

Kapitel 3

Homologie von Garben

$0 \rightarrow \mathcal{F}' \rightarrow \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{F}'' \rightarrow 0$ kurze exakte Sequenz von Garben auf X , $U \subseteq X$ offen

$\Rightarrow 0 \rightarrow \mathcal{F}'(U) \rightarrow \mathcal{F}(U) \rightarrow \mathcal{F}''(U) \rightarrow \dots?$ exakt

$$\parallel \\ \Gamma(U, \mathcal{F})$$

§ 12 abgeleitete Funktoren

Definition + Bemerkung 12.1

a) Eine Kategorie \mathcal{C} heißt **abelsch**, wenn gilt:

- (i) $\text{Hom}_{\mathcal{C}}(A, B)$ ist abelsche Gruppe für alle $A, B \in \text{Ob}(\mathcal{C})$
- (ii) Für Morphismen gelten die Distributivgesetze (bezüglich $+$ und \cdot)
- (iii) Direkte Summen, Kerne, Kokerne existieren
- (iv) Der Homomorphiesatz gilt

b) $\underline{\text{Ab}}$, $k\text{-VR}$, $R\text{-Mod}$, $\underline{\text{Ab}(X)}$, $\underline{\mathcal{O}_X\text{-Mod}}$ sind abelsche Kategorien

c) $\underline{\text{Grp}}$, $\underline{\text{Set}}$ sind nicht abelsch

Definition 12.2

Sei \mathcal{C} abelsche Kategorie

a) Ein **Komplex** in \mathcal{C} ist eine Sequenz $C^0 := \dots \rightarrow C^{i-1} \xrightarrow{d^{i-1}} C^i \xrightarrow{d^i} C^{i+1} \rightarrow \dots$ mit Objekten C^i in \mathcal{C} , Morphismen $d^i \in \text{Hom}_{\mathcal{C}}(C^i, C^{i+1})$ sodass für jedes $i \in \mathbb{Z}$ gilt: $\text{Bild}(d^{i-1}) \subseteq \text{Kern}(d^i)$

b) Für einen Komplex C^0 heißt $H^i(C^0) := \text{Kern}(d^i) / \text{Bild}(d^{i-1})$ **i -tes Kohomologieobjekt**.

c) $d^i \circ d^{i-1} = 0 \ \forall i$

Proposition 12.3

Sei \mathcal{C} eine abelsche Kategorie

a) Die Komplexe in \mathcal{C} bilden eine Kategorie \mathcal{C}^0 mit Morphismen...

b) H^i ist Funktor $\mathcal{C}^0 \rightarrow \mathcal{C}$

c) Zu jeder kurzen exakten Sequenz $0 \rightarrow C'^0 \rightarrow C^0 \rightarrow C''^0 \rightarrow 0$ in \mathcal{C}^0 gibt es eine lange exakte Kohomologiesequenz

$$0 \rightarrow H^0(C'^0) \rightarrow H^0(C^0) \rightarrow H^0(C''^0) \xrightarrow{d} H^1(C'^0) \rightarrow H^1(C^0) \rightarrow \dots$$

$$\begin{array}{ccccccc}
 & 0 & & 0 & & 0 & & 0 \\
 & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
 & C^{n-1} & \longrightarrow & C^n & \longrightarrow & C^{n+1} & \longrightarrow & C^{n+2} \\
 & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
 \dots & \longrightarrow & C^{i-1} & \longrightarrow & C^i & \longrightarrow & C^{i+1} & \longrightarrow & C^{i+2} & \longrightarrow & \dots \\
 & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
 & C^{m-1} & \longrightarrow & C^m & \longrightarrow & C^{m+1} & \longrightarrow & C^{m+2} \\
 & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
 & 0 & & 0 & & 0 & & 0
 \end{array}$$

(Vertical arrows from \$C^{n-1}\$ to \$C^{i-1}\$ and \$C^m\$ to \$C^{m-1}\$ are labeled "Urbild". A dashed arrow points from \$C^{i+1}\$ to \$C^m\$.)

Ziel: Sei X ein Schema, \mathcal{F} Garbe auf X . Suche Gruppen (beziehungsweise \mathcal{O}_X -Moduln) $H^i(X, \mathcal{F})$, $i \geq 0$, sodass für jede kurze exakte Sequenz $0 \rightarrow \mathcal{F}' \rightarrow \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{F}'' \rightarrow 0$ in $\underline{\text{Ab}}(X)$ (beziehungsweise $\underline{\mathcal{O}_X - \text{Mod}}$) gilt:

$0 \rightarrow H^0(X, \mathcal{F}') \rightarrow H^0(X, \mathcal{F}) \rightarrow H^0(X, \mathcal{F}'') \rightarrow H^1(X, \mathcal{F}') \rightarrow H^1(X, \mathcal{F}) \rightarrow \dots$ ist exakt und $H^0(X, \mathcal{F}) = \Gamma(X, \mathcal{F}) = \mathcal{F}(X)$.

Bemerkung 12.4

Sei $H^i(X, \cdot)$ so ein Funktor, $(*)$ $0 \rightarrow \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{G}^0 \rightarrow \mathcal{G}^1 \rightarrow \dots$ exakte Sequenz in $\underline{\text{Ab}}(X)$ („Auflösung von \mathcal{F} “).

Ist $H^i(X, \mathcal{G}^j) = 0$ für alle $j \geq 0$ und alle $i \geq 1$ (\mathcal{G}^j ist **azyklisch**), so gilt $H^i(X, \mathcal{F}) = H^i(\Gamma(X, \mathcal{G}^0))$

Beweis

Induktion über i :

$i = 0$: $0 \rightarrow \Gamma(X, \mathcal{F}) \rightarrow \Gamma(X, \mathcal{G}^0) \rightarrow \Gamma(X, \mathcal{G}^1)$ ist exakt.

$$H^0(\Gamma(X, \mathcal{G}^0)) = \text{Kern}(\Gamma(X, \mathcal{G}^0) \rightarrow \Gamma(X, \mathcal{G}^1)) \cong \Gamma(X, \mathcal{F})$$

$$\begin{array}{lcl}
 \text{Aus } (*) \text{ folgt} & 0 \rightarrow \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{G}^0 \rightarrow \mathcal{G}^0/\mathcal{F} \rightarrow 0 & \text{ist exakt und} \\
 & 0 \rightarrow \mathcal{G}^0/\mathcal{F} \rightarrow \mathcal{G}^1 \rightarrow \mathcal{G}^2 \rightarrow \dots & \text{ist exakt}
 \end{array}$$

