9 Robuste Schätzer

Seien $X_1, \dots, X_n, X_{n+1} \overset{uiv}{\sim} F$, $F \in \mathfrak{F}$: Verteilungsannahme, $x_1, \dots, x_n, x$ Realisierungen von $X_1, \dots, X_n, X_{n+1}$, X_i reellwertig.
Sei $\vartheta : \mathfrak{F} \to \mathbb{R}$, $\hat{\vartheta}_n = \vartheta(\hat{F}_n)$ Plug-In-Schätzer für $\vartheta(F)$.
$(\hat{F}_n(t) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \mathbf{1}\{X_i \leq t\})$

9.1 **Definition** (Sensitivitätskurve)

$$S(x, \hat{\vartheta}) = \frac{\hat{\vartheta}_{n+1} - \hat{\vartheta}_n}{\frac{1}{n+1}}$$

Dabei: $\hat{\vartheta}_{n+1} = \vartheta(\hat{F}_{n+1})$ basierend auf $X_1, \dots, X_n$ und einer zusätzlichen Beobachtung x.

$S(x, \hat{\vartheta})$ ist die Änderung von $\hat{\vartheta}$ bei einer zusätzlichen Beobachtung x relativ gesehen zur Masse $\frac{1}{n+1}$ von x.

Beispiele:

a) $\vartheta(F) = \int x dF(x)$, $\vartheta(\hat{F}_n) = \bar{x}_n$

$$S(x, \hat{\vartheta}) = \frac{\bar{x}_{n+1} - \bar{x}_n}{\frac{1}{n+1}} = \sum_{i=1}^n x_i + x - \frac{n+1}{n} \sum_{i=1}^n x_i = x - \bar{x}_n$$

linear in x $\Rightarrow$ unbeschränkt in x

Große Änderung von S, falls $|x|$ groß!

b) Sei $\mathfrak{F} = \{F : \ F$ streng monoton wachsend auf $\{x : \ 0 < F(x) < 1\}\}$, $\vartheta(F) = F^{-1}(\frac{1}{2})$.
Sei $n = 2r - 1$ ungerade.

$$\Rightarrow \vartheta(\hat{F}_n) = x_{(r)} =: x_{r:n}$$

(„das r kleinste unter n“)

$n + 1 = 2r$:

$$\hat{F}_{n+1}^{-1}(\frac{1}{2}) = x_{r:n+1}$$

$$\hat{\vartheta}_{n+1} = \vartheta(\hat{F}_{n+1}) \in [x_{(r-1)}, x_{(r)}]$$

$\Rightarrow$ S beschränkt in x!

Nachteil der Sensitivitätskurve:
Hängt von Stichprobe ab.
Wünschenswert wäre Abhängigkeit nur von x und F.

9.2 Definition

a) Sei Δ_x die zum Dirac-Maß in x gehörende Verteilungsfunktion, also

$$\Delta_x(y) = \begin{cases} 0, & y < x \\ 1, & y \geq x \end{cases}$$

Die Einflusskurve (*influence curve*) von $\vartheta(F)$ ist

$$\begin{aligned} \varphi(x, F) &= \lim_{t \to 0} \frac{\vartheta((1-t)F + t\Delta_x) - \vartheta(F)}{t} \\ &= \frac{d}{dt}\vartheta((1-t)F + t\Delta_x)|_{t=0} \end{aligned}$$

wobei die Existenz der Ableitung vorausgesetzt wird.

b) $\hat{\vartheta} = \vartheta(\hat{F}_n)$ heißt **robust**, falls $\varphi(x, F)$ beschränkt ist in x.

Bemerkung:
Gegeben:
Stichprobe $x_1, \ldots, x_n$: Schätze $\vartheta(F)$ durch $\hat{\vartheta}_n = \vartheta(\hat{F}_n)$.
Weiterer Wert x: Schätze $\vartheta(F)$ durch $\hat{\vartheta}_{n+1} = \vartheta(\hat{F}_{n+1})$, wobei

$$\hat{F}_{n+1}(y) = \frac{n}{n+1}\hat{F}_n(y) + \frac{1}{n+1}\Delta_x(y)$$

Sei nun $t = \frac{1}{n+1}$, also $1 - t = \frac{n}{n+1}$. Damit gilt:

$$\begin{aligned} \hat{\vartheta}_{n+1} = \vartheta(\hat{F}_{n+1}) &= \vartheta((1-t)\hat{F}_n + t\Delta_x) \\ &= \frac{\vartheta((1-t)\hat{F}_n + t\Delta_x) - \vartheta(\hat{F}_n)}{t}t + \underbrace{\vartheta(\hat{F}_n)}_{=\hat{\vartheta}_n} \\ &\approx \hat{\vartheta}_n + \frac{1}{n+1}\varphi(x, \hat{F}_n) \end{aligned}$$

(Diese Approximation setzt voraus, dass $\varphi(x, \hat{F}_n)$ existiert.)

