

12 Übung vom 14.07.

41. Aufgabe

Es sei $\tilde{f}(x) := \sup\{g(x) : g : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R} \text{ affin}, g \leq f\}$.

Klar: $\tilde{f} \leq f$ (nach Definition)

z.z.: $\tilde{f} \geq f$

Bew.: Annahme: Es existiert ein $x^0 \in \mathbb{R}^n$ mit $\tilde{f}(x^0) < f(x^0)$

Dann gilt

$$z := (x^0, \frac{\tilde{f}(x^0) + f(x^0)}{2}) \in \mathbb{R}^{n+1}$$

und liegt nicht in $\text{epi } f$.

Nach dem Trennungssatz aus der Vorlesung existiert eine Hyperebene

$H = \{h = \alpha\} \subset \mathbb{R}^{n+1}$ mit

$$h(z) \leq \alpha \text{ und } \text{epi } f \subset \{h \geq \alpha\}$$

Wir schreiben nun h in der Form

$$h(\underbrace{x}_{\in \mathbb{R}^n}, x_{n+1}) = \langle u, x \rangle + x_{n+1} \cdot u_{n+1}$$

Es gilt:

$$\begin{aligned} (i) \quad h((x^0, \frac{\tilde{f}(x^0) + f(x^0)}{2})) &= \langle u, x^0 \rangle + \frac{\tilde{f}(x^0) + f(x^0)}{2} u_{n+1} \leq \alpha \\ (ii) \quad h((x, r)) &= \langle u, x \rangle + r \cdot u_{n+1} \geq \alpha \quad \forall x \in \mathbb{R}^n, r \geq f(x) \end{aligned}$$

Nun gilt $u_{n+1} \geq 0$ wegen (ii).

Annahme: $u_{n+1} = 0$

Dann: $\langle u, x \rangle = \langle u, x \rangle + f(x) \cdot u_{n+1} \stackrel{(ii)}{\geq} \alpha \geq \langle u, x^0 \rangle + \frac{\tilde{f}(x^0) + f(x^0)}{2} \cdot u_{n+1} = \langle u, x^0 \rangle$

Widerspruch (mit $x = x^0 - u$; Kette gilt $\forall x \in \mathbb{R}^n$)!

Also gilt $u_{n+1} > 0$.

Nach (ii) gilt für jedes $x \in \mathbb{R}^n$:

$$\begin{aligned} \langle u, x \rangle + f(x) \cdot u_{n+1} &\geq \alpha \\ \Rightarrow f(x) &\geq \frac{\alpha}{u_{n+1}} - \langle \frac{1}{u_{n+1}} \cdot u, x \rangle =: g(x) \end{aligned}$$

g ist affin, $g \leq f$ und nach (i) gilt:

$$g(x^0) = \frac{\alpha}{u_{n+1}} - \langle \frac{1}{u_{n+1}} \cdot u, x^0 \rangle \stackrel{(i)}{\geq} \frac{1}{u_{n+1}} \left(\frac{\tilde{f}(x^0) + f(x^0)}{2} \cdot u_{n+1} \right) > \tilde{f}(x^0)$$

Widerspruch zur Konstruktion von \tilde{f} .

42. Aufgabe

Es sei x^0 Lösung von (KP).

z.z.:

$$x \text{ ist Lösung} \Leftrightarrow \begin{cases} (i) & \nabla f(x) = \nabla f(x^0) \\ (ii) & \langle x^0 - x, \nabla f(x^0) \rangle = 0 \end{cases}$$

„ \Leftarrow “ Da f konvex ist, gilt:

$$f(x^0) - f(x) \stackrel{\text{Vorl.}}{\geq} \langle x^0 - x, \nabla f(x) \rangle \stackrel{(i)}{=} \langle x^0 - x, \nabla f(x^0) \rangle \stackrel{(ii)}{=} 0$$

D.h. $f(x) = f(x^0)$, weil x^0 Lösung ist.

