

Kapitel 1

Affine Varietäten

§ 1 Polynomringe

Sei k ein Körper, $n \geq 1$, $k[X_1, \dots, X_n]$ Polynomring

Bemerkung + Erinnerung 1.1

a) Für $a_1, \dots, a_n \in k$ ist

$$\begin{array}{ccc} \phi_{a_1, \dots, a_n} : k[X_1, \dots, X_n] & \rightarrow & k \\ f & \mapsto & f(a_1, \dots, a_n) \end{array}$$

ein Homomorphismus von Ringen

b) Ist A eine k -Algebra, $a_1, \dots, a_n \in A$, so ist $f \mapsto f(a_1, \dots, a_n)$ ein k -Algebra Homomorphismus $k[X_1, \dots, x_n] \rightarrow A$

c) (UAE des Polynomrings)

Sei A eine k -Algebra, $a_1, \dots, a_n \in A$. Dann gibt es genau einen k -Algebra Homomorphismus $\phi : k[X_1, \dots, X_n] \rightarrow A$ mit $\phi(X_i) = a_i$

Folgerung 1.2

Jede endlich erzeugte k -Algebra ist Faktoring eines Polynomrings.

Denn: Seien a_1, \dots, a_n Erzeuger von A als k -Algebra. Sei $\phi : k[X_1, \dots, X_n] \rightarrow A$ der k -Algebra Homomorphismus mit $\phi(X_i) = a_i$. (Bem. + Erinn. 1.1 c))

ϕ ist surjektiv

$$\xRightarrow{\text{Homomorphiesatz}} A \cong k[X_1, \dots, X_n] / \text{Kern}(\phi)$$

Erinnerung 1.3 (Euklidischer Algorithmus)

Für $f, g \in k[X]$ mit $g \neq 0$ gibt es (eindeutige!) $q, r \in k[X]$ mit $f = qg + r$ und $\deg(r) < \deg(g)$ oder $r = 0$.

Folgerung 1.4

$k[X]$ ist Hauptidealring

Beweis

Sei $I \subset [X]$ Ideal. $I = (0)$ wird von 0 erzeugt. Sei also $I \neq 0$. Wähle: $g \in I - \{0\}$ mit kleinstem Grad.

Beh.: $I = (g)$, *denn:* Sei $f \in I - \{0\}$. Schreibe $f = q \cdot g + r$. $\deg(r) < \deg(g)$ und $r = f - qg \in I$.
 $\Rightarrow r = 0$ □

Folgerung 1.5

$k[X]$ ist faktoriell (eindeutige Zerlegung in Primfaktoren).

Erinnerung: R Ring, $f \in R$ keine Einheit

$$f \text{ unzerlegbar} \Leftrightarrow \text{Aus } f = g \cdot h \text{ folgt } g \in R^\times \text{ oder } h \in R^\times$$

Proposition 1.6

$k[X_1, \dots, X_n]$ ist faktoriell für jedes $n \geq 1$.

Beweis (Beweisidee)

Induktion über n , $n = 1$ ist Folgerung 1.5.

Für Induktionsschritt: $k[X_1, \dots, X_n] = k[X_1, \dots, X_{n-1}][X_n]$ □

Satz 1 (Hilbertscher Basissatz)

Jedes Ideal in $k[X, \dots, X_n]$ ist endlich erzeugbar. Kurz: $k[X_1, \dots, X_n]$ ist noethersch

Definition 1.7

Ein Ring R heißt **noethersch**, wenn jedes Ideal in R endlich erzeugbar ist.

Satz 1'

R noethersch $\Rightarrow R[X]$ noethersch. Daraus folgt Satz 1: $k[X_1, \dots, X_n]$ ist noethersch mit Induktion über n .

Beweis (Beweis von Satz 1)

Annahme: Es gibt Ideal $I \subset R[X]$, das sich nicht von endlich vielen Elementen erzeugen lässt.

Wähle $f_0 \in I - \{0\}$ vom kleinsten Grad. Wähle $f_1 \in I - \{f_0\}$ vom kleinsten Grad. Wähle für $i \geq 2 \in I - \{f_0, f_1, \dots, f_{i-1}\}$ vom kleinsten Grad. Sei a_i der Leitkoeffizient von f_i , sei $J \subset R$ das von den $a_i, i \in \mathbb{N}$ erzeugte Ideal.

J ist endlich erzeugt. $\exists J$ wird erzeugt von $a_1, \dots, a_n \Rightarrow$ es gilt $\lambda_0, \dots, \lambda_n \in \mathbb{R}$ mit $a_{n+1} = \sum_{i=0}^n \lambda_i a_i$

Sei

$$g := f_{n+1} - \sum_{i=0}^n \lambda_i f_i X^{d_{n+1}-d_i}$$

$\Rightarrow \deg(g) < \deg(f_{n+1})$ Aber: $g \notin (f_0, \dots, f_n)$, da sonst auch $f_{n+1} \in (f_0, \dots, f_n)$ wäre. \nexists □

Bemerkung 1.8

Sei R ein noetherscher Ring, $I \subset R$ Ideal. Dann ist auch R/I noethersch.

Beweis

Sei $J \subset R/I$ ein ideal. Sei $\Pi : R \rightarrow R/I$ die Restklassenabbildung. $\tilde{J} := \Pi^{-1}(J)$ ist nach Voraussetzung endlich erzeugbar. Die Bilder der Erzeuger von \tilde{J} in J erzeugen J . □

Folgerung 1.9

Jede endlich erzeugbare k -Algebra ist noethersch.

Beweis

Siehe Folgerung 1.2, Bemerkung 1.8 und Satz 1 □

Proposition 1.10

Ein Ring R ist genau dann noethersch, wenn jede aufsteigende Kette $I_0 \subseteq I_1 \subseteq \dots$ von Idealen in R stationär wird. (Das heißt es gibt n_0 mit $I_n = I_{n_0}$ für alle $n \geq n_0$)

Beweis

„ \Rightarrow “: Sei $I_0 \subseteq I_1 \subseteq \dots$ Kette von Idealen. Sei $I := \bigcup_{d=0}^{\infty} I_d$. I ist Ideal. I ist endlich erzeugbar, $I = (a_1, \dots, a_r)$, $a_i \in I_{n_i}$, $n_0 = \max_{i=1}^r n_i \Rightarrow I_n = I_{n_0}$ für $n \geq n_0$

„ \Leftarrow “: Sei I Ideal, $\mathcal{I} := \{J \subset I \mid J \text{ Ideal in } R, J \text{ endlich erzeugt}\}$. $\mathcal{I} \neq \emptyset$, da $(0) \in \mathcal{I}$.

Behauptung: \mathcal{I} enthält ein maximales Element I_0 .

Wäre $I_0 \neq I$, so gäbe es $a \in I - I_0$. Dann wäre auch $(I_0, a) \in \mathcal{I}$ zu I_0 maximal.

Beweis der Behauptung: Ist (0) nicht maximal, so gibt es $(0) \subsetneq I_1 \subset \mathcal{I}$. Ist auch I_1 nicht maximal, so gibt es $I_1 \subsetneq I_2 \in \mathcal{I}$. \Rightarrow erhalte Kette $(0) \subsetneq I_1 \subsetneq I_2 \subsetneq \dots$

Nach Voraussetzung wird diese Kette stationär ab einem n_0 . $\Rightarrow I_0$ ist maximal in \mathcal{I} . \square

§ 2 Nullstellenmengen und Verschwindungsideale

Sei k ein Körper.

Definition 2.1

Eine Teilmenge $V \subseteq k^n$ heißt **affine Varietät**, wenn es eine Menge $F \subseteq k[X_1, \dots, X_n]$ von Polynomen gibt, sodass

$$V = V(F) = \{x = (x_1, \dots, x_n) \in k^n : f(x) = 0 \text{ für alle } f \in F\}$$

Beispiel

$$\emptyset = V(1) = V(k[X_1, \dots, X_n])$$

$$k^n = V(0) = V(\emptyset)$$

$$V(X(X-1)(Y-1)) \text{ affine Varietät}$$

Bemerkung 2.2

- i) Für $F_1 \subseteq F_2 \subseteq k[X_1, \dots, X_n]$ ist $V(F_1) \supseteq V(F_2)$
- ii) $V(f_1 \cdot f_2) = V(f_1) \cup V(f_2)$
- iii) für $F \subseteq k[X_1, \dots, X_n]$ ist

$$V(F) = V((F))$$

wobei (F) das von F erzeugte Ideal ist.

