку $0 \le P_i \le 1$, ВБР последовательной системы меньше ВБР любого входящего в нее элемента.

Следствие 2. Исходя из Следствия 1, ВБР последовательной системы меньше ВБР наименее надежного элемента, входящего в нее.

Пример 2.

Пусть система состоит из трех последовательно соединенных элементов: *A, B* и *C*. В некоторым момент времени ВБР этих элементов составили $P_A = 0.9$, $P_B = 0.75$ и $P_C = 0.85$. Определить ВБР всей системы.

Решение:

Поскольку система последовательная, для расчета ВБР можно использовать формулу (31):

$$P_S=\prod_{i=1}^{N} P_i = P_A \cdot P_B \cdot P_C = 0.9 \cdot 0.75 \cdot 0.85 \approx 0.574.$$

При решении задач теории надежности представляется удобным использовать *блок-схемы надежности*, отражающие влияние отказов элементов на работоспособность системы в целом. Пример блок-схемы для последовательной системы трех элементов приведен на рис. 9.

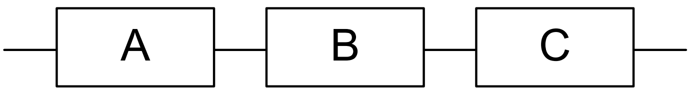


Рисунок 9. Пример блок-схемы надежности для последовательной системы

Помимо литер, обозначающих элементы, блок-схема может содержать значения ВБР или параметров моделей надежности элементов. ***Обратите внимание:*** линиям связи блок-схемы не соответствуют никакие сигналы, токи, напряжения и т.д. (в отличие от блок-схем в ТОЭ или ТАУ). Поскольку блок-схема является графическим эквивалентом формул (31) и (32), позиция блока в блок-схеме последовательной системы не оказывает никакого влияния на расчет надежности. Иными словами, блоки можно менять местами также, как и множители внутри произведения.

Вернемся теперь к выражению (32) и рассмотрим систему, состоящую из N последовательно соединенных элементов с определенными функциями интенсивности отказов $\lambda_i(t)$. Используя формулу из Приложения 1, выразим ВБР элементов через функции интенсивности:

$$P_i(t) = e^{-\int_0^t \lambda_i(\tau)d\tau}.$$

Подставив это выражение в (32), получим:

$$P_S(t) = \prod_{i=1}^{N} P_i(t) = \prod_{i=1}^{N} e^{-\int_0^t \lambda_i(\tau)d\tau} = e^{-\sum_{i=1}^{N}\int_0^t \lambda_i(\tau)d\tau} = e^{-\int_0^t \left(\sum_{i=1}^{N}\lambda_i(\tau)\right)d\tau}.$$

Введем обозначение

$$\lambda_S(\tau) = \sum_{i=1}^{N}\lambda_i(\tau). \tag{33}$$

Тогда

$$P_S(t) = \prod_{i=1}^{N} P_i(t) = e^{-\int_0^t \lambda_S(\tau)d\tau}.$$

Таким образом, интенсивность отказов последовательной системы равна сумме интенсивностей входящих в нее элементов. ***Обратите внимание:*** при выводе формулы (33) мы не подразумевали, что нам известны конкретные модели надежностей элементов. Следовательно, это соотношение справедливо и в общем случае.

Посмотрим, что произойдет с формулой (32) если мы подставим в нее выражения конкретных моделей надежности.

Экспоненциальная МН

В случае ЭМН интенсивности отказов элементов постоянны: $\lambda_i(t) = \lambda_i$. Тогда

$$P_i(t) = e^{-\lambda_i t}.$$

Выражение (32) примет вид

$$P_S(t) = \prod_{i=1}^{N} e^{-\lambda_i t} = e^{-\left(\sum_{i=1}^{N}\lambda_i\right)t}.$$

Введя обозначение $\lambda_S = \sum_{i=1}^{N}\lambda_i$, получим

$$P_S(t)=\prod_{i=1}^{N} e^{-\lambda_i t} = e^{-\lambda_S t}.$$

Таким образом, можно утверждать, что если для всех элементов последовательной системы справедлива экспоненциальная МН, то она справедлива и для системы в целом. Иными словами, такую систему можно представить как новый элемент, для которого справедлива экспоненциальная модель надежности с параметром λ_S.

МН Рэлея

В этом случае ВБР элементов определяются выражением (19):

$$P_i(t)=\exp\left(-\frac{t^2}{2\sigma_i^{\,2}}\right),$$

где σ_i - параметр модели Рэлея *i*-го элемента.

Выражение (32) примет вид

$$P_S(t)=\prod_{i=1}^{N}\exp\left(-\frac{t^2}{2\sigma_i^{\,2}}\right)=\exp\left[-\frac{1}{2}\left(\sum_{i=1}^{N}\frac{1}{\sigma_i^{\,2}}\right)t^2\right].$$

Введя обозначение $\frac{1}{\sigma_S^{\,2}}=\sum_{i=1}^{N}\frac{1}{\sigma_i^{\,2}}$, получим

$$P_S(t)=\prod_{i=1}^{N}\exp\left(-\frac{t^2}{2\sigma_i^{\,2}}\right)=\exp\left(-\frac{t^2}{2\sigma_S^{\,2}}\right).$$

Видно, что, аналогично ЭМН, можно утверждать, что если для всех элементов последовательной системы справедлива МН Рэлея, то она справедлива и для системы в целом. Иными словами, такую систему можно представить как новый элемент, для которого справедлива модель надежности Рэлея с параметром σ_S.

МН Вейбулла

В этом случае ВБР элементов определяются выражением (24):

$$P_i(t)=\exp\left[-\left(\frac{t}{\eta_i}\right)^{\beta_i}\right],$$

где η_i, β_i - параметры модели Вейбулла *i*-го элемента.

Выражение (32) примет вид

$$P_S(t)=\prod_{i=1}^{N}\exp\left[-\left(\frac{t}{\eta_i}\right)^{\beta_i}\right]=\exp\left[-\sum_{i=1}^{N}\left(\frac{t}{\eta_i}\right)^{\beta_i}\right].$$

Если проанализировать получившееся выражение, можно увидеть, что в общем случае **невозможно найти** такие параметры η_S и β_S, чтобы выполнялось равенство

$$\left(\frac{t}{\eta_S}\right)^{\beta_S}=\sum_{i=1}^{N}\left(\frac{t}{\eta_i}\right)^{\beta_i}.$$

Доказать самостоятельно!

Иными словами, такую систему нельзя представить как новый элемент, для которого справедлива модель надежности Вейбулла.

И, конечно же, в случаях, когда элементы последовательной системы описываются разными моделями, никаких общих формул в общем случае найти невозможно. В таких случаях необходимо определить ВБР системы по формуле (32), а остальные показатели надежности можно будет получить, используя формулы из Приложения 1.

Пример 3.

Рассмотрим систему, предназначенную для поддержания уровня жидкости в баке на постоянном уровне и состоящую из четырех элементов: насоса (Н), вентиля (В), датчика уровня (Д) и управляющего устройства (УУ). Блок-схема надежности системы изображена на рис. 10.

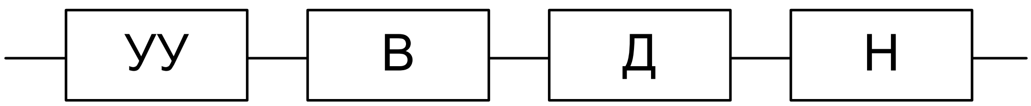


Рисунок 10. Блок-схема надежности системы к Примеру 3

Для элементов системы известны значения интенсивностей отказов:

$$\lambda_{УУ}=5\cdot10^{-6}\ \text{ч}^{-1},\qquad \lambda_{В}=1\cdot10^{-5}\ \text{ч}^{-1},$$

$$\lambda_{Д}=2\cdot10^{-6}\ \text{ч}^{-1},\qquad \lambda_{Н}=2\cdot10^{-5}\ \text{ч}^{-1}.$$

Определить ВБР системы через 8760 часов непрерывной работы, т.е. вероятность, что система проработает безотказно 1 год.

Решение:

Прежде всего, необходимо определиться с моделями надежности элементов. В тех случаях, когда для какого-нибудь элемента задана постоянная интенсивность отказов, подразумевается, что для данного элемента справедлива экспоненциальная МН. Таким образом, для всех элементов системы справедлива ЭМН.

Мы можем подойти к решению данной задачи двумя путями: с использованием формулы (32) или формулы (33). Рассмотрим оба варианта.

1 вариант. Определим ВБР каждого элемента системы при $t = 8760$ ч. Т.к. для элементов справедлива ЭМН, воспользуемся формулой (15):

$$P_{УУ}(t = 8760) = e^{-\lambda_{УУ} \cdot 8760} = e^{-5 \cdot 10^{-6} \cdot 8760} \approx 0.957;$$

$$P_{В}(t = 8760) = e^{-\lambda_{В} \cdot 8760} = e^{-1 \cdot 10^{-5} \cdot 8760} \approx 0.916;$$

$$P_{Д}(t = 8760) = e^{-\lambda_{Д} \cdot 8760} = e^{-2 \cdot 10^{-6} \cdot 8760} \approx 0.983;$$

$$P_{Н}(t = 8760) = e^{-\lambda_{Н} \cdot 8760} = e^{-2 \cdot 10^{-5} \cdot 8760} \approx 0.839.$$

Используя формулу (32), найдем ВБР системы:

$$P_S(t = 8760) = \prod_{i=1}^{N} P_i(t = 8760) = 0.957 \cdot 0.916 \cdot 0.983 \cdot 0.839 = 0.723$$

2 вариант. Согласно формуле (33), интенсивность отказов последовательной системы равна сумме интенсивностей отказов ее элементов. Следовательно,

$$\lambda_C = \sum_{i=1}^{N} \lambda_i = 5 \cdot 10^{-6} + 1 \cdot 10^{-5} + 2 \cdot 10^{-6} + 2 \cdot 10^{-5} = 3.7 \cdot 10^{-5} \text{ ч}^{-1}.$$

Т.к. если экспоненциальная МН справедлива для всех элементов последовательной системы, то она справедлива и для системы в целом, воспользуемся формулой (15):

$$P_C(t = 8760) = e^{-\lambda_C \cdot 8760} = e^{-3.7 \cdot 10^{-5} \cdot 8760} \approx 0.723.$$

Видно, что ответы одинаковы при обоих вариантах решения задачи, однако, каждый из вариантов позволил нам получить дополнительную информацию о системе. В первом случае это ВБР элементов, во втором – интенсивность отказов системы.

КЛАССИФИКАЦИЯ МЕТОДОВ РЕЗЕРВИРОВАНИЯ СИСТЕМ

Достигнутый в настоящее время уровень надежности элементной базы электроники, радиотехники, механических элементов, электротехники характеризуется значениями интенсивности отказов $\lambda=10^{-6}...10^{-7}$ч$^{-1}$. В ближайшем будущем следует ожидать повышения этого уровня до $\lambda=10^{-8}$ ч$^{-1}$. Это даст возможность поднять наработку на отказ системы, состоящей из $N=10^{6}$ элементов, до значения 100 ч, что явно недостаточно. Необходимая надежность сложных систем может быть достигнута только при использовании различных видов резервирования. Резервирование — это одно из основных средств обеспечения заданного уровня надежности объекта при недостаточно надежных элементах.

В соответствии с ГОСТ 27.002-89 [8] *резервированием* называется применение дополнительных средств и (или) возможностей с целью сохранения работоспособного состояния объекта при отказе одного или нескольких его элементов. Таким образом, резервирование — это метод повышения надежности объекта путем введения избыточности. В свою очередь, *избыточность* — это дополнительные средства и (или) возможности сверхминимально необходимые для выполнения объектом заданных функций. Задачей введения избыточности является обеспечение нормального функционирования объекта после возникновения отказа в его элементах.

Существуют разнообразные методы резервирования. Их целесообразно разделять по следующим признакам (рис. 11): вид резервирования, способ соединения элементов, кратность резервирования, способ включения резерва, режим работы резерва, восстанавливаемость резерва.

Структурное резервирование, иногда называемое аппаратурным (элементным, схемным), предусматривает применение резервных элементов структуры объекта. Суть структурного резервирования заключается в том, что в минимально необходимый вариант объекта вводятся дополнительные элементы. Элементы резервированной системы носят следующие названия. *Основной элемент* — элемент структуры объекта, необходимый для выполнения объектом требуемых функций при отсутствии отказов его элементов. *Резервный элемент* — элемент объекта, предназначенный для выполнения функций основного элемента, в случае отказа последнего.

Определение основного элемента не связано с понятием минимальности основной структуры объекта, поскольку элемент, являющийся основным в одних режимах эксплуатации, может служить резервным в других условиях.

Резервируемый элемент — основной элемент, на случай отказа которого в объекте предусмотрен резервный элемент.

Временное резервирование связано с использованием резервов времени. При этом предполагается, что на выполнение объектом необходимой работы отводится время, заведомо большее минимально необходимого. Резервы времени могут создаваться за счет повышения производительности объекта, инерционности его элементов и т.д.

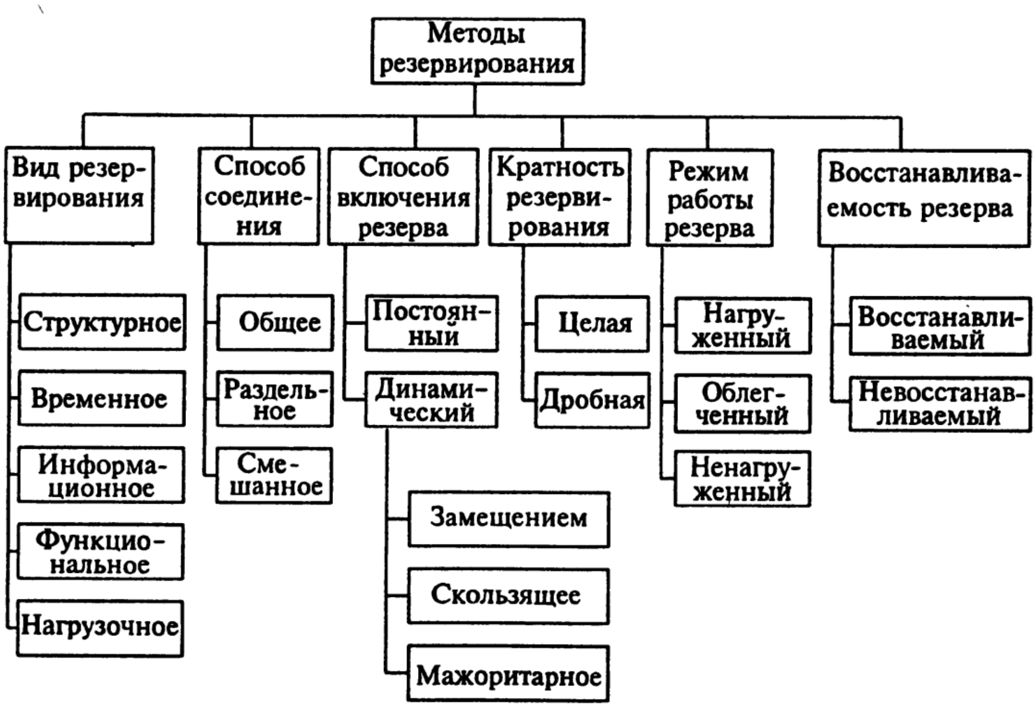


Рисунок 11. Классификация методов резервирования

Информационное резервирование — это резервирование с применением избыточности информации. Примерами информационного резервирования являются многократная передача одного и того же сообщения по каналу связи; применение при передаче информации по каналам связи различных кодов, обнаруживающих и исправляющих ошибки, которые появляются в результате отказов аппаратуры и влияния помех; введение избыточных информационных символов при обработке, передаче и отображении информации. Избыток информации позволяет в той или иной мере компенсировать искажения передаваемой информации или устранять их.