$i = 1$: Nach Voraussetzung gibt es lange exakte Sequenz

$$0 \rightarrow H^0(X, \mathcal{F}) \rightarrow H^0(X, \mathcal{G}^0) \rightarrow H^0(X, \mathcal{G}^0/\mathcal{F}) \rightarrow H^1(X, \mathcal{F}) \rightarrow 0 \rightarrow H^1(X, \mathcal{G}^0/\mathcal{F}) \rightarrow \dots$$

$$\Rightarrow H^1(X, \mathcal{F}) = H^0(X, \mathcal{G}^0/\mathcal{F}) / \text{Bild}(H^0(X, \mathcal{G}^0))$$

$$(H^0(X, \mathcal{G}^0/\mathcal{F}) \cong \text{Kern}(H^0(X, \mathcal{G}^1) \rightarrow H^0(X, \mathcal{G}^2)))$$

$$\begin{aligned}
 \Rightarrow H^1(X, \mathcal{F}) &\cong \text{Kern}(H^0(X, \mathcal{G}^1) \rightarrow H^0(X, \mathcal{G}^2)) / \text{Bild}(H^0(X, \mathcal{G}^0) \rightarrow H^0(X, \mathcal{G}^1)) \\
 &= H^1(\Gamma(X, \mathcal{G}^0))
 \end{aligned}$$

□

Definition + Bemerkung 12.5

- Ein Objekt I in einer abelschen Kategorie \mathcal{C} heißt **injektiv**, wenn $\text{Hom}_{\mathcal{C}}(\cdot, I)$ exakt ist.
- I ist genau dann injektiv, wenn für jedes solches Diagramm ein $\varphi \in \text{Hom}_{\mathcal{C}}(C, I)$ existiert mit $\tilde{\varphi} \circ \alpha = \varphi$.

$$\begin{array}{ccc}
 0 & \rightarrow & C' \xrightarrow{\alpha} C \\
 & & \varphi \downarrow \swarrow \tilde{\varphi} \\
 & & I
 \end{array}$$

$$0 \rightarrow C' \xrightarrow{\alpha} C \rightarrow C'' \rightarrow 0$$

$$0 \rightarrow \operatorname{Hom}(C'', I) \rightarrow \operatorname{Hom}(C, I) \rightarrow \operatorname{Hom}(C', I)$$

Beispiel

\mathbb{Q}/\mathbb{Z} ist injektiv in $\underline{\operatorname{Ab}}$, denn:

Seien $G' \subseteq G$ abelsche Gruppe, $\varphi : G' \rightarrow \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ Homomorphismus. Für $a \in G$ sei

$$\tilde{\varphi}(a) := \begin{cases} \frac{1}{n}\varphi(n \cdot a) & , \text{ falls } n \text{ minimal mit } n \cdot a \in G' \\ 0 & , n \cdot a \notin G' \text{ für alle } n > 0 \end{cases}$$

Bemerkung 12.6

Sei I injektives Objekt in $\underline{\operatorname{Ab}}(X)$ und $0 \rightarrow I \xrightarrow{\alpha} \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{F}' \rightarrow \mathcal{F}'' \rightarrow 0$ exakt.

a) Dann gibt es $p : \mathcal{F} \rightarrow I$ mit $p \circ \alpha = \operatorname{id}_I$.

b) $\mathcal{F} \cong \mathcal{F}' \oplus I$, denn:

$I \cap \operatorname{Kern}(p) = 0$, $\beta|_{\operatorname{Kern}(p)} : \operatorname{Kern}(p) \rightarrow \mathcal{F}'$ ist Isomorphismus, $I + \operatorname{Kern}(p) = \mathcal{F}$

c) $0 \rightarrow H^0(X, I) \rightarrow H^0(X, \mathcal{F}) \rightarrow H^0(X, \mathcal{F}') \rightarrow 0 = H^1(X, I)$ ist exakt.

Proposition 12.7

In den Kategorien $\underline{\operatorname{Ab}}$, $R\text{-Mod}$, $\underline{\operatorname{Ab}}(X)$, $\mathcal{O}_X\text{-Modul}$ gibt es genügend viele injektive Objekte, das heißt jedes Objekt ist isomorph zu einem Unterobjekt eines injektiven Objekts.

Beweis

Aufwändige Konstruktion aus \mathbb{Q}/\mathbb{Z} (aber naheliegend) □

Definition + Bemerkung 12.8

Sei X Schema, $\mathcal{F} \in \underline{\operatorname{Ab}}(X)$

a) \mathcal{F} besitzt injektive Auflösung, das heißt eine exakte Sequenz $0 \rightarrow \mathcal{F} \hookrightarrow I^0 \rightarrow I^1 \rightarrow I^2 \rightarrow \dots$ mit $\forall \nu : I_\nu$ injektiv ($\dots \xrightarrow{d^{n-1}} I^n$, $\tilde{d}^n : I^n / \operatorname{Bild}(d^{n-1}) \hookrightarrow I^{n+1}$, $d^n = \tilde{d}^n \circ \operatorname{pr}$)

b) $H^i(X, \mathcal{F}) := H^i(\Gamma(X, I^\bullet))$ heißt i -te Kohomologiegruppe von \mathcal{F} , das heißt H^0 ist die Kohomologie des Komplexes $0 \rightarrow \Gamma(X, I^0) \rightarrow \Gamma(X, I^1) \rightarrow \Gamma(X, I^2) \rightarrow \dots$

c) Insbesondere: $H^0(X, \Gamma) = \operatorname{Kern}(\Gamma(X, I^0) \rightarrow \Gamma(X, I^1)) \stackrel{\Gamma \text{ ist linksexakt}}{=} \Gamma(X, \mathcal{F})$

Proposition 12.9

Sei X Schema, $\mathcal{F} \in \underline{\operatorname{Ab}}(X)$

a) $H^i(X, \mathcal{F})$ hängen nicht von der gewählten injektiven Auflösung ab.

b) $H^i(X, \cdot)$ ist ein Funktor $\underline{\operatorname{Ab}}(X) \rightarrow \underline{\operatorname{Ab}}$

c) Jede kurze Sequenz $0 \rightarrow A \rightarrow B \rightarrow C \rightarrow 0$ von Garben induziert eine lange exakte Kohomologiesequenz $0 \rightarrow H^0(X, A) \rightarrow H^0(X, B) \rightarrow H^0(X, C) \rightarrow H^1(X, A) \rightarrow H^1(X, B) \rightarrow \dots$

$$\begin{array}{ccccccc} \mathcal{F} & \longrightarrow & \dots & \longrightarrow & I^n & \xrightarrow{d} & I^{n+1} \\ & & & & \searrow & \nearrow & \downarrow \\ & & & & I^n / \operatorname{Kern}(d^n) & & \\ & & & & \searrow \text{dashed} & & \downarrow \\ \mathcal{G} & \longrightarrow & \dots & \longrightarrow & J^n & \longrightarrow & J^{n+1} \end{array}$$

- d) Injektive Garben I sind azyklisch, das heißt für alle $i \geq 1$ ist $H^i(X, I) = 0$. $0 \rightarrow I \rightarrow I \rightarrow 0 \rightarrow 0 \dots$ ist injektive Auflösung.