- iv) Für jede affine Varietät $V \subseteq k^n$ gibt es endlich viele Polynome f_1, \dots, f_r mit

$$V = V(f_1, \dots, f_r)$$

Beweis

- iii) jedes $f \in (F)$ hat die Form $f = \sum_{i=1}^r r_i f_i$ mit $r_i \in k[X_1, \dots, X_n]$, $f_i \in F$.

$$x \in V(F) \Rightarrow f_i(x) = 0, i = 1, \dots, r$$

$$\Rightarrow f(x) = 0 \Rightarrow x \in V((F))$$

□

Definition 2.3

Für eine Teilmenge $V \subseteq k^n$ heißt

$$I(V) = \{f \in k[X_1, \dots, X_n] \mid f(x) = 0 \text{ für alle } x \in V\}$$

das **Verschwindungsideal**.

Beispiel

- i) $I(\emptyset) = k[X_1, \dots, X_n]$
 $I(k^n) = (0)$ falls k unendlich ist
- ii) $I((0,0)) = (X, Y)$

Bemerkung 2.4

Für jede Teilmenge $V \subseteq k^n$ gilt:

- i) $I(V)$ ist Radikalideal
- ii) $V \subseteq V(I(V))$
- iii) $\bar{V} := V(I(V))$ ist die kleinste Varietät, die V enthält. Insbesondere: $V = V(I(V))$, falls V affine Varietät.

§ 3 Zariski Topologie

Sei k ein Körper

Definition + Bemerkung 3.1

Die affinen Varietäten in k^n bilden die abgeschlossenen Mengen einer Topologie. Diese Topologie heißt **Zariski-Topologie**.

Schreibweise: $\mathbb{A}^n(k)$ sei k^n mit dieser Topologie

Beweis

i) $k^n = V(0), \emptyset = V(k[X_1, \dots, X_n])$ sind affine Varietäten

ii) Seien $V_1 = V(I_1)$ und $V_2 = V(I_2)$ affine Varietäten.

Behauptung: $V_1 \cup V_2 = V(I_1 \cdot I_2) = V(I_1 \cap I_2)$

Zeige genauer: $V(I_1 \cdot I_2) \stackrel{a)}{\subseteq} V_1 \cup V_2 \stackrel{b)}{\subseteq} V(I_1 \cap I_2) \stackrel{c)}{\subseteq} V(I_1 \cdot I_2)$

c) folgt aus $I_1 \cdot I_2 \subseteq I_1 \cap I_2$

b) folgt aus $I_1 \cap I_2 \subset I_1$ und $I_1 \cap I_2 \subset I_2$

a) Sei $x \in V(I_1 \cdot I_2), x \notin V_1$

Dann gibt es $f \in I_1$ mit $f(x) \neq 0 \Rightarrow g(x) \stackrel{x \in V(I_1 \cdot I_2)}{=} 0$ für alle $g \in I_2 \Rightarrow x \in V(I_2) = V_2$

iii) Seien $V_i = V(I_i), i \in J$ (J beliebige Menge), affine Varietäten.

Behauptung:

$$\bigcap_{i \in J} V_i = V\left(\underbrace{\bigcup_{i \in J} I_i}_{=\sum_{i \in J} I_i}\right)$$

□

Beispiel 3.2

$$n = 1, V \subseteq \mathbb{A}^n(k) \Leftrightarrow V \text{ endlich oder } V = k$$

Bemerkung 3.3

Jeder Punkt $x = (x_1, \dots, x_n) \in k^n$ ist abgeschlossen in $\mathbb{A}^n(k)$.

Beweis

$$\{x\} = V(X_1 - x_1, X_2 - x_2, \dots, X_n - x_n)$$

□

Folgerung 3.4

Ist k endlicher Körper, so ist die Zariski-Topologie auf k^n die diskrete Topologie.

Bemerkung 3.5

Ist k unendlich, so ist $\mathbb{A}^n(k)$ nicht hausdorffsch.

Beweis

$n = 1$: ✓

$n \geq 2$: $x, y \in \mathbb{A}^n(k)$

☞ x und y liegen auf der X_1 -Achse, das heißt

$$x, y \in V(X_2, \dots, X_n) =: W$$

Seien U_x, U_y offene Umgebungen von x bzw. y . Dann sind

$$\left. \begin{array}{l} V_x = V(I_x) = \mathbb{A}^n(k) - U_x \\ \text{und } V_y = V(I_y) = \mathbb{A}^n(k) - U_y \end{array} \right\} \text{ affine Varietäten}$$

Da $x \in W$ gibt es $f \in I_x$ mit $f(x) \neq 0 \Rightarrow f \notin I(W) \Rightarrow V(f) \cap W$ endlich $\Rightarrow V_x \cap W$ endlich.

Genauso $V_y \cap W$ endlich $\Rightarrow (V_x \cup V_y) \cap W$ endlich.

$$\Rightarrow U_x \cap U_y \cap W \neq \emptyset$$

□

Bemerkung 3.6

Sei k unendlicher Körper.

- i) Für jedes $f \in k[X_1, \dots, X_n] - k$ (nicht-konstante Polynome) ist $D(f) := \mathbb{A}^n(k) - V(f)$ offene Teilmenge.
- ii) Die $D(f)$ bilden eine Basis der Zariski-Topologie.

Beweis

- ii) Sei $U \subseteq \mathbb{A}^n(k)$ offen.

Zeige: Zu jedem $x \in U$ gibt es $f \in k[X_1, \dots, X_n]$ mit $x \in D(f) \subseteq U$

denn: Sei $V := \mathbb{A}^n(k) - U$, $V = V(I)$ für ein Ideal $I \subseteq k[X_1, \dots, X_n]$.

Da $x \notin V$ gibt es $f \in I$ mit $f(x) \neq 0 \Rightarrow x \in D(f)$ und $D(f) \subseteq U$, da $V(f) \supseteq V(I) = V$ □

Definition + Erinnerung 3.7

- a) Sei X ein topologischer Raum, $Y \subseteq X$. Definiere Topologie auf Y durch:

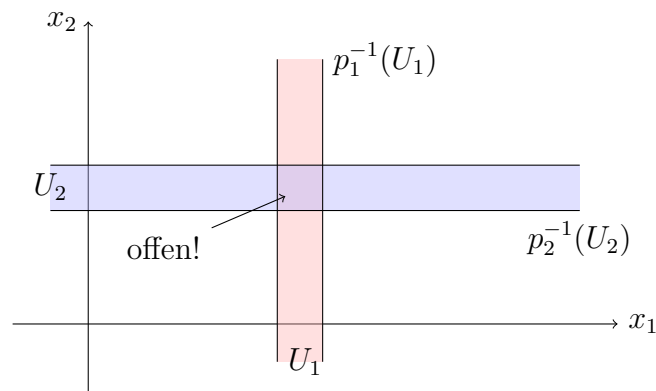
$$U \subseteq Y \text{ offen} \Leftrightarrow \exists \tilde{U} \subseteq X \text{ offen mit } U = \tilde{U} \cap Y$$

Diese Topologie heißt **Spurtopologie**.

- b) Sei $V \subseteq \mathbb{A}^n(k)$ affine Varietät. Dann heißt die Spurtopologie auf V auch **Zariski-Topologie**.
- c) Seien X_1, X_2 topologische Räume, $X_1 \times X_2$ das kartesische Produkt (als Mengen),

$$p_i : X_1 \times X_2 \rightarrow X_i (i = 1, 2)$$

die Projektionen. Definiere die **Produkttopologie** auf $X_1 \times X_2$ als die grösste Topologie, sodass p_1 und p_2 stetig sind. Das ist die kleinste Topologie, in der alle Mengen $p_1^{-1}(U_1) \cap p_2^{-1}(U_2)$ offen sind, wobei $U_i \subseteq X_i$ offen ist.



Frage

Ist die Zariski-Topologie auf k^2 die Produkttopologie auf $\mathbb{A}^1(k) \times \mathbb{A}^1(k)$?

§ 4 Irreduzible Komponenten

Definition + Bemerkung 4.1

Sei X ein topologischer Raum.

- X heißt **reduzibel**, wenn es abgeschlossene Teilmengen $A, B \subseteq X$ gibt mit $A \cup B = X$ und $A \neq X \neq B$. Eine Teilmenge von X heißt irreduzibel, wenn sie mit der induzierten Topologie irreduzibel ist.
- Eine (bezüglich Inklusion) maximale irreduzibel Teilmenge von X heißt **irreduzible Komponente** von X
- Irreduzible Komponenten sind abgeschlossen (Übung)

Beispiel 4.2

Sei X nichtleerer Hausdorffraum. Dann sind die einelementigen Teilmengen die irreduziblen Komponenten.

