

Mathematische Statistik

Vorlesungsmitschrieb zur Vorlesung
„Mathematische Statistik (Statistik I)“
Dr. Klar / Universität Karlsruhe / Sommersemester 2007 ¹

geT_EXed von
Tobias Baust und Tobias Flaig

Stand: 18. Oktober 2016

¹Dieser inoffizielle Mitschrieb der Vorlesung wurde mit ausdrücklicher Genehmigung von Herrn Dr. Klar auf <http://mitschriebwiki.nomeata.de/> veröffentlicht, *Herr Dr. Klar ist für den Inhalt dieser Seiten nicht verantwortlich.* Der Mitschrieb erhebt keinen Anspruch auf Vollständigkeit und Richtigkeit!

Inhaltsverzeichnis

1	Grundbegriffe, Motivation	1
2	Klassische statistische Verfahren unter Normalverteilungs-Annahme	7
3	Schätzer und ihre Eigenschaften	15
4	Schätzmethoden	21
5	Optimale erwartungstreue Schätzer	33
6	Exponentialfamilien	43
7	Suffizienz und Vollständigkeit	51
8	Asymptotik von Schätzfehlern	61
9	Robuste Schätzer	67
10	Grundbegriffe der Testtheorie	77
11	Neyman-Pearson-Tests (NP-Tests)	80
12	UMPU Tests („UMP unbiased“)	89
13	Konfidenzbereiche	99
14	Lineare statistische Modelle	107

1 Grundbegriffe, Motivation

Sei $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ Wahrscheinlichkeitsraum, $(\mathfrak{X}, \mathcal{B})$ messbarer Raum¹ (sogenannter Stichprobenraum).

$X : \Omega \rightarrow \mathfrak{X}$ Zufallsvariable

$$P(B) := P^X(B) := \mathbb{P}(X^{-1}(B)), \quad B \in \mathcal{B}$$

Verteilung von X (\hookrightarrow Wahrscheinlichkeitsraum $(\mathfrak{X}, \mathcal{B}, P)$)

Statistischer Entscheidung liegt Datenmaterial (Beobachtung) $x \in \mathfrak{X}$ zugrunde.

Grundannahme:

- 1) $x = X(\omega)$ für ein $\omega \in \Omega$, d.h. x ist Realisierung von X
- 2) P ist (teilweise) unbekannt

Ziel: Aufgrund von x Aussagen über P machen!

Sei $\mathcal{M}^1(\mathfrak{X}, \mathcal{B}) := \{P : P \text{ ist Wahrscheinlichkeitsmaß auf } \mathcal{B}\}$.

1.1 Definition

Eine Verteilungsannahme ist eine Teilmenge $\wp \subset \mathcal{M}^1(\mathfrak{X}, \mathcal{B})$.

Das Tripel $(\mathfrak{X}, \mathcal{B}, \wp)$ heißt statistischer Raum (statistisches Modell).

1.2 Beispiel

$$(\mathfrak{X}, \mathcal{B}) = (\mathbb{R}^n, \mathcal{B}^n)$$

$$\wp := \{P : \exists \text{ Wahrscheinlichkeitsmaß } Q \text{ auf } \mathcal{B}^1 \text{ mit } P = \underbrace{Q \otimes \dots \otimes Q}_{n \text{ Faktoren}}\}$$

Mit anderen Worten $X = (X_1, \dots, X_n)$, X_1, \dots, X_n stochastisch unabhängig mit gleicher Verteilung Q , $X_1, \dots, X_n \stackrel{\text{uiv}}{\sim} Q$.

¹ \mathcal{B} steht hier für eine beliebige σ -Algebra, die Borelsche σ -Algebra wird mit \mathcal{B}^d bezeichnet, wobei d die Dimension angibt

1.3 Beispiel

$$(\mathfrak{X}, \mathcal{B}) = (\mathbb{R}^n, \mathcal{B}^n)$$

$$\wp := \{P : \exists (\mu, \sigma^2) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}_{>0} \text{ mit } P = \mathcal{N}(\mu, \sigma^2) \otimes \dots \otimes \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)\}$$

Also $X_1, \dots, X_n \stackrel{\text{uiv}}{\sim} \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$.

Ein-Stichproben-Normalverteilungs-Annahme

1.4 Beispiel

$$(\mathfrak{X}, \mathcal{B}) = (\mathbb{R}^{m+n}, \mathcal{B}^{m+n})$$

$$\wp := \{P : \exists \text{ W'ma\ss e } Q_1, Q_2 : P = \underbrace{Q_1 \otimes \dots \otimes Q_1}_{m \text{ Faktoren}} \otimes \underbrace{Q_2 \otimes \dots \otimes Q_2}_{n \text{ Faktoren}}\}$$

Also $X = (X_1, \dots, X_m, Y_1, \dots, Y_n)$, $X_1, \dots, X_m, Y_1, \dots, Y_n$ unabhängig,
 $X_1, \dots, X_m \stackrel{\text{uiv}}{\sim} Q_1, Y_1, \dots, Y_n \stackrel{\text{uiv}}{\sim} Q_2$.

1.5 Beispiel

$(\mathfrak{X}, \mathcal{B})$ wie in 1.4

$$\wp := \{P : \exists (\mu, \nu, \sigma^2) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}_{>0} : P = \mathcal{N}(\mu, \sigma^2) \otimes \dots \otimes \mathcal{N}(\mu, \sigma^2) \otimes \mathcal{N}(\nu, \sigma^2) \otimes \dots \otimes \mathcal{N}(\nu, \sigma^2)\}$$

$X_1, \dots, X_m, Y_1, \dots, Y_n$ unabhängig

$X_i \stackrel{\text{uiv}}{\sim} \mathcal{N}(\mu, \sigma^2), Y_j \stackrel{\text{uiv}}{\sim} \mathcal{N}(\nu, \sigma^2)$

2 unabhängige normalverteilte Stichproben mit gleicher Varianz

1.6 Definition

Eine **Parametrisierung** von $\wp \subset \mathcal{M}^1(\mathfrak{X}, \mathcal{B})$ ist eine bijektive Abbildung
 $\Theta \ni \vartheta \rightarrow P_\vartheta \in \wp$.

Ist X eine Zufallsvariable mit Verteilung P_ϑ , so schreibt man auch

$$\left. \begin{array}{l} E_\vartheta(X) \\ \text{Var}_\vartheta(X) \\ (*) F_\vartheta(t) := P_\vartheta(X \leq t) = P_\vartheta((-\infty, t]) \end{array} \right\} \text{ falls } X \text{ reellwertig}$$

$$(**) P_{\vartheta}(B) = P_{\vartheta}(X \in B), \quad B \in \mathcal{B}$$

Schreibweisen $(*)$, $(**)$ unterstellen

$$(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P}) = (\mathfrak{X}, \mathcal{B}, P), \quad X = \text{id}_{\Omega}$$

[eigentlich: $P_{\vartheta}(B) := \mathbb{P}(X^{-1}(B)) = \mathbb{P}(X \in B)$]

1.7 Definition

Eine Verteilungsklasse $\wp = \{P_{\vartheta} : \vartheta \in \Theta\}$ heißt ϑ -parametrisch, wenn sie sich „zwanglos“ durch einen Parameterraum $\Theta \subset \mathbb{R}^k$ parametrisieren lässt. Ist $\vartheta = (\vartheta_1, \vartheta_2)$ und interessiert nur ϑ_1 , so heißt ϑ_1 Hauptparameter und ϑ_2 Nebenparameter oder Störparameter.

1.8 Beispiele

- a) In Beispiel 1.3:
2-parametrische Verteilungsannahme, wobei $\vartheta = (\mu, \sigma^2)$, $\Theta = \mathbb{R} \times \mathbb{R}_{>0}$.
- b) In Beispiel 1.5:
3-parametrisch, $\vartheta = (\mu, \nu, \sigma^2)$, $\Theta = \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}_{>0}$
Hier meistens: (μ, ν) Hauptparameter

Häufig interessiert von \wp der Wert eines reellwertigen Funktionals $\gamma : \wp \rightarrow \mathbb{R}$ anstelle von P , z.B. (falls P Wahrscheinlichkeitsmaß auf \mathcal{B}^1)

$$\gamma(P) := \int_{\mathbb{R}} x dP(x)$$

(Erwartungswert von X)

Falls $\wp = \{P_{\vartheta} : \vartheta \in \Theta\}$, so schreibt man auch $\gamma(\vartheta) := \gamma(P_{\vartheta})$, fasst also γ als Abbildung $\gamma : \Theta \rightarrow \mathbb{R}$ auf.

Problem:

„Enge“ Verteilungsannahme täuscht oft nicht vorhandene Genauigkeit vor.
 \wp sollte das wahre P enthalten. (realistisch?)

Bei diskreten Zufallsvariablen ergibt sich \wp manchmal zwangsläufig; bei stetigen Zufallsvariablen ist \wp häufig nicht vorgezeichnet.

1.9 Typische Fragestellungen der Statistik

- a) Punktschätzung
Schätze aufgrund von $x \in \mathfrak{X}$ den Wert $\gamma(\vartheta) \in \mathbb{R}$ möglichst „gut“.
- b) Konfidenzbereiche
Konstruiere „möglichst kleinen“, von x abhängigen Bereich, der $\gamma(\vartheta)$ mit „großer Wahrscheinlichkeit“ enthält.
- c) Testprobleme
Es sei $\Theta = \Theta_0 + \Theta_1$ eine Zerlegung von Θ . Teste die Hypothese $H_0 : \vartheta \in \Theta_0$ gegen die Alternative $H_1 : \vartheta \in \Theta_1$.

1.10 Asymptotische Betrachtungen

Häufig liegt Folge $(X_j)_{j \in \mathbb{N}}$ unabhängiger Zufallsvariablen zugrunde (alle auf nicht interessierenden Wahrscheinlichkeitsräume $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ definiert) mit Werten in einem Messraum $(\mathfrak{X}_0, \mathcal{B}_0)$.

Häufig: $P^{X_j} = P \ \forall j$ (identische Verteilung)

Unter der Verteilungsannahme $P \in \wp_0 \subset \mathcal{M}^1(\mathfrak{X}_0, \mathcal{B}_0)$ nimmt dann die Folge $(X_j)_{j \in \mathbb{N}}$ Werte im statistischen Raum

$$(\mathfrak{X}, \mathcal{B}, \wp) := (\times_{j=1}^{\infty} \mathfrak{X}_0, \bigotimes_{j=1}^{\infty} \mathcal{B}_0, \{\bigotimes_{j=1}^{\infty} P : P \in \wp_0\})$$

an. Also: X_1, X_2, \dots unabhängig, \mathfrak{X}_0 -wertig mit gleicher Verteilung $P \in \wp_0$

1.11 Statistiken

Es seien $(\mathfrak{X}, \mathcal{B})$ Stichprobenraum und $(\mathcal{T}, \mathcal{D})$ Messraum. Eine messbare Abbildung $T : \mathfrak{X} \rightarrow \mathcal{T}$ heißt Statistik (Stichprobenfunktion).

Häufig: $(\mathcal{T}, \mathcal{D}) = (\mathbb{R}, \mathcal{B}^1)$.

Wichtigstes Beispiel:

$\mathfrak{X} = \mathbb{R}^n, \mathcal{T} = \mathbb{R}$

$$T(x_1, \dots, x_n) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i$$

Stichproben-Funktionen bewirken eine **Datenkompression**.

Statistische Entscheidungen wie Ablehnung von Hypothesen hängen von $x \in \mathfrak{X}$ im Allgemeinen durch den Wert $T(x)$ einer geeigneten Statistik ab.

Bei Tests: Statistik $\hat{=}$ Testgröße $\hat{=}$ Prüfgröße

Sind $X_1, \dots, X_n \overset{uv}{\sim} P$, so nennt man X_1, \dots, X_n eine Stichprobe vom Umfang n aus der Verteilung P .

Ist $T(X_1, \dots, X_n)$ eine mit X_1, \dots, X_n operierende Statistik, so schreib man auch $T_n := T_n(X_1, \dots, X_n) := T(X_1, \dots, X_n)$.

Insbesondere bei asymptotischen Betrachtungen ist $(T_n)_{n \geq 1}$ dann eine Folge von Statistiken.

2 Klassische statistische Verfahren unter Normalverteilungs-Annahme

2.1 $\chi_s^2, t_s, F_{r,s}$ -Verteilung

- a) $N_1, \dots, N_s \stackrel{uiv}{\sim} \mathcal{N}(0, 1)$
 Verteilung von $Y := N_1^2 + \dots + N_s^2$ heißt Chi-Quadrat-Verteilung mit s Freiheitsgraden (χ_s^2 -Verteilung).
 Y besitzt die Dichte

$$f(y) = \frac{1}{2^{\frac{s}{2}} \Gamma(\frac{s}{2})} e^{-\frac{y}{2}} y^{\frac{s}{2}-1}, \quad y > 0$$

Dabei:

$$\Gamma(t) = \int_0^\infty e^{-x} x^{t-1} dx, \quad t > 0$$

(Gamma-Funktion)

$$[\Gamma(x+1) = x\Gamma(x) \quad (x > 0), \Gamma(n+1) = n! \quad (n \in \mathbb{N}), \Gamma(\frac{1}{2}) = \sqrt{\pi}]$$

Es gilt:

$$EY = s, \quad \text{Var}(Y) = 2s$$

- b) Seien $N_0, N_1, \dots, N_s \stackrel{uiv}{\sim} \mathcal{N}(0, 1)$.
 Die Verteilung von

$$y := \frac{N_0}{\sqrt{\sum_{j=1}^s N_j^2 / s}}$$

heißt (studentsche) t-Verteilung mit s Freiheitsgraden (t_s -Verteilung).

Dichte:

$$f(y) = \frac{1}{\sqrt{\pi s}} \frac{\Gamma(\frac{s+1}{2})}{\Gamma(\frac{s}{2})} \left(1 + \frac{y^2}{s}\right)^{-\frac{s+1}{2}}, \quad y \in \mathbb{R}$$

$$E(Y) = 0 \quad (s \geq 2), \quad \text{Var}(Y) = \frac{s}{s-2} \quad (s \geq 3)$$

$s=1^2$:

$$f(y) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \frac{1}{\sqrt{\pi}} \frac{1}{1+y^2} = \frac{1}{\pi(1+y^2)}, \quad y \in \mathbb{R}$$

- c) Es seien R, S unabhängig, $R \sim \chi_r^2$, $S \sim \chi_s^2$. Die Verteilung von

$$Y := \frac{\frac{1}{r}R}{\frac{1}{s}S}$$

²Cauchy-Verteilung

heißt F(isher)-Verteilung mit r Zähler- und s Nenner-Freiheitsgraden (kurz: $Y \sim F_{r,s}$).

Dichte:

$$f(y) = \frac{\Gamma(\frac{r+s}{2}) (\frac{r}{s})^{\frac{r}{2}} y^{\frac{r}{2}-1}}{\Gamma(\frac{r}{2}) \Gamma(\frac{s}{2}) (1 + \frac{r}{s}y)^{\frac{r+s}{2}}}, \quad y > 0$$

Es gilt:

$$E(Y) = \frac{s}{s-2}, \quad s > 2, \quad \text{Var}(Y) = \frac{2s^2(r+s-2)}{r(s-2)^2(s-4)}, \quad s > 4$$

2.2 Satz

Es seien $X_1, \dots, X_n \stackrel{uiv}{\sim} \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$.

$$\bar{X}_n := \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i, \quad \hat{\sigma}_n^2 := \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n (X_j - \bar{X}_n)^2$$

Dann gilt:

- a) $\bar{X}_n \sim \mathcal{N}(\mu, \frac{\sigma^2}{n})$.
- b) $\frac{n}{\sigma^2} \hat{\sigma}_n^2 \sim \chi_{n-1}^2$
- c) \bar{X}_n und $\hat{\sigma}_n^2$ sind unabhängig.

Beweis

- a) klar

b),c) Sei $Z_j := X_j - \mu$, $Z := (Z_1, \dots, Z_n)^T$.

Es gilt: $Z \sim \mathcal{N}_n(0, \sigma^2 \cdot I_n)$.

Sei $H = (h_{ij})$ orthogonale $n \times n$ -Matrix mit $h_{nj} = \frac{1}{\sqrt{n}}$, $1 \leq j \leq n$.

$$Y = (Y_1, \dots, Y_n)^T := HZ$$

$Y \sim \mathcal{N}_n(0, \sigma^2 H H^T) = \mathcal{N}_n(0, \sigma^2 I_n)$, d.h. $Y_1, \dots, Y_n \stackrel{uiv}{\sim} \mathcal{N}(0, \sigma^2)$.

Es gilt:

$$\sum_{j=1}^n Y_j^2 = \|Y\|^2 = \|Z\|^2 = \sum_{j=1}^n Z_j^2$$

$$Y_n = \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{j=1}^n Z_j = \sqrt{n}(\bar{X}_n - \mu)$$

Mit $\bar{Z}_n := \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n Z_j$ folgt:

$$\begin{aligned}
 \sum_{i=1}^n (X_j - \bar{X}_n)^2 &= \sum_{j=1}^n (Z_j - \bar{Z}_n)^2 = \sum_{j=1}^n Z_j^2 - n\bar{Z}_n^2 \\
 &= \sum_{j=1}^n Y_j^2 - Y_n^2 \\
 &= \sum_{j=1}^{n-1} Y_j^2 \\
 &= \sigma^2 \underbrace{\sum_{j=1}^{n-1} \left(\frac{Y_j}{\sigma} \right)^2}_{\substack{\sim \mathcal{N}(0,1) \\ \sim \chi_{n-1}^2}}
 \end{aligned}$$

\Rightarrow b)

Wegen $\sum_{j=1}^n (X_j - \bar{X}_n)^2 =$ Funktion von Y_1, \dots, Y_{n-1} und $\bar{X}_n =$ Funktion von Y_n sind $\hat{\sigma}_n^2$ und \bar{X}_n unabhängig (Blockungslemma). ■

2.3 Korollar

In der Situation von 2.2 sei³

$$S_n^2 := \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X}_n)^2 = \frac{n}{n-1} \hat{\sigma}_n^2$$

Dann gilt:

$$\frac{\sqrt{n}(\bar{X}_n - \mu)}{S_n} \sim t_{n-1}$$

Beweis:

$$\sqrt{n} \frac{\bar{X}_n - \mu}{S_n} = \frac{\frac{\sqrt{n}(\bar{X}_n - \mu)}{\sigma}}{\sqrt{\frac{1}{\sigma^2} \cdot \underbrace{\sum_i (X_i - \bar{X}_n)^2}_{\sim \chi_{n-1}^2} / (n-1)}}$$

Zähler und Nenner sind unabhängig und der Zähler ist $\mathcal{N}(0,1)$ -verteilt.

^{2.1b)} \Rightarrow Behauptung

³Stichprobenvarianz

2.4 Korollar

Sei $0 < \alpha \leq 1$ und sei $t_{n-1, 1-\frac{\alpha}{2}}$ das $(1 - \frac{\alpha}{2})$ -Quantil der t_{n-1} -Verteilung.⁴ Dann gilt:

$$P_{\mu, \sigma^2} \left(\left| \frac{\sqrt{n}(\bar{X}_n - \mu)}{S_n} \right| \leq t_{n-1, 1-\frac{\alpha}{2}} \right) = 1 - \alpha$$

Oder äquivalent:

$$P_{\mu, \sigma^2} \left(\bar{X}_n - \frac{S_n}{\sqrt{n}} t_{n-1, 1-\frac{\alpha}{2}} \leq \mu \leq \bar{X}_n + \frac{S_n}{\sqrt{n}} t_{n-1, 1-\frac{\alpha}{2}} \right) = 1 - \alpha$$

Sprechweise:

$[\bar{X}_n - \frac{S_n}{\sqrt{n}} t_{n-1, 1-\frac{\alpha}{2}}, \bar{X}_n + \frac{S_n}{\sqrt{n}} t_{n-1, 1-\frac{\alpha}{2}}]$ ist ein Konfidenzintervall (Vertrauensintervall) zur Konfidenzwahrscheinlichkeit (Vertrauenswahrscheinlichkeit) $1 - \alpha$ für μ . (Störparameter σ^2 tritt hier nicht auf!)

2.5 Ein-Stichproben-t-Test (1-SP-t-Test)

Seien $X_1, \dots, X_n \stackrel{uiv}{\sim} \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$, $\vartheta = (\mu, \sigma^2)$, $\Theta := \mathbb{R} \times \mathbb{R}_{>0}$.

Zu testen sei $H_0 : \mu = \mu_0$ gegen $H_1 : \mu \neq \mu_0$ (μ_0 gegebener Wert).

$$H_0/H_1 \leftrightarrow \Theta_0/\Theta_1$$

$$\Theta_0 := \{\vartheta = (\mu, \sigma^2) \in \Theta : \mu = \mu_0\}$$

$$\Theta_1 := \{\vartheta = (\mu, \sigma^2) \in \Theta : \mu \neq \mu_0\}$$

Sei $(x_1, \dots, x_n) =: x$ Realisierung von X_1, \dots, X_n .

$$\bar{x}_n := \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i$$

$$s_n^2 := \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x}_n)^2$$

$$T(x_1, \dots, x_n) := \frac{\sqrt{n}(\bar{x}_n - \mu_0)}{s_n}$$

⁴→ Abbildung 2.1

(Zweiseitiger) 1-SP-t-Test zum Niveau α :

H_0 ablehnen, falls

$$|T(x_1, \dots, x_n)| \geq t_{n-1, 1-\frac{\alpha}{2}}$$

Kein Widerspruch zu H_0 , falls

$$|T(x_1, \dots, x_n)| < t_{n-1, 1-\frac{\alpha}{2}}$$

Sei $\vartheta \in \Theta_0$, also $\mu = \mu_0$.

$\Rightarrow T(X_1, \dots, X_n) \sim t_{n-1}$

$$\Rightarrow P(|T(X_1, \dots, X_n)| \geq t_{n-1, 1-\frac{\alpha}{2}}) = \alpha \quad \forall \vartheta \in \Theta_0$$

[Das bedeutet, wenn H_0 gilt, ist die Wahrscheinlichkeit H_0 trotzdem abzulehnen α . (\rightarrow Niveau)]

Bemerkungen:

1) Entsprechend einseitige Tests⁵, z.B. $H_0 : \mu \geq \mu_0$ gegen $H_1 : \mu < \mu_0$.
 H_0 ablehnen, falls $|T(x_1, \dots, x_n)| \geq t_{n-1, \alpha}$ ⁶

2) Sei

$$f(x, \vartheta) := \prod_{j=1}^n f_1(x_j, \vartheta) = \left(\frac{1}{\sigma \sqrt{2\pi}} \right)^n \exp\left(-\frac{1}{2\sigma^2} \sum_{j=1}^n (x_j - \mu)^2\right)$$

Die Prüfgröße $T(x_1, \dots, x_n)$ des t-Tests ergibt sich aus einem allgemeinen „Rezept“:

Bilde den (verallgemeinerten) Likelihood-Quotienten

$$\lambda(x) := \frac{\sup_{\vartheta \in \Theta_0} f(x, \vartheta)}{\sup_{\vartheta \in \Theta} f(x, \vartheta)}$$

und lehne $H_0 : \vartheta \in \Theta_0$ für zu „kleine“ Werte von $\lambda(x)$ ab.

Es gilt:

$$(n-1)(\lambda(x)^{-\frac{2}{n}} - 1) = T^2(x_1, \dots, x_n)$$

(Blatt 2, Aufgabe 6)

⁵vgl. Stochstik I (\rightarrow Wahl der Nullhypothese)

⁶etc.; Niveau α

2.6 Satz

Seien $X_1, \dots, X_m, Y_1, \dots, Y_n$ unabhängig.

$$X_i \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2) \quad \forall i, \quad Y_j \sim \mathcal{N}(\nu, \sigma^2) \quad \forall j$$

$$\bar{X}_m := \frac{1}{m} \sum_{i=1}^m X_i, \quad \bar{Y}_n := \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n Y_j$$

Dann gilt:

$$\bar{X}_m \sim \mathcal{N}\left(\mu, \frac{\sigma^2}{m}\right), \quad \bar{Y}_n \sim \mathcal{N}\left(\nu, \frac{\sigma^2}{n}\right)$$

$$\bar{X}_m - \bar{Y}_n - (\mu - \nu) \sim \mathcal{N}\left(0, \frac{\sigma^2}{m} + \frac{\sigma^2}{n}\right) = \mathcal{N}\left(0, \frac{m+n}{mn} \sigma^2\right)$$

$$\frac{1}{\sigma^2} \sum_{i=1}^m (X_i - \bar{X}_m)^2 \sim \chi_{m-1}^2$$

$$\frac{1}{\sigma^2} \sum_{j=1}^n (Y_j - \bar{Y}_n)^2 \sim \chi_{n-1}^2$$

\bar{X}_m, \bar{Y}_n und die letzten beiden Größen sind stochastisch unabhängig!

Sei

$$S_{m,n}^2 := \frac{1}{m+n-2} \left(\sum_{i=1}^m (X_i - \bar{X}_m)^2 + \sum_{j=1}^n (Y_j - \bar{Y}_n)^2 \right)$$

Dann gilt weiter:

$$(m+n-2) \cdot S_{m,n}^2 / \sigma^2 \sim \chi_{m+n-2}^2$$

2.7 Korollar

In der Situation von 2.6 gilt:

$$\frac{\sqrt{\frac{mn}{m+n}} (\bar{X}_m - \bar{Y}_n - (\mu - \nu))}{S_{m,n}} \sim t_{m+n-2}$$

Beweis:

Wie Korollar 2.3.

2.8 Korollar

$$P_{\mu,\nu,\sigma^2} \left(\sqrt{\frac{mn}{m+n}} \frac{|\bar{X}_m - \bar{Y}_n - (\mu - \nu)|}{S_{m,n}} \leq t_{m+n-2, 1-\frac{\alpha}{2}} \right) = 1 - \alpha$$

D.h.

$$\bar{X}_m - \bar{Y}_n \pm \frac{S_{m,n}}{\sqrt{\frac{mn}{m+n}}} t_{m+n-2, 1-\frac{\alpha}{2}}$$

ist Konfidenzintervall für $\mu - \nu$ zur Konfidenzwahrscheinlichkeit $1 - \alpha$.

2.9 (Zweiseitiger) 2-SP-t-Test

Situation von 2.6.

$$H_0 : \mu = \nu \ (\mu - \nu = 0), \ H_1 : \mu \neq \nu \ (\mu - \nu \neq 0)$$

Mit

$$\Theta := \{\vartheta = (\mu, \nu, \sigma^2) : -\infty < \mu, \nu < \infty, \sigma^2 > 0\}$$

$$\Theta_0 := \{(\mu, \nu, \sigma^2) \in \Theta : \mu = \nu\}$$

$$\Theta_1 := \{(\mu, \nu, \sigma^2) \in \Theta : \mu \neq \nu\}$$

gilt: $H_0 \hat{=} \vartheta \in \Theta_0, \ H_1 \hat{=} \vartheta \in \Theta_1$.

Prüfgröße:

$$T_{m,n}(x_1, \dots, x_m, y_1, \dots, y_n) := \sqrt{\frac{mn}{m+n}} \frac{\bar{x}_m - \bar{y}_n}{s_{m,n}}$$

Testentscheidung:

H_0 ablehnen, falls $|T_{m,n}| \geq t_{m+n-2, 1-\frac{\alpha}{2}}$.

Kein Widerspruch zu H_0 , falls $|T_{m,n}| < t_{m+n-2, 1-\frac{\alpha}{2}}$.

Es gilt:

$$P(|T_{m,n}(X_1, \dots, X_m, Y_1, \dots, Y_n)| \geq t_{m+n-2, 1-\frac{\alpha}{2}}) = \alpha \ \forall \vartheta \in \Theta_0$$

D.h. Test hat Niveau α .

2.10 F-Test für den Varianz-Quotienten

Situation wie in 2.6, aber $Y_j \sim \mathcal{N}(\nu, \tau^2)$ ($\tau^2 \neq \sigma^2$ möglich).

Zu testen: $H_0 : \sigma^2 = \tau^2$ ($\frac{\sigma^2}{\tau^2} = 1$) gegen $H_1 : \sigma^2 \neq \tau^2$ ($\frac{\sigma^2}{\tau^2} \neq 1$).

Prüfgröße des F-Tests für Varianzquotienten ist

$$Q_{m,n} = \frac{\frac{1}{m-1} \sum_{i=1}^m (X_i - \bar{X}_m)^2}{\frac{1}{n-1} \sum_{j=1}^n (Y_j - \bar{Y}_n)^2}$$

Unter H_0 gilt $Q_{m,n} \sim F_{m-1,n-1}$.

Ablehnung von H_0 erfolgt für große und kleine Werte von $Q_{m,n}$

[Meist⁷: Ablehnung für $Q_{m,n} \geq F_{m-1,n-1,1-\frac{\alpha}{2}}$, $Q_{m,n} \leq F_{m-1,n-1,\frac{\alpha}{2}}$]

⁷→ Abbildung 2.2

3 Schätzer und ihre Eigenschaften

Es seien $(\mathfrak{X}, \mathcal{B}, \{P_\vartheta : \vartheta \in \Theta\})$ ein statistischer Raum, $\gamma : \Theta \rightarrow \Gamma$ ein Funktional, wobei $\Gamma \supset \gamma(\Theta)$, A_Γ eine σ -Algebra auf Γ .

3.1 Definition

Ein **Schätzer** für $\gamma(\vartheta)$ ist eine messbare Abbildung $S : (\mathfrak{X}, \mathcal{B}) \rightarrow (\Gamma, A_\Gamma)$. $S(x)$ heißt **Schätzwert** für $\gamma(\vartheta)$ zur Beobachtung $x \in \mathfrak{X}$.

3.2 Beispiel

$$(\mathfrak{X}, \mathcal{B}) = (\{0, 1\}^n, \mathcal{P}(\{0, 1\}^n)), \quad \Theta = (0, 1), \quad P_\vartheta = \bigotimes_{j=1}^n \text{Bin}(1, \vartheta)$$

$$\gamma(\vartheta) = \vartheta$$

$$S(x_1, \dots, x_n) := \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n X_j$$

(relative Trefferhäufigkeit)

$$\Gamma = [0, 1] = \bar{\Theta}, \quad A_\Gamma = \mathcal{B}^1 \cap [0, 1]$$

[Beachte: $\gamma(\Theta) = \Theta \subset \Gamma$]

Die Güte eines Schätzers wird über die Verteilung $P_\vartheta^{S(X)}$ von $S(X)$ unter ϑ beurteilt. Für jedes $\vartheta \in \Theta$ sollte $P_\vartheta^{S(X)}$ „stark um $\gamma(\vartheta)$ konzentriert“ sein.

3.3 Definition (Sei $\Gamma \subset \mathbb{R}^k$.)

- a) **S erwartungstreu** (unbiased) für $\gamma(\vartheta) : \Leftrightarrow E_\vartheta S(X) = \gamma(\vartheta) \quad \forall \vartheta \in \Theta$
- b) $b_S(\vartheta) := E_\vartheta S(X) - \gamma(\vartheta)$ heißt Verzerrung (bias) von S an der Stelle ϑ .
- c) Ist $S_n = S_n(X_1, \dots, X_n)$, $n \geq 1$ eine Schätzfolge, so heißt (S_n) **asymptotisch erwartungstreu** für $\gamma(\vartheta) : \Leftrightarrow$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} E_\vartheta S_n = \gamma(\vartheta) \quad \forall \vartheta \in \Theta$$

Erwartungstreue: $\forall \vartheta \in \Theta$: Schwerpunkt von $P_\vartheta^{S(X)}$ ist $\gamma(\vartheta)$

3.4 Definition (Sei $\Gamma \subset \mathbb{R}$.)

S mediantreu für $\gamma(\vartheta) : \Leftrightarrow \text{med}_{\vartheta} S(X) = \gamma(\vartheta) \forall \vartheta \in \Theta$.

Dabei:

Sei Y Zufallsvariable mit Verteilungsfunktion F.

$$F^{-1}(q) := \inf\{x \in \mathbb{R} : F(x) \geq q\}, \quad 0 < q < 1$$

$$\text{med } Y := \text{med } F := \frac{1}{2} \left(F^{-1}\left(\frac{1}{2}\right) + \underbrace{F^{-1}\left(\frac{1}{2} + 0\right)}_{=\lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}+} F^{-1}(x)} \right)$$

\rightarrow Median⁸

Mediantreue: $\forall \vartheta \in \Theta$:

$$P_{\vartheta}(S(X) \leq \gamma(\vartheta)) = P_{\vartheta}(S(X) \geq \gamma(\vartheta)) \geq \frac{1}{2}$$

(In jeweils 50% der Fälle Unter- bzw. Überschätzung.)

Beispiele:

- a) X_1, \dots, X_n reellwertig, $X_1, \dots, X_n \stackrel{uiv}{\sim} P_{\vartheta}$, $\mu(\vartheta) := E_{\vartheta} X_1$
 $(E_{\vartheta}|X_1| < \infty)$.

\bar{X}_n ist erwartungstreu für $\mu(\vartheta)$

X_1 ist erwartungstreu für $\mu(\vartheta)$

- b) Wie a), $E_{\vartheta} X_1^2 < \infty$. $\sigma^2(\vartheta) := \text{Var}_{\vartheta}(X_1)$.

$$S_n^2 := \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X}_n)^2$$

S_n^2 ist erwartungstreu für $\sigma^2(\vartheta)$.

⁸ \rightarrow Abbildung 3.1

Beweis:

$$\begin{aligned}
 E_{\vartheta} S_n^2 &= \frac{1}{n-1} E_{\vartheta} \left[\sum_{i=1}^n ((X_i - \mu(\vartheta)) - (\bar{X}_n - \mu(\vartheta)))^2 \right] \\
 &= \frac{1}{n-1} \left[\sum_{i=1}^n \underbrace{E_{\vartheta} (X_i - \mu(\vartheta))^2}_{=\text{Var}_{\vartheta}(X_i)} - n \underbrace{E_{\vartheta} (\bar{X}_n - \mu(\vartheta))^2}_{=\text{Var}_{\vartheta}(\bar{X}_n) = \frac{\sigma^2(\vartheta)}{n}} \right] \\
 &= \frac{1}{n-1} (n\sigma^2(\vartheta) - \sigma^2(\vartheta)) \\
 &= \sigma^2(\vartheta)
 \end{aligned}$$

$$\text{c) } X_1, \dots, X_n \stackrel{uiv}{\sim} \mathcal{N}(\mu, \sigma^2), \vartheta = (\mu, \sigma^2), \gamma(\vartheta) = E_{\vartheta} X_1 = \mu$$

$$\bar{X}_n \sim \mathcal{N}(\mu, \frac{\sigma^2}{n}) \Rightarrow \text{med}_{\vartheta} \bar{X}_n = \mu$$

$\Rightarrow \bar{X}_n$ ist mediantreu für $\gamma(\vartheta)$.

