

24. Uneigentliche Integrale

In diesem Paragraphen gelte stets: Ist $I \subseteq \mathbb{R}$ ein Intervall und $\varphi : I \rightarrow \mathbb{R}$ eine Funktion, so gelte $\varphi \in R[a, b]$ für jedes Intervall $[a, b] \subseteq I$.

(I) 1. Typ uneigentlicher Integrale Sei $a \in \mathbb{R}$, $\beta \in \mathbb{R} \cup \{\infty\}$, $a < \beta$ und $f : [a, \beta) \rightarrow \mathbb{R}$. Existiert der Grenzwert $\lim_{t \rightarrow \beta} \int_a^t f(x) dx$ und ist dieser Grenzwert reell, so heißt das **uneigentliche Integral** $\int_a^\beta f(x) dx$ **konvergent** und $\int_a^\beta f(x) dx := \lim_{t \rightarrow \beta} \int_a^t f(x) dx$. Ist das Integral $\int_a^\beta f(x) dx$ nicht konvergent, so heißt es **divergent**.

Beispiele:

(1)

$$\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx \quad (a=0, \beta=1)$$

Für $t \in (0, 1) : \int_0^t \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx = \arcsin x \Big|_0^t = \arcsin t \rightarrow \frac{\pi}{2} \quad (t \rightarrow 1)$. Das heißt: $\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx$ konvergiert und hat den Wert $\frac{\pi}{2}$.

(2)

$$\int_0^\infty \frac{1}{1+x^2} dx \quad (a=0, \beta=\infty)$$

Für $t > 0 : \int_0^t \frac{1}{1+x^2} dx = \arctan x \Big|_0^t = \arctan t \rightarrow \frac{\pi}{2} \quad (t \rightarrow \infty)$. Also: $\int_0^\infty \frac{1}{1+x^2} dx$ konvergiert und hat den Wert $\frac{\pi}{2}$.

(3) (*wichtig*) Sei $\alpha > 0$. Übung:

$$\int_1^\infty \frac{1}{x^\alpha} dx \text{ konvergiert} \iff \alpha > 1$$

(II) 2. Typ uneigentlicher Integrale Sei $\alpha \in \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$, $a \in \mathbb{R}$, $\alpha < a$ und $f : (\alpha, a] \rightarrow \mathbb{R}$ eine Funktion. Entsprechend zum 1. Typ definiert man die Konvergenz bzw. Divergenz des uneigentlichen Integrals $\int_\alpha^a f(x) dx$ (nämlich $\lim_{t \rightarrow \alpha} \int_t^a f(x) dx$).

Beispiele:

(1)

$$\int_{-\infty}^0 \frac{1}{1+x^2} dx$$

Für $t < 0 : \int_t^0 \frac{1}{1+x^2} dx = \arctan x \Big|_t^0 = -\arctan t = \arctan(-t) \rightarrow \frac{\pi}{2} \quad (t \rightarrow -\infty)$

(2) (*wichtig*) Sei $\alpha > 0$. Übung:

$$\int_0^1 \frac{1}{x^\alpha} dx \text{ konvergiert} \iff \alpha < 1$$

(III) 3. Typ uneigentlicher Integrale Sei $\alpha \in \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$, $\beta \in \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$, $\alpha < \beta$ und $f : (\alpha, \beta) \rightarrow \mathbb{R}$ eine Funktion. Das uneigentliche Integral $\int_{\alpha}^{\beta} f(x) dx$ ist **konvergent**, genau dann wenn es ein $c \in (\alpha, \beta)$ gibt mit: $\int_{\alpha}^c f(x) dx$ konvergiert und $\int_c^{\beta} f(x) dx$ konvergiert. In diesem Fall gilt: $\int_{\alpha}^{\beta} f dx := \int_{\alpha}^c f dx + \int_c^{\beta} f dx$ (Übung: diese Definition ist unabhängig von c)

Beispiele:

(1) $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{1+x^2} dx$ konvergiert und hat den Wert π .

(2) $\int_0^{\infty} \frac{1}{x^2} dx$ divergiert, denn $\int_0^1 \frac{1}{x^2} dx$ divergiert.

Das Folgende formulieren wir nur für den Typ (I) (sinngemäß gilt alles auch für Typ (II), (III)):

Definition

$\int_a^{\beta} f dx$ heißt **absolut konvergent** : $\iff \int_a^{\beta} |f| dx$ ist konvergent.

Satz

Sei $g : [a, \beta) \rightarrow \mathbb{R}$ eine weitere Funktion.

(1) $\int_a^{\beta} f dx$ konvergiert $\iff \exists c \in (a, \beta) : \int_c^{\beta} f dx$ konvergiert.

In diesem Fall gilt: $\int_a^{\beta} f dx = \int_a^c f dx + \int_c^{\beta} f dx$.

(2) **Cauchy Kriterium:** $\int_a^{\beta} f dx$ konvergiert $\iff \forall \varepsilon > 0 \exists c = c(\varepsilon) \in (a, \beta) : |\int_u^v f dx| < \varepsilon \forall u, v \in (c, \beta)$

(3) Ist $\int_a^{\beta} f dx$ absolut konvergent, dann gilt: $\int_a^{\beta} f dx < \int_a^{\beta} |f| dx$ und $|\int_a^{\beta} f dx| < \int_a^{\beta} |f| dx$.

(4) **Majorantenkriterium:** Ist $|f| \leq g$ auf $[a, \beta)$ und $\int_a^{\beta} g dx$ konvergent, dann konvergiert $\int_a^{\beta} f dx$ absolut.

(5) **Minorantenkriterium:** Ist $f \geq g \geq 0$ auf $[a, \beta)$ und $\int_a^{\beta} g dx$ divergent, dann divergiert $\int_a^{\beta} f dx$.

Beispiele:

(1) $\int_1^{\infty} \underbrace{\frac{x}{1+x^2}}_{=: f(x)} dx$, $g(x) := \frac{1}{x} \cdot \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{x^2}{1+x^2} \rightarrow 1 \ (x \rightarrow \infty)$.

$\implies \exists c \in (1, \infty) : \frac{f(x)}{g(x)} \geq \frac{1}{2} \ \forall x \geq c \implies f(x) \geq \frac{1}{2x} \ \forall x \geq c$. $\int_c^{\infty} \frac{1}{2x} dx$ divergiert
 $\implies \int_c^{\infty} f(x) dx$ divergiert $\implies \int_1^{\infty} f(x) dx$ divergiert.

(2) $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$. $\int_0^1 f(x) dx$ konvergiert, $\int_0^1 f^2(x) dx$ divergiert.