二阶常系数（非）齐次线性微分方程

$$y'' + py' + qy = f(x)$$

牢记：**非齐通 = 非齐特 + 齐通**

$f(x) = P_n(x)e^{kx}$

k不是特征根

假设

$$y^* = (a_0 + a_1x + a_2x^2 + ... + a_nx^n)e^{kx}$$

得到$(y^*)'$、$(y^*)''$后代入原方程，根据等号两边对应系数相等即可求出系数

k是单特征根

$$y^* = x(a_0 + a_1x + a_2x^2 + ... + a_nx^n)e^{kx}$$

k是二重根特征根

$$y^* = x^2(a_0 + a_1x + a_2x^2 + ... + a_nx^n)e^{kx}$$

如何设y^*的剩余部分

k是已知的，要不要补充x取决于k

$P_n(x)$为a_0则设为ae^{kx}

$P_n(x)$为$a_0 + a_1x$则设为$(a + bx)e^{kx}$

$P_n(x)$为$a_0 + a_1x + a_2x^2$则设为$(a + bx + cx^2)e^{kx}$

以此类推……

$f(x) = e^{\alpha x}[P_l(x)cos(\beta x) + P_s(x)sin(\beta x)]$

$\alpha + i\beta$不是特征根

令

$$y^* = e^{\alpha x}[H_n(x)cos(\beta x) + Q_n(x)sin(\beta x)]$$

$H_n(x)$、$Q_n(x)$分别是待定的同型n次多项式，其中$n = max\{l, x\}$；$P_l(x)$、$P_s(x)$分别是已知的关于x的多项式。

$\alpha + i\beta$是特征根

令

$$y^* = xe^{\alpha x}[H_n(x)cos(\beta x) + Q_n(x)sin(\beta x)]$$

仅多了一个x，因为是特征根。

需注意

$H_n(x)$、$Q_n(x)$的假设与α也会有关系，

附：二阶常系数齐次线性微分方程的求解方法——$f(x) = 0$

即$ay'' + by' + cy = 0$类型：

特征方程为：$a\lambda^2 + b\lambda + c = 0$

解得λ_1、λ_2，若

$\lambda_1 \neq \lambda_2$

通解形式：$Y = C_1e^{\lambda_1 x} + C_2e^{\lambda_2 x}$

$\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda$

通解形式：$Y = (C_1 + C_2x)e^{\lambda x}$

特征方程有一对共轭复根:$\lambda_1 = \alpha + i\beta$、$\lambda_2 = \alpha - i\beta$

通解形式：$Y = e^{\alpha x}[C_1cos\beta x + C_2sin\beta x]$