Функциональное резервирование — резервирование, при котором заданная функция может выполняться различными способами и техническими средствами. Например, функция быстрой остановки энергетического реактора может быть осуществлена вводом в активную зону стержней аварийной защиты или впрыском борного раствора. Или функция передачи информации в АСУ может выполняться с использованием радиоканалов, телеграфа, телефона и других средств связи. Поэтому обычные усредненные показатели надежности (средняя наработка на отказ, вероятность безотказной работы и т.п.) становятся малоинформативными и недостаточно пригодными для использования в данном случае. Наиболее подходящие показатели для оценки функциональной надежности: вероятность выполнения данной функции, среднее время выполнения функции, коэффициент готовности для выполнения данной функции.

Нагрузочное резервирование — это резервирование с применением нагрузочных резервов. Нагрузочное резервирование, прежде всего, заключается в обеспечении оптимальных запасов способности элементов выдерживать действующие на них нагрузки. При других способах нагрузочного резервирования возможно введение дополнительных защитных или разгружающих элементов.

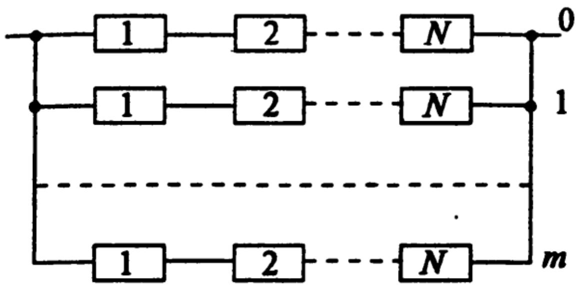


Рисунок 12. Общее резервирование с постоянно включенным резервом

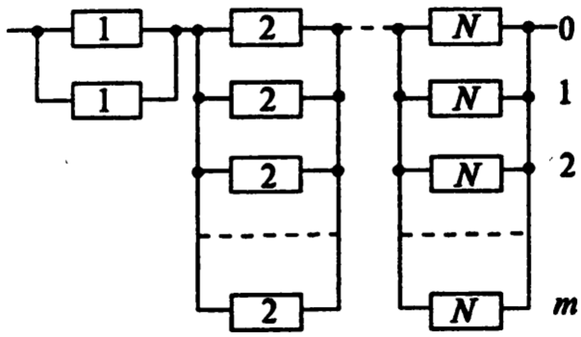


Рисунок 13. Раздельное резервирование с постоянно включенным резервом

Перечисленные виды резервирования могут быть применены либо к системе в целом, либо к отдельным элементам системы или к их группам. В первом случае резервирование называется *общим*, во втором — *раздельным.* Сочетание различных видов резервирования в одном и том же объекте называется *смешанным.*

По способу включения резервных элементов различают постоянное, динамическое, резервирование замещением, скользящее и мажоритарное резервирование. *Постоянное резервирование* — это резервирование без перестройки структуры объекта при возникновении отказа его элемента. Для постоянного резервирования существенно, что в случае отказа основного элемента не требуется специальных устройств, вводящих в действие резервный элемент, а также отсутствует перерыв в работе (рис. 12 и 13). Постоянное резервирование в простейшем случае представляет собой параллельное соединение элементов без переключающих устройств.

Динамическое резервирование — это резервирование с перестройкой структуры объекта при возникновении отказа его элемента. Динамическое резервирование имеет ряд разновидностей.

Резервирование замещением — это динамическое резервирование, при котором функции основного элемента передаются резервному только после отказа основного элемента. Включение резерва замещением (рис. 14 и 15) обладает следующими преимуществами:

- не нарушает режима работы резерва;
- сохраняет в большей степени надежность резервных элементов, так как при работе основных элементов они находятся в нерабочем состоянии;
- позволяет использовать резервный элемент на несколько основных элементов.

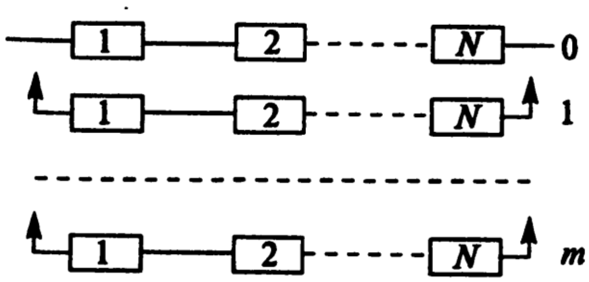


Рисунок 14. Общее резервирование с замещением

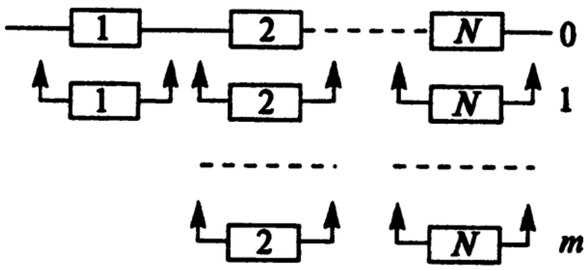


Рисунок 15. Раздельное резервирование с замещением

Существенным недостатком резервирования замещением является необходимость наличия переключающих устройств. При раздельном резервировании число переключающих устройств равно числу основных элементов, что может сильно понизить надежность всей системы. Поэтому резервировать замещением выгодно крупные узлы или всю систему, а во всех других случаях — при высокой надежности переключающих устройств.

Скользящее резервирование — это резервирование замещением, при котором группа основных элементов объекта резервируется одним или несколькими резервными элементами, каждый из которых может заменить любой отказавший основной элемент в данной группе (рис. 16).

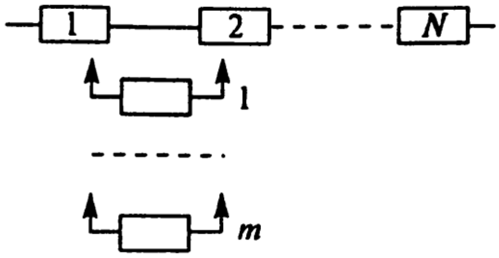


Рисунок 16. Скользящее резервирование

В системах управления нашло широкое применение *мажоритарное резервирование* (с использованием «голосования»). Этот способ основан на применении дополнительного элемента, называемого мажоритарным, или логическим, элементом (рис. 17). Логический элемент позволяет вести сравнение сигналов, поступающих от элементов, выполняющих одну и ту же функцию. Если результаты совпадают, то они передаются на выход устройства.

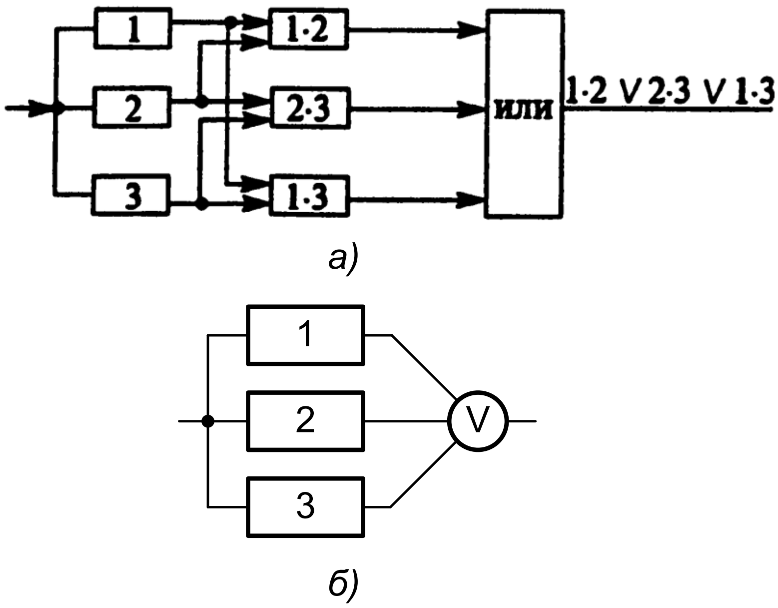


Рисунок 17. Мажоритарное резервирование «2 из 3»:
а) логическая схема; б) блок-схема надежности

На рис. 17 изображено резервирование по принципу «2 из 3», т.е. любые два совпадающих результата из трех считаются истинными и проходят на выход устройства. По такому принципу построены многие схемы подсистем систем управления и защиты (СУЗ). Можно применять соотношения «3 из 5» и др. Главное достоинство этого метода — обеспечение повышения надежности при любых видах отказов элементов и повышение достоверности информационно-логических объектов.

Степень избыточности характеризуется кратностью резервирования. *Кратность резерва* — это отношение числа резервных элементов объекта к числу резервируемых ими основных элементов, выраженное несокращенной дробью. *Резервирование с целой кратностью* имеет место, когда один основной элемент резервируется одним или более резервными элементами.

Резервирование с дробной кратностью — это такое резервирование, когда два и более однотипных элементов резервируются одним и более резервными элементами. Наиболее распространенным вариантом резервирования с дробной кратностью является такой, когда число основных элементов превышает число резервных. Резервирование, кратность которого равна единице, называется *дублированием.*

В зависимости от режима работы резерва различают нагруженный, облегченный и ненагруженный резервы (рис. 18). *Нагруженный («горячий») резерв* — это резерв, который содержит один или несколько резервных элементов, находящихся в режиме основного элемента. При этом принимается, что элементы нагруженного резерва имеют тот же уровень безотказности, что и резервируемые ими основные элементы объекта. *Облегченный («теплый») резерв* — это резерв, который содержит один или несколько резервных элементов, находящихся в менее нагруженном режиме, чем основной. Элементы облегченного резерва обладают, как правило, более высоким уровнем безотказности, чем основные элементы. *Ненагруженный («холодный») резерв* — это резерв, который содержит один или несколько резервных элементов, находящихся в ненагруженном режиме до начала выполнения ими функций основного элемента. Для элементов ненагруженного резерва условно полагают, что они никогда не отказывают.

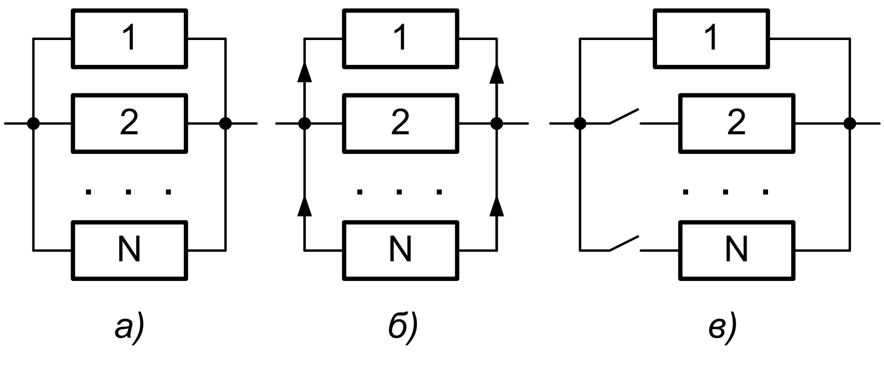


Рисунок 18. Блок-схемы для различных режимов работы резерва:
а) «горячее» резервирование; б) «теплое» резервирование;
в) «холодное» резервирование

Резервирование, при котором работоспособность любого одного или нескольких резервных элементов в случае возникновения отказов подлежит восстановлению при эксплуатации, называется *резервированием с восстановлением,* в противном случае имеет место *резервирование без* *восстановления.* Восстанавливаемость резерва обеспечивается при наличии контроля работоспособности элементов. При наличии резервирования это особенно важно, так как в этом случае число скрытых отказов может быть больше, чем при отсутствии резервирования. В идеальном варианте отказ любого элемента объекта обнаруживается без задержки, а отказавший элемент незамедлительно заменяется или ремонтируется.

РАСЧЕТ НАДЕЖНОСТИ РЕЗЕРВИРОВАННЫХ СИСТЕМ

Каждый метод резервирования подразумевает определенное поведение резервных элементов в системе при отказе основных. В связи с этим, различаются и формулы, по которым можно определять ВБР резервированных систем. Зная ВБР, остальные показатели надежности для таких систем можно будет получить по формулам из Приложения 1.

Рассмотрим подробнее методы резервирования.

Нагруженное («горячее») резервирование

Исторически, такой метод резервирования был исследован раньше остальных. Иногда такое резервирование называют «параллельным», противопоставляя его тем самым последовательным системам. И, хотя это не совсем точно (системы с «теплым» и «холодным» резервированием также являются параллельными), мы также будем подразумевать под параллельными системами именно системы *с нагруженным* резервированием, если не указано иначе.

Итак, рассмотрим систему, состоящую из N элементов, работающих одновременно. Обозначим через $\overline{A}_i$ событие, заключающееся в том, что i-й элемент отказал, а через $\overline{A}_S$ событие, заключающееся в том, что отказала вся система в целом.

Предположим, что отказы элементов системы статистически независимы, т.е. отказ одного элемента никак не влияет на работоспособность других. Также предположим, что система такова, что ее отказ наступает тогда, когда откажут все ее элементы. Другими словами, отказ системы не наступит, пока работоспособен хотя бы один ее элемент.

В этом случае мы можем записать

$$\overline{A}_S = \overline{A}_1 \cap \overline{A}_2 \cap \ldots \cap \overline{A}_N = \bigcap \tag{34}$$

Вероятности событий $\overline{A}_i$ и $\overline{A}_S$ совпадают с определением вероятности отказа i-го элемента и системы, соответственно, поэтому обозначим вероятность события $\overline{A}_i$ через Q_i, а вероятность события $\overline{A}_S$ через Q_S, т.е.

$$\begin{aligned} &Q_i = \Pr\{\overline{A}_i\}, \ \ i = 1..N; \\ &Q_S = \Pr\{\overline{A}_S\}. \end{aligned} \tag{35}$$

Поскольку события $\overline{A}_i$ статистически независимы, можно записать

$$\Pr\left\{\overline{A}_S\right\} = \Pr\left\{\overline{A}_1 \cap \overline{A}_2 \cap \ldots \cap \overline{A}_N\right\} = \Pr\left\{\overline{A}_1\right\} \cdot \Pr\left\{\overline{A}_2\right\} \cdot \ldots \cdot \Pr\left\{\overline{A}_N\right\} =$$

$$= \prod_{i=1}^{N} \Pr\left\{\overline{A}_i\right\}.$$

Используя соотношения (35), получаем

$$Q_S = \prod_{i=1}^{N} Q_i. \tag{36}$$

Таким образом, вероятность отказа системы с параллельным соединением элементов равна произведению вероятностей отказов входящих в нее элементов. Данная формула аналогична выражению (31) для последовательных систем, но противоположна по смыслу. Использование вероятностей отказа не так удобно, как ВБР, поэтому перепишем (36) с учетом (4) и того, что ВБР зависит от времени:

$$1 - P_S(t) = \prod_{i=1}^{N} \left(1 - P_i(t)\right),$$

и выразим ВБР системы:

$$P_S(t) = 1 - \prod_{i=1}^{N} \left(1 - P_i(t)\right) \tag{37}$$

Анализируя выражения (36) и (37) можно вывести 2 следствия, аналогичных следствиям выражения (31):

Следствие 1. Поскольку $0 \le P_i \le 1$, ВБР параллельной системы больше ВБР любого входящего в нее элемента.

Следствие 2. Исходя из Следствия 1, ВБР параллельной системы больше ВБР наиболее надежного элемента, входящего в нее.

