

## 5 Optimale erwartungstreue Schätzer

### 5.1 Definition

Seien  $X_1, \dots, X_n$  reelle Zufallsvariablen,  $T = T(X_1, \dots, X_n)$  reellwertige Statistik.

$T$  heißt **linear**  $:\Leftrightarrow \exists c_1, \dots, c_n \in \mathbb{R}$  mit  $T = \sum_{j=1}^n c_j X_j$

### 5.2 Satz

Seien  $X_1, \dots, X_n \stackrel{uiv}{\sim} X$ ,  $EX^2 < \infty$ ,  $\mu := EX$ ,  $\sigma^2 := \text{Var}(X)$ ,  $(\mu, \sigma^2)$  unbekannt. Es sei  $T$  ein beliebiger linearer erwartungstreuer Schätzer für  $\mu$ . Dann gilt:

$$\text{Var}(T) \geq \text{Var}(\bar{X}_n) = \frac{\sigma^2}{n}$$

Beweis:

Sei  $T = \sum_{j=1}^n c_j X_j$ .

$T$  erwartungstreu

$$\Rightarrow \mu = E(T) = \mu \sum_{j=1}^n c_j$$

$$\Rightarrow \sum_{j=1}^n c_j = 1$$

$$\text{Var}(T) = \sigma^2 \sum_{j=1}^n c_j^2$$

$$\underbrace{\left( \sum_{j=1}^n c_j \cdot 1 \right)^2}_{=1} \leq \sum_{j=1}^n c_j^2 \underbrace{\sum_{j=1}^n 1^2}_{=n}$$

(Cauchy-Schwarz)

$$\sum_{j=1}^n c_j^2 \geq \frac{1}{n}$$

$$\sum_{j=1}^n c_j^2 = \frac{1}{n} \Leftrightarrow c_j = \frac{1}{n} \quad \forall j$$

$\Rightarrow T = \bar{X}_n$ . ■

### 5.3 Situation

Sei  $(\mathfrak{X}, \mathcal{B}, \{P_\vartheta : \vartheta \in \Theta\})$ ,  $\Theta \subset \mathbb{R}^k$ , ein statistischer Raum.  $X_1, \dots, X_n \overset{uiv}{\sim} P_\vartheta$ .

$g : \Theta \rightarrow \mathbb{R}$  Funktional

$g(\vartheta)$  interessierender Parameter.

Sei

$$U_g = \{T \mid T : \mathfrak{X}^n \rightarrow \mathbb{R} \text{ messbar, } E_\vartheta T = g(\vartheta) \forall \vartheta \in \Theta, E_\vartheta T^2 < \infty \forall \vartheta \in \Theta\}$$

die Menge aller erwartungstreuen Schätzer für  $g(\vartheta)$  mit endlicher Varianz.

Annahme:  $U_g \neq \emptyset$

Sei

$$m(\vartheta) := \inf\{\text{Var}_\vartheta(T) : T \in U_g\}$$

### 5.4 Definition

Ein  $T_0 \in U_g$  mit  $\text{Var}_\vartheta(T_0) = m(\vartheta) \forall \vartheta \in \Theta$  heißt **UMVUE**.  
(Uniformly Minimum Variance Unbiased Estimator)

### 5.5 Satz

Falls  $T_1$  und  $T_2$  UMVUE, so gilt

$$P_\vartheta(T_1 = T_2) = 1 \forall \vartheta \in \Theta$$

Beweis:

$U_g$  ist konvex, d.h.

$$S, T \in U_g \Rightarrow \lambda S + (1 - \lambda)T \in U_g \forall \lambda \in [0, 1]$$

Seien  $T_1, T_2$  UMVUE.

$$\Rightarrow \frac{1}{2}(T_1 + T_2) \in U_g$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \underbrace{\text{Var}_\vartheta\left(\frac{1}{2}(T_1 + T_2)\right)}_{= \frac{1}{4}(\text{Var}_\vartheta(T_1) + \text{Var}_\vartheta(T_2) + 2\text{Cov}_\vartheta(T_1, T_2))} &\geq \text{Var}_\vartheta(T_1) (= m(\vartheta) = \text{Var}_\vartheta(T_2)) \\ \Rightarrow \text{Var}_\vartheta(T_1) &\leq \text{Cov}_\vartheta(T_1, T_2) \overset{\text{CSU}}{\leq} \sqrt{\text{Var}_\vartheta(T_1) \text{Var}_\vartheta(T_2)} = \text{Var}_\vartheta(T_1) \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \text{Var}_{\vartheta}(T_1) = \text{Cov}_{\vartheta}(T_1, T_2)$$