Denn: Sei X hausdorffsch, $x \neq y \in X$, zeige: X ist irreduzibel

Seien U_x, U_y offene Umgebungen von x bzw. y mit $U_x \cap U_y = \emptyset$

$$\Rightarrow V_x \cup V_y = X, V_x = X - U_x, V_y = X - U_y$$

$$x \notin V_x \neq X \neq V_y \not\ni y$$

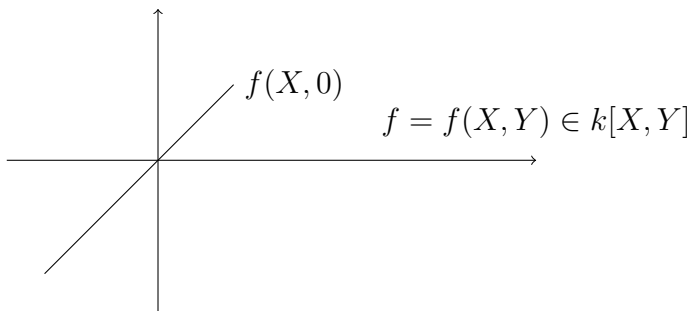
Beispiel 4.3

$\mathbb{A}^1(k)$ ist irreduzibel, wenn k unendlich ist. Denn: echte abgeschlossene Teilmengen von $\mathbb{A}^1(k)$ sind endlich.

Frage

Ist $\mathbb{A}^2(k)$ irreduzibel? Sei $\mathbb{A}^2(k) = V_1 \cup V_2, V_i = V(I)$. Seien $f_1, f_2 \in I_1$ bzw. $I_2, f_i \neq 0$.
 $\Rightarrow V_i \subset V(f_i), i = 1, 2$

$$\Rightarrow \underbrace{V(f_1) \cup V(f_2)}_{=V(f_1 \cdot f_2)} = \mathbb{A}^2$$



$$V(f) \cup V(Y) = V(f(X, 0)) \subset \mathbb{A}^1(k)$$

Entweder $V(f(X, 0))$ ist endlich oder $f(X, 0) = 0$, dann ist durch Y teilbar. **Genauso:** f ist durch $Y - \alpha X$ teilbar für jedes $\alpha \in k \Rightarrow f = 0$. **Antwort auf die Frage:** ja!

Proposition 4.4

Eine affine Varietät $V \subseteq \mathbb{A}^n(k)$ ist genau dann irreduzibel, wenn $I(V)$ ein Primideal ist.

Beweis

„ \Rightarrow “: Seien $f, g \in k[X_1, \dots, X_n]$ mit $f \cdot g \in I(V)$. Sei $f \notin I(V)$, zu zeigen: $g \in I(V)$

$$f \notin I(V) \Rightarrow \exists x \in V \text{ mit } f(x) \neq 0$$

Nach Voraussetzung ist $V \subseteq V(f \cdot g) = V(f) \cup V(g)$

$$\Rightarrow V = (V(f) \cap V) \cup (V(g) \cap V) \stackrel{V \text{ irred.}}{\Rightarrow} V(g) \cap V = V$$

$$\Rightarrow V \subseteq V(g) \Rightarrow g \in I(V)$$

„ \Leftarrow “: Sei $I(V)$ Primideal, $V = V_1 \cup V_2$ mit abgeschlossenen Teilmengen V_1, V_2 , also $V_i = V(I_i), i = 1, 2$, für Ideale I_1, I_2 . Sei $V \neq V_1$, also $V \subsetneq V(I_1)$.

$$\Rightarrow \exists x \in V, f \in I_1 \text{ mit } f(x) \neq 0 \Rightarrow f \notin I(V)$$

Wegen $V = V_1 \cup V_2 = V(I_1) \cup V(I_2) \stackrel{3.1}{=} V(I_1 \cdot I_2)$ ist $I_1 \cdot I_2 \subseteq I(V) \Rightarrow f \cdot g \in I(V)$ für jedes $g \in I_2$

$$\stackrel{f \notin I(V)}{\Rightarrow}_{I(V) \text{ prim}} g \in I(V) \text{ für jedes } g \in I_2$$

$$\Rightarrow I_2 \subseteq I(V) \Rightarrow \underbrace{V(I_2)}_{=V_2} \supseteq \underbrace{V(I(V))}_{=V}$$

□

Folgerung 4.5

Eine affine Varietät $V \subset \mathbb{A}^n(k)$ ist irreduzibel $\Leftrightarrow A(V) = k[X_1, \dots, X_n]/I(V)$ ist nullteilerfrei.

Satz 2

Sei $V \subseteq \mathbb{A}^n(k)$ affine Varietät. Dann gilt:

- V ist endliche Vereinigung von irreduziblen affinen Varietäten.
- V hat nur endlich viele irreduzible Komponenten, diese sind eindeutig bestimmt.

Beweis

- Sei $\mathcal{B} = \{V \subseteq \mathbb{A}^n(k) \text{ affine Varietät, } V \text{ ist nicht endliche Vereinigung von irreduziblen affinen Varietäten}\}$

$$\mathcal{I} = \{I(V) : V \in \mathcal{B}\}$$

zu zeigen: $\mathcal{B} = \emptyset$, also auch $\mathcal{I} = \emptyset$

Wäre $\mathcal{I} \neq \emptyset$, so enthielte \mathcal{I} ein maximales Element $I_0 = I(V_0)$ für ein $V_0 \in \mathcal{B}$. (denn: $k[X_1, \dots, X_n]$ ist noethersch, jede aufsteigende Kette von Elementen in \mathcal{I} wird also stationär.) Da $V_0 \in \mathcal{B}$ ist V_0 irreduzibel.

Sei also $V_0 = V_1 \cup V_2$ mit abgeschlossenen Teilmengen $V_1 \neq V_0 \neq V_2$ von V_0 . Aus $V_i \subsetneq V_0$ folgt $I(V_i) \supsetneq \underbrace{I(V_0)}_{=I_0}$ (Bem. 2.4 iv))

$$\Rightarrow I(V_i) \notin \mathcal{I} \Rightarrow V_i \notin \mathcal{B}, i = 1, 2$$

$\Rightarrow V_0$ ist endliche Vereinigung von irreduziblen Varietäten, also auch $V_0 \notin \mathcal{B}$

- Sei $V = V_1 \cup \dots \cup V_r$ mit irreduziblen Varietäten V_1, \dots, V_r . $\nexists V_i \not\subseteq V_j$ für $i \neq j$ (sonst lasse V_i weg)

Behauptung: Dann ist jedes V_i irreduzible Komponente.

denn: Sei $W \subseteq V$ irreduzible Komponente mit $V_i \subseteq W$. Es gilt

$$W = \bigcup_{j=1}^r (V_j \cap W)$$

$$\stackrel{W \text{ irred.}}{\Rightarrow} \exists j \text{ mit } V_j \cap W = W, \text{ also } W \subseteq V_j \Rightarrow V_i \subseteq V_j \Rightarrow i = j \Rightarrow W = V_i$$

Eindeutigkeit: Sei W irreduzible Komponente von V . Aus $W = \bigcup_{j=1}^r (V_j \cap W)$ folgt $W \cap V_j = W$ für ein $j \Rightarrow W \subseteq V_j \xrightarrow{W \text{ irred. Komp.}} W = V_j$ \square

Proposition 4.6

Die irreduzible Teilmenge eines topologischen Raumes X ist enthalten in einer irreduziblen Komponente von X .

§ 5 Der Hilbertsche Raum

V affine Varietät in $\mathbb{A}^n(k) \Rightarrow V(I(V)) = V$; $I \subseteq k[X_1, \dots, X_n]$ Ideal $\Rightarrow I(V(I)) \supseteq I$

Beispiel

$$I = (X^2 + 1) \subset \mathbb{R}[X]$$

$$V(I) = \emptyset \Rightarrow I(V(I)) = \mathbb{R}[X]$$

Satz 3

Sei k algebraisch abgeschlossener Körper.

a) Ist $I \subsetneq k[X_1, \dots, X_n]$ Ideal, so ist $V(I) \neq \emptyset$.

b) Für jedes Ideal $I \subseteq k[X_1, \dots, X_n]$ gilt

$$I(V(I)) = \sqrt{I}$$

Der Beweis benutzt

Satz 3'

Ist k Körper, $n \geq 1$, $m \subset k[X_1, \dots, X_n]$ maximales Ideal, so ist $L := k[X_1, \dots, X_n]/m$ algebraische Körpererweiterung von k . Das heißt für jedes $\alpha \in L$ gibt es ein $f \in k[X]$ mit $f(\alpha) = 0$, also gibt es $d \geq 1$ und $b_0, \dots, b_{d-1} \in k$ mit

$$\alpha^d + b_{d-1}\alpha^{d-1} + \dots + b_1\alpha + b_0 = 0$$

$k(\alpha) := k[X]/(f)$ ist Körper, der kleinste Teilkörper von L , der k und α enthält.