Также, представляется полезным запомнить два выражения для ВБР параллельной системы в частных случаях:

а) ВБР элементов, входящих в систему, одинаковы ($P_i(t) = P(t)$):

$$P_S(t) = 1 - \left(1 - P(t)\right)^N; \tag{38}$$

б) параллельная система состоит из двух элементов:

$$P_S(t) = P_1(t) + P_2(t) - P_1(t) \cdot P_2(t). \tag{39}$$

Можно доказать, что выражения для ВБР параллельной системы таковы, что если для элементов системы справедлива какая-нибудь определенная МН, для ВБР системы в целом эта МН ***справедлива не будет***.

Пример 4

Дана система (рис. 19), состоящая из двух равнонадежных (одинаковых) элементов, соединенных параллельно ($P_1(t)=P_2(t)=P(t)$).

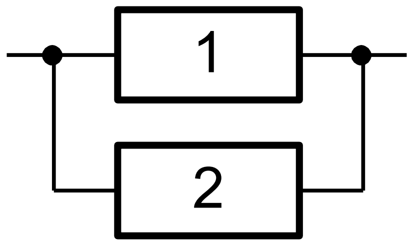


Рисунок 19. Блок-схема для Примеров 4 и 5

Интенсивности отказов элементов 1 и 2 равны λ. Записать выражения для ВБР, плотности, интенсивности отказов и среднего времени безотказной работы системы в целом. Определить численные значения этих показателей в момент времени t = 2500 ч при условии, что λ =0.0002 ч$^{-1}$.

Решение:

Поскольку в условии задачи указано, что интенсивности отказов элементов постоянны, для них справедлива экспоненциальная МН. С учетом (15) и (39) ВБР системы равна:

$$
\begin{aligned}
P_S(t) &= P_1(t)+P_2(t)-P_1(t)\cdot P_2(t)=2P(t)-P(t)^2= \\
&= 2e^{-\lambda t}-e^{-2\lambda t}= \\
&= e^{-\lambda t}\left(2-e^{-\lambda t}\right).
\end{aligned}
$$

Используя соотношения из Приложения 1, получим выражения для остальных показателей надежности.

Плотность отказов системы:

$$
\begin{aligned}
f_S(t) &= -P_S'(t)=2\lambda e^{-\lambda t}-2\lambda e^{-2\lambda t}= \\
&= 2\lambda e^{-\lambda t}\left(1-e^{-\lambda t}\right).
\end{aligned}
$$

Интенсивность отказов системы:

$$
\begin{aligned}
\lambda_S(t) &= \frac{f_S(t)}{P_S(t)}=\frac{2\lambda e^{-\lambda t}\left(1-e^{-\lambda t}\right)}{e^{-\lambda t}\left(2-e^{-\lambda t}\right)}= \\
&= \frac{2\lambda\cdot\left(1-e^{-\lambda t}\right)}{2-e^{-\lambda t}}.
\end{aligned}
$$

Среднее время безотказной работы системы:

$$T_{cp.S} = \int_0^\infty P_S(t)\,dt = \int_0^\infty \left(2e^{-\lambda t} - e^{-2\lambda t}\right)dt = \frac{2}{\lambda} - \frac{1}{2\lambda} =$$

$$= \frac{3}{2\lambda}.$$

Принимая во внимание, что t = 2500 ч и λ =0.0002 ч$^{-1}$, получим:

$$P_S(t = 2500) = e^{-0.0002\cdot 2500}\left(2 - e^{-0.0002\cdot 2500}\right) \approx$$

$$\approx 0.845.$$

$$f_S(t = 2500) = 2\cdot 0.0002e^{-0.0002\cdot 2500}\left(1 - e^{-0.0002\cdot 2500}\right) \approx$$

$$\approx 9.546\cdot 10^{-5}\ ч^{-1}.$$

$$\lambda_S(t = 2500) = \frac{2\cdot 0.0002\cdot\left(1 - e^{-0.0002\cdot 2500}\right)}{2 - e^{-0.0002\cdot 2500}} \approx$$

$$\approx 1.129\cdot 10^{-4}\ ч^{-1}.$$

$$T_{cp.S} = \frac{3}{2\cdot 0.0002} = 7500\ ч.$$

Пример 5

Дана система (рис. 19), состоящая из двух элементов, соединенных параллельно. Известно, что среднее время до отказа элементов одинаково и равно $Tcp_1 = Tcp_2 = 2000$ ч. При этом, для элемента 1 справедлива экспоненциальная МН, а для элемента 2 – МН Рэлея. Найти Среднее время до отказа системы в целом.

Решение:

Определим параметры моделей надежности каждого элемента. Известно, что для экспоненциальной МН $Tcp = \frac{1}{\lambda}$, а для МН Рэлея $Tcp = \sigma\sqrt{\frac{\pi}{2}}$. Отсюда, параметр ЭМН для первого элемента равен

$$\lambda = \frac{1}{Tcp} = \frac{1}{2000} = 0.0005\ ч^{-1},$$

а параметр модели Рэлея для второго элемента

$$\sigma = Tcp\cdot\sqrt{\frac{2}{\pi}} \approx 2000\cdot 0.798 \approx 1595.8\ ч.$$

Согласно (39), ВБР системы равна

$$P_S(t) = P_1(t) + P_2(t) - P_1(t) \cdot P_2(t) =$$

$$= e^{-\lambda t} + e^{-\frac{t^2}{2\sigma^2}} - e^{-\left(\lambda t + \frac{t^2}{2\sigma^2}\right)} =$$

$$= e^{-0.0005t} + e^{-1.963 \cdot 10^{-7} t^2} - e^{-\left(0.0005t + 1.963 \cdot 10^{-7} t^2\right)}.$$

Тогда

$$Tcp_S = \int_0^\infty P_S(t)\,dt = \int_0^\infty e^{-\lambda t}dt + \int_0^\infty e^{-\frac{t^2}{2\sigma^2}}dt - \int_0^\infty e^{-\left(\lambda t + \frac{t^2}{2\sigma^2}\right)}dt =$$

$$= \frac{1}{\lambda} + \sigma\sqrt{\frac{\pi}{2}} - \int_0^\infty e^{-\left(\lambda t + \frac{t^2}{2\sigma^2}\right)}dt.$$

Используя математическое ПО (Mathcad), определим, что

$$Tcp_S \approx 2831.6 \text{ ч.}$$

НЕНАГРУЖЕННОЕ («ХОЛОДНОЕ») И ОБЛЕГЧЕННОЕ («ТЕПЛОЕ») РЕЗЕРВИРОВАНИЕ

Напомним, что «холодным» резервированием называется такой тип параллельного резервирования, при котором резервные элементы подключаются в работу только после отказа основного элемента. Таким образом, в каждый момент времени работает только один элемент. При этом, резервные элементы, находясь в неподключенном состоянии, отказать не могут.

«Теплым» резервированием называется такой тип параллельного резервирования, при котором резервные элементы также подключаются в работу только после отказа основного элемента. Однако, резервные элементы, находясь в состоянии облегченного резерва, могут отказать, но с гораздо меньшей вероятностью, чем основной элемент.

Вывод общих формул для этих типов резервирования сопряжен со значительными трудностями, поэтому, в рамках данной дисциплины, приведем лишь формулы для частного случая, а именно, для случая, когда все элементы равнонадежны и время до отказа элементов подчиняется экспоненциальному закону распределения. Приведенные ниже формулы для ВБР даются без вывода. Доказать справедливость этих формул мы сможем несколько позже.

«Холодное» резервирование

$$P_S(t) = e^{-\lambda t}\sum_{i=0}^{m}\frac{(\lambda t)^i}{i!}, \tag{40}$$

где λ – интенсивность отказов элементов в режиме полной нагрузки, m – количество резервных элементов.

$$T_{cp} = \frac{m+1}{\lambda}. \tag{41}$$

В случае, когда m =1, т.е. когда основной элемент дублируется одним резервным

$$P_S(t) = e^{-\lambda t}(1+\lambda t); \tag{42}$$

$$T_{cp} = \frac{2}{\lambda}. \tag{43}$$

«Теплое» резервирование

$$P_S(t) = e^{-\lambda t}\left[1 + \sum_{i=1}^{m} \frac{a_i}{i!}\left(1 - e^{-\lambda_p t}\right)^i\right], \tag{44}$$

где λ – интенсивность отказов элементов в режиме полной нагрузки, λ_p – интенсивность отказов элементов в состоянии резерва, *m* – количество резервных элементов, а коэффициент a_i рассчитывается по формуле

$$a_i = \prod_{j=0}^{i-1}\left(j + \frac{\lambda}{\lambda_p}\right).$$

Среднее время до отказа:

$$T_{cp} = \frac{1}{\lambda}\sum_{i=0}^{m}\frac{1}{1+ik}, \tag{45}$$

где $k = \dfrac{\lambda_p}{\lambda}$.

В случае, когда *m* =1, т.е. когда основной элемент дублируется одним резервным

$$P_S(t) = e^{-\lambda t}\left[1 + \frac{\lambda}{\lambda_p}\left(1 - e^{-\lambda_p t}\right)\right]; \tag{46}$$

$$T_{cp} = \frac{2\lambda + \lambda_p}{\lambda\left(\lambda + \lambda_p\right)}. \tag{47}$$

В тех случаях, когда элементы в «холодном» или «теплом» резервах не являются равнонадежными, или же когда времена их отказов не подчиняются экспоненциальному закону, необходимо использовать другие методы расчета: метод состояний (который будет рассмотрен позже) либо имитационное моделирование.

Пример 6

Дана система с интенсивностью отказов λ =0.001 $ч^{-1}$. Требуется выполнить резервирование этой системы таким образом, чтобы вероятность, что она проработает безотказно 1000 ч, была больше 0.9. Определить минимальные количества резервных элементов, необходимые для выполнения этих условий, для случаев «горячего», «холодного» и «теплого» резервирования.

Примечание. Предполагается, что в качестве резервных элементов будут использоваться элементы, равнонадежные исходной системе. Также, для случая *«теплого» резервирования, предполагается, что интенсивность отказов элементов в состоянии резерва в 6 раз меньше интенсивности отказов в рабочем режиме.*

Решение:

Для начала определим ВБР нерезервированной системы в момент 1000 ч:

$$P(t=1000)=e^{-0.001\cdot 1000}\approx 0.368.$$

Определим необходимое количество резервных элементов для случая «горячего» резервирования. Поскольку все элементы равнонадежны, воспользуемся формулой (38):

$$P_S(t)=1-\left(1-P(t)\right)^{m+1},$$

где m – количество резервных элементов, $P(t)$ - ВБР нерезервированной системы.

Запишем это выражение в виде

$$1-P_S(t)=\left(1-P(t)\right)^{m+1}$$

и возьмем логарифм от каждой части выражения:

$$\ln\left(1-P_S(t)\right)=(m+1)\ln\left(1-P(t)\right).$$

Отсюда

$$m=\frac{\ln\left(1-P_S(t)\right)}{\ln\left(1-P(t)\right)}-1.$$

Подставляя $P_S(t=1000)=0.9$ и $P(t=1000)=0.368$, получим

$$m=\frac{\ln(1-0.9)}{\ln(1-0.368)}-1\approx 4.02.$$

Поскольку количество элементов должно быть целым, округляем в большую сторону и получаем, что для достижения необходимой ВБР требуется резервировать основной элемент ***<u>пятью</u>*** резервными.

Для случая «теплого» резервирования формула (44) слишком сложна, чтобы определить m таким же образом, что и для «горячего», поэтому придется определять его перебором значений.

Для $m=1$ воспользуемся формулой (46):

$$P_S\left(t=1000\right)=e^{-\lambda t}\left[1+\frac{\lambda}{\lambda_p}\left(1-e^{-\lambda_p t}\right)\right]=$$

$$=e^{-0.001\cdot 1000}\left[1+\frac{0.001}{0.001/6}\left(1-e^{-\frac{0.001\cdot 1000}{6}}\right)\right]\approx$$

$$\approx 0.707<0.9.$$

Очевидно, что необходимо больше резервных элементов. Для m =2:

$$a_1=\frac{\lambda}{\lambda_p}=6; \qquad a_2=\frac{\lambda}{\lambda_p}\left(1+\frac{\lambda}{\lambda_p}\right)=6\cdot 7=42;$$

$$P_S\left(t=1000\right)=e^{-0.001\cdot 1000}\left[1+\sum_{i=1}^{2}\frac{a_i}{i!}\left(1-e^{-\frac{0.001\cdot 1000}{6}}\right)^i\right]\approx$$

$$\approx 0.368\left[1+6\left(1-0.846\right)+42\left(1-0.846\right)^2\right]\approx$$

$$\approx 0.889<0.9.$$

Для m =3:

$$a_3=\frac{\lambda}{\lambda_p}\left(1+\frac{\lambda}{\lambda_p}\right)\left(2+\frac{\lambda}{\lambda_p}\right)=6\cdot 7\cdot 8=336;$$

$$P_S\left(t=1000\right)=e^{-0.001\cdot 1000}\left[1+\sum_{i=1}^{3}\frac{a_i}{i!}\left(1-e^{-\frac{0.001\cdot 1000}{6}}\right)^i\right]\approx$$

$$\approx 0.368\left[1+6\left(1-0.846\right)+\frac{42}{2!}\left(1-0.846\right)^2+\frac{336}{3!}\left(1-0.846\right)^3\right]\approx$$

$$\approx 0.963\geq 0.9.$$

Итак, для обеспечения требуемого уровня безотказности потребуется резервировать основной элемент ***тремя*** такими же элементами.

Для случая «холодного» резервирования также воспользуемся перебором. При m =1 воспользуемся формулой (42):

$$P_S\left(t=1000\right)=e^{-0.001\cdot 1000}\left(1+0.001\cdot 1000\right)\approx$$

$$\approx 0.368\cdot 2\approx 0.736<0.9.$$

Для m =2 воспользуемся формулой (40):

$$P_S(t=1000)=e^{-0.001\cdot1000}\left(1+0.001\cdot1000+\frac{(0.001\cdot1000)^2}{2!}\right)\approx$$

$$\approx 0.92\geq 0.9.$$

Итак, для обеспечения требуемого уровня безотказности потребуется резервировать основной элемент ***двумя*** такими же элементами.

Пример 6 показал, что «холодное» резервирование является самым надежным из перечисленных трех методов, а «горячее» - самым ненадежным. Почему бы всегда не использовать «холодное» резервирование?

Во-первых, для подключения резервных элементов требуются устройства автоматики, чья собственная надежность может повлиять на надежность системы в целом.

Во-вторых, процесс перевода элемента из режима «холодного» резерва в рабочий режим может занимать достаточно длительное время, что отрицательно сказывается на бесперебойности работы системы.

МАЖОРИТАРНОЕ РЕЗЕРВИРОВАНИЕ

Рассмотрим систему, включающую и отключающую некоторое устройство (У), в зависимости от его рабочей температуры (рис. 20).

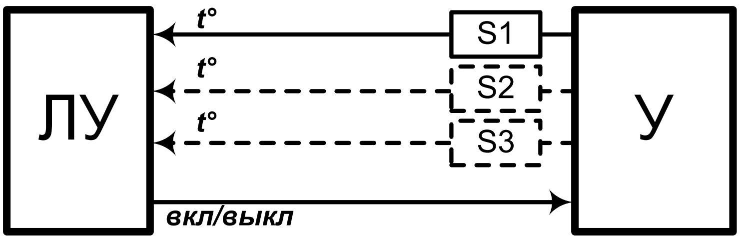


Рисунок 20.