Verallgemeinerung 12.10

Seien \mathcal{A}, \mathcal{B} abelsche Kategorien, \mathcal{A} habe genügend injektive Objekte und $F : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}$ ein kovarianter linksexakter Funktor. \rightsquigarrow Definiere analog zu 12.8 **abgeleitete Funktoren** $R^i F$ von F ($i \geq 0$) \rightsquigarrow diese haben die Eigenschaften aus 12.9.

§ 13 Čech-Kohomologie

Sei X topologischer Raum, $\mathcal{U} = \{U_i | i \in \mathbb{N}\}$ eine offene Überdeckung von X , $\mathcal{F} \in \underline{\text{Abb}}(X)$

Definition + Bemerkung 13.1

a) Für $k \geq 0$ sei $C^k(\mathcal{U}, \mathcal{F}) := \prod_{i_0 < \dots < i_k} \mathcal{F}(U_{i_0} \cap \dots \cap U_{i_k})$

$$d^k : \begin{cases} C(\mathcal{U}, \mathcal{F}) & \rightarrow C^{k+1}(\mathcal{U}, \mathcal{F}) \\ (S_{i_0, \dots, i_k})_{i_0 < \dots < i_k} & \mapsto \left(\sum_{\nu=0}^{k-1} (-1)^\nu S_{i_0, \dots, i_{\nu-1}, i_{\nu+1}, \dots, i_{k+1}} \Big|_{U_{i_0} \cap \dots \cap U_{i_{k+1}}} \right)_{i_0 < \dots < i_{k+1}} \end{cases}$$

b) Für alle $k \geq 0$ gilt $d^{k+1} \circ d^k = 0$, das heißt $0 \rightarrow C^0(\mathcal{U}, \mathcal{F}) \xrightarrow{d^0} C^1(\mathcal{U}, \mathcal{F}) \xrightarrow{d^1} \dots$ ist Kettenkomplex. [Nachrechnen!]

c) $\check{H}^k(\mathcal{U}, \mathcal{F}) := H^k(C^0(\mathcal{U}, \mathcal{F})) = \text{Kern}(d^k) / \text{Bild}(d^{k-1})$ heißt k -te **Čech-Kohomologie** von \mathcal{F} bezüglich \mathcal{U} .

d) $\check{H}^0(\mathcal{U}, \mathcal{F}) = \mathcal{F}(X) \stackrel{12.8}{=} H^0(X, \mathcal{F})$

Beweis

d) $\Phi : \begin{cases} \mathcal{F}(X) & \rightarrow \check{H}^0(\mathcal{U}, \mathcal{F}) = \text{Kern}(d^0) \\ S & \mapsto (S|_{U_i})_{i \in \mathbb{N}} \end{cases}$ ist wohldefiniert

Garbeneigenschaft: Φ bijektiv

□

Beispiel 13.2

$X = S^1$, $\mathcal{F} = \mathbb{Z}$ konstante Garbe

a) $\mathcal{U} = \{X, \emptyset, \emptyset, \dots\} \Rightarrow C^0(\mathcal{U}, \mathcal{F}) = \mathcal{F}(X) \cong \mathbb{Z}$

$\forall k \geq 1 : C^k(\mathcal{U}, \mathcal{F}) = 0$

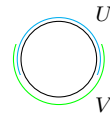
$$0 \rightarrow \mathcal{F}(X) \xrightarrow{d^0} 0 \xrightarrow{d^1} 0 \rightarrow \dots$$

$$\Rightarrow \check{H}^0(\mathcal{U}, \mathcal{F}) = \mathcal{F}(X) \cong \mathbb{Z}, \forall k \geq 1 : \check{H}^k(\mathcal{U}, \mathcal{F}) = 0$$

b) $\mathcal{U} = \{U, V\}$

$$C^0(\mathcal{U}, \mathcal{F}) = \mathcal{F}(U) \times \mathcal{F}(V) \cong \mathbb{Z}^2$$

$$C^1(\mathcal{U}, \mathcal{F}) = \mathcal{F}(U \cap V) = \mathbb{Z}^2, \forall k \geq 2 : C^k(\mathcal{U}, \mathcal{F}) = 0$$



$$0 \rightarrow \mathbb{Z}^2 \xrightarrow{d^0} \mathbb{Z}^2 \xrightarrow{d^1} 0 \rightarrow 0 \rightarrow \dots$$

$$\text{mit } \left. \begin{array}{l} d^0 : (s, t) \mapsto t - s|_{U \cap V} \\ \mathbb{Z}^2 : (s, t) \mapsto (t - s, t - s) \in \mathbb{Z}^2 \end{array} \right\} \Rightarrow \text{Bild } d^0 = \{(s, s) \in \mathbb{Z}^2\} \cong \mathbb{Z}$$

$$\check{H}^0(\mathcal{U}, \mathcal{F}) = \text{Kern}(d^0) = \{(s, s) \in \mathbb{Z}^2\} \cong \mathbb{Z}$$

$$\check{H}^1(\mathcal{U}, \mathcal{F}) = \mathbb{Z}^2 / \mathbb{Z} \cong \mathbb{Z}, \forall k \geq 2 : \check{H}^k(\mathcal{U}, \mathcal{F}) = 0$$

Definition 13.3

a) Definiere für $k \geq 0$ die Garbe

$$\mathcal{C}^k = \mathcal{C}^k(\mathcal{U}, \mathcal{F}) := \prod_{i_0 < \dots < i_k} (i_{i_0 < \dots < i_k})_* \mathcal{F}|_{U_{i_0} \cap \dots \cap U_{i_k}}$$

$$i_{i_0 < \dots < i_k} : U_{i_0} \cap \dots \cap U_{i_k} \hookrightarrow X$$

$$\text{Das hei\ss t: } \mathcal{C}^k(\mathcal{U}, \mathcal{F})(U) = \prod_{i_0 < \dots < i_k} \mathcal{F}(U_{i_0} \cap \dots \cap U_{i_k} \cap U)$$

$$\mathcal{C}^k = (U, \mathcal{F})(X) = \mathcal{C}^k(U, \mathcal{F})$$

- b) Definiere $d_U^k : \mathcal{C}^k(\mathcal{U}, \mathcal{F})(U) \rightarrow \mathcal{C}^{k+1}(\mathcal{U}, \mathcal{F})(U)$ wie in 13.1 $\Rightarrow d^k$ ist Garbenmorphismus und $\forall k \geq 0 : d^{k+1} \circ d^k = 0$
- c) $\varepsilon_U : \begin{cases} \mathcal{F}(U) & \rightarrow \mathcal{C}^0(\mathcal{U}, \mathcal{F})(U) \\ s & \mapsto (s|_{U \cap U_i})_{i \in \mathbb{N}} \end{cases}$ definiert einen injektiven Garbenmorphismus.
- d) $0 \rightarrow \mathcal{F} \xrightarrow{\varepsilon} \mathcal{C}^0 \xrightarrow{d^0} \mathcal{C}^1 \xrightarrow{d^1} \mathcal{C}^2 \rightarrow \dots$ ist eine Aufl\u00f6sung von \mathcal{F} (das hei\u00dft exakt). *Achtung:* im Allgemeinen weder injektiv noch azyklisch!