Folgerung 5.1

Ist k algebraisch abgeschlossen, so gibt es Bijektion zwischen den Mengen der

- i) Punkte $x = (x_1, \dots, x_n)$ in k^n
- ii) Ideale $m_x = (X_1 - x_1, \dots, X_n - x_n)$ in $k[X_1, \dots, X_n]$
- iii) maximalen Ideale in $k[X_1, \dots, X_n]$

Beweis

(i) \Rightarrow (ii): \checkmark

(ii) \Rightarrow (iii): m_x ist maximales Ideal. Die Abbildung $\varphi_x : k[X_1, \dots, X_n] \rightarrow k, X_i \mapsto x_i, f \mapsto f(x)$ ist der Einsetzungshomomorphismus. $\text{Kern}(\varphi_x) = m_x$

(iii) \Rightarrow (i): Sei m maximales Ideal, $\varphi : k[X_1, \dots, X_n] \rightarrow k[X_1, \dots, X_n]/m \xrightarrow[\text{Satz 3'}]{\sim} k \Rightarrow m = \text{Kern}(\varphi)$

Sei $x_i = \varphi(X_i)$, dann ist $\varphi = \varphi_x$ für $x = (x_1, \dots, x_n) \Rightarrow m = m_x$ □

Beweis (Beweis von Satz 3)

a) Sei $I \subsetneq k[X_1, \dots, X_n]$ echtes Ideal. Sei m maximales Ideal mit $I \subseteq m$ (gibt es !) $\Rightarrow V(I) \supseteq V(m) \neq \emptyset$, da $m = m_x$ für ein $x \in k^n$ und $\{x\} = V(m_x)$

Beweis (von Satz 3')

Sei $x_i \in L$ die Restklasse von X_i . Zu zeigen: x_1, \dots, x_n sind algebraisch über k .

Induktion über n :

$n=1$: $m = (f)$ für ein irreduzibles Polynom $f \Rightarrow L = k[X]/(f)$ ist k -Vektorraum der Dimension $d = \deg(f)$

$n \geq 2$: *Annahme*: x_1 ist transzendent.

Dann ist $k' = k(x_1) \cong \underbrace{k(X_1)}_{=\text{Quot}(k[X_1])}$ Teilkörpererweiterung von L . L wird über k' von x_2, \dots, x_n erzeugt $\Rightarrow L \cong k'[X_2, \dots, X_n]/m'$ für ein maximales Ideal m' in $k'[X_2, \dots, X_n]$

Nach Induktionsvoraussetzung ist L algebraisch über k' , das heißt:

$$\begin{aligned} x_i^{d_i} + \sum_{j=0}^{d_i-1} a_{ij} x_i^j &= 0 & i = 2, \dots, n, d_i \geq 1 & \quad a_{ij} \in k' \\ a_{ij} &= \frac{c_{ij}}{b_{ij}} & b_{ij}, c_{ij} \in k[X_1] & \quad \square \end{aligned}$$

(1) Sei $R \subset k'$ die von den a_{ij} erzeugte k -Algebra.

(2) Dann sind x_1, \dots, x_n ganz über $R \Rightarrow L$ ist ganze Ringerweiterung von R

(3) $\Rightarrow R = k$ oder R ist kein Körper.

(1) $\Rightarrow R = k$ oder R ist kein Körper.

$R = k \Rightarrow$ für $\tilde{k} = k(x_2, \dots, x_n)$ ist $L = \tilde{k}[X_1]/m$, also algebraisch abgeschlossen.

$R \neq k \Rightarrow k(X_1)$ ist nicht endlich erzeugbar als k -Algebra.

(2) $\Rightarrow R$ ist Körper: Sei $a \in R \setminus \{0\}$. In L gibt es $\frac{1}{a}$

$$\Rightarrow \left(\frac{1}{a}\right)^d + \sum_{j=0}^{d-1} b_j \left(\frac{1}{a}\right)^j \text{ für ein } d \geq 1, b_j \in R$$

$$\Rightarrow 1 + \sum_{j=0}^{d-1} b_j a^{d-j} = 0, 1 = a \left(- \sum_{j=0}^{d-1} b_j a^{d-1-j} \right)$$

b) Sei $I \subseteq k[X_1, \dots, X_n], g \in I(V(I))$.

Zu zeigen: es gibt $d \geq 0$ mit $g^d \in I$.

Wähle Erzeuger f_1, \dots, f_n von I (geht nach Satz 1). Betrachte in $k[X_1, \dots, X_n, Y]$ das von f_1, \dots, f_n und $g \cdot Y - 1$ erzeugte Ideal J .

Behauptung: $V(J) = \emptyset$

denn: Sei $x = (x_1, \dots, x_n, y) \in V(J)$

Dann ist $f_i(x) = 0$ für $i = 1, \dots, m$. \Rightarrow für $x' = (x_1, \dots, x_n)$ ist $f_i(x') = 0 \Rightarrow x' \in V(I)$

$\Rightarrow g(x') = 0 \Rightarrow g(x) = 0 \Rightarrow (gY - 1)(x) = g(x) \cdot y - 1 = -1 \neq 0$

Dann ist nach Satz 3 a) $J = k[X_1, \dots, X_n, Y]$

$$\Rightarrow 1 = \sum_{i=1}^m b_i f_i + b(gY - 1) \text{ für geeignete } b_i, b \in k[X_1, \dots, X_n, Y]$$

Sei $R = k[X_1, \dots, X_n, Y]/(gY - 1)$

$$\Rightarrow 1 = \sum_{i=1}^m \bar{b}_i f_i \text{ für } \bar{b}_i = b_i \text{ mod } (gY - 1)$$

Es gilt:

$$R \cong k[X_1, \dots, X_n]\left[\frac{1}{g}\right]$$

$$\bar{b}_i = \frac{a_i}{g^{d_i}}, a_i \in k[X_1, \dots, X_n], d_i \geq 0$$

\Rightarrow Für $d = \max d_i$ gilt

$$g^d = \sum_{i=1}^n \underbrace{(g^d \bar{b}_i)}_{\in k[X_1, \dots, X_n]} \cdot f_i \in I$$

□

Folgerung 5.2

Sei k algebraisch abgeschlossen, $n \geq 1$,

$$\begin{aligned} \mathcal{V}_n &:= \{V \subseteq k^n : V \text{ affine Varietät}\} \\ \mathcal{I}_n &:= \{I \subseteq k[X_1, \dots, X_n] : I \text{ Radikalideal}\} \end{aligned}$$

Dann sind

$$\begin{aligned} I &: \mathcal{V}_n \rightarrow \mathcal{I}_n, & V &\mapsto I(V) \\ V &: \mathcal{I}_n \rightarrow \mathcal{V}_n, & I &\mapsto V(I) \end{aligned}$$

bijektiv und zueinander invers.

Bemerkung 5.3

Sei k algebraisch abgeschlossen, $V \subseteq \mathbb{A}^n(k)$ affine Varietät. Dann entsprechen die Punkte in V bijektiv den maximalen Idealen in

$$k(V) = A(V) := k[X_1, \dots, X_n]/I(V)$$

Beweis

Die maximalen Ideale in $A(V)$ entsprechen bijektiv den maximalen Idealen in $k[X_1, \dots, X_n]$, die $I(V)$ enthalten, also (Folgerung 5.1) den Punkten in k^n , die in V liegen. □

$$x = (x_1, \dots, x_n), m_x = (X_1 - x_1, \dots, X_n - x_n) = I(\{x\})$$

$$I(V) \subseteq I(\{x\})$$

$$V = V(I(V)) \supseteq V(I(\{x\})) = \{x\}$$

§ 6 Morphismen affiner Varietäten

Definition + Bemerkung 6.1

Sei k ein Körper, $V \subseteq \mathbb{A}^n(k)$, $W \subseteq \mathbb{A}^m(k)$ affine Varietäten.

- a) Eine Abbildung $f : V \rightarrow W$ heißt **Morphismus**, wenn es Polynome $f_1, \dots, f_m \in k[X_1, \dots, X_n]$ gibt mit

$$f(x) = (f_1(x), \dots, f_m(x))$$

für alle $x \in V$.

- b) Ein Morphismus $f : V \rightarrow W$ heißt **Isomorphismus**, wenn es einen Morphismus $g : W \rightarrow V$ gibt mit

$$g \circ f = \text{id}_W \text{ und } f \circ g = \text{id}_V$$

- c) Die affinen Varietäten über k bilden mit den Morphismen aus a) eine Kategorie $\text{Aff}(k)$.
 d) Jeder Morphismus $f : V \rightarrow W$ ist Einschränkung eines Morphismus $\tilde{f} : \mathbb{A}^n(k) \rightarrow \mathbb{A}^m(k)$

Beispiel 6.2

- 1) • Einbettungen

$$\begin{aligned} \mathbb{A}^n(k) &\rightarrow \mathbb{A}^m(k) (n \leq m) \\ (x_1, \dots, x_n) &\mapsto (x_1, \dots, x_n, 0, \dots, 0) \end{aligned}$$

- Projektionen

$$\begin{aligned} \mathbb{A}^n(k) &\rightarrow \mathbb{A}^m(k) (n \geq m) \\ (x_1, \dots, x_n) &\mapsto (x_1, \dots, x_m) \end{aligned}$$

- Permutation der Komponenten

$$(x_1, \dots, x_n) \mapsto (x_{\sigma(1)}, \dots, x_{\sigma(n)})$$

- 2) Jedes $f \in k[X_1, \dots, X_n]$ definiert einen Morphismus

$$f : \mathbb{A}^n(k) \rightarrow \mathbb{A}^1(k), x \mapsto f(x)$$

- 3) Sei $V = \mathbb{A}^1(k)$, $W = V(Y^2 - X^3) \subseteq \mathbb{A}^2(k)$.