Значение рабочей температуры, измеренное датчиком S1, поступает на логическое устройство (ЛУ), которое и принимает решение о включении или выключении устройства. Однако, если датчик откажет и будет передавать неверное значение температуры, ЛУ примет ошибочное решение. Установка второго датчика не решает проблему, т.к. при отказе одного из них, на ЛУ поступят два разных значения температуры, что приведет к тому, что ЛУ не сможет принять решение, сигнал с какого датчика нужно принимать в расчет.

Для таких случаев можно установить третий датчик, задав правило для ЛУ, определяющее «верное» значение температуры, как значение, поступившее с большинства датчиков – в нашем случае, по крайней мере, с двух из трех (или со всех) датчиков. Т. о., мажоритарная система из трех датчиков работает без отказа, если, по крайней мере, два датчика работают верно.

Вообще, мажоритарная система должна состоять из нечетного количества элементов N, k из которых должны быть работоспособны для того, чтобы система была в работоспособном состоянии, где $k = \frac{N+1}{2}$. Мы можем говорить о мажоритарных системах «2 из 3», «3 из 5», «4 из 7» и т.д. Однако на практике редко используются системы, сложнее, чем «2 из 3», т.к. увеличение сложности ведет к пропорциональному увеличению стоимости системы.

Рассмотрим систему с мажоритарным резервированием «k из N», $k = \frac{N+1}{2}$ (рис. 21).

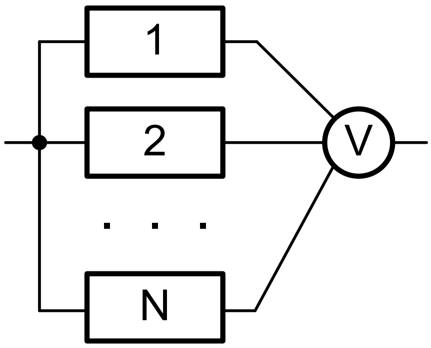


Рисунок 21. Блок-схема системы с мажоритарным резервированием

Обозначим через P_i ВБР i-го элемента, через P_S ВБР всей системы в целом и через $P\{n\}$ - вероятность, что работают ровно n элементов из N. Тогда, вероятность того, что все N элементов находятся в работоспособном состоянии, будет равна

$$P\{N\} = P_1 \cdot P_2 \cdot \ldots \cdot P_N = \prod_{i=1}^{N} P_i.$$

Вероятность того, что первый элемент отказал, а остальные N-1 элементов работоспособны, будет равна

$$(1 - P_1) \cdot P_2 \cdot P_3 \cdot \ldots \cdot P_N.$$

Всего возможны N различных вариантов, когда один элемент отказал, а остальные работают нормально. Вероятность такого состояния будет определяться суммой вероятностей этих вариантов:

$$P\{N-1\} = \sum_{j=1}^{N} \left[\frac{\prod_{i=1}^{N} P_i}{P_j} (1 - P_j) \right] = \prod_{i=1}^{N} P_i \cdot \sum_{j=1}^{N} \left(\frac{1 - P_j}{P_j} \right).$$

Вероятность того, что отказали первый и второй элементы, а остальные N-2 элементов работоспособны, будет равна

$$(1 - P_1) \cdot (1 - P_2) \cdot P_3 \cdot P_4 \cdot \ldots \cdot P_N.$$

Всего возможны $C_N^2 = \dfrac{N!}{2!(N-2)!}$ вариантов, когда отказали ровно два элемента, а остальные N-2 элементов работоспособны. Не будем записывать выражение для вероятности такого состояния, но надеемся, что общий принцип ясен: необходимо просуммировать вероятности всех возможных вариантов.

Система «k из N» будет работоспособна, когда работают k, k+1, k+2,…N элементов из N, т.е.

$$P_S = \sum_{i=k}^{N} P\{i\}. \tag{48}$$

Общее выражение для $P\{i\}$ довольно громоздко, поэтому ограничимся лишь записью формулы расчета ВБР мажоритарной системой «k из N» при условии, что все элементы системы равнонадежны:

$$P_S = \sum_{i=k}^{N} C_N^i P^i \left(1-P\right)^{N-i}, \tag{49}$$

где P – ВБР одного элемента, $C_N^i = \dfrac{N!}{i!\left(N-i\right)!}$ - количество сочетаний из N по i.

Для самого распространенного случая мажоритарных систем «2 из 3» выражение (49) примет вид

$$P_{2из3} = \sum_{i=2}^{3} C_3^i P^i \left(1-P\right)^{3-i} = 3P^2 - 2P^3. \tag{50}$$

В случае, когда элементы системы «2 из 3» различны, выражение (48) примет вид

$$P_{2из3} = \sum_{i=2}^{3} P\{i\} = P_1 P_2 P_3 \left(1 + \sum_{i=1}^{3} \frac{1-P_i}{P_i}\right). \tag{51}$$

Пример 7

Определить среднее время до отказа мажоритарной системы «3 из 5», при условии, что все элементы системы равнонадежны с интенсивностью отказов λ =0.001 ч$^{-1}$.

Решение:

ВБР одного элемента системы определяется экспоненциальной МН:

$$P\left(t\right) = e^{-\lambda t}.$$

Поскольку все элементы системы равнонадежны, воспользуемся формулой (49) для определения ВБР всей системы:

$$P_S(t) = \sum_{i=3}^{5} C_5^i P(t)^i \left(1 - P(t)\right)^{5-i} =$$

$$= C_5^3 e^{-3\lambda t}\left(1 - e^{-\lambda t}\right)^2 + C_5^4 e^{-4\lambda t}\left(1 - e^{-\lambda t}\right) + C_5^5 e^{-5\lambda t} =$$

$$= 10e^{-3\lambda t}\left(1 - e^{-\lambda t}\right)^2 + 5e^{-4\lambda t}\left(1 - e^{-\lambda t}\right) + e^{-5\lambda t} =$$

$$= 6e^{-5\lambda t} - 15e^{-4\lambda t} + 10e^{-3\lambda t}.$$

Среднее время до отказа системы:

$$T_{cp} = \int_0^\infty P_S(t)\,dt = \int_0^\infty \left(6e^{-5\lambda t} - 15e^{-4\lambda t} + 10e^{-3\lambda t}\right)dt =$$

$$= \frac{6}{5\lambda} - \frac{15}{4\lambda} + \frac{10}{3\lambda} = \frac{6 \cdot 12 - 15 \cdot 15 + 10 \cdot 20}{60\lambda} = \frac{47}{60\lambda} \approx$$

$$\approx 783.3 \text{ ч}.$$

Пример 8

Определить среднее время до отказа мажоритарной системы «2 из 3», при условии, что интенсивность отказов первого элемента равна λ, второго - 2λ, третьего - 3λ ($\lambda = 0.0001$ ч$^{-1}$).

Решение:

ВБР элементов системы определяются экспоненциальной МН:

$$P_1(t) = e^{-\lambda t}; \quad P_2(t) = e^{-2\lambda t}; \quad P_3(t) = e^{-3\lambda t}.$$

Для определения ВБР всей системы воспользуемся формулой (51):

$$P_S(t) = P_1(t)P_2(t)P_3(t)\left(1 + \sum_{i=1}^{3}\frac{1 - P_i(t)}{P_i(t)}\right) = e^{-\lambda t}e^{-2\lambda t}e^{-3\lambda t}\left(1 + \sum_{i=1}^{3}\frac{1 - P_i(t)}{P_i(t)}\right) =$$

$$= e^{-6\lambda t}\left(1 + \frac{1 - e^{-\lambda t}}{e^{-\lambda t}} + \frac{1 - e^{-2\lambda t}}{e^{-2\lambda t}} + \frac{1 - e^{-3\lambda t}}{e^{-3\lambda t}}\right) =$$

$$= e^{-3\lambda t} + e^{-4\lambda t} + e^{-5\lambda t} - 2e^{-6\lambda t}.$$

Среднее время до отказа системы:

$$T_{cp} = \int_0^\infty P_S(t)\,dt = \int_0^\infty \left(e^{-3\lambda t} + e^{-4\lambda t} + e^{-5\lambda t} - 2e^{-6\lambda t}\right)dt =$$

$$= \frac{1}{3\lambda} + \frac{1}{4\lambda} + \frac{1}{5\lambda} - \frac{2}{6\lambda} = \frac{9}{20\lambda} =$$

$$= 4500 \text{ ч}.$$

Если посмотреть внимательно на формулы (48) и (49), нигде в них не определяется, что N непременно должно быть нечетным и что $k = \frac{N+1}{2}$. В самом деле, ничто не мешает нам принять N =4 и k =2, и воспользоваться формулой (49). Однако полученный результат уже будет являться ВБР не мажоритарной системы, а некоторой системы «2 из 4». Какому же виду резервирования будет относиться подобная система?

Система «2 из 4» состоит из 4 одновременно работающих элементов, которая будет работоспособна, если работоспособными будут, по крайней мере, 2 ее элемента. Иными словами, система откажет после третьего отказа элементов. Подобное поведение системы совпадает с определением ***скользящего резервирования*** для случая двух основных и двух резервных элементов.

Получается, что формулы для мажоритарного резервирования, подходят для расчета надежности систем со скользящим резервированием и постоянно включенным резервом. Далее под системами «k из N» будем понимать именно системы со скользящим резервированием, если не будет особо оговорено, что система мажоритарная.

В заключении, хотелось бы обратить внимание на два частных случая. Рассмотрим систему «N из N»: система, состоящая из N элементов, все из которых должны быть работоспособными для того, чтобы вся система была работоспособной. Это совпадает с определением последовательной системы.

Рассмотрим систему «1 из N»: это система, состоящая из N элементов, которая будет работать, пока работоспособен хотя бы один ее элемент. Это совпадает с определением параллельной системы с «горячим» резервированием.

Это дает нам основание использовать формулы для скользящего и мажоритарного резервирования и для расчета обычных последовательных и параллельных систем. Студентам предлагается проверить это **самостоятельно**.

ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНО-ПАРАЛЛЕЛЬНЫЕ СИСТЕМЫ

Все рассмотренные выше методы резервирования могут быть использованы в одной и той же системе одновременно. Сложные технические системы могут представлять собой совокупность высоконадежных элементов без резервирования и элементов с недостаточной надежностью, которые могут быть резервированы тем или иным методом. В этом случае можно говорить о последовательно-параллельных системах (рис. 22).

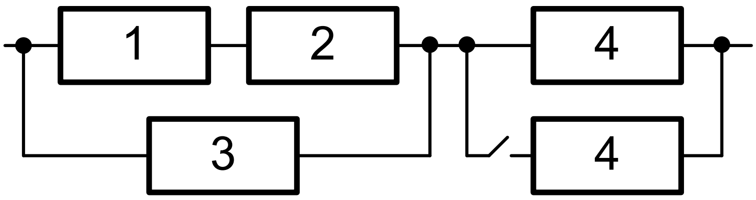


Рисунок 22. Пример последовательно-параллельной системы

Расчет надежности подобных систем удобно проводить, выполняя последовательное упрощение блок-схем надежности систем, аналогично упрощению структурных схем в ТАУ.

Основная идея упрощения схем заключается в том, что мы заменяем группу элементов с каким-нибудь одним типом резервирования (или без резервирования) одним элементом, с эквивалентной функцией ВБР, до тех пор, пока не останется один блок с ВБР, равной ВБР всей системы.

Пример 9

Дана последовательно-параллельная система (рис. 22). Определить значение ВБР системы в момент t = 1000 ч и среднее время безотказной работы, если даны интенсивности отказов элементов:

$$\lambda_1 = 0.0004\ ч^{-1}; \qquad \lambda_2 = 0.0006\ ч^{-1};$$

$$\lambda_3 = 0.0012\ ч^{-1}; \qquad \lambda_4 = 0.0016\ ч^{-1}.$$

Решение:

Найдем выражение для ВБР всей системы. Для этого проведем поэтапное упрощение блок-схемы надежности, определяя на каждом шаге эквивалентную ВБР упрощенных блоков.

1 этап. Заменим блоки 1 и 2 на эквивалентный блок 12 (рис. 23).

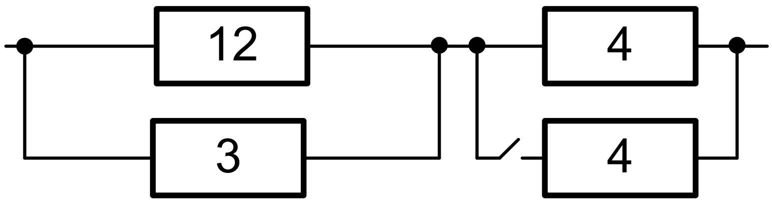


Рисунок 23

Т.к. блоки 1 и 2 соединены последовательно, ВБР блока 12 будет равна

$$P_{12}(t) = P_1(t) P_2(t) = e^{-(\lambda_1+\lambda_2)t}.$$

<u>2 этап.</u> Заменим блоки 12 и 3 на эквивалентный блок 123 (рис. 24).

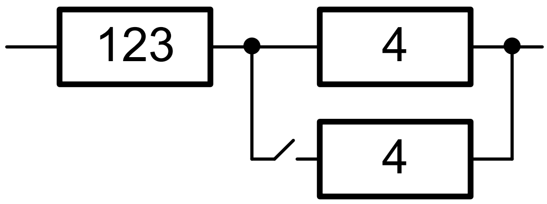


Рисунок 24

Т.к. блоки 12 и 3 соединены параллельно, ВБР блока 123 будет равна

$$P_{123}(t) = P_1(t)P_2(t) + P_3(t) - P_1(t)P_2(t)P_3(t) =$$
$$= e^{-(\lambda_1+\lambda_2)t} + e^{-\lambda_3 t} - e^{-(\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3)t}.$$

<u>3 этап.</u> Заменим два блока 4, образующих резервную группу с «холодным резервированием» на эквивалентный блок 44 (рис. 25).

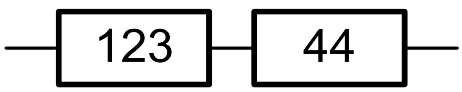


Рисунок 25

ВБР блока 44 будет равна

$$P_{44}(t) = e^{-\lambda_4 t}(1 + \lambda_4 t).$$

<u>4 этап.</u> Наконец, получим один блок *S*, эквивалентный системе в целом, заменив два последовательно соединенных блока 123 и 44 (рис. 26).

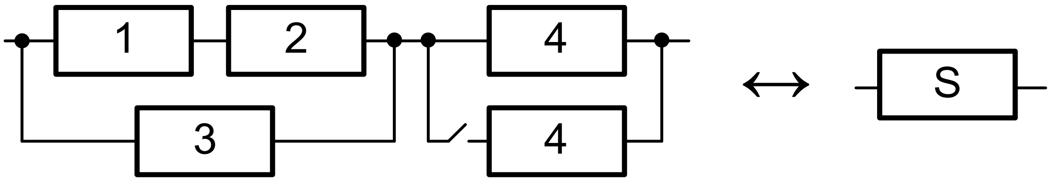


Рисунок 26

ВБР системы будет равна

$$P_S(t) = P_{123}(t) P_{44}(t) =$$
$$= \left(e^{-(\lambda_1+\lambda_2)t} + e^{-\lambda_3 t} - e^{-(\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3)t} \right) \left(e^{-\lambda_4 t} (1 + \lambda_4 t) \right) =$$
$$= \left(e^{-(\lambda_1+\lambda_2+\lambda_4)t} + e^{-(\lambda_3+\lambda_4)t} - e^{-(\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3+\lambda_4)t} \right) (1 + \lambda_4 t).$$

Среднее время безотказной работы системы:

$$T_{cp} = \int_0^\infty P_S(t)\,dt = \int_0^\infty \left(e^{-(\lambda_1+\lambda_2+\lambda_4)t} + e^{-(\lambda_3+\lambda_4)t} - e^{-(\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3+\lambda_4)t} \right) (1 + \lambda_4 t)\,dt =$$
$$= \frac{\lambda_1 + \lambda_2 + 2\lambda_4}{(\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_4)^2} + \frac{\lambda_3 + 2\lambda_4}{(\lambda_3 + \lambda_4)^2} - \frac{\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 + 2\lambda_4}{(\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 + \lambda_4)^2} =$$
$$= \frac{0.0042}{0.0026^2} + \frac{0.0044}{0.0028^2} - \frac{0.0054}{0.0038^2} \approx$$
$$\approx 808.6 \text{ ч.}$$

СИСТЕМЫ С ВОССТАНОВЛЕНИЕМ

До этого момента, при изучении разделов теории надежности, мы предполагали, что исследуемые системы были невосстанавливаемыми, т.е. нас интересовала работа систем от момента включения до момента отказа системы в целом. Предполагалось, также, что отказавшие элементы систем с резервированием не восстанавливаются.