Beweis

$$\text{d) } U \subseteq X \text{ offen: } \mathcal{F}(U) \xrightarrow{\varepsilon_U} \prod_{i \in \mathbb{N}} \mathcal{F}(U \cap U_i) \xrightarrow{d^0} \prod_{i \neq j} \mathcal{F}(U \cap U_i \cap U_j)$$

$$d_U^0(\varepsilon_U(s)) = d_U^0((s|_{U \cap U_i})_{i \in \mathbb{N}}) = (s|_{U \cap U_i|_{U \cap U_i \cap U_j}} - s|_{U \cap U_j|_{U \cap U_i \cap U_j}}) = 0$$

Seien $x \in X$, $j \in \mathbb{N}$, $x \in U_j$. Zeige Exaktheit auf den Halmen

$$0 \rightarrow \mathcal{F} \xrightarrow{\varepsilon_X} \mathcal{C}^0 \xrightarrow{d_X^0} \mathcal{C}^1 \xrightarrow{d_X^1} \mathcal{C}^2 \xrightarrow{d_X^2} \dots$$

$\begin{matrix} \swarrow & \searrow \\ r_1 & r_2 \\ h^1 & h^2 \end{matrix}$

Definiere $h^k : \mathcal{C}_X^k \rightarrow \mathcal{C}_X^{k-1}$.

$$s \in \mathcal{C}_X^k \Rightarrow \hat{s} = [(V, s)] \text{ \Ø } V \subseteq U_j, \quad s \in \mathcal{C}^k(V)$$

\parallel
 $(s_{i_0, \dots, i_k})_{i_0 < \dots < i_k}$

$$\text{Sei } t_{j_0, \dots, j_{k-1}} : \begin{cases} 0 & , j \in \{j_0, \dots, j_{k-1}\} \\ (-1)^\nu s_{j_0, \dots, j, j_{k-1}} & , j_{\nu-1} < j < j_\nu \end{cases}$$

$$h^k(\hat{s}) = [(V, (t_{j_0, \dots, j_{k-1}})_{i_0 < \dots < i_{k-1}})]$$

$$\text{Nachrechnen: } \underbrace{d_X^{k-1} \circ h^k + h^{k+1} \circ d_X^k}_f = \text{id}$$

$$\text{Sei } \hat{s} \in \text{Kern}(d_X^k), \hat{s} = f(\hat{s}) = d_X^{k-1} \circ h^k(\hat{s}) \Rightarrow \hat{s} \in \text{Bild}(d_X^{k-1})$$

□

Proposition 13.4

Sei X Schema, $\mathcal{F} \in \text{Ab}(X)$, $U = \{U_i | i \in \mathbb{N}\}$ offene \u00berdeckung von X . Dann gibt es f\u00fcr jedes $k \geq 0$ einen nat\u00fcrlichen Gruppenhomomorphismus

$$\check{H}^k(\mathcal{U}, \mathcal{F}) \rightarrow H^k(X, \mathcal{F})$$

Beweis

Sei $0 \rightarrow \mathcal{F} \rightarrow I^0$ injektive Aufl\u00f6sung von \mathcal{F} und $0 \rightarrow \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{C}^0 = \mathcal{C}^0(\mathcal{U}, \mathcal{F})$ Aufl\u00f6sung aus 13.3. Dann gibt es einen Homomorphismus von Komplexen:

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & \mathcal{F} & \longrightarrow & \mathcal{C}^0 & \longrightarrow & \mathcal{C}^1 & \longrightarrow & \mathcal{C}^2 & \longrightarrow & \dots \\ & & \parallel & & \downarrow \alpha^0 & \searrow & \swarrow & & \downarrow \alpha^1 & \searrow & \swarrow \\ & & & & & \mathcal{C}^0/\mathcal{F} & & & \mathcal{C}^1/\text{Bild}(\mathcal{C}^0) & & \\ & & & & & \swarrow & \searrow & & \swarrow & \searrow & \\ 0 & \longrightarrow & \mathcal{I} & \longrightarrow & \mathcal{I}^0 & \longrightarrow & \mathcal{I}^1 & \longrightarrow & \mathcal{I}^2 & \longrightarrow & \dots \end{array}$$

$\begin{matrix} \swarrow & \searrow \\ \parallel & \parallel \\ \swarrow & \searrow \end{matrix}$

§ 14 Kohomologie quasi kohärenter Garben

Definition + Bemerkung 14.1

Sei X ein topologischer Raum, $\mathcal{F} \in \text{Ab}(X)$

- \mathcal{F} heißt **welk**, wenn $\rho_{U'}^U : \mathcal{F}(U) \rightarrow \mathcal{F}(U')$ surjektiv ist für alle offenen $U' \subseteq U$.
- Konstante Garben sind welk, wenn X irreduzibel ist. Wolkenkratzergarben sind welk.
- Ist $0 \rightarrow \mathcal{F}' \rightarrow \mathcal{F} \xrightarrow{\beta} \mathcal{F}'' \rightarrow 0$ exakt, \mathcal{F} welk, so ist $0 \rightarrow \mathcal{F}'(U) \rightarrow \mathcal{F}(U) \xrightarrow{\beta_U} \mathcal{F}''(U) \rightarrow 0$ exakt für jedes offene $U \subseteq X$.
- Sei $0 \rightarrow \mathcal{F}' \rightarrow \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{F}'' \rightarrow 0$ exakt. Sind \mathcal{F}' und \mathcal{F} welk, so auch \mathcal{F}'' .

Beweis

c) Sei $V \subseteq U$ offen in X . Nach c) sind

$$\begin{array}{ccccccc}
 & & \tilde{s} & \xrightarrow{\hspace{2cm}} & \tilde{s}'' & & \\
 0 & \longrightarrow & \mathcal{F}'(U) & \longrightarrow & \mathcal{F}(U) & \longrightarrow & \mathcal{F}''(U) \longrightarrow 0 \\
 & \text{und} & \downarrow \text{Restriktions-} & & \downarrow & & \downarrow \\
 & & \text{abbildungen} & & & & \\
 0 & \longrightarrow & \mathcal{F}'(V) & \longrightarrow & \mathcal{F}(V) & \longrightarrow & \mathcal{F}''(V) \longrightarrow 0 \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
 & & 0 & & 0 & & 0
 \end{array}
 \quad \text{exakt}$$

Nach Voraussetzung sind die vertikalen Sequenzen exakt.