$f : V \rightarrow W$, $x \mapsto (x^2, x^3)$ ist Morphismus. f ist bijektiv mit Umkehrabbildung

$$g(x, y) = \begin{cases} 0 & \text{falls } (x, y) = (0, 0) \\ \frac{y}{x} & \text{falls } (x, y) \neq (0, 0) \end{cases}$$

$$g(f(x)) = g(x^2, x^3) = \frac{x^3}{x^2} = x \text{ (für } x \neq 0)$$

$$f(g(x, y)) = f\left(\frac{y}{x}\right) = \left(\frac{y^2}{x^2}, \frac{y^3}{x^3}\right) = \left(\frac{x^3}{x^2}, \frac{y^3}{y^2}\right)$$

Ist k unendlich, so ist g kein Morphismus!

- 4) Sei $\text{char}(k) = p > 0$

$$f : \mathbb{A}^n(k) \rightarrow \mathbb{A}^n(k), (x_1, \dots, x_n) \mapsto (x_1^p, \dots, x_n^p)$$

heißt **Frobenius-Homomorphismus**.

Die Fixpunkte von f sind genau die Punkte, deren Koordinaten alle in \mathbb{F}_p liegen („ \mathbb{F}_p -wertige Punkte“)

$$(a^p = a \Leftrightarrow a \text{ Nullstelle von } X^p - X \Leftrightarrow a \in \mathbb{F}_p)$$

Bemerkung 6.3

Morphismen affiner Varietäten sind stetig bezüglich der Zariski-Topologie.

Beweis

Seien $V \subseteq \mathbb{A}^n(k)$, $W \subseteq \mathbb{A}^m(k)$ affine Varietäten, $f : V \rightarrow W$ Morphismus. Sei $Z \subseteq W$ abgeschlossen, also $Z = V(J)$ für ein Ideal $J \subseteq k[X_1, \dots, X_n]$. Sei $I = \{g \circ f \in k[X_1, \dots, X_n] : g \in J\}$.

Behauptung: $V(I) = f^{-1}(Z)$

denn:

$$x \in f^{-1}(Z) \Leftrightarrow f(x) \in Z \Leftrightarrow f(x) \in V(J) \Leftrightarrow g(f(x)) = 0 \forall g \in J \Leftrightarrow x \in V(I) \quad \square$$

Definition + Bemerkung 6.4

Sei $V \subseteq \mathbb{A}^n(k)$ affine Varietät.

a) $k[V] := \{f : V \rightarrow \mathbb{A}^1(k) : f \text{ ist Morphismus}\}$ heißt **affiner Koordinatenring** von V .

b)

$$k[V] \cong A(V) = k[X_1, \dots, X_n]/I(V)$$

Beweis

b) Sei $\varphi : k[X_1, \dots, X_n] \rightarrow k[V], f \mapsto f|_V$ Einschränkungshomomorphismus. φ ist surjektiv (Bemerkung 6.1 d))

$\text{Kern}(\varphi) = I(V) \xrightarrow{\text{Homomorphiesatz}} \text{Behauptung} \quad \square$

Proposition 6.5

Seien $V \subseteq \mathbb{A}^n(k), W \subseteq \mathbb{A}^m(k)$ affine Varietäten.

a) Jeder Morphismus $\varphi = f : V \rightarrow W$ induziert k -Algebrahomomorphismus

$$f^\# : k[W] \rightarrow k[V], g \mapsto g \circ f$$

b) Die Abbildung $\text{Mor}(V, W) \rightarrow \text{Hom}_k(k[W], k[V]), f \mapsto f^\#$ ist bijektiv.

Beweis

a) ✓

b) *injektiv:* Seien $f, \tilde{f} : V \rightarrow W$ Morphismen mit $f^\# = \tilde{f}^\#$

$$\Rightarrow g \circ f = g \circ \tilde{f} \text{ für alle } g \in k[W]$$

Insbesondere ist $\underbrace{p_i \circ f}_{=f_i} = \underbrace{p_i \circ \tilde{f}}_{=\tilde{f}_i}$ für die Projektion

$$p_i : W \rightarrow \mathbb{A}^1(k), (x_1, \dots, x_n) \mapsto x_i$$

$$\Rightarrow f = \tilde{f}$$

surjektiv: Sei $\varphi : k[W] \rightarrow k[V]$ k -Algebra-Homomorphismus.

Definiere $f : V \rightarrow \mathbb{A}^m(k)$ durch $f(x) = (\varphi(p_1)(x), \dots, \varphi(p_n)(x))$

Behauptung:

(i) $f^\# = \varphi$

(ii) $f(V) \subseteq W$

Zu (i): für $i = 1, \dots, m$ gilt:

$$f^\#(p_i) = p_i \circ f = \varphi(p_i)$$

Da die p_i $k[V]$ erzeugen (als k -Algebra), folgt $f^\# = \varphi$

Zu (ii): Sei $g \in I(W)$, $x \in V$

Zu zeigen: $g(f(x)) = 0$

$$\begin{array}{ccc} k[X_1, \dots, X_n] & \xrightarrow{\tilde{\varphi}} & k[X_1, \dots, X_n] \\ \downarrow & & \downarrow \\ k[W] & \xrightarrow{\varphi} & k[V] \end{array}$$

Lifte φ zu $\tilde{\varphi}$. Wähle dazu für jedes i ein Urbild von $\varphi(p_i)$. Dann ist $\tilde{\varphi}(I(W)) \subseteq I(V)$
 $\Rightarrow g(f(x)) = g(\varphi(p_1)(x), \dots, \varphi(p_m)(x)) = \tilde{\varphi}(g)(x) = 0$ \square

Bemerkung 6.6

Seien V, W affine Varietäten über k , $\varphi : k[W] \rightarrow k[V]$ k -Algebra-Homomorphismus und $f = f_\varphi : V \rightarrow W$ mit $f^\# = \varphi$. Dann gilt für jedes $x \in V$:

$$m_{f(x)} = \varphi^{-1}(m_x)$$

Beweis

$$m_x = \{f \in k[V] : g(x) = 0\}$$

$$\varphi^{-1}(m_x) = (f^\#)^{-1}(m_x) = \{h \in k[W] : h \circ f \in m_x\} = \{h \in k[W] : h(f(x)) = 0\} = m_{f(x)} \quad \square$$

Beispiel 6.7

$$V = V(Y^2 - X^3) \subseteq \mathbb{A}^2(k)$$

$$f : \mathbb{A}^1(k) \rightarrow V, x \mapsto (x^2, x^3)$$

$$f^\# : \underbrace{k[V]}_{=k[X,Y]/(Y^2-X^3)} \rightarrow k[\mathbb{A}^1(k)] = k[T]$$

$$f^\#(\overline{X}) = T^2$$

$$f^\#(\overline{Y}) = T^3$$

$f^\#$ ist injektiv, aber nicht surjektiv! ($T \notin \text{Bild}(f^\#)$)

Es gilt aber: der von $f^\#$ auf dem Quotientenkörper induzierte Homomorphismus ist ein Isomorphismus $f^\#(\frac{Y}{X}) = T$.

Satz 4

a) Die Zuordnung $V \mapsto k[V]$ induziert einen volltreuen kontravarianten Funktor

$$\Phi : \underline{\text{Aff}}(k) \rightarrow \underline{k\text{-Alg}}^{\text{red}} \text{ (endl. erzeugte } k\text{-Alg.)}$$

b) Ist k algebraisch abgeschlossen, so ist Φ eine Äquivalenz von Kategorien.