In diesem Fall gilt:

$$\boxed{\varphi(x, \hat{F}_n) \approx \frac{\hat{\vartheta}_{n+1} - \hat{\vartheta}_n}{\frac{1}{n+1}} = S(x, \hat{\vartheta})}$$

9.3 Beispiel

Sei $\vartheta(F) = \int y dF(y)$.

$$\begin{aligned}
\Rightarrow \varphi(x,F) &= \lim_{t\to 0} \frac{1}{t}[(1-t)\int y dF(y) + t\cdot \int y d\Delta_x(y) - \int y dF(y)] \\
&= -\int y dF(y) + x \\
&= x - \vartheta(F)
\end{aligned}$$

Hier gilt sogar[24]: $\varphi(x, \hat{F}_n) = x - \bar{x}_n = S(x, \hat{\vartheta})$.

9.4 Satz (Eigenschaften von $\varphi(x,F)$)

Sei $\varphi(x,F)$ Einflusskurve von $\vartheta(F)$.

a) Sei $\vartheta(F) = \int h dF = Eh(X)$, wobei $X \sim F$ und $E|h(X)| < \infty$.
Dann gilt: $\varphi(x,F) = h(x) - \vartheta(F)$

b) Sei $\vartheta(F) = \vartheta_1(F) + \vartheta_2(F)$ mut Einflusskurven $\varphi_1(x,F), \varphi_2(x,F)$.
Dann: $\varphi(x,F) = \varphi_1(x,F) + \varphi_2(x,F)$

c) Sei $I \subset \mathbb{R}$, $\vartheta(F) = \int_I g(s)\varphi_s(x,F)ds$.
Ist $\varphi_s(x,F)$ die Einflusskurve von $\vartheta_s(F)$ $(s \in I)$, so gilt (unter Regularität[25]):
$$\varphi(x,F) = \int_I g(s)\varphi_s(x,F)ds$$

d) (Kettenregel)
Ist g differenzierbar, so ist die Einflusskurve von $g(\vartheta(F))$ gegeben durch
$$g'(\vartheta(F)) \cdot \varphi(x,F)$$

e) (implizit definierter Parameter)
$\vartheta(F)$ sei Lösung der Gleichung $h(F, \vartheta(F)) = 0$, wobei für festes u $\lambda(x,F,u)$ die Einflusskurve von $h(F,u)$ sei und die Ableitung $h'(F,u)$ nach u existiere. Dann gilt:
$$\varphi(x,F) = -\frac{\lambda(x,F,\vartheta(F))}{h'(F,\vartheta(F))}$$

[24]vergleiche 9.1, Beispiel (a)
[25]siehe Beweis

Beweis:
Sei $F_{t,x} = (1-t)F + t\Delta_x$.

a) Aus

$$\vartheta(F_{t,x}) = (1-t)\int h(y)dF(y) + t\cdot h(x)$$

(vergleiche 9.3) folgt:

$$\frac{1}{t}(\vartheta(F_{t,x}) - \vartheta(F)) = h(x) - \vartheta(F)$$

b) Klar.

c)

$$\begin{aligned}\varphi(x,F) &= \frac{d}{dt}\vartheta(F_{t,x})|_{t=0}\\ &= \frac{d}{dt}\int_I g(s)\vartheta_s(F_{t,x})ds|_{t=0}\\ &\overset{(*)}{=} \int_I g(s)\frac{d}{dt}\vartheta_s(F_{t,x})|_{t=0}ds\\ &= \int_I g(s)\varphi_s(x,F)ds\end{aligned}$$