- Sei $s \in \mathcal{F}''(U)$. Nach Voraussetzung (β surjektiv) gibt es offene Überdeckung $(U_i)_{i \in I}$ von U und $\hat{s} \in \mathcal{F}(U_i)$ mit $\beta_{U_i}(\hat{s}_i) = s|_{U_i}$. Sei $d_{ij} := \hat{s}_i|_{U_i \cap U_j} - \hat{s}_j|_{U_i \cap U_j} \in \mathcal{F}(U_i \cap U_j)$.

$$\beta_{U_i \cap U_j}(d_{ij}) = 0 \Rightarrow d_{ij} \in \mathcal{F}'(U_i \cap U_j) \xrightarrow{\mathcal{F}' \text{ welk}} \text{OE } d_{ij} \in \mathcal{F}'(U_i)$$

Setze $\hat{s}'_i := 2\hat{s}_i - d_{ij} \Rightarrow \hat{s}'_i|_{U_i \cap U_j} = 2\hat{s}_i - \hat{s}_i + \hat{s}_j = \hat{s}_i + \hat{s}_j = \hat{s}'_j|_{U_i \cap U_j} \Rightarrow$ die \hat{s}'_i bilden konsistente Familie $\Rightarrow \exists \tilde{s} \in \mathcal{F}(U)$ mit $\tilde{s}|_{U_i} = \hat{s}'_i$ für alle $i \in I$ und $s_U(\tilde{s}) = s$. \square

Proposition 14.2

Sei X ein Schema, \mathcal{I} injektive \mathcal{O}_X -Modulgarbe auf X . Dann ist \mathcal{I} welk.

Beweis

Sei $V \subseteq U$ offen. Es gilt $j_!(\mathcal{O}_X|_V) \subseteq j_!(\mathcal{O}_X|_U)$ ($\mathcal{I}(X) = \text{Hom}_{\mathcal{O}_X}(\mathcal{O}_X, \mathcal{I})$, $\mathcal{I}(U) = \text{Hom}_{\mathcal{O}_X}(j_!(\mathcal{O}_X(U), \mathcal{I}))$)

$$\begin{array}{c}
 \downarrow \\
 \mathcal{I}
 \end{array}$$

$\xrightarrow{\mathcal{I} \text{ inj.}} \text{Hom}_{\mathcal{O}_X}(j_!(\mathcal{O}_X|_U), \mathcal{I}) \rightarrow \text{Hom}_{\mathcal{O}_X}(j_!(\mathcal{O}_X|_V), \mathcal{I})$ ist surjektiv \square

Satz 4

Sei $X = \text{Spec } R$ ein noethersches affines Schema, \mathcal{F} quasi-kohärente Garbe auf X . Dann ist $H^i(X, \mathcal{F}) = 0$ für alle $i \geq 1$.

Beweis

Sei $M = \mathcal{F}(X) = \Gamma(X, \mathcal{F}) = H^0(X, \mathcal{F})$, also $\mathcal{F} = \tilde{M}$. Sei $0 \rightarrow M \rightarrow I^\bullet$ eine injektive Auflösung des R -Moduls $M \xrightarrow{\text{Bem. 9.5}} 0 \rightarrow \tilde{M} \rightarrow \tilde{I}^\bullet$ ist exakt (also Ausflösung von \mathcal{F}). Der Satz folgt aus 14.4 und 14.3 \square

Proposition 14.3

Welke Garben sind azyklisch.

Proposition 14.4

ist I injektiver R -Modul, so ist \tilde{I} welche \mathcal{O}_X -Modulgarbe ($X = \text{Spec } R$).

Beweis (von Proposition 14.3)

Sei \mathcal{F} welche Garbe, \mathcal{I} injektive Garbe mit $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{I} \Rightarrow 0 \rightarrow \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{I} \rightarrow \mathcal{G} \rightarrow 0$ exakt mit $\mathcal{G} = \mathcal{I}/\mathcal{F}$. Die lange exakte Kohomologiesequenz dazu ist:

$$0 \rightarrow H^0(X, \mathcal{F}) \rightarrow H^0(X, \mathcal{I}) \rightarrow H^0(X, \mathcal{G}) \xrightarrow[\substack{\text{Nullabb.} \\ \text{14.1 c)}}]{\substack{= \mathcal{F}(X) \\ = \mathcal{I}(X) \\ = \mathcal{G}(X)}} H^1(X, \mathcal{F}) \rightarrow H^1(X, \mathcal{I}) \rightarrow H^1(X, \mathcal{G}) \rightarrow H^2(X, \mathcal{F}) \rightarrow H^2(X, \mathcal{I}) \rightarrow \dots$$

$\substack{=0 \\ =0(\mathcal{I} \text{ inj.}) \\ =0(\mathcal{G} \text{ welk})} \quad \substack{=0 \\ =0} \quad \substack{=0} \quad \substack{=0} \quad \substack{=0} \quad \substack{=0}$

Nach 14.2 und 14.1 d) sind \mathcal{I} und \mathcal{G} welk. □

Beweis (von Proposition 14.4)

Es genügt zu zeigen: $\tilde{\mathcal{I}}(X) \rightarrow \tilde{\mathcal{I}}(U)$ surjektiv für jedes $U \subseteq X$ offen.

1. Fall: $U = D(f)$ für ein $f \in R$

$$\Rightarrow \tilde{I}(U) = I_f$$

Sei $\frac{b}{f^n} \in I_f$ (also $b \in I$, $n \geq 0$). Gesucht: $a \in I$ mit $\frac{a}{1} = \frac{b}{f^n}$ in I_f , also $(f^n a - b) \cdot f^m = 0$ für ein $m \geq 0$.

Für jedes $m \geq 0$ induziert $1 \mapsto f^{m+n}$ eine R -lineare Abbildung $R \rightarrow (f^{m+n})$.
 $\text{Kern}(\varphi_m) = \text{Ann}(f^{m+n})$ (Ideal) (Ann heißt Annulator)

Es ist $\text{Ann}(f^m) \subseteq \text{Ann}(f^{m+1}) \subseteq \dots \xrightarrow{R \text{ noeth.}} \exists m \text{ mit } \text{Ann}(f^{m+n}) = \text{Ann}(f^m) \Rightarrow (f^{m+n}) \cong R/\text{Ann}(f^n)$

Sei $\psi : R \rightarrow I$, $1 \mapsto f^m b$ R -linear $\Rightarrow \text{Ann}(f^m) \subseteq \text{Kern}(\psi) \Rightarrow \psi$ induziert $\bar{\psi} : (f^{m+n}) \rightarrow I \xrightarrow{I \text{ inj.}} \exists \text{ Fortsetzung } \tilde{\psi} : R \rightarrow I \text{ von } \bar{\psi}$.

