§ 13.

Wegintegrale

In diesem Paragraphen seien alle vorkommenden Wege stets stückweise stetig differenzierbar.

Definition
Sei $\gamma : [a, b] \to \mathbb{R}^n$ ein Weg, $\gamma = (\eta_1, \ldots, \eta_n), \Gamma := \Gamma_\gamma$. $g : \Gamma \to \mathbb{R}$ stetig und $f = (f_1, \ldots, f_n) : \Gamma \to \mathbb{R}^n$ stetig.

(1) Für $j \in \{1, \ldots, n\} : \int_\gamma g(x) \ \mathrm{d}x_j := \int_a^b g(\gamma(t)) \cdot \eta_j'(t) \ \mathrm{d}t$

(2)

$$\begin{aligned}\int_\gamma f(x) \cdot \mathrm{d}x &:= \int_\gamma f_1(x) \ \mathrm{d}x_1 + \cdots + f_n(x) \ \mathrm{d}x_n \\ &:= \sum_{j=1}^n \int_\gamma f_j(x) \ \mathrm{d}x_j\end{aligned}$$

Es ist $\int_\gamma f(x) \cdot \mathrm{d}x = \int_a^b f(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t) \ \mathrm{d}t$ und heißt das **Wegintegral von f längs** γ.

Beispiel
$f(x, y, z) := (z, y, x),\ \gamma(t) = (t, t^2, 3t),\ t \in [0, 1]$. $f(\gamma(t)) = (3t, t^2, t),\ \gamma'(t) = (1, 2t, 3),\ f(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t) = 3t + 2t^3 + 3t = 6t + 2t^3$.

$\int_\gamma f(x, y, z) \cdot d(x, y, z) = \int_0^1 (6t + 2t^3) dt = \frac{7}{2}$.

Satz 13.1 (Rechnen mit Wegintegralen)
γ, Γ, f seien wie oben, $g : \Gamma \to \mathbb{R}^n$ sei stetig, $\hat{\gamma} = (\hat{\gamma}_1, \ldots, \hat{\gamma}_n) : [\alpha, \beta] \to \mathbb{R}^n$ sei rektifizierbar und $\xi, \eta \in \mathbb{R}$.

(1) $\displaystyle\int_\gamma (\xi f(x) + \eta g(x)) \cdot dx = \xi \int_\gamma f(x) \cdot dx + \eta \int_\gamma g(x) \cdot dx$

(2) Ist $\gamma = \gamma^{(1)} \oplus \gamma^{(2)} \implies \displaystyle\int_\gamma f(x) \cdot dx = \int_{\gamma^{(1)}} f(x) \cdot dx + \int_{\gamma^{(2)}} f(x) \cdot dx$

(3) $\displaystyle\int_{\gamma^-} f(x) \cdot dx = -\int_\gamma f(x) \cdot dx$

(4) $\displaystyle\left|\int_\gamma f(x) \cdot dx\right| \leq L(\gamma) \cdot \max\{\|f(x)\| : x \in \Gamma\}$

(5) Ist $\hat{\gamma} \sim \gamma \implies \displaystyle\int_\gamma f(x) \cdot dx = \int_{\hat{\gamma}} f(x) \cdot dx.$

Beweis

(1) klar

(2) Ana I, 26.1(3)

(3) nur für γ stetig differenzierbar. $\gamma^-(t) = \gamma(b+a-t),\ t \in [a,b]$.

$\int_{\gamma^-} f(x) \cdot dx = \int_a^b f(\gamma(b+a-t)) \cdot \gamma'(b+a-t)(-1)dt =$ (subst. $\tau = b+a-t,\ d\tau = dt$) $= \int_b^a f(\gamma(\tau)) \cdot \gamma'(\tau)d\tau = -\int_a^b f(\gamma(\tau)) \cdot \gamma'(\tau)d\tau = -\int_\gamma f(x) \cdot dx$.

(4) Übung

(5) Sei $\hat{\gamma} = \gamma \circ h,\ h : [\alpha, \beta] \to [a,b]$ stetig und streng wachsend. $h(\alpha) = a,\ h(\beta) = b$. Nur für γ und h stetig db. Dann ist $\hat{\gamma}$ stetig db.

$\int_{\hat{\gamma}} f(x) \cdot dx = \int_\alpha^\beta f(\gamma(h(t))) \cdot \gamma'(h(t)) \cdot h'(t)dt =$ (subst. $\tau = h(t),\ d\tau = h'(t)dt$) $= \int_a^b f(\gamma(\tau)) \cdot \gamma'(\tau)d\tau = \int_\gamma f(x) \cdot dx$. ∎

Definition

γ, Γ seien wie immer in diesem Paragraphen. s sei die zu γ gehörende Weglängenfunktion und $g : \Gamma \to \mathbb{R}$ stetig. 12.4 $\implies$ s ist wachsend $\xRightarrow{\text{Ana I}}$ $s \in BV[a,b]$; $g \circ \gamma$ stetig $\xRightarrow{\text{Ana I, 26.6}}$ $g \circ \gamma \in R_s[a,b]$.

$$\int_\gamma g(x)ds := \int_a^b g(\gamma(t))ds(t)$$

Integral bzgl. der Weglänge.

