1 Multilineare Algebra

§1 Moduln

Sei R ein (kommutativer) Ring (mit Eins) (in der ganzen Vorlesung).

Definition 1.1

(a) Eine abelsche Gruppe $(M,+)$ zusammen mit einer Abbildung $\cdot : R \times M \to M$ heißt R***-Modul*** (genauer: R-Linksmodul), wenn gilt:

(i) $a \cdot (x+y) = a \cdot x + a \cdot y$

(ii) $(a+b) \cdot x = a \cdot x + b \cdot x$

(iii) $(a \cdot b) \cdot x = a \cdot (b \cdot x)$

(iv) $1 \cdot x = x$

für alle $a, b \in R,\ x, y \in M$.

(b) Eine Abbildung $\varphi : M \to M'$ zwischen R-Moduln M, M' heißt R***-Modul-Homomorphismus*** (kurz R***-linear***), wenn für alle $x, y \in M,\ a, b \in R$ gilt:
$\varphi(a \cdot x + b \cdot y) = a \cdot \varphi(x) + b \cdot \varphi(y)$

Beispiele

(1) $R = K$ Körper. Dann ist R-Modul = K-Vektorraum und R-linear = linear

(2) R ist R-Modul. Jedes Ideal $I \subseteq R$ ist R-Modul

(3) Jede abelsche Gruppe ist ein $\mathbb{Z}$-Modul.
(denn: $n \cdot x = \underbrace{x + x + \cdots + x}_{n\text{-mal}}$ definiert die Abbildung $\cdot : \mathbb{Z} \times M \to M$ wie in 1.1 gefordert)

Bemerkung + Definition 1.2

(a) Sind M, M' R-Moduln, so ist $\mathrm{Hom}_R(M, M') = \{\varphi : M \to M' : \varphi \text{ ist } R\text{-linear}\}$ ein R-Modul durch $(\varphi_1 + \varphi_2)(x) = \varphi_1(x) + \varphi_2(x)$ und $(a \cdot \varphi_1)(x) = a \cdot \varphi_1(x)$.

(b) $M^* = \mathrm{Hom}_R(M, R)$ heißt dualer Modul.

Beispiele

$R = \mathbb{Z}$
$\mathrm{Hom}_R(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}, \mathbb{Z}) = \{0\}$, denn $0 = \varphi(0) = \varphi(1+1) = \varphi(1) + \varphi(1) \Rightarrow \varphi(1) = 0$

Bemerkung 1.3 (Ähnlichkeiten von Moduln mit Vektorräumen)
Die R-Moduln bilden eine ***abelsche Kategorie*** R***-Mod***.

(a) Eine Untergruppe N eines R-Moduls M heißt R-Untermodul von M, falls $R \cdot N \subseteq N$.

(b) Kern und Bild R-linearer Abbildungen sind R-Moduln.

(c) Zu jedem Untermodul $N \subseteq M$ gibt es einen Faktormodul M/N.

(d) Homomorphiesatz:
Für einen surjektiven Homomorphismus $\varphi : M \to N$ gilt: $M/\operatorname{Kern}(\varphi) \cong N$.

(e) *Direktes Produkt*: Sei $\{M_i\}_{i\in I}$ eine beliebige Familie von Moduln. Dann ist ihr direktes Produkt $\prod_i M_i = \bigtimes_i M_i$ gegeben durch die Menge aller Tupel $(m_i)_{i\in I}$ mit $m_i \in M_i$ und die R-Aktion $r(m_i)_{i\in I} = (rm_i)_{i\in I}$.

Direkte Summe: Das gleiche wie beim direkten Produkt, jedoch dürfen in den Tupeln nur endlich viele $m_i \neq 0$ sein.

Beweis

(b) Kern(φ): Sei $\varphi : M \to N$ lineare Abbildung. $m \in \operatorname{Kern}(\varphi)$, $r \in R$:
$\varphi(rm) = r\varphi(m) = 0 \Rightarrow R \cdot \operatorname{Kern}(\varphi) \subseteq \operatorname{Kern}(\varphi)$; Untergruppe klar

Bild(φ): $n \in \operatorname{Bild}(\varphi)$, d. h. $\exists\, m : n = \varphi(m), m \in M \Rightarrow r \in R : rn = r\varphi(m) = \varphi(rm) \in \operatorname{Bild}(\varphi) \Rightarrow R \cdot \operatorname{Bild}(\varphi) \subseteq \operatorname{Bild}(\varphi)$

(c) M abelsch $\Rightarrow$ jedes N Normalteiler $\Rightarrow M/N$ ist abelsche Gruppe.

Wir definieren R-Aktion auf M/N durch $r(m+N) = rm+N$. Das ist wohldefiniert, denn
$r((m+n)+N) = r(m+n)+N = rm + \underbrace{rn}_{\in N} + N = rm + N$

$r((m+N)+(m'+N)) = r((m+m')+N) = r(m+m')+N = rm+N+rm'+N = r(m+N)+r(m'+N)$

Die restlichen drei Eigenschaften gehen ähnlich.

(d)

$$\begin{tikzcd}
M \arrow[rr, "\varphi"] \arrow[dr] & & N \\
& M/\operatorname{Kern}(\varphi) \arrow[ur, dashed, "\exists!\,\tilde{\varphi}"'] &
\end{tikzcd}$$

Wohldefiniertheit von $\tilde{\varphi}$:
Sei $k \in \operatorname{Kern}(\varphi) : \varphi(m+k) = \varphi(m)$

surjektiv: $\forall n \in N : n = \varphi(m) = \tilde{\varphi}(m + \operatorname{Kern}(\varphi))$

injektiv: $m, m' \in M$ mit $\varphi(m) = \varphi(m') = n \in N \Leftrightarrow \varphi(m-m') = 0 \Rightarrow m + \operatorname{Kern}(\varphi)(m) = \operatorname{Kern}(\varphi)(m')$

$\tilde{\varphi}$ ist R-linear: Klar, wegen φ R-linear.

Bemerkung 1.4

(a) Zu jeder Teilmenge $X \subseteq M$ eines R-Moduls M gibt es den von X erzeugten Untermodul

$$\langle X \rangle = \bigcap_{\substack{M' \subseteq M \text{ Untermodul} \\ X \subseteq M'}} M' = \left\{ \sum_{i=1}^{n} a_i x_i : n \in \mathbb{N}, a_i \in R, x_i \in X \right\}$$

(b) $B \subset M$ heißt ***linear unabhängig***, wenn aus $\sum_{i=1}^{n} \alpha_i b_i = 0$ mit $n \in \mathbb{N}, b_i \in B, \alpha_i \in R$ folgt $\alpha_i = 0$ für alle i.

(c) Ein linear unabhängiges Erzeugendensystem heißt ***Basis***.

(d) Nicht jedes R-Modul besitzt eine Basis.

Beispiel: $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ als $\mathbb{Z}$-Modul: $\{\bar{1}\}$ ist nicht linear unabhängig, da $\underbrace{42}_{\neq 0 \text{ in } \mathbb{Z}} \cdot \bar{1} = 0$

(e) Ein R-Modul heißt ***frei***, wenn er eine Basis besitzt.

(f) Ein freier R-Modul M hat die Universelle Abbildungseigenschaft eines Vektorraums. Ist B eine Basis von M, und $f : B \to M'$ eine Abbildung in einen R-Modul M', so gibt es genau eine R-lineare Abbildung $\varphi : M \to M'$ mit $\varphi|_B = f$.

(g) Sei M freier, endlich erzeugter Modul. Dann ist M^* wieder frei und hat dieselbe Dimension wie M.

Beweis

(f) Sei $\{y_i\}_{i\in I}$ Familie von Elementen von M'.
Sei $x \in M$. Durch $x = \sum_i a_i x_i$ ist $\{a_i\}_{i\in I}$ eindeutig bestimmt.
Wir setzen: $\varphi(x) := \sum_i a_i y_i = \sum_i a_i \varphi(x_i)$
Beh. 1: Falls $\{y_i\}_{i\in I}$ ($y_i \neq y_j$ für $i \neq j$) Basis von M' ist, dann ist φ ein Isomorphismus.
Bew. 1: Wir können den Beweis des Satzes rückwärts anwenden
$\Rightarrow \exists\, \psi : M' \to M$ mit $\psi(y_i) = x_i \forall i \in I$
$\Rightarrow \varphi \circ \psi = id_N, \psi \circ \varphi = id_M$
Beh. 2: Zwei freie Moduln mit gleicher Basis sind isomorph.
Bew. 2: klar

Proposition + Definition 1.5

Sei $0 \to M' \overset{\alpha}{\to} M \overset{\beta}{\to} M'' \to 0$ kurze exakte Sequenz von R-Moduln (d.h. $M' \subseteq M$ Untermodul, $M'' = M/M'$). Dann gilt für jeden R-Modul N:

(a) $0 \to \mathrm{Hom}_R(N, M') \overset{\alpha_*}{\to} \mathrm{Hom}_R(N, M) \overset{\beta_*}{\to} \mathrm{Hom}_R(N, M'')$ ist exakt.
(b) $0 \to \mathrm{Hom}_R(M'', N) \overset{\beta^*}{\to} \mathrm{Hom}_R(M, N) \overset{\alpha^*}{\to} \mathrm{Hom}_R(M', N)$ ist exakt.
(c) Im Allgemeinen sind β_* bzw. α^* nicht surjektiv.
(d) Ein Modul N heißt ***projektiv*** (bzw. ***injektiv***), wenn β_* (bzw. α^*) **für sämtliche Wahlen der kurzen exakten Sequenz** $0 \to M' \overset{\alpha}{\to} M \overset{\beta}{\to} M'' \to 0$ surjektiv ist.
(e) Freie Moduln sind projektiv.
(f) Jeder R-Modul M ist Faktormodul eines projektiven R-Moduls.
(g) Jeder R-Modul M ist Untermodul eines injektiven R-Moduls.