$(*)$: Vertauschbarkeit vorausgesetzt! (Regularität)

d)

$$\begin{aligned}\frac{1}{t}(g(\vartheta(F_{t,x})) - g(\vartheta(F))) &= \underbrace{\frac{g(\vartheta(F_{t,x})) - g(\vartheta(F))}{\vartheta(F_{t,x}) - \vartheta(F)}}_{\overset{t\to 0}{\to} g'(\vartheta(F)),\ \text{da}\ \vartheta(F_{t,x})\overset{t\to 0}{\to}\vartheta(F)}\\ &\quad \cdot\underbrace{\frac{\vartheta(F_{t,x}) - \vartheta(F)}{t}}_{\overset{t\to 0}{\to}\varphi(x,F)}\\ &\overset{t\to 0}{\to} g'(\vartheta(F))\varphi(x,F)\end{aligned}$$

e)

$$\begin{aligned}
0 &= \frac{1}{t}[\underbrace{h(F_{t,x}, \vartheta(F_{t,x}))}_{=0} - \underbrace{h(F, \vartheta(F))}_{=0}] \\
&= \frac{1}{t}[h(F_{t,x}, \vartheta(F_{t,x})) - h(F_{t,x}, \vartheta(F))] \\
&\qquad + \underbrace{\frac{1}{t}[h(F_{t,x}, \vartheta(F)) - h(F, \vartheta(F))]}_{\overset{t\to 0}{\to}\lambda(x,F,\vartheta(F))} \\
&= \underbrace{\frac{h(F_{t,x}, \vartheta(F_{t,x})) - h(F_{t,x}, \vartheta(F))}{h(F, \vartheta(F_{t,x})) - h(F, \vartheta(F))}}_{\overset{t\to 0}{\to}1 \text{ (Forderung)}} \cdot \underbrace{\frac{h(F, \vartheta(F_{t,x})) - h(F, \vartheta(F))}{\vartheta(F_{t,x}) - \vartheta(F)}}_{\overset{t\to 0}{\to}h'(F,\vartheta(F))} \\
&\qquad \cdot \underbrace{\frac{\vartheta(F_{t,x}) - \vartheta(F)}{t}}_{\overset{t\to 0}{\to}\varphi(x,F)} + \frac{1}{t}[h(F_{t,x}, \vartheta(F)) - h(F, \vartheta(F))] \\
&\overset{t\to 0}{\to} h'(F, \vartheta(F)) \cdot \varphi(x, F) + \lambda(x, F, \vartheta(F))
\end{aligned}$$

Also:

$$h'(F, \vartheta(F)) \cdot \varphi(x, F) + \lambda(x, F, \vartheta(F)) = 0$$

$\overset{h' \neq 0 \text{ (Forderung)}}{\Rightarrow}$ Behauptung.

9.5 Bemerkung (Einflusskurven-Heuristik)

Sei $\varphi(x, F)$ Einflusskurve von $\vartheta(F)$, $X \sim F$
Oft gilt:

(i) $E[\varphi(X, F)] = \int \varphi(x, F)dF(x) = 0$

(ii) $\vartheta(\hat{F}_n) - \vartheta(F) = \int \varphi(x, F)d(\hat{F}_n(x) - F(x)) + R_n$, wobei $\sqrt{n}R_n \overset{n\to\infty}{\to} 0$
[*wird oft als erfüllt angenommen*]

(iii) $0 < \tau^2(F) = E[\varphi^2(X, F)] < \infty$

Dann gilt:

$$\sqrt{n}(\hat{\vartheta}_n - \vartheta) = \sqrt{n}(\vartheta(\hat{F}_n) - \vartheta(F)) \overset{D}{\to} \mathcal{N}(0, \tau^2(F))$$

Beweis:
Mit (i) und (ii) gilt:

$$\vartheta(\hat{F}_n) - \vartheta(F) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\varphi(X_i, F) + R_n$$

$$\Rightarrow \sqrt{n}(\hat{\vartheta}_n - \vartheta) = \underbrace{\frac{1}{\sqrt{n}}\sum_{i=1}^{n}\varphi(X_i, F)}_{\xrightarrow{D}\mathcal{N}(0,\tau^2(F))} + \underbrace{\sqrt{n}R_n}_{\xrightarrow{P}0}$$