Beweis

a) ✓

b) Noch zu zeigen: zu jeder k -Algebra $A \in k\text{Alg}^{\text{red}}$ gibt es affine Varietät V über k mit $k[V] \cong A$. A werde als k -Algebra erzeugt von a_1, \dots, a_n . Sei $\varphi : k[X_1, \dots, X_n] \rightarrow A$ der durch $\varphi(X_i) = a_i$ definierte k -Algebra-Homomorphismus. φ ist surjektiv, da A von den a_i erzeugt wird.

$$\Rightarrow A \cong k[X_1, \dots, X_n] / \text{Kern}(\varphi)$$

Sei $V = V(\text{Kern}(\varphi)) \Rightarrow I(V) \stackrel{\text{HNS}}{=} \sqrt{\text{Kern}(\varphi)} = \text{Kern}(\varphi) \Rightarrow k[V] = k[X_1, \dots, X_n] / I(V) \cong A$ □

§ 7 Die Garbe der regulären Funktionen

Sei k algebraisch abgeschlossener Körper

Bemerkung 7.1

Sei $V \subseteq \mathbb{A}^n(k)$ affine Varietät über k , $h \in k[X_1, \dots, X_n]$. Dann gilt: \bar{h} ist Einheit in $k[V] \Leftrightarrow V(h) \cap V = \emptyset$

Beweis

$$\begin{aligned} V \cap V(h) &= V(I(V) + (h)) = \emptyset \stackrel{\text{HNS}}{\Leftrightarrow} I(V) + (h) = k[X_1, \dots, X_n] \\ &\Leftrightarrow 1 = f + gh \text{ für gewisse } f \in I(V), g \in k[X_1, \dots, X_n] \\ &\Leftrightarrow \bar{1} = \bar{g} \cdot h \text{ in } k[V] \end{aligned}$$

□

Definition + Bemerkung 7.2

Sei $V \subseteq \mathbb{A}^n(k)$ affine Varietät, $U \subseteq V$ offen, $p \in U$.

- Eine Abbildung $f : U \rightarrow \mathbb{A}^1(k)$ heißt **regulär in p** , wenn es eine Umgebung $U_p \subseteq U$ von p gibt und $g, h \in k[V]$ mit $h(x) \neq 0$ für alle $x \in U_p$ und $f(x) = \frac{g(x)}{h(x)}$ für alle $x \in U_p$.
- $f : U \rightarrow \mathbb{A}^1(k)$ heißt **regulär**, wenn f in jedem $p \in U$ regulär ist.
- $\mathcal{O}(U) := \{f : U \rightarrow \mathbb{A}^1(k) : f \text{ regulär}\}$ heißt k -Algebra (oder Ring) der **regulären Funktionen** auf U .
- Für jedes offene $U \subseteq V$ ist

$$\alpha_U : k[V] \rightarrow \mathcal{O}_V(U), f \mapsto f|_U$$

ein k -Algebra-Homomorphismus.

Zusatz: Ist U dicht, so ist α_U injektiv (Übung?)

Beispiel

- $V = \mathbb{A}^1(k), U = \mathbb{A}^1(k) - \{0\}, f(x) = \frac{1}{x}$
- $V = V(Y^2 - X^3) \subset \mathbb{A}^2(k), U = V - \{0, 0\} \Rightarrow g = \frac{y}{x} \in \mathcal{O}_V(U)$
- $f \in k[X_1, \dots, X_n] \Rightarrow \frac{1}{f} \in \mathcal{O}_{\mathbb{A}^n(k)}(D(f))$

Bemerkung 7.3

Sei $V \subseteq \mathbb{A}^n(k)$ affine Varietät, $U \subseteq V$ offen.

- Für offene Teilmengen $U'' \subseteq U' \subseteq U$ gilt:

- $\varrho_{U'}^U : \mathcal{O}_V(U) \rightarrow \mathcal{O}_V(U'), f \mapsto f|_{U'}$, ist k -Algebra Homomorphismus
- $\varrho_{U''}^U = \varrho_{U''}^{U'} \circ \varrho_{U'}^U$

- Sei $(U_i)_{i \in I}$ offene Überdeckung von U (mit Indexmenge I). Dann gilt:

- Für $f \in \mathcal{O}_V(U)$ ist $f = 0 \Leftrightarrow f|_{U_i} = 0 \forall i \in I$
- Für jedes $i \in I$ sei $f_i \in \mathcal{O}_V(U_i)$ gegeben.

Ist $f_i|_{U_i \cap U_j} = f_j|_{U_i \cap U_j}$ für alle i, j , so gibt es $f \in \mathcal{O}_V(U)$ mit $f|_{U_i} = f_i$ für alle $i \in I$.

Folgerung + Definition 7.4

Die Zuordnung $U \mapsto \mathcal{O}_V(U)$ ist eine Garbe von Ringen auf dem topologischen Raum V .

Allgemeiner:

- ist **Prägarbe**

b) ist die **Garbeneigenschaft**

Beispiel

X topologischer Raum, R ein Ring. Für $U \subseteq X$ offen sei $\mathcal{F}(U) = R, \varrho_U^U = \text{id}_R$. Ist \mathcal{F} Garbe? Prägarbe: JA! Garbe nein, falls es disjunkte offene Mengen gibt!

Bemerkung 7.5

Sei $V \subseteq \mathbb{A}^n(k)$ affine Varietät, $U \subseteq V$ offen.

- a) Jede absteigende Kette $V_1 \supseteq V_2 \supseteq \dots$ von abgeschlossenen Teilmengen von V wird stationär („ V ist noetherscher topologischer Raum“)
- b) U ist quasikompakt, das heißt jede offene Überdeckung von U hat endliche Teilüberdeckung.

Beweis

- a) $V_i = V(I_i)$, I_i Ideal in $k[V]$

$$V_i \supseteq V_{i+1} \Rightarrow I_{i+1} \supseteq I_i$$

$k[V]$ ist noethersch \Rightarrow Behauptung

- b) Sei $(U_i)_{i \in I}$ offene Überdeckung von U .

Besitzt (U_i) keine endliche Teilüberdeckung, so gibt es Folge $(U_{I_k})_{k=1,2,\dots}$ mit $U_{I_{k+1}} \not\subseteq \bigcup_{j=1}^k U_{I_j}$.

$W_k := \bigcup_{j=1}^k U_{I_j}$ ist offen in $V \xrightarrow{a)} (W_k)$ wird stationär. □

Satz 5

Sei $V \subseteq \mathbb{A}^n(k)$ affine Varietät.

- a) $\mathcal{O}_v(V) \cong k[V]$

- b) $\mathcal{O}_v(\underbrace{D(f)}_{=\mathbb{A}^n(k) \setminus V(f)}) \cong k[V]_f = k[f]_{\{f^d: d \geq 0\}}$ für alle $f \in k[V] \setminus \{0\}$

Beweis

- a) Ist ein Spezialfall von b) für $f = 1$.

- b) Definiere

$$\begin{aligned} \alpha : k[V]_f &\rightarrow \mathcal{O}_V(D(f)) \\ \frac{g}{f^d} &\mapsto (x \mapsto \frac{g(x)}{f(x)^d}) \quad (x \in D(f)) \end{aligned}$$

α wohldefiniert: Sei $\frac{g_1}{f^{d_1}} = \frac{g_2}{f^{d_2}}$ in $k[V]_f$

$$\Rightarrow f^d(g_1 \cdot f^{d_2} - g_2 \cdot f^{d_1}) = 0 \text{ für ein } d \geq 0$$

$$\text{für } x \in D(f) \text{ ist } g_1(x)f(x)^{d_2} - g_2(x)f(x)^{d_1} = 0$$

$$\Rightarrow \frac{g_1(x)}{f(x)^{d_1}} = \frac{g_2(x)}{f(x)^{d_2}}$$

α injektiv: Sei $\frac{g(x)}{f(x)^d} = 0$ für alle $x \in D(f)$

$$\Rightarrow g(x) = 0 \text{ für alle } x \in V$$

$$\Rightarrow f \cdot g = 0 \text{ in } k[V]$$

$$\Rightarrow g = 0 \text{ in } k[V]_f$$

α surjektiv: Sei $g \in \mathcal{O}_V(D(f))$

$$\Rightarrow \text{für jedes } p \in D(f) \text{ gibt es Umgebung } U_p \subseteq D(f) \text{ und } g_p, h_p \in k[V] \text{ mit } g(x) = \frac{g_p(x)}{h_p(x)} \forall x \in U_p$$

Behauptung 1: $\mathcal{O}_E U_p = D(h_p)$

denn: es gibt $\tilde{h}_p \in k[V]$ mit $D(\tilde{h}_p) \subseteq U_p (\subseteq D(h_p))$

$$\Rightarrow V(\tilde{h}_p) \supset V(h_p) \Rightarrow \tilde{h}_p \in I(V(h_p)) \stackrel{HNS}{=} \sqrt{(h_p)}$$

$$\Rightarrow \exists d \geq 0, h \in k[V] \text{ mit } \tilde{h}_p^d = h \cdot h_p$$

$$\text{Setze } \hat{g}_p = h g_p, \hat{h} = \tilde{h}_p^d = h \cdot h_p$$

Dann gilt für jedes $x \in D(\hat{h}_p) = D(\tilde{h}_p)$

$$g(x) = \frac{g_p(x)}{h_p(x)} = \frac{g_p(x) \cdot h(x)}{h_p(x) \cdot h(x)} = \frac{\hat{g}_p(x)}{\hat{h}_p(x)}$$

$$7.5 \Rightarrow D(f) = \overline{D(h_1) \cup \dots \cup D(h_r)} \quad (1) \text{ für geeignete } h_i := h_{p_i}, 1 = 1, \dots, r$$