Beweis

(a)

$$\begin{tikzcd} & & N \arrow[dl, "\varphi"'] \arrow[d, "\psi"] \arrow[dr] & & \\ 0 \arrow[r] & M' \arrow[r, "\alpha"] & M \arrow[r, "\beta"] & M'' \arrow[r] & 0 \end{tikzcd}$$

α_* ist injektiv: Sei $\varphi \in \mathrm{Hom}_R(N, M')$, ist $\alpha_*(\varphi) = \alpha \circ \varphi = 0 \overset{\alpha \text{ inj.}}{\Rightarrow} \varphi = 0$.
$\mathrm{Bild}(\alpha_*) \subseteq \mathrm{Kern}(\beta_*)$: $\beta_*(\alpha_*(\varphi)) = \underbrace{\beta \circ \alpha}_{=0} \circ \varphi = 0$

$\mathrm{Kern}(\beta_*) \subseteq \mathrm{Bild}(\alpha_*)$:
Sei $\beta \circ \psi = 0$ ($\psi \in \mathrm{Kern}(\beta_*)$). Für jedes $x \in N$ ist $\psi(x) \in \mathrm{Kern}(\beta) = \mathrm{Bild}(\alpha) \Rightarrow$ zu $x \in N\ \exists\, y \in M'$ mit $\psi(x) = \alpha(y)$; y ist eindeutig, da α injektiv.
Definiere $\varphi' : N \to M'$ durch $x \mapsto y$.
Zu zeigen: φ' ist R-linear
Seien $x, x' \in N \Rightarrow \varphi'(x + x') = z$ mit $\alpha(z) = \varphi(x + x') = \varphi(x) + \varphi(x') = \alpha(y) + \alpha(y') = \alpha(y + y')$ mit $\varphi'(x) = y,\ \varphi'(x') = y' \overset{\alpha \text{ inj.}}{\Rightarrow} z = y + y'$
Genauso: $\varphi'(a \cdot x) = a \cdot \varphi'(x)$

(b)

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & M' \arrow[r] & M \arrow[r, "\beta"] \arrow[dr, "\beta^*(\varphi)"'] & & M'' \arrow[r] \arrow[dl, "\varphi"] & 0 \\ & & & N & & \end{tikzcd}$$

β^* injektiv, denn für $\varphi \in \mathrm{Hom}(M'', N)$ ist $\beta^*(\varphi) = \varphi \circ \beta$
Sei $\beta^*(\varphi) = 0 \Rightarrow \varphi \circ \beta = 0 \overset{\beta \text{ surj.}}{\Rightarrow} \varphi = 0$.
$\mathrm{Bild}(\beta^*) \subseteq \mathrm{Kern}(\alpha^*)$: $(\alpha^* \circ \beta^*)(\varphi) = \alpha^*(\varphi \circ \beta) = \varphi \circ \underbrace{\beta \circ \alpha}_{=0} = 0$

$\mathrm{Kern}(\alpha^*) \subseteq \mathrm{Bild}(\beta^*)$: Sei $\psi \in \mathrm{Kern}(\alpha^*)$. Aber $\psi \in \mathrm{Hom}_R(M, N)$ mit $\psi \circ \alpha = 0$
Weil ψ auf $\mathrm{Bild}(\alpha)$ verschwindet, kommutiert

$$\begin{tikzcd}
 & M'' & \\
M \arrow[ur, "\beta"] \arrow[rr] \arrow[dr, "\psi"'] & & M/\mathrm{Bild}(\alpha) \arrow[ul, "\cong"'] \arrow[dl, "\sigma"] \\
 & N &
\end{tikzcd}$$

$\Rightarrow \beta^*(\sigma) = \psi \Longrightarrow$ Beh.

(c) Im Allgemeinen sind β_* und α^* nicht surjektiv
z.B.:

1. $0 \to \mathbb{Z} \overset{\cdot 2}{\underset{\alpha}{\to}} \mathbb{Z} \overset{\beta}{\to} \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \to 0$ mit $N := \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$
   Es gilt: $\mathrm{Hom}(N, \mathbb{Z}) = \{0\}$
   $\mathrm{Hom}(N, \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) = \{0, id\} \Rightarrow \beta_*$ nicht surjektiv $\Rightarrow N$ nicht projektiv!
2. $0 \to \mathbb{Z} \overset{\cdot 4}{\underset{\alpha}{\to}} \mathbb{Z} \overset{\beta}{\to} \mathbb{Z}/4\mathbb{Z} \to 0$ mit $N := 2 \cdot \mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$
   $\mathrm{Hom}(\mathbb{Z}, N) = \{0, \psi\}$, wobei $\psi(1) = 2$.
   Dann: $\alpha^*(\psi) = \psi \circ \alpha = 0 \Rightarrow \alpha^*$ nicht surjektiv $\Rightarrow N$ nicht injektiv!

(e) Sei N frei mit Basis $\{e_i, i \in I\}$. Sei $\beta : M \to M''$ surjektive R-lineare Abbildung und $\varphi : N \to M''$ R-linear. Für jedes $i \in I$ sei $x_i \in M$ mit $\beta(x_i) = \varphi(e_i)$ (so ein x_i gibt es, da β surjektiv). Dann gibt es genau eine R-lineare Abbildung $\psi : N \to M$ mit $\psi(e_i) = x_i$. Damit $\beta(\psi(e_i)) = \beta(x_i) = \varphi(e_i)$ für alle $i \in I \Rightarrow \beta \circ \psi = \varphi$

(f) Sei M ein R-Modul. Sei X ein Erzeugendensystem von M als R-Modul (notfalls $X = M$). Sei F der freie R-Modul mit Basis X, $\varphi : F \to M$ die R-lineare Abbildung, die durch $x \mapsto x$ für alle $x \in X$ bestimmt ist. φ ist surjektiv, da $X \subseteq \mathrm{Bild}(\varphi)$ und $\langle X \rangle = M$. Nach Homomorphiesatz ist $M \cong F/\mathrm{Kern}(\varphi)$.

Proposition 1.6
Ein R-Modul N ist genau dann projektiv, wenn es einen R-Modul N' gibt, so dass $F := N \oplus N'$ freier Modul ist.

Beweis
„$\Rightarrow$“:
Sei F freier R-Modul und $\beta : F \to N$ surjektiv (wie in Beweis von 1.5 (f)). Dann gibt es $\tilde{\varphi} : N \to F$ mit $\beta \circ \tilde{\varphi} = id_N$ (weil N projektiv ist).
Behauptung:

1.) $F = \mathrm{Kern}(\beta) \oplus \mathrm{Bild}(\tilde{\varphi}) \cong N' \oplus N$
2.) $\tilde{\varphi}$ injektiv

Beweis:

1.) $\mathrm{Kern}(\beta) \cap \mathrm{Bild}(\tilde{\varphi}) = (0)$, denn: $\beta(\tilde{\varphi}(x)) = 0 \Rightarrow x = 0 \Rightarrow \tilde{\varphi}(x) = 0$.

Sei $x \in F,\ y := \tilde{\varphi}(\beta(x)) \in \mathrm{Bild}(\tilde{\varphi})$. Für $z = x - y$ ist $\beta(z) = \beta(x) - \underbrace{\beta(\tilde{\varphi}}_{id}(\beta(x))) = 0 \Rightarrow$

$x = \underbrace{z}_{\in \mathrm{Kern}(\beta)} + \underbrace{y}_{\in \mathrm{Bild}(\tilde{\varphi})}$

2.) $\tilde{\varphi}(x) = 0 \Rightarrow \underbrace{\beta(\tilde{\varphi}(x))}_{=x} = 0$

„$\Leftarrow$“:
Sei $F = N \oplus N'$ frei, $\beta : M \to M''$ surjektiv, $\varphi : N \to M''$ R-linear.

Gesucht: $\psi : N \to M$ mit $\beta \circ \psi = \varphi$.

Definiere $\tilde{\varphi} : F \to M''$ durch $\tilde{\varphi}(x + y) = \varphi(x)$ wobei jedes $z \in F$ eindeutig als $z = x + y$ mit $x \in N,\ y \in N'$ geschrieben werden kann.

F ist frei also projektiv $\Rightarrow \exists\, \tilde{\psi} : F \to M$ mit $\beta \circ \tilde{\psi} = \tilde{\varphi}$. Sei $\psi := \tilde{\psi}|_N$. Dann ist $\beta \circ \psi = \beta \circ \tilde{\psi}|_N = \tilde{\varphi}|_N = \varphi$

§2 Tensorprodukt

Definition 1.7
Seien M, N, P R-Moduln.

(a) Eine Abbildung $\Phi : M \times N \to P$ heißt ***R*-bilinear**, wenn für jedes $x_0 \in M$ und jedes $y_0 \in N$ die Abbildungen

$$\Phi_{x_0} : N \to P, y \mapsto \Phi(x_0, y)$$

$$\Phi_{y_0} : M \to P, x \mapsto \Phi(x, y_0)$$

R-linear sind.

(b) Ein ***Tensorprodukt*** von M und N (über R) ist ein R-Modul T zusammen mit einer bilinearen Abbildung $\tau : M \times N \to T$, sodass
(UAE) Für jede bilineare Abbildung $\Phi : M \times N \to P$ gibt es genau eine lineare Abbildung $\varphi : T \to P$ mit $\Phi = \varphi \circ \tau$

$$\begin{tikzcd} M \times N \arrow[rr, "\tau"] \arrow[dr, "\Phi"'] & & T \arrow[dl, dashed, "\exists!\varphi"] \\ & P & \end{tikzcd}$$

(τ ist die „universelle“ bilineare Abbildung)

Beispiele

1.) M, N freie R-Moduln mit Basis $\{e_i, i \in I\}$ bzw. $\{f_j, j \in J\}$. Dann ist $M \otimes N$ freier R-Modul mit Basis $\{e_i f_j, i \in I, j \in J\}$ ein Tensorprodukt mit $\tau(e_i, f_j) = e_i f_j$.

Denn: Sei $\Phi : M \times N \to P$ bilinear. Setze $\varphi(e_i \cdot f_j) := \Phi(e_i, f_j)$, das bestimmt eindeutig $\varphi : M \otimes N \to P$ (R-linear) mit $\Phi(e_i, f_j) = \varphi(\tau(e_i, f_j))$ für alle i, j.

Sind I, J endlich, so ist $\mathrm{rg}(M \otimes N) = \mathrm{rg}(M) \cdot \mathrm{rg}(N)$, dagegen ist $\mathrm{rg}(M \times N) = \mathrm{rg}(M) + \mathrm{rg}(N)$. τ ist also höchstens in Trivialfällen surjektiv. τ ist nicht injektiv: $\tau(x, 0) = \tau(x, 0 \cdot y) = 0 \cdot \tau(x, y) = 0$ (da linear im 2. Argument), genauso $\tau(0, y) = 0$. $\mathrm{Bild}(\tau)$ ist kein Untermodul, aber $\langle \mathrm{Bild}(\tau) \rangle = M \otimes N$.

2.) 0 ist ein Tensorprodukt der $\mathbb{Z}$-Moduln $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ und $\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$.

Denn: jede bilineare Abbildung $\Phi : \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/3\mathbb{Z} \to P$ ist die Nullabbildung. $\Phi(\bar{1}, \bar{1}) = \Phi(3 \cdot \bar{1}, \bar{1}) = 3 \cdot \Phi(\bar{1}, \bar{1}) = \Phi(\bar{1}, 3 \cdot \bar{1}) = \Phi(\bar{1}, \bar{0}) = 0$, genauso $\Phi(\bar{1}, -\bar{1}) = 0$.

Satz 1 (Tensorprodukt)
Zu je zwei R-Moduln M, N gibt es ein Tensorprodukt. Dieses ist eindeutig bestimmt bis auf eindeutigen Isomorphismus.

Beweis 1.8
Sei F der freie R-Modul mit Basis $M \times N$. Sei Q Untermodul, der erzeugt wird von den

$$(x+x', y) - (x,y) - (x',y), \qquad (\alpha x, y) - \alpha(x,y)$$

$$(x, y+y') - (x,y) - (x,y'), \qquad (x, \alpha y) - \alpha(x,y)$$

für alle $x, x' \in M,\ y, y' \in N,\ \alpha \in R$

Setze $T := F/Q$, $\tau : M \times N \to T, (x,y) \mapsto [(x,y)] \bmod Q$. τ ist bilinear nach Konstruktion. Ist $\Phi : M \times N \to P$ bilinear, so setze $\tilde{\varphi}((x,y)) := \Phi(x,y)$, $\tilde{\varphi} : F \to P$ ist linear. $Q \subseteq \text{Kern}(\tilde{\varphi})$, weil Φ bilinear $\overset{\text{Hom.-Satz}}{\Rightarrow}$ $\tilde{\varphi}$ induziert $\varphi : T \to P$ mit $\Phi = \varphi \circ \tau$.

