8 Martingale und Stoppzeiten

Definition *Sei $I \neq \emptyset$ eine beliebige Indexmenge und $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ ein Wahrscheinlichkeitsraum.*

*a) Eine Familie von Zufallsvariablen $(X_t)_{t\in I}$ auf $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ heißt **stochastischer Prozess** ($I \subset \mathbb{R}$)*

*b) Eine Familie von σ-Algebren $(\mathfrak{F}_t)_{t\in I}$, mit $\mathfrak{F}_t \subset \mathcal{A}$ und $\mathfrak{F}_s \subset \mathfrak{F}_t$, für $s \leq t$ heißt **Filtration**. Ein stochastischer Prozess $(X_t)_{t\in I}$ heißt $(\mathfrak{F}_t)_{t\in I}$**-adaptiert**, falls X_t $\mathfrak{F}_t$-messbar $\forall t \in I$.*

Bemerkung Oft wird $\mathfrak{F}_t := \sigma(\{X_s, s \leq t\})$ gewählt. Dann ist $(\mathfrak{F}_t)_{t\in I}$ eine Filtration und X_t ist $\mathfrak{F}_t$-messbar.

Definition *Gegeben sei ein Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathcal{A}, P), I \subset \mathbb{R}$, eine Filtration $(\mathfrak{F}_t)_{t\in I}$ und ein dazu adaptierter stochastischer Prozess $(X_t)_{t\in I}$. Ist $E|X_t| < \infty\ \forall t \in I$, so heißt $(X_t)_{t\in I}$ ein $(\mathfrak{F}_t)_{t\in I}$**-Martingal**, falls $E[X_t|\mathfrak{F}_s] = X_s\ \forall s,t \in I, s \leq t$.*
*Ist $X_s \leq E[X_t|\mathfrak{F}_s]$ bzw. $X_s \geq E[X_t|\mathfrak{F}_s]$, so nennt man $(X_t)_{t\in I}$ ein $(\mathfrak{F}_t)_{t\in I}$**-Submartingal** bzw. $(\mathfrak{F}_t)_{t\in I}$**-Supermartigal**.*

Bemerkung

a) Beim Martingal gilt: $EX_s = E\left[E\left[X_t\,|\mathfrak{F}_s\right]\right] = EX_t\ \forall t \in I$, d.h. der Erwartungswert ist konstant (wachsend beim Submartingal, fallend beim Supermartingal).

b) Ist $I = \mathbb{N}$, so genügt z.z.:

$$E[X_{t+1}|\mathfrak{F}_t] = X_t\ \forall t \in \mathbb{N}$$

c) Ist $(F_t)_{t\in I}$ die natürliche Filtration, so sagt man oft nur $(X_t)_{t\in I}$ ist ein Martingal.

Beispiel 8.1 Sei $I = \mathbb{N}, (X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge von unabhängigen und identisch verteilten Zufallsvariablen mit Erwartungswert μ. Sei $S_n := \sum_{k=1}^n X_k\ \forall n \in \mathbb{N}$ und $\mathfrak{F}_n := \sigma(S_1, \ldots, S_n)$. Dann gilt $\forall n \in \mathbb{N} : E[S_{n+1}|\mathfrak{F}_n] = E[S_n|\mathfrak{F}_n] + E[X_{n+1}|\mathfrak{F}_n] = S_n + \mu$.

Also: $\mu = 0 \implies (S_n)$ ist Martingal
$\mu \leq 0 \implies (S_n)$ ist Supermartingal
$\mu \geq 0 \implies (S_n)$ ist Submartingal

Beispiel 8.2 Sei $(\mathfrak{F}_t)_{t\in I}$ eine Filtration und X eine Zufallsvariable mit $E|X| < \infty$. Sei $X_t := E[X|\mathfrak{F}_t]$. dann ist $(X_t)_{t\in I}$ $(\mathfrak{F}_t)_{t\in I}$-adaptiert und $\forall s,t \in I, s \leq t$:

$$E[X_t|\mathfrak{F}_s] = E\left[E\left[X|\mathfrak{F}_t\right]|\mathfrak{F}_s\right] \overset{S.7.3a)}{=} E[X|\mathfrak{F}_s] = X_s$$

$\implies (X_t)_{t\in I}$ ist ein $(\mathfrak{F}_t)_{t\in I}$-Martingal.

Satz 8.1
Ist $(X_t)_{t\in I}$ *ein* $(\mathfrak{F}_t)_{t\in I}$*-Martingal und* $\Phi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *eine konvexe Funktion mit* $E|\Phi(X_t)| < \infty\ \forall t \in I$*, so ist* $(\Phi(X_t))_{t\in T}$ *ein* $(\mathfrak{F}_t)_{t\in I}$*-Submartingal.*

Beweis Sei $s, t \in I, s \leq t : E[\Phi(X_t)|\mathfrak{F}_s] \overset{Jensen}{\geq} \Phi(\underbrace{E[X_t|\mathfrak{F}_s]}_{=X_s})$ ■

Im Folgenden: $I = \{1, 2, \ldots, n\}$ und $X^* := \max_{1\leq i\leq n} X_i$

Satz 8.2 (Submartingal-Ungleichung von Doob)
Ist $(X_i)_{i=1,\ldots,n}$ *ein* $(\mathfrak{F}_i)_{i=1,\ldots,n}$*-Submartingal, so gilt* $\forall c > 0$:

$$c \cdot P(X^* > c) \leq \int_{\{X^*>c\}} X_n dP \leq EX_n^+$$

Beweis Sei $A := \{X^* > c\}, A_i := \{X_1 \leq c, \ldots, X_{i-1} \leq c, X_i > c\}, i = 1, \ldots, n$
$\Longrightarrow \quad A = A_1 + \ldots + A_n, A_i \in \mathfrak{F}_i$ und $X_i > c$ auf $A_i, i = 1, \ldots, n.$
$\Longrightarrow \quad \int_{A_i} X_n \mathrm{d}P \overset{bed.EW}{=} \int_{A_i} E[X_n|\mathfrak{F}_i]\mathrm{d}P \overset{Sub-M.}{\geq} \int_{A_i} X_i \mathrm{d}P \geq cP(A_i), i = 1, \ldots, n$
Summation über $i = 1, \ldots, n \implies$ 1. Ungleichung
2. Ungleichung: $X_n \cdot \mathbf{1}_A \leq X_n^+$ ■