Setze $a := \tilde{\psi}(1) \Rightarrow f^m b = \psi(1) = \bar{\psi}(f^{m+n}) = \tilde{\psi}(f^{m+n} \cdot 1_R) \xrightarrow[\substack{\tilde{\psi} \\ R\text{-lin.}}]{f^{m+n} \cdot \tilde{\psi}(1)} f^{m+n} \cdot \tilde{\psi}(1) = f^{m+n} \cdot a \quad \square$

§ 15 Kohomologie kohärenter Garben auf projektiven Schemata

Definition + Bemerkung 15.1

Sei $S = \bigoplus_{i=0}^{\infty} S_i$ graduierter Ring und $X = \text{Proj } S$. Sei weiter $M = \bigoplus_{i \in \mathbb{Z}} M_i$ ein graduierter S -Modul.

- Sei \tilde{M} die Garbe auf X die durch $\tilde{M}(D^+(f)) = M_f^{\text{hom}}$ für jedes homogene $f \in S$ gegeben ist.
- Für jedes $x \in X$, also $\mathfrak{p} \in \text{Proj } S$ (homogenes Primideal) ist $\tilde{M}_x = M_{\mathfrak{p}}^{\text{hom}}$.
- Für jedes offene $U \subseteq X$ ist

$$\begin{aligned} \tilde{M}(U) = \{s : U \rightarrow \bigcup_{x \in U} \tilde{M}_x, \quad & s(x) \in \tilde{M}, \text{ für jedes } \mathfrak{p} \in U \text{ gibt es Umgebung} \\ & U(\mathfrak{p}) \subseteq U \text{ mit } s(\mathfrak{q}) = \frac{m}{f} \text{ für jedes } \mathfrak{q} \in U(\mathfrak{p}), \\ & \text{dabei ist } m \in M, f \in S \setminus \mathfrak{q} \text{ homogen vom gleichen Grad}\} \end{aligned}$$

- \tilde{M} ist quasikohärente \mathcal{O}_X -Modulgarbe. \tilde{M} ist kohärent, falls S noethersch und M endlich erzeugt.

($S_f^{\text{hom}} = \{\frac{a}{f^n} : a \in S_{n \cdot d}\}$, $D^+(f) \cong \text{Spec } S_f^{\text{hom}}$, f homogen vom Grad d , $M_f^{\text{hom}} = \{\frac{m}{f^n} : m \in M_{n \cdot d}\}$)

Beispiele

Sei $X = \text{Proj } S$ wie in 15.1

- $\tilde{S} = \mathcal{O}_X$
- Für $n \in \mathbb{Z}$ sei $S(n)$ der graduierte S -Modul mit $S(n)_d := S_{n+d}$.

$$\mathcal{O}_X(n) := \widetilde{S(n)} \quad (\text{Serre-Twist})$$

- $S = R[X_0, \dots, X_n]$, $X = \text{Proj } S = \mathbb{P}_R^n$
Dann ist $H^0(X, \mathcal{O}_X(1)) = S(1)_0 = S_1$ der freie R -Modul mit Basis X_0, \dots, X_n .
- Für $d < 0$ hat $\mathcal{O}_X(d)$ keine globalen Schnitte $\neq 0$. Für ≥ 0 ist $H^0(X, \mathcal{O}_X(d))$ der freie R -Modul, der von den homogenen Polynomen vom Grad d in $R[X_0, \dots, X_n]$ erzeugt wird.

Ziele:

- Bestimme $H^i(\mathbb{P}_R^n, \mathcal{O}(d))$ für alle $i \geq 0$ und alle d .
- Jede kohärente Garbe auf \mathbb{P}_R^n ist von der Form $\mathcal{F} = \bigoplus_{i=1}^r \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(d_i) / \mathcal{G}$

Kulturbeitrag: $H^i(\mathbb{P}_R^n, \mathcal{F}) = \check{H}^i(\mathfrak{U}, \mathcal{F})$ für die Überdeckung $\mathfrak{U} = \{U_0, \dots, U_n\}$, $U_i = D(X_i)$ (affine Standardüberdeckung des \mathbb{P}^n)

$$\begin{aligned} \dots \rightarrow \bigoplus_{i=0}^n \underbrace{\mathcal{O}(d)(U_0 \cap \dots \cap U_{i-1} \cap U_{i+1} \cap \dots \cap U_n)}_{\text{freier } R\text{-Modul mit Basis } X_0^{d_0} \dots X_n^{d_n} : \sum_{j=0}^n d_j = d, d_i \geq 0} \xrightarrow{d^{n-1}} \underbrace{\mathcal{O}(d)(U_0 \cap \dots \cap U_n)}_{\substack{= \left\{ \frac{g}{(X_0, \dots, X_n)^k} \right\}, g \text{ homogen} \\ \text{vom Grad } d+k(n+1)} \\ = \left\langle \frac{1}{X_0^{d_0} \dots X_n^{d_n}} : \sum_{i=0}^n d_i = -d_R \right\rangle \\ = \text{freier } R\text{-Modul mit Basis} \\ X_0^{d_0} \dots X_n^{d_n} : \sum_{i=0}^n d_i = d, d_i \in \mathbb{Z}} \rightarrow 0 \end{aligned}$$

Fazit: $X_0^{d_0} \cdot \dots \cdot X_n^{d_n}$ (mit $\sum_{i=0}^n d_i = d$) liegt in $\text{Bild}(d^{n-1}) \Leftrightarrow \exists i \text{ mit } d_i \geq 0$

Bemerkung 15.2

- a) Für $d \geq -n$ ist d^{n-1} surjektiv, also $H^n(\mathbb{P}^n, \mathcal{O}(d)) = 0$
 b) $H^n(\mathbb{P}^n, \mathcal{O}(-n-1)) \cong R$, erzeugt von $\frac{1}{X_0 \cdots X_n}$

Proposition 15.3

Sei R noetherscher Ring, $n \geq 1$, $\mathbb{P}^n = \mathbb{P}_R^n = \text{Proj } R[X_0, \dots, X_n]$, $\mathcal{O} := \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}$

- a) $H^n(\mathbb{P}^n, \mathcal{O}(-n-1)) = R \frac{1}{X_0 \cdots X_n} \cong R$
 b) Für jedes $d \in \mathbb{Z}$ gibt es natürliche bilineare Abbildung

$$H^0(\mathbb{P}^n, \mathcal{O}(d)) \times H^n(\mathbb{P}^n, \mathcal{O}(-d-n-1)) \rightarrow H^n(\mathbb{P}^n, \mathcal{O}(-n-1)) \cong R$$

Diese ist nicht ausgeartete Paarung zwischen freien R -Moduln von endlichem Rang.

