

12. Konvergenzkriterien

Satz 12.1 (Leibnizkriterium)

Sei (b_n) eine monoton fallende Nullfolge und $a_n := (-1)^{n+1}b_n$. Dann ist $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergent.

Beweis

Wie bei $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{1}{n}$. Von $(b_n) = (\frac{1}{n})$ wurde nur benutzt: $\frac{1}{n}$ ist eine fallende Nullfolge. ■

Bemerkung: Gilt $a_n = b_n$ ffa $n \in \mathbb{N}$, so gilt: $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ ist genau dann konvergent, wenn $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ konvergent ist.

Satz 12.2 (Majoranten- und Minorantenkriterium)

- (1) **Majorantenkriterium:** Gilt $|a_n| \leq b_n$ ffa $n \in \mathbb{N}$ und ist $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ konvergent, so gilt: $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ ist absolut konvergent.
- (2) **Minorantenkriterium:** Gilt $a_n \geq b_n \geq 0$ ffa $n \in \mathbb{N}$ und ist $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ divergent, so gilt: $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ ist divergent.

Beweis

- (1) $s_n := b_1 + b_2 + \dots + b_n$, $\sigma_n := |a_1| + \dots + |a_n| \forall n \in \mathbb{N}$. O.b.d.A.: $|a_n| \leq b_n \forall n \in \mathbb{N}$.
 (s_n) ist konvergent $\xrightarrow{6.1} (s_n)$ ist beschränkt $\implies \exists c \geq 0 : a_n \leq c \forall n \in \mathbb{N} \implies 0 \leq \sigma_n = |a_1| + |a_2| + \dots + |a_n| \leq b_1 + b_2 + \dots + b_n = s_n \leq c \forall n \in \mathbb{N} \implies (\sigma_n)$ ist beschränkt
 $\xrightarrow{11.1(1)} (\sigma_n)$ konvergent.
- (2) Annahme: $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ ist konvergent $\xrightarrow{(1)} \sum_{n=1}^{\infty} b_n$ ist konvergent. Widerspruch! ■

Beispiele:

- (1) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+1)^2}$, $a_n = \frac{1}{(n+1)^2} = \frac{1}{n^2+2n+1} \leq \frac{1}{n^2+2n} \leq \frac{1}{n(n+1)} =: b_n$. Bekannt: $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ konvergent $\xrightarrow{12.2(2)} \sum_{n=1}^{\infty} a_n$ ist konvergent. Folgerung: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ ist konvergent.
- (2) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2-n+\frac{1}{8}}$, $a_n = \frac{1}{n^2-n+\frac{1}{8}}$, $b_n := \frac{1}{n^2}$, $\frac{a_n}{b_n} = \frac{n^2}{n^2-n+\frac{1}{8}} \rightarrow 1 (n \rightarrow \infty) \implies \exists m \in \mathbb{N} : \frac{a_n}{b_n} \leq 2 \forall n \geq m \implies a_n \leq 2b_n \forall n \geq m (|a_n| = a_n)$
 $\sum_{n=1}^{\infty} 2b_n$ ist konvergent $\xrightarrow{12.2(1)} \sum_{n=1}^{\infty} a_n$ ist konvergent.
- (3) Sei $\alpha \in (0, 1] \cap \mathbb{Q}$: $\frac{1}{n^\alpha} \geq \frac{1}{n} \forall n \in \mathbb{N} \xrightarrow{12.2(2)} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha}$ ist divergent.
- (4) Sei $\alpha \geq 2, \alpha \in \mathbb{Q}$: $\frac{1}{n^\alpha} \leq \frac{1}{n^2} \forall n \in \mathbb{N} \xrightarrow{12.2(1)} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha}$ ist konvergent.

- (5) In der Übung gezeigt: Ist $\alpha > 0$, $\alpha \in \mathbb{Q}$: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha}$ ist konvergent genau dann, wenn $\alpha > 1$.
 Bemerkung: Ist später die allgemeine Potenz a^x ($a > 0, x \in \mathbb{R}$) bekannt, so zeigt man analog: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha} \iff \alpha > 1 \forall \alpha \in \mathbb{R}$.

Definition (∞ als Limes Superior)

Ist (α_n) eine Folge und $\alpha_n \geq 0 \forall n \in \mathbb{N}$ und ist (α_n) nicht nach oben beschränkt, so setze $\limsup \alpha_n := \limsup_{n \rightarrow \infty} \alpha_n := \infty$.

Vereinbarung: $x < \infty \forall x \in \mathbb{R}$

Satz 12.3 (Wurzelkriterium)

Sei (a_n) eine Folge und $\alpha := \limsup \sqrt[n]{|a_n|}$.

- (1) Ist $\alpha < 1 \implies \sum_{n=1}^{\infty} a_n$ absolut konvergent
- (2) Ist $\alpha > 1 \implies \sum_{n=1}^{\infty} a_n$ divergent
- (3) Ist $\alpha = 1$, so ist keine allgemeine Aussage möglich.