Satz 8.3 (L^p-Ungleichung von Doob)
Es sei $p > 1$ *und* $(X_i)_{i=1,\ldots,n}$ *ein nicht-negatives* $(\mathfrak{F}_i)_{i=1,\ldots,n}$*-Submartingal mit der Eigenschaft* $\sup_{i=1,\ldots,n} EX_i^p < \infty$*. Dann gilt:*

$$E(X^*)^p \leq \left(\frac{p}{p-1}\right)^p EX_n^p$$

Beweis

$$\begin{aligned}
E(X^*)^p &= E\int_0^{X^*} p \cdot y^{p-1}\mathrm{d}y \\
&= E\int_0^{\infty} p \cdot y^{p-1}\mathbf{1}_{[X^*\geq y]}\mathrm{d}y \\
&\overset{\text{Fubini}}{=} \int_0^{\infty} py^{p-1} \cdot P(X^* \geq y)\mathrm{d}y \\
&\overset{S.8.2}{\leq} \int_0^{\infty} p \cdot y^{p-2} E\left[X_n \cdot \mathbf{1}_{[X^*\geq y]}\right] \mathrm{d}y \\
&\overset{\text{Fubini}}{=} E\left[X_n \int_0^{X^*} py^{p-2}\mathrm{d}y\right] \\
&= \frac{p}{p-1} E\left[X_n (X^*)^{p-1}\right] \\
&\overset{\text{Hölder}}{\leq} \frac{p}{p-1} (EX_n^p)^{\frac{1}{p}} \left(E\left((X^*)^{p-1}\right)^q\right)^{\frac{1}{q}} \\
&= \frac{p}{p-1} (EX_n^p)^{\frac{1}{p}} \cdot (E(X^*)^p)^{1-\frac{1}{p}}
\end{aligned}$$

Teile Ungleichung durch $\left(E\left(X^*\right)^p\right)^{1-\frac{1}{p}}$ (falls $E(X^*)^p = 0$ ist Aussage richtig) und nehme p-te Potenz $\Longrightarrow$ Behauptung. ∎

Bemerkung a) Ist $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, so lässt sich Satz 8.3 schreiben als $||X^*||_p \leq q \cdot ||X_n||_p$

b) Ein stochastischer Prozess $(X_t)_{t\in I}$ mit $\sup_{t\in I} ||X_t||_p < \infty$ heißt **L^p-beschränkt**.

c) Ist $(X_i)_{i=1,\dots,n}$ ein Martingal, so ist $(|X_i|)_{i=1,\dots,n}$ ein nicht negatives Submartingal (Satz 8.1)

Beispiel 8.3 Sei $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ ein Wahrscheinlichkeitsraum und $(X_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ ein stochastischer Prozess. Interpretation von (X_n):

$X_0 \equiv$ Anfangskapital des Spielers
$X_n - X_{n-1} \equiv$ Gewinnn pro gesetzter Geldeinheit in der n-ten Runde

Wird immer eine Geldeinheit pro Runde gesetzt, so ist also $X_n = X_0 + \sum_{k=1}^n (X_k - X_{k-1})$ das Kapital des Spielers nach n Runden. Es sei

$$\mathfrak{F}_n = \sigma(X_0, X_1 - X_0, \dots, X_n - X_{n-1}) = \sigma(X_0, X_1, \dots, X_n)$$

Das entspricht der Information nach n Runden.

$$\Longrightarrow E[X_{n+1} - X_n|\mathfrak{F}_n] = E[X_{n+1}|\mathfrak{F}_n] - X_n$$

Das entspricht dem erwarteten Gewinn pro gesetzter Geldeinheit bei Kenntnis des bisherigen Spielverlaufs.

Offfenbar gilt:

Offfenbar gilt:	X Martingal	$\Longleftrightarrow$	Spiel fair
	X Supermartingal	$\Longleftrightarrow$	Spiel nachteilig
	X Submartingal	$\Longleftrightarrow$	Spiel vorteilhaft

Beispiel 8.4
$X_n - X_{n-1}$ sei der Gewinn pro gesetzter Geldeinheit (GE) in der n-ten Runde.
Jetzt: In Runde n werden c_n GE gesetzt mit c_n $\mathfrak{F}_{n-1}$-messbar.
$\mathfrak{F}_n = \sigma(X_0, X_1 - X_0, \dots, X_n - X_{n-1})$, d.h. $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist vorhersagbar.
Kapital nach n Spielen:

$$X_0 + \sum_{k=1}^n c_k(X_k - X_{k-1})$$

Satz 8.4
Es seien $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ein vorhersagbarer Prozess und $X = (X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ein Prozess mit $E|c_n(X_n - X_{n-1})| < \infty \quad \forall n \in \mathbb{N}$. Wir setzen

$$Y_n := X_0 + \sum_{k=1}^n c_k(X_k - X_{k-1}),\ Y = (Y_n)_{n\in\mathbb{N}}.$$

Dann gilt:

a) Ist X ein Martingal, so auch Y.

b) *Ist X ein Sub- bzw. Supermartingal und $c_n \geq 0 \quad \forall n$, so ist auch Y ein Sub- bzw. Supermartingal.*