3.5 Definition (Sei $\Gamma \subset \mathbb{R}^k$.)

Schätzfolge $S_n = S_n(X_1, \dots, X_n)$, $n \geq 1$, heißt (schwach) **konsistent** für $\gamma(\vartheta) \Leftrightarrow$

$$P_{\vartheta}(\|S_n(X_1, \dots, X_n) - \gamma(\vartheta)\| \geq \varepsilon) \rightarrow 0 \quad \forall \varepsilon > 0 \quad \forall \vartheta \in \Theta$$

$$(\forall \vartheta \in \Theta : S_n \xrightarrow{P_{\vartheta}} \gamma(\vartheta))$$

3.6 Bemerkung (Sei $\Gamma \subset \mathbb{R}$.)

(S_n) asymptotisch erwartungstreu für $\gamma(\vartheta)$ und $\text{Var}_{\vartheta} S_n \rightarrow 0 (n \rightarrow \infty) \Rightarrow (S_n)$ konsistent für $\gamma(\vartheta)$.

[Beweis:]

$$\begin{aligned}
 P_{\vartheta}(|S_n - \gamma| \geq \varepsilon) &\leq P_{\vartheta}(|S_n - ES_n| + |ES_n - \gamma| \geq \varepsilon) \\
 &\leq P_{\vartheta}(|S_n - ES_n| \geq \frac{\varepsilon}{2} \text{ oder } |ES_n - \gamma| \geq \frac{\varepsilon}{2}) \\
 &\leq P_{\vartheta}(|S_n - ES_n| \geq \frac{\varepsilon}{2}) + P_{\vartheta}(|ES_n - \gamma| \geq \frac{\varepsilon}{2}) \\
 &\stackrel{(*)}{\leq} \frac{\text{Var}(S_n)}{(\frac{\varepsilon}{2})^2} + P_{\vartheta}(|ES_n - \gamma| \geq \frac{\varepsilon}{2}) \\
 &\rightarrow 0 \quad (n \rightarrow \infty)
 \end{aligned}$$

(*) : Tschebyscheff

Kurz:

$$|S_n - \gamma| \leq \underbrace{|S_n - E_\vartheta S_n|}_{\xrightarrow{P_\vartheta} 0 \text{ (1)}} + \underbrace{|E_\vartheta S_n - \gamma|}_{\xrightarrow{P_\vartheta} 0 \text{ (2)}} \xrightarrow{P_\vartheta} 0$$

(1): Tschebyscheff, (2): asymptotisch erwartungstreu

Obiges Beispiel a):

\bar{X}_n konsistent für $\mu(\vartheta)$, falls $E_\vartheta X_1^2 < \infty$ nach 3.6.

Starkes Gesetz der großen Zahlen (SGGZ):

$$\bar{X}_n \xrightarrow{P_\vartheta \text{ f.s.}} E_\vartheta X_1 \text{ (ohne weitere Voraussetzung)} \Rightarrow \bar{X}_n \xrightarrow{P_\vartheta} E_\vartheta X_1$$

3.7 Bemerkung und Definition (Sei $\Gamma \subset \mathbb{R}$.)

$$\text{MQA}_S(\vartheta) := E_\vartheta(S(X) - \gamma(\vartheta))^2$$

heißt **mittlere quadratische Abweichung** von S an der Stelle ϑ .

Es gilt:

$$\text{MQA}_S(\vartheta) = E_\vartheta(S(X) - E_\vartheta S(X))^2 + (E_\vartheta S(X) - \gamma(\vartheta))^2 = \text{Var}_\vartheta S(X) + b_s^2(\vartheta)$$

3.8 Beispiel

$X_1, \dots, X_n \overset{iid}{\sim} \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$, μ, σ^2 unbekannt

Schätzer von σ^2 :

$$\tilde{\sigma}_n^2(c) = c \cdot \sum_{j=1}^n (X_j - \bar{X}_n)^2$$

Ziel: c so wählen, dass MQA von $\tilde{\sigma}_n^2(c)$ minimal wird.

$$E_\vartheta(\tilde{\sigma}_n^2(c)) = c\sigma^2 \cdot E_\vartheta \underbrace{\left[\frac{1}{\sigma^2} \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X}_n)^2 \right]}_{\sim \chi_{n-1}^2} = c\sigma^2 \cdot (n-1)$$

$$\text{Var}_\vartheta(\tilde{\sigma}_n^2(c)) = c^2 \sigma^4 \cdot 2(n-1)$$

Damit:

$$\begin{aligned}
 \text{MQA}_{\tilde{\sigma}_n^2(c)}(\vartheta) &= 2(n-1)c^2\sigma^4 + (c\sigma^2(n-1) - \sigma^2)^2 \\
 &= \dots \\
 &= \sigma^4(n^2-1) \left[\left(c - \frac{1}{n+1}\right)^2 + \frac{2}{(n-1)(n+1)^2} \right] \\
 &\stackrel{!}{=} \min
 \end{aligned}$$

Dies führt offensichtlich auf $c = \frac{1}{n+1}$.

4 Schätzmethoden

a) Maximum-Likelihood-Schätzer (ML-Schätzer)

ML-Methode (R. A. Fisher) setzt dominierte Verteilungsklasse

$\wp := \{P_\vartheta : \vartheta \in \Theta\}$ voraus. ($\Theta \subset \mathbb{R}^k$)

Im Folgenden: $(\mathfrak{X}, \mathcal{B}) = (\mathbb{R}^n, \mathcal{B}^n)$

4.1 Grundannahmen

1) $\exists \sigma$ -endliches Maß μ auf \mathcal{B} mit:

$$\forall N \in \mathcal{B} : \mu(N) = 0 \Rightarrow P_\vartheta(N) = 0 \quad \forall \vartheta \in \Theta$$

d.h. P_ϑ stetig bzgl. $\mu \quad \forall \vartheta$.

($\Rightarrow P_\vartheta$ besitzt Dichte bzgl. μ)

2) Im Folgenden stets

- (i) $\mu = \lambda^n$ (Borel-Lebesgue-Maß)
(\rightarrow stetige Verteilung)

oder

- (ii) $\mu = \text{Zählmaß}$ auf einer abzählbaren Menge $A \subset \mathbb{R}^n$.
(\rightarrow diskrete Verteilung)

Im Falle (i) bezeichne $f(x, \vartheta) = \frac{dP_\vartheta}{d\lambda^n}(x)$ die Lebesgue-Dichte⁹ von X , also

$$P_\vartheta(X \in B) = \int_B f(x, \vartheta) d\lambda^n(x), \quad B \in \mathcal{B}$$

Im Falle (ii) bezeichne $f(x, \vartheta) = \frac{dP_\vartheta}{d\mu}(x)$ die Zähldichte von X , also

$$f(x, \vartheta) = P_\vartheta(X = x), \quad x \in A$$

$$P_\vartheta(X \in B) = \sum_{x \in B \cap A} f(x, \vartheta)$$

⁹Beachte Schreibweise aus Stochastik III!

4.2 Definition und Bemerkung

Für jedes $x \in \mathbb{R}^n$ heißt die Abbildung

$$L_x : \begin{cases} \Theta & \rightarrow [0, \infty) \\ \vartheta & \mapsto L_x(\vartheta) := f(x, \vartheta) \end{cases}$$

die Likelihood-Funktion zur Stichprobe x .

Jeder Wert $\hat{\vartheta}(x) \in \Theta$, der Lösung t von

$$L_x(t) = \sup_{\vartheta \in \Theta} L_x(\vartheta) \quad (*)$$

ist, heißt (ein) ML-Schätzwert für $\vartheta \in \Theta$

- (i) Im Allgemeinen Existenz gesichert, falls Θ abgeschlossen ist.
- (ii) Falls Θ nicht abgeschlossen, so häufig $\vartheta \mapsto f(x, \vartheta)$ auf $\bar{\Theta}$ fortsetzbar.
Dann sieht man $\hat{\vartheta}(x)$ auch als Lösung an, wenn \sup in $(*)$ im Punkt $\hat{\vartheta}(x) \in \bar{\Theta} \setminus \Theta$ angenommen wird.

Eine messbare Funktion $\hat{\vartheta} : (\mathbb{R}^n, \mathcal{B}^n) \rightarrow (\bar{\Theta}, \bar{\Theta} \cap \mathcal{B}^k)$ heißt **ML-Schätzer** für ϑ , wenn für jedes $x \in \mathfrak{X}$ gilt: $\hat{\vartheta}(x)$ ist Lösung von $(*)$ im obigen Sinn¹⁰.

4.3 Bemerkungen

- (i) Oft ist $L_x(\cdot) = f(x, \cdot)$ differenzierbar.
Dann liefert $\frac{\partial}{\partial \vartheta} f(x, \vartheta) \stackrel{!}{=} 0 \in \mathbb{R}^k$ die lokalen Maximalstellen von L_x im Inneren Θ^0 von Θ .
- (ii) Oft: $X = (X_1, \dots, X_n)$, $X_1, \dots, X_n \stackrel{uiv}{\sim} f_1(\xi, \vartheta)$ [Dichte von X_1 .]
Dann:

$$f(x, \vartheta) = \prod_{j=1}^n f_1(x_j, \vartheta), \quad x = (x_1, \dots, x_n)$$

Log-Likelihood-Funktion

$$\log L_x(\vartheta) = \sum_{j=1}^n \log f_1(x_j, \vartheta)$$

$$\frac{\partial}{\partial \vartheta} \log L_x(\vartheta) \stackrel{!}{=} 0 \rightarrow \text{Maximalstellen von } L_x \text{ in } \Theta^0$$

¹⁰siehe Punkt (ii)

4.4 Satz (Invarianzprinzip für ML-Schätzer)

Sei $g : \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}^l$ messbar und

$$M_x(\gamma) := \sup_{\vartheta: g(\vartheta)=\gamma} L_x(\vartheta)$$

(sogenannte von g induzierte Likelihood-Funktion)

Ist $\hat{\vartheta}$ ML-Schätzer für $\vartheta \in \Theta$, so ist $\hat{\gamma} := g(\hat{\vartheta})$ der ML-Schätzer für $\gamma = g(\vartheta) \in \Gamma := g(\Theta)$, es gilt also $M(\hat{\gamma}) \geq M(\gamma) \quad \forall \gamma \in \Gamma$.
(Plug-In-Methode)

Beweis:¹¹

Aus

$$M_x(g(\hat{\vartheta})) = \sup_{\vartheta: g(\vartheta)=g(\hat{\vartheta})} L_x(\vartheta) \geq L_x(\hat{\vartheta})$$

und

$$M_x(g(\hat{\vartheta})) \leq \sup_{\gamma \in \Gamma} M_x(\gamma) = L_x(\hat{\vartheta})$$

folgt

$$M_x(g(\hat{\vartheta})) = L_x(\hat{\vartheta}) \geq M_x(\gamma) \quad \forall \gamma \in \Gamma$$

4.5 Beispiel

$$X_1, \dots, X_n \stackrel{uiv}{\sim} \mathcal{N}(\mu, \sigma^2), \quad \vartheta = (\mu, \sigma^2)$$

$$\hat{\vartheta}(x) = (\bar{X}_n, \hat{\sigma}_n^2)$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \quad & \bar{X}_n \text{ ist ML-Schätzer für } \mu \\ & \hat{\sigma}_n^2 \text{ ist ML-Schätzer für } \sigma^2 \\ & \hat{\sigma}_n = +\sqrt{\hat{\sigma}_n^2} \text{ ist ML-Schätzer für } \sigma \end{aligned}$$

b) Minimum-Quadrat-Schätzer (MQ-Schätzer)

4.6 Situation

Seien X_1, \dots, X_n stochastisch unabhängig.

Annahme:

$EX_j = \mu_j(\vartheta)$, wobei $\vartheta \in \mathbb{R}^p$ **unbekannt**, $\mu_j : \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R} \quad (j = 1, \dots, n)$
bekannte Regressionsfunktionen.

¹¹In der 1. Zeile gilt eigentlich bereits Gleichheit.

Für $\varepsilon_j := X_j - EX_j$ gilt dann:

$\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n$ unabhängig, $E(\varepsilon_j) = 0 \ \forall j$, $X_j = \mu_j(\vartheta) + \varepsilon_j$ ($j = 1, \dots, n$) bzw.

$$X = \mu(\vartheta) + \varepsilon$$

wobei

$$X = \begin{pmatrix} X_1 \\ \vdots \\ X_n \end{pmatrix}, \quad \mu(\vartheta) = \begin{pmatrix} \mu_1(\vartheta) \\ \vdots \\ \mu_n(\vartheta) \end{pmatrix}, \quad \varepsilon = \begin{pmatrix} \varepsilon_1 \\ \vdots \\ \varepsilon_n \end{pmatrix}$$

Schätzmethode von ϑ durch Methode der **kleinsten Quadrate**, d.h. durch Minimierung der Fehlerquadratsumme

$$Q(\vartheta) := \sum_{j=1}^n (X_j - \mu_j(\vartheta))^2 = \|X - \mu(\vartheta)\|^2$$

Sind μ_1, \dots, μ_n stetig differenzierbar, so gilt mit

$$M(\vartheta) := \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial \vartheta_1} \mu_1(\vartheta) & \cdots & \frac{\partial}{\partial \vartheta_p} \mu_1(\vartheta) \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial}{\partial \vartheta_1} \mu_n(\vartheta) & \cdots & \frac{\partial}{\partial \vartheta_p} \mu_n(\vartheta) \end{pmatrix}$$

$$\frac{\partial}{\partial \vartheta} Q(\vartheta) = -2 \cdot M^T(\vartheta) \cdot (X - \mu(\vartheta))$$

Beweis:

Sei allgemein $f, g : \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}^q$.

Jacobi-Matrix

$$J_f = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_p} \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial f_q}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial f_q}{\partial x_p} \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{q \times p}$$

$$\Rightarrow \underbrace{J_{f^T \cdot g}^T}_{\in \mathbb{R}^p} = \underbrace{J_f^T}_{\in \mathbb{R}^{p \times q}} \cdot \underbrace{g}_{\in \mathbb{R}^p} + \underbrace{J_g^T}_{\in \mathbb{R}^p} \cdot f \quad (*)$$

[Beachte: f,g vektorwertig!]

Hier speziell: $f(\vartheta) = g(\vartheta) = X - \mu(\vartheta)$

$$\Rightarrow Q(\vartheta) = f^T(\vartheta) \cdot f(\vartheta)$$

$$\Rightarrow J_f = -M(\vartheta) = J_g$$

$$\begin{aligned}
\stackrel{(*)}{\Rightarrow} \frac{\partial}{\partial \vartheta} [f^T(\vartheta) \cdot f(\vartheta)] &= -M^T(\vartheta)g - M^T(\vartheta)f \\
&= -2M^T(\vartheta)(X - \mu(\vartheta))
\end{aligned}$$

Die Lösungen $\hat{\vartheta}$ von

$$Q(\hat{\vartheta}) = \min_{\vartheta \in \mathbb{R}^p} Q(\vartheta)$$

(sogenannte MQ-Schätzer) befinden sich also unter den Lösungen ϑ der sogenannten **Normalengleichung**

$$M^T(\vartheta) \cdot \mu(\vartheta) = M^T(\vartheta) \cdot X$$

4.7 Beispiel (Einfach lineare Regression)

$\vartheta = (\vartheta_0, \vartheta_1) \in \mathbb{R}$

$$\mu_i(\vartheta) = \vartheta_0 + \vartheta_1 t_i \quad (i = 1, \dots, n)$$

t_i bekannt, nicht alle gleich.

$$Q(\vartheta) = \sum_{i=1}^n (X_i - \vartheta_0 - \vartheta_1 t_i)^2 = \min_{\vartheta_0, \vartheta_1}!$$

$$M^T(\vartheta) = \begin{pmatrix} 1 & \dots & 1 \\ t_1 & \dots & t_n \end{pmatrix}$$

Normalengleichung:

$$\begin{pmatrix} 1 & \dots & 1 \\ t_1 & \dots & t_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \vartheta_0 + \vartheta_1 t_1 \\ \vdots \\ \vartheta_0 + \vartheta_1 t_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & \dots & 1 \\ t_1 & \dots & t_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow n\vartheta_0 + \vartheta_1 \sum_{i=1}^n t_i = \sum_{i=1}^n x_i$$

$$\vartheta_0 \sum_{i=1}^n t_i + \vartheta_1 \sum_{i=1}^n t_i^2 = \sum_{i=1}^n t_i x_i$$

Mit $\bar{t} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n t_i$, $\bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i$ folgt

$$\begin{aligned}
\hat{\vartheta}_0 &= \bar{x} - \hat{\vartheta}_1 \bar{t} \\
\hat{\vartheta}_1 &= \frac{\sum_{i=1}^n t_i x_i - n \bar{t} \bar{x}}{\sum_{i=1}^n (t_i - \bar{t})^2}
\end{aligned}$$

Wegen¹²

$$\sum_i a_i b_i - n \bar{a} \bar{b} = \sum_i (a_i - \bar{a})(b_i - \bar{b}) = \sum_i (a_i - \bar{a}) b_i$$

folgt

$$\hat{\vartheta}_1 = \hat{\vartheta}_1(X) = \frac{\sum_{i=1}^n (t_i - \bar{t}) x_i}{\sum_{i=1}^n (t_i - \bar{t})^2}$$

und somit

$$E(\vartheta_1) = \frac{1}{\sum_i (t_i - \bar{t})^2} \sum_i (t_i - \bar{t})(\vartheta_0 + \vartheta_1 t_i) = \vartheta_1$$

Falls $\text{Var}(X_i) = \sigma^2 \forall i$, so gilt:

$$\text{Var}(\hat{\vartheta}_1) = \frac{1}{(\sum_i (t_i - \bar{t})^2)^2} \sum_i (t_i - \bar{t})^2 \sigma^2 = \frac{\sigma^2}{\sum_{i=1}^n (t_i - \bar{t})^2}$$

[$\text{Var}(\hat{\vartheta}_1) = \text{MQA}$, da erwartungstreu; t_i so wählen, dass $\text{Var}(\hat{\vartheta}_1)$ klein wird, also möglichst weit auseinander.]

Weiter gilt

$$E(\hat{\vartheta}_0) = E\bar{X} - \bar{t}E(\hat{\vartheta}_1) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (\vartheta_0 + \vartheta_1 t_i) - \bar{t}\vartheta_1 = \vartheta_0 + \vartheta_1 \bar{t} - \vartheta_1 \bar{t} = \vartheta_0$$

Bemerkungen:

- (i) Falls $\text{Var}(X_i) = \sigma^2 \forall i$ ($\text{Cov}(X_i, X_j) = 0 \forall i \neq j$ wegen Unabhängigkeit¹³), so gilt mit $\bar{t}^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n t_i^2$

$$\text{Var}(\hat{\vartheta}_0) = \frac{\sigma^2 \bar{t}^2}{n(\bar{t}^2 - (\bar{t})^2)}$$

- (ii) Falls $X_i \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2) \forall i$, so ist der MQ-Schätzer auch ML-Schätzer für ϑ

¹² $\sum (a_i - \bar{a})\bar{b} = \bar{b} \sum (a_i - \bar{a}) = 0$

¹³Voraussetzung!

c) Momentenmethode

4.8 Definition

Es seien $X_1, \dots, X_n \stackrel{uiv}{\sim} X$, X reellwertig, $P^X \in \{P_\vartheta : \vartheta \in \Theta\}$, $\Theta \subset \mathbb{R}^k$

$$\vartheta = (\vartheta_1, \dots, \vartheta_k)$$

Annahme

$$(i) \quad E|X^k| < \infty$$

(ii) Es gibt Funktionen $g_1, \dots, g_k : \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}$ mit

$$\vartheta_1 = g_1(EX, \dots, EX^k)$$

$$\vdots$$

$$\vartheta_k = g_k(EX, \dots, EX^k)$$

Sei $\bar{X}_n^l = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n X_j^l$ ($l = 1, \dots, k$).

Dann ist der Momentenschätzer für ϑ

$$\hat{\vartheta} := \begin{pmatrix} g_1(\bar{X}_n^1, \dots, \bar{X}_n^k) \\ \vdots \\ g_k(\bar{X}_n^1, \dots, \bar{X}_n^k) \end{pmatrix}$$

Beispiel:

$$X_i \stackrel{uiv}{\sim} \mathcal{N}(\mu, \sigma^2), \mu = EX, \sigma^2 = EX^2 - (EX)^2 \\ \Rightarrow \hat{\mu}_n = \bar{X}_n^1, \hat{\sigma}_n^2 = \bar{X}_n^2 - (\bar{X}_n^1)^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2$$

Probleme:

g_1, \dots, g_k nicht explizit gegeben.

Ausreißeranfälligkeit.

Momentenschätzer sind nicht „robust“.

Beachte

Momentenschätzer sind konsistent, falls g_1, \dots, g_k stetig sind an der Stelle (EX, \dots, EX^k) .

4.9 Beispiel (Gamma-Verteilung)

$X_1, \dots, X_n \overset{uiv}{\sim} \Gamma(\alpha, \beta)$, Dichte

$$f(x, \alpha, \beta) = \frac{\beta^\alpha x^{\alpha-1} e^{-\beta x}}{\Gamma(\alpha)} \quad (x > 0)$$

$\vartheta = (\alpha, \beta) \in \Theta = \mathbb{R}_{>0} \times \mathbb{R}_{>0}$

$X \sim f(x, \alpha, \beta) \Rightarrow EX = \frac{\alpha}{\beta}, EX^2 = \frac{\alpha(\alpha+1)}{\beta^2} \Rightarrow$

$$\alpha = \frac{(EX)^2}{EX^2 - (EX)^2} =: g_1(EX, EX^2)$$

$$\beta = \frac{EX}{EX^2 - (EX)^2} =: g_2(EX, EX^2)$$

\Rightarrow Momentenschätzer

$$\hat{\alpha} = \frac{(\bar{X}_n^1)^2}{\bar{X}_n^2 - (\bar{X}_n^1)^2} = \frac{\bar{X}_n^2}{\hat{\sigma}_n^2}$$

$$\hat{\beta} = \frac{\bar{X}_n}{\hat{\sigma}_n^2}$$

d) Ein nichtparametrisches Schätzprinzip

Seien $X_1, \dots, X_n \overset{uiv}{\sim} F$, $F(t) = P(X \leq t)$, $t \in \mathbb{R}$, F unbekannt

4.10 Definition

Die durch

$$\hat{F}_n(t) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \mathbf{1}\{X_i \leq t\}, \quad t \in \mathbb{R}$$

definierte Funktion heißt **empirische Verteilungsfunktion** (EVF) von X_1, \dots, X_n .

Die Realisierungen von \hat{F}_n sind Treppenfunktionen.

$$\hat{F}_n(t_0) \xrightarrow{f.s.} E[\mathbf{1}\{X_1 \leq t_0\}] = P(X_1 \leq t_0) = F(t_0)$$

4.11 Satz von Glivenko-Cantelli

Sei $\hat{F}_n^\omega(t) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \mathbf{1}\{X_i(\omega) \leq t\}$, $\omega \in \Omega$.

Falls $X_1, \dots, X_n \stackrel{uiv}{\sim} F$ auf Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$, so gilt

$$\mathbb{P}(\{\omega \in \Omega : \lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{t \in \mathbb{R}} \underbrace{|\hat{F}_n^\omega(t) - F(t)|}_{=: \|\hat{F}_n^\omega - F\|_\infty} = 0\}) = 1$$

Kurz: $\|\hat{F}_n^\omega - F\|_\infty \rightarrow 0 \quad \mathbb{P} - f.s.$
(Stochastik II, Henze)

4.12 \hat{F}_n als nichtparametrischer ML-Schätzer

Sei \mathfrak{F} die Menge aller Verteilungsfunktionen auf \mathbb{R} , $X_1, \dots, X_n \stackrel{uiv}{\sim} F \in \mathfrak{F}$.

Sei P_F das zu F gehörende Wahrscheinlichkeitsmaß auf \mathcal{B}^1 , also

$$P_F([a, b]) = F(b) - F(a), \quad a < b$$

$$P_F(\{x\}) = F(x) - F(x-0), \quad x \in \mathbb{R}$$

Sei (x_1, \dots, x_n) Realisierung von (X_1, \dots, X_n) . Die durch

$$L_x : \begin{array}{ll} \mathfrak{F} & \rightarrow [0, \infty) \\ G & \mapsto L_x(G) := \prod_{i=1}^n P_G(\{x_i\}) \end{array}$$

definierte Funktion heißt nichtparametrische Likelihood-Funktion zu $x = (x_1, \dots, x_n)$.

Beachte: $L_x(G) = 0$, falls $P_G(\{x_i\}) = 0$ für ein i .¹⁴

Behauptung:

$L_x(\cdot)$ wird maximal für $G(t) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \mathbf{1}\{x_i \leq t\}$.

Beweis:

Seien z_1, \dots, z_k die unterschiedlichen Werte unter x_1, \dots, x_n , n_1, \dots, n_k die entsprechenden Vielfachheiten.

$$L_x(G) = \prod_{i=1}^n P_G(\{x_i\}) = \prod_{j=1}^k \underbrace{P_G(\{z_j\})}_{=: p_j}^{n_j} = \prod_{j=1}^k p_j^{n_j}$$

Setze $\hat{p}_j := \frac{n_j}{n}$, $j = 1, \dots, k$, Verteilungsfunktion ist \hat{F}_n .

¹⁴z.B. für G stetig

F sei beliebige Verteilungsfunktion mit $p_j := F(z_j) - F(z_j - 0) > 0, j = 1, \dots, k$ mit $p_j \neq \hat{p}_j$ für mindestens ein j .

Es gilt für $x > 0$:

$$\log x \leq x - 1 \quad (*)$$

$\log x = x - 1$ nur für $x = 1$.

$$\begin{aligned} \log \left(\frac{L_x(F)}{L_x(\hat{F}_n)} \right) &= \sum_{j=1}^k n_j \cdot \log \left(\frac{p_j}{\hat{p}_j} \right) \\ &= n \sum_{j=1}^k \hat{p}_j \cdot \log \left(\frac{p_j}{\hat{p}_j} \right) \\ &\stackrel{(*)}{<} n \sum_{j=1}^k \hat{p}_j \left(\frac{p_j}{\hat{p}_j} - 1 \right) \\ &= n \left(\underbrace{\sum_{j=1}^k p_j}_{\leq 1} - \underbrace{\sum_{j=1}^k \hat{p}_j}_{=1} \right) \\ &\leq 0 \end{aligned}$$

$$\Rightarrow L_x(F) < L_x(\hat{F}_n) \quad \blacksquare$$

4.13 Nichtparametrisches Schätzprinzip

Seien $X_1, \dots, X_n \stackrel{uiv}{\sim} F, F \in \mathfrak{F}, \mathfrak{F}$ Menge von Verteilungsfunktionen (Verteilungsannahme).

Sei $\gamma : \mathfrak{F} \rightarrow \mathbb{R}$ Funktional.

Interessierender Parameter sei $\gamma(F)$.

„Rezept“: Schätze $\gamma(F)$ durch $\gamma(\hat{F}_n)$

4.14 Beispiele

$$\text{a) } \mathfrak{F} := \{F : \underbrace{\int |x| F(dx)}_{=E|X_1|} < \infty\}$$

$$\gamma(F) := \int x F(dx) (= EX_1)$$

$$\gamma(\hat{F}_n) = \int x \hat{F}_n(dx) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i = \bar{X}_n$$

b) $\mathfrak{F} := \{F : \int x^2 F(dx) < \infty\}$

$$\gamma(F) := \int (x - \int y dF(y))^2 dF(x) = \text{Var}(X_1)$$

$$\gamma(\hat{F}_n) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X}_n)^2$$

c) $\mathfrak{F} := \{F : F \text{ hat Lebesgue-Dichte } f\}$

$$\gamma(F) = F'(t_0) = f(t_0)$$

$$\gamma(\hat{F}_n) = ?$$

5 Optimale erwartungstreue Schätzer

5.1 Definition

Seien X_1, \dots, X_n reelle Zufallsvariablen, $T = T(X_1, \dots, X_n)$ reellwertige Statistik.

T heißt **linear** $:\Leftrightarrow \exists c_1, \dots, c_n \in \mathbb{R}$ mit $T = \sum_{j=1}^n c_j X_j$

5.2 Satz

Seien $X_1, \dots, X_n \stackrel{uiv}{\sim} X$, $EX^2 < \infty$, $\mu := EX$, $\sigma^2 := \text{Var}(X)$, (μ, σ^2) unbekannt. Es sei T ein beliebiger linearer erwartungstreuer Schätzer für μ . Dann gilt:

$$\text{Var}(T) \geq \text{Var}(\bar{X}_n) = \frac{\sigma^2}{n}$$

Beweis:

Sei $T = \sum_{j=1}^n c_j X_j$.

T erwartungstreu

$$\Rightarrow \mu = E(T) = \mu \sum_{j=1}^n c_j$$

$$\Rightarrow \sum_{j=1}^n c_j = 1$$

$$\text{Var}(T) = \sigma^2 \sum_{j=1}^n c_j^2$$

$$\underbrace{\left(\sum_{j=1}^n c_j \cdot 1 \right)^2}_{=1} \leq \sum_{j=1}^n c_j^2 \underbrace{\sum_{j=1}^n 1^2}_{=n}$$

(Cauchy-Schwarz)

$$\sum_{j=1}^n c_j^2 \geq \frac{1}{n}$$

$$\sum_{j=1}^n c_j^2 = \frac{1}{n} \Leftrightarrow c_j = \frac{1}{n} \quad \forall j$$

$\Rightarrow T = \bar{X}_n$. ■

5.3 Situation

Sei $(\mathfrak{X}, \mathcal{B}, \{P_\vartheta : \vartheta \in \Theta\})$, $\Theta \subset \mathbb{R}^k$, ein statistischer Raum. $X_1, \dots, X_n \overset{uiv}{\sim} P_\vartheta$.

$g : \Theta \rightarrow \mathbb{R}$ Funktional

$g(\vartheta)$ interessierender Parameter.

Sei

$$U_g = \{T \mid T : \mathfrak{X}^n \rightarrow \mathbb{R} \text{ messbar, } E_\vartheta T = g(\vartheta) \forall \vartheta \in \Theta, E_\vartheta T^2 < \infty \forall \vartheta \in \Theta\}$$

die Menge aller erwartungstreuen Schätzer für $g(\vartheta)$ mit endlicher Varianz.

Annahme: $U_g \neq \emptyset$

Sei

$$m(\vartheta) := \inf\{\text{Var}_\vartheta(T) : T \in U_g\}$$

5.4 Definition

Ein $T_0 \in U_g$ mit $\text{Var}_\vartheta(T_0) = m(\vartheta) \forall \vartheta \in \Theta$ heißt **UMVUE**.
(Uniformly Minimum Variance Unbiased Estimator)

5.5 Satz

Falls T_1 und T_2 UMVUE, so gilt

$$P_\vartheta(T_1 = T_2) = 1 \forall \vartheta \in \Theta$$

Beweis:

U_g ist konvex, d.h.

$$S, T \in U_g \Rightarrow \lambda S + (1 - \lambda)T \in U_g \forall \lambda \in [0, 1]$$

Seien T_1, T_2 UMVUE.

$$\Rightarrow \frac{1}{2}(T_1 + T_2) \in U_g$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \underbrace{\text{Var}_\vartheta\left(\frac{1}{2}(T_1 + T_2)\right)}_{= \frac{1}{4}(\text{Var}_\vartheta(T_1) + \text{Var}_\vartheta(T_2) + 2\text{Cov}_\vartheta(T_1, T_2))} &\geq \text{Var}_\vartheta(T_1) (= m(\vartheta) = \text{Var}_\vartheta(T_2)) \\ &= \frac{1}{4}(\text{Var}_\vartheta(T_1) + \text{Var}_\vartheta(T_2) + 2\text{Cov}_\vartheta(T_1, T_2)) \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \text{Var}_\vartheta(T_1) \leq \text{Cov}_\vartheta(T_1, T_2) \overset{\text{CSU}}{\leq} \sqrt{\text{Var}_\vartheta(T_1) \text{Var}_\vartheta(T_2)} = \text{Var}_\vartheta(T_1)$$

$$\Rightarrow \text{Var}_{\vartheta}(T_1) = \text{Cov}_{\vartheta}(T_1, T_2)$$

$$\Rightarrow \text{Var}_{\vartheta}(T_1 - T_2) = \text{Var}_{\vartheta}(T_1) + \text{Var}_{\vartheta}(T_2) - 2 \text{Cov}_{\vartheta}(T_1, T_2) = 0$$

$$E_{\vartheta}(T_1 - T_2) = 0$$

$$\Rightarrow P_{\vartheta}(T_1 = T_2) = 1. \blacksquare$$

5.6 Definition und Satz

Sei

$$\mathcal{S}_n := \{\pi = (\pi(1), \dots, \pi(n)) : \pi \text{ Permutation von } \{1, \dots, n\}\}$$

Für Statistik $T : \mathfrak{X}^n \rightarrow \mathbb{R}$ sei $T^{\pi}(X_1, \dots, X_n) = T(X_{\pi(1)}, \dots, X_{\pi(n)})$.

In der Situation von 5.3 heißt T (im wesentlichen) symmetrisch : \Leftrightarrow

$$P_{\vartheta}(T^{\pi} = T) = 1 \quad \forall \vartheta \in \Theta \forall \pi \in \mathcal{S}_n$$

$T_0 \in U_g$ UMVUE $\Rightarrow T$ symmetrisch.

Beweis:

Sei $\pi \in \mathcal{S}_n$, $\vartheta \in \Theta$ beliebig.