Beweis

- (1) $\alpha < 1$. Sei $\varepsilon > 0$ so, dass $x := \alpha + \varepsilon < 1$. 9.2 $\implies \sqrt[n]{|a_n|} < \alpha + \varepsilon = x$ ffa $n \in \mathbb{N} \implies |a_n| < x^n$ ffa $n \in \mathbb{N}$. $\sum_{n=1}^{\infty} x^n$ ist konvergent $\xrightarrow{12.1(1)}$ Behauptung.
- (2) (i) $\alpha > 1, \alpha < \infty$: Sei $\varepsilon > 0$ so, dass $\alpha - \varepsilon > 1$. 9.2 $\implies \sqrt[n]{|a_n|} > \alpha - \varepsilon > 1$ für unendlich viele $n \in \mathbb{N} \implies |a_n| > 1$ für unendlich viele $n \in \mathbb{N} \implies a_n \not\rightarrow 0 \xrightarrow{11.1} \sum_{n=1}^{\infty} a_n$ ist divergent.
- (ii) $\alpha = \infty \implies \sqrt[n]{|a_n|} > 1$ für unendlich viele $n \in \mathbb{N} \xrightarrow{\text{wie eben}} \sum_{n=1}^{\infty} a_n$ ist divergent.
- (3) Siehe Beispiele ■

Beispiele:

- (1) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ ist divergent. $\sqrt[n]{\frac{1}{n}} = \frac{1}{\sqrt[n]{n}} \rightarrow 1$, also $\alpha = 1$.
- (2) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ ist konvergent. $\sqrt[n]{\frac{1}{n^2}} = (\frac{1}{\sqrt[n]{n}})^2 \rightarrow 1$, also $\alpha = 1$.
- (3) $\sum_{n=1}^{\infty} \underbrace{(-1)^n (1 + \frac{1}{n})^{-n^2}}_{=: a_n}$. $\sqrt[n]{|a_n|} = (1 + \frac{1}{n})^{-n} = \frac{1}{(1 + \frac{1}{n})^n} \rightarrow \frac{1}{e} < 1 \implies \sum_{n=1}^{\infty} a_n$ ist absolut konvergent.
- (4) Sei (a_n) eine Folge und $x \in \mathbb{R}$ mit $a_n := \begin{cases} \frac{1}{2^n} & \text{für } n \text{ gerade} \\ n \cdot x^n & \text{für } n \text{ ungerade} \end{cases}$.
 Betrachte $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$. $\alpha_n := \sqrt[n]{|a_n|} = \begin{cases} \frac{1}{2} & \text{für } n \text{ gerade} \\ \sqrt[n]{n} |x| & \text{für } n \text{ ungerade} \end{cases}$.
 $\alpha_{2n} = \frac{1}{2} \rightarrow \frac{1}{2}$. $\alpha_{2n-1} = \sqrt[2n-1]{2n-1} \cdot |x| \rightarrow |x|$. A16 $\implies \mathcal{H}(\alpha_n) = \{\frac{1}{2}, |x|\}$.
 Ist $|x| < 1 \implies \limsup \sqrt[n]{|a_n|} < 1 \implies \sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergiert absolut.
 Ist $|x| > 1 \implies \limsup \sqrt[n]{|a_n|} > 1 \implies \sum_{n=1}^{\infty} a_n$ divergiert.
 Sei $|x| = 1$: $|a_{2n-1}| = |(2n-1)x^{2n-1}| = 2n-1 \implies a_n \not\rightarrow 0 \implies \sum_{n=1}^{\infty} a_n$ ist divergent.

- (5) Sei $p \in \mathbb{N}$ und $q \in \mathbb{R}$ und $|q| < 1$. **Behauptung:** $\lim_{n \rightarrow \infty} n^p q^n = 0$. **Beweis:** $a_n := n^p q^n$.
 $\sqrt[p]{|a_n|} = \sqrt[p]{n^p} |q| = (\sqrt[p]{n})^p |q| \rightarrow |q| < 1 \xrightarrow{12.3} \sum_{n=1}^{\infty} a_n$ ist absolut konvergent $\Rightarrow a_n \rightarrow 0$.

Satz 12.4 (Quotientenkriterium)

Sei (a_n) eine Folge in \mathbb{R} und $a_n \neq 0$ ffa $n \in \mathbb{N}$. $\alpha_n := \frac{a_{n+1}}{a_n}$ (ffa $n \in \mathbb{N}$).

- (1) Ist $|\alpha_n| \geq 1$ ffa $n \in \mathbb{N} \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n$ ist divergent.
- (2) Es sei (α_n) beschränkt, $\beta := \liminf |\alpha_n|$ und $\alpha := \limsup |\alpha_n|$.
 - (i) Ist $\beta > 1 \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n$ ist divergent.
 - (ii) Ist $\alpha < 1 \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n$ ist absolut konvergent.
 - (iii) Ist $\alpha = \beta = 1$, so ist keine allgemeine Aussage möglich.

