方向导数（Directional Derivative）

方向导数描述了函数在给定方向上的变化率。对于标量场 $f(x, y, z)$，在单位向量 $\mathrm{u} = (u_1, u_2, u_3)$ 方向上的方向导数定义为：

$$D_{\mathrm{u}} f = \nabla f \cdot \mathrm{u} = u_1 \frac{\partial f}{\partial x} + u_2 \frac{\partial f}{\partial y} + u_3 \frac{\partial f}{\partial z},$$

其中 ∇f 是 f 的梯度。

梯度（Gradient）

梯度是标量场 $f(x, y, z)$ 的一个向量场，表示函数在各方向上变化率的最大值，其定义为：

$$\nabla f = \left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z} \right).$$

散度（Divergence）

散度是向量场 $\mathrm{F} = (F_1, F_2, F_3)$ 的一个标量场，表示向量场在某点的“发散程度”，其定义为：

$$\nabla \cdot \mathrm{F} = \frac{\partial F_1}{\partial x} + \frac{\partial F_2}{\partial y} + \frac{\partial F_3}{\partial z}.$$

旋度（Curl）

旋度是向量场 $\mathrm{F} = (F_1, F_2, F_3)$ 的一个向量场，表示向量场的“旋转程度”，其定义为：

$$\nabla \times \mathrm{F} = \begin{vmatrix} \mathrm{i} & \mathrm{j} & \mathrm{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ F_1 & F_2 & F_3 \end{vmatrix},$$

其中 $\mathrm{i}, \mathrm{j}, \mathrm{k}$ 是标准基向量，结果为：

$$\nabla \times \mathrm{F} = \left(\frac{\partial F_3}{\partial y} - \frac{\partial F_2}{\partial z}, \frac{\partial F_1}{\partial z} - \frac{\partial F_3}{\partial x}, \frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y} \right).$$