Wegen $X_1, \dots, X_n \stackrel{uiv}{\sim} P_{\vartheta}$ folgt $T_0^{\pi} \sim T_0$ unter P_{ϑ}

$$\left. \begin{aligned} \Rightarrow E_{\vartheta}(T_0^{\pi}) &= E_{\vartheta}(T_0) = g(\vartheta) \\ \Rightarrow \text{Var}_{\vartheta}(T_0^{\pi}) &= \text{Var}_{\vartheta}(T_0) = m(\vartheta) \end{aligned} \right\} \Rightarrow T_0^{\pi} \in U_g, \text{ UMVUE}$$

Satz 5.5 $\Rightarrow P_{\vartheta}(T_0^{\pi} = T_0) = 1. \blacksquare$

5.7 Reguläre Verteilungsklassen

Situation:

Sei $(\mathfrak{X}, \mathcal{B}, \{P_{\vartheta} : \vartheta \in \Theta\})$ statistischer Raum mit $(\mathfrak{X}, \mathcal{B}) = (\mathbb{R}^n, \mathcal{B}^n)$, $\Theta \subset \mathbb{R}^k$, Θ offen.

$X = (X_1, \dots, X_n)$ Zufallsvektor mit Verteilung P_{ϑ} ($\vartheta \in \Theta$), P_{ϑ} besitze Dichte $f(x, \vartheta)$ bezüglich μ , dabei sei μ entweder das Lebesgue-Maß oder das Zählmaß auf einer abzählbaren Teilmenge des \mathbb{R}^n .

$T : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^s$ sei Statistik mit $E_{\vartheta}\|T\|^2 < \infty$, Kovarianzmatrix¹⁵ von T :¹⁶

$$\text{Var}_{\vartheta}(T) := E_{\vartheta}[(T - E_{\vartheta}T)(T - E_{\vartheta}T)^T]$$

¹⁵Schreibweise für Kovarianzmatrix hier nicht Cov_{ϑ} , sondern Var_{ϑ} . Beachte dazu die Fälle $s = 1$ und $s > 1$!

¹⁶Bei Vektoren manchmal Schreibweise x' für x^T .

Folgende Regularitätsbedingungen sollen gelten:

- a) $\forall x \in \mathfrak{X}$ existiert $\frac{\partial}{\partial \vartheta_j} f(x, \vartheta)$ und ist stetig. ($j = 1, \dots, k$)
 b)

$$\frac{d}{d\vartheta} \int f(x, \vartheta) \mu(dx) = \int \frac{d}{d\vartheta} f(x, \vartheta) \mu(dx)$$

wobei hier $\frac{d}{d\vartheta} := (\frac{\partial}{\partial \vartheta_1}, \dots, \frac{\partial}{\partial \vartheta_k})^T$.

Der k -dimensionale Zufallsvektor

$$\mathcal{U}_n(\vartheta) := \frac{d}{d\vartheta} \log f(X, \vartheta) = \frac{\frac{d}{d\vartheta} f(X, \vartheta)}{f(X, \vartheta)}$$

heißt Score-Vektor.

Die $k \times k$ -Matrix

$$I_n(\vartheta) := E_{\vartheta}[\mathcal{U}_n(\vartheta) \cdot \mathcal{U}_n(\vartheta)^T] = \left(E_{\vartheta} \left[\frac{\partial}{\partial \vartheta_i} \log f(X, \vartheta) \frac{\partial}{\partial \vartheta_j} \log f(X, \vartheta) \right] \right)_{i,j=1,\dots,k}$$

heißt **Fisher-Informationsmatrix** (von f an der Stelle ϑ):

- c) $I_n(\vartheta)$ existiert und ist positiv definit.

Eine Verteilungsklasse $\{P_{\vartheta} : \vartheta \in \Theta\}$, die die Bedingungen (a)-(c) erfüllt, heißt **regulär**.

5.8 Lemma

In der Situation von 5.7 gilt:

$E_{\vartheta} \mathcal{U}_n(\vartheta) = 0 \ \forall \vartheta \in \Theta$ und somit $I_n(\vartheta) = \text{Var}_{\vartheta}(\mathcal{U}_n(\vartheta))$, $\vartheta \in \Theta$, d.h. die Fisher-Informationsmatrix ist Kovarianzmatrix des Score-Vektors.

Beweis:

$$E_{\vartheta} \mathcal{U}_n(\vartheta) \stackrel{(*)}{=} \int \frac{\frac{d}{d\vartheta} f(x, \vartheta)}{f(x, \vartheta)} f(x, \vartheta) d\mu(x) \stackrel{(b)}{=} \frac{d}{d\vartheta} \underbrace{\int f(x, \vartheta) d\mu(x)}_{=1} = 0$$

(*): Integration bezüglich P_{ϑ} ; P_{ϑ} hat aber Dichte $f(x, \vartheta)$ bezüglich μ

5.9 Bemerkung

Gelegentlich werden die weiteren Voraussetzungen

d) $\forall x \in \mathfrak{X}$ existiert $\frac{\partial^2}{\partial \vartheta_i \partial \vartheta_j} f(x, \vartheta)$ und ist stetig. ($i, j = 1, \dots, k$)

e)

$$\frac{\partial^2}{\partial \vartheta_i \partial \vartheta_j} \int f(x, \vartheta) \mu(dx) = \int \frac{\partial^2}{\partial \vartheta_i \partial \vartheta_j} f(x, \vartheta) \mu(dx) \quad \forall i, j = 1, \dots, k$$

benötigt.

Wir führen noch die folgenden Notationen ein:

$$W_n(\vartheta) := \left(\frac{\partial^2}{\partial \vartheta_i \partial \vartheta_j} \log f(X, \vartheta) \right)_{1 \leq i, j \leq k} =: \frac{d^2}{d\vartheta d\vartheta^T} \log f(X, \vartheta)$$

5.10 Lemma

Unter (d) und (e) gilt:

$$I_n(\vartheta) = -E_\vartheta W_n(\vartheta)$$

Beweis:

Wegen

$$\frac{\partial^2}{\partial \vartheta_i \partial \vartheta_j} \log f = \frac{\frac{\partial^2}{\partial \vartheta_i \partial \vartheta_j} f}{f} - \frac{(\frac{\partial}{\partial \vartheta_i} f)(\frac{\partial}{\partial \vartheta_j} f)}{f^2}$$

folgt

$$\begin{aligned} E_\vartheta(W_n(\vartheta)) &= \int \frac{d^2}{d\vartheta d\vartheta^T} \log f(x, \vartheta) \cdot f(x, \vartheta) d\mu(x) \\ &= \underbrace{\left(\int \frac{\partial^2}{\partial \vartheta_i \partial \vartheta_j} f(x, \vartheta) \mu(dx) \right)_{i,j}}_{=0 \text{ nach (e) [vgl. 5.7]}} \\ &\quad - \left(\int \frac{\partial}{\partial \vartheta_i} \log f(x, \vartheta) \cdot \frac{\partial}{\partial \vartheta_j} \log f(x, \vartheta) \cdot f(x, \vartheta) d\mu(x) \right)_{i,j} \\ &= -E_\vartheta[\mathcal{U}_n(\vartheta) U_n n(\vartheta)^T] \\ &= -I_n(\vartheta) \end{aligned}$$

5.11 Reguläre Statistiken (Schätzer)

In der Situation von 5.7 heißt eine Statistik $T : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^s$ **regulär**, falls gilt:

- f) Die Funktion $\Theta \ni \vartheta \mapsto E_\vartheta T \in \mathbb{R}^s$ ist stetig differenzierbar.
- g) Differenziation und Integration können vertauscht werden:

$$\frac{\partial}{\partial \vartheta_j} \int T(x) f(x, \vartheta) \mu(dx) = \int T(x) \frac{\partial}{\partial \vartheta_j} f(x, \vartheta) \mu(dx) \quad j = 1, \dots, k$$

Mit

$$C_n(\vartheta) := \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial \vartheta_1} E_\vartheta T_1 & \cdots & \frac{\partial}{\partial \vartheta_1} E_\vartheta T_s \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial}{\partial \vartheta_k} E_\vartheta T_1 & \cdots & \frac{\partial}{\partial \vartheta_k} E_\vartheta T_s \end{bmatrix}_{k \times s} = \frac{d}{d\vartheta} E_\vartheta T^T$$

wird Bedingung (g) zu

$$C_n(\vartheta) = E_\vartheta [\mathcal{U}_n(\vartheta) T^T]$$

Wegen $E_\vartheta [\mathcal{U}_n(\vartheta)] = 0$ folgt

$$C_n(\vartheta) = E_\vartheta [\mathcal{U}_n(\vartheta) (T - E_\vartheta T)^T]$$

5.12 Strukturlemma

Vorbemerkung:

Seien A, B $n \times n$ -Matrizen.

$A \geq B \Leftrightarrow A - B$ positiv semidefinit¹⁷ ($\Leftrightarrow x^T A x \geq x^T B x \quad \forall x \in \mathbb{R}^n$)

(„ \geq “ definiert Loewner-Halbordnung)

Es seien $T : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^s$ eine Statistik, P_ϑ Verteilung auf \mathcal{B}^n , $V(\vartheta)$ ein k -dimensionaler Zufallsvektor mit $E_\vartheta V(\vartheta) = 0$ und positiv definiter Kovarianzmatrix

$$J(\vartheta) = E_\vartheta [V(\vartheta) \cdot V(\vartheta)^T]$$

Definiert man

$$D(\vartheta) := E_\vartheta [V(\vartheta) \cdot (T - E_\vartheta T)^T]$$

($k \times s$ -Matrix), so gilt¹⁸:

$$\text{Var}_\vartheta(T) \geq D^T(\vartheta) \cdot J^{-1}(\vartheta) \cdot D(\vartheta)$$

¹⁷ $A - B \geq 0$

¹⁸ $\text{Var}_\vartheta(T)$ ist Kovarianzmatrix, da T vektorwertig; im Folgenden wird diese Schreibweise bei (Zufalls-)Vektoren meistens angewandt (...)

„=“ gilt genau dann, wenn $T = E_{\vartheta}T + D^T(\vartheta) \cdot J^{-1}(\vartheta) \cdot V(\vartheta)$ P_{ϑ} -f.s.

Beweis:

Für jeden Zufallsvektor $Y_{k \times 1}$ gilt:

$$(i) \quad E[YY^T] \geq 0$$

$$(ii) \quad E[YY^T] = 0 \Leftrightarrow Y = 0 \text{ P-f.s.}$$

[zu (i):

$$\forall a \in \mathbb{R}^k : a^T E[YY^T] a = E[a^T YY^T a] = E[(a^T Y)^2] \geq 0$$

zu (ii): „ \Rightarrow “

$$EYY^T = 0 \Rightarrow \forall j : EY_j^2 = 0 \Rightarrow Y = 0 \text{ P-f.s.} \quad]$$

Setze $Y := T - E_{\vartheta}T - D^T(\vartheta) \cdot J^{-1}(\vartheta) \cdot V(\vartheta)$.

Dann gilt:

$$\begin{aligned} 0 &\stackrel{(i)}{\leq} E_{\vartheta}[YY^T] \stackrel{(*)}{=} E_{\vartheta}[(T - E_{\vartheta}T)(T - E_{\vartheta}T)^T] \\ &\quad - \underbrace{E_{\vartheta}[(T - E_{\vartheta}T)V^T(\vartheta)]}_{=D^T(\vartheta)} J^{-1}(\vartheta) D(\vartheta) \\ &\quad - D^T(\vartheta) J^{-1}(\vartheta) \underbrace{E_{\vartheta}[V(\vartheta)(T - E_{\vartheta}T)^T]}_{=D(\vartheta)} \\ &\quad + D^T(\vartheta) J^{-1}(\vartheta) \underbrace{E_{\vartheta}[V(\vartheta) \cdot V^T(\vartheta)]}_{=J(\vartheta)} J^{-1}(\vartheta) D(\vartheta) \\ &= \text{Var}_{\vartheta}(T) - D^T(\vartheta) J^{-1}(\vartheta) D(\vartheta) \end{aligned}$$

(*): Beachte: J symmetrisch, $J = E_{\vartheta}[\cdot]$, $D = E_{\vartheta}[\cdot]$.

$$[Y = (T - E_{\vartheta}T) - (D^T(\vartheta) \cdot J^{-1}(\vartheta) \cdot V(\vartheta))]$$

„=“ $\stackrel{(ii)}{\Leftrightarrow} Y = 0 \text{ P-f.s.} \quad \blacksquare$

5.13 Satz (Cramér-Rao-Ungleichung)

Es seien $\{P_\vartheta : \vartheta \in \Theta\}$ reguläre Verteilungsklasse und $T : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^s$ reguläre Statistik. Dann gilt:

$$(1) \quad \text{Var}_\vartheta(T) \geq \left(\frac{d}{d\vartheta} E_\vartheta T^T\right)^T \cdot I_n^{-1}(\vartheta) \cdot \left(\frac{d}{d\vartheta} E_\vartheta T^T\right) \quad (\vartheta \in \Theta)$$

„=“ in (1) gilt $\Leftrightarrow T = E_\vartheta T + \left(\frac{d}{d\vartheta} E_\vartheta T^T\right)^T \cdot I_n^{-1}(\vartheta) \cdot \mathcal{U}_n(\vartheta)$

Beweis:

5.12 mit $V(\vartheta) := \mathcal{U}_n(\vartheta)$, $E_\vartheta \mathcal{U}_n(\vartheta) = 0$ (Lemma 5.8), $J(\vartheta) = I_n(\vartheta)$,
 $D(\vartheta) = E_\vartheta[\mathcal{U}_n(\vartheta)(T - E_\vartheta T)^T] = C_n(\vartheta) = \frac{d}{d\vartheta} E_\vartheta T^T$ (5.11).

5.14 Bemerkungen

a) Ist T erwartungstreu für $g(\vartheta)$, so gilt

$$E_\vartheta T = g(\vartheta) \quad \forall \vartheta \in \Theta$$

\Rightarrow rechte Seite von 5.13(1) ist nicht von T abhängig.

b) Falls $k = s$ und T erwartungstreu für ϑ , so gilt $E_\vartheta T = \vartheta \quad \forall \vartheta \in \Theta$ und somit $\frac{d}{d\vartheta} E_\vartheta T^T = I_k \Rightarrow$

$$\text{Var}_\vartheta T \geq I_n^{-1}(\vartheta)$$

$$„=“ \Leftrightarrow T = \vartheta + I_n^{-1}(\vartheta) \frac{d}{d\vartheta} \log f(X, \vartheta) \quad P_\vartheta - f.s.$$

c) Falls $X = (X_1, \dots, X_n)$ und $X_1, \dots, X_n \stackrel{iid}{\sim} f_1(\xi, \vartheta)$, so gilt:

$$f(x, \vartheta) = \prod_{j=1}^n f_1(x_j, \vartheta)$$

$$\mathcal{U}_n(\vartheta) = \frac{d}{d\vartheta} \sum_{j=1}^n \log f_1(X_j, \vartheta) = \sum_{j=1}^n \underbrace{\frac{d}{d\vartheta} \log f_1(X_j, \vartheta)}_{\text{uiv mit } E_\vartheta(\cdot)=0}$$

$$\begin{aligned}
\Rightarrow I_n(\vartheta) &= E_\vartheta[\mathcal{U}_n(\vartheta)\mathcal{U}_n^T(\vartheta)] \\
&= \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n E_\vartheta[\underbrace{\frac{d}{d\vartheta} \log f_1(X_i, \vartheta) \frac{d}{d\vartheta} \log f_1(X_j, \vartheta)^T}_{=0 \text{ für } i \neq j}] \\
&= n \cdot E_\vartheta[\underbrace{\frac{d}{d\vartheta} \log f_1(X_1, \vartheta) \cdot \frac{d}{d\vartheta} \log f_1(X_1, \vartheta)^T}_{=: I_1(\vartheta)}] \\
&= n \cdot I_1(\vartheta)
\end{aligned}$$

\Rightarrow Schranke in 5.13(1) geht mit $\frac{1}{n}$ gegen 0.

- d) Ist $\Theta \subset \mathbb{R}^1$, $T : \mathbb{R}^1 \rightarrow \mathbb{R}^1$, $\gamma(\vartheta) := E_\vartheta(T)$, $\vartheta \in \Theta$,
 $X_1, \dots, X_n \stackrel{uiv}{\sim} f_1(\xi, \vartheta)$ wie in (c), so folgt:

$$\text{Var}_\vartheta(T) \geq \frac{(\gamma'(\vartheta))^2}{n \cdot I_1(\vartheta)}, \quad \vartheta \in \Theta$$

- e) T heißt **CR-effizient**, falls in 5.13(1) Gleichheitszeichen gilt.
Achtung: CR-effizienter Schätzer muss nicht existieren.

5.15 Beispiel

$X_1, \dots, X_n \stackrel{uiv}{\sim} \text{Bin}(1, \vartheta)$, $\vartheta \in \Theta = (0, 1)$, μ = Zählmaß auf $\{0, 1\}^n$.
 $f_1(\xi, \vartheta) = \vartheta^\xi \cdot (1 - \vartheta)^{1-\xi}$, $\xi \in \{0, 1\}$

$$f(x, \vartheta) = \prod_{j=1}^n f_1(x_j, \vartheta) = \vartheta^{\sum_j x_j} (1 - \vartheta)^{n - \sum_j x_j}, \quad x \in A$$

$$\log f(x, \vartheta) = \sum_j x_j \log \vartheta + (n - \sum_j x_j) \log(1 - \vartheta)$$

$$\frac{d}{d\vartheta} \log f(x, \vartheta) = \frac{\sum_j x_j}{\vartheta} - \frac{n - \sum_j x_j}{1 - \vartheta} = \frac{\sum_j x_j - n\vartheta}{\vartheta(1 - \vartheta)}$$

$$\begin{aligned}
\Rightarrow I_n(\vartheta) &= E_\vartheta[(\frac{d}{d\vartheta} \log f(X, \vartheta))^2] \\
&= \frac{1}{\vartheta^2(1 - \vartheta)^2} E_\vartheta[(\underbrace{\sum_{j=1}^n X_j - n\vartheta}_{\sim \text{Bin}(n, \vartheta)})^2] \\
&\quad \underbrace{\hspace{10em}}_{=n\vartheta(1-\vartheta)} \\
&= \frac{1}{\vartheta(1 - \vartheta)}
\end{aligned}$$

[Erwartungswert von $\text{Bin}(n, \vartheta) = n\vartheta$, also ist in der vorletzten Zeile die Varianz von $\text{Bin}(n, \vartheta)$ gesucht.]

(1) „Raten“

Sei $T(x) := \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n x_j$.

$$E_{\vartheta} T = \vartheta$$

$\Rightarrow T$ erwartungstreu

5.14(d) \Rightarrow

$$\underbrace{\text{Var}_{\vartheta} T}_{= \frac{1}{n} \text{Var}_{\vartheta}(X_1) = \frac{1}{n} \vartheta(1-\vartheta)} \geq I_n^{-1}(\vartheta) = \frac{\vartheta(1-\vartheta)}{n}$$

$\Rightarrow T$ ist UMVUE

(2) Konstruktion nach 5.13 durchführen

$$T(X) \stackrel{5.14(b)}{=} \vartheta + \underbrace{\frac{\vartheta(1-\vartheta)}{n}}_{I_n(\vartheta)^{-1}} \cdot \underbrace{\frac{\sum_{j=1}^n X_j - n\vartheta}{\vartheta(1-\vartheta)}}_{\frac{d}{d\vartheta} \log f(X, \vartheta)} = \bar{X}_n$$

6 Exponentialfamilien

Es sei $(\mathfrak{X}, \mathcal{B})$ Messraum, $\mathcal{M}^1(\mathfrak{X}, \mathcal{B})$ Menge aller Wahrscheinlichkeitsmaße auf \mathcal{B} .

6.1 Definition

Eine Verteilungsklasse $\wp = \{P_\vartheta : \vartheta \in \Theta\} \subset \mathcal{M}^1(\mathfrak{X}, \mathcal{B})$ heißt **Exponentialfamilie** $:\Leftrightarrow$ es existiert ein σ -endliches dominierendes Maß μ auf \mathcal{B} , für ein $k \in \mathbb{N}$ existieren $q_1, \dots, q_k, c : \Theta \rightarrow \mathbb{R}$ und messbare Funktionen $T_1, \dots, T_k : \mathfrak{X} \rightarrow \mathbb{R}, h : \mathfrak{X} \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$ mit

$$f(x, \vartheta) := \frac{dP_\vartheta}{d\mu}(x) = c(\vartheta) \cdot e^{\sum_{j=1}^k q_j(\vartheta) T_j(x)} \cdot h(x) \quad \mu\text{-f.ü.}$$

6.2 Bemerkungen

a) Mit $q(\vartheta) := (q_1(\vartheta), \dots, q_k(\vartheta))^T$ und $T(x) := (T_1(x), \dots, T_k(x))^T$ ist

$$f(x, \vartheta) = c(\vartheta) e^{q(\vartheta)^T T(x)} h(x)$$

b) c ist Normierungskonstante:

$$c(\vartheta) = \left[\int e^{q(\vartheta)^T T(x)} h(x) \mu(dx) \right]^{-1} > 0$$

c) Der Träger $\{x : f(x, \vartheta) > 0\}$ hängt nicht von ϑ ab, insbesondere gilt

$$\forall N \in \mathcal{B} : \quad P_{\vartheta_1}(N) = 0 \Leftrightarrow P_{\vartheta_2}(N) = 0 \quad (\vartheta_1, \vartheta_2 \in \Theta)$$

(d.h. es gilt $P_{\vartheta_1} \ll P_{\vartheta_2}, P_{\vartheta_2} \ll P_{\vartheta_1}$).

d) Im Folgenden gelte immer:

- (i) Die Funktionen $1, q_1, \dots, q_k$ sind linear unabhängig
- (ii) Die Funktionen $1, T_1, \dots, T_k$ sind linear unabhängig auf dem Komplement jeder μ -Nullmenge

(sogenannte (strikt) **k-parametrische Exponentialfamilie**).

Dann ist k kleinstmöglich gewählt, und q sowie T sind bis auf nicht ausgeartete affine Transformationen $q \mapsto Aq + a, T \mapsto BT + b$ (μ -f.ü.) eindeutig bestimmt.

6.3 Beispiele

- a) $P_\vartheta := \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$, $\vartheta := (\mu, \sigma^2) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}_{>0} =: \Theta$.

Die Lebesguedichte ist

$$\begin{aligned} f(x, \vartheta) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp\left(-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right) \\ &= \underbrace{\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp\left(-\frac{\mu^2}{2\sigma^2}\right)}_{=:c(\vartheta)} \exp\left(\frac{\mu}{\sigma^2}x - \frac{1}{2\sigma^2}x^2\right) \cdot \underbrace{1}_{=:h(x)} \end{aligned}$$

Mit $q(\vartheta) := (\frac{\mu}{\sigma^2}, -\frac{1}{2\sigma^2})$, $T(x) := (x, x^2)$ folgt, dass hier eine (strikt) zweiparametrische Exponentialfamilie vorliegt.

- b) $P_\vartheta := \mathcal{N}(\vartheta, \vartheta^2)$, $\vartheta \in \mathbb{R}_{>0} =: \Theta$.

Die Lebesguedichte ist

$$\begin{aligned} f(x, \vartheta) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi\vartheta^2}} \exp\left(-\frac{(x-\vartheta)^2}{2\vartheta^2}\right) \\ &= \underbrace{\frac{1}{\sqrt{2\pi\vartheta^2}} e^{-1/2}}_{=:c(\vartheta)} \exp\left(\frac{1}{\vartheta}x - \frac{1}{2\vartheta^2}x^2\right) \cdot \underbrace{1}_{=:h(x)} \end{aligned}$$

Mit $q(\vartheta) := (\frac{1}{\vartheta}, -\frac{1}{2\vartheta^2})$, $T(x) := (x, x^2)$ folgt wieder, dass eine (strikt) zweiparametrische Exponentialfamilie vorliegt (obwohl der Parameter-raum Θ eindimensional ist!)

- c) $P_\vartheta := \text{Bin}(n, \vartheta)$, $\vartheta \in (0, 1) =: \Theta$.

Die Zähldichte ist

$$f(x, \vartheta) = \binom{n}{x} \vartheta^x (1-\vartheta)^{n-x} = (1-\vartheta)^n \exp\left(x \log \frac{\vartheta}{1-\vartheta}\right) \binom{n}{x}.$$

Mit $c(\vartheta) := (1-\vartheta)^n$, $q(\vartheta) := \log \frac{\vartheta}{1-\vartheta}$, $T(x) := x$ und $h(x) := \binom{n}{x}$ folgt, dass $\wp := \{\text{Bin}(n, \vartheta) : \vartheta \in \Theta\}$ eine einparametrische Exponentialfamilie ist.

- d) Die Menge aller Gleichverteilungen $\{U(0, \vartheta), \vartheta \in \mathbb{R}_{>0}\}$ ist nach 6.2(c) keine Exponentialfamilie.

6.4 Satz

Es seien $X_1, \dots, X_n \overset{uv}{\sim} P_\vartheta$, wobei P_ϑ Element einer k -parametrischen Exponentialfamilie $\{P_\vartheta : \vartheta \in \Theta\}$ ist. Dann gehört auch die Verteilung von $X := (X_1, \dots, X_n)$ zu einer k -parametrischen Exponentialfamilie mit

$$q(\vartheta) \quad \text{und} \quad T_{(n)}(x) := \sum_{j=1}^n T(x_j).$$

Beweis:

Sei $\mu^n := \mu \otimes \dots \otimes \mu$ das n -fache Produktmaß auf $\mathcal{B}^n := \mathcal{B} \otimes \dots \otimes \mathcal{B}$ und

$$P_\vartheta^n := P_\vartheta \otimes \dots \otimes P_\vartheta$$

die Verteilung von X unter P_ϑ . Wir erhalten mit $x := (x_1, \dots, x_n)$:

$$\begin{aligned} \frac{dP_\vartheta^n}{d\mu^n}(x) &= \prod_{j=1}^n \frac{dP_\vartheta}{d\mu}(x_j) \quad \mu\text{-f.ü.} \\ &= \prod_{j=1}^n [c(\vartheta) \exp(q^T(\vartheta)T(x_j)) h(x_j)] \quad \mu\text{-f.ü.} \\ &= c(\vartheta)^n \exp\left(q^T(\vartheta) \sum_{j=1}^n T(x_j)\right) \prod_{j=1}^n h(x_j) \quad \mu\text{-f.ü.} \end{aligned}$$

Bemerkung:

In der Situation von Satz 6.4 ist der ML-Schätzer $\hat{\vartheta}_n$ für ϑ eine Funktion von $\sum_{j=1}^n T(X_j)$.

In der Darstellung

$$f(x, \vartheta) = c(\vartheta) \exp(q^T(\vartheta)T(x))h(x)$$

hängt $c(\cdot)$ von ϑ nur über $q := q(\vartheta) \in Q := q(\Theta) \subset \mathbb{R}^k$ ab, das heißt es gilt

$$c(\vartheta) = C(q(\vartheta))$$

für ein geeignetes $C : Q \rightarrow \mathbb{R}$.

q heißt **natürlicher Parameter**. Somit lässt sich f ausdrücken als

$$f(x, q) = \frac{dP_q}{d\mu}(x) = C(q) e^{q^T \cdot T(x)} h(x)$$

Die Menge

$$Q_* := \{q \in \mathbb{R}^k : 0 < \int e^{q^T T(x)} h(x) \mu(dx) < \infty\}$$

heißt **natürlicher Parameterraum** der Exponentialfamilie. Es gilt

$$Q = q(\Theta) \subset Q_*.$$

6.5 Satz

Q_* ist konvex und enthält ein nicht-ausgeartetes k -dimensionales Intervall.

Beweis:

Für $q, r \in Q_*$ und $\lambda \in [0, 1]$ gilt

$$\begin{aligned} 0 &< \int e^{(\lambda q^T + (1-\lambda)r^T)T} h d\mu \\ &= \int \left(e^{q^T T}\right)^\lambda \left(e^{r^T T}\right)^{1-\lambda} h d\mu \\ &\leq \int \max\left(e^{q^T T}, e^{r^T T}\right) h d\mu \\ &= \int \left(e^{q^T T} + e^{r^T T}\right) h d\mu < \infty \end{aligned}$$

Die zweite Aussage folgt dann aus der linearen Unabhängigkeit von $1, q_1, \dots, q_k$.

Bemerkung:

Im Folgenden setzen wir $\vartheta := q$, betrachten also Exponentialfamilien

$$f(x, \vartheta) = \frac{dP_\vartheta}{d\mu}(x) = C(\vartheta) e^{\vartheta^T T(x)} h(x) \quad (1)$$

mit $\vartheta \in \Theta := \left\{ \vartheta \in \mathbb{R}^k : 0 < \int e^{\vartheta^T T(x)} h(x) \mu(dx) < \infty \right\}$.

Weiter sei

$$b(\vartheta) := -\log C(\vartheta).$$

6.6 Lemma

Es sei $\varphi : \mathfrak{X} \rightarrow \mathbb{R}$ eine messbare Abbildung mit

$$E_\vartheta |\varphi| = \int |\varphi(x)| f(x, \vartheta) \mu(dx) < \infty$$

Sei

$$A_\varphi(\vartheta) := \int \varphi(X) e^{\vartheta^T T(x)} h(x) \mu(dx), \quad \vartheta \in \Theta^0 \quad (2)$$

Dann ist $A_\varphi : \Theta^0 \rightarrow \mathbb{R}$ beliebig oft differenzierbar und die Differentiation in (2) kann unter dem Integralzeichen vorgenommen werden beziehungsweise Integration und Differentiation können vertauscht werden.

Beweis:

Witting, 1985, S. 151f.

6.7 Satz

- a) Die Funktion $b(\vartheta)$, $\vartheta \in \Theta^0$, ist beliebig oft differenzierbar.
- b) Besitzt X die Dichte $f(x, \vartheta)$ aus (1), so gilt:

$$E_\vartheta T(X) = \frac{d}{d\vartheta} b(\vartheta)$$

$$\text{Var}_\vartheta T(X) = \frac{d^2}{d\vartheta d\vartheta^T} b(\vartheta)$$

Beweis:

- a) $\varphi \equiv 1$ in 6.6 $\Rightarrow A_\varphi(\vartheta) = C(\vartheta)^{-1} = e^{b(\vartheta)}$
6.6 \Rightarrow Behauptung

- b)

$$\begin{aligned} E_\vartheta T(X) &= e^{-b(\vartheta)} \int T(x) e^{\vartheta^T T(x)} h(x) \mu(dx) \\ &= e^{-b(\vartheta)} \int \frac{d}{d\vartheta} e^{\vartheta^T T(x)} h(x) \mu(dx) \\ &\stackrel{6.6}{=} e^{-b(\vartheta)} \frac{d}{d\vartheta} \underbrace{\int e^{\vartheta^T T(x)} h(x) \mu(dx)}_{=e^{b(\vartheta)}} \\ &= \frac{d}{d\vartheta} b(\vartheta) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
E_{\vartheta}[T(X) \cdot T(X)^T] &= e^{-b(\vartheta)} \int T(x) e^{\vartheta^T T(x)} T(x)^T h(x) \mu(dx) \\
&= e^{-b(\vartheta)} \int \frac{d^2}{d\vartheta d\vartheta^T} e^{\vartheta^T T(x)} h(x) \mu(dx) \\
&= e^{-b(\vartheta)} \frac{d^2}{d\vartheta d\vartheta^T} e^{b(\vartheta)} \\
&= \frac{d^2}{d\vartheta d\vartheta^T} b(\vartheta) + \underbrace{\left(\frac{d}{d\vartheta} b(\vartheta) \right) \left(\frac{d}{d\vartheta} b(\vartheta) \right)^T}_{= E_{\vartheta} T(X) \cdot (E_{\vartheta} T(X))^T} \\
\Rightarrow \text{Var}_{\vartheta} T(X) &= \frac{d^2}{d\vartheta d\vartheta^T} b(\vartheta)
\end{aligned}$$

6.8 CR-Effizienz in Exponentialfamilien

Seien $X_1, \dots, X_n \stackrel{uiv}{\sim} f_1(\xi, \vartheta) = e^{-b(\vartheta)} e^{\vartheta^T T(\xi)} h(\xi)$ wie in (1).
 $\Rightarrow X = (X_1, \dots, X_n)$ besitzt die Dichte

$$f(x, \vartheta) = e^{-nb(\vartheta)} \cdot \exp(\vartheta^T \sum_{i=1}^n T(x_i)) \prod_{j=1}^n h(x_j)$$

Sei $S(X) = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n T(X_j)$.

$$\Rightarrow E_{\vartheta} S(X) = E_{\vartheta} T(X_1) \stackrel{6.7}{=} \frac{d}{d\vartheta} b(\vartheta), \quad \vartheta \in \Theta$$

\Rightarrow S erwartungstreu für $\frac{d}{d\vartheta} b(\vartheta)$.

Behauptung: $S(X)$ ist CR-effizient.

Beweis:

$$\text{Var}_{\vartheta} S(X) = \frac{1}{n} \text{Var}_{\vartheta} T(X_1) \stackrel{6.7}{=} \frac{1}{n} \frac{d^2}{d\vartheta d\vartheta^T} b(\vartheta)$$

CR-Ungleichung:

$$\text{Var}_{\vartheta} S(X) \geq C_n(\vartheta)^T I_n(\vartheta)^{-1} C_n(\vartheta)$$

wobei

$$\begin{aligned}
C_n(\vartheta) &= \frac{d}{d\vartheta} E_{\vartheta}[S(X)^T] = \frac{d}{d\vartheta} \left[\frac{d}{d\vartheta} b(\vartheta) \right]^T = \frac{d^2}{d\vartheta d\vartheta^T} b(\vartheta) \\
I_n(\vartheta) &= n \cdot I_1(\vartheta) = n \cdot E_{\vartheta} \left[\frac{d}{d\vartheta} \log f_1(X_1, \vartheta) \cdot \frac{d}{d\vartheta} \log f_1(X_1, \vartheta)^T \right] \\
\log f_1(X_1, \vartheta) &= -b(\vartheta) + \vartheta^T T(X_1) + \log h(X_1) \\
\frac{d}{d\vartheta} \log f_1(X_1, \vartheta) &= -\frac{d}{d\vartheta} b(\vartheta) + T(X_1) = T(X_1) - E_{\vartheta} T(X_1)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\Rightarrow I_n(\vartheta) &= n \cdot \text{Var}_{\vartheta} T(X_1) = n \cdot \frac{d^2}{d\vartheta d\vartheta^T} b(\vartheta) \\ \Rightarrow C_n(\vartheta)^T I_n(\vartheta)^{-1} C_n(\vartheta) &= \frac{1}{n} \frac{d^2}{d\vartheta d\vartheta^T} b(\vartheta)\end{aligned}$$

6.9 Beispiel

$$f_1(\xi, \vartheta) = \underbrace{\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp(-\frac{\mu^2}{2\sigma^2})}_{=C(\vartheta)} \exp(\frac{\mu}{\sigma^2} \cdot \xi - \frac{1}{2\sigma^2} \xi^2)$$

$$\vartheta = (\vartheta_1, \vartheta_2) := (\frac{\mu}{\sigma^2}, -\frac{1}{2\sigma^2})$$

$$b(\vartheta) = -\log C(\vartheta) = \frac{\mu^2}{2\sigma^2} + \frac{1}{2} \log(2\pi\sigma^2) = -\frac{1}{4} \frac{\vartheta_1^2}{\vartheta_2} + \frac{1}{2} \log(\frac{-\pi}{\vartheta_2})$$

$$\frac{d}{d\vartheta} b(\vartheta) = (-\frac{1}{2} \frac{\vartheta_1}{\vartheta_2}, \frac{1}{4} \frac{\vartheta_1^2}{\vartheta_2^2} - \frac{1}{2\vartheta_2})^T = (\mu, \sigma^2 + \mu^2)^T$$

Fazit:

$$S(X) = (\frac{1}{n} \sum_{j=1}^n X_j, \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n X_j^2)$$

ist erwartungstreu und CR-effizient für $(E_{\vartheta} X_1, E_{\vartheta} X_1^2)$.