Nach Behauptung 1 ist $\mathcal{O}_E g = \frac{g_i}{h_i}$ auf $D(h_i)$

Behauptung 2: $g_i h_j = g_j h_i$ in $k[V]$ für alle i, j

denn: es ist $g_i h_j = g_j h_i$ auf $D(h_i) \cap D(h_j) = D(h_i h_j)$

$$\Rightarrow h_i h_j (g_i h_j - g_j h_i) = 0 \text{ in } k[V] \quad (*)$$

setze $\tilde{g}_i = g_i h_i, \tilde{h}_i = h_i^2$. Dann wird aus $(*)$

$$\tilde{g}_i \tilde{h}_j - \tilde{g}_j \tilde{h}_i = 0$$

$$(1) \Rightarrow V(f) = \bigcup_{i=1}^r V(h_i) \Rightarrow f \in I(V(h_1, \dots, h_r)) \stackrel{HNS}{\Rightarrow} f \in \sqrt{(h_1, \dots, h_r)}$$

$$\Rightarrow \exists d \geq 0, b_i \in k[V] \text{ mit } f^d = \sum_{i=1}^r b_i h_i$$

$$\text{Setze } \tilde{g} := \sum_{i=1}^r b_i g_i \in k[V]$$

Dann gilt für alle $i = 1, \dots, r$ und alle $x \in D(h_j)$:

$$g(x) = \frac{g_j(x)}{h_j(x)} = \frac{g_j(x) f(x)^d}{h_j(x) f(x)^d} = \frac{(g_j \sum_{i=1}^r b_i h_i)(x)}{(h_j f^d)(x)} \stackrel{\text{Beh. 2}}{=} \frac{h_j (\sum_{i=1}^r b_i g_i)(x)}{h_j f^d(x)} = \frac{\tilde{g}(x)}{f(x)^d} \quad \square$$

Proposition 7.6

Seien $V \subseteq \mathbb{A}^n(k), W \subseteq \mathbb{A}^m(k)$ affine Varietäten. Dann gilt: $f : V \rightarrow W$ ist Morphismus $\Leftrightarrow f$ stetig und für jedes offene $U \subseteq W$ und jedes $g \in \mathcal{O}_W(U)$ ist $g \circ f \in \mathcal{O}_V(f^{-1}(U))$

Beweis

„ \Rightarrow “: f stetig nach Bemerkung 6.3. Sei $g \in \mathcal{O}_W(U), p \in f^{-1}(U)$. In einer Umgebung U' von

$$p' = f(p) \text{ ist } g(y) = \frac{g_{p'}(y)}{h_{p'}(y)} \text{ für geeignete } g_{p'}, h_{p'} \in k[W]. \text{ Für } x \in f^{-1}(U') \text{ ist also } g(f(x)) = \frac{g_{p'}(f(x))}{h_{p'}(f(x))}. \text{ Dabei ist}$$

$$\begin{aligned} g'_p \circ f &= f^\#(g'_p) \in k[V] \\ h'_p \circ f &= f^\#(h'_p) \in k[V] \end{aligned}$$

„ \Leftarrow “: Zu zeigen: für $i = 1, \dots, m$ ist $p_i \circ f$ ein Polynom, wobei $p_i \in k[W]$ die Restklasse von X_i ist.

Nach Satz 5 a) ist $k[W] = \mathcal{O}_W(W) \Rightarrow p_i \circ f \in \mathcal{O}_V(V) = k[V] \quad \square$

Definition + Bemerkung 7.7

a) Eine Teilmenge $U \subseteq \mathbb{A}^n(k)$ heißt **quasi-affine Varietät**, wenn U Zariski-offen in einer affinen Varietät V ist.

- b) Eine Abbildung $f : U_1 \rightarrow U_2$ zwischen quasi-affinen Varietäten U_1, U_2 heißt **Morphismus** (oder **reguläre Abbildung**), wenn f stetig ist und für jedes offene $U \subseteq U_2$ und jedes $g \in \mathcal{O}_{U_2}(U)$ gilt:

$$g \circ f \in \mathcal{O}_{U_1}(f^{-1}(U))$$

(hier sei $\mathcal{O}_{U_2} := \mathcal{O}_{\bar{U}_2}$, \bar{U}_2 der \mathbb{Z} -Abschluss von U_2)

- c) $f : \widehat{\overset{\subseteq \mathbb{A}^n(k)}{U_1}} \rightarrow \widehat{\overset{\subseteq \mathbb{A}^m(k)}{U_2}}$ ist genau dann regulär, wenn es reguläre Funktionen f_1, \dots, f_n auf U_1 gibt mit $f(x) = (f_1(x), \dots, f_m(x))$ für alle $x \in U_1$
- d) Die quasi-affinen Varietäten über k bilden eine Kategorie, die $\text{Aff}(k)$ als volle Unterkategorie enthält.
- e) Eine quasi-affine Varietät heißt **affin** (als abstrakte Varietät), wenn sie isomorph ist zu einer affinen Varietät.

Bemerkung 7.8

Für $f \in k[X_1, \dots, X_n]$ ist $D(f)$ (abstrakt) affin.

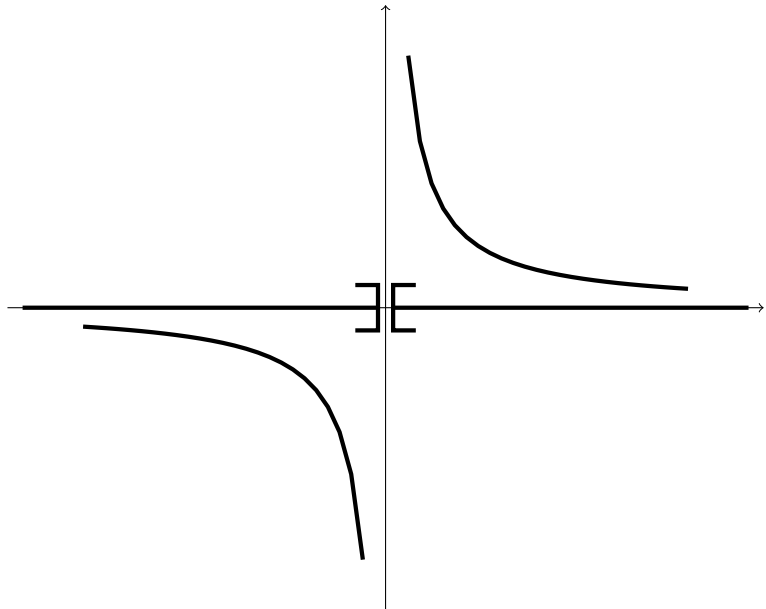
Beispiel: $n = 1, f(x) = x, D(f) = \mathbb{A}^1(k) - \{0\}$

$$V = V(XY - 1) \subseteq \mathbb{A}^2(k)$$

$$\varphi : V \rightarrow \mathbb{A}^1(k)$$

$$(x, y) \mapsto x$$

$$\Psi : \mathbb{A}^1(k) - \{0\} \rightarrow V, x \mapsto (x, \frac{1}{x})$$



Beweis

Sei $g = f \cdot X_{n+1} - 1 \in k[X_1, \dots, X_{n+1}]$ und $V = V(g) \subseteq \mathbb{A}^{n+1}(k)$, V ist affine Varietät, $\varphi : D(f) \rightarrow V, x \mapsto (x, \frac{1}{f(x)})$ ist Morphismus mit Umkehrabbildung $\Psi : V(g) \rightarrow D(f), (x_1, \dots, x_{n+1}) \mapsto (x_1, \dots, x_n)$. \square

§ 8 Rational Abbildungen und Funktionenkörper

k sei wieder algebraisch abgeschlossen

Definition + Bemerkung 8.1

Sei $V \subseteq \mathbb{A}^n(k)$ (quasi-)affine Varietät.

- Eine **rationale Funktion** auf V ist eine Äquivalenzklasse von Paaren (U, f) , wobei $U \subseteq V$ offen und dicht und $f \in \mathcal{O}(U)$ ist. Dabei ist $(U, f) \sim (U', f') : \Leftrightarrow f|_{U \cap U'} = f'|_{U \cap U'}$
- In jeder Äquivalenzklasse gibt es ein maximales Element (U_{\max}, f_{\max}) , $U_{\max} =: \text{Def}(f)$ heißt **Definitionsbereich** der natürlichen Funktion. $V \setminus \text{Def}(f)$ heißt **Polstellenmenge** der rationalen Funktion.
- Die rationalen Funktionen auf V bilden eine k -Algebra $\text{Rat}(V)$.
- Ist V irreduzibel, so ist $\text{Rat}(V) = \text{Quot}(k[V]) =: k(V)$. $k(V)$ heißt **Funktionenkörper**.