Lemma von Slutzky $\Rightarrow$ Behauptung

9.6 Beispiel (Median)

Sei F stetig mit Dichte $f = F'$. $f(x) > 0$ für $\{x : 0 < F(x) < 1\}$, $X \sim F$
Median

$$\vartheta(F) = F^{-1}(\frac{1}{2})$$

bzw. $F(\vartheta(F)) - \frac{1}{2} = 0 \Leftrightarrow h(F, \vartheta(F)) = 0$ mit

$$\begin{aligned} h(F,u) &= F(u) - \frac{1}{2} \\ &= \int \underbrace{(\mathbf{1}\{x \le u\} - \frac{1}{2})}_{=:\widetilde{h}_u(x)} dF(x) \\ &= \int \widetilde{h}_u(x) dF(x) \end{aligned}$$

$$\overset{9.4(a)}{\Rightarrow} \lambda(x, F, u) = \widetilde{h}_u(x) - h(F, u) = \mathbf{1}\{x \le u\} - F(u)$$

$$\begin{aligned} \overset{9.4(c)}{\Rightarrow} \varphi(x,F) &= -\frac{\lambda(x, F, \vartheta(F))}{h'(F, \vartheta(F))} \\ &= -\frac{\mathbf{1}\{x \le \vartheta(F)\} - F(\vartheta(F))}{f(\vartheta(F))} \\ &= \frac{\frac{1}{2} - \mathbf{1}\{x \le \vartheta(F)\}}{f(\vartheta(F))} \\ &= \begin{cases} -\frac{1}{2f(\vartheta(F))}, & x \le \vartheta(F) \\ +\frac{1}{2f(\vartheta(F))}, & x > \vartheta(F) \end{cases} \end{aligned}$$

Bemerkungen:

(i) $\hat{\vartheta}$ ist robust

(ii) $\hat{F}_n$ ist Treppenfunktion $\Rightarrow \varphi(x, \hat{F}_n)$ existiert nicht
$\Rightarrow$ Bemerkung nach 9.2 ist hier nicht zutreffend

(iii)

$$E[\varphi(X,F)] = \frac{\frac{1}{2} - P(X \leq \vartheta(F))}{f(\vartheta(F))} = 0$$

$$\tau^2(F) = E[\varphi^2(X,F)] = \frac{1}{4f^2(\vartheta(F))}$$

$$\overset{9.5}{\Rightarrow} \sqrt{n}(\hat{\vartheta}_n - \vartheta) \xrightarrow{D} \mathcal{N}(0, \frac{1}{4f^2(\vartheta(F))})$$

Konkret:
$X_1, \ldots, X_n \overset{uiv}{\sim} \mathcal{N}(\mu, \sigma^2),\ \vartheta(F) = \mu$

$$\Rightarrow \sqrt{n}(\hat{\vartheta}_n - \mu) \xrightarrow{D} \mathcal{N}(0, \frac{\pi\sigma^2}{2})$$

$f(\mu) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \cdot 1$

$$\hat{\vartheta}_n \sim AN(\mu, \underbrace{\frac{\pi\sigma^2}{2n}}_{\tau_1^2})$$

$$\bar{X} \sim \mathcal{N}(0, \underbrace{\frac{\sigma^2}{n}}_{\tau_2^2})$$

($\bar{X}$ UMVUE)

$$\frac{\tau_1^2}{\tau_2^2} = \frac{\pi}{2} \approx 1,57$$

Einflusskurve des Medians $\vartheta(F) = F^{-1}(\frac{1}{2})$ ist also

$$\varphi_{\frac{1}{2}}(x,F) = \frac{\frac{1}{2} - \mathbf{1}\{x \leq \vartheta(F)\}}{f(\vartheta(F))}$$

Ganz analog: Einflusskurve von $F^{-1}(p)$ ist

$$(*) \qquad \varphi_p(x,F) = \frac{p - \mathbf{1}\{x \leq F^{-1}(p)\}}{f(F^{-1}(p))},\ 0 < p < 1$$

9.7 Beispiel (α-getrimmtes Mittel)

Sei F stetig, $F' = f,\ f(x) > 0$ für $\{x : 0 < F(x) < 1\}$.
f symmetrisch mit Zentrum $\mu = EX$.
Für $0 < \alpha < \frac{1}{2}$ heißt

$$\mu_\alpha(F) = \frac{1}{1-2\alpha}\int_{F^{-1}(\alpha)}^{F^{-1}(1-\alpha)} x\ dF(x) = \frac{1}{1-2\alpha}\int_{\alpha}^{1-\alpha} F^{-1}(p)dp$$