Frage:

Ist $S_n^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X}_n)^2$ CR-effizient für σ^2 ?

7 Suffizienz und Vollständigkeit

7.1 Wiederholung

Bedingte Verteilungen

Sei (Ω, \mathcal{A}, P) Wahrscheinlichkeitsraum, $X : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^k$, $Y : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^s$ Zufallsvektoren.

Stochastik:

Es existiert Übergangswahrscheinlichkeit $P^{Y|X}$ mit

$$P^{(X,Y)} = P^X \otimes P^{Y|X} \quad (1)$$

$$P^{Y|X} : \begin{cases} \mathbb{R}^k \times \mathcal{B}^s \rightarrow \mathbb{R} \\ (x, B) \rightarrow P^{Y|X}(x, B) =: P^{Y|X=x}(B) \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \text{mit } \forall x \in \mathbb{R}^k : & \quad P^{Y|X=x}(\cdot) \text{ Wahrscheinlichkeitsmaß auf } \mathcal{B}^s \\ \forall B \in \mathcal{B}^s : & \quad P^{Y|X=\cdot}(B) \text{ } \mathcal{B}^k - \text{messbar} \end{aligned}$$

$P^{Y|X}$ heißt (eine) bedingte Verteilung von Y bei gegebenem X.

$P^{Y|X=x}$ heißt (eine) bedingte Verteilung von Y bei gegebenem $X = x$.

Schreibweise:

$$P(Y \in B | X = x) := P^{Y|X=x}(B)$$

Dann (1) äquivalent zu

$$P^{(X,Y)}(A \times B) = P(X \in A, Y \in B) = \int_A P(Y \in B | X = x) P^X(dx)$$

$$\forall A \in \mathcal{B}^k, B \in \mathcal{B}^s$$

Insbesondere:

$$P(Y \in B) = \int P(Y \in B | X = x) P^X(dx)$$

Falls (X, Y) Dichte $f(x, y)$ bezüglich $\lambda \times \nu$ besitzt, so definiert man bedingte Dichte von Y gegeben $X = x$ durch

$$f_{Y|X}(y|x) = \frac{f(x, y)}{f_X(x)}$$

$$f_X(x) := \int f(x, y) \nu(dy) > 0$$

Damit:

$$P(Y \in B | X = x) = \int_B f_{Y|X}(y|x) \nu(dy)$$

$$\left[\begin{array}{l} P(X \in A, Y \in B) \stackrel{!}{=} \int_A [\int_B f_{Y|X}(y|x) \nu(dy)] f_X(x) \lambda(dx) \\ = \int_A \int_B f(x, y) d(\lambda \times \nu)(x, y) \end{array} \right]$$

7.2 Definition

Sei $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ Wahrscheinlichkeitsraum, $(\mathbb{R}^n, \mathcal{B}^n, \wp)$ statistischer Raum.

$X : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$ Zufallsvektor, $T : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^s$ Statistik.

T heißt **suffizient** für $\wp : \Leftrightarrow P^{X|T(X)}$ hängt nicht von $P \in \wp$ ab.

„Die bedingte Verteilung von X gegeben T ist bekannt.“

Falls $\wp = \{P_\vartheta : \vartheta \in \Theta\}$, so T **suffizient für** $\vartheta : \Leftrightarrow P^{X|T(X)}$ hängt nicht von ϑ ab.

7.3 Bemerkungen

(i) Wegen

$$\begin{aligned} \underbrace{P(X \in A, X \in B)}_{= \int_A P(X \in B | X=x) P^X(dx)} &= \int \mathbf{1}_{A \cap B}(x) P^X(dx) \\ &= \int_A \mathbf{1}_B(x) P^X(dx) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &\text{gilt } P^{X|X=x}(B) = \mathbf{1}_B(x) \\ &\Rightarrow X \text{ suffizient für } \wp \end{aligned}$$

(ii) T suffizient für $\wp \Leftrightarrow \forall A \in \mathcal{B}^n : P(X \in A | T(X) = t)$ ist unabhängig von \wp für alle t (im Wertebereich von T)

(iii) Sei g bijektiv, g, g^{-1} messbar. Dann:

$$T \text{ suffizient} \Leftrightarrow g(T) \text{ suffizient}$$

7.4 Beispiel

$X = (X_1, \dots, X_n)$, $X_1, \dots, X_n \stackrel{iid}{\sim} \text{Bin}(1, \vartheta)$, $\vartheta \in (0, 1)$, $T(x) = \sum_{j=1}^n x_j$.
Sei $t \in \{0, 1, \dots, n\}$, $x \in \{0, 1\}^n$.

$$\begin{aligned} P_{\vartheta}(X = x | T = t) &= \frac{P_{\vartheta}(X = x, T = t)}{P_{\vartheta}(T(x) = t)} \\ &= \begin{cases} 0 & , \sum_{j=1}^n x_j \neq t \\ \frac{P_{\vartheta}(X=x)}{P_{\vartheta}(T(x)=t)} = \frac{\prod_{j=1}^n \vartheta^{x_j} (1-\vartheta)^{1-x_j}}{\binom{n}{t} \vartheta^t (1-\vartheta)^{n-t}} = \frac{1}{\binom{n}{t}} & , \sum_{j=1}^n x_j = t \end{cases} \end{aligned}$$

Also:

$$P_{\vartheta}^{X|T(X)=t} = U(\{(s_1, \dots, s_n) : s_j \in \{0, 1\} \ \forall j, \sum_{j=1}^n s_j = t\})$$

Insbesondere ist T suffizient für ϑ .¹⁹

7.3(ii) \Rightarrow

$$P_{\vartheta}(X \in A) = \int \underbrace{P(X \in A | T = t)}_{\text{unabhängig von } \vartheta} P_{\vartheta}^T(dt)$$

Hier:

$$\begin{aligned} P_{\vartheta}(X = x) &= \sum_{t=0}^n P(X = x | T = t) P_{\vartheta}(T = t) \\ &= \sum_{t=0}^n \frac{1}{\binom{n}{t}} \mathbf{1}\{\sum_{j=1}^n x_j = t\} \cdot \binom{n}{t} \vartheta^t (1-\vartheta)^{n-t} \\ &= \vartheta^{\sum x_j} (1-\vartheta)^{n-\sum x_j} \end{aligned}$$

„In Verteilung von T ist alle Information bezüglich ϑ enthalten.“

\Leftrightarrow Datenreduktion **ohne Informationsverlust**

7.5 Faktorisierungssatz

In der Situation von 7.2 existiere σ -endliches Maß μ auf \mathcal{B}^n mit $P \ll \mu$
 $\forall P \in \wp$. Dann sind äquivalent:

(i) $T(X)$ ist suffizient für \wp .

¹⁹ $P_{\vartheta}^{X|T(X)=t}$ Gleichverteilung (auf Menge)

- (ii) $\exists h : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$ messbar, $\forall P \in \wp$ existiert $g_P : \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$ messbar mit

$$\frac{dP}{d\mu}(x) = g_P(T(x)) \cdot h(x), \quad x \in \mathbb{R}$$

Ist speziell $\wp = \{P_\vartheta : \vartheta \in \Theta\}$, $f(x, \vartheta) := \frac{dP_\vartheta}{d\mu}(x)$, $g(T(x), \vartheta) = g_{P_\vartheta}(T(x))$, so gilt also:

$$T \text{ suffizient} \Leftrightarrow f(x, \vartheta) = g(T(x), \vartheta) \cdot h(x) \quad \forall x \in \mathbb{R}^n$$

Beweis:

z.B. Shao, Mathematische Statistik, S.104-106 oder Pruscha, S. 77-80

7.6 Beispiel (Ordnungsstatistik)

Sei $X = (X_1, \dots, X_n)$, X_1, \dots, X_n unabhängig identisch verteilt mit Verteilung $P \in \wp$, \wp die Familie aller Verteilungen auf \mathbb{R} mit Lebesgue-Dichte.

$$T(X_1, \dots, X_n) := (X_{(1)}, \dots, X_{(n)})$$

geordnete Stichprobe (Ordnungsstatistik).

$$\frac{dP^n}{d\lambda^n}(x) = \prod_{j=1}^n f(x_j) = \underbrace{\prod_{j=1}^n f(x_{(j)})}_{=g_P(T(x))} \cdot \underbrace{1}_{=h(x)}$$

$\xRightarrow{7.5} T$ suffizient für \wp .

Bemerkung:

Es gilt

$$P^{X|T(x)=(x_{(1)}, \dots, x_{(n)})} = U(\{(x_{\pi_1}, \dots, x_{\pi_n}) : (\pi_1, \dots, \pi_n) \in \mathcal{S}_n\})$$

7.7 Beispiel (Exponentialfamilien)

In der Situation von Satz 6.4 ist $T_{(n)}(X)$ suffizient für ϑ .
[Aufgabe 21(b)]

7.8 Satz von Rao-Blackwell

Sei $(\mathfrak{X}, \mathcal{B}, \{P_\vartheta : \vartheta \in \Theta \subset \mathbb{R}^s\})$ statistischer Raum, $g : \Theta \rightarrow \mathbb{R}$, $X : \Omega \rightarrow \mathfrak{X}$,
 $U_g = \{S \mid S : \mathfrak{X} \rightarrow \mathbb{R} \text{ messbar, } E_\vartheta S = g(\vartheta) \forall \vartheta \in \Theta, E_\vartheta S^2 < \infty \forall \vartheta \in \Theta\}$.

Annahme: $U_g \neq \emptyset$

Sei $T : \mathfrak{X} \rightarrow \mathbb{R}^k$ suffizient für ϑ , $S \in U_g$.

Sei $\tilde{S}(X) := E[S(X)|T(X)]$.²⁰

Dann gilt:

$$\tilde{S} \in U_g \text{ und } \text{Var}_\vartheta \tilde{S}(X) \leq \text{Var}_\vartheta S(X) \quad \forall \vartheta \in \Theta$$

(Verbesserung erwartungstreuer Schätzer durch suffiziente Statistiken)

Beweis:

$$E_\vartheta \tilde{S}(X) = E_\vartheta E[S(X)|T(X)] = E_\vartheta S(X) = g(\vartheta) \quad \forall \vartheta \in \Theta$$

$$\begin{aligned} \text{Var}_\vartheta S(X) &= E_\vartheta [(S(X) - \tilde{S}(X) + \tilde{S}(X) - \underbrace{E_\vartheta S(X)}_{=g(\vartheta)})^2] \\ &= \underbrace{E_\vartheta (S(X) - \tilde{S}(X))^2}_{\geq 0} + \text{Var}_\vartheta \tilde{S}(X) \\ &\quad + 2E_\vartheta [\underbrace{E_\vartheta [(S(X) - \tilde{S}(X))(\tilde{S}(X) - g(\vartheta))|T(X)]}_{=(\tilde{S}(X) - g(\vartheta)) \cdot \underbrace{E_\vartheta [S(X) - \tilde{S}(X)|T(X)]}_{=\tilde{S}(X) - \tilde{S}(X)=0}}] \\ &\geq \text{Var}_\vartheta \tilde{S}(X) \end{aligned}$$

[Beachte: $E_\vartheta \tilde{S}(X) = E_\vartheta S(X) = g(\vartheta)$; Regeln bedingter Erwartungswert²¹]

²⁰Nicht von ϑ abhängig, da T suffizient. (Sonst wäre \tilde{S} kein Schätzer!)

²¹insbesondere einmal ohne Auswirkung Erwartungswert in Erwartungswert eines bedingten Erwartungswertes umgeschrieben

7.9 Beispiel

$X_1, \dots, X_n \stackrel{uiv}{\sim} U(0, \vartheta), \vartheta \in \Theta = (0, \infty), X = (X_1, \dots, X_n)$

$$S(X) = \frac{2}{n} \sum_{j=1}^n X_j$$

$$\Rightarrow E_{\vartheta} S(X) = 2E_{\vartheta} X_1 = \vartheta$$

d.h. S erwartungstreu für ϑ .

$$\text{Var}_{\vartheta} S(X) = \frac{4}{n} \text{Var}_{\vartheta} X_1 = \frac{4}{n} \cdot \frac{\vartheta^2}{12} = \frac{\vartheta^2}{3n}$$

$$T(X) := \max_{1 \leq j \leq n} X_j$$

Wegen

$$f(x, \vartheta) = \prod_{j=1}^n \frac{1}{\vartheta} \mathbf{1}_{(0, \vartheta)}(x_j) = \underbrace{\frac{1}{\vartheta^n} \cdot \mathbf{1}_{(0, \vartheta)}(\max x_j)}_{=g(T(x), \vartheta)} \cdot \underbrace{1}_{=h(x)}$$

ist $T(X)$ suffizient für ϑ .

Wegen

$$P^{X_1 | \max X_j} = \frac{1}{n} \delta_{\max X_j} + \frac{n-1}{n} U(0, \max X_j)$$

folgt

$$\begin{aligned} \tilde{S}(X) &= E[S(X) | \max_j X_j] \\ &= \frac{2}{n} \sum_{i=1}^n E[X_i | \max_j X_j] \\ &= 2E[X_1 | \max_j X_j] \\ &= 2\left(\frac{1}{n} \cdot \max_j X_j + \frac{n-1}{n} \frac{\max_j X_j}{2}\right) \\ &= \frac{n+1}{n} \max_j X_j \end{aligned}$$

$$\text{Var}_{\vartheta} \tilde{S}(X) = \dots = \frac{\vartheta^2}{n(n+2)} < \text{Var}_{\vartheta} S(X) \quad \text{für } n \geq 2$$

$$\text{Var}_{\vartheta} \tilde{S}(X) = \dots = \frac{\vartheta^2}{n(n+2)} = \text{Var}_{\vartheta} S(X) \quad \text{für } n = 1$$

7.10 Definition

In der Situation von 7.2 heißt $T : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^k$ vollständig für $P \in \wp$ (bzw. $\vartheta \in \Theta$, falls $\wp = \{P_\vartheta : \vartheta \in \Theta\}$), falls gilt:

Für jede messbare Funktion $\Psi : \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}$ mit $E_P[\Psi(T)] = 0 \ \forall P \in \wp$ (bzw. $E_\vartheta[\Psi(T)] = 0 \ \forall \vartheta \in \Theta$) folgt $\Psi(T) = 0$ P-f.s. $\forall P \in \wp$ (bzw. P_ϑ -f.s. $\forall \vartheta \in \Theta$).

7.11 Beispiel (Fortsetzung von 7.9)

Behauptung:

$\overline{T(X)} := \max_j X_j$ vollständig

Beweis:

Sei $\Psi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ messbar.

$$E_\vartheta \Psi(T) = \int_0^\vartheta \Psi(t) \cdot \frac{n}{\vartheta} \left(\frac{t}{\vartheta}\right)^{n-1} dt = \frac{n}{\vartheta^n} \underbrace{\int_0^\vartheta \Psi(t) \cdot t^{n-1} dt}_{=: G(\vartheta)}$$

$$E_\vartheta \Psi(T) = 0 \ \forall \vartheta > 0 \Rightarrow G(\vartheta) = 0 \ \forall \vartheta > 0$$

$$\Rightarrow \Psi(\vartheta) \cdot \vartheta^{n-1} = 0 \quad \lambda^1|_{[0,\infty)}\text{-f.s.}$$

$$\Rightarrow \Psi(\vartheta) = 0 \quad \lambda^1|_{[0,\infty)}\text{-f.s.}$$

$$\Rightarrow P_\vartheta(\Psi(T) = 0) = 1$$

7.12 Beispiel

In einer strikt k-parametrischen Exponentialfamilie

$$f(x, \vartheta) = C(\vartheta) \cdot e^{\vartheta^T T(x)} h(x)$$

(mit natürlichem Parameterraum) ist die Statistik T vollständig.

(Beweis z.B. Shao, S.110 oder Pruscha, S.82)

Beispiel:

Sei $X_1, X_2 \overset{uiv}{\sim} \mathcal{N}(\vartheta, 1), \vartheta \in \mathbb{R}$.

$T(X_1, X_2) = X_1 + X_2$ ist vollständig nach 7.12.

$S(X_1, X_2) = X_1 - X_2$ dagegen nicht!

$$T \sim \mathcal{N}(2\vartheta, 2) = P_\vartheta^T$$

$$E_\vartheta \Psi(T) = \int_{\mathbb{R}} \Psi(t) \cdot \underbrace{\varphi_{2\vartheta, 2}(t)}_{\text{Dichte NV}} dt$$

$S \sim \mathcal{N}(0, 2) = P_\vartheta^S, \Psi(S) = S:$

$$E_\vartheta \Psi(S) = \vartheta - \vartheta = 0 \quad \forall \vartheta \in \Theta$$

$$\not\equiv \Psi(S) = X_1 - X_2 = 0 \quad P_\vartheta\text{-f.s.}$$

$\{P_\vartheta^T : \vartheta \in \mathbb{R}\} = \{\mathcal{N}(2\vartheta, 2) : \vartheta \in \mathbb{R}\}$ ist viel „reichhaltiger“ als
 $\{P_\vartheta^S : \vartheta \in \mathbb{R}\} = \{\mathcal{N}(0, 2)\}!$

7.13 Satz von Lehmann-Scheffé

In der Situation von 7.8 ($U_g \neq \emptyset$) sei die suffiziente Statistik T auch vollständig für ϑ . Dann existiert ein eindeutig bestimmter erwartungstreuer Schätzer für $g(\vartheta)$ der Gestalt

$$S^*(X) = h(T(X))$$

mit einer messbaren Funktion $h : \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}$.

Dieser Schätzer ist UMVUE für $g(\vartheta)$.

Beweis:

Sei $S \in U_g$ und $\tilde{S}(X) := E[S(X)|T(X)]$.

Faktorisierungssatz des bedingten Erwartungswerts \Rightarrow es existiert h messbar mit

$$\tilde{S}(X) = h(T(X))$$

Annahme: $\exists S_* \in U_g$ mit $S_*(X) = h_*(T(X))$ für ein h_*

$$\Rightarrow E_\vartheta[\underbrace{(h - h_*)}_{=: \Psi}(T)] = g(\vartheta) - g(\vartheta) = 0 \quad \forall \vartheta \in \Theta$$

$$\stackrel{(+)}{\Rightarrow} h = h_* \quad P_\vartheta\text{-f.s.} \quad \forall \vartheta \in \Theta$$

(+): Vollständigkeit von T ($\Psi = h - h_* = 0$)

$\tilde{S}(X)$ ist UMVUE für $g(\vartheta)$!

[Annahme: S_2 „besser“ als \tilde{S}

$$\Rightarrow \tilde{S}_2(X) = E[S_2(X)|T(X)]$$

„mindestens so gut“ wie S_2 (Rao-Blackwell); $\tilde{S}_2 = \tilde{S}$ wegen Eindeutigkeit]

7.14 Beispiel (Fortsetzung von 7.11)

$\frac{n+1}{n} \max_j X_j$ ist UMVUE für ϑ , falls $X_1, \dots, X_n \stackrel{uiv}{\sim} U(0, \vartheta)$, $\vartheta > 0$ unbekannt.

7.15 Beispiel (Anwendungen von Lehmann-Scheffé)

Sei T vollständig und suffizient für ϑ , $\vartheta \in \Theta$.

Finde h , so dass $E_{\vartheta}[h(T)] = g(\vartheta) \forall \vartheta \in \Theta$. (Lösen!, Raten!)

Falls $\text{Var}_{\vartheta}[h(T)] < \infty \Rightarrow h(T)$ UMVUE.

Sei $X_1, \dots, X_n \overset{uiv}{\sim} \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$, $\vartheta = (\mu, \sigma^2)$.

(i) Aufgabe 20:

$$\text{Var}_{\vartheta}((\bar{X}_n, S_n^2)^T) = \begin{bmatrix} \frac{\sigma^2}{n} & 0 \\ 0 & \frac{2\sigma^4}{n-1} \end{bmatrix}$$

$$\frac{2\sigma^4}{n-1} > \text{CR-Schranke } \frac{2\sigma^4}{n}$$

$\Rightarrow (\bar{X}_n, S_n^2)$ nicht CR-effizient für ϑ

Aber:

$$T(X) = \left(\sum_i X_i, \sum_i X_i^2 \right)$$

suffizient und vollständig für $\bar{\vartheta} = \left(\frac{\mu}{\sigma^2}, -\frac{1}{2\sigma^2} \right)$ (nach 7.12).

$\Rightarrow T(X) = \left(\sum_i X_i, \sum_i X_i^2 \right)$ suffizient und vollständig für $\vartheta = (\mu, \sigma^2)$.

Sei $h(T(X)) = (\bar{X}_n, S_n^2)$.

$$\left. \begin{array}{l} E_{\vartheta}[h(T(X))] = \vartheta \forall \vartheta \\ \text{Var}_{\vartheta}[h(T(X))] \text{ existiert } \forall \vartheta \end{array} \right\} \Rightarrow (\bar{X}_n, S_n^2) \text{ ist UMVUE für } \vartheta = (\mu, \sigma^2)$$

Bemerkung:

Auch (\bar{X}_n, S_n^2) suffizient und vollständig für ϑ nach Bemerkung 7.3(ii) und analoge Aussage für Vollständigkeit.

(ii) Analog:

Der Schätzer aus Aufgabe 9 der Form $\sqrt{c_n S_n^2}$ ist UMVUE für σ .

(iii) Gesucht: UMVUE für $\frac{\mu}{\sigma}$

$$(T_1(X), T_2(X)) := \left(\sum_i X_i, \sum_i (X_i - \bar{X}_n)^2 \right)$$

$T_1(X), T_2(X)$ unabhängig, $\frac{T_1(X)}{\sigma^2} \sim \chi_{n-1}^2 = \Gamma\left(\frac{n-1}{2}, \frac{1}{2}\right)$

$$\Rightarrow E_{\vartheta} T_2^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{\sigma} \cdot \frac{\Gamma\left(\frac{n}{2} - 1\right)}{\sqrt{2}\Gamma\left(\frac{n-1}{2}\right)} \quad (n \geq 3)$$

$$\text{Var}_{\vartheta} T_2^{-\frac{1}{2}} < \infty \text{ für } n \geq 4$$

$$\begin{aligned}
\Rightarrow E_{\vartheta}\left(\frac{T_1}{\sqrt{T_2}}\right) &= E_{\vartheta}T_1 \cdot E_{\vartheta}T_2^{-\frac{1}{2}} \\
&= \frac{\mu}{\sigma} \cdot \frac{n\Gamma(\frac{n}{2}-1)}{\sqrt{2}\Gamma(\frac{n-1}{2})} \\
&=: \frac{\mu}{\sigma}K_n
\end{aligned}$$

$(n \geq 3)$

$$\Rightarrow K_n^{-1} \cdot \frac{T_1}{\sqrt{T_2}}$$

ist UMVUE für $\frac{\mu}{\sigma}$ für $n \geq 4$.

8 Asymptotik von Schätzfehlern

8.1 Problemstellung

Seien $X_1, X_2, \dots, X_n \overset{uiv}{\sim} P_\vartheta$, mit $\vartheta \in \Theta \subset \mathbb{R}^k$.

Die Schätzfolge $\hat{\vartheta}_n = \hat{\vartheta}_n(X_1, \dots, X_n)$ sei konsistent, es gilt also

$$\hat{\vartheta}_n \xrightarrow{P_\vartheta} \vartheta \text{ für } n \rightarrow \infty \quad \forall \vartheta \in \Theta$$

Sei (a_n) eine reelle Folge mit $a_n > 0 \quad \forall n$ und $a_n \rightarrow \infty$ für $n \rightarrow \infty$.

Die Folge $(\hat{\vartheta}_n)_{n \geq 1}$ heißt a_n -**konsistent**, wenn

$$a_n(\hat{\vartheta}_n - \vartheta) = O_{P_\vartheta}(1) \quad \forall \vartheta \in \Theta.$$

Hierbei bedeutet $Y_n = O_P(1)$ für eine Folge (Y_n) , dass für jedes $\varepsilon > 0$ eine kompakte Menge $K \subset \mathbb{R}^d$ existiert, so dass $P(Y_n \in K) \geq 1 - \varepsilon$ für alle $n \in \mathbb{N}$.²²

Typischerweise liegt \sqrt{n} -Konsistenz vor, d.h. es gilt

$$\sqrt{n}(\hat{\vartheta}_n - \vartheta) = O_{P_\vartheta}(1) \quad \forall \vartheta \in \Theta.$$

Zusätzlich kann man oftmals Aussagen über Konvergenz in Verteilung machen, insbesondere

$$\sqrt{n}(\hat{\vartheta}_n - \vartheta) \xrightarrow{D_\vartheta} \mathcal{N}_k(0, \Sigma(\vartheta)), \quad \vartheta \in \Theta.$$

8.2 Multivariater Zentraler-Grenzwert-Satz (ZGWS)

Seien $Y_1, Y_2, \dots \overset{uiv}{\sim} Y$ mit einer \mathbb{R}^d -wertigen Zufallsvariablen Y mit $E\|Y\|^2 < \infty$. Mit $a := EY$ und $\Sigma := E(Y - a)(Y - a)^T$, gilt

$$\frac{1}{\sqrt{n}} \left(\sum_{j=1}^n Y_j - na \right) \xrightarrow{D} \mathcal{N}_d(0, \Sigma).$$

²²vergleiche Stochastik II: Straffheit

8.3 δ -Methode

Seien Z_1, Z_2, \dots d-dimensionale Zufallsvariablen mit

$$\sqrt{n}(Z_n - a) \xrightarrow{D} \mathcal{N}_d(0, \Sigma),$$

mit $a := (a_1, \dots, a_d) \in \mathbb{R}^d$ und $\Sigma \in \mathbb{R}^{d \times d}$.

Sei $g := (g_1, \dots, g_s)^T : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^s$ differenzierbar und

$$\frac{dg}{da} := \left(\frac{\partial g_j}{\partial a_k} \right)_{\substack{1 \leq j \leq s, \\ 1 \leq k \leq d}}$$

dann gilt

$$\sqrt{n}(g(Z_n) - g(a)) \xrightarrow{D} \mathcal{N}_s \left(0, \frac{dg}{da} \Sigma \left(\frac{dg}{da} \right)^T \right).$$

Beweis:

Nach der Definition der Differenzierbarkeit gilt

$$\sqrt{n}(g(Z_n) - g(a)) = \underbrace{\frac{dg}{da} \sqrt{n}(Z_n - a)}_{=: U_n} + \underbrace{\|\sqrt{n}(Z_n - a)\| \cdot r(Z_n - a)}_{=: V_n},$$

mit $r(Z_n - a) \rightarrow 0$ für $Z_n \rightarrow a$.

Beachte, dass $\|\sqrt{n}(Z_n - a)\| \in O_p(1)$.

Aus $Z_n \xrightarrow{P} a$ folgt, dass $r(Z_n - a) \xrightarrow{P} 0$, und somit

$$V_n \xrightarrow{P} 0.$$

Aus der Voraussetzung folgt mit dem Abbildungssatz weiter

$$U_n \xrightarrow{D} \frac{dg}{da} \cdot T$$

mit $T \sim \mathcal{N}_d(0, \Sigma)$ und somit

$$U_n \xrightarrow{D} \mathcal{N}_s \left(0, \frac{dg}{da} \Sigma \left(\frac{dg}{da} \right)^T \right).$$

Die Behauptung folgt schließlich aus dem Lemma von Slutsky.

8.4 Asymptotik des Momentenschätzers (vgl. 4.8)

$X_1, \dots, X_n \overset{uiv}{\sim} X$, X \mathbb{R}^1 -wertig, $P^X \in \{P_\vartheta : \vartheta \in \Theta\}$, $\Theta \subset \mathbb{R}^k$,

$\vartheta = (\vartheta_1, \dots, \vartheta_k)$

Sei $m_l := EX^l$, $\hat{m}_l = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i^l$ ($\hat{=} \bar{X}_n^l$ aus 4.8)

Voraussetzung:

$\vartheta = g(m_1, \dots, m_k)$ mit $g: \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}^k$

Momentenschätzer: $\hat{\vartheta} = g(\hat{\vartheta}_1, \dots, \hat{\vartheta}_k)$

Sei

$$Y_j := \begin{pmatrix} X_j \\ \vdots \\ X_j^k \end{pmatrix} \quad Y := \begin{pmatrix} X \\ \vdots \\ X^k \end{pmatrix}, \quad a := EY = \begin{pmatrix} m_1 \\ \vdots \\ m_k \end{pmatrix}$$

$$E \|Y\|^2 < \infty \Leftrightarrow EX^{2k} < \infty$$

$$\begin{aligned} \Sigma &:= E[(Y - a)(Y - a)^T] = (E[(X^i - m_i)(X^j - m_j)^T])_{i,j=(1,\dots,k)} \\ &= (EX^{i+j} - m_i m_j)_{i,j} \\ &= (m_{i+j} - m_i m_j)_{i,j} \end{aligned}$$

8.2 \Rightarrow

$$\begin{aligned} \frac{1}{\sqrt{n}} \left(\sum_{j=1}^n Y_j - na \right) &= \frac{1}{\sqrt{n}} \left(\begin{pmatrix} \sum_j X_j \\ \vdots \\ \sum_j X_j^k \end{pmatrix} - n \cdot \begin{pmatrix} m_1 \\ \vdots \\ m_k \end{pmatrix} \right) \\ &= \sqrt{n} \cdot \begin{pmatrix} \hat{m}_1 - m_1 \\ \vdots \\ \hat{m}_k - m_k \end{pmatrix} \xrightarrow{D_\vartheta} \mathcal{N}(0, \Sigma(\vartheta)) \end{aligned}$$

Aus 8.3 folgt: Falls $EX^{2k} < \infty$ und g differenzierbar, so gilt:

$$\sqrt{n}(\hat{\vartheta}_n - \vartheta) \xrightarrow{D_\vartheta} \mathcal{N}_k(0, \frac{dg}{da} \Sigma(\vartheta) (\frac{dg}{da})^T)$$

Achtung: Σ hängt von m_1, \dots, m_{2k} und somit von unbekanntem ϑ ab.

(Schreibweise „asymptotisch normalverteilt“:)

$$\sqrt{n}(\hat{\vartheta}_n - \vartheta) \approx \mathcal{N}_k(0, T) \Leftrightarrow \hat{\vartheta}_n \approx \mathcal{N}_k(\vartheta, \frac{T}{n}), \quad \hat{\vartheta}_n \sim AN(\vartheta, \frac{\hat{T}}{n}), \quad \hat{T} = T(\hat{\vartheta}_n)$$

8.5 Asymptotik des ML-Schätzers

$X_1, \dots, X_n \overset{uiv}{\sim} f_1(\xi, \vartheta)$ (Dichte bezüglich dominierendem Maß μ)

$\vartheta \in \Theta \subset \mathbb{R}^k$, Θ offen

Regularitätsvoraussetzungen: (a)-(e) aus 5.7- 5.9 seien erfüllt.

Zusätzlich gelte:

$\{\xi : f_1(\xi, \vartheta) > 0\}$ ist unabhängig von ϑ !