Satz 13.2 (Rechnen mit Integralen bezgl. der Weglänge)
Seien γ, g wie oben.

(1) $\displaystyle\int_{\gamma^-} g(x)ds = \int_\gamma g(x)ds$

(2) Ist $\gamma = \gamma^{(1)} \oplus \gamma^{(2)} \implies \displaystyle\int_\gamma g(x)ds = \int_{\gamma^{(1)}} g(x)ds + \int_{\gamma^{(2)}} g(x)ds.$

(3) Ist γ stetig db $\implies \displaystyle\int_\gamma g(x)ds = \int_a^b g(\gamma(t))\|\gamma'(t)\|dt.$

Beispiel

$g(x,y) = (1 + x^2 + 3y)^{1/2},\ \gamma(t) = (t, t^2),\ t \in [0,1]$.

$g(\gamma(t)) = (1+t^2+3t^2)^{1/2} = (1+4t^2)^{1/2}$, $\gamma'(t) = (1,2t)$, $\|\gamma'(t)\| = (1+4t^2)^{1/2} \implies \int_\gamma g(x,y)ds = \int_0^1 (1+4t^2)dt = \frac{7}{3}$

Gegeben: $\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_m$ rektifizierbare Wege, $\gamma_k : [a_k, b_k] \to \mathbb{R}^n$ mit $\gamma_1(b_1) = \gamma_2(a_2), \gamma_2(b_2) = \gamma_3(a_3), \dots, \gamma_{m-1}(b_{m-1}) = \gamma_m(a_m)$. $\Gamma := \Gamma_{\gamma_1} \cup \ldots \cup \Gamma_{\gamma_m}$.

$\mathrm{AH}(\gamma_1, \dots, \gamma_m) := \{\gamma : \gamma$ ist ein rektifizierbarer Weg im $\mathbb{R}^n$ mit: $\Gamma_\gamma = \Gamma$, $L(\gamma) = L(\gamma_1) + \cdots + L(\gamma_m)$ und $\int_\gamma f(x) \cdot dx = \int_{\gamma_1} f(x) \cdot dx + \cdots + \int_{\gamma_m} f(x) \cdot dx$ für *jedes* stetige $f : \Gamma \to \mathbb{R}^n\}$.

Ist $\gamma \in \mathrm{AH}(\gamma_1, \dots, \gamma_m)$, so sagt man γ entsteht durch **Aneinanderhängen** der Wege $\gamma_1, \dots, \gamma_m$.

Satz 13.3 (Stetige Differenzierbarekeit der Aneinanderhängung)
$\gamma_1, \dots, \gamma_m$ seien wie oben. Dann: $\mathrm{AH}(\gamma_1, \dots, \gamma_m) \neq \emptyset$.
Sind $\gamma_1, \dots, \gamma_m$ stetig differenzierbar, so existiert ein stückweise stetig differenzierbarer Weg $\gamma \in \mathrm{AH}(\gamma_1, \dots, \gamma_m)$.

Beweis
O.B.d.A: $m = 2$.

Def. $h : [b_1, c] \to [a_2, b_2]$ linear wie folgt: $h(x) = px + q$, $h(b_1) = a_2$, $h(c) = b_2$. $\hat{\gamma}_2 := \gamma_2 \circ h$. Dann: $\gamma_2 \sim \hat{\gamma}_2$. $\gamma := \gamma_1 \oplus \hat{\gamma}_2$. 12.2, 12.7, 13.2 $\implies \gamma \in \mathrm{AH}(\gamma_1, \gamma_2)$. ■

Beispiel
In allen Beispielen sei $f(x,y) = (y, x-y)$ und $t \in [0,1]$.

(1) $\gamma_1(t) = (t, 0)$, $\gamma_2(t) = (1, t)$.

Sei $\gamma \in \mathrm{AH}(\gamma_1, \gamma_2)$. Anfangspunkt von γ ist (0,0), Endpunkt von γ ist (1,1). Nachrechnen: $\int_{\gamma_1} f(x,y) \cdot d(x,y) = 0$, $\int_{\gamma_2} f(x,y) \cdot d(x,y) = \frac{1}{2}$. Also: $\int_\gamma f(x,y) \cdot d(x,y) = \frac{1}{2}$

(2) $\gamma_1(t) = (0, t)$, $\gamma_2(t) = (t, 1)$.

Sei $\gamma \in \mathrm{AH}(\gamma_1, \gamma_2)$, Anfangspunkt von γ ist (0,0), Endpunkt von γ ist (1,1). Nachrechnen: $\int_\gamma f(x,y) \cdot d(x,y) = \frac{1}{2}$

(3) $\gamma(t) = (t, t^3)$. Anfangspunkt von γ ist (0,0), Endpunkt von γ ist (1,1). Nachrechnen: $\int_\gamma f(x,y) \cdot d(x,y) = \frac{1}{2}$