Noch zu zeigen: Eindeutigkeit
Seien (T, τ), (T', τ') Tensorprodukte von M und N. Dann gibt es eine R-lineare Abbildung $\varphi : T \to T'$ mit $\tau' = \varphi \circ \tau$ und eine R-lineare Abbildung $\psi : T' \to T$ mit $\tau = \psi \circ \tau'$. Noch wissen wir nicht, ob folgendes Diagramm kommutativ ist:

$$\begin{tikzcd}
 & T \arrow[dd, bend right, "\varphi"'] \\
M \times N \arrow[ur, "\tau"] \arrow[dr, "\tau'"'] & \\
 & T' \arrow[uu, bend right, "\psi"']
\end{tikzcd}$$

aber für die beiden Dreiecke ist dies bereits bekannt.

Behauptung: $\psi \circ \varphi = id_T$ und $\varphi \circ \psi = id_{T'}$.
Beweis: Das Diagramm

$$\begin{tikzcd}
 & T \arrow[dd, bend right, "id"'] \arrow[dd, bend left, "\psi\circ\varphi"] \\
M \times N \arrow[ur, "\tau"] \arrow[dr, "\tau"'] & \\
 & T
\end{tikzcd}$$

ist kommutativ, d. h.
$(\psi \circ \varphi) \circ \tau = \psi \circ (\varphi \circ \tau) = \psi \circ \tau' = \tau$ mit $id : T \to T$ ist das Diagramm auch kommutativ. Wegen der Eindeutigkeit in der Definition des Tensorprodukts muss gelten: $\psi \circ \varphi = id_T$. (Der Beweis von $\varphi \circ \psi = id_{T'}$ ist analog.) Also ist $T \cong T'$.

Bemerkung 1.9
Für alle R-Moduln M, N, M_1, M_2, M_3 gilt:

(a) $M \otimes_R R \cong M$

(b) $M \otimes_R N \cong N \otimes_R M$

(c) $(M_1 \otimes_R M_2) \otimes_R M_3 \cong M_1 \otimes_R (M_2 \otimes_R M_3)$

Beweis

a) Zeige: M ist Tensorprodukt der R-Moduln M und R.
$\tau : M \times R \to M$, $(x, a) \to a \cdot x$ ist bilinear (wegen Moduleigenschaften). Sei $\Phi : M \times R \to P$ bilinear.
Gesucht: $\varphi : M \to P$ linear mit $\Phi = \varphi \circ \tau$, d. h. $\Phi(x, a) = \varphi(a \cdot x)$
Setze $\varphi(x) := \Phi(x, 1)$. φ ist R-linear, da $\Phi(\cdot, 1)$ linear ist, $\Phi(x, a) = a\Phi(x, 1) = a\varphi(x) = \varphi(a \cdot x) = \varphi(\tau(x, a))$
φ ist eindeutig: es muss gelten: $\varphi(\tau(x, 1)) = \Phi(x, 1) =: \varphi(x)$, damit ist φ eindeutig bestimmt (wegen $\varphi \circ \tau = \Phi$).

b) $M \times N \cong N \times M$

c) Finde lineare Abbildung: $(M_1 \otimes_R M_2) \otimes_R M_3 \to M_1 \otimes_R (M_2 \otimes_R M_3)$

   1. Für festes $z \in M_3$ sei $\Phi_z : M_1 \times M_2 \to M_1 \otimes_R (M_2 \otimes_R M_3)$,
      $(x, y) \to x \otimes (y \otimes z) := \tau(y, z)$
      Φ_z bilinear: klar
      Φ_z induziert eine lineare Abbildung: $\varphi_z : M_1 \otimes_R M_2 \to M_1 \otimes_R (M_2 \otimes_R M_3)$
      Weiter ist $\Psi : (M_1 \otimes_R M_2) \times M_3 \to M_1 \otimes_R (M_2 \otimes_R M_3)$, $(w, z) \to \varphi_z(w)$
      bilinear: linear in w, weil φ_z linear; linear in z weil Φ_z linear in z.
      Induziert also lineare Abbildung $\psi : (M_1 \otimes_R M_2) \otimes_R M_3 \to M_1 \otimes_R (M_2 \otimes_R M_3)$
   2. Umkehrabbildung genauso!

Proposition 1.10
Sei M ein R-Modul, $I \subseteq R$ ein Ideal. Dann ist $I \cdot M = \{a \cdot x \in M : x \in M, a \in I\}$ Untermodul von M und es gilt:

$$^{M}\!/_{I \cdot M} \cong M \otimes_R {}^{R}\!/_{I}$$

Beweis
Sei $\tilde{\varphi} : M \to M \otimes_R R/I$, $x \to x \otimes \overline{1}$
$\tilde{\varphi}$ ist R-linear.
$I \cdot M \subseteq \operatorname{Kern}(\tilde{\varphi}) : \forall a \in I, x \in M$ ist $\tilde{\varphi}(ax) = ax \otimes \overline{1} = x \otimes \underbrace{a \cdot \overline{1}}_{\overline{a}} = 0$
$\tilde{\varphi}$ induziert also lineare Abbildung
$\varphi : M/(I \cdot M) \to M \otimes_R R/I$
Umgekehrt: $\Psi : M \times R/I \to M/(I \cdot M)$, $(x, \overline{a}) \to \overline{ax}$
Ψ ist wohldefiniert: ist $\overline{b} = \overline{a}$, so ist $\overline{b \cdot x} - \overline{a \cdot x} = \overline{\underbrace{(\underbrace{b - a}_{\in I}) \cdot x}_{\in I \cdot M}} = 0$
Ψ ist bilinear, induziert also $\psi : M \otimes_R R/I \to M/(I \cdot M)$ (linear). Es ist $(\psi \circ \varphi)(\overline{x}) = \psi(x \otimes \overline{1}) = \overline{1x} = \overline{x}$ und $(\varphi \circ \psi)(x \otimes \overline{a}) = \varphi(\overline{a \cdot x}) = ax \otimes \overline{1} = x \otimes a \cdot \overline{1} = x \otimes \overline{a}$

§3 Flache Moduln

Bemerkung 1.11
Für jeden R-Modul M ist die Zuordnung $M \mapsto M \otimes_R N$ ein Funktor

$$\otimes_R N : \underline{R\text{-Mod}} \to \underline{R\text{-Mod}}$$

Beweis
Ist $\varphi : M \to M'$ R-linear, so setze $\varphi_N : M \otimes_R N \to M' \otimes_R N, x \otimes y \mapsto \varphi(x) \otimes y$ und linear fortgesetzt: $\sum_{i=0}^{n} a_i(x_i \otimes y_i) \mapsto \sum_{i=0}^{n} a_i(\varphi(x_i) \otimes y_i)$

Proposition 1.12
Der Funktor $\otimes_R N$ ist rechtsexakt, d.h. ist $0 \to M' \xrightarrow{\varphi} M \xrightarrow{\psi} M'' \to 0$ exakt,
so ist $M' \otimes_R N \xrightarrow{\varphi_N} M \otimes_R N \xrightarrow{\psi_N} M'' \otimes_R N \to 0$ exakt.

Beispiele
Seien $R = \mathbb{Z}$ und $N = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$.
Die Sequenz $0 \to \mathbb{Z} \xrightarrow{\cdot 2} \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \to 0$ ist exakt, und nach Prop. 1.12 ist somit auch die Sequenz $\mathbb{Z} \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \xrightarrow{\cdot 2} \mathbb{Z} \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \to \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \to 0$ exakt, doch der erste Pfeil in dieser Sequenz ist die Nullabbildung $\varphi_N : \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \to \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ ($\cong \mathbb{Z} \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ nach 1.9a) und somit nicht injektiv, d. h. die Sequenz läßt sich nicht zu einer exakten Sequenz $0 \to \mathbb{Z} \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \xrightarrow{\cdot 2} \mathbb{Z} \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \to \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \to 0$ verlängern.

Beweis
1. Schritt: $\text{Bild}(\varphi_N) \subseteq \text{Kern}(\psi_N)$, denn: $\psi_N(\varphi_N(x \otimes y)) = \psi_N(\varphi(x) \otimes y) = \underbrace{\psi(\varphi}_{=0}(x)) \otimes y = 0$.

Der Homomorphiesatz liefert ein $\Psi : {M \otimes_R N}/{\text{Bild}(\varphi_N)} \to M'' \otimes_R N$ mit der Eigenschaft, dass $\Psi(\overline{x}) = \psi_N(x)$ für jedes $x \in M \otimes_R N$ gilt.
2. Schritt: Ψ ist Isomorphismus.
Wenn dies gezeigt ist, ist klar, daß Ψ und damit ψ_N surjektiv ist und $\text{Kern}(\psi_N) = \text{Bild}(\varphi_N)$ gilt.
Zeige also, dass Ψ Isomorphismus ist.
Konstruiere Umkehrabbildung $\sigma : M'' \otimes_R N \to \bar{M} := {M \otimes_R N}/{\text{Bild}(\varphi_N)}$ folgendermaßen:
Wähle zu jedem $x'' \in M''$ ein Urbild $\chi(x'') \in \psi^{-1}(x'') \subset M$.
Definiere eine Abbildung $\tilde{\sigma} : M'' \times N \to \bar{M}$ durch $(x'', y) \mapsto \overline{\chi(x'') \otimes y}$.
Beweis, dass $\tilde{\sigma}$ wohldefiniert ist: Sind $x_1, x_2 \in M$ mit $\psi(x_1) = \psi(x_2) = x''$, so ist $x_1 - x_2 \in \text{Kern}(\psi) = \text{Bild}(\varphi)$, also $x_1 - x_2 = \varphi(x')$ für ein $x' \in M'$, daher $\overline{x_1 \otimes y} - \overline{x_2 \otimes y} = \overline{\underbrace{\varphi(x') \otimes y}_{\in \text{Bild}(\varphi_N)}} = 0$.

Rest klar!!

Definition + Proposition 1.13
Sei N ein R-Modul.

(a) N heißt ***flach***, wenn, wenn der Funktor $\otimes_R N$ exakt ist, d.h. für jede kurze exakte Sequenz von R-Moduln $0 \to M' \to M \to M'' \to 0$ auch $0 \to M' \otimes_R N \to M \otimes_R N \to M'' \otimes_R N \to 0$ exakt ist.
(b) N ist genau dann flach, wenn für jeden R-Modul M und jeden Untermodul M' von M die Abbildung $i : M' \otimes_R N \to M \otimes_R N$ injektiv ist.
(c) Jeder projektive R-Modul ist flach.
(d) Ist $R = K$ ein Körper, so ist jeder R-Modul flach.
(e) Für jedes multiplikative Monoid S ist R_S flacher R-Modul.