$\forall i, j, l \in \{1, \dots, k\}$ existiert $\frac{\partial^3 \log f_1(\xi, \vartheta)}{\partial \vartheta_i \partial \vartheta_j \partial \vartheta_l} = L_{ijl}(\xi, \vartheta)$

$\forall \vartheta \in \Theta \forall \delta > 0 \forall i, j, l \in \{1, \dots, k\}$ existiert eine Funktion $M_{i,j,l}(\xi) \geq 0$ mit

$$|L_{i,j,l}(\xi, \eta)| \leq M_{i,j,l}(\xi), \quad \|\eta - \vartheta\| \leq \delta$$

und $E_{\vartheta} M_{i,j,l}(X_1) < \infty$

Sei

$$\mathcal{U}_n(\vartheta) := \sum_{j=1}^n \frac{d}{d\vartheta} \log f_1(X_j, \vartheta), \quad E_{\vartheta} \mathcal{U}_n(\vartheta) = 0$$

$$I_n(\vartheta) = E[\mathcal{U}_n(\vartheta) \mathcal{U}_n(\vartheta)^T] = nI_1(\vartheta)$$

$$W_n(\vartheta) = \frac{d}{d\vartheta^T} \mathcal{U}_n(\vartheta), \quad E_{\vartheta}[W_n(\vartheta)] = -I_n(\vartheta)$$

8.5.1 Satz

Es gelte $\mathcal{U}_n(\hat{\vartheta}_n) = 0$ (d.h. $\hat{\vartheta}_n$ ist Lösung der Likelihood-Gleichung $\mathcal{U}_n(\vartheta) = 0$) und $\hat{\vartheta}_n \xrightarrow{P_{\vartheta}} \vartheta$, $\vartheta \in \Theta$ (d.h. $(\hat{\vartheta}_n)_n$ ist konsistent). Dann folgt:

$$\sqrt{n}(\hat{\vartheta}_n - \vartheta) \xrightarrow{D_{\vartheta}} \mathcal{N}_k(0, I_1(\vartheta)^{-1})$$

$$\Leftrightarrow \hat{\vartheta}_n \sim AN\left(\vartheta, \frac{I_n^{-1}}{n}\right)$$

Beweisskizze:

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{1}{\sqrt{n}} \mathcal{U}_n(\hat{\vartheta}_n) \\ &\stackrel{\text{Taylor}}{=} \frac{1}{\sqrt{n}} \mathcal{U}_n(\vartheta) + \frac{1}{\sqrt{n}} W_n(\vartheta)(\hat{\vartheta}_n - \vartheta) + \underbrace{\frac{1}{\sqrt{n}} R_n(\vartheta, \hat{\vartheta}_n - \vartheta)}_{z.z.: = o_{P_{\vartheta}}(1)} \\ \Rightarrow \underbrace{\frac{1}{n} W_n(\vartheta)}_{\xrightarrow{P_{\vartheta}^{-f.s.}} -I_1(\vartheta)(SGGZ)} \sqrt{n}(\hat{\vartheta}_n - \vartheta) &= \underbrace{-\frac{1}{\sqrt{n}} \mathcal{U}_n(\vartheta)}_{\xrightarrow{D_{\vartheta}} \mathcal{N}_k(0, I_1(\vartheta)) \text{ (ZGWS 8.2)}} + o_{P_{\vartheta}}(1) \quad (*) \\ &\quad \underbrace{\xrightarrow{D_{\vartheta}} \mathcal{N}_k(0, I_1(\vartheta))} \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \sqrt{n}(\hat{\vartheta}_n - \vartheta) \xrightarrow{D_{\vartheta}} \mathcal{N}_k(0, -I_1(\vartheta)^{-1} I_1(\vartheta) (-I_1(\vartheta)^{-1}))$$

(z.B. Knight, 249 oder Lehmann/Casella, 443-468)²³

Bemerkung: (asymptotische Linearisierbarkeit des Schätzfehlers)

$$\begin{aligned} (*) \Rightarrow \sqrt{n}(\hat{\vartheta}_n - \vartheta) &= I_1(\vartheta)^{-1} \frac{1}{\sqrt{n}} \mathcal{U}_n(\vartheta) + o_{P_{\vartheta}}(1) \\ &= \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{j=1}^n \underbrace{I_1(\vartheta)^{-1} \frac{d}{d\vartheta} \log f_1(X_j, \vartheta)}_{=: \tilde{l}(X_j, \vartheta)} + o_{P_{\vartheta}}(1) \end{aligned}$$

mit $E_{\vartheta} \tilde{l}(X_1, \vartheta) = 0$

8.5.2 Satz

Unter den obigen Voraussetzungen existiert eine Folge $\hat{\vartheta}_n = \hat{\vartheta}_n(X_1, \dots, X_n)$ mit:

Ist ϑ_0 der wahre Parameter, so gilt:

$$\lim P_{\vartheta_0}(\mathcal{U}_n(\hat{\vartheta}_n) = 0, \left| \hat{\vartheta}_n - \vartheta_0 \right| \leq \varepsilon) = 1 \quad \forall \varepsilon > 0$$

Korollar

Besitzt die Likelihood-Gleichung $\mathcal{U}_n(\vartheta) = 0$ für jedes n eine eindeutige Lösung $\hat{\vartheta}_n$, so gilt:

$$\hat{\vartheta}_n \xrightarrow{P_{\vartheta}} \vartheta, \quad \vartheta \in \Theta$$

Anmerkung:

(1) $\{P_{\vartheta} : \vartheta \in \Theta\}$ mit Dichte $f(x, \vartheta)$ bzgl. dem Maß μ . Dann $\forall \vartheta \neq \vartheta_0$:

$$\begin{aligned} E_{\vartheta_0} \left[\log \frac{f(X, \vartheta)}{f(X, \vartheta_0)} \right] &\stackrel{\text{Jensensche Ungl.}}{<} \underbrace{\log E_{\vartheta_0} \left[\frac{f(X, \vartheta)}{f(X, \vartheta_0)} \right]}_{\int f(x, \vartheta) dx = 1} \\ &= 0 \end{aligned}$$

$$\Leftrightarrow E_{\vartheta_0}[\log f(X, \vartheta_0)] > E_{\vartheta_0}[\log f(X, \vartheta)] \quad \forall \vartheta \neq \vartheta_0$$

$$\text{d.h. } \boxed{\vartheta_0 \text{ maximiert } E_{\vartheta_0}[\log f(X, \vartheta)] \text{ bezüglich } \vartheta!}$$

²³ $o_{P_{\vartheta}}(1)$ bedeutet stochastische Konvergenz gegen 0

- (2) Funktional in (*) ist nicht auswertbar, da ϑ_0 unbekannt!

Aber:

$$\frac{1}{n} \underbrace{\sum_{i=1}^n \log f(X_i, \vartheta)}_{l(X, \vartheta), \text{ „Log-Likelihood Funktion“}} \xrightarrow{P_{\vartheta} \text{ f.s.}} E_{\vartheta_0}[\log f(X, \vartheta)] \forall \vartheta \in \Theta$$

Maximierung von $l(X, \vartheta)$ als „Ersatz“ für (*).

- (3) f, g μ -Dichten:

$$E_f \left[\log \frac{f(X)}{g(X)} \right] \geq 0$$

$$“=” \Leftrightarrow f = g$$

„Entropie“ zwischen f und g, Kullbach-Leibler-Information von g bezüglich f, Kullbach-Leibler-Abstand zwischen f und g

- (4) Was tun, falls Lösung von $\mathcal{U}_n(\vartheta) = 0$ nicht eindeutig?

- (i) Oft ist die Folge von globalen Maxima konsistent.
(Theorie von Wald 1949, Le Cam 1953)
- (ii) Sei (δ_n) konsistent. Wähle Folge ϑ_n^* , die am nächsten zu δ_n liegt $\Rightarrow (\vartheta_n^*)$ konsistent, 8.5.1 anwendbar.
- (iii) 1-Schritt-MLE verwenden:
 $(\vartheta_n^{(0)})$ sei \sqrt{n} -konsistent. Mache einen Newton-Schritt zur Lösung von $\mathcal{U}_n(\vartheta) = 0$:

$$\vartheta_n^{(1)} = \vartheta_n^{(0)} - \frac{\mathcal{U}'_n(\vartheta_n^{(0)})}{\mathcal{U}''_n(\vartheta_n^{(0)})}$$

Dann hat $(\vartheta_n^{(1)})_{n \geq 1}$ dasselbe asymptotische Verhalten wie in 8.5.1.

9 Robuste Schätzer

Seien $X_1, \dots, X_n, X_{n+1} \overset{uiv}{\sim} F$, $F \in \mathfrak{F}$: Verteilungsannahme, x_1, \dots, x_n, x Realisierungen von X_1, \dots, X_n, X_{n+1} , X_i reellwertig.

Sei $\vartheta : \mathfrak{F} \rightarrow \mathbb{R}$, $\hat{\vartheta}_n = \vartheta(\hat{F}_n)$ Plug-In-Schätzer für $\vartheta(F)$.

$(\hat{F}_n(t) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \mathbf{1}\{X_i \leq t\})$

9.1 Definition (Sensitivitätskurve)

$$S(x, \hat{\vartheta}) = \frac{\hat{\vartheta}_{n+1} - \hat{\vartheta}_n}{\frac{1}{n+1}}$$

Dabei: $\hat{\vartheta}_{n+1} = \vartheta(\hat{F}_{n+1})$ basierend auf X_1, \dots, X_n und einer zusätzlichen Beobachtung x .

$S(x, \hat{\vartheta})$ ist die Änderung von $\hat{\vartheta}$ bei einer zusätzlichen Beobachtung x relativ gesehen zur Masse $\frac{1}{n+1}$ von x .

Beispiele:

a) $\vartheta(F) = \int x dF(x)$, $\vartheta(\hat{F}_n) = \bar{x}_n$

$$S(x, \hat{\vartheta}) = \frac{\bar{x}_{n+1} - \bar{x}_n}{\frac{1}{n+1}} = \sum_{i=1}^n x_i + x - \frac{n+1}{n} \sum_{i=1}^n x_i = x - \bar{x}_n$$

linear in $x \Rightarrow$ unbeschränkt in x

Große Änderung von S , falls $|x|$ groß!

b) Sei $\mathfrak{F} = \{F : F \text{ streng monoton wachsend auf } \{x : 0 < F(x) < 1\}\}$,
 $\vartheta(F) = F^{-1}(\frac{1}{2})$.

Sei $n = 2r - 1$ ungerade.

$$\Rightarrow \vartheta(\hat{F}_n) = x_{(r)} =: x_{r:n}$$

(„das r kleinste unter n “)

$n+1 = 2r$:

$$\hat{F}_{n+1}^{-1}(\frac{1}{2}) = x_{r:n+1}$$

$$\hat{\vartheta}_{n+1} = \vartheta(\hat{F}_{n+1}) \in [x_{(r-1)}, x_{(r)}]$$

$\Rightarrow S$ beschränkt in x !

Nachteil der Sensitivitätskurve:

Hängt von Stichprobe ab.

Wünschenswert wäre Abhängigkeit nur von x und F .

9.2 Definition

a) Sei Δ_x die zum Dirac-Maß in x gehörende Verteilungsfunktion, also

$$\Delta_x(y) = \begin{cases} 0, & y < x \\ 1, & y \geq x \end{cases}$$

Die Einflusskurve (*influence curve*) von $\vartheta(F)$ ist

$$\begin{aligned} \varphi(x, F) &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\vartheta((1-t)F + t\Delta_x) - \vartheta(F)}{t} \\ &= \frac{d}{dt} \vartheta((1-t)F + t\Delta_x)|_{t=0} \end{aligned}$$

wobei die Existenz der Ableitung vorausgesetzt wird.

b) $\hat{\vartheta} = \vartheta(\hat{F}_n)$ heißt **robust**, falls $\varphi(x, F)$ beschränkt ist in x .

Bemerkung:

Gegeben:

Stichprobe x_1, \dots, x_n : Schätze $\vartheta(F)$ durch $\hat{\vartheta}_n = \vartheta(\hat{F}_n)$.

Weiterer Wert x : Schätze $\vartheta(F)$ durch $\hat{\vartheta}_{n+1} = \vartheta(\hat{F}_{n+1})$, wobei

$$\hat{F}_{n+1}(y) = \frac{n}{n+1} \hat{F}_n(y) + \frac{1}{n+1} \Delta_x(y)$$

Sei nun $t = \frac{1}{n+1}$, also $1-t = \frac{n}{n+1}$. Damit gilt:

$$\begin{aligned} \hat{\vartheta}_{n+1} = \vartheta(\hat{F}_{n+1}) &= \vartheta((1-t)\hat{F}_n + t\Delta_x) \\ &= \frac{\vartheta((1-t)\hat{F}_n + t\Delta_x) - \vartheta(\hat{F}_n)}{t} t + \underbrace{\vartheta(\hat{F}_n)}_{=\hat{\vartheta}_n} \\ &\approx \hat{\vartheta}_n + \frac{1}{n+1} \varphi(x, \hat{F}_n) \end{aligned}$$

(Diese Approximation setzt voraus, dass $\varphi(x, \hat{F}_n)$ existiert.)

In diesem Fall gilt:

$$\varphi(x, \hat{F}_n) \approx \frac{\hat{\vartheta}_{n+1} - \hat{\vartheta}_n}{\frac{1}{n+1}} = S(x, \hat{\vartheta})$$

9.3 Beispiel

Sei $\vartheta(F) = \int y dF(y)$.

$$\begin{aligned} \Rightarrow \varphi(x, F) &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{t} [(1-t) \int y dF(y) + t \cdot \int y d\Delta_x(y) - \int y dF(y)] \\ &= - \int y dF(y) + x \\ &= x - \vartheta(F) \end{aligned}$$

Hier gilt sogar²⁴: $\varphi(x, \hat{F}_n) = x - \bar{x}_n = S(x, \hat{\vartheta})$.

9.4 Satz (Eigenschaften von $\varphi(x, F)$)

Sei $\varphi(x, F)$ Einflusskurve von $\vartheta(F)$.

- a) Sei $\vartheta(F) = \int h dF = Eh(X)$, wobei $X \sim F$ und $E|h(X)| < \infty$.
Dann gilt: $\varphi(x, F) = h(x) - \vartheta(F)$
- b) Sei $\vartheta(F) = \vartheta_1(F) + \vartheta_2(F)$ mit Einflusskurven $\varphi_1(x, F), \varphi_2(x, F)$.
Dann: $\varphi(x, F) = \varphi_1(x, F) + \varphi_2(x, F)$
- c) Sei $I \subset \mathbb{R}$, $\vartheta(F) = \int_I g(s) \varphi_s(x, F) ds$.
Ist $\varphi_s(x, F)$ die Einflusskurve von $\vartheta_s(F)$ ($s \in I$), so gilt (unter Regularität²⁵):

$$\varphi(x, F) = \int_I g(s) \varphi_s(x, F) ds$$

- d) (Kettenregel)
Ist g differenzierbar, so ist die Einflusskurve von $g(\vartheta(F))$ gegeben durch

$$g'(\vartheta(F)) \cdot \varphi(x, F)$$

- e) (implizit definierter Parameter)
 $\vartheta(F)$ sei Lösung der Gleichung $h(F, \vartheta(F)) = 0$, wobei für festes u $\lambda(x, F, u)$ die Einflusskurve von $h(F, u)$ sei und die Ableitung $h'(F, u)$ nach u existiere. Dann gilt:

$$\varphi(x, F) = - \frac{\lambda(x, F, \vartheta(F))}{h'(F, \vartheta(F))}$$

²⁴vergleiche 9.1, Beispiel (a)

²⁵siehe Beweis

Beweis:

Sei $F_{t,x} = (1-t)F + t\Delta_x$.

a) Aus

$$\vartheta(F_{t,x}) = (1-t) \int h(y) dF(y) + t \cdot h(x)$$

(vergleiche 9.3) folgt:

$$\frac{1}{t}(\vartheta(F_{t,x}) - \vartheta(F)) = h(x) - \vartheta(F)$$

b) Klar.

c)

$$\begin{aligned} \varphi(x, F) &= \frac{d}{dt} \vartheta(F_{t,x})|_{t=0} \\ &= \frac{d}{dt} \int_I g(s) \vartheta_s(F_{t,x}) ds|_{t=0} \\ &\stackrel{(*)}{=} \int_I g(s) \frac{d}{dt} \vartheta_s(F_{t,x})|_{t=0} ds \\ &= \int_I g(s) \varphi_s(x, F) ds \end{aligned}$$

(*): Vertauschbarkeit vorausgesetzt! (Regularität)

d)

$$\begin{aligned} \frac{1}{t}(g(\vartheta(F_{t,x})) - g(\vartheta(F))) &= \underbrace{\frac{g(\vartheta(F_{t,x})) - g(\vartheta(F))}{\vartheta(F_{t,x}) - \vartheta(F)}}_{\xrightarrow{t \rightarrow 0} g'(\vartheta(F)), \text{ da } \vartheta(F_{t,x}) \xrightarrow{t \rightarrow 0} \vartheta(F)} \cdot \underbrace{\frac{\vartheta(F_{t,x}) - \vartheta(F)}{t}}_{\xrightarrow{t \rightarrow 0} \varphi(x, F)} \\ &\xrightarrow{t \rightarrow 0} g'(\vartheta(F)) \varphi(x, F) \end{aligned}$$

e)

$$\begin{aligned}
0 &= \frac{1}{t} \underbrace{[h(F_{t,x}, \vartheta(F_{t,x})) - h(F, \vartheta(F))]}_{=0} \\
&= \frac{1}{t} [h(F_{t,x}, \vartheta(F_{t,x})) - h(F_{t,x}, \vartheta(F))] \\
&\quad + \frac{1}{t} \underbrace{[h(F_{t,x}, \vartheta(F)) - h(F, \vartheta(F))]}_{\xrightarrow{t \rightarrow 0} \lambda(x, F, \vartheta(F))} \\
&= \underbrace{\frac{h(F_{t,x}, \vartheta(F_{t,x})) - h(F_{t,x}, \vartheta(F))}{h(F, \vartheta(F_{t,x})) - h(F, \vartheta(F))}}_{\xrightarrow{t \rightarrow 0} 1 \text{ (Forderung)}} \cdot \underbrace{\frac{h(F, \vartheta(F_{t,x})) - h(F, \vartheta(F))}{\vartheta(F_{t,x}) - \vartheta(F)}}_{\xrightarrow{t \rightarrow 0} h'(F, \vartheta(F))} \\
&\quad \cdot \underbrace{\frac{\vartheta(F_{t,x}) - \vartheta(F)}{t}}_{\xrightarrow{t \rightarrow 0} \varphi(x, F)} + \frac{1}{t} [h(F_{t,x}, \vartheta(F)) - h(F, \vartheta(F))] \\
&\xrightarrow{t \rightarrow 0} h'(F, \vartheta(F)) \cdot \varphi(x, F) + \lambda(x, F, \vartheta(F))
\end{aligned}$$

Also:

$$h'(F, \vartheta(F)) \cdot \varphi(x, F) + \lambda(x, F, \vartheta(F)) = 0$$

$$\xrightarrow{h' \neq 0 \text{ (Forderung)}} \text{Behauptung.}$$

9.5 Bemerkung (Einflusskurven-Heuristik)

Sei $\varphi(x, F)$ Einflusskurve von $\vartheta(F)$, $X \sim F$

Oft gilt:

- (i) $E[\varphi(X, F)] = \int \varphi(x, F) dF(x) = 0$
- (ii) $\vartheta(\hat{F}_n) - \vartheta(F) = \int \varphi(x, F) d(\hat{F}_n(x) - F(x)) + R_n$, wobei $\sqrt{n}R_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$
[wird oft als erfüllt angenommen]
- (iii) $0 < \tau^2(F) = E[\varphi^2(X, F)] < \infty$

Dann gilt:

$$\sqrt{n}(\hat{\vartheta}_n - \vartheta) = \sqrt{n}(\vartheta(\hat{F}_n) - \vartheta(F)) \xrightarrow{D} \mathcal{N}(0, \tau^2(F))$$

Beweis:

Mit (i) und (ii) gilt:

$$\begin{aligned}\vartheta(\hat{F}_n) - \vartheta(F) &= \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \varphi(X_i, F) + R_n \\ \Rightarrow \sqrt{n}(\hat{\vartheta}_n - \vartheta) &= \underbrace{\frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{i=1}^n \varphi(X_i, F)}_{\xrightarrow{D} \mathcal{N}(0, \tau^2(F))} + \underbrace{\sqrt{n}R_n}_{\xrightarrow{P} 0}\end{aligned}$$

Lemma von Slutsky \Rightarrow Behauptung

9.6 Beispiel (Median)

Sei F stetig mit Dichte $f = F'$. $f(x) > 0$ für $\{x : 0 < F(x) < 1\}$, $X \sim F$
Median

$$\vartheta(F) = F^{-1}\left(\frac{1}{2}\right)$$

bzw. $F(\vartheta(F)) - \frac{1}{2} = 0 \Leftrightarrow h(F, \vartheta(F)) = 0$ mit

$$\begin{aligned}h(F, u) &= F(u) - \frac{1}{2} \\ &= \underbrace{\int (\mathbf{1}\{x \leq u\} - \frac{1}{2}) dF(x)}_{=: \tilde{h}_u(x)} \\ &= \int \tilde{h}_u(x) dF(x)\end{aligned}$$

$$\stackrel{9.4(a)}{\Rightarrow} \lambda(x, F, u) = \tilde{h}_u(x) - h(F, u) = \mathbf{1}\{x \leq u\} - F(u)$$

$$\begin{aligned}\stackrel{9.4(c)}{\Rightarrow} \varphi(x, F) &= -\frac{\lambda(x, F, \vartheta(F))}{h'(F, \vartheta(F))} \\ &= -\frac{\mathbf{1}\{x \leq \vartheta(F)\} - F(\vartheta(F))}{f(\vartheta(F))} \\ &= \frac{\frac{1}{2} - \mathbf{1}\{x \leq \vartheta(F)\}}{f(\vartheta(F))} \\ &= \begin{cases} -\frac{1}{2f(\vartheta(F))}, & x \leq \vartheta(F) \\ +\frac{1}{2f(\vartheta(F))}, & x > \vartheta(F) \end{cases}\end{aligned}$$

Bemerkungen:

- (i) $\hat{\vartheta}$ ist robust
- (ii) \hat{F}_n ist Treppenfunktion $\Rightarrow \varphi(x, \hat{F}_n)$ existiert nicht
 \Rightarrow Bemerkung nach 9.2 ist hier nicht zutreffend
- (iii)

$$E[\varphi(X, F)] = \frac{\frac{1}{2} - P(X \leq \vartheta(F))}{f(\vartheta(F))} = 0$$

$$\tau^2(F) = E[\varphi^2(X, F)] = \frac{1}{4f^2(\vartheta(F))}$$

$$\stackrel{9.5}{\Rightarrow} \sqrt{n}(\hat{\vartheta}_n - \vartheta) \xrightarrow{D} \mathcal{N}(0, \frac{1}{4f^2(\vartheta(F))})$$

Konkret:

$$X_1, \dots, X_n \stackrel{wiv}{\sim} \mathcal{N}(\mu, \sigma^2), \quad \vartheta(F) = \mu$$

$$\Rightarrow \sqrt{n}(\hat{\vartheta}_n - \mu) \xrightarrow{D} \mathcal{N}(0, \frac{\pi\sigma^2}{2})$$

$$f(\mu) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \cdot 1$$

$$\hat{\vartheta}_n \sim AN(\mu, \underbrace{\frac{\pi\sigma^2}{2n}}_{\tau_1^2})$$

$$\bar{X} \sim \mathcal{N}(0, \underbrace{\frac{\sigma^2}{n}}_{\tau_2^2})$$

(\bar{X} UMVUE)

$$\frac{\tau_1^2}{\tau_2^2} = \frac{\pi}{2} \approx 1,57$$

Einflusskurve des Medians $\vartheta(F) = F^{-1}(\frac{1}{2})$ ist also

$$\varphi_{\frac{1}{2}}(x, F) = \frac{\frac{1}{2} - \mathbf{1}\{x \leq \vartheta(F)\}}{f(\vartheta(F))}$$

Ganz analog: Einflusskurve von $F^{-1}(p)$ ist

$$(*) \quad \varphi_p(x, F) = \frac{p - \mathbf{1}\{x \leq F^{-1}(p)\}}{f(F^{-1}(p))}, \quad 0 < p < 1$$

9.7 Beispiel (α -getrimmtes Mittel)

Sei F stetig, $F' = f$, $f(x) > 0$ für $\{x : 0 < F(x) < 1\}$.

f symmetrisch mit Zentrum $\mu = EX$.

Für $0 < \alpha < \frac{1}{2}$ heißt

$$\mu_\alpha(F) = \frac{1}{1-2\alpha} \int_{F^{-1}(\alpha)}^{F^{-1}(1-\alpha)} x \, dF(x) = \frac{1}{1-2\alpha} \int_\alpha^{1-\alpha} F^{-1}(p) \, dp$$

α -getrimmtes Mittel.

Für symmetrische Verteilungen gilt:

$$\mu_\alpha(F) = \mu$$

(Denn:)

$$\begin{aligned} \frac{1}{1-2\alpha} \int_{F^{-1}(\alpha)}^{F^{-1}(1-\alpha)} \mu \, dF(x) &= \mu \\ \Rightarrow \mu_\alpha(F) - \mu &= \frac{1}{1-2\alpha} \int_{F^{-1}(\alpha)}^{F^{-1}(1-\alpha)} (x - \mu) \, dF(x) = 0 \end{aligned}$$

Der Plug-In Schätzer für $\mu_\alpha(F)$ ist

$$\mu_\alpha(\hat{F}_n) = \frac{1}{1-2\alpha} \int_\alpha^{1-\alpha} \hat{F}_n^{-1}(p) \, dp$$

wobei $\hat{F}_n^{-1}(t) = X_{(i)}$, falls $\frac{i-1}{n} < t \leq \frac{i}{n}$. (Aufgabe 16)

In der Praxis wird der (asymptotisch gleichwertige) Schätzer

$$\bar{X}_{n,\alpha} = \frac{1}{n-2[\alpha n]} \sum_{k=[\alpha n]+1}^{n-[\alpha n]} X_{(k)}$$

verwendet.

Einflusskurve von $\mu_\alpha(F)$:

9.4(c) \Rightarrow

$$\begin{aligned} (**) \quad \varphi^\alpha(x, F) &= \frac{1}{1-2\alpha} \int_\alpha^{1-\alpha} \varphi_p(x, F) \, dp \\ &\stackrel{(*)}{=} \frac{1}{1-2\alpha} \int_\alpha^{1-\alpha} \frac{p - \mathbf{1}\{x \leq F^{-1}(p)\}}{f(F^{-1}(p))} \, dp \end{aligned}$$

Nun sei $F(x) < \alpha$. Dann:

$$\begin{aligned}
 (**) &= \frac{1}{1-2\alpha} \int_{\alpha}^{1-\alpha} (p-1) \underbrace{\frac{1}{f(F^{-1}(p))}}_{\text{Dichte von } F^{-1}} dp \\
 &= \frac{1}{1-2\alpha} \int_{\alpha}^{1-\alpha} \underbrace{(p-1)}_G dF^{-1}(p) \\
 (+) &\stackrel{=}{=} \frac{1}{1-2\alpha} \left[\underbrace{((1-\alpha)-1) \cdot F^{-1}(1-\alpha)}_{=G(b)} - \underbrace{(\alpha-1) \cdot F^{-1}(\alpha)}_{=G(a)} \right. \\
 &\quad \left. - \underbrace{\int_{\alpha}^{1-\alpha} F^{-1}(p) dp}_{=(1-2\alpha) \cdot \mu} \right] \\
 &= \frac{1}{1-2\alpha} \left[(-\alpha) \underbrace{(F^{-1}(1-\alpha) + F^{-1}(\alpha))}_{=2\mu} + F^{-1}(\alpha) - (1-2\alpha)\mu \right] \\
 &= \frac{F^{-1}(\alpha) - \mu}{1-2\alpha}
 \end{aligned}$$

(+): partielle Integration (Stochastik II), F weiterhin symmetrisch

Ähnliche Überlegungen für $F(x) > 1-\alpha$ bzw. $\alpha \leq F(x) \leq 1-\alpha$ ergeben:

$$\varphi^{\alpha}(x, F) = \begin{cases} \frac{F^{-1}(\alpha) - \mu}{1-2\alpha}, & x < F^{-1}(\alpha) \\ \frac{x - \mu}{1-2\alpha}, & F^{-1}(\alpha) \leq x \leq F^{-1}(1-\alpha) \\ \frac{F^{-1}(1-\alpha) - \mu}{1-2\alpha}, & x > F^{-1}(1-\alpha) \end{cases}$$

Insbesondere ist $\varphi^{\alpha}(x, F)$ beschränkt in x .

$$\Rightarrow \bar{X}_{n,\alpha} = \frac{1}{n - 2[\alpha n]} \sum_{k=[\alpha n]+1}^{n-[\alpha n]} X_{(k)}$$

ist robust.

Einflusskurven-Heuristik ergibt:

$$\sqrt{n}(\bar{X}_{n,\alpha} - \mu_{\alpha}) \xrightarrow{D} \mathcal{N} \left(0, \frac{1}{(1-2\alpha)^2} [2\alpha(F^{-1}(\alpha) - \mu)^2 + \int_{F^{-1}(\alpha)}^{F^{-1}(1-\alpha)} (x - \mu)^2 dF] \right)$$

10 Grundbegriffe der Testtheorie

Sei $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ Wahrscheinlichkeitsraum, $(\mathfrak{X}, \mathcal{B}, \{P_\vartheta : \vartheta \in \Theta\})$ statistischer Raum, $X : \Omega \rightarrow \mathfrak{X}$ Zufallsvariable, $\Theta = \Theta_0 + \Theta_1$ mit $\Theta_0, \Theta_1 \neq \emptyset$.
 $(\Theta_0 \cap \Theta_1 = \emptyset)$

10.1 Definition

Die Aussage $H_0 : \vartheta \in \Theta_0$ heißt (Null-)Hypothese, $H_1 : \vartheta \in \Theta_1$ heißt Alternativhypothese oder Alternative.

$|\Theta_j| = 1 \Rightarrow \Theta_j$ heißt einfach, sonst zusammengesetzt

10.2 Definition

Ein **randomisierter Test** zur Prüfung von H_0 gegen H_1 ist eine messbare Abbildung $\varphi : \mathfrak{X} \rightarrow [0, 1]$ mit der Interpretation

$$\varphi(x) = P(H_0 \text{ ablehnen} \mid X = x)$$

Gilt $\varphi(\mathfrak{X}) = \{0, 1\}$, so heißt φ **nicht randomisiert**. Mit $\mathcal{K} := \{x \in \mathfrak{X} : \varphi(x) = 1\}$ gilt dann $\varphi = \mathbf{1}_{\mathcal{K}}$ und die Testvorschrift lautet:

$$\begin{aligned} x \in \mathcal{K} &\Rightarrow H_0 \text{ ablehnen} \\ x \in \mathfrak{X} \setminus \mathcal{K} &\Rightarrow H_0 \text{ nicht ablehnen} \end{aligned}$$

\mathcal{K} heißt kritischer Bereich (Ablehnbereich), $\mathfrak{X} \setminus \mathcal{K}$ heißt Annahmebereich.

10.3 Bemerkung

Falls $0 < \varphi(x) < 1$, so muss „externes“ Bernoulli-Experiment durchgeführt werden; man erhält also Realisierung y einer Zufallsvariablen Y mit $Y \sim \text{Bin}(1, \varphi(x))$.

In praktischen Anwendungen ist „Randomisierung“ unerwünscht.

10.4 Definition

Es sei $T : \mathfrak{X} \rightarrow \mathbb{R}$ eine messbare Abbildung. Häufig besitzt ein nicht randomisierter Test die Gestalt

$$(*) \quad \begin{array}{ll} T(x) \geq c & \Rightarrow H_0 \text{ ablehnen} \\ T(x) < c & \Rightarrow \text{kein Widerspruch zu } H_0 \end{array}$$

$$(\text{d.h. } \mathcal{K} = \{x \in \mathfrak{X} : T(x) \geq c\} = T^{-1}([c, \infty)))$$

Dann heißt T Testgröße (Prüfgröße) und $c \in \mathbb{R}$ heißt kritischer Wert.

(*) liefert Test mit **oberem Ablehnbereich**.

In (*) \geq durch \leq und $<$ durch $>$ ersetzen \leftrightarrow Test mit unterem Ablehnbereich

10.5 Beispiel

$$(\mathfrak{X}, \mathcal{B}) = (\mathbb{R}^{m+n}, \mathcal{B}^{n+m}), X = (\underbrace{X_1, \dots, X_m}_{\text{uiv}_F}, \underbrace{Y_1, \dots, Y_n}_{\text{uiv}_G}), X_1, \dots, Y_n$$

unabhängig, $\vartheta = (F, G)$, $\Theta = \{(F, G) : F, G \text{ stetig}\}$, $\Theta_0 = \{(F, G) \in \Theta : F = G\}$

$$H_0 : F = G$$

$$H_1 : F \neq G$$

(nichtparametrisches 2-Stichproben-Problem mit allgemeiner Alternative)

Sei

$$\hat{F}_m(x) = \frac{1}{m} \sum_{i=1}^m \mathbf{1}\{X_i \leq x\}, \quad \hat{G}_n(x) = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n \mathbf{1}\{Y_j \leq x\}$$

Mögliche Prüfgröße (mit oberem Ablehnbereich):

$$T(X_1, \dots, X_m, Y_1, \dots, Y_n) = \sup_{x \in \mathbb{R}} |\hat{F}_m(x) - \hat{G}_n(x)|$$

(Kolmogorov-Smirnov-Testgröße)

10.6 Definition und Bemerkung

Ein Fehler 1. Art ist das Verwerfen von H_0 , obwohl H_0 richtig ist.

Ein Fehler 2. Art ist das Nichtverwerfen von H_0 , obwohl H_0 falsch ist.

Entscheidung	H_0 richtig	H_0 falsch
H_0 nicht verwerfen	richtige Entscheidung	Fehler 2. Art
H_0 verwerfen	Fehler 1. Art	richtige Entscheidung

Die Funktion

$$G_\varphi : \Theta \rightarrow [0, 1] \\ \vartheta \mapsto G_\varphi(\vartheta) := E_\vartheta[\varphi] = \int_{\mathfrak{X}} \varphi(x) P_\vartheta(dx)$$

heißt **Gütefunktion** des Tests φ .

$$(\varphi = \mathbf{1}_K \Rightarrow G_\varphi(\vartheta) = P_\vartheta(K), \varphi = \mathbf{1}\{T(x) \geq c\} \Rightarrow G_\varphi(\vartheta) = P_\vartheta(T \geq c))$$

Ideale Gütefunktion wäre

$$G_\varphi(\vartheta) = \begin{cases} 1, \vartheta \in \Theta_1 \\ 0, \vartheta \in \Theta_0 \end{cases}$$

Sei $\alpha \in (0, 1)$. φ heißt Test zum **Niveau** $\alpha : \Leftrightarrow G_\varphi(\vartheta) \leq \alpha \ \forall \vartheta \in \Theta_0$ ²⁶

In Praxis übliche Werte: $\alpha = 0,05; 0,01; 0,001$

Kleines α dient „Sicherung von H_1 “.²⁷

Die Zahl $\sup_{\vartheta \in \Theta_0} G_\varphi(\vartheta)$ heißt **Umfang** (size) von φ .

10.7 Definition

Sei

$$\Phi_\alpha = \{\varphi : \mathfrak{X} \rightarrow [0, 1] \mid \sup_{\vartheta \in \Theta_0} G_\varphi(\vartheta) \leq \alpha\}$$

die Menge aller Niveau α -Tests.

$\Phi_\alpha \neq \emptyset$, da $\varphi \equiv \alpha \in \Phi_\alpha$.

Sei $\tilde{\Phi}_\alpha \subset \Phi_\alpha$

$\varphi_1 \in \tilde{\Phi}_\alpha$ heißt **gleichmäßig besser** als $\varphi_2 \in \tilde{\Phi}_\alpha : \Leftrightarrow$

$$G_{\varphi_1}(\vartheta) \geq G_{\varphi_2}(\vartheta) \ \forall \vartheta \in \Theta_1$$

$\varphi^* \in \tilde{\Phi}_\alpha$ heißt (gleichmäßig) **bester Test** in $\tilde{\Phi}_\alpha : \Leftrightarrow$

$$G_{\varphi^*}(\vartheta) \geq G_\varphi(\vartheta) \ \forall \vartheta \in \Theta_1 \ \forall \varphi \in \tilde{\Phi}_\alpha$$

Bezeichnung: UMP-Test („uniformly most powerfully“)

²⁶Wahrscheinlichkeit für einen Fehler 1. Art ist $\leq \alpha$

²⁷vgl. „Wahl der Nullhypothese“; das Verwerfen von H_0 ist „fast nie“ falsch, also in diesem Fall umgekehrt H_1 auch „fast immer“ richtig (...)