- c) Für alle $i = 1, \dots, n-1$ und alle $d \in \mathbb{Z}$ ist

$$H^i(\mathbb{P}^n, \mathcal{O}(d)) = 0$$

Beweis

- b) $\underline{d < 0}$: $H^0(\mathbb{P}^n, \mathcal{O}(d)) = S_d$
 $= 0$ für $d < 0$

$$H^n(\mathbb{P}^n, \mathcal{O}(-d-n-1)) = 0 \text{ für } d < 0 \text{ (15.2 a)}$$

$\underline{d \geq 0}$: Für $d \geq 0$ ist die Paarung gegeben durch

$$\underbrace{(X_0^{\nu_0} \cdots X_n^{\nu_n})}_{\sum_{\nu_i \geq 0} \nu_i = d} \underbrace{(X_0^{\mu_0} \cdots X_n^{\mu_n})}_{\sum_{\mu_i < 0} \mu_i = -d-n-1} \mapsto \underbrace{X_0^{\nu_0+\mu_0} \cdots X_n^{\nu_n+\mu_n}}_{\sum (\nu_i+\mu_i) = -n-1}$$

$$\text{nicht ausgeartet: } \begin{aligned} (X_0^{\nu_0} \cdots X_n^{\nu_n}, X_0^{-\nu_0-1} \cdots X_n^{-\nu_n-1}) &\mapsto X_0^{-1} \cdots X_n^{-1} \\ (X_0^{-\mu_0-1} \cdots X_n^{-\mu_n-1}, X_0^{\mu_0} \cdots X_n^{\mu_n}) &\mapsto X_0^{-1} \cdots X_n^{-1} \end{aligned}$$

- c) Sei $1 \leq i \leq n-1$, $d \in \mathbb{Z}$, $0 \leq k \leq n$.

Behauptung: Dann ist die Multiplikation mit X_k ein Isomorphismus $H^i(\mathbb{P}^n, \mathcal{O}(d-1)) \rightarrow H^i(\mathbb{P}^n, \mathcal{O}(d))$.

Jedes $\alpha \in H^i(\mathbb{P}^n, \mathcal{O}(d))$ wird repräsentiert von einem Tupel von Linearkombinationen von Monomen $X_{j_0}^{\nu_0} \cdots X_{j_i}^{\nu_i}$ mit $\sum \nu_k = d$, $\nu_k < 0$ für alle k . Multipliziere mit $X_{j_i}^{-\nu_i}$. Das Bild von $X_{j_0}^{\nu_0} \cdots X_{j_n}^{\nu_n}$ in $H^i(\mathbb{P}^n, \mathcal{O}(d-\nu_i))$ ist 0. Nach der Behauptung ist damit auch $\alpha = 0$.

Beweis der Behauptung: $\forall k = n$

$\cdot X_n$ induziert exakte Sequenz von graduierten S -Moduln ($S = R[X_0, \dots, X_n]$)

$$0 \rightarrow S(d-1) \xrightarrow{\cdot X_n} S(d) \rightarrow S(d)/X_n \cdot S(d-1) \rightarrow 0$$

$$\cong S/X_n S(d)$$

$$\cong R[X_0, \dots, X_n](d)$$

Daraus ergibt sich exakte Sequenz von $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}$ -Modulgarben:

$$(*) \quad 0 \rightarrow \mathcal{O}(d-1) \xrightarrow{\cdot X_n} \mathcal{O}(d) \rightarrow j_* \mathcal{O}_{\mathbb{P}^{n-1}}(d) \rightarrow 0 \quad (j: \mathbb{P}^{n-1} = V(X_n) \hookrightarrow \mathbb{P}^n)$$

Es gilt: $H^i(\mathbb{P}^n, j_* \overbrace{\mathcal{O}_{\mathbb{P}^{n-1}}(d)}^{=: \mathcal{F}}) \cong H^i(\mathbb{P}^{n-1}, \mathcal{O}_{\mathbb{P}^{n-1}}(d))$, denn: Sei $0 \rightarrow \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{G}^\bullet$ welche Auflösung $\Rightarrow 0 \rightarrow j_* \mathcal{F} \rightarrow j_* \mathcal{G}^\bullet$ ist welche Auflösung.

Induktion über n : $n = 0 \checkmark$, $n = 1 \checkmark$

$n \geq 2$: Lange exakte Kohomologiesequenz zu (*):

$$\dots \rightarrow H^{i-1}(\mathbb{P}^{n-1}, \mathcal{O}_{\mathbb{P}^{n-1}}(d)) \rightarrow H^i(\mathbb{P}^n, \mathcal{O}(d-1)) \xrightarrow{\cdot X_n} H^i(\mathbb{P}^{n-1}, \mathcal{O}(d)) \rightarrow \dots$$

Nach Induktionsvoraussetzung ist $H^i(\mathbb{P}^{n-1}, \mathcal{O}_{\mathbb{P}^{n-1}}(d)) = 0$ für $1 \leq i \leq n-2$.
Nach der Behauptung folgt, dass $i = 2, \dots, n-2$

$i = 1$: $0 \rightarrow H^0(\mathbb{P}^n, \mathcal{O}(d-1)) \xrightarrow{=S_{d-1}} H^0(\mathbb{P}^n, \mathcal{O}(d)) \xrightarrow{=S_d} H^0(\mathbb{P}^{n-1}, \mathcal{O}(d)) \rightarrow 0$ ist
exakt $\Rightarrow H^1(\mathbb{P}^n, \mathcal{O}(d-1)) \xrightarrow{\cdot X_n} H^1(\mathbb{P}^n, \mathcal{O}(d))$ ist injektiv, $H^1(\mathbb{P}^n, \mathcal{O}(d-1)) \xrightarrow{\cdot X_n} H^1(\mathbb{P}^n, \mathcal{O}(d))$ ist surjektiv für $n \geq 3$ nach Induktionsvoraussetzung. Für
 $n = 2$ ist $1 = n-1$.

$i = n-1$: Nach Induktionsvoraussetzung ist $H^{n-2}(\mathbb{P}^{n-1}, \mathcal{O}(d)) = 0$.