Beweis
(b) folgt aus Prop 1.12.

(e) Sei M ein R-Modul, und sei $M' \subseteq M$ ein R-Untermodul. Nach Ü2A4 ist $M \otimes_R R_S \cong M_S$. Zu zeigen: Die Abbildung $M'_S \to M_S, \frac{a}{s} \mapsto \frac{a}{s}$ ist injektiv.
Sei also $a \in M'$ und $\frac{a}{s} = 0$ in M_S, d.h. in M gilt: $t \cdot a = 0$ für ein $t \in S$. $\Rightarrow t \cdot a = 0$ in $M' \Rightarrow \frac{a}{s} = 0$ in M'_S.

(d) folgt aus (c), weil jeder K-Modul frei ist, also projektiv.

(c) Sei N projektiv. Nach Prop. 1.6 gibt es einen R-Modul N', sodass $N \oplus N' =: F$ frei ist.
Beh. 1: F ist flach.
Dann sei M ein R-Modul, und $M' \subseteq M$ ein Untermodul; dann ist $F \otimes_R M' \to F \otimes_R M$ injektiv.
Beh. 2: Tensorprodukt vertauscht mit direkter Summe.

$$\begin{array}{llcll} \text{Dann ist} & M' \otimes_R F & \cong M' \otimes_R (N \oplus N') & \cong (M' \otimes_R N) & \oplus \quad (M' \otimes_R N') \\ & \downarrow & & \downarrow & \qquad \downarrow \\ \text{und} & M \otimes_R R & & \cong (M \otimes_R N) & \oplus \quad (M \otimes_R N') \end{array}$$

Die Abbildung $M' \otimes_R F \to M \otimes_R F$ bildet $M' \otimes_R N$ auf $M \otimes_R N$ ab, $M' \otimes_R N \to M \otimes_R N$ ist also als Einschränkung einer injektiven Abbildung selbst injektiv.

Bew. 1: Sei $\{e_i : i \in I\}$ Basis von F, also $F = \bigoplus_{i \in I} Re_i \cong \bigoplus_{i \in I} R$. Wegen Beh. 2 ist

$$M \otimes_R F \cong M \otimes_R \bigoplus_{i \in I} R \cong \bigoplus_{i \in I} (M \otimes_R R) = \bigoplus_{i \in I} M$$

Genauso: $M' \otimes_R F \cong \bigoplus_{i \in I} M'$.
Die Abbildung $M' \otimes_R F \to M \otimes_R F$ ist in jeder Komponente die Einbettung $M' \hookrightarrow M$, also injektiv.

Bew. 2: Sei $M = \bigoplus_{i \in I} M_i$, zu zeigen: $M \otimes_R N \cong \bigoplus_{i \in I} (M_i \otimes_R N)$.
Die Abbildung $M \times N \to \bigoplus_{i \in I} (M_i \otimes_R N), ((x_i)_{i \in I}, y) \mapsto (x_i \otimes y)_{i \in I}$ ist bilinear, induziert also eine R-lineare Abbildung $\varphi : M \otimes_R N \to \bigoplus_{i \in I} (M_i \otimes_R N)$.
Umgekehrt: Für jedes $i \in I$ induziert die Inklusion $M_i \hookrightarrow M$ eine R-lineare Abbildung $\psi_i : M_i \otimes_R N \to M \otimes_R N$; die ψ_i induzieren $\psi : \bigoplus_{i \in I} (M_i \otimes_R N) \to M \otimes_R N$ (UAE der direkten Summe).
„Nachrechnen“: φ und ψ sind zueinander invers.

§4 Tensoralgebra

Definition 1.14
Eine R-***Algebra*** ist ein (kommutativer) Ring (mit Eins) R' zusammen mit einem Ringhomomorphismus $\alpha : R \to R'$. Ist α injektiv, so heißt R'/R auch ***Ringerweiterung***.

Bemerkung 1.15
Sei R' eine R-Algebra.

(a) Die Zuordnung $M \to M \otimes_R R'$ ist ein kovarianter rechtsexakter Funktor $\otimes_R R' : \underline{R\text{-Mod}} \to \underline{R'\text{-Mod}}$; dabei wird $M \otimes_R R'$ zum R'-Modul durch $b \cdot (x \otimes a) := x \otimes b \cdot a$.

(b) Sei $V : \underline{R'\text{-Mod}} \to \underline{R\text{-Mod}}$ der „Vergiss-Funktor“, der jeden R'-Modul als R-Modul auffasst, mit der Skalarmultiplikation $a \cdot x := \alpha(a) \cdot x$ für $a \in R, x \in M$.
Dann ist $\otimes_R R'$ „links adjungiert“ zu V, d.h. für alle R-Moduln M und R'-Moduln M' sind $\mathrm{Hom}_R(M, V(M'))$ und $\mathrm{Hom}_{R'}(M \otimes_R R', M')$ isomorph (als R-Moduln).

Beweis

(b) Die Zuordnungen

$$\begin{array}{rcl} \mathrm{Hom}_R(M, V(M')) & \to & \mathrm{Hom}_{R'}(M \otimes_R R', M') \\ \varphi & \mapsto & (x \otimes a \mapsto a \cdot \varphi(x)) \\ (x \mapsto \psi(x \otimes 1)) & \leftarrow\!\shortmid & \psi \end{array}$$

sind zueinander invers.

Beispiele
Sei R' eine R-Algebra, und sei F ein freier R-Modul mit Basis $\{e_i : i \in I\}$. Dann ist $F \otimes_R R'$ ein freier R'-Modul mit Basis $\{e_i \otimes 1 : i \in I\}$.

denn: Sei M ein beliebiger R'-Modul, und $f : \{e_i \otimes 1 : i \in I\} \to M$ eine Abbildung. Dann gibt es genau eine R-lineare Abbildung $\varphi : F \to V(M)$ mit $\varphi(e_i) = f(e_i \otimes 1)$ (UAE für F). Mit 1.15 (b) folgt: dazu gehört eine eindeutige R'-lineare Abbildung $\tilde{\varphi} : F \otimes_R R' \to M$ mit $\tilde{\varphi}(e_i \otimes 1) = \varphi(e_i)$.

Proposition 1.16
Seien R', R'' R-Algebren.

(a) $R' \otimes_R R''$ wird zur R-Algebra durch $(a_1 \otimes b_1) \cdot (a_2 \otimes b_2) := a_1 a_2 \otimes b_1 b_2$

(b) $\sigma' : R' \to R' \otimes_R R'', a \mapsto a \otimes 1$ und
$\sigma'' : R'' \to R' \otimes_R R'', b \mapsto 1 \otimes b$ sind R-Algebrenhomomorphismen.

(c) UAE: Sei A eine beliebige R-Algebra. In der Kategorie der R-Algebren gilt:

$$\begin{tikzcd} R' \arrow[d, "\sigma'"'] \arrow[dr, "\varphi'"] & \\ R' \otimes_R R'' \arrow[r, "\exists!\varphi"] & A \\ R'' \arrow[u, "\sigma''"] \arrow[ur, "\varphi''"'] & \end{tikzcd}$$

Beweis
(c) Definiere eine lineare Abbildung $\varphi : R' \otimes_R R'' \to A$ durch $\varphi(a \otimes b) = \varphi'(a) \cdot \varphi''(b)$.

φ ist die lineare Abbildung, die von der bilinearen Abbildung $\tilde{\Phi} : R' \times R'' \to A$, $(a, b) \mapsto \varphi'(a) \cdot \varphi''(b)$ induziert wird.

Nachrechnen: φ ist Ringhomomorphismus und eindeutig bestimmt.
Beobachte: $a \otimes b = (a \otimes 1)(1 \otimes b) = \sigma'(a)\sigma''(b)$.
Also muss gelten: $\varphi(a \otimes b) = \underbrace{(\varphi \circ \sigma')(a)}_{\varphi'(a)} \cdot \underbrace{(\varphi \circ \sigma'')(b)}_{\varphi''(b)}$.

Beispiele
R' sei eine R-Algebra. Dann ist $R'[X] \cong R[X] \otimes_R R'$ (als R'-Algebren), denn:

Zeige, dass $R[X] \otimes_R R'$ die UAE des Polynomrings $R'[X]$ erfüllt.

Sei A eine R'-Algebra und $a \in A$. Zu zeigen: $\exists!$ R'-Algebrahomomorphismus $\varphi : R[X] \otimes_R R' \to A$ mit $\varphi(X \otimes 1) = a$. Ein solcher wird als R-Algebra-Homomorphismus induziert von $\varphi' : R[X] \to A, X \mapsto a$ und $\varphi'' : R' \to A$ (der Strukturhomomorphismus α aus der Definition)
Noch zu zeigen: φ ist R'-linear (richtig, weil φ'' Ringhomomorphismus)

Definition + Bemerkung 1.17
Sei M ein R-Modul

a) $T^0(M) := R$, $T^n(M) = M \otimes_R T^{n-1}(M), n \geq 1$
b) $T(M) := \bigoplus_{n=0}^{\infty} T^n(M)$ wird zur R-Algebra durch $(x_1 \otimes \cdots \otimes x_n) \cdot (y_1 \otimes \cdots \otimes y_m) := x_1 \otimes \cdots \otimes x_n \otimes y_1 \otimes \cdots \otimes y_m \in T^{n+m}(M)$ (wenn auch nicht zu einer R-Algebra im Sinne von Definition Def. 1.14, da die Multiplikation in $T(M)$ nicht immer kommutativ ist).
c) $T(M)$ ist nicht kommutativ (im Allgemeinen), denn $x \otimes y \neq y \otimes x$.
d) $T(M)$ erfüllt UAE: Ist R' eine R-Algebra (nicht notwendig kommutativ), und ist $\varphi : M \to R'$ R-linear, so $\exists!$ R-Algebra-Homomorphismus
$\tilde{\varphi} : T(M) \to R'$ mit $\tilde{\varphi}|_{\underbrace{T^1(M)}_{=M}} = \varphi$

§5 Symmetrische und äußere Algebra

Definition 1.18
Seien M, N R-Moduln, $n \geq 0$, und sei $\Phi : M^n \to N$ R-multilinear.

a) Φ heißt ***symmetrisch***, wenn für alle $(x_1, \dots, x_n) \in M^n$ und alle $\sigma \in S_n$ gilt:
$\Phi(x_1, \dots, x_n) = \Phi(x_{\sigma(1)}, \dots, x_{\sigma(n)})$. (Wenn $n = 0$ oder $n = 1$ ist, ist also jedes Φ symmetrisch.)
b) Φ heißt ***alternierend***, wenn für alle $(x_1, \dots, x_n) \in M^n$ gilt:
Ist $x_i = x_j$ für ein Paar (x_i, x_j) mit $i \neq j$, so ist $\Phi(x_1, \dots, x_n) = 0$
Wenn 2 in R invertierbar ist (z. B. also wannimmer R ein Körper von Charakteristik $\neq 2$ ist), ist dies äquivalent zu $\Phi(x_1, \dots, x_n) = -\Phi(x_1, \dots, x_j, \dots, x_i, \dots, x_n)$ für alle $(x_1, \dots, x_n) \in M^n$. (Wenn $n = 0$ oder $n = 1$ ist, ist also jedes Φ alternierend.)
c) $\mathrm{Sym}^n_M(N) := \{\Phi : M^n \to N : \Phi \text{ multilinear, symmetrisch}\}$
$\mathrm{Alt}^n_M(N) := \{\Phi : M^n \to N : \Phi \text{ multilinear, alternierend}\}$
$\mathrm{Sym}^n_M(N)$ und $\mathrm{Alt}^n_M(N)$ sind R-Moduln.