11 Neyman-Pearson-Tests (NP-Tests)

Es sei $\Theta_0 = \{\vartheta_0\}$ $\Theta_1 = \{\vartheta_1\}$, f_j sei die Dichte von P_{ϑ_j} bezüglich dem Maß μ auf \mathfrak{X} .

11.1 Definition

φ heißt NP-Test für $H_0 : \vartheta = \vartheta_0$ gegen $H_1 : \vartheta = \vartheta_1$
 $:\Leftrightarrow \exists c \geq 0 \exists \gamma \in [0, 1]$ mit

$$(1) \quad \varphi(x) = \begin{cases} 1, & \text{falls } f_1(x) > cf_0(x) \\ \gamma, & \text{falls } f_1(x) = cf_0(x) \\ 0, & \text{falls } f_1(x) < cf_0(x) \end{cases}$$

Beachte²⁸: $E_{\vartheta_0}(\varphi) = P_{\vartheta_0}(f_1 > cf_0) + \gamma P_{\vartheta_0}(f_1 = cf_0)$

$$(2) \quad Q(x) := \begin{cases} \frac{f_1(x)}{f_0(x)} & , \text{ falls } f_0(x) > 0 \\ \infty & , \text{ falls } f_0(x) = 0 \end{cases}$$

$$\tilde{\varphi}(x) = \begin{cases} 1 & , \text{ falls } Q(x) > c \\ \gamma & , \text{ falls } Q(x) = c \\ 0 & , \text{ falls } Q(x) < c \end{cases}$$

$$\begin{aligned} [\text{falls } f_0(x) > 0 & \Rightarrow \varphi(x) = \tilde{\varphi}(x) \\ \text{falls } f_0(x) = 0, f_1(x) > 0 & \Rightarrow \varphi(x) = \tilde{\varphi}(x) \\ \text{falls } f_0(x) = 0, f_1(x) = 0 & \Rightarrow \varphi(x) \neq \tilde{\varphi}(x)] \end{aligned}$$

Es gilt: $\{f_0 > 0\} \cup \{f_1 > 0\} \subset \{\varphi = \tilde{\varphi}\}$

$$\Rightarrow P_{\vartheta_1}(\varphi = \tilde{\varphi}^*) = P_{\vartheta_1}(\varphi = \tilde{\varphi}) = 1$$

Beachte: $E_{\vartheta_0}(\tilde{\varphi}) = P_{\vartheta_0}(Q > c) + \gamma P_{\vartheta_0}(Q = c)$

11.2 Satz

Der Test aus 11.1(1) ist bester Test zum Niveau $\alpha := E_{\vartheta_0}(\varphi)$.

Beweis:

Sei Ψ beliebiger Test mit $E_{\vartheta_0}(\Psi) \leq \alpha$.

Zu zeigen:

$$E_{\vartheta_1}(\varphi) \geq E_{\vartheta_1}(\Psi)$$

²⁸Niveau

Sei $M^{(+)} := \{x : \varphi(x) > \Psi(x)\}$, $M^{(-)} := \{x : \varphi(x) < \Psi(x)\}$,
 $M^{(=)} := \{x : \varphi(x) = \Psi(x)\}$

$$x \in M^{(+)} \Rightarrow \varphi(x) > 0 \Rightarrow f_1(x) \geq cf_0(x)$$

$$x \in M^{(-)} \Rightarrow \varphi(x) < 1 \Rightarrow f_1(x) \leq cf_0(x)$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow E_{\vartheta_1}(\varphi - \Psi) &= \int_{\mathfrak{X}} (\varphi(x) - \Psi(x)) f_1(x) \mu(dx) \\ &= \int_{M^{(+)}} \underbrace{(\varphi(x) - \Psi(x))}_{>0} \underbrace{f_1(x)}_{\geq cf_0} d\mu(x) \\ &\quad + \int_{M^{(-)}} \underbrace{(\varphi - \Psi)}_{<0} \underbrace{f_1}_{\leq cf_0} d\mu + \underbrace{\int_{M^{(=)}} (\varphi - \Psi) f_1 d\mu}_{=0} \\ &\geq \int_{M^{(+)}} (\varphi - \Psi) cf_0 d\mu + \int_{M^{(-)}} (\varphi - \Psi) cf_0 d\mu \\ &\quad + \int_{M^{(=)}} (\varphi - \Psi) cf_0 d\mu \\ &= c \int_{\mathfrak{X}} (\varphi - \Psi) f_0 d\mu \\ &= \underbrace{c}_{\geq 0} \underbrace{[E_{\vartheta_0}(\varphi) - E_{\vartheta_0}(\Psi)]}_{\geq 0} \\ &\geq 0 \end{aligned}$$

11.3 Bemerkung

Beweis deckt auch den Fall $\varphi(x) = \gamma(x)$, falls $f_1(x) = cf_0(x)$ ab

11.4 Lemma von Neyman-Pearson

- a) Zu jedem $\alpha \in (0, 1)$ existiert ein NP-Test φ der Form 11.1(1).
- b) Ist Ψ ebenfalls bester Test zum Niveau α ,
 so gilt mit φ aus (a) und $D = \{x : f_1(x) \neq cf_0(x)\}$

$$\varphi(x) = \Psi(x) \text{ für } \mu\text{-fast alle } x \in D$$

Beweis:

a) Sei Q wie in 11.1(2). Zu zeigen:

$$\exists c \geq 0 \exists \gamma \in [0, 1] \text{ mit } P_{\vartheta_0}(Q > c) + \gamma P_{\vartheta_0}(Q = c) = \alpha \quad (*)$$

Sei $F_0(t) := P_{\vartheta_0}(Q \leq t)$ die Verteilungsfunktion von Q unter ϑ_0 .

Dann wird $(*)$ zu $1 - F_0(c) + \gamma(F_0(c) - F_0(c-0)) \stackrel{!}{=} \alpha$.

Setze $c := F_0^{-1}(1 - \alpha)$ und

$$\gamma := \begin{cases} 0, & \text{falls } F_0(c) = F_0(c-0) \\ \frac{F_0(c) - (1 - \alpha)}{F_0(c) - F_0(c-0)}, & \text{sonst} \end{cases}$$

b) siehe Pruscha, Vorlesungen über Mathematische Statistik, S. 225

Beispiel: (Poissonverteilung)

$X \sim Po(\lambda)$, $(\lambda > 0)$, $0 < \lambda_0 < \lambda_1$

$$H_0 : \lambda = \lambda_0, \quad H_1 : \lambda = \lambda_1$$

$$f(x, \lambda) = e^{-\lambda} \frac{\lambda^x}{x!} \quad x = 1, 2, \dots$$

\Rightarrow Dichtequotient ist

$$T(x) = \frac{f(x, \lambda_1)}{f(x, \lambda_0)} = \underbrace{\left(\frac{\lambda_1}{\lambda_0}\right)^x}_{>1} e^{-(\lambda_1 - \lambda_0)}$$

streng monoton wachsend in x .

\Rightarrow Bereich $\{T(x) > c\}$ bzw. $\{T(x) = c\}$ kann umgeschrieben werden in $\{x > k\}$ bzw. $\{x = k\}$.

NP-Test

$$\varphi(x) = \begin{cases} 1 & , \quad x > k \\ \gamma & , \quad x = k \\ 0 & , \quad x < k \end{cases}$$

für $\alpha \in (0, 1)$ wähle $k \in \mathbb{N}_0$, $\gamma \in [0, 1]$ so, dass

$$P_{\lambda_0}(X > k) + \gamma P_{\lambda_0}(X = k) \stackrel{!}{=} \alpha$$

zum Beispiel $\alpha = 0,05$, $\lambda_0 = 1$:

$$P_{\lambda_0}(X = 3) = 0,0613, \quad P_{\lambda_0}(X > 3) = 0,0190$$

$$\Rightarrow P_{\lambda_0}(X \geq 3) > 0,05$$

$$P_{\lambda_0}(X > 3) + \gamma P_{\lambda_0}(X = 3) \stackrel{!}{=} 0,05$$

$$\Rightarrow \gamma = \frac{\alpha - P_{\lambda_0}(X > 3)}{P_{\lambda_0}(X = 3)} = 0,5057$$

Bemerkung:

Wird bei der konkreten Testdurchführung z.B. der Wert $x = 3$ beobachtet, so wird in der Praxis der sogenannte p-Wert

$$\begin{aligned} p^*(x) &= p^*(3) \\ &= P_{\lambda_0}(\text{„mindestens so extremes Ergebnis wie das beobachtete“}) \\ &= P_{\lambda_0}(X \geq 3) \\ &= 0,0803 \end{aligned}$$

$[p^*(2) > 0,1, p^*(4) = 0,019, \text{ usw}]$ angegeben.

Bei diesem Vorgehen wird das Problem der Randomisierung umgangen:

Ist zum Beispiel $\alpha = 0,05$ gewählt, so entscheidet man bei $p^*(x) \leq 0,05$ gegen die Hypothese.

Bei $p^*(x) > 0,05$ wird die Hypothese nicht verworfen.

Im Folgenden: „Loslösen“ vom Fall $|\Theta_0| = 1 = |\Theta_1|$

Sei $\{P_{\vartheta} : \vartheta \in \Theta\}$ dominiert durch σ -endliches Maß μ auf \mathcal{B} .

$$f(x, \vartheta) = \frac{dP_{\vartheta}}{d\mu}(x)$$

$\Theta \subset \mathbb{R}^1$, Θ offen

11.5 Definition

Es sei $T : \mathfrak{X} \rightarrow \mathbb{R}$ messbar mit $\forall \vartheta, \vartheta' \in \Theta$ mit $\vartheta < \vartheta'$ existiert eine monoton wachsende Funktion $g(\cdot, \vartheta, \vartheta') : \mathbb{R} \rightarrow [0, \infty]$ mit

$$\frac{f(x, \vartheta')}{f(x, \vartheta)} = g(T(x), \vartheta, \vartheta'), \quad x \in \mathfrak{X}$$

Dann heißt $\{P_{\vartheta} : \vartheta \in \Theta\}$ **Klasse mit monotonem Dichtequotienten (DQ) in T**.

Falls $f(x, \vartheta') > f(x, \vartheta) = 0$, so $\frac{f(x, \vartheta')}{f(x, \vartheta)} := \infty$.

11.6 Beispiel

Sei

$$f(x, \vartheta) = c(\vartheta) \cdot e^{q(\vartheta)T(x)} \cdot h(x), \quad x \in \mathfrak{X}$$

(einparametrische Exponentialfamilie)

Ist $q : \Theta \rightarrow \mathbb{R}$ streng monoton wachsend und gilt $\text{Var}_{\vartheta}(T) > 0 \quad \forall \vartheta \in \Theta$ (*),
so ist $\{P_{\vartheta} : \vartheta \in \Theta\}$ Klasse mit monotonem DQ in T.

Beweis:

(i) Aus (*) folgt Injektivität von $\Theta \ni \vartheta \rightarrow P_{\vartheta}$:

Annahme: $\vartheta \neq \vartheta'$ und $P_{\vartheta} = P_{\vartheta'}$

$$\Rightarrow f(\cdot, \vartheta) = f(\cdot, \vartheta') \quad \mu\text{-f.ü.}$$

$$\Rightarrow \log c(\vartheta) + q(\vartheta) \cdot T(x) = \log c(\vartheta') + q(\vartheta') \cdot T(x) \quad \mu\text{-f.ü.}$$

$$\Rightarrow T(x) = \frac{\log c(\vartheta') - \log c(\vartheta)}{q(\vartheta) - q(\vartheta')} \quad \mu\text{-f.ü.}$$

$$\Rightarrow \text{Var}(T) = 0$$

Widerspruch zu (*)!

(ii) $\vartheta < \vartheta'$

$$\Rightarrow \frac{f(x, \vartheta')}{f(x, \vartheta)} = \frac{c(\vartheta')}{c(\vartheta)} \exp(\underbrace{(q(\vartheta') - q(\vartheta)) \cdot T(x)}_{>0}) =: g(T(x), \vartheta, \vartheta')$$

Spezialfall: $\text{Bin}(n, \vartheta)$, $0 < \vartheta < 1$

$$f(x, \vartheta) = \binom{n}{x} \vartheta^x (1 - \vartheta)^{n-x} = (1 - \vartheta)^n e^{xq(\vartheta)} \binom{n}{x}$$

wobei $q(\vartheta) = \log \frac{\vartheta}{1-\vartheta}$ streng monoton wachsend in ϑ ist.

\Rightarrow monotoner DQ in $T(x) = x$, $x \in \{0, \dots, n\}$

In der Situation von 11.5 sei $H_0 : \vartheta \leq \vartheta_0$ gegen $H_1 : \vartheta > \vartheta_0$ zu testen.
($\vartheta_0 \in \Theta$ vorgegeben)

Für $c^* \in \mathbb{R}$ und $\gamma^* \in [0, 1]$ sei

$$(*) \quad \varphi^*(x) = \begin{cases} 1, & T(x) > c^* \\ \gamma^*, & T(x) = c^* \\ 0, & T(x) < c^* \end{cases}$$

$$\Rightarrow E_{\vartheta_0}(\varphi^*) = P_{\vartheta_0}(T > c^*) + \gamma^* P_{\vartheta_0}(T = c^*)$$

11.7 Satz

Die Klasse $\{P_{\vartheta} : \vartheta \in \Theta\}$, $\Theta \subset \mathbb{R}^1$, besitze monotonen DQ in T. Dann gilt:

- a) Ist φ^* von der Form $(*)$ mit $\alpha := E_{\vartheta_0}(\varphi^*) > 0$, so ist φ^* UMP-Test für H_0 gegen H_1 .
- b) Zu vorgegebenem $\vartheta_0 \in \Theta$ und $\alpha \in (0, 1)$ existieren $c^* \in \mathbb{R}, \gamma^* \in [0, 1]$, so dass φ^* aus $(*)$ ein Test zum Umfang α ist.
- c) Die Gütefunktion $E_{\vartheta}\varphi^*$ ist monoton wachsend und auf $\{\vartheta : 0 < E_{\vartheta}\varphi^* < 1\}$ streng monoton.

Beweis:

- a) Sei $\vartheta_1 \in \Theta$ mit $\vartheta_1 > \vartheta_0$ beliebig.

$$H'_0 : \vartheta = \vartheta_0 \text{ gegen } H'_1 : \vartheta = \vartheta_1$$

Sei $f_j(x) := f(x, \vartheta_j)$. Wegen

$$\frac{f_1(x)}{f_0(x)} = g(T(x), \vartheta_0, \vartheta_1)$$

existiert zu c^* ein $c := g(c^*, \vartheta_0, \vartheta_1)$ mit

$$\{x : \frac{f_1(x)}{f_0(x)} > c\} \subset \{x : T(x) > c^*\}$$

$$\{x : \frac{f_1(x)}{f_0(x)} < c\} \subset \{x : T(x) < c^*\}$$

[Echte Teilmengen, denn aus $T(x) > c^*$ folgt $g(T(x), \vartheta_0, \vartheta_1) \geq c$.]

Aus

$$\begin{aligned} 0 < \alpha &= E_{\vartheta_0}\varphi^* \\ &= P_{\vartheta_0}(T > c^*) + \gamma^* P_{\vartheta_0}(T = c^*) \\ &\leq P_{\vartheta_0}(T \geq c^*) \\ &= P_{\vartheta_0}\left(\frac{f_1(x)}{f_0(x)} \geq c\right) \end{aligned}$$

folgt $c < \infty$. [Denn: $P_{\vartheta_0}(\frac{f_1(x)}{f_0(x)} = \infty) = 0$]

Für φ^* aus (*) gilt

$$(**) \quad \varphi^*(x) = \begin{cases} 1, & \frac{f_1(x)}{f_0(x)} > c \\ \gamma(x), & \frac{f_1(x)}{f_0(x)} = c \\ 0, & \frac{f_1(x)}{f_0(x)} < c \end{cases}$$

mit $\gamma(x) \in \{0, 1, \gamma^*\}$.

Nach 11.2 und 11.3 ist φ^* bester Test für H'_0 gegen H'_1 zum Niveau $\alpha = E_{\vartheta_0}(\varphi^*)$.

Da φ^* in (*) nicht von ϑ_1 abhängt, ist (a) für H'_0 gegen $H_1 : \vartheta > \vartheta_0$ bewiesen.

Teil (c) $\Rightarrow E_{\vartheta}\varphi^* \leq \alpha \forall \vartheta \leq \vartheta_0$, d.h. Test φ^* ist UMP-Test für H_0 gegen H_1 zu $\alpha := E_{\vartheta_0}\varphi^*$.

b) Analog zu 11.4(a).

Nach (c) gilt $\sup_{\vartheta \in \Theta_0} E_{\vartheta}\varphi^* = E_{\vartheta_0}\varphi^* = \alpha$, d.h. der Test hat Umfang α .

c) Sei $\vartheta_1 < \vartheta_2$ beliebig, $\alpha_1 := E_{\vartheta_1}\varphi^*$.

Analog zu 11.7 (**) ist φ^* NP-Test für $H_0^* : \vartheta = \vartheta_1$ gegen $H_1^* : \vartheta = \vartheta_2$.

Da φ^* besser als $\varphi_1 := \alpha_1$ folgt

$$\alpha_1 = E_{\vartheta_2}(\varphi_1) \leq E_{\vartheta_2}(\varphi^*)$$

d.h. $E_{\vartheta}(\varphi^*)$ monoton wachsend.

(Für strenge Monotonie siehe Pruscha, S. 230)

Anmerkung:

Die Tests in (*) und (**) sind äquivalent. φ^* in (*) hängt nicht von ϑ_1 ab, also hängt auch der Test in (**) nicht von ϑ_1 ab. Dies ist jedoch nicht beweisbar, da ϑ_1 sowohl in $f_1(x)$ als auch in $c = c(\vartheta_0, \vartheta_1)$ eingeht.

Beide Tests haben gleichen Ablehnbereich!

11.8 Bemerkung

a) Testproblem $H_0 : \vartheta \geq \vartheta_0$ gegen $H_1 : \vartheta < \vartheta_0$ analog.

[ϑ durch $-\vartheta$ und T durch -T ersetzen \Rightarrow in (*) werden $<$ und $>$ vertauscht]

b) Für **zweiseitiges Testproblem** $H_0 : \vartheta = \vartheta_0$ gegen $H_1 : \vartheta \neq \vartheta_0$ existiert i.A. kein UMP-Test zum Niveau α .

Ein solcher Test φ^* wäre

(i) UMP-Test für $H_0 : \vartheta = \vartheta_0$ gegen $H_1^> : \vartheta > \vartheta_0$

$$\Rightarrow E_{\vartheta} \varphi^* < \alpha \quad \forall \vartheta < \vartheta_0$$

($\hat{=} H_0$)

(ii) UMP-Test für $H_0 : \vartheta = \vartheta_0$ gegen $H_1^< : \vartheta < \vartheta_0$

$$\Rightarrow E_{\vartheta} \varphi^* > \alpha \quad \forall \vartheta < \vartheta_0$$

($\hat{=} H_1$)

Widerspruch!

11.9 Beispiel (Der einseitige Gauss-Test)

Sei $X = (X_1, \dots, X_n)$, $X_1, \dots, X_n \stackrel{iid}{\sim} \mathcal{N}(\mu, \sigma_0^2)$, σ_0^2 bekannt. Da

$$\begin{aligned} \frac{f(x, \mu_1, \sigma_0^2)}{f(x, \mu_0, \sigma_0^2)} &= \frac{\exp(-\frac{1}{2\sigma_0^2} \sum_{j=1}^n (x_j - \mu_1)^2)}{\exp(-\frac{1}{2\sigma_0^2} \sum_{j=1}^n (x_j - \mu_0)^2)} \\ &= \exp\left(\frac{\mu_1 - \mu_0}{\sigma_0^2} \underbrace{\sum_j x_j}_{=T(x)} - \frac{n(\mu_1^2 - \mu_0^2)}{2\sigma_0^2}\right) \end{aligned}$$

streng monoton wachsend in $T(x) = \sum_j x_j$ ist für $\mu_1 > \mu_0$, besitzt

$\{\otimes \mathcal{N}(\mu, \sigma_0^2) : \mu \in \mathbb{R}\}$ monotonen DQ in $T(x) = \sum_{j=1}^n x_j$

Als UMP-Test zum Niveau α für $H_0 : \mu \leq \mu_0$ gegen $H_1 : \mu > \mu_0$ ergibt sich

$$\varphi^*(x) = \begin{cases} 1, & \sum_j x_j > c^* \\ \gamma^*, & \sum_j x_j = c^* \\ 0, & \sum_j x_j < c^* \end{cases}$$

Da $P_{\mu_0}(\sum_j X_j = c^*) = 0$ kann $\gamma^* \in [0, 1]$ beliebig gewählt werden, z.B. $\gamma^* = 0$. Außerdem:

$$\begin{aligned} E_{\mu_0} \varphi^* &= P_{\mu_0}\left(\sum_{j=1}^n X_j > c^*\right) = P_{\mu_0}\left(\underbrace{\sqrt{n} \frac{\bar{X}_n - \mu_0}{\sigma_0}}_{\sim \mathcal{N}(0,1)} > \sqrt{n} \frac{c^* - \mu_0}{\sigma_0}\right) \stackrel{!}{=} \alpha \\ &\Rightarrow \sqrt{n} \frac{c^* - \mu_0}{\sigma_0} \stackrel{!}{=} z_{1-\alpha} := \Phi^{-1}(1 - \alpha) \end{aligned}$$

Ergebnis:

$$\varphi^*(x) = \begin{cases} 1, & \sqrt{n} \frac{\bar{x}_n - \mu_0}{\sigma_0} > z_{1-\alpha} \\ 0, & \sqrt{n} \frac{\bar{x}_n - \mu_0}{\sigma_0} \leq z_{1-\alpha} \end{cases}$$

ist UMP-Test zum Niveau α für $H_0 : \mu \leq \mu_0$ gegen $H_1 : \mu > \mu_0$.

11.10 Beispiel (UMP-Tests in einparametrischen Exponentialfamilien)

Sei $f_1(x_1, \vartheta) = c(\vartheta)e^{\vartheta T(x)}h(x)$, $X_1, \dots, X_n \stackrel{uiv}{\sim} f_1$.

$$\Rightarrow f(x, \vartheta) = c(\vartheta)^n \exp(\vartheta \sum_i T(x_i)) \prod_i h(x_i)$$

und f hat monotonen DQ in $\tilde{T}(x) = \sum_{j=1}^n T(x_j)$ (vgl. 11.6).

\Rightarrow UMP-Test zum Niveau α für $H_0 : \vartheta \leq \vartheta_0$ gegen $H_1 : \vartheta > \vartheta_0$ ist

$$\varphi^*(x) = \begin{cases} 1, & \tilde{T}(x) > c^* \\ \gamma^*, & \tilde{T}(x) = c^* \\ 0, & \tilde{T}(x) < c^* \end{cases}$$

wobei $P_{\vartheta_0}(\tilde{T} > c^*) + \gamma^* P_{\vartheta_0}(\tilde{T} = c^*) \stackrel{!}{=} \alpha$.

11.11 Korollar

Sei $h = h(t)$ streng monoton wachsend, $\tilde{T}(x) = h(T(x))$.

In der Situation von 11.7 ist dann auch

$$\tilde{\varphi}^*(x) = \begin{cases} 1, & \tilde{T}(x) > \tilde{c}^* \\ \tilde{\gamma}^*, & \tilde{T}(x) = \tilde{c}^* \\ 0, & \tilde{T}(x) < \tilde{c}^* \end{cases}$$

mit $\tilde{c}^*, \underbrace{\tilde{\gamma}^*}_{\in [0,1]}$ gemäß $E_{\vartheta_0} \tilde{\varphi}^* \stackrel{!}{=} \alpha$ UMP-Test zum Niveau α für H_0 gegen H_1 .

12 UMPU Tests („UMP unbiased“)

Nach Bemerkung 11.8(b) existiert im Allgemeinen kein zweiseitiger UMP-Test zu einem Niveau α . Deshalb Einschränkung auf unverfälschte Tests: $\varphi \in \Phi_\alpha$ heißt **unverfälscht** (unbiased) zum Niveau α für $H_0 : \vartheta \in \Theta_0$ gegen $H_1 : \vartheta \in \Theta_1$, falls

$$(1) \quad E_\vartheta \varphi \leq \alpha \quad \forall \vartheta \in \Theta_0, \quad E_\vartheta \varphi \geq \alpha \quad \forall \vartheta \in \Theta_1$$

Im Folgenden liegen einparametrische Exponentialfamilien mit Dichte

$$(*) \quad f(x, \vartheta) = c(\vartheta) \cdot \exp(\vartheta T(x)) \cdot h(x), \quad x \in \mathfrak{X}$$

und natürlichem Parameterbereich Θ vor.

Zu testen sei $H_0 : \vartheta = \vartheta_0$ gegen $H_1 : \vartheta \neq \vartheta_0$.

Nach Lemma 6.12 ist die Gütefunktion $\beta(\vartheta) = E_\vartheta \varphi(X)$ beliebig oft differenzierbar. Aus Forderung (1) folgt:

$$(2) \quad E_{\vartheta_0} \varphi(X) = \alpha, \quad \frac{d}{d\vartheta} E_\vartheta \varphi(X) \big|_{\vartheta=\vartheta_0} = 0$$

Mit

$$c(\vartheta) = \left[\int e^{\vartheta T(x)} h(x) \mu(dx) \right]^{-1}$$

$$c'(\vartheta) = - \int T(x) e^{\vartheta T(x)} h(x) \mu(dx) \cdot c(\vartheta)^2$$

folgt weiter

$$\begin{aligned} \beta'(x) &= \left[\int \varphi(x) c(\vartheta) e^{\vartheta T(x)} h(x) \mu(dx) \right]' \\ &= c'(\vartheta) \int \varphi(x) e^{\vartheta T(x)} h(x) \mu(dx) + c(\vartheta) \int \varphi(x) T(x) e^{\vartheta T(x)} h(x) \mu(dx) \\ &= -c(\vartheta)^2 \int T(x) e^{\vartheta T(x)} h(x) \mu(dx) \int \varphi(x) e^{\vartheta T(x)} h(x) \mu(dx) \\ &\quad + E_\vartheta[\varphi(x) T(x)] \\ &= E_\vartheta[\varphi(x) T(x)] - E_\vartheta T(x) E_\vartheta \varphi(x) \end{aligned}$$

Damit ist (2) äquivalent zu

$$(3) \quad E_{\vartheta_0} \varphi(x) = \alpha, \quad E_{\vartheta_0}[\varphi(x) T(x)] = \alpha E_{\vartheta_0} T(x)$$

12.1 Satz (UMPU-Tests in einparametrischen Exponentialfamilien)

Exponentialfamilie wie in (*). Weiter sei

$$\varphi^*(x) = \begin{cases} 1, & T(x) < c_1^* \text{ oder } T(x) > c_2^* \\ \gamma_i^*, & T(x) = c_i^* \ (i = 1, 2) \\ 0, & c_1^* < T(x) < c_2^* \end{cases}$$

wobei $c_1^*, c_2^*, 0 \leq \gamma_1^*, \gamma_2^* \leq 1$ so, dass φ^* (3) erfüllt. Dann:

- a) Unter allen Niveau α Tests für $H_0 : \vartheta = \vartheta_0$ gegen $H_1 : \vartheta \neq \vartheta_0$ die (3) erfüllen ist φ^* gleichmäßig bester Test.
- b) φ^* ist UMPU-Test zum Niveau α für H_0 gegen H_1 .

Anmerkung:

UMP-Tests sind eventuell auf einer Seite besser, versagen dafür aber auf der anderen Seite. Sie sind hier aber sowieso unzulässig, da sie nicht unverfälscht sind!

12.2 Bemerkungen

- a) Aus (3) folgt

$$E_{\vartheta_0}[\varphi(X) \cdot (aT(X) + b)] = a \underbrace{E_{\vartheta_0}[\varphi(X)T(X)]}_{= \alpha E_{\vartheta_0}T} + \alpha \cdot b = \alpha E_{\vartheta_0}[aT(X) + b]$$

d.h. Bedingung (3) und auch die Form des Tests φ^* ändern sich nicht unter linear affinen Transformationen $\tilde{T}(x) = a \cdot T(x) + b$ ($a \neq 0$). Also ist

$$\tilde{\varphi}^*(x) = \begin{cases} 1, & \tilde{T}(x) < \tilde{c}_1^* \text{ oder } \tilde{T}(x) > \tilde{c}_2^* \\ \tilde{\gamma}_i^*, & \tilde{T}(x) = \tilde{c}_i^* \ (i = 1, 2) \\ 0, & \tilde{c}_1^* < \tilde{T}(x) < \tilde{c}_2^* \end{cases}$$

mit $E_{\vartheta_0}\tilde{\varphi}^* \stackrel{!}{=} \alpha$, $E_{\vartheta_0}[\tilde{\varphi}^*\tilde{T}] = \alpha \cdot E_{\vartheta_0}\tilde{T}$ ebenfalls UMPU-Test zum Niveau α für H_0 gegen H_1 .

- b) Sei $P_{\vartheta_0}^T$ symmetrisch bezüglich t_0 , d.h.

$$P_{\vartheta_0}(T - t_0 \leq -t) = P_{\vartheta_0}(T - t_0 \geq t) \quad \forall t \in \mathbb{R}$$

Sei

$$\varphi^*(x) = \begin{cases} 1, & |T(x) - t_0| > c^* \\ \gamma^*, & |T(x) - t_0| = c^* \\ 0, & |T(x) - t_0| < c^* \end{cases}$$

mit $P_{\vartheta_0}(T(X) - t_0 > \underbrace{c^*}_{>0}) + \gamma^* P_{\vartheta_0}(T(X) - t_0 = c^*) \stackrel{!}{=} \frac{\alpha}{2}$.

$\Rightarrow P_{\vartheta_0}(|T(X) - t_0| > c^*) + \gamma^* P_{\vartheta_0}(|T(X) - t_0| = c^*) = \alpha$, d.h.
 $E_{\vartheta_0} \varphi^* = \alpha$ (*).

Weiter gilt: $E_{\vartheta_0} T(X) = t_0$, φ^* symmetrisch bezüglich t_0

$$\Rightarrow E_{\vartheta_0}[\varphi^* \cdot T] = \underbrace{E_{\vartheta_0}[(T - t_0) \cdot \varphi^*]}_{=0 \text{ s.u.}} + t_0 E_{\vartheta_0} \varphi^* \stackrel{(*)}{=} t_0 \cdot \alpha = \alpha \cdot E_{\vartheta_0} T$$

[Betrachte $g(t) = (t - t_0) \cdot \varphi^*(t)$
 $\Rightarrow E_{\vartheta_0}[(T - t_0) \cdot \varphi^*(T)] = \int g(t) P_{\vartheta_0}^T(dt) = 0.]$

D.h. auch die zweite Bedingung in (3) ist erfüllt.

φ^* ist also UMPU-Test zum Niveau α für H_0 gegen H_1 .

Bestimmung von c^*, γ^* also wie beim einseitigen UMP-Test zum Niveau $\frac{\alpha}{2}$.

Bemerkung:

Form des Tests bleibt unverändert unter streng monotonen Transformationen $\tilde{T}(x) = h(|T(x) - t_0|)$.

12.3 Beispiel (Zweiseitiger Gauss-Test)

$X_1, \dots, X_n \stackrel{uiv}{\sim} \mathcal{N}(\mu, \sigma_0^2), \sigma_0^2 > 0$ bekannt.

$$H_0 : \mu = \mu_0 \text{ gegen } H_1 : \mu \neq \mu_0$$

Verteilung von $X = (X_1, \dots, X_n)$ ist einparametrische Exponentialfamilie mit
 $\vartheta = \frac{\mu}{\sigma_0^2}, T(x) = \sum_{i=1}^n x_i, \sum_{i=1}^n X_i \sim \mathcal{N}(n\mu_0, n\sigma_0^2)$ unter H_0 .

Linear affine Transformation

$$\tilde{T}(x) = \frac{T(x) - n\mu_0}{\sqrt{n\sigma_0^2}} = \sqrt{n} \frac{\bar{x}_n - \mu_0}{\sigma_0}$$

liefert $P_{\mu_0}^{\tilde{T}} = \mathcal{N}(0, 1)$, also symmetrisch bezüglich 0.

Verteilungsfunktion ist stetig

$$\Rightarrow \varphi^* = \begin{cases} 1, & \sqrt{n} \left| \frac{\bar{x}_n - \mu_0}{\sigma_0} \right| > z_{1-\frac{\alpha}{2}} \\ 0, & \sqrt{n} \left| \frac{\bar{x}_n - \mu_0}{\sigma_0} \right| \leq z_{1-\frac{\alpha}{2}} \end{cases}$$

ist UMPU-Test für H_0 gegen H_1 .

12.4 Beispiel

$X = (X_1, \dots, X_n), X_i \overset{uiv}{\sim} \text{Bin}(1, p), 0 < p < 1$

$$H_0 : p = p_0 \text{ gegen } H_1 : p \neq p_0$$

Einparametrische Exponentialfamilie mit $\vartheta = \log \frac{p}{1-p}, T(x) = \sum_{i=1}^n x_i, \sum_{i=1}^n X_i \sim \text{Bin}(n, p_0)$ unter H_0 .

Im Allgemeinen nicht symmetrisch! UMPU-Test:

$$\Rightarrow \varphi^*(x) = \begin{cases} 1, & \sum x_i < c_1^* \text{ oder } \sum x_i > c_2^* \\ \gamma_i^*, & \sum x_i = c_i^* \\ 0, & c_1^* < \sum x_i < c_2^* \end{cases}$$

mit (komplizierten) Bedingungen für $c_1^*, c_2^*, \gamma_1^*, \gamma_2^*$.

In der Praxis oft:

Konstruktion des Tests aus zwei einseitigen UMP-Tests zum Niveau $\frac{\alpha}{2}$, ist aber nicht UMPU.