Beweis

- \sim ist transitiv: Sei $(U_1, f_1) \sim (U_2, f_2)$, $(U_2, f_2) \sim (U_3, f_3) \Rightarrow f_1|_{U_1 \cap U_2 \cap U_3} = f_3|_{U_1 \cap U_2 \cap U_3}$
 $U_1 \cap U_2 \cap U_3$ ist (offen und) *dicht* in $V \Rightarrow f_1|_{U_1 \cap U_3} = f_3|_{U_1 \cap U_3}$ (Ü4, A5)
-

$$U_{\max} = \bigcup_{\substack{\exists f \in \mathcal{O}_V(U) \\ \text{mit } (U, f) \in \text{Klasse}}} U$$

- $f \pm g, f \cdot g$ sind auf $\text{Def}(f) \cap \text{Def}(g)$ regulär
- V irreduzibel $\Leftrightarrow I(V)$ Primideal $\Leftrightarrow k[V]$ ist nullteilerfrei

Definiere:

$$\begin{aligned} \alpha : k(V) &\rightarrow \text{Rat}(V) \\ \frac{g}{h} &\mapsto (D(h), \frac{g}{h}) \end{aligned}$$

□

α ist wohldefiniert, weil $D(h)$ dicht (V irreduzibel)

α ist injektiv: ✓

α ist surjektiv: Sei $[(U, f)] \in \text{Rat}(V)$, also $f \in \mathcal{O}_V(U) \Rightarrow \exists U' \subseteq U$ offen, $g, h \in k[V]$ mit $f = \frac{g}{h}$ auf U' . V irreduzibel, also U' dicht $\Rightarrow (U, f) \sim (U', \frac{g}{h}) \sim (D(h), \frac{g}{h}) \Rightarrow \alpha(\frac{g}{h}) = [(U, f)]$

Definition + Bemerkung 8.2

Seien V, W affine Varietäten.

- Eine **rationale Abbildung** $f : V \dashrightarrow W$ ist eine Äquivalenzklasse von Paaren (U, f_U) , wobei $U \subseteq V$ offen und dicht, $f_U : U \rightarrow W$ regulär. Es ist $(U, f_U) \sim (U', f'_U) : \Leftrightarrow f_U|_{U \cap U'} = f'_U|_{U \cap U'}$.
- Rationale Funktionen auf V sind rationale Abbildungen $V \dashrightarrow \mathbb{A}^1(k)$.
- Jede rationale Abbildung hat einen maximalen Definitionsbereich.

Warnung: $V \xrightarrow{f} W \xrightarrow{g} Z$ ist im Allgemeinen keine rationale Abbildung, denn $\text{Def}(g) \cap f(\text{Def}(f)) = \emptyset$ ist möglich.

Definition 8.3

Ein Morphismus $f : V \rightarrow W$ (von quasi-affinen Varietät) heißt **dominant**, wenn $f(V)$ dicht in W ist.

Bemerkung + Definition 8.4

- a) Die irreduziblen affinen Varietät bilden mit den dominanten rationalen Abbildungen eine Kategorie.
- b) Die Isomorphismen in dieser Kategorie heißen **birationale Abbildungen**.
Explizit: $f : V \dashrightarrow W$ birational $\Leftrightarrow \exists g : W \dashrightarrow V$, sodass $g \circ f$ und $f \circ g$ die Identität auf ihren Definitionsbereichen sind.
- c) „birational“ lässt sich auch für reduzible Varietäten definieren.

Beispiel 8.5

- a) Sei $V = V(X, Y) \subseteq \mathbb{A}^2(k)$,
$$\left. \begin{array}{lcl} f : V & \rightarrow & \mathbb{A}^1(k), \quad (x, y) \mapsto x \\ g : \mathbb{A}^1(k) & \dashrightarrow & \mathbb{A}^1(k), \quad x \mapsto \frac{1}{x} \end{array} \right\} \text{ beide dominant}$$

 $g \circ f$ ist auf $f^{-1}(D(g))$ regulär. Das ist *nicht dicht* in $\mathbb{A}^1(k)$!

- b) $\sigma : \mathbb{A}^2(k) \dashrightarrow \mathbb{A}^2(k)$
 $(x, y) \mapsto (\frac{1}{x}, \frac{1}{y})$ ist rationale Abbildung mit

$$\text{Def}(\sigma) = \mathbb{A}^2(k) - V(XY)$$

$$\sigma^2 = \text{id}_{\text{Def}(\sigma)}$$

- c) $V = V(Y^2 - X^3)$, $\varphi : \mathbb{A}^1(k) \rightarrow V$, $x \mapsto (x^2, x^3)$ bijektiver Morphismus
 $\psi : V \dashrightarrow \mathbb{A}^1(k)$, $(x, y) \mapsto \frac{y}{x}$ ist rationale Abbildung
 φ ist birational (ψ auch!)

Beweis

- a) Sei $f : V \dashrightarrow W$ und $g : W \dashrightarrow Z$ dominante rationale Abbildung. Dann ist $f^{-1}(\text{Def}(g)) \subseteq V$ nichtleer, offen und damit dicht $\Rightarrow g \circ f$ ist rationale Abbildung $V \dashrightarrow Z$
 $\text{Bild}(g \circ f) = g(\underbrace{f(\text{Def}(f))}_{\text{dicht in } W})$ ist dicht in Z . □

Proposition 8.6

Sei $f : V \rightarrow W$ Morphismus affiner Varietäten und $f^\# : k[W] \rightarrow k[V]$ der zugehörige k -Algebren-Homomorphismus. Dann gilt:

$$f^\# \text{ injektiv} \Leftrightarrow f \text{ dominant}$$

Folgerung 8.7

Jede dominante rationale Abbildung $f : V \dashrightarrow W$ zwischen irreduziblen affinen Varietäten induziert einen Körperhomomorphismus

$$f^\# : k(W) \rightarrow k(V)$$

Satz 6

Sei k algebraisch abgeschlossener Körper. Dann ist die Kategorie der irreduziblen affinen Varietäten über k mit dominanten rationalen Abbildungen äquivalent zur Kategorie der endlich erzeugten Körpererweiterungen von k mit k -Algebrenhomomorphismus.

Beweis

Die Zuordnung $V \rightarrow k(V)$, $f \mapsto f^\#$ ist Funktor. Zu zeigen bleibt:

- i) zu jeder endlich erzeugten Körpererweiterung $K|k \exists V$ mit $k(V) \cong K$
- ii) $f \mapsto f^\#$ ist Projektion $\Phi : \text{Rat}(V, W) \rightarrow \text{Hom}_k(k(W), k(V))$

Beweis:

i) Seien g_1, \dots, g_n Erzeuger von K über k , sei $A := k[g_1, \dots, g_n]$. Dann ist $K = \text{Quot}(A)$

Sei $\varphi : k[X_1, \dots, X_n] \rightarrow A$ gegeben durch $\varphi(X_i) = g_i$ und $V := K(\text{Kern}(\varphi))$

$\Rightarrow V \subseteq \mathbb{A}^n(k)$ ist affine Varietät mit $k[V] \cong A$

$\Rightarrow k(V) \cong K$

ii) Φ *injektiv*: Seien $f, g : V \dashrightarrow W$ mit $f^\# = g^\#$. Wähle $U = D(h) \subseteq \text{Def}(f) \cap \text{Def}(g)$ offen, affin. $f|_U$ und $g|_U$ sind Morphismen $U \rightarrow W$.

Die induzierten k -Algebren-Homomorphismen $g_U^\#, f_U^\# : k[W] \rightarrow k[U] \subset k(V)$. Es gilt:
 $f_U^\# = f^\#|_{k[U]}$

Φ *surjektiv*: Sei $\alpha : k(W) \rightarrow k(V)$ k -Algebren-Homomorphismus. Wähle Erzeuger g_1, \dots, g_n von $k[W]$ (als k -Algebra). Für jedes $i = 1, \dots, n$ ist $\alpha(g_i)$ rationale Funktion auf V .

Da V irreduzibel, ist $\bigcap_{i=1}^n \text{Def}(\alpha(g_i))$ offen, affin (für geeignetes $g \in k[V]$). Nach Konstruktion induziert α einen k -Algebren-Homomorphismus

$$\alpha : k \rightarrow \mathcal{O}_U(U) = k[U]$$

$\stackrel{\text{Satz 4}}{\Rightarrow} \alpha = f^\#$ für einen Morphismus $f : U \rightarrow W$

Außerdem U dicht in $V \Rightarrow (U, f)$ ist rationale Abbildung (f ist dominant, da $f^\#$ injektiv, dann α Homomorphismus zwischen Körpern) \square