$$\Rightarrow \text{Var}_{\vartheta}(T_1 - T_2) = \text{Var}_{\vartheta}(T_1) + \text{Var}_{\vartheta}(T_2) - 2 \text{Cov}_{\vartheta}(T_1, T_2) = 0$$

$$E_{\vartheta}(T_1 - T_2) = 0$$

$$\Rightarrow P_{\vartheta}(T_1 = T_2) = 1. \blacksquare$$

## 5.6 Definition und Satz

Sei

$$\mathcal{S}_n := \{\pi = (\pi(1), \dots, \pi(n)) : \pi \text{ Permutation von } \{1, \dots, n\}\}$$

Für Statistik  $T : \mathfrak{X}^n \rightarrow \mathbb{R}$  sei  $T^{\pi}(X_1, \dots, X_n) = T(X_{\pi(1)}, \dots, X_{\pi(n)})$ .

In der Situation von 5.3 heißt  $T$  (im wesentlichen) symmetrisch : $\Leftrightarrow$

$$P_{\vartheta}(T^{\pi} = T) = 1 \quad \forall \vartheta \in \Theta \forall \pi \in \mathcal{S}_n$$

$T_0 \in U_g$  UMVUE  $\Rightarrow T$  symmetrisch.

Beweis:

Sei  $\pi \in \mathcal{S}_n$ ,  $\vartheta \in \Theta$  beliebig.

Wegen  $X_1, \dots, X_n \stackrel{uiv}{\sim} P_{\vartheta}$  folgt  $T_0^{\pi} \sim T_0$  unter  $P_{\vartheta}$

$$\left. \begin{aligned} \Rightarrow E_{\vartheta}(T_0^{\pi}) &= E_{\vartheta}(T_0) = g(\vartheta) \\ \Rightarrow \text{Var}_{\vartheta}(T_0^{\pi}) &= \text{Var}_{\vartheta}(T_0) = m(\vartheta) \end{aligned} \right\} \Rightarrow T_0^{\pi} \in U_g, \text{ UMVUE}$$

Satz 5.5  $\Rightarrow P_{\vartheta}(T_0^{\pi} = T_0) = 1. \blacksquare$

## 5.7 Reguläre Verteilungsklassen

Situation:

Sei  $(\mathfrak{X}, \mathcal{B}, \{P_{\vartheta} : \vartheta \in \Theta\})$  statistischer Raum mit  $(\mathfrak{X}, \mathcal{B}) = (\mathbb{R}^n, \mathcal{B}^n)$ ,  $\Theta \subset \mathbb{R}^k$ ,  $\Theta$  offen.

$X = (X_1, \dots, X_n)$  Zufallsvektor mit Verteilung  $P_{\vartheta}$  ( $\vartheta \in \Theta$ ),  $P_{\vartheta}$  besitze Dichte  $f(x, \vartheta)$  bezüglich  $\mu$ , dabei sei  $\mu$  entweder das Lebesgue-Maß oder das Zählmaß auf einer abzählbaren Teilmenge des  $\mathbb{R}^n$ .

$T : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^s$  sei Statistik mit  $E_{\vartheta}\|T\|^2 < \infty$ , Kovarianzmatrix<sup>15</sup> von  $T$ :<sup>16</sup>

$$\text{Var}_{\vartheta}(T) := E_{\vartheta}[(T - E_{\vartheta}T)(T - E_{\vartheta}T)^T]$$

<sup>15</sup>Schreibweise für Kovarianzmatrix hier nicht  $\text{Cov}_{\vartheta}$ , sondern  $\text{Var}_{\vartheta}$ . Beachte dazu die Fälle  $s = 1$  und  $s > 1$ !

<sup>16</sup>Bei Vektoren manchmal Schreibweise  $x'$  für  $x^T$ .

Folgende Regularitätsbedingungen sollen gelten:

- a)  $\forall x \in \mathfrak{X}$  existiert  $\frac{\partial}{\partial \vartheta_j} f(x, \vartheta)$  und ist stetig. ( $j = 1, \dots, k$ )  
 b)

$$\frac{d}{d\vartheta} \int f(x, \vartheta) \mu(dx) = \int \frac{d}{d\vartheta} f(x, \vartheta) \mu(dx)$$

wobei hier  $\frac{d}{d\vartheta} := (\frac{\partial}{\partial \vartheta_1}, \dots, \frac{\partial}{\partial \vartheta_k})^T$ .