Im Folgenden Exponentialfamilie mit

$$(4) \quad f(x, \vartheta, \xi) = c(\vartheta, \xi) \cdot \exp(\vartheta \cdot U(x) + \sum_{i=1}^k \xi_i T_i(x)) \cdot h(x)$$

$$(\vartheta, \xi) \in \Theta \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^k, \Theta \text{ konvex}, \dot{\Theta} \neq \emptyset.$$

Zu testen:

$$H_0 : \vartheta \leq \vartheta_0 \text{ gegen } H_1 : \vartheta > \vartheta_0$$

bzw.

$$\tilde{H}_0 : \vartheta = \vartheta_0 \text{ gegen } \tilde{H}_1 : \vartheta \neq \vartheta_0$$

$\xi = (\xi_1, \dots, \xi_k)$ ist Störparameter, $T(x) = (T_1(x), \dots, T_k(x))$

Für festes t ist Dichte in (4) einparametrische Exponentialfamilie.

[Genauer: Man kann zeigen, dass die bedingte Verteilung $P_{\vartheta, \xi}^{U|T=t}$ eine einparametrische Exponentialfamilie mit Dichte

$$c_t(\vartheta) \cdot e^{\vartheta \cdot U} h(x)$$

(unabhängig von ξ) ist.]

\Rightarrow (bedingte) UMP- bzw. UMPU-Tests für H_0 bzw. \tilde{H}_0 existieren.

Es lässt sich zeigen, dass diese bedingten Tests auch für zufälliges $T = T(X)$ optimal sind:

12.5 Satz

a) Der Test φ_1 , definiert durch

$$\varphi_1(x) = \begin{cases} 1, & U > c(t) \\ \gamma(t), & U = c(t) \\ 0, & U < c(t) \end{cases}$$

wobei $E_{\vartheta_0}[\varphi_1(U, T)|T = t] \stackrel{!}{=} \alpha$, ist UMPU-Test²⁹ zum Niveau α für H_0 gegen H_1 .

b) Der Test φ_2 , definiert durch³⁰

$$\varphi_2(x) = \begin{cases} 1, & U < c_1(t) \text{ oder } U > c_2(t) \\ \gamma_i^*, & U = c_i(t) \\ 0, & c_1(t) < U < c_2(t) \end{cases}$$

wobei $E_{\vartheta_0}[\varphi_2(U, T)|T = t] \stackrel{!}{=} \alpha$,

$$E_{\vartheta_0}[\varphi_2(U, T) \cdot U|T = t] \stackrel{!}{=} \alpha \cdot E_{\vartheta_0}[U|T = t]$$

ist UMPU-Test zum Niveau α für \tilde{H}_0 gegen \tilde{H}_1 .

Die Tests aus 12.5 können manchmal so transformiert werden, dass $c(t), \gamma(t)$ beziehungsweise $c_1(t), c_2(t), \gamma_i(t)$ nicht von t abhängen.

12.6 Satz

Unter der Verteilungsannahme (4) sei $V = h(U, T)$ eine unter $\vartheta = \vartheta_0$ von T unabhängige reellwertige Statistik. Dann gilt:

a) Ist $h(u, t)$ streng monoton wachsend in u bei festem t , so ist

$$\tilde{\varphi}_1(v) = \begin{cases} 1, & v > \tilde{c} \\ \tilde{\gamma}, & v = \tilde{c} \\ 0, & v < \tilde{c} \end{cases}$$

wobei $E_{\vartheta_0}\tilde{\varphi}_1(V) = \alpha$, UMPU-Test zum Niveau α für H_0 gegen H_1 .

²⁹Kein Schreibfehler! Test ist kein UMP-Test sondern nur UMPU!

³⁰besser: $\gamma_i(t)$

b) Gilt $h(u, t) = a(t)u + b(t)$, $a(t) > 0$ so ist

$$\tilde{\varphi}_2(v) = \begin{cases} 1, & v < \tilde{c}_1 \text{ oder } v > \tilde{c}_2 \\ \tilde{\gamma}_i, & v = \tilde{c}_i \\ 0, & \tilde{c}_1 < v < \tilde{c}_2 \end{cases}$$

wobei $E_{\vartheta_0} \tilde{\varphi}_2(V) = \alpha$, $E_{\vartheta_0}[\tilde{\varphi}_2(V)V] = \alpha E_{\vartheta_0}(V)$ UMPU-Test zum Niveau α für \tilde{H}_0 gegen \tilde{H}_1 .

Beweis:

a) Nach Korollar 11.11 bleibt die Form des Tests unter streng monotoner Transformation unverändert, man erhält also einen Test der Form $\tilde{\varphi}_1$ mit $\tilde{c} = \tilde{c}(t)$, $\tilde{\gamma} = \tilde{\gamma}(t)$. Nach Voraussetzung ist V aber unabhängig von T unter $\vartheta = \vartheta_0$, deshalb hängen $\tilde{c}, \tilde{\gamma}$ nicht von t ab.

b) folgt analog mit Bemerkung 12.2(a)

Nachweis der Unabhängigkeit von V und T?

Übliche Methoden der Wahrscheinlichkeitstheorie, oder

12.7 Satz (Basu's Theorem)

Sei $\wp = \{P_\vartheta : \vartheta \in \Theta\}$. Statistik T sei suffizient und vollständig für ϑ . Ist V eine Statistik deren Verteilung nicht von ϑ abhängt, so sind V und T stochastisch unabhängig.³¹

Beispiel:

$X_1, \dots, X_n \stackrel{iid}{\sim} \mathcal{N}(\mu, \sigma_0^2)$, $\sigma_0^2 > 0$ bekannt, $\Theta = \{\mu : \mu \in \mathbb{R}\}$, $T = \sum_{i=1}^n X_i$ suffizient und vollständig für μ .

$$V = \underbrace{\sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X}_n)^2}_{(*)}$$

$(*) = \sum_i ((X_i - \mu)(\bar{X}_n - \mu))^2 = \sum_{i=1}^n (Y_i - \bar{Y}_n)^2$ wobei $Y_i \sim \mathcal{N}(0, \sigma_0^2)$

Verteilung von V unabhängig von μ ($V \sim \sigma_0^2 \chi_{n-1}^2$).

$\stackrel{12.7}{\Rightarrow}$ V und T sind unabhängig.

³¹V „ancillary“

Beweis:

Sei g beliebige beschränkte Funktion, $m = E_{\vartheta}g(V)$ (unabhängig von ϑ nach Voraussetzung).

$$h(T(x)) := E_{\vartheta}[g(V) - m | T = T(x)]$$

unabhängig von ϑ , da T suffizient. Wegen

$$E_{\vartheta}h(T) = E_{\vartheta}[E_{\vartheta}[g(V) - m | T]] = 0 \forall \vartheta \in \Theta$$

und der Vollständigkeit von T folgt $h(T) = 0$ P_{ϑ} -f.s., also

$$E_{\vartheta}[g(V) | T] = m = E_{\vartheta}g(V) \quad P_{\vartheta}\text{-f.s.}$$

und somit die Unabhängigkeit von V und T .

12.8 Korollar

Sei φ Exponentialfamilie wie in (4), wobei $\vartheta (= \vartheta_0)$ fest gewählt ist. Hängt die Verteilung einer Statistik V nicht von ξ ab, so sind V und T unabhängig.

Beweis:

Nach Beispiel 7.7 und 7.12 ist T vollständig und suffizient für ξ .

12.7 \Rightarrow Behauptung.

12.9 Beispiel (1-Stichproben-t-Test)

$X_1, \dots, X_n \overset{uiv}{\sim} \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$, $\vartheta = (\mu, \sigma^2) \in \Theta = \mathbb{R} \times \mathbb{R}_{>0}$, $X = (X_1, \dots, X_n)$

a) $H_0 : \mu \leq \mu_0$ gegen $H_1 : \mu > \mu_0$

2-parametrische Exponentialfamilie nach Beispiel 6.3, hat die Form in (4) mit $\vartheta = \frac{\mu}{\sigma^2}$, $\xi = -\frac{1}{2\sigma^2}$, $U(x) = \sum_{i=1}^n x_i$, $T(x) = \sum_{i=1}^n x_i^2$.

Ohne Einschränkung sei $\mu_0 = 0$, andernfalls betrachte man $x_i - \mu_0$ anstelle der x_i .

H_0 , H_1 sind dann äquivalent zu $H_0 : \vartheta \leq 0$, $H_1 : \vartheta > 0$.

Betrachte:

$$v = \frac{\sqrt{n}\bar{x}_n}{\sqrt{\frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x}_n)^2}} = \frac{1}{\sqrt{n}} \frac{u}{\sqrt{t - \frac{u^2}{n}}} =: h(u, t)$$

$\frac{\partial h(u, t)}{\partial u} > 0 \Rightarrow h(u, t)$ streng monoton wachsend in u bei festem t .

(Beachte: $t > \frac{u^2}{n} > 0$.)

Weiter gilt: Unter $\vartheta = \vartheta_0$ gilt $V \sim t_{n-1}$, also unabhängig von ξ .

$\stackrel{12.8}{\Rightarrow}$ V und T sind stochastisch unabhängig (unter $\vartheta = \vartheta_0$).

$\stackrel{12.6(a)}{\Rightarrow}$ Der UMPU-Test für $H_0 : \mu \leq \mu_0$ gegen $\mu > \mu_0$ zum Niveau α ist

$$\tilde{\varphi}_1(v) = \begin{cases} 1, & \sqrt{n} \frac{\bar{x}_n - \mu_0}{s} \geq t_{n-1;1-\alpha} \\ 0, & \sqrt{n} \frac{\bar{x}_n - \mu_0}{s} < t_{n-1;1-\alpha} \end{cases}$$

b) $\tilde{H}_0 : \mu = \mu_0$ gegen $\tilde{H}_1 : \mu \neq \mu_0$

Ohne Einschränkung $\mu_0 = 0$, dann $\tilde{H}_0 : \vartheta = \vartheta_0 = 0$, $\tilde{H}_1 : \vartheta \neq \vartheta_0$

$$h(u, t) = \frac{1}{\sqrt{n}} \frac{u}{\sqrt{\frac{t - u^2/n}{n-1}}}$$

nicht linear in u.

Betrachte

$$\tilde{v} = \tilde{h}(u, t) = \frac{u}{\sqrt{t}} = \frac{\sum x_i}{\sqrt{\sum x_i^2}}$$

Unter $\vartheta = 0$ gilt $\tilde{V} \sim \frac{\sum Y_i}{\sqrt{\sum Y_i^2}}$, wobei $Y_i \sim \mathcal{N}(0, 1)$.³²

\Rightarrow Verteilung von \tilde{V} ist unabhängig von ξ und symmetrisch um 0.

Nach 12.6(b) existiert ein UMPU-Test $\tilde{\varphi}_2(\tilde{v})$, der wegen der Symmetrie der Verteilung von \tilde{V} nach 12.2(b) einen Ablehnbereich der Form $|\tilde{v}| > \tilde{c}$ hat.

Nun gilt

$$v = h(u, t) = g(\tilde{v}) = \sqrt{\frac{n-1}{n}} \frac{\tilde{v}}{\sqrt{1 - \tilde{v}^2/n}}$$

bzw. $|v| = g(|\tilde{v}|)$.

$g(|\tilde{v}|)$ ist streng monoton wachsend auf $[0, \sqrt{n})$ ³³, so dass nach Bemerkung in 12.2(b) der UMPU-Test auch auf einem Ablehnbereich der Form $|v| \geq c$ basieren kann. Somit ist

$$\tilde{\varphi}_2(x) = \begin{cases} 1, & \sqrt{n} \frac{|\bar{x}_n - \mu_0|}{s} \geq t_{n-1;1-\frac{\alpha}{2}} \\ 0, & \sqrt{n} \frac{|\bar{x}_n - \mu_0|}{s} < t_{n-1;1-\frac{\alpha}{2}} \end{cases}$$

UMPU-Test für \tilde{H}_0 gegen \tilde{H}_1 .

³²Erweitere \tilde{v} mit $\frac{1}{\sigma}$ um dies zu erkennen!

³³Beachte: $\tilde{v} \in (-\sqrt{n}, \sqrt{n})$ (nachrechenbar)

12.10 Bemerkung

Ähnliche Überlegungen zeigen, dass auch der ein- bzw. zweiseitige 2-Stichproben-t-Test UMPU-Test ist.
(z.B. Lehmann/Romano, S. 157-161, 3. ed.)

12.11 Beispiel (Unabhängigkeitstest unter NV-Annahme)

$(X_1, Y_1), \dots, (X_n, Y_n) \overset{uiv}{\sim} \mathcal{N}_2(\mu, \nu, \sigma^2, \tau^2, \varrho)$, also Dichte³⁴

$$f((x_1, y_1), \dots, (x_n, y_n), \mu, \nu, \sigma^2, \tau^2, \varrho) = (2\pi\sigma\tau\sqrt{1-\varrho^2})^{-n}.$$

$$\exp\left(-\frac{1}{2(1-\varrho^2)}\left(\frac{1}{\sigma^2}\sum_i (x_i-\mu)^2 - \frac{2\varrho}{\sigma\tau}\sum_i (x_i-\mu)(y_i-\nu) + \frac{1}{\tau^2}\sum_i (y_i-\nu)^2\right)\right) \quad (*)$$

Zu testen: \tilde{H}_0 : X_1, Y_1 unabhängig; \tilde{H}_1 : X_1, Y_1 nicht unabhängig

Äquivalent: $\tilde{H}_0 : \varrho = 0$; $\tilde{H}_1 : \varrho \neq 0$

Bzw. die einseitige Hypothese $H_0 : \varrho \leq 0$ gegen $H_1 : \varrho > 0$.

(*) ist Exponentialfamilie wie in (4) mit

$$U = \sum_i x_i y_i, T_1 = \sum_i x_i^2, T_2 = \sum_i y_i^2, T_3 = \sum_i x_i, T_4 = \sum_i y_i$$

$$\vartheta = \frac{\varrho}{\sigma\tau(1-\varrho^2)}$$

$$\xi_1 = -\frac{1}{2\sigma^2(1-\varrho^2)}, \quad \xi_2 = -\frac{1}{2\tau^2(1-\varrho^2)},$$

$$\xi_3 = \frac{1}{1-\varrho^2}\left(\frac{\mu}{\sigma^2} - \frac{\nu\varrho}{\sigma\tau}\right), \quad \xi_4 = \frac{1}{1-\varrho^2}\left(\frac{\nu}{\tau^2} - \frac{\mu\varrho}{\sigma\tau}\right)$$

a) $H_0 : \vartheta \leq 0$ gegen $H_1 : \vartheta > 0$

Sei

$$R = \frac{\sum_i (X_i - \bar{X})(Y_i - \bar{Y})}{\sqrt{\sum_i (X_i - \bar{X})^2 \cdot \sum_i (Y_i - \bar{Y})^2}}$$

empirischer Korrelationskoeffizient nach Pearson.

Transformation $X_i \rightarrow \frac{X_i - \mu}{\sigma}$, $Y_j \rightarrow \frac{Y_j - \nu}{\tau}$ ändert R nicht, deshalb hängt die Verteilung von R nicht von $\mu, \nu, \sigma^2, \tau^2$ ab, sondern nur von ϱ .

Für $\vartheta = 0$ ist die Verteilung von R also unabhängig von $\xi_1, \xi_2, \xi_3, \xi_4$.

³⁴ ϱ ist Korrelationskoeffizient (s. Stochastik 1)

Korollar 12.8 \Rightarrow R ist unabhängig von (T_1, \dots, T_4) unter $\vartheta = 0$.

$\stackrel{12.6}{\Rightarrow}$ UMPU-Test hat Ablehnbereich der Form $R \geq c$ oder äquivalent

$$w := \frac{R}{\sqrt{\frac{1-R^2}{n-2}}} \geq \tilde{c}$$

$[R = \frac{U-T_3T_4/n}{\sqrt{(T_1-T_3^2/n)(T_2-T_4^2/n)}}]$ ist streng monoton wachsend in U

$\Rightarrow w$ ist streng monoton wachsend³⁵ in U

Nach Aufgabe 36 gilt: $w \sim t_{n-2}$ falls $\varrho = 0$ (bzw. $\vartheta = 0$).

Deshalb:

$$\varphi_1(w) = \begin{cases} 1, & w \geq t_{n-2, 1-\alpha} \\ 0, & w < t_{n-2, 1-\alpha} \end{cases}$$

UMPU-Test zum Niveau α für H_0 gegen H_1 .

b) Test von $\tilde{H}_0 : \vartheta = 0, \tilde{H}_1 : \vartheta \neq 0$

R ist linear in U mit um 0 symmetrischer Verteilung für $\vartheta = 0$

\Rightarrow UMPU-Test hat Ablehnbereich der Form $|R| \geq \tilde{c}$.

Die Funktion $x \rightarrow \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$ ist streng monoton wachsend für $0 \leq x \leq 1$,
woraus wie in 12.9(b) folgt:

$$\varphi_2(w) = \begin{cases} 1, & |w| \geq t_{n-2, 1-\frac{\alpha}{2}} \\ 0, & |w| < t_{n-2, 1-\frac{\alpha}{2}} \end{cases}$$

ist UMPU-Test zum Niveau α für $\tilde{H}_0 : \varrho = 0$ gegen $\tilde{H}_1 : \varrho \neq 0$.

³⁵ w ist streng monoton wachsend in R (Beachte: $R \in [-1, 1]$ und $w'(R) > 0 \ \forall R \in (-1, 1)$)

13 Konfidenzbereiche

Sei $(\mathfrak{X}, \mathcal{B}, \{P_\vartheta : \vartheta \in \Theta\})$ statistisches Modell, $g : \Theta \rightarrow \mathbb{R}^s$.

13.1 Definition

Sei $\alpha \in (0, 1)$. Eine Abbildung $C : \mathfrak{X} \rightarrow \mathcal{P}(\mathbb{R}^s)$ heißt **Konfidenzbereich** für $g(\vartheta)$ zum Niveau $1 - \alpha$ genau dann, wenn

- (1) $\{x \in \mathfrak{X} : C(x) \ni g(\vartheta)\} \in \mathcal{B} \quad \forall \vartheta \in \Theta$
- (2) $P_\vartheta(\{x \in \mathfrak{X} : C(x) \ni g(\vartheta)\}) \geq 1 - \alpha \quad \forall \vartheta \in \Theta$.

Falls $X : \Omega \rightarrow \mathfrak{X}$ eine Zufallsvariable mit Verteilung P_ϑ ist, so die zweite Bedingung gleichbedeutend mit

$$P_\vartheta(C(X) \ni g(\vartheta)) \geq 1 - \alpha \quad \forall \vartheta \in \Theta.$$

Falls $s = 1$ und $C(x)$ für alle $x \in \mathfrak{X}$ ein Intervall ist, so heißt $C(\cdot)$ ein **Konfidenzintervall**.³⁶

Beispiel:

$$X = (X_1, \dots, X_n), X_1, \dots, X_n \stackrel{uiv}{\sim} \mathcal{N}(\mu, \sigma^2), \vartheta = (\mu, \sigma^2), g(\vartheta) = \mu$$

$$C(X) = [\bar{X}_n - \frac{S_n}{\sqrt{n}} \cdot t_{n-1; 1-\frac{\alpha}{2}}, \bar{X}_n + \frac{S_n}{\sqrt{n}} \cdot t_{n-1; 1-\frac{\alpha}{2}}]$$

ist Konfidenzintervall zum Niveau $1 - \alpha$ nach 2.4.

13.2 Bemerkung (Pivot-Methode)

Praktische Berechnung von Konfidenzintervallen:

Finde Funktion k so, dass die Verteilung von $k(X, \vartheta)$ unabhängig von ϑ ist, d.h., dass $H(x) := P_\vartheta(k(X, \vartheta) \leq x)$ unabhängig von ϑ ist.

Dann existieren Konstanten a, b :

$$P_\vartheta(a \leq k(X, \vartheta) \leq b) \geq 1 - \alpha \quad \forall \vartheta \in \Theta$$

³⁶Anmerkung: Ermitteln wir z.B. das 95%-Konfidenzintervall für den wahren Erwartungswert einer Population, dann bedeutet dies, dass wir bei durchschnittlich 5 von 100 gleichgroßen Zufallsstichproben ein Konfidenzintervall ermitteln, das den Erwartungswert nicht enthält.

Falls man das Ereignis $\{a \leq k(X, \vartheta) \leq b\}$ umschreiben kann als $\{U(X) \leq g(\vartheta) \leq O(X)\}$, so ist $[U(X), O(X)]$ Konfidenzintervall für $g(\vartheta)$ zum Niveau $1 - \alpha$.

Im Beispiel oben:
Verteilung von

$$k(X, \vartheta) = \frac{\sqrt{n}(\bar{X}_n - \mu)}{S_n}$$

unabhängig von $\vartheta = (\mu, \sigma^2)$.

$\frac{\sqrt{n}(\bar{X}_n - \mu)}{S_n}$ ist Pivot für $g(\vartheta) = \mu$.

$[-t_{n-1; 1-\frac{\alpha}{2}} \leq k(X, \vartheta) \leq t_{n-1; 1-\frac{\alpha}{2}}] \rightarrow C(X)$ im Beispiel oben]

Weiteres Beispiel:

$X_1, \dots, X_n \stackrel{uiv}{\sim} U(0, \vartheta), \vartheta > 0, g(\vartheta) = \vartheta$

MLE³⁷ von ϑ : $X_{(n)} = \max_{1 \leq i \leq n} X_i$

Verteilungsfunktion von $X_{(n)}$ ist $(\frac{x}{\vartheta})^n, 0 \leq x \leq \vartheta$

\Rightarrow Verteilungsfunktion von $\frac{X_{(n)}}{\vartheta}$ ist $x^n, 0 \leq x \leq 1$, also ist $\frac{X_{(n)}}{\vartheta}$ Pivot für ϑ .

Wähle a, b so, dass

$$P_{\vartheta}(a \leq \frac{X_{(n)}}{\vartheta} \leq b) = b^n - a^n \stackrel{!}{=} 1 - \alpha \quad (\forall \vartheta \in \Theta)$$

Dann ist $[\frac{X_{(n)}}{b}, \frac{X_{(n)}}{a}]$ $(1 - \alpha)$ -Konfidenzintervall für ϑ .

Wie a und b wählen?

- Intervall $[a, b]$ „kleinstmöglich“ wählen
- andere Optimalitätsbegriffe

13.3 Zusammenhang zwischen Konfidenzintervallen und (nichtrandomisierten) Tests

1. $C(x)$ sei Konfidenzintervall zum Niveau $1 - \alpha$ für ϑ (d.h.

$$P_{\vartheta}(C(X) \ni \vartheta) \geq 1 - \alpha \quad \forall \vartheta \in \Theta).$$

Zu testen ist $H_0 : \vartheta = \vartheta_0$ gegen $H_1 : \vartheta \neq \vartheta_0$.

Definiere Test φ :

$$\varphi(x) = \begin{cases} 1 & , \vartheta_0 \notin C(x) \\ 0 & , \vartheta_0 \in C(x) \end{cases}$$

³⁷ML-Schätzer (*Estimator*)

Umfang von φ :

$$E_{\vartheta_0} \varphi(x) = 1 - \underbrace{P_{\vartheta_0}(\vartheta_0 \in C(x))}_{\geq 1-\alpha} \leq \alpha$$

d.h. φ ist Niveau α -Test.

2. Umgekehrt sei für jedes $\vartheta_0 \in \Theta$ ein Niveau α -Test $\varphi_{\vartheta_0}(x)$ für obige Situation gegeben (d.h. $P_{\vartheta_0}(\varphi_{\vartheta_0}(X) = 0) \geq 1 - \alpha$, $\vartheta_0 \in \Theta$).
Definiere $C^*(x) = \{\vartheta_0 : \varphi_{\vartheta_0}(x) = 0\}$

$$\Rightarrow P_{\vartheta}(C^*(X) \ni \vartheta) = P_{\vartheta}(\varphi_{\vartheta}(x) = 0) \geq 1 - \alpha \quad \forall \vartheta \in \Theta$$

d.h. $C^*(X)$ ist $(1 - \alpha)$ -Konfidenzbereich für ϑ .

Beispiel (1 Stichproben-t-Test):

1. $(1 - \alpha)$ -Konfidenzintervall für μ : $[\bar{x}_n - \frac{s_n}{\sqrt{n}} t_{n-1, 1-\frac{\alpha}{2}}, \bar{x}_n + \frac{s_n}{\sqrt{n}} t_{n-1, 1-\frac{\alpha}{2}}]$.
Lehne $H_0 : \mu = \mu_0$ ab, falls $\mu_0 \notin$ Konfidenzintervall.

$$\begin{aligned} &\hat{=} |\mu_0 - \bar{x}_n| > \frac{s_n}{\sqrt{n}} t_{n-1, 1-\frac{\alpha}{2}} \\ &\hat{=} \frac{\sqrt{n} |\bar{x}_n - \mu_0|}{s_n} > t_{n-1, 1-\frac{\alpha}{2}} \end{aligned}$$

2. Umgekehrt:

$$\frac{\sqrt{n} |\bar{x}_n - \mu_0|}{s_n} > t_{n-1, 1-\frac{\alpha}{2}}$$

Ablehnbereich für Test φ_{μ_0} von $H_0 : \mu = \mu_0$ gegen $H_1 : \mu \neq \mu_0$ für jedes $\mu_0 \in \mathbb{R}$.

$$\begin{aligned} C^*(x) &= \{\mu : \varphi_{\mu}(x) = 0\} \\ &= \left\{ \mu : \frac{\sqrt{n} |\bar{x}_n - \mu_0|}{s_n} \leq t_{n-1, 1-\frac{\alpha}{2}} \right\} \\ &= \left\{ \bar{x}_n - \frac{s_n}{\sqrt{n}} t_{n-1, 1-\frac{\alpha}{2}} \leq \mu \leq \bar{x}_n + \frac{s_n}{\sqrt{n}} t_{n-1, 1-\frac{\alpha}{2}} \right\} \end{aligned}$$

$(1 - \alpha)$ -Konfidenzintervall für μ .

Bemerkungen:

- (i) Es besteht also eine Dualität zwischen Signifikanztests und Konfidenzbereichen, allerdings nur, wenn eine ganze Schar von Hypothesen

$H_{\vartheta_0} : \vartheta = \vartheta_0$ getestet wird.

Bei Beschränkung auf einen Test (was bei praktischer Testdurchführung immer der Fall ist) ist der Test „weniger“ informativ.

[Allerdings: Bei Tests wird in der Praxis p-Wert (siehe Beispiel nach 11.4) angegeben \Rightarrow andere Information als Konfidenzintervall].

- (ii) UMP(U)-Tests führen auf Konfidenzbereiche, die gewisse (komplizierte) Optimalitätseigenschaften haben.
(Im Allgemeinen aber nicht kürzeste Konfidenzintervalle.)

13.4 Definition

Ist für jedes n die Abbildung $C_n : \mathfrak{X}_n \rightarrow \mathbb{R}^s$ ein Konfidenzbereich für $g(\vartheta)$, basierend auf (X_1, \dots, X_n) , und gilt

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P_{\vartheta}(\{(x_1, \dots, x_n) \in \mathfrak{X}_n : C_n(x_1, \dots, x_n) \ni g(\vartheta)\}) = 1 - \alpha$$

für alle $\vartheta \in \Theta$, so heißt die Folge (C_n) ein **asymptotischer Konfidenzbereich** für $g(\vartheta)$ zum Niveau $1 - \alpha$.

13.5 Beispiel

$X_1, \dots, X_n \stackrel{uiv}{\sim} X, EX^2 < \infty, F(x) = P(X \leq x), \vartheta := F,$
 $g(\vartheta) = \int x dF(x) = EX =: \mu$

$$S_n^2 := \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X}_n)^2 \xrightarrow{P} \sigma^2 := \text{Var}(X)$$

ZGWS: $\frac{\sqrt{n}(\bar{X}_n - \mu)}{\sigma} \xrightarrow{D} \mathcal{N}(0, 1)$

$$\Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} P_{\vartheta} \left(\underbrace{\bar{X}_n - \frac{S_n}{\sqrt{n}} \Phi^{-1}\left(1 - \frac{\alpha}{2}\right) \leq \mu \leq \bar{X}_n + \frac{S_n}{\sqrt{n}} \Phi^{-1}\left(1 - \frac{\alpha}{2}\right)}_{\text{asymptotisches Konfidenzintervall zum Niveau } 1-\alpha} \right) = 1 - \alpha$$

13.6 Hilfssatz

$$Y \sim \mathcal{N}_k(0, \Sigma), \Sigma > 0 \implies Y^T \Sigma^{-1} Y \sim \chi_k^2.$$

Beweis:

$$\Sigma^{-1/2} Y \sim \mathcal{N}_k(0, I_k) \implies \|\Sigma^{-1/2} Y\|^2 = Y^T \Sigma^{-1} Y \sim \chi_k^2.$$

13.7 Asymptotische Konfidenzbereiche in parametrischen Modellen

Seien $X_1, \dots, X_n \stackrel{iid}{\sim} f(\xi; \vartheta)$, $\vartheta \in \Theta$, $\Theta \subset \mathbb{R}^k$ offen und f eine reguläre Dichte im \mathbb{R}^s bezüglich μ ($= \lambda^s$ oder Zählmaß).

Sei $\hat{\vartheta}_n$ eine Schätzfolge für ϑ mit der Eigenschaft

$$\sqrt{n}(\hat{\vartheta}_n - \vartheta) \xrightarrow{D_\vartheta} \mathcal{N}_k(0, \Sigma(\vartheta)), \quad \vartheta \in \Theta \quad (1)$$

wobei $\Sigma(\vartheta) > 0$ und $\Sigma(\cdot)$ stetig.

Aus (1) und Hilfssatz 13.6 folgt, dass

$$n(\hat{\vartheta}_n - \vartheta)^T \Sigma(\hat{\vartheta}_n)^{-1} (\hat{\vartheta}_n - \vartheta) \xrightarrow{D_\vartheta} \chi_k^2, \quad \vartheta \in \Theta$$

das heißt

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P_\vartheta \left(n(\hat{\vartheta}_n - \vartheta)^T \Sigma(\hat{\vartheta}_n)^{-1} (\hat{\vartheta}_n - \vartheta) \leq \chi_{k;1-\alpha}^2 \right) = 1 - \alpha \quad \forall \vartheta \in \Theta.$$

Da die Menge

$$\left\{ \vartheta \in \mathbb{R}^k : (\hat{\vartheta}_n - \vartheta)^T \Sigma(\hat{\vartheta}_n)^{-1} (\hat{\vartheta}_n - \vartheta) \leq \frac{\chi_{k;1-\alpha}^2}{n} \right\}$$

ein Ellipsoid in \mathbb{R}^k mit Zentrum $\hat{\vartheta}_n$ ist, handelt es sich hier um einen elliptischen Konfidenzbereich für ϑ .

Falls $g : \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}$ differenzierbar ist, so folgt aus (1), dass

$$\sqrt{n}(g(\hat{\vartheta}_n) - g(\vartheta)) \xrightarrow{D_\vartheta} \mathcal{N}(0, \sigma^2(\vartheta)),$$

wobei

$$\sigma^2(\vartheta) = g'(\vartheta)^T \Sigma(\vartheta) g(\vartheta).$$

Somit gilt

$$\frac{\sqrt{n}(g(\hat{\vartheta}_n) - g(\vartheta))}{\sigma(\hat{\vartheta}_n)} \xrightarrow{D_\vartheta} \mathcal{N}(0, 1).$$

Mit $r_n = \sigma(\hat{\vartheta}_n) \cdot \Phi^{-1}(1 - \frac{\alpha}{2}) / \sqrt{n}$ folgt

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P_\vartheta \left(g(\hat{\vartheta}_n) - r_n \leq g(\vartheta) \leq g(\hat{\vartheta}_n) + r_n \right) = 1 - \alpha.$$

Man hat also einen asymptotischen Konfidenzbereich für $g(\vartheta)$ konstruiert.

13.8 Beispiele

- a) $X_1, \dots, X_n \overset{uiv}{\sim} \text{Bin}(1, p)$, $0 < p < 1$, $\vartheta = p$, $\hat{p}_n = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i = \bar{X}_n$
ZGWS:

$$\sqrt{n}(\hat{p}_n - p) \xrightarrow{D} \mathcal{N}(0, \underbrace{p(1-p)}_{=\Sigma(\vartheta)})$$

$g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $g(p) = \log \frac{p}{1-p}$ „logit“-Funktion

$$g'(p) = \frac{1}{p(1-p)}$$

$$\Rightarrow \sigma^2(p) = g'(p)^2 \Sigma(p) = \frac{1}{p(1-p)} = \frac{1}{p} + \frac{1}{1-p}$$

$$\Rightarrow \sqrt{n}(\log \frac{\hat{p}_n}{1-\hat{p}_n} - \log \frac{p}{1-p}) \xrightarrow{D} \mathcal{N}(0, \frac{1}{p(1-p)})$$

und

$$[\log \frac{\hat{p}_n}{1-\hat{p}_n} - \frac{\Phi^{-1}(1-\frac{\alpha}{2})}{\sqrt{n\hat{p}_n(1-\hat{p}_n)}}, \log \frac{\hat{p}_n}{1-\hat{p}_n} + \frac{\Phi^{-1}(1-\frac{\alpha}{2})}{\sqrt{n\hat{p}_n(1-\hat{p}_n)}}]$$

ist asymptotisches $(1-\alpha)$ -Konfidenzintervall für $\log \frac{p}{1-p}$.