„ \Rightarrow “ Es sei $\alpha \in [0, 1]$.

$$\begin{aligned} f(x^0) &\stackrel{x^0 \text{ Lsg.}}{\leq} f(\alpha x + (1 - \alpha)x^0) \\ &\stackrel{f \text{ konvex}}{\leq} \alpha f(x) + (1 - \alpha)f(x^0) \\ &\stackrel{x \text{ Lsg.}}{=} \alpha f(x^0) + (1 - \alpha)f(x^0) \\ &= f(x^0) \end{aligned}$$

Also ist f konstant auf der Verbindungsstrecke von x und x^0 .

Daraus folgt (ii), da f an der Stelle x^0 in Richtung $x - x^0$ konstant ist.

Es fehlt noch (i).

Dazu definieren wir $h : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$,

$$y \mapsto f(y) - \langle y - x^0, \nabla f(x^0) \rangle$$

Es gilt:

- h ist konvex, stetig differenzierbar und

$$\nabla h(y) = \nabla f(y) - \nabla f(x^0)$$

[Ableitung der linearen Funktion $\langle y - x^0, \nabla f(x^0) \rangle$ ist $\nabla f(x^0)$.]

- $h(x) = f(x) = f(x^0)$
[wegen (ii) und x Lösung]

Annahme: $\nabla h(x) = \nabla f(x) - \nabla f(x^0) \neq 0$

Wir betrachten die Abbildung $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $\lambda \mapsto h(x + \lambda w)$ mit $w = \nabla h(x)$.

Es gilt:

- $g'(\lambda) = \langle \nabla h(x + \lambda w), w \rangle$

- $g'(0) = \|h'(x)\|^2 > 0$

Da g stetig ist, existiert $\delta > 0$, so dass g auf $[-\delta, \delta]$ streng monoton wachsend ist.
D.h. $g(0) > g(-\delta)$.

$$\begin{aligned} \Rightarrow h(x) &> h(x - \delta w) = f(x - \delta w) - \langle (x - \delta w) - x^0, \nabla f(x^0) \rangle \\ \stackrel{h(x) \equiv f(x^0)}{\Rightarrow} f(x - \delta w) - f(x^0) &< \langle (x - \delta w) - x^0, \nabla f(x^0) \rangle \end{aligned}$$

Widerspruch zu f konvex.

[Für konvexe Funktionen gilt: $f(y) - f(x) \geq \langle y - x, \nabla f(x) \rangle$]

43. Aufgabe

Es sei x^0 zulässig.

z.z.:

$$x^0 \text{ ist keine Lösung} \Leftrightarrow \exists v \in \mathbb{R}^n, \|v\| = 1 : \begin{cases} (i) \\ (ii) \end{cases}$$

$$(i): \sup\{\alpha \geq 0 : x^0 + \alpha v \in M\} > 0$$

$$(ii): \langle v, \nabla f(x^0) \rangle < 0$$

„ \Rightarrow “ x^0 ist keine Lösung und $M \neq \emptyset$, also existiert $x \in M$ mit $f(x) < f(x^0)$.

Wir setzen

$$v := \frac{x - x^0}{\|x - x^0\|}$$

Dann gilt:

$$\sup\{\alpha \geq 0 : x^0 + \alpha v \in M\} \geq \|x - x^0\|$$

D.h. (i) gilt.

$$\langle v, \nabla f(x^0) \rangle = \frac{1}{\|x - x^0\|} \langle x - x^0, \nabla f(x^0) \rangle \leq \frac{1}{\|x - x^0\|} \underbrace{(f(x) - f(x^0))}_{<0} < 0$$

Also gilt (ii).

„ \Leftarrow “ Es sei v so, dass (i) und (ii) erfüllt sind.

Wegen (ii) existiert ein $\tilde{\alpha} > 0$ mit

$$\langle v, \nabla f(x^0 + \alpha v) \rangle < 0 \quad \forall \alpha \in [0, \tilde{\alpha}],$$

da $\alpha \mapsto \langle v, \nabla f(x^0 + \alpha v) \rangle$ stetig ist.

O.E.: $\tilde{\alpha} \leq \sup\{\alpha \geq 0 : x^0 + \alpha v \in M\}$.