Satz 2 (Symmetrische und äußere Potenz)
Zu jedem R-Modul M und jedem $n \geq 0$ gibt es R-Moduln $S^n(M)$ und $\Lambda^n(M)$ (genannt die n-te ***symmetrische*** bzw. ***äußere Potenz*** von M) und eine symmetrische bzw. alternierende multilineare Abbildung $M^n \to S^n(M)$ bzw. $M^n \to \Lambda^n(M)$ mit folgender UAE:

$$\begin{tikzcd} M^n \arrow[rr] \arrow[dr, "\Phi\in\mathrm{Sym}^n_M(N)"'] & & S^n(M) \arrow[dl, "\exists!\varphi\text{ linear}"] \\ & N & \end{tikzcd} \quad \text{bzw.} \quad \begin{tikzcd} M^n \arrow[rr] \arrow[dr, "\Psi\in\mathrm{Alt}^n_M(N)"'] & & \Lambda^n(M) \arrow[dl, "\exists!\psi\text{ linear}"] \\ & N & \end{tikzcd}$$

Mit $S^0(M) := R =: \Lambda^0(M)$ heißt $S(M) := \bigoplus_{n\geq 0} S^n(M)$ die ***symmetrische Algebra*** über M
$\Lambda(M) := \bigoplus_{n\geq 0} \Lambda^n(M)$ die ***äußere Algebra*** über M (oder ***Graßmann-Algebra***)

Beweis
Sei $\mathbb{J}^n(M)$ der Untermodul von $T^n(M)$, der erzeugt wird von allen
$x_1 \otimes \cdots \otimes x_n - x_{\sigma(1)} \otimes \cdots \otimes x_{\sigma(n)}$, $x_i \in M$, $\sigma \in S_n$ und
$\mathbb{I}^n(M)$ der Untermodul von $T^n(M)$, der erzeugt wird von allen
$x_1 \otimes \cdots \otimes x_n$ für die $x_i = x_j$ für ein Paar (i, j) mit $i \neq j$.
Setze $S^n(M) := T^n(M)/\mathbb{J}^n(M)$ und $\Lambda^n(M) := T^n(M)/\mathbb{I}^n(M)$

Sei $\Phi : M^n \to N$ multilinear und symmetrisch. Φ induziert $\tilde{\varphi} : T^n(M) \to N$ R-linear (weil Φ multilinear), da Φ symmetrisch ist, ist $\mathbb{J}(M) \subseteq \text{Kern}(\tilde{\varphi})$. $\tilde{\varphi}$ induziert also $\varphi : S^n(M) \to N$ R-linear; genauso falls $\Psi : M^n \to N$ alternierend.

Proposition 1.19
Sei M freier R-Modul mit Basis $e_1, \dots, e_r$. Dann gilt für jedes $n \geq 0$:

a) $S^n(M)$ ist freier Modul mit Basis $\{e_1^{\nu_1} \cdot \dots \cdot e_r^{\nu_r} : \sum_{i=1}^r \nu_i = n\}$
b) $S(M) \cong R[X_1, \dots, X_r]$
c) $\Lambda^n(M)$ ist freier R-Modul mit Basis
$\{e_{i_1} \wedge \dots \wedge e_{i_n} : 1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_n \leq r\}$
d) $\Lambda^n(M) = 0$ für $n > r$

Beweis
b) folgt aus a)
d) folgt aus c)
c) $\Lambda^r(M)$ wird erzeugt von $e_1 \wedge \dots \wedge e_r$: klar.
$\Lambda^r(M)$ ist frei (vom Rang 1), denn aus $a \cdot e_1 \wedge \dots \wedge e_r = 0$ folgt $a = 0$ (weil die Determinantenabbildung $M^r \to R$ multilinear und alternierend ist, und daher gemäß der UAE eine lineare Abbildung $\Lambda^r(M) \to R$ induziert, welche $a \cdot e_1 \wedge \dots \wedge e_r = 0$ auf a sendet).
Für jedes n bilden $\{e_{i_1} \wedge \dots \wedge e_{i_n} : 1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_n \leq r\}$ ein Erzeugendensystem von $\Lambda^n(M)$.
Zu zeigen: $\{e_{i_1} \wedge \dots \wedge e_{i_n} : 1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_n \leq r\}$ ist linear unabhängig.
Sei dazu $\sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_n \leq r} a_{\underline{i}} e_{i_1} \wedge \dots \wedge e_{i_n} = 0$, wobei $\underline{i}$ kurz für $(i_1, i_2, \dots, i_n)$ steht.
Für jedes $\underline{j} = (j_1, j_2, \dots, j_n)$ mit $1 \leq j_1 < \dots < j_n \leq r$ existiert nun ein $\sigma_{\underline{j}} \in S_r$ mit $\sigma_{\underline{j}}(\nu) = j_\nu$ für alle $\nu = 1, \dots, n$. Mit diesem σ gilt $0 = (\sum a_{\underline{i}} e_{i_1} \wedge \dots \wedge e_{i_n}) \wedge e_{\sigma_{\underline{j}}(n+1)} \wedge \dots \wedge e_{\sigma_{\underline{j}}(r)} = a_{\underline{j}}(e_{j_1} \wedge \dots \wedge e_{j_n}) \wedge e_{\sigma_{\underline{j}}(n+1)} \wedge \dots \wedge e_{\sigma_{\underline{j}}(r)} = a_{\underline{j}}(e_{\sigma_{\underline{j}}(1)} \wedge \dots \wedge e_{\sigma_{\underline{j}}(n)}) \wedge e_{\sigma_{\underline{j}}(n+1)} \wedge \dots \wedge e_{\sigma_{\underline{j}}(r)} = (-1)^{\sigma_{\underline{j}}} a_{\underline{j}} e_1 \wedge \dots \wedge e_r$, also $a_{\underline{j}} = 0 \Rightarrow$ l.u.

§6 Differentiale

Definition + Bemerkung 1.20
Sei A eine kommutative R-Algebra, M ein A-Modul.

(a) Eine R-lineare Abbildung $\delta : A \to M$ heißt ***Derivation***, wenn für alle $f, g \in A$ gilt:
$$\delta(f \cdot g) = f \cdot \delta(g) + g \cdot \delta(f)$$
(b) $\text{Der}_R(A, M) := \{\delta : A \to M : \delta\ R\text{-lineare Derivation}\}$ ist ein A-Modul.
(c) $M \mapsto \text{Der}_R(A, M)$ ist ein Funktor (Unterfunktor von $\text{Hom}_R(A, \cdot)$).

Wie man an dieser Definition sieht, hängt der Begriff einer "Derivationnnicht nur von A, sondern auch vom Grundring R ab. Wenn der Grundring nicht aus dem Kontext heraus klar ist (z. B. wenn zwei verschiedene Grundringe möglich sind), werden wir diese Abhängigkeit explizit machen, indem wir von *R-linearen Derivationen* statt einfach nur von *Derivationen* sprechen.

Beispiele
1.) $A = R[X], d = \frac{d}{dX}$ ist eine R-Derivation $d : A \to A$, definiert durch $d(\sum_{i=0}^n a_i X^i) := \sum_{i=1}^n a_i i X^{i-1}$

Beh.: In dieser Situation gilt $\mathrm{Der}_R(A, A) = A \cdot d$
Bew.: Dass $A \cdot d \subseteq \mathrm{Der}_R(A, A)$ gilt, ist klar. Wir müssen also die umgekehrte Inklusion nachweisen.
Sei $\delta : A \to A$ eine R-lineare Derivation. Sei $f := \delta(X)$.
Dann ist $\delta(1) = \delta(1 \cdot 1) = 1 \cdot \delta(1) + 1 \cdot \delta(1) \Rightarrow \delta(1) = 0 \Rightarrow \forall r \in R : \delta(r) = 0$ (denn δ ist R-linear).
Ferner ist $\delta(X^2) = 2 \cdot X \cdot \delta(X) = 2 \cdot X \cdot f$. Allgemeiner gilt $\delta(X^n) = n \cdot X^{n-1} \cdot f$ für jedes $n \geq 1$ (Beweis durch Induktion nach n, mit Induktionsschritt $\delta(X^n) = \delta\left(XX^{n-1}\right) = X \cdot \delta(X^{n-1}) + X^{n-1} \cdot \delta(X) = n \cdot X^{n-1} \cdot f$). Da δ eine R-lineare Abbildung ist, folgt hieraus $\delta(\sum a_i X^i) = \sum a_i i X^{i-1} \cdot f$ für jede endliche Summe $\sum a_i X^i$ mit $a_i \in R$. Daher ist $\delta = f \cdot d$, was zu zeigen war.

2.) $A = R[\![X]\!], d = \frac{d}{dX}$ wie in 1.) mit ∞ statt n.
Beh.: Auch hier gilt $\mathrm{Der}_R(A, A) = A \cdot d$
Bew.: Wie in **1.)** ist $A \cdot d \subseteq \mathrm{Der}_R(A, A)$ offensichtlich. Sei also $\delta : A \to A$ eine R-lineare Derivation. Sei $f := \delta(X)$.
Wie in **1.)** können wir zeigen, dass $\delta(X^n) = n \cdot X^{n-1} \cdot f$ für jedes $n \geq 1$ gilt. Für jede Potenzreihe $P \in A$ und jedes $n \geq 1$ ist also $\delta\left(X^n P\right) = X^n \delta\left(P\right) + P \underbrace{\delta\left(X^n\right)}_{=n \cdot X^{n-1} \cdot f} = X^n \delta\left(P\right) + Pn \cdot X^{n-1} \cdot f = X^{n-1}\left(\delta\left(P\right) + Pnf\right)$ durch X^{n-1} teilbar.
Wie in **1.)** können wir zeigen, dass $\delta(\sum a_i X^i) = \sum a_i i X^{i-1} \cdot f$ für jede endliche Summe $\sum a_i X^i$ mit $a_i \in R$ gilt. Das heißt, $\delta\left(S\right) = f \cdot d\left(S\right)$ für jedes Polynom $S \in R\left[X\right]$.
Sei nun $Q \in A = R\left[\left[X\right]\right]$ eine Potenzreihe. Für jedes $n \geq 1$ läßt sich Q schreiben als Summe $Q = S + X^n P$, wobei $S \in R\left[X\right]$ ein Polynom und $P \in A$ eine Potenzreihe ist. Damit ist $\delta\left(Q\right) = \delta\left(S + X^n P\right) = \delta\left(S\right) + \delta\left(X^n P\right) \equiv \delta\left(S\right) \mod X^{n-1}$ (denn $\delta\left(X^n P\right)$ ist durch X^{n-1} teilbar). Andererseits ist $d\left(Q\right) = d\left(S + X^n P\right) = d\left(S\right) + d\left(X^n P\right) \equiv d\left(S\right) \mod X^{n-1}$ (denn $d\left(X^n P\right)$ ist durch X^{n-1} teilbar). Somit ist $\delta\left(Q\right) \equiv \delta\left(S\right) = f \cdot \underbrace{d\left(S\right)}_{\equiv d(Q) \mod X^{n-1}} \equiv f \cdot d\left(Q\right) \mod X^{n-1}$. Da dies für alle $n \geq 1$ gilt, muß folglich $\delta\left(Q\right) = f \cdot d\left(Q\right)$ sein. Da dies für alle Potenzreihen Q gilt, ist also $\delta = f \cdot d$, und wieder ist der Beweis vollendet.