α-getrimmtes Mittel.
Für symmetrische Verteilungen gilt:

$$\boxed{\mu_\alpha(F) = \mu}$$

(Denn:)

$$\frac{1}{1-2\alpha}\int_{F^{-1}(\alpha)}^{F^{-1}(1-\alpha)} \mu dF(x) = \mu$$

$$\Rightarrow \mu_\alpha(F) - \mu = \frac{1}{1-2\alpha}\int_{F^{-1}(\alpha)}^{F^{-1}(1-\alpha)} (x-\mu)dF(x) = 0$$

Der Plug-In Schätzer für $\mu_\alpha(F)$ ist

$$\mu_\alpha(\hat{F}_n) = \frac{1}{1-2\alpha}\int_{\alpha}^{1-\alpha} \hat{F}_n^{-1}(p)dp$$

wobei $\hat{F}_n^{-1}(t) = X_{(i)}$, falls $\frac{i-1}{n} < t \leq \frac{i}{n}$. (Aufgabe 16)

In der Praxis wird der (asymptotisch gelichwertige) Schätzer

$$\bar{X}_{n,\alpha} = \frac{1}{n-2[\alpha n]}\sum_{k=[\alpha n]+1}^{n-[\alpha n]} X_{(k)}$$

verwendet.

Einflusskurve von $\mu_\alpha(F)$:
9.4(c) $\Rightarrow$

$$(**) \qquad \varphi^\alpha(x,F) = \frac{1}{1-2\alpha}\int_{\alpha}^{1-\alpha} \varphi_p(x,F)dp \overset{(*)}{=} \frac{1}{1-2\alpha}\int_{\alpha}^{1-\alpha} \frac{p - \mathbf{1}\{x \leq F^{-1}(p)\}}{f(F^{-1}(p))}dp$$

Nun sei $F(x) < \alpha$. Dann:

$$
\begin{aligned}
(**) \quad &= \frac{1}{1-2\alpha} \int_{\alpha}^{1-\alpha} (p-1) \underbrace{\frac{1}{f(F^{-1}(p))}}_{\text{Dichte von } F^{-1}} dp \\
&= \frac{1}{1-2\alpha} \int_{\alpha}^{1-\alpha} \underbrace{(p-1)}_{G} dF^{-1}(p) \\
&\overset{(+)}{=} \frac{1}{1-2\alpha} [(\underbrace{(1-\alpha)-1}_{=G(b)}) \cdot F^{-1}(1-\alpha) - (\underbrace{\alpha-1}_{=G(a)}) \cdot F^{-1}(\alpha) \\
&\qquad \underbrace{- \int_{\alpha}^{1-\alpha} F^{-1}(p)dp}_{=(1-2\alpha)\cdot\mu}] \\
&= \frac{1}{1-2\alpha} [(-\alpha)(\underbrace{F^{-1}(1-\alpha) + F^{-1}(\alpha)}_{=2\mu}) + F^{-1}(\alpha) - (1-2\alpha)\mu] \\
&= \frac{F^{-1}(\alpha) - \mu}{1-2\alpha}
\end{aligned}
$$

(+): partielle Integration (Stochastik II), F weiterhin symmetrisch

Ähnliche Überlegungen für $F(x) > 1-\alpha$ bzw. $\alpha \leq F(x) \leq 1-\alpha$ ergeben:

$$
\varphi^{\alpha}(x,F) = \begin{cases} \frac{F^{-1}(\alpha)-\mu}{1-2\alpha}, & x < F^{-1}(\alpha) \\ \frac{x-\mu}{1-2\alpha}, & F^{-1}(\alpha) \leq x \leq F^{-1}(1-\alpha) \\ \frac{F^{-1}(1-\alpha)-\mu}{1-2\alpha}, & x > F^{-1}(1-\alpha) \end{cases}
$$

Insbesondere ist $\varphi^{\alpha}(x,F)$ beschränkt in x.

$$
\Rightarrow \bar{X}_{n,\alpha} = \frac{1}{n-2[\alpha n]} \sum_{k=[\alpha n]+1}^{n-[\alpha n]} X_{(k)}
$$

ist robust.

Einflusskurven-Heuristik ergibt:

$$
\sqrt{n}(\bar{X}_{n,\alpha} - \mu_{\alpha}) \xrightarrow{D} \mathcal{N}\left(0, \frac{1}{(1-2\alpha)^2}[2\alpha(F^{-1}(\alpha)-\mu)^2 + \int_{F^{-1}(\alpha)}^{F^{-1}(1-\alpha)} (x-\mu)^2 dF]\right)
$$