Es gilt:

$$f(x^0) - f(x^0 + \tilde{\alpha} v) \geq \langle (x^0 - (x^0 + \tilde{\alpha} v)), \nabla f(x^0 + \tilde{\alpha} v) \rangle$$

$$\Leftrightarrow f(x^0) \geq f(x^0 + \tilde{\alpha}v) - \underbrace{\underbrace{\tilde{\alpha}}_{>0} \underbrace{\langle v, \nabla f(x^0 + \tilde{\alpha}v) \rangle}_{<0}}_{>0}$$

$$\Rightarrow f(x^0) > f(x^0 + \tilde{\alpha}v)$$

$\Rightarrow x^0$ keine Lösung.

44. Aufgabe

(a) **z.z.:** $(SB) \Leftrightarrow (SB^*)$

„ \Rightarrow “ Setze $x^i := x$ für $i = 1, \dots, m$.

„ \Leftarrow “ Wir setzen

$$x := \frac{1}{m} \sum_{i=1}^m x^i$$

$$g_j(x) \leq \frac{1}{m} \sum_{i=1}^m g_j(x^i) \leq \frac{1}{m} g_j(x^j) \stackrel{\text{Vor.}}{<} 0$$

für $j = 1, \dots, m$.

$[g_j(x^i) \leq 0$ für jedes x^i , weil die x^i zulässig sein sollen.]

(b) **z.z.:** $(SB) \Leftrightarrow (K)$

„ \Rightarrow “ Es sei $u \in \mathbb{R}^m, u \geq 0, u \neq 0$, d.h. es existiert $j \in \{1, \dots, m\}$ mit $u_j > 0$.

Nach Voraussetzung existiert ein $x \geq 0$ mit $g_i(x) < 0$ für $i = 1, \dots, m$.

$$\langle u, g(x) \rangle = \sum_{i=1}^m u_i g_i(x) \leq \underbrace{u_j}_{>0} \underbrace{g_j(x)}_{<0} < 0$$

„ \Leftarrow “ Es seien

$$A = \text{conv} \{g(x) : x \geq 0\} \subset \mathbb{R}^m$$

$$B = \{v \in \mathbb{R}^m : v < 0\}$$

A, B sind nichtleer und konvex.

Falls $A \cap B \neq \emptyset$, dann existiert ein $z < 0$ mit $z \in A$, d.h. es existieren $x^1, \dots, x^k \in$

$\mathbb{R}^n, x^1, \dots, x^k \geq 0, \alpha_1, \dots, \alpha_k \geq 0$ mit $\sum_{i=1}^k \alpha_i = 1$:

$$\sum_{i=1}^k \alpha_i g(x^i) = z$$

Wir definieren:

$$x = \sum_{i=1}^k \alpha_i x^i$$

Es gilt:

- $x \geq 0$
- $g(x) \leq \sum_{i=1}^k \alpha_i g(x^i) = z < 0$

Annahme: $A \cap B = \emptyset$

Dann existiert Hyperebene $H = \{\langle u^0, \cdot \rangle = \alpha\}$, $u^0 \neq 0, \alpha \in \mathbb{R}$, die A und B trennt, d.h.

$$A \subset \{\langle u^0, \cdot \rangle \geq \alpha\} \text{ und } B \subset \{\langle u^0, \cdot \rangle \leq \alpha\}$$

Da $0 \in \text{cl } B$ ist, muss $\alpha \geq 0$ sein.

Es sei $i \in \{1, \dots, m\}$ und $k \in \mathbb{N}$.

$$v^i := (0, \dots, 0, \underbrace{-k}_{i\text{-te Stelle}}, 0, \dots, 0) \in B \subset \{\langle u^0, \cdot \rangle \leq \alpha\}$$

$$\langle v^i, u^0 \rangle = -k \cdot u_i^0 \leq \alpha$$

$$i \in \{1, \dots, m\} \xRightarrow{\implies} \text{bel. } u^0 \geq 0$$

Wir haben nun: $\forall x \in \mathbb{R}^n, x \geq 0$ ist

$$g(x) \in A \subset \{\langle u^0, \cdot \rangle \geq \alpha\}$$

d.h.

$$\langle u^0, g(x) \rangle \geq \alpha \geq 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}^n$$

Widerspruch zu (K)!