3.) $A = R[X_1, \ldots, X_n]$, $\partial_i = \frac{\partial}{\partial X_i}$ ist Derivation genauso wie für 1.)
$\mathrm{Der}_R(A, A)$ ist freier A-Modul mit Basis $\partial_1, \ldots, \partial_n$.

Die in Beispiel 1.) observierte Tatsache, dass $\delta\left(r\right) = 0$ für jedes $r \in R$ ist, gilt allgemein für jede Derivation $\delta : A \to M$ aus jeder kommutativen R-Algebra A in jeden A-Modul M. Insbesondere gilt also stets $\delta\left(1\right) = 0$.

Proposition + Definition 1.21
Der Funktor $M \mapsto \mathrm{Der}_R(A, M)$ ist „darstellbar“, d.h. es gibt einen A-Modul $\Omega_{A/R}$ und eine (R-lineare) Derivation $d : A \to \Omega_{A/R}$ mit folgender UAE:
Zu jedem A-Modul M und jeder (R-linearen) Derivation $\delta : A \to M$ existiert genau eine A-lineare Abbildung $\varphi : \Omega_{A/R} \to M$ mit $\delta = \varphi \circ d$.

$$\begin{tikzcd} A \arrow[rr, "d"] \arrow[dr, "\delta"'] & & \Omega_{A/R} \arrow[dl, dashed, "\exists! \varphi"] \\ & M & \end{tikzcd}$$

Beweis
Sei F der freie A-Modul mit Basis A, dabei sei X_f das zu $f \in A$ gehörige Basiselement von F. Sei U der Untermodul von F, der erzeugt wird von allen

$$\left.\begin{array}{l} X_{f+g} - X_f - X_g \\ X_{\lambda f} - \lambda X_f \\ X_{f \cdot g} - f \cdot X_g - g \cdot X_f \end{array}\right\} \text{für alle } f, g \in A, \lambda \in R$$

Sei $\Omega_{A/R} := F/U$, und definiere eine Abbildung $d : A \to \Omega_{A/R}, f \mapsto [X_f] =: df$. Diese Abbildung d ist eine Derivation nach Konstruktion („universelle Derivation").

UAE: Sei M A-Modul, $\delta : A \to M$ Derivation. Sei $\Phi : F \to M$ die A-lineare Abbildung mit $\Phi(X_f) = \delta(f)$. Dann ist $U \subseteq \operatorname{Kern}(\Phi)$, weil δ Derivation, d.h. Φ induziert $\varphi : F/U \to M$.

Beispiele
Sei $A = R[X_1, \ldots, X_n]$. Dann ist $\Omega_{A/R}$ ein freier A-Modul mit Basis $dX_1, \ldots dX_n$.
Beweis: Für $f = \sum_{\nu=(\nu_1,\ldots,\nu_n)} a_\nu X_1^{\nu_1} \cdot \cdots \cdot X_n^{\nu_n} \in A$ $(a_\nu \in R)$ ist $df = \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial X_i} dX_i$
$\Rightarrow$ die dX_i erzeugen $\Omega_{A/R}$.

Nach Prop. 1.21 ist $\boxed{\operatorname{Der}_R(A, A) = \operatorname{Hom}_A(\Omega_{A/R}, A)}$.

$$\begin{tikzcd} A \arrow[rr, "d"] \arrow[dr, "\delta"'] & & \Omega_{A/R} \arrow[dl, dashed, "\exists!\varphi"] \\ & A & \end{tikzcd}$$

Zu zeigen: die dX_i sind linear unabhängig.
Sei also $\sum_{i=1}^n a_i dX_i = 0$ mit $a_i \in A$. Für jedes j ist $\frac{\partial}{\partial X_j} : A \to A$ eine Derivation, und somit existiert genau eine lineare A-lineare Abbildung $\varphi_j : \Omega_{A/R} \to A$ mit $\frac{\partial}{\partial X_j} = \varphi_j \circ d$ (gemäß der UAE von d). Aus $\sum_{i=1}^n a_i dX_i = 0$ folgt (durch Anwendung ebendieser Abbildung φ_j) nun $\sum_{i=1}^n a_i \frac{\partial}{\partial X_j} X_i = 0$. Wegen $\sum_{i=1}^n a_i \underbrace{\frac{\partial}{\partial X_j} X_i}_{=1 \text{ wenn } i=j \text{ und } 0 \text{ sonst}} = a_j$ ist also $a_j = 0$. Da dies für jedes j gezeigt ist, folgt hieraus die lineare Unabhängigkeit der dX_i.

Beispiele
Sei $X \subseteq \mathbb{R}^n$ offen (für ein $n \geq 1$), $A := \mathcal{C}^\infty(X)$ die $\mathbb{R}$-Algebra der beliebig oft differenzierbaren Funktionen auf X.
Beh.: $\operatorname{Der}_{\mathbb{R}}(A, A)$ ist ein freier A-Modul mit Basis $\partial_1, \ldots, \partial_n$ (mit $\partial_i := \frac{\partial}{\partial X_i}$ partielle Ableitung nach X_i).
Dann ist auch $\Omega_{A/\mathbb{R}}$ freier A-Modul mit Basis $dX_1, \ldots, dX_n$.
Beh.1: Für jedes $x \in X$ wird das Ideal $I_x = \{f \in A : f(x) = 0\}$ erzeugt von $X_i - x_i$ $i = 1, \ldots, n$ (Taylor-Entwicklung), wobei $x = (x_1, \ldots, x_n)$.
Sei nun $\partial : A \to A$ Derivation. Zu zeigen: $\partial = \sum_{i=1}^n \partial(X_i)\partial_i$.
Setze $\partial' := \partial - \sum_{i=1}^n \partial(X_i)\partial_i$.
Beh.2: Für jedes $x \in X$ ist $\partial'(I_x) \subseteq I_x$.
Bew.2: Sei $f \in I_x$. Also $f = \sum_{i=1}^n g_i(X_i - x_i)$ (siehe Beh. 1) mit $g_i \in A$. Also ist $\partial'(f) = \underbrace{\sum_{i=1}^n \partial'(g_i)(X_i - x_i)}_{\in I_x} + \sum_{i=1}^n g_i \underbrace{\partial'(X_i - x_i)}_{=0, \text{ da } \partial_j(X_i - x_i) = \delta_{ij}} \in I_x$. Also ist $\partial'(I_x) \subseteq I_x$ gezeigt.
Sei nun $g \in A, x \in X$. Schreibe $g = \underbrace{g - g(x)}_{\in I_x} + g(x) \Rightarrow \partial'(g) = \partial'(g - g(x)) \in I_x$
d.h. $\partial'(g)(x) = 0 \Rightarrow \partial'(g) = 0 \Rightarrow \partial' = 0$. Daher ist $\partial = \sum_{i=1}^n \partial(X_i)\partial_i$.

Proposition 1.22

a) $\Omega_{\cdot/R}$ ist ein Funktor $\underline{R\text{-Alg}} \to \underline{R\text{-Mod}}$.

Beweis
Sei $\varphi : A \to B$ ein R-Algebra-Homomorphismus. Wir suchen einen natürlichen R-Modulhomomorphismus $d\varphi : \Omega_{A/R} \to \Omega_{B/R}$. Wir wollen, daß $d\varphi$ folgendes Diagramm kommutativ macht:

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "d_A"] \arrow[d, "\varphi"'] & \Omega_{A/R} \arrow[d, dashed, "\exists!\, d\varphi\ A\text{-linear}"] \\ B \arrow[r, "d_B"] & \Omega_{B/R} \end{tikzcd}$$

Die Abbildung $d_B \circ \varphi : A \to \Omega_{B/R}$ erfüllt:
$d_B \circ \varphi(\lambda \cdot a) = d_B(\lambda\varphi(a)) = \lambda d_B(\varphi(a))\ \forall\ \lambda \in R, a \in A.$
$d_B \circ \varphi(a_1 \cdot a_2) = d_B(\varphi(a_1) \cdot \varphi(a_2)) = \varphi(a_1) \cdot d_B(\varphi(a_2)) + \varphi(a_2) \cdot d_B(\varphi(a_1)).$
Die Abbildung $d_B \circ \varphi$ ist also eine Derivation, wenn $\Omega_{B/R}$ vermöge φ als A-Modul aufgefasst wird. Gemäß der UAE gibt es also genau einen R-Modulhomomorphismus $d\varphi : \Omega_{A/R} \to \Omega_{B/R}$, für den obiges Diagramm kommutativ wird. Dadurch wird $\Omega_{\cdot/R}$ zu einem Funktor.

b) Sei $\varphi : A \to B$ ein R-Algebra-Homomorphismus. Man kann den A-Modul $\Omega_{A/R}$ aufwerten zum B-Modul durch $\otimes_A B$:

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "d_A"] \arrow[d, "\varphi"'] & \Omega_{A/R} \otimes_A B \arrow[d, dashed, "\exists!\, \alpha\ B\text{-linear}"] \\ B \arrow[r, "d_B"] & \Omega_{B/R} \end{tikzcd}$$

(wobei die oberen horizontale Abbildung strenggenommen nicht d_A, sondern $a \mapsto d_A(a) \otimes 1$ ist). Die Abbildung α ist dabei durch $\alpha(\omega \otimes b) = b \cdot d\varphi(\omega)$ definiert.

Betrachten wir B als A-Modul (statt als R-Modul), so liefert Proposition Prop. 1.21 einen B-Modul $\Omega_{B/A}$ und eine A-lineare Derivation $d_{B/A} : B \to \Omega_{B/A}$ mit folgender UAE:
Zu jedem B-Modul M und jeder A-linearen Derivation $\delta : B \to M$ existiert genau eine B-lineare Abbildung $\eta : \Omega_{B/A} \to M$ mit $\delta = \eta \circ d_{B/A}$.
Nun können wir aber die UAE von d_B (nicht die von $d_{B/A}$) auf den B-Modul $\Omega_{B/A}$ und die R-lineare Derivation $d_{B/A} : B \to \Omega_{B/A}$ anwenden. Dadurch erfahren wir, dass genau eine B-lineare Abbildung $\beta : \Omega_{B/R} \to \Omega_{B/A}$ mit $d_{B/A} = \beta \circ d_B$ existiert.
Für dieses β ist

$$\Omega_{A/R} \otimes_A B \xrightarrow{\alpha} \Omega_{B/R} \xrightarrow{\beta} \Omega_{B/A} \to 0$$

eine exakte Sequenz von B-Moduln.