Beweis

$$E[Y_{n+1} - Y_n | \mathfrak{F}_n] = E[c_{n+1}(X_{n+1} - X_n)|\mathfrak{F}_n] \overset{c_{n+1}\mathfrak{F}_n - m.b.}{=} c_{n+1} \cdot E[X_{n+1} - X_n|\mathfrak{F}_n].$$

Definition
*Eine Abbildung $\tau : \Omega \to \mathbb{N}_0 \cup \{\infty\}$ heißt **Stoppzeit** bezüglich einer Filtration $(\mathfrak{F}_n)_{n\in\mathbb{N}}$, wenn*

$$\{\tau \leq n\} \in \mathfrak{F}_n \quad \forall n \in \mathbb{N}_0.$$

Bemerkung

a) Stoppzeiten kann man analog für $\tau : \Omega \to \mathbb{R}_+ \cup \{\infty\}$ definieren.

b) $\tau : \Omega \to \mathbb{N}_0 \cup \{\infty\}$ ist Stoppzeit $\iff$ $\{\tau = n\} \in \mathfrak{F}_n \quad \forall n \in \mathbb{N}_0$. (Übung)

Beispiel 8.5

a) $\tau \equiv n_0$ ist Stoppzeit, da
$$\{\tau \leq n\} = \begin{cases} \Omega & n \geq n_0 \\ \emptyset & n < n_0 \end{cases} \in \mathfrak{F}_n$$

b) Sei $(X_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ ein zu $(\mathfrak{F}_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ adaptierter rellwertiger Prozess und $A \in \mathfrak{B}$. Sei $\tau_A : \Omega \to \mathbb{N} \cup \{\infty\}$ definiert durch

$$\tau_A(\omega) := \inf\{n \in \mathbb{N}_0 \mid X_n(\omega) \in A\} \quad (\inf\{\emptyset\} := \infty)$$

τ_A heißt **Eintrittszeit** in A.
τ_A ist Stoppzeit, da

$$\{\tau_A \leq n\} = \bigcup_{i=1}^{n} \underbrace{\{X_i \in A\}}_{\in \mathfrak{F}_i} \in \mathfrak{F}_n.$$

Lemma 8.1

a) *Für eine Stoppzeit ist*

$$\mathfrak{F}_\tau := \{A \in \mathcal{A} \mid A \cap \{\tau \leq n\} \in \mathfrak{F}_n \quad \forall n \in \mathbb{N}_0\}$$

*eine σ-Algebra, die **σ-Algebra der τ-Vergangenheit**.*

b) *Sind τ_1, τ_2 Stoppzeiten mit $\tau_1 \leq \tau_2$, so gilt $\mathfrak{F}_{\tau_1} \subset \mathfrak{F}_{\tau_2}$.*

c) *Ist τ eine Stoppzeit, so ist $X_\tau^*: \Omega \to \mathbb{R}$ mit*

$$X_\tau^*(\omega) := \begin{cases} X_{\tau(\omega)}(\omega) & \textit{wenn } \tau(\omega) < \infty \\ 0 & \textit{sonst} \end{cases} \qquad \mathfrak{F}_\tau\textit{-messbar}$$

Beweis

a) Übung.

b) Sei $A \in \mathfrak{F}_{\tau_1}$ beliebig. $\forall n \in \mathbb{N}$ gilt:

$$\{\tau_2 \le n\} \subset \{\tau_1 \le n\} \quad \Longrightarrow \quad A \cap \{\tau_2 \le n\} = \underbrace{A \cap \{\tau_1 \le n\}}_{\in \mathfrak{F}_n} \cap \underbrace{\{\tau_2 \le n\}}_{\in \mathfrak{F}_n} \in \mathfrak{F}_n.$$

$\Longrightarrow$ Beh.

c) zu zeigen: $\{X_\tau^* \in A\} \in \mathfrak{F}_\tau \quad \forall A \in \mathfrak{B}$
zeige also: $\{X_\tau^* \in A\} \cap \{\tau \le n\} \in \mathfrak{F}_n \quad \forall n \in \mathbb{N}_0$
Es gilt:

$$\{X_\tau^* \in A\} \cap \{\tau \le n\} = \bigcup_{k=0}^{n} \underbrace{\{X_k \in A\}}_{\in \mathfrak{F}_k} \cap \underbrace{\{\tau = k\}}_{\in \mathfrak{F}_k} \in \mathfrak{F}_k,$$

$$\text{da } \{\tau = k\} = \underbrace{\{\tau \le k\}}_{\in \mathfrak{F}_k} \cap \underbrace{\{\tau \le k-1\}^C}_{\in \mathfrak{F}_k} \in \mathfrak{F}_k.$$

$\Longrightarrow$ Beh. ∎

Bemerkung

a) $\mathfrak{F}_\tau \equiv$ Information, die bis zur zufälligen Zeit τ vorhanden ist.

b) Falls τ P-f.s. endlich, schreibt man X_τ statt X_τ^*.

c) Ist τ eine Stoppzeit und $(X_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ ein stochastischer Prozess, so ist $X^\tau = (X_n^\tau)_{n\in\mathbb{N}_0}$ mit $X_n^\tau := X_{\tau\wedge n} \quad \forall n \in \mathbb{N}_0$ der **gestoppte Prozess**.
Da $\tau \wedge n$ eine Stoppzeit ist, ist wegen Lemma 8.1c) $X_{\tau\wedge n}$ $\mathfrak{F}_{\tau\wedge n}$-messbar und (X_n^τ) ist $(\mathfrak{F}_{\tau\wedge n})$-adaptiert.

Satz 8.5
Ist X ein (Sub-, Super-) Martingal und ist τ eine Stoppzeit, so ist auch X^τ ein (Sub-, Super-) Martingal.