Der  $k$ -dimensionale Zufallsvektor

$$\mathcal{U}_n(\vartheta) := \frac{d}{d\vartheta} \log f(X, \vartheta) = \frac{\frac{d}{d\vartheta} f(X, \vartheta)}{f(X, \vartheta)}$$

heißt Score-Vektor.

Die  $k \times k$ -Matrix

$$I_n(\vartheta) := E_{\vartheta}[\mathcal{U}_n(\vartheta) \cdot \mathcal{U}_n(\vartheta)^T] = \left( E_{\vartheta} \left[ \frac{\partial}{\partial \vartheta_i} \log f(X, \vartheta) \frac{\partial}{\partial \vartheta_j} \log f(X, \vartheta) \right] \right)_{i,j=1,\dots,k}$$

heißt **Fisher-Informationsmatrix** (von  $f$  an der Stelle  $\vartheta$ ):

- c)  $I_n(\vartheta)$  existiert und ist positiv definit.

Eine Verteilungsklasse  $\{P_{\vartheta} : \vartheta \in \Theta\}$ , die die Bedingungen (a)-(c) erfüllt, heißt **regulär**.

## 5.8 Lemma

In der Situation von 5.7 gilt:

$E_{\vartheta} \mathcal{U}_n(\vartheta) = 0 \ \forall \vartheta \in \Theta$  und somit  $I_n(\vartheta) = \text{Var}_{\vartheta}(\mathcal{U}_n(\vartheta))$ ,  $\vartheta \in \Theta$ , d.h. die Fisher-Informationsmatrix ist Kovarianzmatrix des Score-Vektors.

Beweis:

$$E_{\vartheta} \mathcal{U}_n(\vartheta) \stackrel{(*)}{=} \int \frac{\frac{d}{d\vartheta} f(x, \vartheta)}{f(x, \vartheta)} f(x, \vartheta) d\mu(x) \stackrel{(b)}{=} \frac{d}{d\vartheta} \underbrace{\int f(x, \vartheta) d\mu(x)}_{=1} = 0$$

(\*): Integration bezüglich  $P_{\vartheta}$ ;  $P_{\vartheta}$  hat aber Dichte  $f(x, \vartheta)$  bezüglich  $\mu$

## 5.9 Bemerkung

Gelegentlich werden die weiteren Voraussetzungen

d)  $\forall x \in \mathfrak{X}$  existiert  $\frac{\partial^2}{\partial \vartheta_i \partial \vartheta_j} f(x, \vartheta)$  und ist stetig. ( $i, j = 1, \dots, k$ )

e)

$$\frac{\partial^2}{\partial \vartheta_i \partial \vartheta_j} \int f(x, \vartheta) \mu(dx) = \int \frac{\partial^2}{\partial \vartheta_i \partial \vartheta_j} f(x, \vartheta) \mu(dx) \quad \forall i, j = 1, \dots, k$$

benötigt.

Wir führen noch die folgenden Notationen ein:

$$W_n(\vartheta) := \left( \frac{\partial^2}{\partial \vartheta_i \partial \vartheta_j} \log f(X, \vartheta) \right)_{1 \leq i, j \leq k} =: \frac{d^2}{d\vartheta d\vartheta^T} \log f(X, \vartheta)$$

## 5.10 Lemma

Unter (d) und (e) gilt:

$$I_n(\vartheta) = -E_\vartheta W_n(\vartheta)$$

Beweis:

Wegen

$$\frac{\partial^2}{\partial \vartheta_i \partial \vartheta_j} \log f = \frac{\frac{\partial^2}{\partial \vartheta_i \partial \vartheta_j} f}{f} - \frac{(\frac{\partial}{\partial \vartheta_i} f)(\frac{\partial}{\partial \vartheta_j} f)}{f^2}$$

folgt

$$\begin{aligned} E_\vartheta(W_n(\vartheta)) &= \int \frac{d^2}{d\vartheta d\vartheta^T} \log f(x, \vartheta) \cdot f(x, \vartheta) d\mu(x) \\ &= \underbrace{\left( \int \frac{\partial^2}{\partial \vartheta_i \partial \vartheta_j} f(x, \vartheta) \mu(dx) \right)_{i,j}}_{=0 \text{ nach (e) [vgl. 5.7]}} \\ &\quad - \left( \int \frac{\partial}{\partial \vartheta_i} \log f(x, \vartheta) \cdot \frac{\partial}{\partial \vartheta_j} \log f(x, \vartheta) \cdot f(x, \vartheta) d\mu(x) \right)_{i,j} \\ &= -E_\vartheta[\mathcal{U}_n(\vartheta) U_n n(\vartheta)^T] \\ &= -I_n(\vartheta) \end{aligned}$$