- b) Konfidenzintervall für „log odds ratio“
 $X_1, \dots, X_n \sim \text{Bin}(1, p)$, $Y_1, \dots, Y_n \sim \text{Bin}(1, q)$

$$\Theta = \log \frac{\frac{p}{1-p}}{\frac{q}{1-q}}, \quad \Theta = 0 \Leftrightarrow p = q$$

siehe Übung

13.9 Beispiel

Sei $X_1, \dots, X_n \overset{uiv}{\sim} \mathcal{N}_2(\mu, \Sigma)$, $X_i = \begin{pmatrix} X_i^{(1)} \\ X_i^{(2)} \end{pmatrix}$, $\mu = \begin{pmatrix} \mu_1 \\ \mu_2 \end{pmatrix}$

Σ regulär, $\Sigma = \begin{pmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} \\ \sigma_{12} & \sigma_{22} \end{pmatrix}$, $\bar{X}_n = \begin{pmatrix} \bar{X}_n^{(1)} \\ \bar{X}_n^{(2)} \end{pmatrix}$ mit $\bar{X}_n^{(k)} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i^{(k)}$,

$k = 1, 2$

Σ bekannt: $\sqrt{n}(\bar{X}_n - \mu) \sim \mathcal{N}_2(0, \Sigma)$

$$\stackrel{13.6}{\Rightarrow} n(\bar{X}_n - \mu)^T \Sigma^{-1} (\bar{X}_n - \mu) \sim \chi_2^2$$

$$\Rightarrow P_\mu(\underbrace{n(\bar{X}_n - \mu)^T \Sigma^{-1} (\bar{X}_n - \mu) \leq \chi_{2;1-\alpha}^2}_{\text{elliptischer } (1-\alpha)\text{-Konfidenzbereich für } \mu}) = 1 - \alpha$$

Σ unbekannt: Konsistenter Schätzer für Σ ist

$$\hat{\Sigma}_n = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X}_n)(X_i - \bar{X}_n)^T$$

$$\vartheta = (\mu, \Sigma), \quad \hat{\vartheta}_n = (\bar{X}_n, \hat{\Sigma}_n)$$

Für $n > d(=2)$ ³⁸ ist $\hat{\Sigma}_n$ nicht singulär mit Wahrscheinlichkeit 1.

$$\Rightarrow n(\bar{X}_n - \mu)^T \hat{\Sigma}_n^{-1} (\bar{X}_n - \mu) \xrightarrow{D} \chi_2^2$$

Betrachte $g(\vartheta) = \mu_1 - \mu_2$.

$$g'(\vartheta) = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad \sigma^2(\vartheta) = (1, -1)\Sigma \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \sigma_{11} - 2\sigma_{12} + \sigma_{22}$$

$$\Rightarrow \frac{\sqrt{n}((\bar{X}_n^{(1)} - \bar{X}_n^{(2)}) - (\mu_1 - \mu_2))}{\sigma(\hat{\vartheta}_n)} \xrightarrow{D} \mathcal{N}(0, 1)$$

³⁸d ist Dimension

14 Lineare statistische Modelle

14.1 Definition

Es seien $X = (X_1, \dots, X_n)^T$ ein (beobachtbarer) Zufallsvektor,
 $C = (c_{ij})_{\substack{i=1, \dots, n \\ j=1, \dots, s}}$ eine bekannte $n \times s$ -Matrix mit $\text{Rang}(C) = s$
 (insbesondere $n \geq s$), $\vartheta = (\vartheta_1, \dots, \vartheta_s)^T$ unbekannter Parametervektor,
 $\varepsilon = (\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n)^T$ ein (nicht beobachtbarer) Zufallsvektor mit

$$E(\varepsilon) = 0, \quad \text{Var}(\varepsilon) = E(\varepsilon \cdot \varepsilon^T) = \sigma^2 \cdot I_n$$

σ^2 unbekannt.

Ein **lineares Modell (LM)** wird beschrieben durch die Gleichung

$$X = C\vartheta + \varepsilon \quad (1)$$

also

$$\begin{pmatrix} X_1 \\ \vdots \\ X_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_{11} & \cdots & c_{1s} \\ \vdots & & \vdots \\ c_{n1} & \cdots & c_{ns} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \vartheta_1 \\ \vdots \\ \vartheta_s \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \varepsilon_1 \\ \vdots \\ \varepsilon_n \end{pmatrix}$$

C heißt „Designmatrix“.

(1) heißt klassisch, falls $\varepsilon \sim \mathcal{N}_n(0, \sigma^2 I_n)$.

Bemerkungen:

- a) Im klassischen LM gilt: $X \sim \mathcal{N}_n(C\vartheta, \sigma^2 I_n)$.
 Die Beobachtungen X_1, \dots, X_n sind also unabhängig, aber nicht identisch verteilt.
- b) $\text{Rang}(C) = s \Leftrightarrow C^T C$ nicht singulär
 Denn³⁹:

$$\begin{aligned} C^T C \text{ singulär} &\Leftrightarrow \exists u \in \mathbb{R}^s, u \neq 0 : C^T C u = 0 \\ &\Leftrightarrow \exists u \in \mathbb{R}^s, u \neq 0 : u^T C^T C u = (Cu)^T C u = 0 \\ &\Leftrightarrow \exists u \in \mathbb{R}^s, u \neq 0 : C u = 0 \\ &\Leftrightarrow \text{Rang}(C) < s \end{aligned}$$

³⁹In der Hinrichtung multipliziere $C^T C u = 0$ mit u^T , in der Rückrichtung multipliziere $C u = 0$ mit C^T .

14.2 Beispiele

a) $X_i = \vartheta + \varepsilon_i, i = 1, \dots, n$

$$(s = 1, C = \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix})$$

(wiederholte Messung)

b) $X_i = a + bt_i + \varepsilon_i, i = 1, \dots, n$

$$(s = 2, a = \vartheta_1, b = \vartheta_2, C = \begin{pmatrix} 1 & t_1 \\ \vdots & \vdots \\ 1 & t_n \end{pmatrix})$$

(einfache lineare Regression)

c) $X_i = a + bt_i + ct_i^2 + \varepsilon_i, i = 1, \dots, n$

$$(s = 3, \vartheta = (a, b, c)^T, C = \begin{pmatrix} 1 & t_1 & t_1^2 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & t_n & t_n^2 \end{pmatrix})$$

(einfache quadratische Regression)

d) $X_i = \sum_{j=1}^s \vartheta_j \cdot f_j(t_i) + \varepsilon_i, i = 1, \dots, n$
 f_1, \dots, f_s beliebige gegebene Funktionen! (allgemeine (lineare) Regression)

z.B. $f_j(t) = \sin(\omega_j \cdot t)$ (trigonometrische Regression)

e) $X_i = a + bu_i + cv_i + \dots + gz_i + \varepsilon_i, i = 1, \dots, n$

$$\vartheta = \begin{pmatrix} a \\ \vdots \\ g \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} 1 & u_1 & v_1 & \cdots & z_1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & u_n & v_n & \cdots & z_n \end{pmatrix}$$

(multiple lineare Regression)

f) $X_{1,i} = \vartheta_1 + \varepsilon_{1,i}, i = 1, \dots, n_1$

$X_{2,i} = \vartheta_2 + \varepsilon_{2,i}, i = 1, \dots, n_2$

$$\begin{pmatrix} X_{1,1} \\ \vdots \\ X_{1,n_1} \\ X_{2,1} \\ \vdots \\ X_{2,n_2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \vdots & \vdots \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ \vdots & \vdots \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \vartheta_1 \\ \vartheta_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \varepsilon_{1,1} \\ \vdots \\ \varepsilon_{1,n_1} \\ \varepsilon_{2,1} \\ \vdots \\ \varepsilon_{2,n_2} \end{pmatrix}$$

(2-Stichproben-Modell)

- g) $X_{i,j} = \vartheta_i + \varepsilon_{i,j}$, $i = 1, \dots, k$, $j = 1, \dots, n_i$
 (Modell der einfachen Varianzanalyse, 1-faktorielle ANOVA)
 z.B. Effekt $X_{i,j}$ bei k unterschiedlichen Behandlungen

14.3 Schätzung von ϑ

Sei $R(C) := \{C\vartheta : \vartheta \in \mathbb{R}^s\}$ s -dimensionaler Unterraum des \mathbb{R}^n .

14.1(1) besagt $EX \in R(C)$.

Forderung: $\|X - C\vartheta\|^2 = \min_{\vartheta}!$ (kleinste-Quadrate-Methode; vgl. 4.6)

Lösung:

$$\hat{\vartheta} = \hat{\vartheta}(X) = (C^T C)^{-1} \cdot C^T X$$

Beweis:

Wegen $\mu(\vartheta) = C\vartheta$ folgt $M(\vartheta) = \left(\frac{\partial \mu_i}{\partial \vartheta_j} \right)_{i,j} = C$ in 4.6 und somit die Normalgleichung $C^T C \vartheta = C^T X$.

Da $C^T C$ nach Bemerkung 14.1(b) invertierbar ist, ist

$$\hat{\vartheta} = \hat{\vartheta}(X) = (C^T C)^{-1} \cdot C^T X$$

die (einzige) Lösung.

Bemerkung:

Es gilt⁴⁰:

$$E_{\vartheta, \sigma^2}(\hat{\vartheta}) = (C^T C)^{-1} C^T \underbrace{E_{\vartheta, \sigma^2}(X)}_{=C\vartheta} = \vartheta$$

d.h. $\hat{\vartheta}$ ist erwartungstreu für ϑ .

$$\text{Var}_{\vartheta, \sigma^2}(\hat{\vartheta}) = (C^T C)^{-1} C^T \underbrace{\text{Var}_{\vartheta, \sigma^2}(X)}_{=\text{Var}_{\vartheta, \sigma^2}(\varepsilon) = \sigma^2 \cdot I_n} \cdot C (C^T C)^{-1} = \sigma^2 (C^T C)^{-1}$$

Beispiele:

- a) In 14.2(b) (einfache lineare Regression) ist (vgl. 4.7)

$$\hat{\vartheta}_1 = \bar{X} - \hat{\vartheta}_2 \bar{t}, \quad \hat{\vartheta}_2 = \frac{\sum_{i=1}^n t_i X_i - n \cdot \bar{t} \cdot \bar{X}}{\sum_{i=1}^n (t_i - \bar{t})^2}$$

⁴⁰Beachte: $(A^T)^{-1} = (A^{-1})^T$

b) In 14.2(g) (ANOVA) ist

$$C = \begin{pmatrix} 1 & & & & \\ \vdots & & & & \\ 1 & & & & \\ & 1 & & & \\ & \vdots & & & \\ & 1 & & & \\ & & \ddots & & \\ & & & 1 & \\ & & & \vdots & \\ & & & 1 & \end{pmatrix}, \quad C^T C = \begin{pmatrix} n_1 & & & 0 \\ & n_2 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & n_k \end{pmatrix}$$

und somit

$$\hat{\vartheta} = \begin{pmatrix} \hat{\vartheta}_1 \\ \vdots \\ \hat{\vartheta}_k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{n_1} \sum_{j=1}^{n_1} X_{1,j} \\ \vdots \\ \frac{1}{n_k} \sum_{j=1}^{n_k} X_{k,j} \end{pmatrix} =: \begin{pmatrix} \bar{X}_{1+} \\ \vdots \\ \bar{X}_{k+} \end{pmatrix}$$

(+ bedeutet, dass hier summiert wird)

14.4 Satz (Gauß-Markov-Theorem)

Es sei $a \in \mathbb{R}^s$. Dann ist $T := a^T \hat{\vartheta}$ **besten linearer erwartungstreuer** Schätzer für $a^T \vartheta$. (BLUE)

Beweis:

Sei $S = S(X)$ linearer Schätzer für $a^T \vartheta$.

$$\Rightarrow \exists b \in \mathbb{R}^n : S = b^T X$$

S erwartungstreu für $a^T \vartheta \Rightarrow$

$$E_{\vartheta, \sigma^2} S = b^T E_{\vartheta, \sigma^2} X = b^T C \vartheta \stackrel{!}{=} a^T \vartheta \quad \forall \vartheta$$

$$\Rightarrow b^T C = a^T \quad (*)$$

$$\text{Var}_{\vartheta, \sigma^2}(S) b^T \underbrace{\text{Var}_{\vartheta, \sigma^2} X}_{\sigma^2 I_n} \cdot b = \sigma^2 b^T b$$

$$\text{Var}_{\vartheta, \sigma^2}(T) = a^T \text{Var}_{\vartheta, \sigma^2}(\hat{\vartheta}) a = \sigma^2 a^T (C^T C)^{-1} a \stackrel{(*)}{=} \sigma^2 b^T C (C^T C)^{-1} C^T b$$

$$\Rightarrow \text{Var}_{\vartheta, \sigma^2}(S) - \text{Var}_{\vartheta, \sigma^2}(T) = \sigma^2 b^T (I_n - \underbrace{C(C^T C)^{-1} C^T}_{\substack{=: P \\ =: Q}}) b$$

Wegen $P = P^T = P^2$ folgt $Q = Q^T = Q^2$ (vgl. Aufgabe 44) folgt

$$b^T Q b = b^T Q^2 b = b^T Q^T Q b = \|Q b\|^2 \geq 0$$

\Rightarrow Behauptung

Beispiele:

a) 1-faktorielle ANOVA (14.2(g), Beispiel 14.3(b))

$$a^T = (0, \dots, 0, \underbrace{1}_{a_i}, 0, \dots, 0, \underbrace{-1}_{a_j}, 0, \dots, 0), \quad a^T \vartheta = \vartheta_i - \vartheta_j$$

Differenz der Erwartungswerte der i-ten und j-ten Gruppe.

$T = a^T \hat{\vartheta} = \bar{X}_{i+} - \bar{X}_{j+}$ ist BLUE für $a^T \vartheta$.

b) einfache lineare Regression

$$a = \begin{pmatrix} 1 \\ t^* \end{pmatrix}, \quad a^T \vartheta = \vartheta_1 + \vartheta_2 t^*$$

$T = a^T \hat{\vartheta} = \hat{\vartheta}_1 + \hat{\vartheta}_2 t^*$ ist BLUE.

Hier:

$$C = \begin{pmatrix} 1 & t_1 \\ \vdots & \vdots \\ 1 & t_n \end{pmatrix}$$

$$C^T C = \begin{pmatrix} n & n\bar{t} \\ n\bar{t} & \sum t_i^2 \end{pmatrix}, \quad (C^T C)^{-1} = \frac{1}{\sum (t_i - \bar{t})^2} \begin{pmatrix} \frac{1}{n} \sum t_i^2 & -\bar{t} \\ -\bar{t} & 1 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \text{Var}_{\vartheta, \sigma^2}(\hat{\vartheta}_1) = \sigma^2 \frac{\frac{1}{n} \sum t_i^2}{\sum (t_i - \bar{t})^2}$$

$$\text{Var}_{\vartheta, \sigma^2}(\hat{\vartheta}_2) = \sigma^2 \frac{1}{\sum (t_i - \bar{t})^2} \quad (\text{vgl. 4.7})$$

$$\text{Cov}_{\vartheta, \sigma^2}(\hat{\vartheta}_1, \hat{\vartheta}_2) = \frac{-\sigma^2 \bar{t}}{\sum (t_i - \bar{t})^2} \quad (= 0, \text{ falls } \bar{t} = 0)$$

$$\begin{aligned} \text{Var}_{\vartheta, \sigma^2}(T) &= \sigma^2 a^T (C^T C)^{-1} a \\ &= \frac{\sigma^2}{\sum (t_i - \bar{t})^2} \left(\frac{1}{n} \sum t_i^2 - 2t^* \bar{t} + (t^*)^2 \right) \\ &= \sigma^2 \left(\frac{1}{n} + \frac{(t^* - \bar{t})^2}{\sum (t_i - \bar{t})^2} \right) \end{aligned}$$

14.5 Schätzung von σ^2

$$\hat{\sigma}^2 = \hat{\sigma}^2(X) = \frac{1}{n} \underbrace{\|X - C\hat{\vartheta}\|^2}_{=:\hat{\varepsilon}} = \frac{1}{n} \|\hat{\varepsilon}\|^2 = \frac{\hat{\varepsilon}^T \hat{\varepsilon}}{n}$$

($\hat{\varepsilon}$ Residuenvektor)

Bemerkung:

$\hat{\sigma}^2$ ist asymptotisch erwartungstreu, aber nicht erwartungstreu für σ^2 , da nach Aufgabe 44

$$\hat{S}^2 = \frac{n}{n-s} \hat{\sigma}^2 = \frac{1}{n-s} \|\hat{\varepsilon}\|^2$$

erwartungstreu für σ^2 ist.

Ab jetzt stets klassisches lineares Modell ($\varepsilon \sim \mathcal{N}_n(0, \sigma^2 I_n)$)!

14.6 Satz

Im (klassischen) linearen Modell gilt:

- a) $(\hat{\vartheta}, \hat{\sigma})$ ist ML-Schätzer für (ϑ, σ^2)
- b) $\hat{\vartheta} \sim \mathcal{N}_s(\vartheta, \sigma^2 (C^T C)^{-1})$
- c) $\frac{n}{\sigma^2} \hat{\sigma}^2 \sim \chi_{n-s}^2$
- d) $\hat{\vartheta}$ und $\hat{\sigma}^2$ sind stochastisch unabhängig

Beweis:

$$\text{a) } X \sim \mathcal{N}_n(C\vartheta, \sigma^2 I_n)$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow f(x, \vartheta, \sigma^2) &= \frac{1}{(\sigma\sqrt{2\pi})^n} \exp\left\{-\frac{1}{2\sigma^2} \sum_{i=1}^n (x_i - (C\vartheta)_i)^2\right\} \\ &= \frac{1}{(\sigma^2 2\pi)^{\frac{n}{2}}} \exp\left\{-\frac{\|x - C\vartheta\|^2}{2\sigma^2}\right\} \\ &=: L_x(\vartheta, \sigma^2) \end{aligned}$$

Maximieren von L_x bezüglich ϑ bei festem σ^2 führt auf Minimierung von $\|x - C\vartheta\|^2$, Lösung ist $\hat{\vartheta}$.

$$\frac{\partial \log L_x(\hat{\vartheta}, \sigma^2)}{\partial \sigma^2} \stackrel{!}{=} 0$$

$$\hat{\sigma}^2 = \frac{1}{n} \|x - C\hat{\vartheta}\|^2$$

b) folgt aus Bemerkung 14.3 und Normalverteilungs-Annahme

c)

$$\begin{aligned} \varepsilon^T \varepsilon &= (X - C\vartheta)^T (X - C\vartheta) \\ &= (X - C\hat{\vartheta} + C(\hat{\vartheta} - \vartheta))^T (X - C\hat{\vartheta} + C(\hat{\vartheta} - \vartheta)) \\ &= (\hat{\varepsilon} + C(\hat{\vartheta} - \vartheta))^T (\hat{\varepsilon} + C(\hat{\vartheta} - \vartheta)) \\ \Rightarrow \underbrace{\frac{\varepsilon^T \varepsilon}{\sigma^2}}_{\sim \chi_n^2} &= \underbrace{\frac{\hat{\varepsilon}^T \hat{\varepsilon}}{\sigma^2}}_{\sim \chi_s^2} + \underbrace{(\hat{\vartheta} - \vartheta)^T \frac{C^T C}{\sigma^2} (\hat{\vartheta} - \vartheta)}_{(1)} + 2 \underbrace{\hat{\varepsilon}^T C}_{(2)} \frac{(\hat{\vartheta} - \vartheta)}{\sigma^2} \end{aligned}$$

(1) nach Hilfssatz 13.6 und (b)

$$(2) = \varepsilon^T (I_n - P)^T C = \varepsilon^T (I_n - P) C = 0$$

Zu zeigen: $\frac{\hat{\varepsilon}^T \hat{\varepsilon}}{\sigma^2} \sim \chi_{n-s}^2$

Die charakteristische Funktion von χ_k^2 ist

$$\varphi_{\chi_k^2}(t) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{itx} f_k(x) dx = (1 - 2it)^{-\frac{k}{2}}$$

Unabhängigkeit von $\hat{\vartheta}$ und $\hat{\varepsilon}$ nach (d)

$$\Rightarrow (1 - 2it)^{-\frac{n}{2}} = \varphi_{\frac{\hat{\varepsilon}^T \hat{\varepsilon}}{\sigma^2}}(t) \cdot (1 - 2it)^{-\frac{s}{2}}$$

$$\Rightarrow \varphi_{\frac{\hat{\varepsilon}^T \hat{\varepsilon}}{\sigma^2}}(t) = (1 - 2it)^{-\frac{n-s}{2}}$$

Eindeutigkeitssatz für charakteristische Funktionen

$$\Rightarrow \frac{\hat{\varepsilon}^T \hat{\varepsilon}}{\sigma^2} = \frac{n}{\sigma^2} \hat{\sigma}^2 \sim \chi_{n-s}^2$$

$$d) \quad \hat{\vartheta} = (C^T C)^{-1} C^T X = (C^T C)^{-1} C^T (C\vartheta + \varepsilon) = \vartheta + (C^T C)^{-1} C^T \varepsilon$$

$$\begin{aligned} \hat{\varepsilon} &= X - C\hat{\vartheta} \\ &= (I_n - C(C^T C)^{-1} C^T) X \\ &= (I_n - P)(C\vartheta + \varepsilon) \\ &= \underbrace{(I_n - P)C}_{C-C=0} \vartheta + (I_n - P)\varepsilon \\ &= (I_n - P)\varepsilon \\ (&= Q\varepsilon \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\Rightarrow \underbrace{\text{Cov}(\hat{\vartheta}, \hat{\varepsilon})}_{s \times n \text{ Matrix}} &= \text{Cov}(\vartheta + (C^T C)^{-1} C^T \varepsilon, (I_n - P)\varepsilon) \\
&= \text{Cov}((C^T C)^{-1} C^T \varepsilon, (I_n - P)\varepsilon) \\
&= \underbrace{(C^T C)^{-1} C^T}_{s \times n} \cdot \underbrace{\text{Cov}(\varepsilon, \varepsilon)}_{=\text{Var}(\varepsilon)=\sigma^2 I_n} \cdot \underbrace{(I_n - P)^T}_{n \times n} \\
&= \sigma^2 (C^T C)^{-1} \underbrace{((I_n - P)C)^T}_{=0} \\
&= 0
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\hat{\varepsilon} &= (I_n - P)\varepsilon \sim \mathcal{N}_n(0, (I_n - P)\sigma^2(I_n - P)^T) = \mathcal{N}_n(0, \sigma^2(I_n - P)) \\
\hat{\varepsilon}, \hat{\vartheta} &\text{ normalverteilt und unkorreliert} \Rightarrow \hat{\vartheta}, \hat{\varepsilon} \text{ unabhängig} \\
&\Rightarrow \hat{\vartheta}, \hat{\sigma}^2 \text{ stochastisch unabhängig.}
\end{aligned}$$

Bemerkung:

$\hat{\varepsilon} \sim \mathcal{N}_n(0, (I_n - P)\sigma^2)$, d.h. die $\hat{\varepsilon}_i$ haben nicht die gleiche Varianz.

14.7 Konfidenzbereiche für ϑ

a) elliptischer Konfidenzbereich für ϑ :

$$\begin{aligned}
\hat{\vartheta} - \vartheta &\sim \mathcal{N}(0, \sigma^2(C^T C)^{-1}) \\
\Rightarrow (\hat{\vartheta} - \vartheta)^T \frac{C^T C}{\sigma^2} (\hat{\vartheta} - \vartheta) &\sim \chi_s^2; \quad \frac{n\hat{\sigma}^2}{\sigma^2} \sim \chi_{n-s}^2
\end{aligned}$$

Beide Größen sind stochastisch unabhängig.

$$\begin{aligned}
&\Rightarrow \frac{\frac{1}{s}(\hat{\vartheta} - \vartheta)^T C^T C (\hat{\vartheta} - \vartheta)}{\frac{n}{n-s} \hat{\sigma}^2} \sim F_{s, n-s} \\
&\Rightarrow C_E := \{y \in \mathbb{R}^s : \frac{\frac{1}{s}(\hat{\vartheta} - y)^T C^T C (\hat{\vartheta} - y)}{\hat{s}^2} \leq F_{s, n-s, 1-\alpha}\}
\end{aligned}$$

erfüllt $P_{\vartheta, \sigma^2}(C_E(X) \ni \vartheta) = 1 - \alpha \quad \forall \vartheta, \sigma^2$, d.h. C_E ist ein (exakter) $(1 - \alpha)$ -Konfidenzbereich für ϑ .

b) Konfidenzintervall für ϑ_j :

Sei $(C^T C)^{-1} =: (b_{ij})_{s \times s}$. $\hat{\vartheta}_j \sim \mathcal{N}(\vartheta_j, b_{jj}\sigma^2)$

$$\stackrel{14.6(c), (d), 2.1}{\Rightarrow} \frac{\frac{\hat{\vartheta}_j - \vartheta_j}{\sigma \sqrt{b_{jj}}}}{\sqrt{\frac{n}{n-s} \frac{\hat{\sigma}^2}{\sigma^2}}} = \frac{\hat{\vartheta}_j - \vartheta_j}{\hat{s} \cdot \sqrt{b_{jj}}} \sim t_{n-s} (\sim \sqrt{F_{1, n-s}})$$

$$\Rightarrow P_{\vartheta, \sigma^2}(|\hat{\vartheta}_j - \vartheta_j| \leq t_{n-s, 1-\frac{\alpha}{2}} \cdot \hat{s} \sqrt{b_{jj}}) = 1 - \alpha$$

d.h. $\hat{\vartheta}_j \pm t_{n-s, 1-\frac{\alpha}{2}} \cdot \hat{s} \sqrt{b_{jj}}$ ist zweiseitiges $(1 - \alpha)$ -Konfidenzintervall für ϑ_j .

- c) quaderförmiger Konfidenzbereich für ϑ („Bonferroni-Methode“):
 Regel von den kleinen Ausnahmewahrscheinlichkeiten:

$$P(A_j) \geq 1 - \frac{\alpha}{s}, j = 1, \dots, s \Rightarrow P\left(\bigcap_{j=1}^s A_j\right) \geq 1 - \alpha$$

Denn:

$$P\left(\bigcap_{j=1}^s A_j\right) = 1 - P\left(\left(\bigcap_{j=1}^s A_j\right)^C\right) = 1 - P\left(\bigcup_{j=1}^s A_j^C\right) \geq 1 - \sum_{j=1}^s \underbrace{P(A_j^C)}_{\leq \frac{\alpha}{s}} \geq 1 - \alpha$$

Somit gilt für

$$C_Q(x) := \times_{j=1}^s [\hat{\vartheta}_j(x) - r(x), \hat{\vartheta}_j(x) + r(x)]$$

mit $r(x) := t_{n-s, 1-\frac{\alpha}{2s}} \cdot \hat{s} \sqrt{b_{jj}}$:

$$P_{\vartheta, \sigma^2}(C_Q(X) \ni \vartheta) \geq 1 - \alpha \quad \forall \vartheta, \sigma^2$$

d.h. C_Q ist quaderförmiger $(1 - \alpha)$ -Konfidenzbereich für ϑ .

Bemerkung:

C_E hat kleineres Volumen wie C_Q , aber C_Q ist leichter zu interpretieren.

- d) Konfidenzintervall für $a^T \vartheta$:

$$a^T \hat{\vartheta} \sim \mathcal{N}(a^T \vartheta, \sigma^2 \cdot a^T (C^T C)^{-1} a)$$

$$\Rightarrow \frac{a^T (\hat{\vartheta} - \vartheta)}{\hat{s} \sqrt{a^T (C^T C)^{-1} a}} = \frac{\frac{a^T (\hat{\vartheta} - \vartheta)}{\sigma \sqrt{a^T (C^T C)^{-1} a}}}{\sqrt{\frac{\hat{s}^2}{\sigma^2}}} \sim t_{n-s}$$

\Rightarrow Mit $r := t_{n-s, 1-\frac{\alpha}{2}} \cdot \hat{s} \sqrt{a^T (C^T C)^{-1} a}$ ist $[a^T \hat{\vartheta} - r, a^T \hat{\vartheta} + r]$ $(1 - \alpha)$ -Konfidenzintervall für $a^T \vartheta$.

Beispiel:

einfache lineare Regression (vgl. Beispiel 14.4(b))

$$a = \begin{pmatrix} 1 \\ t^* \end{pmatrix}, \quad r = t_{n-2, 1-\frac{\alpha}{2}} \cdot \hat{s} \sqrt{\frac{1}{n} + \frac{(t^* - \bar{t})^2}{\sum_i (t_i - \bar{t})^2}}$$

$[\hat{\vartheta}_1 + \hat{\vartheta}_2 \cdot t^* - r, \hat{\vartheta}_1 + \hat{\vartheta}_2 \cdot t^* + r]$ ist $(1 - \alpha)$ -Konfidenzintervall für $a^T \vartheta = \vartheta_1 + \vartheta_2 \cdot t^*$.

14.8 Tests von linearen Hypothesen im linearen Modell

$$X = C\vartheta + \varepsilon, \varepsilon \sim \mathcal{N}_n(0, \sigma^2 \cdot I_n)$$

Zu testen sei „lineare Hypothese“

$$H_0 : H\vartheta = h \text{ gegen } H_1 : H\vartheta \neq h$$

Dabei: H $r \times s$ -Matrix, $\text{Rang}(H) = r$ (insbesondere $r \leq s$), $h \in \mathbb{R}^r$ gegeben

$$H_0 \hat{=} \Theta_0 := \{(\vartheta, \sigma^2) \in \underbrace{\mathbb{R}^s \times \mathbb{R}_{>0}}_{=\Theta} : H\vartheta = h\}, \quad H_1 \hat{=} \Theta \setminus \Theta_0$$

14.9 Beispiele

a) $X_j = \vartheta_1 + \vartheta_2 \cdot t_j + \varepsilon_j, j = 1, \dots, n$ (einfache lineare Regression)

$$H_0 : \vartheta_2 = 0 \text{ gegen } H_1 : \vartheta_2 \neq 0$$

„Lineare Hypothese“: $H = (0, 1), h = 0$ ($s = 2, r = 1$)

$$H_0 : H \cdot \begin{pmatrix} \vartheta_1 \\ \vartheta_2 \end{pmatrix} = 0$$

Möglicher Test: Verallgemeinerter Likelihood-Quotienten-Test
Testgröße Λ_n bzw. $\log \Lambda_n$.

$$\Lambda_n := \frac{\sup_{(\vartheta, \sigma^2) \in \Theta_0} f(x, \vartheta, \sigma^2)}{\sup_{\Theta} f(x, \vartheta, \sigma^2)}$$

Unter H_0 : $X_j = \vartheta_1 + \varepsilon_j, X_j \sim \mathcal{N}(\vartheta_1, \sigma^2)$, ML-Schätzer für ϑ_1 : \bar{X}_n

Ohne Restriktion: ML-Schätzer = KQ-Schätzer⁴¹ = $\hat{\vartheta}$ (Satz 14.6(a))

Als Schätzer für σ^2 wird aber üblicherweise in beiden Fällen der Schätzer $\hat{\sigma}^2$ aus Obermodell verwendet!

Dann⁴²:

$$\log \Lambda_n = -\frac{1}{2\hat{\sigma}^2} \left[\underbrace{\sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X}_n)^2}_{=: SS_0} - \underbrace{\sum_{i=1}^n (X_i - (\hat{\vartheta}_1 + \hat{\vartheta}_2 t_i))^2}_{=: SS_1 (= n\hat{\sigma}^2)} \right]$$

Als Testgröße wird

$$T := \frac{SS_0 - SS_1}{\frac{SS_1}{n-2}}$$

verwendet. Es gilt:

⁴¹Kleinste-Quadrate-Schätzer

⁴²SS: sum of squares

- (i) $\frac{SS_1}{\sigma^2} \sim \chi_{n-2}^2$ (nach 14.6(c))
- (ii) $\frac{SS_0}{\sigma^2} \sim \chi_{n-1}^2$ unter H_0 (nach 2.2)
- (iii) $SS_0 - SS_1$ und SS_1 stochastisch unabhängig (ohne Beweis)

$$\underbrace{\frac{SS_0}{\sigma^2}}_{\substack{H_0 \\ \sim \chi_{n-1}^2}} = \frac{SS_0 - SS_1}{\sigma^2} + \underbrace{\frac{SS_1}{\sigma^2}}_{\sim \chi_{n-2}^2}$$

$$\Rightarrow \frac{SS_0 - SS_1}{\sigma^2} \sim \chi_{n-1-(n-2)}^2 = \chi_1^2 \text{ unter } H_0 \text{ (vgl. Beweis von 14.6(c))}$$

Damit $T \sim F_{1,n-2}$ unter H_0 .

- b) $X_{i,j} = \vartheta_j + \varepsilon_{i,j}$ ($i = 1, \dots, k, j = 1, \dots, n_i$) (einfache Varianzanalyse⁴³)

$$H_0 : \vartheta_1 = \dots = \vartheta_k$$

(„kein Effekt des zu untersuchenden Faktors“)

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ & \ddots & \vdots \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}}_{=: H \in \mathbb{R}^{k-1 \times k}} \cdot \begin{pmatrix} \vartheta_1 \\ \vdots \\ \vartheta_k \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}}_{=: h \in \mathbb{R}^{k-1}}$$

$$\text{Rang}(H) = k - 1 (= r)$$

Testgröße: (vgl. Aufgabe 45)

$$\text{Sei } \bar{X}_{i+} = \frac{1}{n_i} \sum_{j=1}^{n_i} X_{i,j}, \bar{X}_{++} = \frac{1}{n} \sum_{i,j} X_{i,j}, n = \sum_{i=1}^k n_i, \\ \text{SQZ} = \sum_{i=1}^k n_i (\bar{X}_{i+} - \bar{X}_{++})^2, \text{SQI} = \sum_{i,j} (X_{i,j} - \bar{X}_{i+})^2$$

$$\sum_{i,j} (X_{i,j} - \bar{X}_{++})^2 = \text{SQI} + \text{SQZ}$$

$$T := \frac{\frac{\text{SQZ}}{k-1}}{\frac{\text{SQI}}{n-k}} \sim F_{k-1, n-k} \text{ unter } H_0$$

⁴³ $k \hat{=} s$

14.10 Die Testgröße bei allgemeinen linearen Hypothesen

$$\hat{\vartheta} \sim \mathcal{N}_j(\vartheta, \sigma^2(C^T C)^{-1})$$

$$\Rightarrow H\hat{\vartheta} \sim \mathcal{N}_r(H\vartheta, \sigma^2 \underbrace{H(C^T C)^{-1}H^T}_{=:B})$$

$$\frac{\frac{1}{r} \cdot \frac{1}{\sigma^2} (H\hat{\vartheta} - H\vartheta)^T B^{-1} (H\hat{\vartheta} - H\vartheta)}{\frac{\hat{s}^2}{\sigma^2}} \sim \frac{\frac{\chi_r^2}{r}}{\frac{\chi_{n-s}^2}{n-s}} \sim F_{r,n-s}$$

(Zähler und Nenner sind stochastisch unabhängig.)

Sei

$$T := \frac{\frac{1}{r} (H\hat{\vartheta} - h)^T (H(C^T C)^{-1}H^T)^{-1} (H\hat{\vartheta} - h)}{\hat{s}^2} \sim F_{r,n-s} \quad \text{unter } H_0$$

Der sogenannte **F-Test** im linearen Modell besitzt die Gestalt:

H_0 ablehnen, falls $T \geq F_{r,n-s,1-\alpha}$.

Kein Widerspruch zu H_0 , falls $T < F_{r,n-s,1-\alpha}$.

Bemerkung:

Für die Beispiele aus 14.9 stimmt die obige Testgröße mit den Testgrößen aus 14.9(a) bzw. (b) überein.