Beweis

O.B.d.A.: $a_n \neq 0 \forall n \in \mathbb{N}$

- (1) Dann: $|a_2| \geq |a_1| > 0$, $|a_3| \geq |a_2| \geq |a_1| > 0$, ... allgemein: $|a_n| \geq |a_1| > 0 \forall n \in \mathbb{N} \Rightarrow a_n \not\rightarrow 0 \Rightarrow$ die Behauptung.
- (2) (i) Sei $\beta > 1$, Sei $\varepsilon > 0$ so, dass $\beta - \varepsilon > 1$. 9.2 $\Rightarrow |\alpha_n| > \beta - \varepsilon > 1$ ffa $n \in \mathbb{N} \Rightarrow$ die Behauptung.
- (ii) Sei $\alpha < 1$. Sei $\varepsilon > 0$ so, dass $x := \alpha + \varepsilon < 1$. 9.2 $\Rightarrow |\alpha_n| < \alpha + \varepsilon = x$ ffa $n \in \mathbb{N}$.
 Dann: $|a_2| \leq |a_1|x$, $|a_3| \leq |a_2|x \leq |a_1|x^2$, ... allgemein: $|a_n| \leq |a_1|x^{n-1}$ ffa $n \in \mathbb{N}$.
 $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n| x^{n-1}$ ist konvergent $\xrightarrow{12.2} \sum_{n=1}^{\infty} a_n$ ist absolut konvergent.
- (iii) siehe Beispiele ■

Beispiele:

- (1) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ ist divergent. $\left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \frac{n}{n+1} \rightarrow 1$, also $\alpha = \beta = 1$.
- (2) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ ist konvergent. $\left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \frac{n^2}{(n+1)^2} \rightarrow 1$, also $\alpha = \beta = 1$.

Beispiel 12.5 (Exponentialfunktion)

Für $x \in \mathbb{R}$ betrachte die Reihe

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \dots$$

Für welche $x \in \mathbb{R}$ konvergiert diese Reihe (absolut)?.

Klar: für $x = 0$ konvergiert die Reihe.

Sei $x \neq 0$ und $a_n = \frac{x^n}{n!}$;

$$\left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \left| \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} \cdot \frac{n!}{x^n} \right| = \frac{|x|}{n+1} \rightarrow 0 \quad (n \rightarrow \infty) \quad (\text{also } \alpha = \beta = 0)$$

12.4 $\implies \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$ ist absolut konvergent für alle $x \in \mathbb{R}$.

Also wird durch $E(x) := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$ ($x \in \mathbb{R}$) eine Funktion $E : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definiert. Diese Funktion E heißt die **Exponentialfunktion**.

$$E(0) = 1, E(1) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} = e.$$

Bemerkung: Später zeige wir: $E(r) = e^r \forall r \in \mathbb{Q}$. Dann *definieren* wir $e^x := E(x)$ ($x \in \mathbb{R}$).

Motivation: $b_n := (-1)^n$ ($n \in \mathbb{N}$), $b_n \not\rightarrow 0 \implies \sum_{n=1}^{\infty} b_n = b_1 + b_2 + \dots$ ist divergent.
 $a_1 := b_1 + b_2, a_2 := b_3 + b_4, \dots$ also: $a_n = 0 \forall n \in \mathbb{N} \implies \sum_{n=1}^{\infty} a_n = (b_1 + b_2) + (b_3 + b_4) + \dots$ ist konvergent. Also: „Im Allgemeinen darf man Klammern in konvergenten Reihen nicht weglassen.“

Satz 12.6 (In konvergenten Folgen darf man Klammern setzen)

Sei $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergent und es seien $n_1, n_2, \dots \in \mathbb{N}$ mit $n_1 < n_2 < \dots$. Setze $b_1 := a_1 + \dots + a_{n_1}$, $b_2 := a_{n_1+1} + \dots + a_{n_2}$, allgemein: $b_k := a_{n_{k-1}+1} + \dots + a_{n_k}$ ($k \geq 2$). Dann ist $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ konvergent und $\sum_{n=1}^{\infty} b_n = \sum_{n=1}^{\infty} a_n$.

Beweis

$s_n := a_1 + a_2 + \dots + a_n$; $\sigma_k := b_1 + b_2 + \dots + b_k$. Es ist $\sigma_k = a_1 + a_2 + \dots + a_{n_k} = s_{n_k} \implies \sigma_k$ ist eine Teilfolge von $s_n \xrightarrow{8.1(3)} (\sigma_k)$ konvergent und $\lim_{k \rightarrow \infty} \sigma_k = \lim_{n \rightarrow \infty} s_n$. ■