Zu zeigen also: $H^{n-1}(\mathbb{P}^n, \mathcal{O}(d)) \rightarrow H^{n-1}(\mathbb{P}^{n-1}, \mathcal{O}(d))$ ist die Nullabbildung.
Äquivalent: $\delta : H^{n-1}(\mathbb{P}^{n-1}, \mathcal{O}(d)) \rightarrow H^n(\mathbb{P}^n, \mathcal{O}(d-1))$ ist injektiv.

$$\underbrace{X_0^{\nu_0} \dots X_{n-1}^{\nu_{n-1}}}_{\substack{\text{erz. v. den Monomen} \\ \text{mit } \sum \nu_i = d, \text{ alle } \nu_i < 0}}$$

Das Bild von δ ist der Kern von $\cdot X_n$, also der freie R -Modul mit Basis
 $X_0^{\nu_0} \cdot \dots \cdot X_{n-1}^{\nu_{n-1}} \cdot X_n^{-1}$ mit $\sum_{i=0}^{n-1} \nu_i = d$, alle $\nu_i < 0 \Rightarrow \text{Rang}(\text{Bild } \delta) =$
 $\text{Rang}(H^{n-1}(\mathbb{P}^{n-1}, \mathcal{O}(d))) \Rightarrow \delta$ injektiv. Übung: $H^1(\mathbb{P}^2, \mathcal{O}(d)) = 0$ für alle
 $d \in \mathbb{Z}$ \square

Satz 5

Sei X projektives R -Schema über einem noetherschen Ring R . Dann ist $H^i(X, \mathcal{F})$ endlich erzeugter R -Modul für jede kohärente Garbe \mathcal{F} auf X .

Beweis

$\tilde{U} \subseteq \mathbb{P}_R^n$ offen, $U = \tilde{U} \cap X \Rightarrow j_* \mathcal{F}(\tilde{U}) = \mathcal{F}(U)$, $\mathcal{F}|_U = \tilde{M} \Rightarrow j_* \mathcal{F}|_{\tilde{U}} = \tilde{M}_U$

Sei $j : X \hookrightarrow \mathbb{P}_R^n$ abgeschlossene Einbettung, $X = \text{Proj}(R[X_0, \dots, X_n]/I)$. Dann ist $j_* \mathcal{F}$
kohärent und $H^i(X, \mathcal{F}) \cong H^i(\mathbb{P}_R^n, j_* \mathcal{F})$. Also ohne Einschränkung $X = \mathbb{P}_R^n$.

Behauptung: Jede kohärente Garbe \mathcal{F} auf \mathbb{P}_R^n ist isomorph zu $\bigoplus_{i=1}^r \mathcal{O}(d_i)/\mathcal{G}$ für geeignete $r \geq 1$,
 $d_i \in \mathbb{Z}$, \mathcal{G}

Dann sei $0 \rightarrow \mathcal{G} \rightarrow \bigoplus_j \mathcal{O}(d_j) \rightarrow \mathcal{F} \rightarrow 0$ exakt $\Rightarrow H^i(\mathbb{P}^n, \bigoplus \mathcal{O}(d_j)) \cong \bigoplus_j H^i(\mathbb{P}^n, \mathcal{O}(d_j))$ (!)

$\Rightarrow H^i(\mathbb{P}^n, \bigoplus \mathcal{O}(d_j))$ endlich erzeugte R -Moduln

$\xrightarrow{\text{lange ex. Sequenz}} \dots \rightarrow \bigoplus_j H^i(\mathbb{P}^n, \mathcal{O}(d_j)) \xrightarrow{d^i} H^i(\mathbb{P}^n, \mathcal{F}) \xrightarrow{\delta^i} H^{i+1}(\mathbb{P}^n, \mathcal{G}) \rightarrow \dots$
endlich erzeugt

Absteigende Induktion über i :

$$H^{n+1}(\mathbb{P}^n, \mathcal{G}) = 0 \text{ weil } n+1 > m$$

$\Rightarrow H^n(\mathbb{P}^n, \mathcal{F})$ endlich erzeugt, weil d^n surjektiv

$\Rightarrow H^n(\mathbb{P}^n, \mathcal{G})$ endlich erzeugt, weil \mathcal{G} auch kohärent

$\Rightarrow H^{n-1}(\mathbb{P}^n, \mathcal{F})$ endlich erzeugt, weil $\text{Kern}(\delta^{n-1}) = \text{Bild}(d^{n-1})$ endlich erzeugt und $\text{Bild}(\delta^{n-1})$
als Untermodul von $H^n(\mathbb{P}^n, \mathcal{G})$ endlich erzeugt

Die Behauptung folgt aus: \square

Proposition 15.4

Sei \mathcal{F} kohärente Garbe auf \mathbb{P}_R^n . Dann gibt es ein $d_0 \in \mathbb{Z}$, sodass für $d \geq d_0$ $\mathcal{F}(d) := \mathcal{F} \otimes_{\mathcal{O}} \mathcal{O}(d)$ von globalen Schnitten erzeugt wird, das heißt es gibt $s_1, \dots, s_r \in \Gamma(\mathbb{P}^n, \mathcal{F}(d))$, sodass für jedes offene $U \subseteq \mathbb{P}_R^n$ gilt: $\mathcal{F}(d)(U)$ wird erzeugt von $s_1|_U, \dots, s_r|_U$ (als $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(U)$ -Modul!)

Definiere Garbenmorphismus $\epsilon : \begin{cases} \bigoplus_{i=1}^r \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n} & \rightarrow & \mathcal{F}(d) \\ e_i & \mapsto & s_i \end{cases}$

ϵ ist surjektiv $\Rightarrow e_{-d} : \bigoplus_{i=1}^r \mathcal{O}(-d) \rightarrow \mathcal{F}$ surjektiv

Beweis

Sei $U_i = D(X_i)$, $M_i := \mathcal{F}(U_i)$. M_i ist endlich erzeugter $R[\frac{X_0}{X_i}, \dots, \frac{X_n}{X_i}]$ -Modul. $\mathcal{F}|_{U_i} = \tilde{M}_i$.

Seien s_{i_1}, \dots, s_{i_r} Erzeuger von M_i als $R[\frac{X_0}{X_i}, \dots, \frac{X_n}{X_i}]$ -Modul.

Auf $U_i \cap U_j$ ist $s_{i_\nu}|_{U_i \cap U_j} \in \mathcal{F}(U_i \cap U_j) = (M_j)_{\frac{X_i}{X_j}} \Rightarrow$ Es gibt d_{i_ν} mit $s_{i_\nu} \cdot X_i^{d_{i_\nu}} \in \Gamma(U_i \cap U_j, \tilde{M}_j \otimes \mathcal{O}(d_{i_\nu}))$ für alle j . Sei $d := \max\{d_{i_\nu} : i, \nu\} \Rightarrow s_{i_\nu} \cdot X_i^d \in \Gamma(\mathbb{P}^n, \mathcal{F} \otimes \mathcal{O}(d))$ für alle $i, \nu \Rightarrow$ die t_{i_ν} erzeugen $\mathcal{F}(d)$. \square

Satz (Grothendieck)

Sei X ein n -dimensionales noethersches Schema, \mathcal{F} eine Garbe von abelschen Gruppen. Dann ist $H^i(X, \mathcal{F}) = 0$ für alle $i > n$.