Beweis
Sei $c_n := \mathbf{1}_{\{\tau \ge n\}} \implies \{\tau \ge n\} = \{\tau \le n-1\}^C \in \mathfrak{F}_{n-1}$.
$\Longrightarrow$ $(c_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ ist vorhersagbar. Da $X_0 + \sum_{k=1}^n c_k(X_k - X_{k-1}) = X_{\tau\wedge n}$, folgt die Behauptung mit Satz 8.4. ∎

Bemerkung
Ist X ein Martingal, so auch X^τ und damit gilt $EX_{\tau\wedge n} = EX_0$.
Betrachte Bsp 8.4 mit $\tau := \inf\{k \in \mathbb{N}_0 \mid X_k \geq X_0 + c\}$ und $c_n := \mathbf{1}_{\{\tau \geq n\}}$:
Solange c nicht erreicht ist, wird eine Geldeinheit gesetzt, danach aufgehört. Spielt man maximal n-mal, so ist $X_{\tau\wedge n}$ das Kapital am Ende. Im Mittel kann man das Kapital bei einem fairen Spiel nicht erhöhen.

Beispiel 8.6 (Kartenspiel)
Sei

- S_0 die Anzahl der schwarzen Karten und
- R_0 die Anzahl der roten Karten und
- $N := S_0 + R_0$ die Gesamtzahl an Karten.
- (R_n, S_n) die Anzahl der roten / schwarzen Karten im Stapel, nachdem n Karten aufgedeckt wurden.
- Z_n die Farbe der n-ten aufgedeckten Karte.
- $\mathfrak{F}_n = \sigma(Z_1, \ldots, Z_n)$ und
- $X_n := \frac{S_n - R_n}{S_n + R_n}$.

Behauptung: (X_n) ist $(\mathfrak{F}_n)$-Martingal!

$$\begin{aligned}
E\left[X_{n+1} \,|\, \mathfrak{F}_n\right] &= E\left[\frac{S_{n+1} - R_{n+1}}{S_{n+1} + R_{n+1}} \,|\, Z_1, \ldots, Z_n\right] \\
&= \frac{S_n}{S_n + R_n}\left[\frac{S_n - 1 - R_n}{S_n - 1 + R_n}\right] + \frac{R_n}{S_n + R_n}\left[\frac{S_n - R_n + 1}{S_n + R_n - 1}\right] \\
&= \frac{(R_n + S_n - 1)(S_n - R_n)}{(S_n + R_n)(S_n + R_n - 1)} \\
&= \frac{S_n - R_n}{S_n + R_n}
\end{aligned}$$

Sei τ eine Stoppzeit ($\leq N$). Erwarteter Gewinn:

$$\begin{aligned}
& E\left[\mathbf{1}_{[Z_{\tau+1} = \text{ schwarz}]} - \mathbf{1}_{[Z_{\tau+1} = \text{ rot}]}\right] \\
&= E\left[\sum_{k=1}^{N} \left(\mathbf{1}_{[Z_{k+1} = \text{ schwarz}]} - \mathbf{1}_{[Z_{k+1} = \text{ rot}]}\right) \mathbf{1}_{[\tau = k]}\right] \\
&= \sum_{k=1}^{N} E\left[E\left[\left(\mathbf{1}_{[Z_{k+1} = \text{ schwarz}]} - \mathbf{1}_{[Z_{k+1} = \text{ rot}]}\right) \mathbf{1}_{[\tau = k]} \mid \mathfrak{F}_k\right]\right] \\
&= \sum_{k=1}^{N} E\left[\mathbf{1}_{[\tau = k]} \underbrace{E\left[\mathbf{1}_{[Z_{k+1} = \text{ schwarz}]} - \mathbf{1}_{[Z_{k+1} = \text{ rot}]} \mid \mathfrak{F}_k\right]}_{= \frac{S_k - R_k}{S_k + R_k} = X_k}\right]
\end{aligned}$$

$$= E\left[X_\tau\right] = EX_0 = \frac{S_0 - R_0}{S_0 + R_0}$$

$EX_\tau = EX_0$ gilt nur unter einer Bedingung, wie dieses Beispiel zeigt.

Beispiel 8.7 Sei $(Y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge von u.i.v. ZVen mit

$$P(Y_n = -1) = P(Y_n = 1) = \frac{1}{2}, \quad X_0 \equiv 0$$

Y_n = Ergebnis Münzwurf in Runde n.
Der Spieler setzt 2^{n-1} GE in der n-ten Runde, bei Gewinn erhält er 2^n GE, d.h. $Y_n \cdot 2^{n-1}$ ist der Geldzu-/abgang in der n-ten Runde.
Kapital nach n Runden:

$$X_n := \sum_{i=1}^{n} 2^{i-1} Y_i$$

Sei $\mathfrak{F}_n := \sigma(X_0, \ldots, X_n)$ und $\tau := \inf\{n \in \mathbb{N} \mid Y_n = 1\}$ d.h. gestoppt wird, wenn erstmals $Y_n = 1$ ($\to$ Martingalstrategie). $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist ein $(\mathfrak{F}_n)_{n\in\mathbb{N}}$-Martingal (s. Bsp. 8.1).
Es gilt:

$$P(\tau > k) = \left(\frac{1}{2}\right)^k \ \forall\, k \in \mathbb{N} \Rightarrow P(\tau < \infty) = 1$$

und

$$X_\tau = \sum_{k=1}^{\infty} X_k \mathbf{1}_{\tau=k} = \sum_{k=1}^{\infty} \underbrace{\left(-\sum_{i=1}^{k-1} 2^{i-1} + 2^{k-1}\right)}_{=1} \mathbf{1}_{\tau=k} \equiv 1$$