Конечно же, такой подход к надежности систем не может быть полным. Мы можем разделить все системы на восстанавливаемые и не восстанавливаемые довольно условно: один и тот же элемент в зависимости от окружающих условий и этапов эксплуатации может считаться восстанавливаемым или невосстанавливаемым.

При формулировании и решении задач обеспечения, прогнозирования и оценивания надежности существенное практическое значение имеет решение, которое должно приниматься в случае отказа объекта — восстанавливать его или нет. Отнесение объекта к восстанавливаемым или невосстанавливаемым влечет за собой выбор определенных показателей надежности. Например, очевидно, что для невосстанавливаемого объекта не имеет смысла такой показатель надежности как среднее время восстановления.

В дальнейшем, будем предполагать, что после отказа элемент (система) проходит процедуру восстановления; при этом примем следующие допущения:

- отказ элемента (системы) обнаруживается мгновенно;
- следом за моментом отказа мгновенно начинается восстановление;
- время восстановления – это непрерывная случайная величина, распределенная экспоненциально;
- количество ремонтных бригад неограниченно, т.е. если одновременно имеются несколько отказавших элементов, каждый из них проходит процедуру восстановления без ожидания в очереди;
- восстановленный элемент (система) до момента включения в работу считается абсолютно надежным, т.е. элемент после ремонта обладает такими же характеристиками, что и новый элемент;
- после восстановления элемент (система) мгновенно подключается в работу, либо занимает место среди резервных элементов (ели это предусмотрено).

Наличие такого большого списка допущений связано с тем, что процедура восстановления в значительной мере связана с человеческим фактором, который очень сложно описать математически. На практике каждое из приведенных выше утверждений может нарушаться: отказы не всегда замечаются вовремя, демонтаж отказавших элементов (и монтаж восстановленных) могут занимать продолжительное время, количество ремонтных бригад всегда ограничено, изделия после ремонта редко обладают таким же уровнем надежности, что и новые элементы, и т.д.

Введем определения некоторых показателей надежности для восстанавливаемых систем.

Вероятность восстановления. Момент восстановления работоспособности объекта после отказа является случайным событием. Поэтому интервал времени от момента отказа до момента восстановления является случайной величиной и для характеристики ремонтопригодности может быть использована функция распределения этой случайной величины Θ. Вероятностью восстановления называется вероятность того, что время восстановления работоспособного состояния объекта не превысит заданного:

$$P_в(t) = \Pr\{\Theta < t\},\ \ t \geq 0. \qquad (52)$$

Функция $P_в(t)$ представляет собой интегральную функцию распределения случайной величины Θ, следовательно, вероятность восстановления является монотонно возрастающей функцией времени: чем больше времени прошло с момента начала восстановления, тем больше вероятность того, что изделие будет восстановлено.

Мы предположили априори, что закон распределения времени до восстановления является экспоненциальным, тогда

$$P_в(t) = 1 - e^{-\mu t}, \qquad (53)$$

где μ – параметр распределения, называемый *интенсивностью восстановления*.

Вероятность невосстановления на заданном интервале *t*, т.е. вероятность того, что $\Theta \geq t$, равна

$$Q_в(t) = \Pr\{\Theta \geq t\} = 1 - P_в(t), \quad t \geq 0. \qquad (54)$$

Плотность вероятности момента восстановления равна

$$f_в(t) = \frac{dP_в(t)}{dt}. \qquad (55)$$

По аналогии со средней наработкой до отказа математическое ожидание времени восстановления работоспособного состояния объекта называется *средним временем восстановления:*

$$T_в = \int_0^\infty t f_в(t)\,dt = \int_0^\infty Q_в(t)\,dt \qquad (56)$$

Вероятностные характеристики отдельных свойств надежности, вообще говоря, являются независимыми. Один объект может обладать высокими показателями безотказности, но быть плохо ремонтопригодным. Другой объект может быть долговечным, но обладать низкими показателями безотказности. Конечно, желательно иметь объекты, обладающие хорошими показателями и безотказности, и долговечности, и ремонтопригодности, но осуществить это не всегда удается. Для оценки нескольких свойств надежности используются комплексные показатели.

Коэффициент готовности — это вероятность того, что объект окажется в работоспособном состоянии в произвольный момент времени, кроме планируемых периодов, в течение которых применение объекта по назначению не предусматривается

$$K_Г = \frac{T_{ср}}{T_{ср} + T_в}, \qquad (57)$$

где $T_{ср}$ - среднее время до отказа, $T_в$ - среднее время восстановления.

Коэффициент оперативной готовности определяется как вероятность того, что объект окажется в работоспособном состоянии в произвольный момент времени, кроме планируемых периодов, в течение которых применение объекта по назначению не предусматривается и, начиная с этого момента, будет работать безотказно в течение заданного интервала времени $t_{ОГ}$

$$K_{ОГ} = K_Г P(t_{ОГ}). \qquad (58)$$

Коэффициент оперативной готовности характеризует надежность объектов, необходимость применения которых возникает в произвольный момент времени, после которого требуется определенная безотказная работа. До этого момента времени такие объекты могут находиться как в режиме дежурства (при полных или облегченных нагрузках, но без выполнения заданных рабочих функций), так и в режиме применения — для выполнения других рабочих функций (задач, работ и т.д.). В обоих режимах возможно возникновение отказов и восстановление работоспособности объекта.

РАСЧЕТ НАДЕЖНОСТИ СИСТЕМ С ВОССТАНОВЛЕНИЕМ

Рассмотрим техническую систему с определенной постоянной интенсивностью отказов λ. После отказа система мгновенно переходит в режим (состояние) восстановления. Время до восстановления является непрерывной случайной величиной, распределенной экспоненциально с параметром μ (интенсивность восстановления). По завершении восстановления система мгновенно переходит в рабочий режим (состояние) – цикл повторяется.

Наиболее подходящим способом представления переходов данной системы из состояния в состояние является граф переходов (рис. 27).

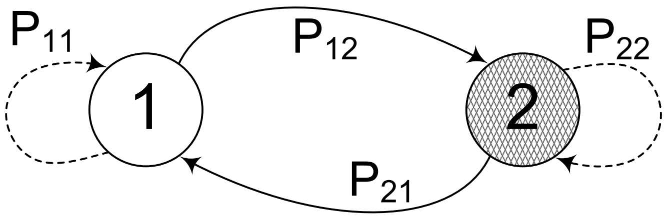


Рисунок 27

На рис. 27 состояния системы представлены вершинами графа (круги), а переходы – дугами. Обозначим работоспособное состояние как состояние 1, состояние отказа (восстановления) – как состояние 2. Для каждого момента времени существует вероятность перехода системы из текущего состояния в следующее (P_{12} и P_{21}), а также вероятности того, что система в следующий момент времени останется в исходном состоянии (P_{11} и P_{22}). В данном случае вероятность P_{12} представляет собой вероятность отказа, а P_{21} - вероятность восстановления. Для каждого *i*-го состояния сумма вероятностей переходов P_{ij}, $j=\{1,2\}$ равна единице.

Примечание. Для дальнейших расчетов вероятности вида P_{ii} будут нам не нужны, поэтому соответствующие им дуги (петли) на графах изображать не будем.

Система уравнений, определяющая вероятности состояний, такова:

$$\begin{cases} P_1(t+\Delta t) = P_1(t)\cdot\left[1-P_{12}(\Delta t)\right] + P_2(t)\cdot P_{21}(\Delta t); \\ P_2(t+\Delta t) = P_2(t)\cdot\left[1-P_{21}(\Delta t)\right] + P_1(t)\cdot P_{12}(\Delta t). \end{cases} \tag{59}$$

Для примера покажем, как читается первое уравнение:

Вероятность того, что система в момент времени $t+\Delta t$ окажется в первом состоянии, равна произведению вероятности того, что система находилась в момент времени t в первом состоянии и не перейдет из него за время Δt во второе состояние, плюс вероятности того, что система находилась в момент времени t во втором состоянии и перейдет из него за время Δt в первое состояние.

Поскольку Δt - это бесконечно малая величина, с достаточной для практических целей точностью можно принять

$$P_{ij}(\Delta t) = \gamma_{ij}\Delta t, \tag{60}$$

где γ_{ij} - интенсивность перехода из *i*-го состояния в *j*-е. В данном случае $\gamma_{12} = \lambda$, $\gamma_{21} = \mu$. С учетом этого, подставляя (60) в (59), получим

$$\begin{cases} P_1(t+\Delta t) = P_1(t)\cdot[1-\lambda\Delta t] + P_2(t)\cdot\mu\Delta t; \\ P_2(t+\Delta t) = P_2(t)\cdot[1-\mu\Delta t] + P_1(t)\cdot\lambda\Delta t. \end{cases} \tag{61}$$

Так как

$$\lim_{\Delta t\to 0}\frac{P_i(t+\Delta t)-P_i(t)}{\Delta t} = P_i'(t),$$

то (61) примет вид

$$\begin{cases} P_1'(t) = -\lambda P_1(t) + \mu P_2(t); \\ P_2'(t) = \lambda P_1(t) - \mu P_2(t). \end{cases} \tag{62}$$

Существует правило, позволяющее записывать уравнение вида (62) непосредственно по графу состояния: в левой части уравнения записать $P_k'(t)$ (где $P_k(t)$ — вероятность k-го состояния) и в правой части столько членов, сколько стрелок связано с данным состоянием. Если стрелка направлена в данное состояние, то ставится плюс, если из данного состоянии, — минус. Каждый член равен интенсивности потока событий, переводящего систему по данной стрелке, умноженной на вероятность того состояния, из которого исходит стрелка.

Решение системы уравнений (62) можно провести с использованием преобразования Лапласа. Это позволяет преобразовать систему дифференциальных уравнений в систему алгебраических.

Напомним замечательное свойство преобразования Лапласа: если $L\{f(t)\} = F(s)$, то $L\{f'(t)\} = s\cdot F(s) - f(0)$.

Поскольку $P_1(0) = 1$ (в начальный момент времени система работоспособна) и $P_2(0) = 0$, запишем изображение по Лапласу системы (62):

$$\begin{cases} sP_1(s) = -\lambda P_1(s) + \mu P_2(s) + 1; \\ sP_2(t) = \lambda P_1(s) - \mu P_2(s). \end{cases} \tag{63}$$

Примечание. Исторически принято для обозначения изображений по Лапласу использовать прописные буквы, а для обозначения оригиналов функций – строчные. Поскольку мы уже привыкли обозначать вероятность прописной буквой (P(t)), мы не будем придерживаться здесь этого правила. Однако следует помнить, что P(t) и P(s) – это совершенно разные функции, причем P(s)=L{P(t)}.

Решая систему (63), получим

$$P_1(s) = \frac{s+\mu}{s \cdot (s+\lambda+\mu)}.$$

Для того чтобы привести выражение для $P_1(s)$ к табличному (см. Приложение 3), умножим и разделим правую часть на постоянную величину $(\lambda+\mu)$. В результате получим

$$P_1(s) = \frac{(s+\mu)(\lambda+\mu)}{s \cdot (s+\lambda+\mu)(\lambda+\mu)} = \frac{\mu}{\lambda+\mu} \cdot \frac{1}{s} + \frac{\lambda}{\lambda+\mu} \cdot \frac{1}{s+\lambda+\mu}.$$

Переходя от изображения к оригиналу, получим

$$P_1(t) = \frac{\mu}{\lambda+\mu} + \frac{\lambda}{\lambda+\mu} \cdot e^{-(\lambda+\mu)t}. \tag{64}$$

По определению, $P_1(t)$ - это вероятность того, что система в момент t будет находиться в работоспособном состоянии. По смыслу это очень похоже на определение ВБР, однако, для функции $P_1(t)$ не выполняются условия (2). В частности, $P_1(\infty) \neq 0$.

Посмотрим на график функции $P_1(t)$ (рис. 28).

Видно, что функция $P_1(t)$ стремится к некоторому ненулевому значению. Анализируя (64), понятно, что это значение равно $\frac{\mu}{\lambda+\mu}$.

Также, функция $P_1(t)$ - это вероятность застать систему в работоспособном состоянии в момент t, что практически совпадает с определением коэффициента готовности.

Будем называть функцию вероятности пребывания системы в работоспособном состоянии *функцией готовности* системы, а ее значение при $t \to \infty$ - *стационарным коэффициентом готовности*.

Несмотря на относительную простоту метода определения надежности восстанавливаемых систем с помощью графов, существуют и определенные проблемы:

- для случайных времен до отказа и до восстановления используется только экспоненциальное распределение;

- при увеличении числа элементов в рассматриваемой системе значительно увеличивается число возможных состояний системы, а, следовательно, и количество уравнений в системе.

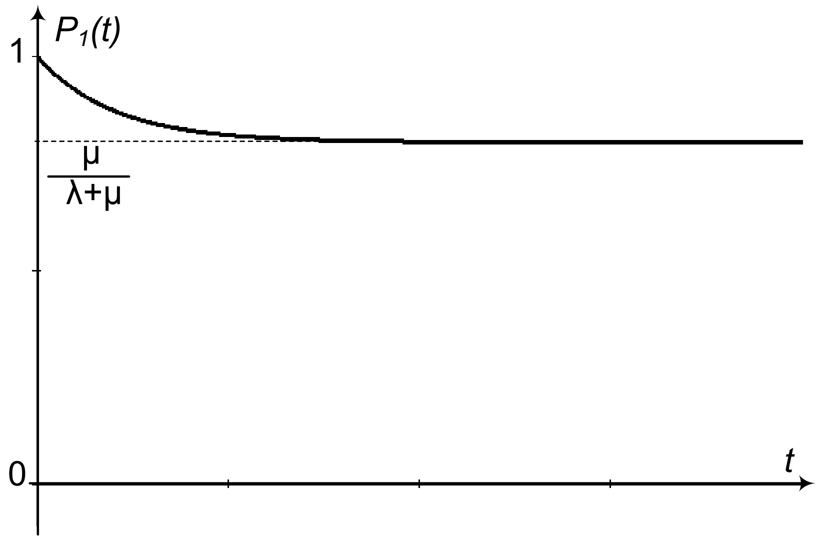


Рисунок 28

Рассмотрим некоторые тонкости использования метода на примерах.

Пример 10

Дана последовательная система, состоящая из двух элементов A и B, с интенсивностями отказа $\lambda_A = 0.001$, $\lambda_B = 0.002$ и с интенсивностями восстановления $\mu_A = 0.04$, $\mu_B = 0.01$ (рис. 29а). Найти функцию готовности и стационарный коэффициент готовности.

Решение:

Составим граф состояний и переходов для данной системы. При этом будем не только обозначать состояния системы числами, но и подписывать их, используя логико-буквенные обозначения для состояний элементов (инверсия обозначает, что соответствующий элемент отказал).