Beweis
Dass β surjektiv ist, folgt leicht aus der Konstruktion von $\Omega_{\cdot/\cdot}$.

Als nächstes zeigen wir $\beta \circ \alpha = 0$ (d.h. Bild$(\alpha) \subseteq$ Kern(β)):
Wir haben $d_{B/A}\varphi(a) = 0$ für jedes $a \in A$.

(Denn da $d_{B/A}$ eine A-lineare Derivation ist, sendet sie alle „konstanten A-Funktionen" auf 0.) Wegen $d_{B/A} = \beta \circ d_B$ ist also $(\beta \circ d_B \circ \varphi)(a) = 0$ für jedes $a \in A$. Da $d_B \circ \varphi = \alpha \circ d_A$, wird dies zu $(\beta \circ \alpha \circ d_A)(a) = 0$. Das heißt, $\beta \circ \alpha = 0$ auf der Menge $d_A(A)$. Da der B-Modul $\Omega_{A/R} \otimes_A B$ aber von $d_A(A)$ erzeugt ist, und $\beta \circ \alpha$ eine B-lineare Abbildung ist, folgt hieraus, dass $\beta \circ \alpha = 0$ auf ganz $\Omega_{A/R} \otimes_A B$ ist. Damit ist $\mathrm{Bild}(\alpha) \subseteq \mathrm{Kern}(\beta)$ gezeigt.

Es bleibt nur noch, $\mathrm{Kern}(\beta) \subseteq \mathrm{Bild}(\alpha)$ zu verifizieren.
Wir bezeichnen d_B mit $d_{B/R}$, um Verwechselungen mit $d_{B/A}$ zu vermeiden.
Sei $\omega = \sum_{i=1}^n b_i d_{B/R}(c_i) \in \mathrm{Kern}(\beta)$ mit $b_i, c_i \in B$.
Aufgrund von $d_{B/A} = \beta \circ d_{B/R}$ ist dann $\beta(\omega) = \sum_{i=1}^n b_i d_{B/A}(c_i)$. Da $\omega \in \mathrm{Kern}(\beta)$ ist, ist also $\sum_{i=1}^n b_i d_{B/A}(c_i) = 0$.
Nun sei an die Moduln F und U aus dem Beweis von Prop. 1.21 erinnert, die dort in Abhängigkeit von einem Ring R und einem R-Modul A definiert wurden. Wir bezeichnen diese Moduln mit F_A und $U_{A/R}$, um die Abhängigkeit von A bzw. von A und R zu verdeutlichen. Indem wir die gleiche Konstruktion für B statt A durchführen, erhalten wir Moduln F_B und $U_{B/R}$, und wenn wir auch R durch A ersetzen, erhalten wir einen Modul $U_{B/A}$. So ist beispielsweise F_B der freie B-Modul mit Basis $\{X_b : b \in B\}$.
Aus $\sum_{i=1}^n b_i d_{B/A}(c_i) = 0$ in $\Omega_{B/A} = F_B/U_{B/A}$ folgt nun $\sum_{i=1}^n b_i X_{c_i} \in U_{B/A}$. Nach Definition von $U_{B/A}$ folgt hieraus $\sum_i b_i X_{c_i} = \sum_j b_j \underbrace{(X_{f_j+g_j} - X_{f_j} - X_{g_j})}_{\in U_{B/R}} + \sum_k b'_k (X_{\varphi(\lambda_k) g_k} - \varphi(\lambda_k) X_{g_k}) + \sum_l b''_l \underbrace{(X_{f_l g_l} - f_l X_{g_l} - g_l X_{f_l})}_{\in U_{B/R}}$ für gewisse $b_j, b'_k, b''_l \in B$, $f_j, f_l, g_k, g_j, g_l \in B$, $\lambda_k \in A$.
Projizieren wir diese Gleichung nach $F_B/U_{B/R} = \Omega_{B/R}$, so erhalten wir
$\sum_{i=1}^n b_i d_{B/R}(c_i) = \sum_k b'_k (d_{B/R}(\varphi(\lambda_k) g_k) - \varphi(\lambda_k) d_{B/R}(g_k))$.
Wegen $\sum_{i=1}^n b_i d_{B/R}(c_i) = \omega$ wird dies zu
$\omega = \sum_k b'_k (d_{B/R}(\varphi(\lambda_k) g_k) - \varphi(\lambda_k) d_{B/R}(g_k))$
$= \sum_k b'_k (\varphi(\lambda_k) d_{B/R}(g_k) + g_k d_{B/R}(\varphi(\lambda_k)) - \varphi(\lambda_k) d_{B/R}(g_k))$
$= \sum_k b'_k g_k d_{B/R}(\varphi(\lambda_k)) = \alpha(\sum_k d\lambda_k \otimes b'_k g_k) \in \mathrm{Bild}(\alpha)$.
Damit ist $\mathrm{Kern}(\beta) \subseteq \mathrm{Bild}(\alpha)$ nachgewiesen.

§7 Der de Rham-Komplex

Sei A eine (kommutative) R-Algebra.

Setze $\Omega_A := \Omega_{A/R}$ (definiert nach Definition 1.21). Dies ist ein A-Modul. Für jedes $i \geq 0$ setze $\Omega_A^i := \Lambda^i \Omega_A$ (wobei $\Lambda^i \Omega_A$ die i-te äußere Potenz des A-Moduls – nicht des R-Moduls – Ω_A bedeutet). Sei auch die Derivation $d : A \to \Omega_A$ definiert wie in Definition 1.21.

Satz + Definition 3

a) Es gibt eine eindeutig bestimmte Folge $(d_i)_{i \geq 0}$ von R-linearen Abbildungen $d_i : \Omega_A^i \to \Omega_A^{i+1}$ für alle $i \geq 0$, welche folgende Eigenschaften erfüllt:
   (i) $d_i(f \cdot \omega) = df \wedge \omega + f d_i(\omega)$ für alle $f \in A, \omega \in \Omega_A^i$.
   (ii) $d_{i+1} \circ d_i = 0$.
   (iii) $d_0 = d$.
b) Die Sequenz

$$A \xrightarrow{d_0} \Omega_A \xrightarrow{d_1} \Omega_A^2 \xrightarrow{d_2} \cdots \xrightarrow{d_{n-1}} \Omega_A^n \xrightarrow{d_n} \cdots$$

heißt ***de Rham-Komplex*** zu A, und wird mit $\Omega_A^\bullet$ bezeichnet.

c) Für jedes $i \geq 0$ heißt $H^i_{dR}(A) := {\mathrm{Kern}(d_i)}\big/{\mathrm{Bild}(d_{i-1})}$ (R-Modul) der i-te de Rham-Kohomologie-Modul von A. Dabei sei $d_{-1} = 0$, d.h. $H^0_{dR}(A) = \mathrm{Kern}(d) = R$.

Beweis
1. Fall: Es gilt $A = R[X_1, X_2, \dots, X_n]$.
Dann ist Ω_A^k freier A-Modul mit Basis $dX_{i_1} \wedge \dots \wedge dX_{i_k}$, $1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq n$.
Für jedes $f \in A$ ist $df = d_A f = \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial X_i} dX_i = \sum_{i=1}^n \partial_i f dX_i$.

Existenz der Folge $(d_i)_{i\geq 0}$**:** Erstmal läßt sich d_0 definieren durch $d_0 = d$. Damit ist (iii) erfüllt, und (i) gilt für $i = 0$ weil d eine Derivation ist.

Nun definieren wir d_1 durch $d_1(\sum_{i=1}^n f_i dX_i) = \sum_{i=1}^n df_i \wedge dX_i \in \Omega_A^2$ für alle $f_1, f_2, ..., f_n \in A$.

Konkretes Beispiel: $d_1(f_1 dX_1 + f_2 dX_2)$
$= (\frac{\partial f_1}{\partial X_1} dX_1 + \frac{\partial f_1}{\partial X_2} dX_2) \wedge dX_1 + (\frac{\partial f_2}{\partial X_1} dX_1 + \frac{\partial f_2}{\partial X_2} dX_2) \wedge dX_2 = (\frac{\partial f_2}{\partial X_1} - \frac{\partial f_1}{\partial X_2}) dX_1 \wedge dX_2$
(denn $dX_1 \wedge dX_1 = 0$, $dX_2 \wedge dX_2 = 0$ und $dX_2 \wedge dX_1 = -dX_1 \wedge dX_2$).

Allgemein definieren wir d_k für jedes $k \geq 0$ durch:
$$d_k\Big(\sum_{1\leq i_1<\dots<i_k\leq n} f_{i_1\dots i_k} dX_{i_1} \wedge \dots \wedge dX_{i_k}\Big) = \sum_{1\leq i_1<\dots<i_k\leq n} d(f_{i_1\dots i_k}) \wedge dX_{i_1} \wedge \dots \wedge dX_{i_k}$$
für alle Tupel $(f_{i_1\dots i_k})_{1\leq i_1<\dots<i_k\leq n}$ von Elementen von A.

Diese Definition von d_k stimmt in den Fällen $k = 0$ und $k = 1$ überein mit den oben gegebenen Definitionen von d_0 und d_1.

Diese d_k erfüllen (i), denn:

Sei $\omega = \sum_{\underline{i}} f_{\underline{i}} dX_{i_1} \wedge \dots \wedge dX_{i_k} \in \Omega_A^k$ (wobei alle $f_{\underline{i}}$ in A liegen) und sei $f \in A$. Hierbei ist $\underline{i}$ eine Abkürzung für ein k-Tupel $(i_1, i_2, \dots, i_k)$ natürlicher Zahlen, welches $1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq n$ erfüllt. Dann ist
$$d_k(f\omega) = \textstyle\sum_{\underline{i}} d(f f_{\underline{i}}) \wedge dX_{i_1} \wedge \dots \wedge dX_{i_k}$$
$$= \underbrace{\sum_{\underline{i}} f df_{\underline{i}} \wedge dX_{i_1} \wedge \dots \wedge dX_{i_k}}_{=f\cdot d_k(\omega)} + \underbrace{\sum_{\underline{i}} f_{\underline{i}} df \wedge dX_{i_1} \wedge \dots \wedge dX_{i_k}}_{=df\wedge\omega}$$
$$= f \cdot d_k(\omega) + df \wedge \omega.$$

Damit ist (i) für unsere Folge $(d_i)_{i\geq 0}$ bewiesen.

Jetzt zeigen wir, dass (ii) gilt. Sei $k \geq 0$. Wir müssen zeigen, dass $d_{k+1} \circ d_k = 0$ ist.

Dazu reicht es aus, zu beweisen, dass $(d_{k+1} \circ d_k)(f dX_{i_1} \wedge \dots \wedge dX_{i_k}) = 0$ für alle $f \in A$ und alle $1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq n$ gilt. Betrachten wir nun ein solches f und solche $1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq n$. Bezeichne $dX_{i_1} \wedge \dots \wedge dX_{i_k}$ mit ω. Dann gilt $d_k \omega = d_k(dX_{i_1} \wedge \dots \wedge dX_{i_k}) = 0$ (nach der Definition von d_k, denn $d(1) = 0$).