### 5.11 Reguläre Statistiken (Schätzer)

In der Situation von 5.7 heißt eine Statistik  $T : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^s$  **regulär**, falls gilt:

- f) Die Funktion  $\Theta \ni \vartheta \mapsto E_\vartheta T \in \mathbb{R}^s$  ist stetig differenzierbar.
- g) Differenziation und Integration können vertauscht werden:

$$\frac{\partial}{\partial \vartheta_j} \int T(x) f(x, \vartheta) \mu(dx) = \int T(x) \frac{\partial}{\partial \vartheta_j} f(x, \vartheta) \mu(dx) \quad j = 1, \dots, k$$

Mit

$$C_n(\vartheta) := \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial \vartheta_1} E_\vartheta T_1 & \cdots & \frac{\partial}{\partial \vartheta_1} E_\vartheta T_s \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial}{\partial \vartheta_k} E_\vartheta T_1 & \cdots & \frac{\partial}{\partial \vartheta_k} E_\vartheta T_s \end{bmatrix}_{k \times s} = \frac{d}{d\vartheta} E_\vartheta T^T$$

wird Bedingung (g) zu

$$C_n(\vartheta) = E_\vartheta [\mathcal{U}_n(\vartheta) T^T]$$

Wegen  $E_\vartheta [\mathcal{U}_n(\vartheta)] = 0$  folgt

$$C_n(\vartheta) = E_\vartheta [\mathcal{U}_n(\vartheta) (T - E_\vartheta T)^T]$$

### 5.12 Strukturlemma

Vorbemerkung:

Seien  $A, B$   $n \times n$ -Matrizen.

$A \geq B \Leftrightarrow A - B$  positiv semidefinit<sup>17</sup> ( $\Leftrightarrow x^T A x \geq x^T B x \quad \forall x \in \mathbb{R}^n$ )

(„ $\geq$ “ definiert Loewner-Halbordnung)

Es seien  $T : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^s$  eine Statistik,  $P_\vartheta$  Verteilung auf  $\mathcal{B}^n$ ,  $V(\vartheta)$  ein  $k$ -dimensionaler Zufallsvektor mit  $E_\vartheta V(\vartheta) = 0$  und positiv definiter Kovarianzmatrix

$$J(\vartheta) = E_\vartheta [V(\vartheta) \cdot V(\vartheta)^T]$$

Definiert man

$$D(\vartheta) := E_\vartheta [V(\vartheta) \cdot (T - E_\vartheta T)^T]$$

( $k \times s$ -Matrix), so gilt<sup>18</sup>:

$$\text{Var}_\vartheta(T) \geq D^T(\vartheta) \cdot J^{-1}(\vartheta) \cdot D(\vartheta)$$

<sup>17</sup>  $A - B \geq 0$

<sup>18</sup>  $\text{Var}_\vartheta(T)$  ist Kovarianzmatrix, da  $T$  vektorwertig; im Folgenden wird diese Schreibweise bei (Zufalls-)Vektoren meistens angewandt (...)

„=“ gilt genau dann, wenn  $T = E_{\vartheta}T + D^T(\vartheta) \cdot J^{-1}(\vartheta) \cdot V(\vartheta)$   $P_{\vartheta}$ -f.s.

Beweis:

Für jeden Zufallsvektor  $Y_{k \times 1}$  gilt:

$$(i) \quad E[YY^T] \geq 0$$

$$(ii) \quad E[YY^T] = 0 \Leftrightarrow Y = 0 \text{ P-f.s.}$$

[zu (i):

$$\forall a \in \mathbb{R}^k : a^T E[YY^T] a = E[a^T YY^T a] = E[(a^T Y)^2] \geq 0$$

zu (ii): „ $\Rightarrow$ “

$$EYY^T = 0 \Rightarrow \forall j : EY_j^2 = 0 \Rightarrow Y = 0 \text{ P-f.s.} \quad ]$$

Setze  $Y := T - E_{\vartheta}T - D^T(\vartheta) \cdot J^{-1}(\vartheta) \cdot V(\vartheta)$ .