В начальном состоянии 1 оба элемента системы работоспособны. В этом состоянии возможны два разных события: отказ элемента А и отказ элемента В. Поэтому, рисуем две исходящие стрелки – в состояния 2 и 3.

Примечание. Мы предполагаем, что потоки отказов и потоки восстановлений являются простейшими. Из этого следует, что потоки являются также и однородными. Т.о. невозможно одновременное появление двух и более событий. Поэтому, невозможным является и одновременный отказ элементов А и В.

В состояниях 2 и 3 один элемент отказал, а один находится в работоспособном состоянии. Однако работоспособные элементы не могут отказать из состояний 2 и 3, т.к. система в целом в этих состояниях уже не работоспособна. Также, в состояниях 2 и 3 начинается восстановление отказавших элементов, поэтому рисуем стрелки обратно в состояние 1.

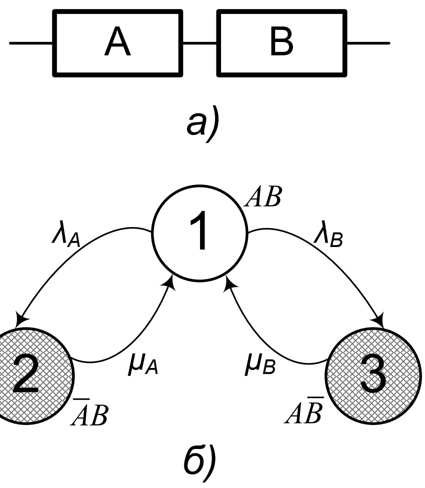


Рисунок 29

Рядом с каждой дугой графа подписываем значения интенсивностей переходов. Законченный граф изображен на рис. 29б.

Запишем систему уравнений, аналогичную системе (62) согласно правилу:

$$\begin{cases} P_1'(t) = -(\lambda_A + \lambda_B)P_1(t) + \mu_A P_2(t) + \mu_B P_3(t); \\ P_2'(t) = \lambda_A P_1(t) - \mu_A P_2(t); \\ P_3'(t) = \lambda_B P_1(t) - \mu_B P_3(t). \end{cases}$$

Переходим к изображению по Лапласу:

$$\begin{cases} sP_1(s) = -(\lambda_A + \lambda_B)P_1(s) + \mu_A P_2(s) + \mu_B P_3(s) + 1; \\ sP_2(s) = \lambda_A P_1(s) - \mu_A P_2(s); \\ sP_3(s) = \lambda_B P_1(s) - \mu_B P_3(s). \end{cases}$$

Примечание. Единица в первом уравнении указывает на то, то система находилась в первом состоянии в начальный момент времени t =0.

Выражаем из полученной системы $P_2(s)$ и $P_3(s)$ через $P_1(s)$:

$$P_2(s) = \frac{\lambda_A}{s + \mu_A} P_1(s); \qquad P_3(s) = \frac{\lambda_B}{s + \mu_B} P_1(s);$$

подставляем их в первое уравнение системы:

$$sP_1(s) = -(\lambda_A + \lambda_B)P_1(s) + \frac{\lambda_A\mu_A}{s+\mu_A}P_1(s) + \frac{\lambda_B\mu_B}{s+\mu_B}P_1(s) + 1;$$

и выражаем $P_1(s)$:

$$P_1(s) = \frac{s^2 + (\mu_A + \mu_B)s + \mu_A\mu_B}{s^3 + (\lambda_A + \lambda_B + \mu_A + \mu_B)s^2 + (\lambda_A\mu_B + \lambda_B\mu_A + \mu_A\mu_B)s}.$$

Подставляя численные значения параметров, и выполняя обратное преобразование Лапласа, получим выражение для вероятности 1-го состояния (функции готовности системы):

$$A(t) = P_1(t) \approx 0.816 + 0.028e^{-0.04107t} + 0.156e^{-0.0119t}.$$

Стационарный коэффициент готовности:

$$K_\Gamma = A(\infty) \approx 0.816.$$

Значительно упростить решение подобных задач можно в частных случаях, а именно, когда интенсивности отказов и восстановлений элементов равны. В таких случаях, последствия отказов разных элементов одинаковы, т.е. нет никакой разницы, какой из элементов отказал первым, а какой вторым.

Пример 11

Дана последовательная система, состоящая из двух элементов *A* и *B*, с интенсивностями отказа $\lambda_A = \lambda_B = \lambda = 0.001$ и с интенсивностями восстановления $\mu_A = \mu_B = \mu = 0.01$ (рис. 29а). Найти функцию готовности и стационарный коэффициент готовности.

Решение:

Отказ любого элемента системы приводит к ее отказу. При этом нет никакой разницы в интенсивности восстановления, какой бы элемент ни отказал. Подобную задачу также можно решать с использованием графа на рис. 29б, однако гораздо удобнее упростить граф (рис. 30).

Состояние 1 эквивалентно первому состоянию из Примера 10 – в нем также работоспособны оба элемента. В состоянии 2 отказал какой-то один элемент – А или В, - но не оба элемента сразу (!). В состоянии 1 два элемента находятся в рабочем состоянии, поэтому их суммарная интенсивность отказов будет равна 2λ. В состоянии 2 только один элемент восстанавливается, поэтому интенсивность перехода из 2-го состояния в 1-ое равна μ.

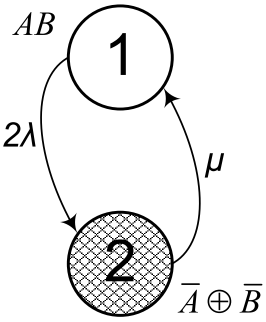


Рисунок 30

Запишем систему уравнений, аналогичную системе (62) согласно правилу:

$$\begin{cases} P_1'(t) = -2\lambda P_1(t) + \mu P_2(t); \\ P_2'(t) = 2\lambda P_1(t) - \mu P_2(t). \end{cases}$$

Переходим к изображению по Лапласу:

$$\begin{cases} sP_1(s) = -2\lambda P_1(s) + \mu P_2(s) + 1; \\ sP_2(s) = 2\lambda P_1(s) - \mu P_2(s). \end{cases}$$

Выражаем из полученной системы $P_2(s)$ $P_1(s)$ через:

$$P_2(s) = \frac{2\lambda}{s+\mu} P_1(s);$$

подставляем их в первое уравнение системы:

$$sP_1(s) = -2\lambda P_1(s) + \frac{2\lambda\mu}{s+\mu} P_1(s) + 1;$$

и выражаем $P_1(s)$:

$$P_1(s) = \frac{s+\mu}{s(s+2\lambda+\mu)}.$$

Подставляя численные значения параметров, и выполняя обратное преобразование Лапласа, получим выражение для вероятности 1-го состояния (функции готовности системы):

$$A(t) = P_1(t) = \frac{\mu}{2\lambda+\mu} + \frac{2\lambda}{2\lambda+\mu} e^{-(2\lambda+\mu)t} =$$

$$= \frac{0.01}{0.012} + \frac{0.002}{0.012} e^{-0.012t} =$$

$$= \frac{5}{6} + \frac{1}{6} e^{-0.012t}.$$

Стационарный коэффициент готовности:

$$K_Г = A(\infty) = \frac{5}{6} \approx 0.833.$$

Пример 12

Дана параллельная система из двух элементов с «горячим» резервированием (рис. 31). Интенсивности отказов и восстановлений элементов одинаковы и равны $\lambda = 0.001$ и $\mu = 0.01$ соответственно. Найти функцию готовности и стационарный коэффициент готовности.

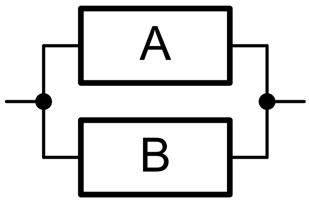


Рисунок 31

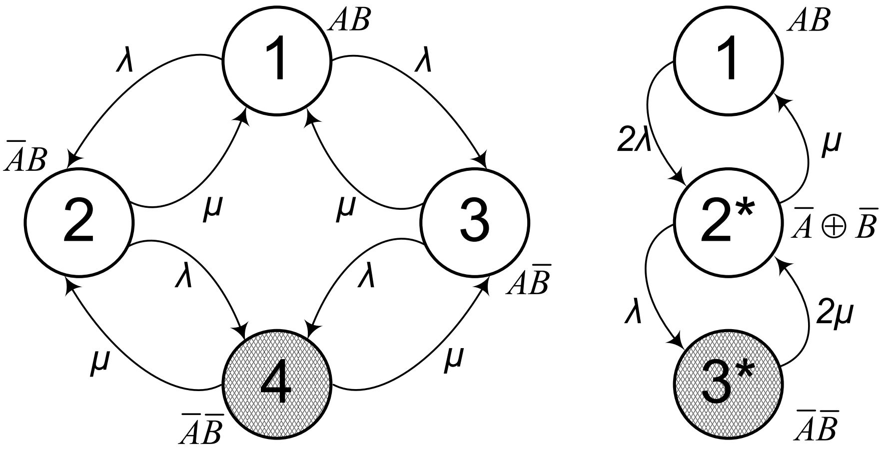
Решение:

Построим сначала неупрощенный граф состояний и переходов. В начальном состоянии 1 оба элемента A и B работоспособны, следовательно возможны два события – отказ A и отказ B. Это приводит нас к двум новым состояниям – 2 и 3 – в каждом из которых не работает (восстанавливается) один элемент. Однако, в каждом из этих двух состояний один элемент по-прежнему работоспособен. Его отказ переводит систему в состояние 4, в котором не работают оба элемента (состояние отказа).

В состоянии 4 каждый из отказавших элементов подвергается восстановлению, что приводит нас опять к состояниям 2 и 3. И, наконец, в каждом из этих состояний может восстановиться один элемент, возвращая систему в исходное состояние 1 (рис. 32а).

Полученный граф может использоваться для определения готовности системы, однако его можно упростить. В самом деле, поскольку при «горячем» резервировании оба элемента находятся в одинаковых условиях (несут полную нагрузку), их деление на основной и резервный элементы чисто условно. Отказ любого из элементов приведет к тому, что этот элемент будет восстанавливаться с интенсивностью восстановления одинаковой для всех элементов; интенсивность отказов оставшегося элемента также не будет зависеть от того, какой элемент продолжит работу.

Эквивалентный упрощенный граф изображен на рис. 32б. В нем состояние 2* эквивалентно объединению состояний 2 и 3 графа на рис. 32а, а состояние 3* эквивалентно состоянию 4.



а) б)

Рисунок 32

Запишем систему уравнений по графу на рис. 32б, аналогичную системе (62) согласно правилу:

$$\begin{cases} P_1'(t) = -2\lambda P_1(t) + \mu P_2(t); \\ P_2'(t) = 2\lambda P_1(t) - (\lambda+\mu) P_2(t) + 2\mu P_3(t); \\ P_3'(t) = \lambda P_2(t) - 2\mu P_3(t). \end{cases}$$

Вероятности состояний 2* и 3* будем обозначать P_2 и P_3 соответственно.

Переходим к изображению по Лапласу:

$$\begin{cases} sP_1(s) = -2\lambda P_1(s) + \mu P_2(s) + 1; \\ sP_2(s) = 2\lambda P_1(s) - (\lambda+\mu) P_2(s) + 2\mu P_3(s); \\ sP_3(s) = \lambda P_2(s) - 2\mu P_3(s). \end{cases}$$

Выражаем из полученной системы $P_3(s)$ и $P_2(s)$ через $P_1(s)$:

$$P_3(s) = \frac{\lambda}{s+2\mu} P_2(s);$$

$$(s+\lambda+\mu) P_2(s) - \frac{2\lambda\mu}{s+2\mu} P_2(s) = 2\lambda P_1(s) \Rightarrow$$

$$P_2(s) = \frac{2\lambda(s+2\mu)}{s^2 + (\lambda+3\mu)s + 2\mu^2} P_1(s).$$

подставляем $P_2(s)$ в первое уравнение системы:

$$sP_1(s) = -2\lambda P_1(s) + \frac{2\lambda\mu(s+2\mu)}{s^2+(\lambda+3\mu)s+2\mu^2}P_1(s)+1;$$

выражаем $P_1(s)$:

$$P_1(s) = \frac{s^2+(\lambda+3\mu)s+2\mu^2}{s(s+\lambda+\mu)(s+2\lambda+2\mu)};$$

и $P_2(s)$:

$$P_2(s) = \frac{2\lambda(s+2\mu)}{s^2+(\lambda+3\mu)s+2\mu^2}P_1(s) =$$

$$= \frac{2\lambda(s+2\mu)}{s^2+(\lambda+3\mu)s+2\mu^2}\cdot\frac{s^2+(\lambda+3\mu)s+2\mu^2}{s(s+\lambda+\mu)(s+2\lambda+2\mu)} =$$

$$= \frac{2\lambda(s+2\mu)}{s(s+\lambda+\mu)(s+2\lambda+2\mu)}.$$

Система работоспособна, если она находится в состояниях 1 и 2*, поэтому сумма вероятностей этих состояний и будет являться функцией готовности. Тогда, изображение по Лапласу функции готовности:

$$A(s) = P_1(s) + P_2(s) =$$

$$= \frac{s^2+(\lambda+3\mu)s+2\mu^2}{s(s+\lambda+\mu)(s+2\lambda+2\mu)} + \frac{2\lambda(s+2\mu)}{s(s+\lambda+\mu)(s+2\lambda+2\mu)} =$$

$$= \frac{s^2+3(\lambda+\mu)s+2\mu(2\lambda+\mu)}{s(s+\lambda+\mu)(s+2\lambda+2\mu)}.$$

Подставляя численные значения параметров и, переходя от изображения к оригиналу, получим

$$A(t) \approx 0.992 + 0.016e^{-0.011t} - 0.008e^{-0.022t}.$$

Стационарный коэффициент готовности:

$$K_Г = A(\infty) \approx 0.992.$$

Если построить график функции готовности к Примеру 12 (рис. 33), можно увидеть, что эта функция асимптотически очень быстро стремится к своему стационарному (установившемуся) значению. Зачастую на практике определяют лишь стационарный коэффициент готовности. Это позволяет значительно сократить объем вычислений.

Поскольку стационарный режим характеризуется тем, что производные равны нулю (функции больше не меняются), в системе уравнений вида (62) необходимо приравнять к нулю левые части уравнений и дополнить систему уравнением

$$\sum_{i=1}^{N} P_i = 1, \qquad (65)$$

где N – количество состояний, P_i - стационарная (установившаяся) вероятность i-го состояния.

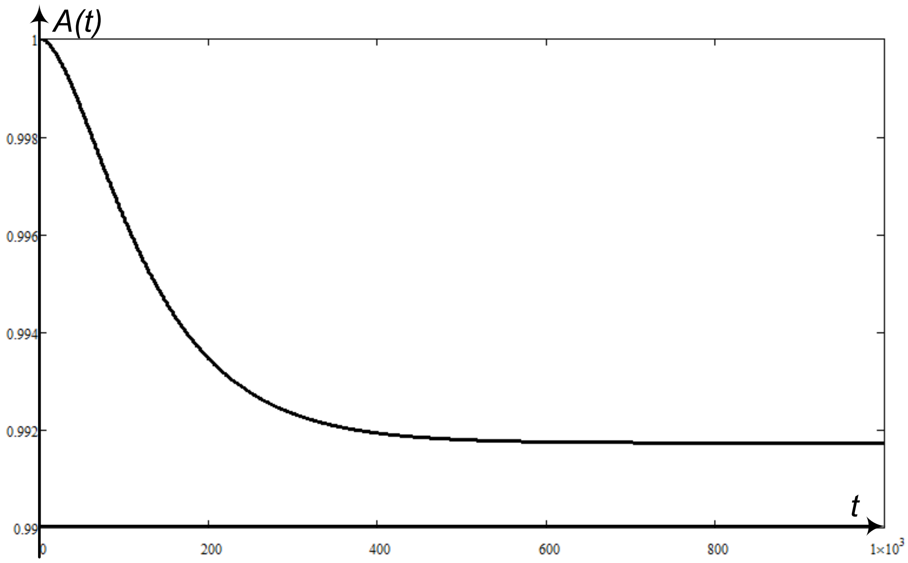


Рисунок 33

Пример 13

Для системы из Примера 12 определить стационарный коэффициент готовности.