Also ist hier $EX_\tau = 1 \neq EX_0 = 0$.
Vorsicht bei der Nachahmung!
Das benötigte Kapital beträgt $-X_{\tau-1}$ GE und

$$\begin{aligned} E(-X_{\tau-1}) &= E\left(\sum_{k=1}^{\tau-1} 2^{k-1}\right) \\ &= E\left(\sum_{k=1}^{\infty} 2^{k-1} \mathbf{1}_{[\tau>k]}\right) \\ &= \sum_{k=1}^{\infty} 2^{k-1} \underbrace{P(\tau > k)}_{=2^{-k}} = \infty \end{aligned}$$

Satz 8.6 (Optional Stopping Theorem OST)
Es sei $X = (X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ein Supermartingal und τ eine Stoppzeit. Jede der folgenden Bedingungen impliziert, dass $E|X_\tau| < \infty$ und $EX_\tau \leq EX_1$ gilt:

1. *τ ist f.s. beschränkt, also $P(\tau < c) = 1$ für ein $c \in \mathbb{R}$.*

2. *τ ist f.s. endlich und X ist f.s. beschränkt, d.h. $P(\tau < \infty) = 1$ und es gibt ein $c \in \mathbb{R}$ mit $P(|X_n| \leq c) = 1 \; \forall n \in \mathbb{N}_0$.*
3. *$E\tau < \infty$ und X hat f.s. beschränkte Zuwächse, d.h. $\exists\, c \in \mathbb{R}$ mit $P(|X_n - X_{n-1}| \leq c) = 1 \; \forall\, n \in \mathbb{N}$.*
4. *$P(\tau < \infty) = 1, E|X_\tau| < \infty$ und $\int_{\{\tau > n\}} |X_n| dP \to 0$ für $n \to \infty$.*

Ist eine dieser Bedingungen erfüllt und X ein Martingal, so gilt: $EX_\tau = EX_1$.

Beweis 1. Ist klar, da hier $X_\tau = X_{\tau \wedge n}$ für ein $n \in \mathbb{N}$ groß $(n > c)$. Die Behauptung folgt aus Satz 8.5.

2. Satz 8.5 und majorisierte Konvergenz.
3. Verwende $|X_1| + c(\tau - 1)$ als integrierbare Majorante.
4. Wir zeigen die Aussage für X ist Martingal:

$$\begin{aligned} |EX_\tau - EX_{\tau \wedge n}| &= \left|\int X_\tau dP - \int_{\{\tau \leq n\}} X_\tau dP - \int_{\{\tau > n\}} X_n dP\right| \\ &\leq \left|\int_{\{\tau > n\}} X_\tau dP\right| + \left|\int_{\{\tau > n\}} X_n dP\right| \\ &\leq \underbrace{\int_{\{\tau > n\}} |X_\tau| dP}_{\to 0 (n \to \infty)} + \underbrace{\int_{\{\tau > n\}} |X_n| dP}_{\to 0 (n \to \infty)} \to 0 \; (n \to \infty) \end{aligned}$$

∎

Beispiel 8.8 (Ruinspiel, vgl. Stochastik I, Bsp 10.4) Spieler I besitze n GE ($n \in \mathbb{N}$), Spieler II $N - n$ GE ($N - n \in \mathbb{N}$). Pro Runde gewinnt Spieler I von Spieler II 1 GE mit W'keit p und verliert eine GE an Spieler II mit W'keit $1-p$. Spielrunden sind unabhängig. Seien $(Y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ u.i.v. ZV mit

$$P(Y_n = 1) = p, \;\; P(Y_n = -1) = 1 - p.$$

$X_n := \sum_{k=1}^{n} Y_k$ ist dann der Gewinn (Verlust) von Spieler I nach n Runden.
Sei

$$\tau := \inf\{n \in \mathbb{N} \mid X_n = N - n \text{ oder } X_n = -n\}$$

$P(X_\tau = -n) =$ Ruinwahrscheinlichkeit von Spieler I.
Sei $\mu = EY_1 = 2p - 1$. Nach Beispiel 8.1 $\mu = 0 \Rightarrow (X_n)$ Martingal. $\mu \leq 0 \Rightarrow (X_n)$ Supermartingal. $\mu \geq 0 \Rightarrow (X_n)$ Submartingal.
Behauptung: $\exists\, a > 0, 0 < \gamma < 1$, sodass $P(\tau > j) \leq a\gamma^j \; \forall\, j \in \mathbb{N}$.
Beweis: Sei $k \in \mathbb{N}$.

$$\begin{aligned} P(\tau > Nk) &\leq P\big((Y_1, \ldots, Y_n) \neq (1, \ldots, 1), \\ &\qquad (Y_{N+1}, \ldots, Y_{2N}) \neq (1, \ldots, 1), \ldots, (Y_{(k-1)N+1}, \ldots, Y_{kN}) \neq (1, \ldots, 1)\big) \\ &\overset{(Y_n) \text{ unabh.}}{=} \prod_{v=0}^{k-1} P\left((Y_{vN+1}, \ldots, Y_{(v+1)N}) \neq (1, \ldots, 1)\right) \\ &= (1 - p^N)^k \end{aligned}$$

Für $j > N$ gilt:

$$P(\tau > j) \leq P(\tau > \lfloor \frac{j}{N} \rfloor N) \leq (1-p^N)^{\lfloor \frac{j}{N} \rfloor} \leq \underbrace{\left((1-p^N)^{\frac{1}{N}}\right)^j}_{=:\gamma^j} \underbrace{(1-p^N)^{-1}}_{=:a}$$

■

Also folgt: $P(\tau < \infty) = 1, E\tau = \sum_{j=1}^{\infty} P(\tau \geq j) < \infty$ und $1 = P(\tau < \infty) = P(X_\tau = N-n) + P(X_\tau = -n)$.