Dann gilt:

$$\begin{aligned} 0 &\stackrel{(i)}{\leq} E_{\vartheta}[YY^T] \stackrel{(*)}{=} E_{\vartheta}[(T - E_{\vartheta}T)(T - E_{\vartheta}T)^T] \\ &\quad - \underbrace{E_{\vartheta}[(T - E_{\vartheta}T)V^T(\vartheta)]}_{=D^T(\vartheta)} J^{-1}(\vartheta) D(\vartheta) \\ &\quad - D^T(\vartheta) J^{-1}(\vartheta) \underbrace{E_{\vartheta}[V(\vartheta)(T - E_{\vartheta}T)^T]}_{=D(\vartheta)} \\ &\quad + D^T(\vartheta) J^{-1}(\vartheta) \underbrace{E_{\vartheta}[V(\vartheta) \cdot V^T(\vartheta)]}_{=J(\vartheta)} J^{-1}(\vartheta) D(\vartheta) \\ &= \text{Var}_{\vartheta}(T) - D^T(\vartheta) J^{-1}(\vartheta) D(\vartheta) \end{aligned}$$

(\*): Beachte:  $J$  symmetrisch,  $J = E_{\vartheta}[\cdot]$ ,  $D = E_{\vartheta}[\cdot]$ .

$$[Y = (T - E_{\vartheta}T) - (D^T(\vartheta) \cdot J^{-1}(\vartheta) \cdot V(\vartheta))]$$

„=“  $\stackrel{(ii)}{\Leftrightarrow} Y = 0 \text{ P-f.s.} \quad \blacksquare$

### 5.13 Satz (Cramér-Rao-Ungleichung)

Es seien  $\{P_\vartheta : \vartheta \in \Theta\}$  reguläre Verteilungsklasse und  $T : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^s$  reguläre Statistik. Dann gilt:

$$(1) \quad \text{Var}_\vartheta(T) \geq \left(\frac{d}{d\vartheta} E_\vartheta T^T\right)^T \cdot I_n^{-1}(\vartheta) \cdot \left(\frac{d}{d\vartheta} E_\vartheta T^T\right) \quad (\vartheta \in \Theta)$$

„=“ in (1) gilt  $\Leftrightarrow T = E_\vartheta T + \left(\frac{d}{d\vartheta} E_\vartheta T^T\right)^T \cdot I_n^{-1}(\vartheta) \cdot \mathcal{U}_n(\vartheta)$

Beweis:

5.12 mit  $V(\vartheta) := \mathcal{U}_n(\vartheta)$ ,  $E_\vartheta \mathcal{U}_n(\vartheta) = 0$  (Lemma 5.8),  $J(\vartheta) = I_n(\vartheta)$ ,  
 $D(\vartheta) = E_\vartheta[\mathcal{U}_n(\vartheta)(T - E_\vartheta T)^T] = C_n(\vartheta) = \frac{d}{d\vartheta} E_\vartheta T^T$  (5.11).

### 5.14 Bemerkungen

a) Ist  $T$  erwartungstreu für  $g(\vartheta)$ , so gilt

$$E_\vartheta T = g(\vartheta) \quad \forall \vartheta \in \Theta$$

$\Rightarrow$  rechte Seite von 5.13(1) ist nicht von  $T$  abhängig.

b) Falls  $k = s$  und  $T$  erwartungstreu für  $\vartheta$ , so gilt  $E_\vartheta T = \vartheta \quad \forall \vartheta \in \Theta$  und somit  $\frac{d}{d\vartheta} E_\vartheta T^T = I_k \Rightarrow$

$$\text{Var}_\vartheta T \geq I_n^{-1}(\vartheta)$$

$$„=“ \Leftrightarrow T = \vartheta + I_n^{-1}(\vartheta) \frac{d}{d\vartheta} \log f(X, \vartheta) \quad P_\vartheta - f.s.$$

c) Falls  $X = (X_1, \dots, X_n)$  und  $X_1, \dots, X_n \stackrel{iid}{\sim} f_1(\xi, \vartheta)$ , so gilt:

$$f(x, \vartheta) = \prod_{j=1}^n f_1(x_j, \vartheta)$$

$$\mathcal{U}_n(\vartheta) = \frac{d}{d\vartheta} \sum_{j=1}^n \log f_1(X_j, \vartheta) = \sum_{j=1}^n \underbrace{\frac{d}{d\vartheta} \log f_1(X_j, \vartheta)}_{\text{uiv mit } E_\vartheta(\cdot)=0}$$



$$\begin{aligned}
\Rightarrow I_n(\vartheta) &= E_\vartheta[\mathcal{U}_n(\vartheta)\mathcal{U}_n^T(\vartheta)] \\
&= \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n E_\vartheta[\underbrace{\frac{d}{d\vartheta} \log f_1(X_i, \vartheta) \frac{d}{d\vartheta} \log f_1(X_j, \vartheta)^T}_{=0 \text{ für } i \neq j}] \\
&= n \cdot E_\vartheta[\underbrace{\frac{d}{d\vartheta} \log f_1(X_1, \vartheta) \cdot \frac{d}{d\vartheta} \log f_1(X_1, \vartheta)^T}_{=: I_1(\vartheta)}] \\
&= n \cdot I_1(\vartheta)
\end{aligned}$$