Решение:

Запишем систему уравнений по графу на рис. 32б, аналогичную системе (62) согласно правилу:

$$\begin{cases} P_1'(t) = -2\lambda P_1(t) + \mu P_2(t); \\ P_2'(t) = 2\lambda P_1(t) - (\lambda + \mu) P_2(t) + 2\mu P_3(t); \\ P_3'(t) = \lambda P_2(t) - 2\mu P_3(t). \end{cases}$$

Приравняем производные к нулю и дополним систему уравнением вида (65):

$$\begin{cases} 0 = -2\lambda P_1 + \mu P_2; \\ 0 = 2\lambda P_1 - (\lambda + \mu) P_2 + 2\mu P_3; \\ 0 = \lambda P_2 - 2\mu P_3; \\ 1 = P_1 + P_2 + P_3. \end{cases}$$

Используя первое и третье уравнения, получим

$$P_1 = \frac{\mu}{2\lambda} P_2; \qquad P_3 = \frac{\lambda}{2\mu} P_2.$$

Подставим эти выражения в последнее уравнение:

$$P_1 + P_2 + P_3 = \frac{\mu}{2\lambda} P_2 + P_2 + \frac{\lambda}{2\mu} P_2 =$$

$$= \left(\frac{\mu}{2\lambda} + 1 + \frac{\lambda}{2\mu} \right) P_2 = 1.$$

Отсюда

$$\begin{cases} P_2 = \dfrac{2\lambda\mu}{(\lambda + \mu)^2}; \\ P_1 = \dfrac{\mu^2}{(\lambda + \mu)^2}; \\ P_3 = \dfrac{\lambda^2}{(\lambda + \mu)^2}. \end{cases}$$

Стационарный коэффициент готовности:

$$K_Г = P_1 + P_2 = \frac{\mu^2 + 2\lambda\mu}{(\lambda + \mu)^2} \approx 0.992.$$

Можно еще больше сократить объем вычислений при расчете стационарного коэффициента готовности, если граф состояний и переходов системы представляет собой т.н. «цепной» граф (рис. 34):

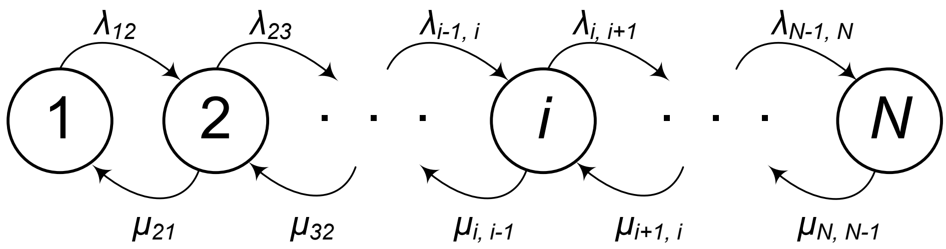


Рисунок 34. Цепной граф

В этом случае

$$P_i = \frac{\lambda_{i-1,i}}{\mu_{i,i-1}} P_{i-1}, \quad i = 2..N, \tag{66}$$

т.е. стационарная вероятность каждого состояния выражается через вероятность предыдущего состояния. Также,

$$P_i = \frac{\prod_{j=1}^{i-1} \lambda_{j,j+1}}{\prod_{j=1}^{i-1} \mu_{j+1,j}} P_1, \quad i = 2..N, \tag{67}$$

т.е. вероятность каждого состояния выражается через вероятность первого состояния.

Пример 14

Для системы из Примера 12 определить стационарный коэффициент готовности.

Решение:

Поскольку граф системы представляет собой цепной граф (рис. 32б), воспользуемся формулой (67) для определения стационарных вероятностей состояний:

$$P_2 = \frac{\lambda_{12}}{\mu_{21}} P_1 = \frac{2\lambda}{\mu} P_1;$$

$$P_3 = \frac{\lambda_{12}\lambda_{23}}{\mu_{21}\mu_{32}} P_1 = \frac{2\lambda \cdot \lambda}{\mu \cdot 2\mu} P_1 = \frac{\lambda^2}{\mu^2} P_1.$$

Т.к. сумма вероятностей всех состояний должна быть равна 1, получаем:

$$P_1 + P_2 + P_3 = P_1 + \frac{2\lambda}{\mu} P_1 + \frac{\lambda^2}{\mu^2} P_1 =$$

$$= \left(1 + \frac{2\lambda}{\mu} + \frac{\lambda^2}{\mu^2} \right) P_1 = 1.$$

Отсюда

$$P_1 = \frac{\mu^2}{\left(\lambda + \mu\right)^2}; \qquad P_2 = \frac{2\lambda\mu}{\left(\lambda + \mu\right)^2};$$

$$P_3 = \frac{\lambda^2}{\left(\lambda + \mu\right)^2}.$$

Стационарный коэффициент готовности:

$$K_{\Gamma} = P_1 + P_2 = \frac{\mu^2 + 2\lambda\mu}{\left(\lambda + \mu\right)^2} \approx 0.992.$$

РАСЧЕТ СРЕДНЕЙ НАРАБОТКИ ДО ОТКАЗА ВОССТАНАВЛИВАЕМОЙ СИСТЕМЫ

Еще одной областью применения графов является определение среднего времени до отказа восстанавливаемой системы в целом. Аналогично расчету коэффициента готовности, средняя наработка до отказа должна быть равна сумме средних времен пребывания системы во всех ее работоспособных состояниях.

Из формулы (8) известно, что среднее время до отказа невосстанавливаемой системы равно интегралу функции ВБР от нуля до бесконечности:

$$T_{cp} = \int_0^\infty P(t)\,dt.$$

С другой стороны, преобразование Лапласа для функции *P(t)* определяется по формуле

$$P(s) = \int_0^\infty P(t) e^{-st}\,dt.$$

Отсюда

$$T_{cp} = P(s)\big|_{s=0}, \tag{68}$$

где *P(s)* – изображение функции ВБР.

Теперь, если заменить функцию ВБР на функцию вероятности пребывания системы в i-том состоянии, можно получить среднее время пребывания системы в этом состоянии:

$$T_i = P_i(s)\big|_{s=0}. \tag{69}$$

Т. о. можно рассчитать среднюю наработку до отказа восстанавливаемой системы, решая систему уравнений вида (63), предположив, что s =0. При этом в системе уравнений необходимо заменить все $P_i(s)$ на T_i и исключить из системы все уравнения, описывающие неработоспособные состояния и все слагаемые, содержащие вероятности (или, после замены $P_i(s)$ на T_i, наработки) неработоспособных состояний.

Примечание. Исключенные из системы уравнения не бесполезны. Используя аналогичные преобразования и, определив средние времена пребывания системы в работоспособных состояниях, можно также найти средние времена пребывания системы в нерабочих состояниях, а, следовательно, и среднее время простоя системы.

Пример 15

Найти среднюю наработку до отказа и среднее время простоя системы из Примера 12.

Решение:

Для графа состояний и переходов системы, изображенного на рис. 32б, изображение по Лапласу системы дифференциальных уравнений вероятностей состояний будет

$$\begin{cases} sP_1(s) = -2\lambda P_1(s) + \mu P_2(s) + 1; \\ sP_2(s) = 2\lambda P_1(s) - (\lambda + \mu) P_2(s) + 2\mu P_3(s); \\ sP_3(s) = \lambda P_2(s) - 2\mu P_3(s). \end{cases}$$

При этом в состоянии 3* система неработоспособна. Исключим из системы третье уравнение и последнее слагаемое из второго уравнения. Положим s =0 и заменим все $P_i(s)$ на T_i:

$$\begin{cases} 0 = -2\lambda T_1 + \mu T_2 + 1; \\ 0 = 2\lambda T_1 - (\lambda + \mu) T_2. \end{cases}$$

Выразим из второго уравнения T_2 и подставим результат в первое уравнение:

$$\begin{cases} 0 = -2\lambda T_1 + \dfrac{2\lambda\mu}{\lambda + \mu} T_1 + 1; \\ T_2 = \dfrac{2\lambda}{\lambda + \mu} T_1. \end{cases}$$

Решая систему, получим

$$\begin{cases} T_1 = \dfrac{\lambda + \mu}{2\lambda^2}; \\ T_2 = \dfrac{1}{\lambda}. \end{cases}$$

Отсюда

$$T_{cp} = T_1 + T_2 = \frac{\lambda + \mu}{2\lambda^2} + \frac{1}{\lambda} =$$

$$= \frac{3\lambda + \mu}{2\lambda^2}.$$

Т. к. $\lambda = 0.001$ и $\mu = 0.01$,

$$T_{cp} = \frac{3\lambda + \mu}{2\lambda^2} = \frac{0.013}{2 \cdot 10^{-6}} = 6500 \text{ ч}.$$

Определим теперь среднее время простоя системы. Приравняв в третьем уравнении системы $s = 0$ и заменив $P_i(s)$ на T_i, получим:

$$0 = \lambda T_2 - 2\mu T_3.$$

Отсюда

$$T_3 = \frac{\lambda}{2\mu} T_2 = \frac{1}{2\mu} = \frac{1}{0.02} = 50 \text{ ч.}$$

ДРУГИЕ ПРИМЕНЕНИЯ ГРАФОВ СОСТОЯНИЙ И ПЕРЕХОДОВ

Использование графов не ограничивается расчетом надежности восстанавливаемых систем. Их также можно использовать и в задачах расчета надежности систем без восстановления в случаях, когда используются сложные методы резервирования и метод упрощения последовательно-параллельных блок-схем неприменим – например, в случаях «теплого» и «холодного» резервирования (включая случаи с неравнонадежными элементами).

В разделе, посвященном «холодному» и «теплому» резервированию были представлены формулы для ВБР. Сейчас, используя графы состояний и переходов, мы можем *вывести* эти формулы.

Впрочем, ограничимся выводом лишь формулы (46) для случая системы из двух равнонадежных элементов с «теплым» резервированием.

Итак, рассмотрим систему, в которой основной элемент резервируется одним равнонадежным элементом в «теплом» резерве. Блок-схема надежности системы представлена на рис. 35.

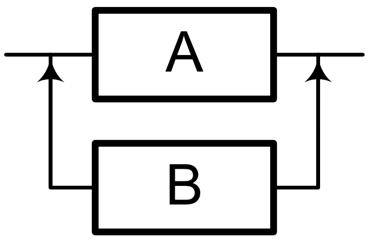


Рисунок 35

Обозначим интенсивность отказов элементов в рабочем режиме – λ, в режиме «теплого» резерва – $\lambda_р$. Составим граф состояний и переходов.

В исходном состоянии 1 элемент А находится в рабочем режиме, элемент В – в «теплом» резерве. Т.о. из этого состояния возможны переходы: а) в состояние 2 при отказе основного элемента; б) в состояние 3 при отказе резервного элемента. Состояние 2 характеризуется тем, что вместе с отказом элемента А, элемент В переходит из резерва в рабочее состояние. В состоянии 3 основной элемент продолжает работать, а резервный – отказал.

Т.о. в состояниях 2 и 3 имеется по одному работоспособному элементу с интенсивностью отказов λ, отказ которого переводит систему в состояние 4, в котором неработоспособны оба элемента, а значит и все система в целом. Поскольку в системе отсутствует восстановление, в графе не будет дуг, ведущих из состояний с большим числом в состояния с меньшим числом неработающих элементов. Граф закончен (рис. 36а).

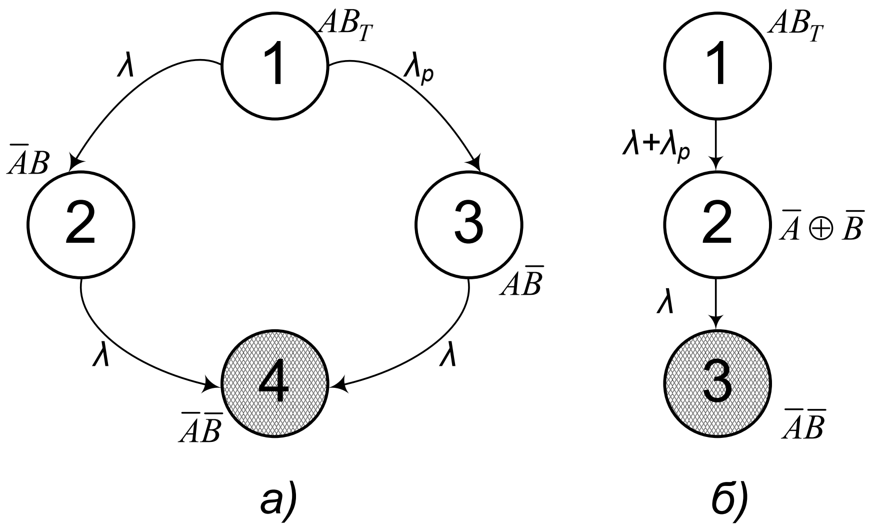


Рисунок 36

Поскольку элементы системы равнонадежные, граф можно упростить (рис. 36б).

Составим систему дифференциальных уравнений для упрощенного графа:

$$\begin{cases} P_1'(t) = -\left(\lambda + \lambda_p\right)P_1(t); \\ P_2'(t) = \left(\lambda + \lambda_p\right)P_1(t) - \lambda P_2(t); \\ P_3'(t) = \lambda P_2(t). \end{cases}$$

Запишем изображение по Лапласу полученной системы уравнений:

$$\begin{cases} sP_1(s) = -\left(\lambda + \lambda_p\right)P_1(s) + 1; \\ sP_2(s) = \left(\lambda + \lambda_p\right)P_1(s) - \lambda P_2(s); \\ sP_3(s) = \lambda P_2(s). \end{cases}$$

Напомним, что единица в первом уравнении указывает на то, что система находилась в первом состоянии в момент времени t =0.

Решая полученную систему, найдем $P_i(s)$:

$$
\begin{cases}
P_1(s) = \dfrac{1}{s+\lambda+\lambda_p}; \\
P_2(s) = \dfrac{\lambda+\lambda_p}{s+\lambda} P_1(s) = \dfrac{\lambda+\lambda_p}{(s+\lambda)(s+\lambda+\lambda_p)}; \\
P_3(s) = \dfrac{\lambda}{s} P_2(s) = \dfrac{(\lambda+\lambda_p)\lambda}{s(s+\lambda)(s+\lambda+\lambda_p)}.
\end{cases}
$$

Найдем обратное преобразование Лапласа (см. Приложение 3) вероятностей 1-го и 2-го состояний, т.к. только они потребуются нам для определения ВБР системы:

$$
P_1(t) = e^{-(\lambda+\lambda_p)t};
$$

$$
P_2(t) = \frac{\lambda+\lambda_p}{\lambda_p}\left(e^{-\lambda t} - e^{-(\lambda+\lambda_p)t}\right).
$$

ВБР системы равна сумме вероятностей работоспособных состояний системы:

$$
P(t) = P_1(t) + P_2(t) = e^{-(\lambda+\lambda_p)t} + \frac{\lambda+\lambda_p}{\lambda_p}\left(e^{-\lambda t} - e^{-(\lambda+\lambda_p)t}\right) =
$$

$$
= e^{-\lambda t}\left[e^{-\lambda_p t} + \left(1+\frac{\lambda}{\lambda_p}\right)\left(1-e^{-\lambda_p t}\right)\right] =
$$

$$
= e^{-\lambda t}\left[1+\frac{\lambda}{\lambda_p}\left(1-e^{-\lambda_p t}\right)\right].
$$

Мы получили выражение для ВБР, совпадающее с формулой (46).