Wegen $dX_{i_1} \wedge \dots \wedge dX_{i_k} = \omega$ ist nun
$$(d_{k+1} \circ d_k)(f dX_{i_1} \wedge \dots \wedge dX_{i_k}) = (d_{k+1} \circ d_k)(f\omega) = d_{k+1}(d_k(f\omega)) \overset{\text{(i) für } d_k}{=} d_{k+1}(df \wedge \omega + f \underbrace{d_k\omega}_{=0})$$
$$= d_{k+1}(df \wedge \omega) = d_{k+1}\left(\left(\sum_{i=1}^n \partial f_i dX_i\right) \wedge \omega\right) = \sum_{i=1}^n d_{k+1}(\partial f_i \cdot dX_i \wedge \omega)$$
$$\overset{\text{nach Definition von } d_{k+1}}{=} \sum_{i=1}^n d(\partial_i f) \wedge dX_i \wedge \omega$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \partial_j(\partial_i f) dX_j \wedge dX_i \wedge \omega = \sum_{(i,j) \in \{1,2,...,n\}^2} \partial_j(\partial_i f) dX_j \wedge dX_i \wedge \omega$$

$$= \sum_{(i,j) \in \{1,2,...,n\}^2;\ i=j} \partial_j(\partial_i f) \underbrace{dX_j \wedge dX_i}_{=dX_j \wedge dX_j = 0 \text{ (da } i=j)} \wedge \omega + \sum_{(i,j) \in \{1,2,...,n\}^2;\ i \neq j} \partial_j(\partial_i f) dX_j \wedge dX_i \wedge \omega$$

$$= \underbrace{\sum_{(i,j) \in \{1,2,...,n\}^2;\ i=j} \partial_j(\partial_i f) 0}_{=0} + \sum_{(i,j) \in \{1,2,...,n\}^2;\ i \neq j} \partial_j(\partial_i f) dX_j \wedge dX_i \wedge \omega$$

$$= \sum_{(i,j) \in \{1,2,...,n\}^2;\ i \neq j} \partial_j(\partial_i f) dX_j \wedge dX_i \wedge \omega.$$

Doch die Summe auf der rechten Seite dieser Gleichung ist 0, da sich ihre Addenden paarweise gegeneinander kürzen (nämlich kürzt sich der Addend zu (i, j) jeweils mit dem Addenden zu (j, i), weil $\partial_j(\partial_i f) = \partial_i(\partial_j f)$ und $dX_i \wedge dX_j = -dX_j \wedge dX_i$ für alle i und j gilt). Somit ist auch die linke Seite dieser Gleichung 0; das heißt,

$(d_{k+1} \circ d_k)(f dX_{i_1} \wedge \cdots \wedge dX_{i_k}) = 0.$

Damit ist gezeigt, dass (ii) gilt. Die Folge $(d_i)_{i \geq 0}$, die wir konstruiert haben, erfüllt mithin alle Eigenschaften (i), (ii) und (iii); damit ist der Beweis der Existenz vollständig.

Eindeutigkeit der Folge $(d_i)_{i \geq 0}$: Gemäß (iii) ist $d_0 = d$ vorgegeben.

Zur Eindeutigkeit von d_1: Wegen (ii) ist $d_1(dX_i) = 0$ für alle $i = 1, \ldots, n$.
Wegen (i) ist $d_1(f dX_i) = df \wedge dX_i + f \underbrace{d_1(dX_i)}_{=0} = df \wedge dX_i$ für alle $f \in A$ und $i = 1, \ldots, n$.
Dadurch ist die Abbildung d_1 eindeutig determiniert.

Zur Eindeutigkeit von d_2: Zuerst einmal gilt $d_2(dX_{i_1} \wedge dX_{i_2}) = 0$ für alle i_1 und i_2. (Dies folgt aus (ii), da $dX_{i_1} \wedge dX_{i_2} = d_1(X_{i_1} dX_{i_2}) = d_1(-X_{i_2} dX_{i_1})$.)
Wegen (i) folgt hieraus wiederum $d_2(f dX_{i_1} \wedge dX_{i_2}) = df \wedge dX_{i_1} \wedge dX_{i_2}$ für alle $f \in A$. Hierdurch ist d_2 eindeutig determiniert.

Dieses Argument läßt sich leicht zu einem Beweis der Gleichheit $d_k(f dX_{i_1} \wedge dX_{i_2} \wedge ... \wedge dX_{i_k}) = df \wedge dX_{i_1} \wedge dX_{i_2} \wedge ... \wedge dX_{i_k}$ für alle $k \geq 0$, $f \in A$ und $i_1, i_2, ..., i_k \in \{1, 2, ..., n\}$ verallgemeinern. (Der Beweis benötigt Induktion über k.) Durch diese Gleichheit ist d_k eindeutig bestimmt. Also ist die Eindeutigkeit der Folge $(d_i)_{i \geq 0}$ gezeigt. Der Beweis in Fall 1 ist somit komplett.

2. Fall: A ist beliebige R-Algebra.

Schreibe A als Faktoralgebra eines Polynomrings P (in eventuell unendlich vielen Variablen) über R.
vornehm: Es gibt einen surjektiven R-Algebren-Homomorphismus $\varphi : P \to A$.
Ω ist Funktor, Λ^i auch, φ induziert also einen Homomorphismus $\varphi_i : \Omega_P^i \to \Omega_A^i$.

Da wir unseren Satz bereits im 1. Fall bewiesen haben, wissen wir, dass es eine eindeutig bestimmte Folge $(d_{i,P})_{i \geq 0}$ von R-linearen Abbildungen $d_{i,P} : \Omega_P^i \to \Omega_P^{i+1}$ für alle $i \geq 0$ gibt, die die Eigenschaften (i), (ii) und (iii) erfüllt.

Wir wollen nun (für festes i) eine R-lineare Abbildung $d_{i,A} : \Omega_A^i \to \Omega_A^{i+1}$ konstruieren, die folgendes Diagramm kommutativ macht:

$$\begin{tikzcd} \Omega_P^i \arrow[r, "d_{i,P}"] \arrow[d, "\varphi_i"] & \Omega_P^{i+1} \arrow[d, "\varphi_{i+1}"] \\ \Omega_A^i \arrow[r, dashed, "d_{i,A}"] & \Omega_A^{i+1} \end{tikzcd}$$

Es gilt:

- $\mathrm{Kern}(\varphi_i) \subseteq \mathrm{Kern}(\varphi_{i+1} \circ d_{i,P})$. [Warum?]
- φ_i ist surjektiv (Ü4A3a für $i = 1$).

Dann induziert $d_{i,P}$ eine Abbildung $d_{i,A} : \Omega_A^i \to \Omega_A^{i+1}$, für welche obiges Diagramm kommutativ wird.
Die Eigenschaften (i), (ii) und (iii) werden (aufgrund der Surjektivität von φ_i) von P auf A „vererbt". Damit ist die Existenz der Folge $(d_i)_{i\geq 0}$ gezeigt. Die Eindeutigkeit einer solchen Folge ergibt sich genauso wie im 1. Fall, wobei hier X_1, ..., X_n durch Algebra-Erzeugenden von A ersetzt werden.

Beispiele
$A = K[X_1, \dots, X_n]$, $\mathrm{char}(K) = 0$.
Beh.: $H_{dR}^i(A) = 0$ für alle $i > 0$.
Bew.: $i = n$: Ü4A2
$i > n$: $\Omega_A^i = 0$
$i = 1$: Sei $\omega = \sum_{\nu=1}^n f dX_\nu \in \mathrm{Kern}(d_1)$, also: $0 = \sum_{\nu=1}^n df_\nu \wedge dX_\nu = \sum_{\nu=1}^n \sum_{\mu=1}^n \frac{\partial f_\nu}{\partial X_\mu} dX_\mu \wedge dX_\nu$
Für alle $\nu \neq \mu$ ist also $\frac{\partial f_\nu}{\partial X_\mu} = \frac{\partial f_\mu}{\partial X_\nu}$ (da $dX_\mu \wedge dX_\nu = -dX_\nu \wedge dX_\mu$).
Zu zeigen: $\omega = df$ für ein $f \in A$, d.h. $f_\nu = \frac{\partial f}{\partial X_\nu}$, $\nu = 1, \dots, n$.
Schreibe $f_\nu = \sum_{\underline{i}} a_{\underline{i}}^{(\nu)} X_1^{i_1} \cdots X_n^{i_n}$.
Ansatz: $f = \sum_{\underline{i}} a_{\underline{i}} X_1^{i_1} \cdots X_n^{i_n}$. $\Rightarrow \frac{\partial f}{\partial X_\nu} = \sum_{\underline{i}=(i_1,\cdots,i_n), i\nu \geq 1} a_{\underline{i}} X_1^{i_1} \cdots X_n^{i_n}$
Wähle also $a_{\underline{i}}$ so, dass $i_\nu \cdot a_{\underline{i}} = a_{\underline{i}-\underline{e_\nu}}^{(\nu)}$, $e_\nu = (0, \dots, 0, \underbrace{1}_{\nu}, 0, \dots, 0)$

Es bleibt zu zeigen: $\frac{1}{i_\nu} a_{\underline{i}-\underline{e_\nu}}^{(\nu)} = \frac{1}{i_\mu} a_{\underline{i}-e_\mu}^{(\mu)}$ für alle $\nu \neq \mu$.
Äquivalent: $(*)$ $i_\mu \cdot a_{\underline{i}-e_\nu}^{(\nu)} = i_\nu \cdot a_{\underline{i}-\underline{e_\mu}}^{(\mu)}$
Beweis von $(*)$: $\sum_{\underline{i}} i_\mu a_{\underline{i}-\underline{e_\nu}} X^{i-e_\mu-e_\nu} = \sum_{\underline{i}, i_\mu \geq 1} i_\mu a_i^{(\nu)} X^{i-e_\mu} = \sum_{\underline{i}, i_\nu \geq 1} i_\nu a_{\underline{i}}^{(\mu)} X^{\underline{i}-\underline{e_\nu}}$
$= \sum_{\underline{i}} i_\nu a_{\underline{i}-e_\nu}^{(\mu)} X^{\underline{i}-\underline{e_\nu}-\underline{e_\mu}}$, da $\frac{\partial f_\nu}{\partial X_\mu} = \frac{\partial f_\mu}{\partial X_\nu}$.

Beispiele
$A = K[X, X^{-1}] = K[X, Y]/(XY - 1) = \{f = \sum_{\nu=-n_0}^{n_1} a_\nu X^\nu : a_\nu \in K, n_0, n_1 \in \mathbb{N}\}$
$\Omega_A = AdX$, $df = (\sum_{\nu \neq 0} \nu a_\nu X^{\nu-1}) dX \Rightarrow \Omega^2 = 0 \Rightarrow \mathrm{Bild}(d) = \{f dx : f \in A, a_{-1} = 0\}$, d.h. $H_{dR}^1(A) = K \frac{dx}{x}$