$\Rightarrow$  Schranke in 5.13(1) geht mit  $\frac{1}{n}$  gegen 0.

- d) Ist  $\Theta \subset \mathbb{R}^1$ ,  $T : \mathbb{R}^1 \rightarrow \mathbb{R}^1$ ,  $\gamma(\vartheta) := E_\vartheta(T)$ ,  $\vartheta \in \Theta$ ,  
 $X_1, \dots, X_n \stackrel{uiv}{\sim} f_1(\xi, \vartheta)$  wie in (c), so folgt:

$$\text{Var}_\vartheta(T) \geq \frac{(\gamma'(\vartheta))^2}{n \cdot I_1(\vartheta)}, \quad \vartheta \in \Theta$$

- e) T heißt **CR-effizient**, falls in 5.13(1) Gleichheitszeichen gilt.  
Achtung: CR-effizienter Schätzer muss nicht existieren.

## 5.15 Beispiel

$X_1, \dots, X_n \stackrel{uiv}{\sim} \text{Bin}(1, \vartheta)$ ,  $\vartheta \in \Theta = (0, 1)$ ,  $\mu$  = Zählmaß auf  $\{0, 1\}^n$ .  
 $f_1(\xi, \vartheta) = \vartheta^\xi \cdot (1 - \vartheta)^{1-\xi}$ ,  $\xi \in \{0, 1\}$

$$f(x, \vartheta) = \prod_{j=1}^n f_1(x_j, \vartheta) = \vartheta^{\sum_j x_j} (1 - \vartheta)^{n - \sum_j x_j}, \quad x \in A$$

$$\log f(x, \vartheta) = \sum_j x_j \log \vartheta + (n - \sum_j x_j) \log(1 - \vartheta)$$

$$\frac{d}{d\vartheta} \log f(x, \vartheta) = \frac{\sum_j x_j}{\vartheta} - \frac{n - \sum_j x_j}{1 - \vartheta} = \frac{\sum_j x_j - n\vartheta}{\vartheta(1 - \vartheta)}$$

$$\begin{aligned}
\Rightarrow I_n(\vartheta) &= E_\vartheta[(\frac{d}{d\vartheta} \log f(X, \vartheta))^2] \\
&= \frac{1}{\vartheta^2(1 - \vartheta)^2} E_\vartheta[(\underbrace{\sum_{j=1}^n X_j - n\vartheta}_{\sim \text{Bin}(n, \vartheta)} )^2] \\
&\quad \underbrace{\hspace{10em}}_{=n\vartheta(1-\vartheta)} \\
&= \frac{1}{\vartheta(1 - \vartheta)}
\end{aligned}$$

[Erwartungswert von  $\text{Bin}(n, \vartheta) = n\vartheta$ , also ist in der vorletzten Zeile die Varianz von  $\text{Bin}(n, \vartheta)$  gesucht.]

(1) „Raten“

Sei  $T(x) := \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n x_j$ .

$$E_{\vartheta} T = \vartheta$$

$\Rightarrow T$  erwartungstreu

5.14(d)  $\Rightarrow$

$$\underbrace{\text{Var}_{\vartheta} T}_{= \frac{1}{n} \text{Var}_{\vartheta}(X_1) = \frac{1}{n} \vartheta(1-\vartheta)} \geq I_n^{-1}(\vartheta) = \frac{\vartheta(1-\vartheta)}{n}$$

$\Rightarrow T$  ist UMVUE

(2) Konstruktion nach 5.13 durchführen

$$T(X) \stackrel{5.14(b)}{=} \vartheta + \underbrace{\frac{\vartheta(1-\vartheta)}{n}}_{I_n(\vartheta)^{-1}} \cdot \underbrace{\frac{\sum_{j=1}^n X_j - n\vartheta}{\vartheta(1-\vartheta)}}_{\frac{d}{d\vartheta} \log f(X, \vartheta)} = \bar{X}_n$$