Пример 16

Дана невосстанавливаемая система, состоящая из трех равнонадежных элементов с интенсивностями отказов λ в рабочем режиме (рис. 37).

В начальный момент времени в системе работают элементы А и В («горячее» резервирование). После отказа одного из этих элементов элемент С переходит из «холодного» резерва в рабочее состояние. Т.о. в системе снова работают два элемента. После следующего отказа любого элемента, интенсивность отказов элемента, оставшегося работоспособным, увеличивается в два раза. Найти выражение для функции ВБР.

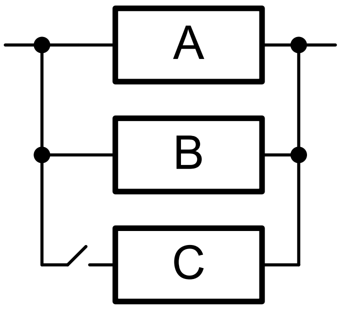


Рисунок 37

Решение:

Упрощенный граф состояний и переходов представлен на рис. 38. Попробуйте получить его самостоятельно.

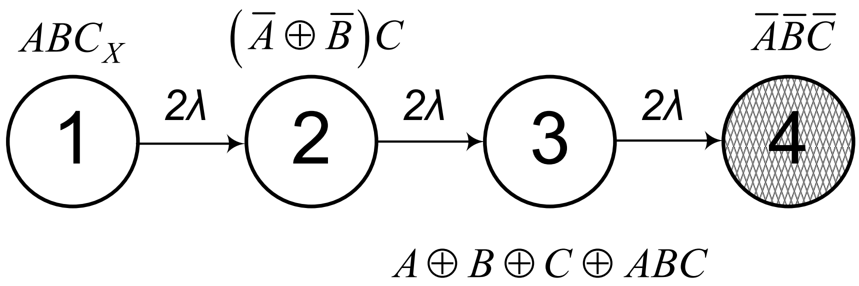


Рисунок 38

Запишем систему дифференциальных уравнений:

$$\begin{cases} P_1'(t) = -2\lambda P_1(t); \\ P_2'(t) = 2\lambda P_1(t) - 2\lambda P_2(t); \\ P_3'(t) = 2\lambda P_2(t) - 2\lambda P_3(t); \\ P_4'(t) = 2\lambda P_3(t). \end{cases}$$

Найдем изображение по Лапласу:

$$\begin{cases} sP_1(s) = -2\lambda P_1(s) + 1; \\ sP_2(s) = 2\lambda P_1(s) - 2\lambda P_2(s); \\ sP_3(s) = 2\lambda P_2(s) - 2\lambda P_3(s); \\ sP_4(s) = 2\lambda P_3(s). \end{cases}$$

Решая полученную систему, найдем изображения вероятностей состояний:

$$\begin{cases} P_1(s) = \dfrac{1}{s+2\lambda}; \\ P_2(s) = \dfrac{2\lambda}{(s+2\lambda)^2}; \\ P_3(s) = \dfrac{4\lambda^2}{(s+2\lambda)^3}; \\ P_4(s) = \dfrac{8\lambda^3}{s(s+2\lambda)^3}. \end{cases}$$

Найдем оригиналы состояний 1-3 (см. Приложение 3), т.к. только они потребуются нам для определения ВБР системы:

$$\begin{cases} P_1(t) = e^{-2\lambda t}; \\ P_2(t) = 2\lambda t e^{-2\lambda t}; \\ P_3(t) = 2\lambda^2 t^2 e^{-2\lambda t}. \end{cases}$$

ВБР системы равна сумме вероятностей состояний 1-3:

$$\begin{aligned} P(t) &= P_1(t) + P_2(t) + P_3(t) = \\ &= e^{-2\lambda t} + 2\lambda t e^{-2\lambda t} + 2\lambda^2 t^2 e^{-2\lambda t} = \\ &= e^{-2\lambda t}\left(1 + 2\lambda t + 2\lambda^2 t^2\right). \end{aligned}$$

СПИСОК РЕКОМЕНДОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Острейковский В.А. Теория надежности : учебник для вузов / В. А. Острейковский. — 2-е изд., испр.. — Москва: Высшая школа, 2008. — 463 с.: ил.. — Библиогр.: с. 457-458.. — ISBN 978-5-06-005954-0.
2. Каштанов В.А. Теория надежности сложных систем : учебное пособие для вузов / В. А. Каштанов, А. И. Медведев. — 2-е изд., перераб.. — Москва: Физматлит, 2010. — 608 с.. — Библиогр.: с. 600-605. — Предметный указатель: с. 606-608.. — ISBN 978-5-9221-1132-4.
3. Обеспечение надежности сложных технических систем : учебник для вузов / А. Н. Дорохов [и др.]. — СПб.: Лань, 2011. — 349 с.: ил.. —Учебники для вузов. Специальная литература. — Библиогр.: с. 341-342. — Перечень условных обозначений и сокращений: с. 5-6.. — ISBN 978-5-8114-1108-5.
4. Шкляр В.Н. Надежность систем управления [Электронный ресурс] : учебное пособие / В. Н. Шкляр; Национальный исследовательский Томский политехнический университет (ТПУ). — 1 компьютерный файл (pdf; 1.2 MB). — Томск: Изд-во ТПУ, 2011. — Заглавие с титульного экрана. — Электронная версия печатной публикации. — Доступ из корпоративной сети ТПУ [Схема доступа: http://www.lib.tpu.ru/fulltext2/m/2011/m416.pdf]. — Системные требования: Adobe Reader.
5. Зорин В.А. Основы работоспособности технических систем : учебник / В. А. Зорин. —Москва: Академия, 2009. — 205 с.: ил.. — Высшее профессиональное образование. Транспорт. — Библиогр.: с. 202.. — ISBN 978-5-7695-6003-3.
6. Казаков С.П. Теория вероятностей, случайные процессы и математическая статистика [Электронный ресурс] : учебное пособие / С. П. Казаков; Национальный исследовательский Томский политехнический университет (ТПУ), Новокузнецкий филиал (НФ). — 1 компьютерный файл (pdf; 681 KB). — Томск: Изд-во ТПУ, 2010. — Заглавие с титульного экрана. — Доступ из корпоративной сети ТПУ [Схема доступа: http://www.lib.tpu.ru/fulltext2/m/2011/m310.pdf]. — Системные требования: Adobe Reader.
7. Шишмарев В.Ю. Надёжность технических систем : учебник для вузов / В. Ю. Шишмарев. — Москва: Академия, 2010. — 304 с.: ил.. — Высшее профессиональное образование. Автоматизация и управление. — Библиогр.: с. 301.. — ISBN 978-5-7695-6251-8.

ПРИЛОЖЕНИЕ 1

Соотношения между основными показателями надежности

	$\boldsymbol{P(t)}$	$\boldsymbol{Q(t)}$	$\boldsymbol{f(t)}$	$\boldsymbol{\lambda(t)}$	$\boldsymbol{T_{cp}}$
$\boldsymbol{P(t)} =$		$1 - Q(t)$	$\int_t^{\infty} f(\tau)d\tau$	$e^{-\int_0^t \lambda(\tau)d\tau}$	
$\boldsymbol{Q(t)} =$	$1 - P(t)$		$\int_0^t f(\tau)d\tau$	$1 - e^{-\int_0^t \lambda(\tau)d\tau}$	
$\boldsymbol{f(t)} =$	$-P'(t)$	$Q'(t)$		$-\left[e^{-\int_0^t \lambda(\tau)d\tau}\right]'$	
$\boldsymbol{\lambda(t)} =$	$\frac{-P'(t)}{P(t)}$	$\frac{Q'(t)}{1 - Q(t)}$	$\frac{f(t)}{\int_t^{\infty} f(\tau)d\tau}$		
$\boldsymbol{T_{cp}} =$	$\int_0^{\infty} P(t)dt$	$\int_0^{\infty} \left(1 - Q(t)\right)dt$	$\int_0^{\infty} tf(t)dt$	$\int_0^{\infty} e^{-\int_0^t \lambda(\tau)d\tau}dx$	

ПРИЛОЖЕНИЕ 2

Таблица значений гамма-функции

	1	**1.1**	**1.2**	**1.3**	**1.4**	**1.5**	**1.6**	**1.7**	**1.8**	**1.9**
.00	1	0,9514	0,9182	0,8975	0,8873	0,8862	0,8935	0,9086	0,9314	0,9618
.01	0,9943	0,9474	0,9156	0,896	0,8868	0,8866	0,8947	0,9106	0,9341	0,9652
.02	0,9888	0,9436	0,9131	0,8946	0,8864	0,887	0,8959	0,9126	0,9368	0,9688
.03	0,9835	0,9399	0,9108	0,8934	0,886	0,8876	0,8972	0,9147	0,9397	0,9724
.04	0,9784	0,9364	0,9085	0,8922	0,8858	0,8882	0,8986	0,9168	0,9426	0,9761
.05	0,9735	0,933	0,9064	0,8912	0,8857	0,8889	0,9001	0,9191	0,9456	0,9799
.06	0,9687	0,9298	0,9044	0,8902	0,8856	0,8896	0,9017	0,9214	0,9487	0,9837
.07	0,9642	0,9267	0,9025	0,8893	0,8856	0,8905	0,9033	0,9238	0,9518	0,9877
.08	0,9597	0,9237	0,9007	0,8885	0,8857	0,8914	0,905	0,9262	0,9551	0,9917
.09	0,9555	0,9209	0,899	0,8879	0,8859	0,8924	0,9068	0,9288	0,9584	0,9958
	2	**2.1**	**2.2**	**2.3**	**2.4**	**2.5**	**2.6**	**2.7**	**2.8**	**2.9**
.00	1	1,0465	1,1018	1,1667	1,2422	1,3293	1,4296	1,5447	1,6765	1,8274
.01	1,0043	1,0516	1,1078	1,1738	1,2503	1,3388	1,4404	1,5571	1,6907	1,8436
.02	1,0086	1,0568	1,114	1,1809	1,2586	1,3483	1,4514	1,5696	1,7051	1,86
.03	1,0131	1,0621	1,1202	1,1882	1,267	1,358	1,4625	1,5824	1,7196	1,8767
.04	1,0176	1,0675	1,1266	1,1956	1,2756	1,3678	1,4738	1,5953	1,7344	1,8936
.05	1,0222	1,073	1,133	1,2031	1,2842	1,3777	1,4852	1,6084	1,7494	1,9108
.06	1,0269	1,0786	1,1395	1,2107	1,293	1,3878	1,4968	1,6216	1,7646	1,9281
.07	1,0316	1,0842	1,1462	1,2184	1,3019	1,3981	1,5085	1,6351	1,7799	1,9457
.08	1,0365	1,09	1,1529	1,2262	1,3109	1,4084	1,5204	1,6487	1,7955	1,9636
.09	1,0415	1,0959	1,1598	1,2341	1,3201	1,419	1,5325	1,6625	1,8113	1,9817
	3	**3.1**	**3.2**	**3.3**	**3.4**	**3.5**	**3.6**	**3.7**	**3.8**	**3.9**
.00	2	2,1976	2,424	2,6834	2,9812	3,3234	3,717	4,1707	4,6942	5,2993
.01	2,0186	2,2189	2,4483	2,7114	3,0133	3,3603	3,7595	4,2197	4,7508	5,3648
.02	2,0374	2,2405	2,4731	2,7397	3,0459	3,3977	3,8027	4,2694	4,8083	5,4313
.03	2,0565	2,2623	2,4981	2,7685	3,0789	3,4357	3,8464	4,3199	4,8666	5,4988
.04	2,0759	2,2845	2,5235	2,7976	3,1124	3,4742	3,8908	4,3711	4,9257	5,5673
.05	2,0955	2,3069	2,5493	2,8272	3,1463	3,5133	3,9358	4,423	4,9857	5,6368
.06	2,1153	2,3297	2,5754	2,8571	3,1807	3,5529	3,9814	4,4757	5,0466	5,7073
.07	2,1355	2,3528	2,6018	2,8875	3,2156	3,593	4,0277	4,5291	5,1084	5,7788
.08	2,1559	2,3762	2,6287	2,9183	3,251	3,6338	4,0747	4,5833	5,1711	5,8515
.09	2,1766	2,3999	2,6559	2,9495	3,2869	3,6751	4,1223	4,6384	5,2348	5,9252
	4	**4.1**	**4.2**	**4.3**	**4.4**	**4.5**	**4.6**	**4.7**	**4.8**	**4.9**
.00	6	6,8126	7,7567	8,8553	10,136	11,632	13,381	15,431	17,838	20,667
.01	6,0759	6,9008	7,8592	8,9747	10,275	11,795	13,572	15,655	18,101	20,977
.02	6,153	6,9902	7,9632	9,096	10,417	11,96	13,766	15,882	18,368	21,291
.03	6,2312	7,0811	8,0689	9,2191	10,561	12,128	13,962	16,113	18,639	21,61
.04	6,3106	7,1733	8,1762	9,3441	10,707	12,299	14,162	16,348	18,915	21,935
.05	6,3912	7,2669	8,2851	9,471	10,855	12,472	14,366	16,586	19,195	22,265
.06	6,473	7,3619	8,3957	9,6	11,005	12,648	14,572	16,829	19,48	22,601
.07	6,556	7,4584	8,508	9,7309	11,158	12,827	14,782	17,075	19,77	22,942
.08	6,6403	7,5563	8,622	9,8639	11,314	13,009	14,995	17,325	20,064	23,289
.09	6,7258	7,6557	8,7378	9,9989	11,471	13,194	15,211	17,579	20,363	23,642

ПРИЛОЖЕНИЕ 3

Обратное преобразование Лапласа

	Изображение	Оригинал
1	$\frac{1}{s}$	1
2	$\frac{1}{s^n},\ n=1,2,...$	$\frac{1}{(n-1)!}t^{n-1}$
3	$\frac{1}{s+a}$	e^{-at}
4	$\frac{1}{(s+a)^n},\ n=1,2,...$	$\frac{1}{(n-1)!}t^{n-1}e^{-at}$
5	$\frac{s}{(s+a)^2}$	$(1-at)e^{-at}$
6	$\frac{1}{s(s+a)}$	$\frac{1}{a}\left(1-e^{-at}\right)$
7	$\frac{1}{s(s+a)^n},\ n=1,2,...$	$a^{-n}\left[1-e^{-at}e_n(at)\right],$ *где* $e_n(x)=1+\frac{x}{1!}+...+\frac{x^n}{n!}$
8	$\frac{1}{(s+a)(s+b)}$	$\frac{1}{a-b}\left(e^{-bt}-e^{-at}\right)$
9	$\frac{s}{(s+a)(s+b)}$	$\frac{1}{a-b}\left(ae^{-st}-be^{-bt}\right)$
10	$\frac{Q(s)}{P(s)},$ *где* $P(s)=(s-a_1)...(s-a_n);$ $Q(s)-$*полином степени* $\le n-1;$ $a_i \ne a_j$	$\sum_{k=1}^{n}\frac{Q(a_k)}{P'(a_k)}e^{a_k t}$