Sei nun $M_n := \sum_{k=1}^{n} (Y_k - \underbrace{EY_k}_{=\mu}), n \in \mathbb{N}_0, M_0 = 0$ und $\mathfrak{F}_n := \sigma(Y_1, \ldots, Y_n)$.

Dann ist $(M_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$ ein $(\mathfrak{F}_n)$-Martingal. Das OST ist anwendbar, da (iii) erfüllt ist.

$$\begin{aligned} \Rightarrow 0 &= EM_\tau = P(X_\tau = N-n)(N-n-E\tau\mu) + P(X_\tau = -n)(-n-E\tau\mu) \\ &= P(X_\tau = N-n)(N-n) - P(X_\tau = -n)n - E\tau\mu. \end{aligned}$$

Fall 1: $\mu = 0$ (d.h. $p = \frac{1}{2}$, faires Spiel)

$$\Rightarrow 0 = (1 - P(X_\tau = -n))(N-n) - P(X_\tau = -n)n \Rightarrow P(X_\tau = -n) = \frac{N-n}{N}$$

Fall 2: $p \neq \frac{1}{2}$

Sei $\Theta := \log(\frac{1-p}{p}) \neq 0$ und $L_0 := 1$, $L_n := \prod_{k=1}^{n} e^{\Theta Y_k} = e^{\Theta X_n}$.

$(L_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ist ein $(\mathfrak{F}_n)_{n \in \mathbb{N}}$-Martingal, da

$$E\left[L_{n+1} \mid \mathfrak{F}_n\right] = \prod_{k=1}^{n} e^{\Theta Y_k} \cdot \underbrace{E\left[e^{\Theta Y_{n+1}}\right]}_{pe^{\Theta} + (1-p)e^{-\Theta} = 1} = L_n$$

Das Optional Stopping Theorem 8.6 ist anwendbar, da (iv) erfüllt

$E|L_\tau| = Ee^{\Theta X_\tau} \leq e^{|\Theta| N} < \infty$ und

$$\int_{\{\tau > n\}} |L_n| \mathrm{d}P \leq e^{|\Theta| N} \underbrace{P(\tau > n)}_{\to 0 \ (n \to \infty)}$$

$$\begin{aligned} &\Longrightarrow 1 = EL_0 = EL_\tau = P(X_\tau = N-n)e^{\Theta(N-n)} + P(X_\tau = -n)e^{-\Theta n} \\ &\Longrightarrow 1 = (1 - P(X_\tau = -n)) \cdot (\tfrac{1-p}{p})^{N-n} + P(X_\tau = -n)(\tfrac{p}{1-p})^n \\ &\Longrightarrow P(X_\tau = -n) = \tfrac{\phi^N - \phi^n}{\phi^N - 1}, \ \phi = \tfrac{1-p}{p} \end{aligned}$$

Optimales Stoppen

Sei $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ ein Wahrscheinlichkeitsraum und $X = (X_n)_{n=1,\ldots,N}$ ein stochastischer Prozess adaptiert an eine Filtration $(\mathfrak{F}_n)_{n=1,\ldots,N}$. Es sei $E|X_k| < \infty \quad \forall k = 1, \ldots, N$. Betrachte das Optimierungsproblem

$$v := \sup_{\tau \text{ ist Stoppzeit } \leq N} \{EX_\tau\} = EX_{\tau_0}$$

v = maximaler Wert,
τ_0 = optimale Stoppzeit (falls existent). Wegen

$$E|X_\tau| = \sum_{n=1}^{N} E\left(|X_n| \cdot \mathbf{1}_{\{\tau=n\}}\right) \leq \sum_{n=1}^{N} E|X_n| < \infty$$

nach Voraussetzung ist $v < \infty$. Ist $(X_n)_{n=1,\dots,N}$ ein $(\mathfrak{F}_n)_{n=1,\dots,N}$ Supermartingal, so folgt mit Satz 8.6: $EX_1 \geq EX_\tau \quad \forall$ Stoppzeiten $\tau \leq N$.
Also: $\tau_0 \equiv 1$ ist optimal (sofort aufhören).

Definition
Der Prozess $Z = (Z_n)_{n=1,\dots,N}$ *mit*

$$Z_N := X_N,\ Z_n := \max\left\{X_n,\ E\left[Z_{n+1}\,|\,\mathfrak{F}_n\right]\right\},\ n = N-1,\dots,1$$

*heißt **Snell-Einhüllende** von* X.

Satz 8.7 *Mit den obigen Bezeichnungen gilt:*

a) *Z ist ein $(\mathfrak{F}_n)_{n=1,\dots,N}$-Supermartingal mit $Z_n \geq X_n$ für $n = 1,\dots,N$.*

b) *Z ist das kleinste $(\mathfrak{F}_n)$-Supermartingal, welches X dominiert, d.h. ist $(Y_n)_{n=1,\dots,N}$ ein weiteres $(\mathfrak{F}_n)$-Supermartingal mit $Y_n \geq X_n$, $n = 1,\dots,N$ so gilt: $Y_n \geq Z_n$ für $n = 1,\dots,N$.*

Beweis

a) Aus der Definition: $Z_n \geq X_n\ \forall n,\ Z_n \geq E[Z_{n+1}\,|\,\mathfrak{F}_n]$, also (Z_n) Supermartingal.

b) Rückwärtsinduktion:
$(n = N)$: $Y_N \geq X_N = Z_N$
$(n \to n-1)$: $Y_{n-1} \overset{Y \text{ Supermartingal}}{\geq} E\left[Y_n\,|\,\mathfrak{F}_{n-1}\right] \overset{\text{I.H.}}{\geq} E\left[Z_n\,|\,\mathfrak{F}_{n-1}\right]$ und $Y_{n-1} \geq X_{n-1}$
$\Longrightarrow Y_{n-1} \geq \max\{X_{n-1}, E[Z_n\,|\,\mathfrak{F}_{n-1}]\} = Z_{n-1}$ ∎

Satz 8.8
Mit den obigen Bezeichnungen und $\tau_0 = \min\{n \in \{1,\dots,N\}\,|\,X_n = Z_n\}$ gilt:

a) *τ_0 ist eine Stoppzeit.*

b) *$(Z_n^{\tau_0})_{n=1,\dots,N}$ ist ein $(\mathfrak{F}_n)_{n=1,\dots,N}$-Martingal.*

c) *$EX_{\tau_0} = \sup_{\tau \text{ Stoppzeit}}\{EX_\tau\}$*

Beweis

a) Wegen $Z_N = X_N$ ist $\tau_0 \leq N$. Es gilt:

$$\{\tau_0 \leq n\} = \bigcup_{i=1}^{n} \underbrace{\{Z_i = X_i\}}_{\in \mathfrak{F}_i} \in \mathfrak{F}_n$$

b) Es gilt:

$$\underbrace{Z_{n+1}^{\tau_0}}_{=Z_{(n+1)\wedge\tau_0}} - \underbrace{Z_n^{\tau_0}}_{=Z_{n\wedge\tau_0}} = \mathbf{1}_{\{\tau_0 \geq n+1\}} \left(Z_{n+1} - E\left[Z_{n+1} \,|\, \mathfrak{F}_n\right]\right) \ (*)$$

da

Fall 1: $\tau_0 \geq n+1$
linke Seite $= Z_{n+1} - Z_n$,
rechte Seite $= Z_{n+1} - \underbrace{E[Z_{n+1} \,|\, \mathfrak{F}_n]}_{=Z_n}$, da $X_n < Z_n$ auf $\{\tau_0 \geq n+1\}$. (stimmt)

Fall 2: $\tau_0 \leq n$
$0 = 0$ (stimmt)

Wende nun $E[\cdot \,|\, \mathfrak{F}_n]$ auf (*) an:
Da $\{\tau_0 \geq n+1\} = \{\tau_0 \leq n\}^C \in \mathfrak{F}_n$ folgt

$$E\left[Z_{n+1}^{\tau_0} - Z_n^{\tau_0} \,|\, \mathfrak{F}_n\right] = \mathbf{1}_{\{\tau_0 \geq n+1\}} E\left[Z_{n+1} - E\left[Z_{n+1} \,|\, \mathfrak{F}_n\right] \,|\, \mathfrak{F}_n\right] = 0$$

$\Longrightarrow$ $(Z_n^{\tau_0})$ ist $(\mathfrak{F}_n)$-Martingal.

c) Wegen b) und Satz 8.6:

$$EZ_1 = EZ_1^{\tau_0} = EZ_N^{\tau_0} = EZ_{\tau_0} = EX_{\tau_0}$$

Für eine beliebige Stoppzeit τ gilt:
$EZ_1 \geq EZ_\tau$, da Z Supermartingal. Und weiterhin:
$EX_{\tau_0} = EZ_1 \geq EZ_1 \geq EZ_\tau \geq EX_\tau \quad \Longrightarrow$ Beh. ∎

Beispiel 8.9 (Das Sekretärinnenproblem) N Bewerber(innen) um eine Stelle stellen sich nacheinander vor. Nach jedem Interview muss entschieden werden, ob die Person die Stelle bekommt.
Annahme: Die Bewerber lassen sie linear anordnen und erscheinen in beliebiger Reihenfolge. ($N!$ mögliche Reihenfolgen)
Welche Strategie maximiert die Wahrscheinlichkeit, dass die beste Person die Stelle bekommt?

- $A_n =$ absoluter Rang des n-ten Kandianten unter allen N.
- $R_n =$ dessen relativer Rang unter den ersten N. $R_n = \{1 \leq m \leq n \,|\, A_m \leq A_n\}$.

Es gibt eine Bijektion zwischen den A-Werten und den R-Werten. Somit gilt $\forall\, r_1, \ldots, r_N$, $1 \leq r_i \leq i$, $1 \leq i \leq N$:

$$P(R_1 = r_1, \ldots, R_N = r_N) = \frac{1}{N!}$$

Bestimme Randverteilungen:

$$P(R_n = l) = \frac{1}{n} \quad \text{für } l = 1, \ldots, n \quad \forall\, n \in \{1, \ldots, N\}$$

und $R_1, \ldots, R_N$ unabhängig. Sei nun

$$\overline{X}_n := \begin{cases} 1, & A_n = 1 \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}, \quad \mathfrak{F}_n = \sigma(R_1, \ldots, R_n)$$

und $X_n = E[\overline{X}_n | \mathfrak{F}_n]$. (X_n) ist $(\mathfrak{F}_n)$-adaptiert. $P(\overline{X}_\tau = 1) \to \max$.

$$\begin{aligned} P(\overline{X}_\tau = 1) &= \sum_{n=1}^{N} P(\overline{X}_n = 1,\ \tau = n) = \sum_{n=1}^{N} E\mathbf{1}_{[\tau = n,\ \overline{X}_n = 1]} \\ &= \sum_{n=1}^{N} \int_{\{\tau = n\}} \overline{X}_n dP = \sum_{n=1}^{N} \int_{\{\tau = n\}} \underbrace{E[\overline{X}_n | \mathfrak{F}_n]}_{= X_n} dP \\ &= EX_\tau \end{aligned}$$

Also maximiere EX_τ mit Satz 8.8.

$$\begin{aligned} P(R_1 = r_1, \ldots, R_{n-1} = r_{n-1}, A_n = 1) &= P(R_1 = r_1, \ldots, R_{n-1} = r_{n-1}, R_n = 1, R_{n+1} > 1, \ldots, R_N > 1) \\ &= \frac{1}{N!} \cdot 1 \cdot \cdots \cdot 1 \cdot n \cdot (n+1) \cdot \cdots \cdot (N-1) = \frac{n}{N} \cdot \frac{1}{n!} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow P(A_n = 1 \mid R_1 = r_1, \ldots, R_{n-1} = r_{n-1}, R_n = 1) &= \frac{P(R_1 = r_1, \ldots, R_{n-1} = r_{n-1}, R_n = 1, A_n = 1)}{P(R_1 = r_1, \ldots, R_{n-1} = r_{n-1}, R_n = 1)} \\ &= \frac{\frac{n}{N} \cdot \frac{1}{n!}}{\frac{1}{n!}} = \frac{n}{N} \end{aligned}$$

$$\Rightarrow X_n = E[\mathbf{1}_{\{1\}}(A_n) | \mathfrak{F}_n] = \begin{cases} \frac{n}{N}, & \text{falls } R_n = 1 \\ 0, & \text{sonst} \end{cases} \qquad (*)$$

Behauptung: $\exists\, (c_n)_{n=1,\ldots,N} \subset \mathbb{R}$, $c_n \downarrow$, $c_N = \frac{1}{N}$ und $E[Z_n | \mathfrak{F}_{n-1}] \equiv c_n$ für $n = 1, \ldots, N$, wobei Z die Snell-Einhüllende von X ist.
Beweis: Rüchwärtsinduktion:

$n = N$:

$$\begin{aligned} E[Z_N | \mathfrak{F}_{N-1}] &= E[X_N | \mathfrak{F}_{N-1}] \overset{A_N \equiv R_N}{=} E[\mathbf{1}_{\{1\}}(R_N) | \mathfrak{F}_{N-1}] \\ &\overset{R_N, \mathfrak{F}_N \text{ unabh.}}{=} P(R_N = 1) = \frac{1}{N} = c_N. \end{aligned}$$

$n+1 \rightsquigarrow n$:

$$\begin{aligned}
E[Z_n|\mathfrak{F}_{n-1}] &= E[\max\{X_n\ E[Z_{n+1}|\mathfrak{F}_n]\}|\mathfrak{F}_{n-1}] \\
&\overset{(*)}{=} E[\max\{\frac{n}{N}\cdot \mathbf{1}_{\{1\}}(R_n), c_{n+1}\}|\mathfrak{F}_{n-1}] \\
&= E[\mathbf{1}_{\{1\}}(R_n)\cdot \max\{\frac{n}{N}, c_{n+1}\} + (1-\mathbf{1}_{\{1\}}(R_n))c_{n+1}|\mathfrak{F}_{n-1}] \\
&\overset{R_n,\mathfrak{F}_{n-1}\text{ unabh.}}{=} P(R_n=1)\cdot \max\{\frac{n}{N}, c_{n+1}\} + (1-P(R_n=1))\cdot c_{n+1} \\
&= \frac{1}{n}\max\{\frac{n}{N}, c_{n+1}\} + (1-\frac{1}{n})c_{n+1}
\end{aligned}$$

$$\Rightarrow c_n = c_{n+1} + \underbrace{\max\{\frac{1}{N}, \frac{c_{n+1}}{n}\} - \frac{c_{n+1}}{n}}_{\geq 0} \Rightarrow c_n \geq c_{n+1}$$

$\tau^* := \inf\{n \mid Z_n = X_n\}$
Stoppregel nach Satz 8.8: $\tau^* = \min\{n \mid X_n = Z_n\}$.

- gestoppt wird vor N nur, wenn $R_n = 1$.
- die Werte $X_n \neq 0$ sind wachsend.
- die Werte $E[Z_{n+1}|\mathfrak{F}_n] = c_{n+1}$ fallend.

$$\begin{aligned}
\tau^* &= \min\{1\leq n\leq N-1 \mid R_n = 1, \frac{n}{N} \geq c_{n+1}\} \wedge N \\
&= \min\{n \geq k_n \mid R_n = 1\} \wedge N.
\end{aligned}$$

Wir bestimmen jetzt noch k_N.
Sei $\tau_k := \inf\{n \geq k \mid R_n = 1\} \wedge N$. Bestimme EX_{τ_k}.
k_N ist dann der k-Wert, bei dem EX_{τ_k} maximal ist. Es gilt

$$\begin{aligned}
EX_{\tau_k} &= \sum_{l=k}^{N} E[X_l \cdot 1_{\{l\}}(\tau_k)] \\
&= \sum_{l=k}^{N} \frac{l}{N} \underbrace{P(R_m > 1 \text{ für } m = k,\dots,l-1, R_l = 1)}_{=P(\tau_k = l)} \\
&= \sum_{l=k}^{N} \frac{l}{N} \underbrace{\left(\prod_{m=k}^{l-1} \frac{m-1}{m}\right)}_{=P(R_m>1)} \cdot \underbrace{\frac{1}{l}}_{=P(R_l=1)} \\
&\overset{\text{Teleskop. Prod.}}{=} \frac{k-1}{N}\sum_{l=k}^{N}\frac{1}{l-1}
\end{aligned}$$

$\Phi(k) := \frac{k-1}{N}\sum_{l=k}^{N}\frac{1}{l-1}$ wird maximal in $k_N := \inf\{k \mid \frac{1}{k} + \frac{1}{k+1} + \dots + \frac{1}{N-1} \leq 1\}$.
Beachte: $\lim_{N\to\infty} \frac{k_N}{=} \frac{1}{e}$.
Bei einem großen Bewerberkreis wird man etwa 37 Prozent der Bewerber passieren lassen und dann den ersten nehmen, der besser als alle vorangegangenen ist.