

12 UMPU Tests („UMP unbiased“)

Nach Bemerkung 11.8(b) existiert im Allgemeinen kein zweiseitiger UMP-Test zu einem Niveau α . Deshalb Einschränkung auf unverfälschte Tests: $\varphi \in \Phi_\alpha$ heißt **unverfälscht** (unbiased) zum Niveau α für $H_0 : \vartheta \in \Theta_0$ gegen $H_1 : \vartheta \in \Theta_1$, falls

$$(1) \quad E_\vartheta \varphi \leq \alpha \quad \forall \vartheta \in \Theta_0, \quad E_\vartheta \varphi \geq \alpha \quad \forall \vartheta \in \Theta_1$$

Im Folgenden liegen einparametrische Exponentialfamilien mit Dichte

$$(*) \quad f(x, \vartheta) = c(\vartheta) \cdot \exp(\vartheta T(x)) \cdot h(x), \quad x \in \mathfrak{X}$$

und natürlichem Parameterbereich Θ vor.

Zu testen sei $H_0 : \vartheta = \vartheta_0$ gegen $H_1 : \vartheta \neq \vartheta_0$.

Nach Lemma 6.12 ist die Gütefunktion $\beta(\vartheta) = E_\vartheta \varphi(X)$ beliebig oft differenzierbar. Aus Forderung (1) folgt:

$$(2) \quad E_{\vartheta_0} \varphi(X) = \alpha, \quad \frac{d}{d\vartheta} E_\vartheta \varphi(X) \big|_{\vartheta=\vartheta_0} = 0$$

Mit

$$c(\vartheta) = \left[\int e^{\vartheta T(x)} h(x) \mu(dx) \right]^{-1}$$

$$c'(\vartheta) = - \int T(x) e^{\vartheta T(x)} h(x) \mu(dx) \cdot c(\vartheta)^2$$

folgt weiter

$$\begin{aligned} \beta'(x) &= \left[\int \varphi(x) c(\vartheta) e^{\vartheta T(x)} h(x) \mu(dx) \right]' \\ &= c'(\vartheta) \int \varphi(x) e^{\vartheta T(x)} h(x) \mu(dx) + c(\vartheta) \int \varphi(x) T(x) e^{\vartheta T(x)} h(x) \mu(dx) \\ &= -c(\vartheta)^2 \int T(x) e^{\vartheta T(x)} h(x) \mu(dx) \int \varphi(x) e^{\vartheta T(x)} h(x) \mu(dx) \\ &\quad + E_\vartheta[\varphi(x) T(x)] \\ &= E_\vartheta[\varphi(x) T(x)] - E_\vartheta T(x) E_\vartheta \varphi(x) \end{aligned}$$

Damit ist (2) äquivalent zu

$$(3) \quad E_{\vartheta_0} \varphi(x) = \alpha, \quad E_{\vartheta_0}[\varphi(x) T(x)] = \alpha E_{\vartheta_0} T(x)$$

12.1 Satz (UMPU-Tests in einparametrischen Exponentialfamilien)

Exponentialfamilie wie in (*). Weiter sei

$$\varphi^*(x) = \begin{cases} 1, & T(x) < c_1^* \text{ oder } T(x) > c_2^* \\ \gamma_i^*, & T(x) = c_i^* \quad (i = 1, 2) \\ 0, & c_1^* < T(x) < c_2^* \end{cases}$$

wobei $c_1^*, c_2^*, 0 \leq \gamma_1^*, \gamma_2^* \leq 1$ so, dass φ^* (3) erfüllt. Dann:

- a) Unter allen Niveau α Tests für $H_0 : \vartheta = \vartheta_0$ gegen $H_1 : \vartheta \neq \vartheta_0$ die (3) erfüllen ist φ^* gleichmäßig bester Test.
- b) φ^* ist UMPU-Test zum Niveau α für H_0 gegen H_1 .

Anmerkung:

UMP-Tests sind eventuell auf einer Seite besser, versagen dafür aber auf der anderen Seite. Sie sind hier aber sowieso unzulässig, da sie nicht unverfälscht sind!

12.2 Bemerkungen

- a) Aus (3) folgt

$$E_{\vartheta_0}[\varphi(X) \cdot (aT(X) + b)] = a \underbrace{E_{\vartheta_0}[\varphi(X)T(X)]}_{= \alpha E_{\vartheta_0}T} + \alpha \cdot b = \alpha E_{\vartheta_0}[aT(X) + b]$$

d.h. Bedingung (3) und auch die Form des Tests φ^* ändern sich nicht unter linear affinen Transformationen $\tilde{T}(x) = a \cdot T(x) + b$ ($a \neq 0$). Also ist

$$\tilde{\varphi}^*(x) = \begin{cases} 1, & \tilde{T}(x) < \tilde{c}_1^* \text{ oder } \tilde{T}(x) > \tilde{c}_2^* \\ \tilde{\gamma}_i^*, & \tilde{T}(x) = \tilde{c}_i^* \quad (i = 1, 2) \\ 0, & \tilde{c}_1^* < \tilde{T}(x) < \tilde{c}_2^* \end{cases}$$

mit $E_{\vartheta_0}\tilde{\varphi}^* \stackrel{!}{=} \alpha$, $E_{\vartheta_0}[\tilde{\varphi}^*\tilde{T}] = \alpha \cdot E_{\vartheta_0}\tilde{T}$ ebenfalls UMPU-Test zum Niveau α für H_0 gegen H_1 .

- b) Sei $P_{\vartheta_0}^T$ symmetrisch bezüglich t_0 , d.h.

$$P_{\vartheta_0}(T - t_0 \leq -t) = P_{\vartheta_0}(T - t_0 \geq t) \quad \forall t \in \mathbb{R}$$

Sei

$$\varphi^*(x) = \begin{cases} 1, & |T(x) - t_0| > c^* \\ \gamma^*, & |T(x) - t_0| = c^* \\ 0, & |T(x) - t_0| < c^* \end{cases}$$

mit $P_{\vartheta_0}(T(X) - t_0 > \underbrace{c^*}_{>0}) + \gamma^* P_{\vartheta_0}(T(X) - t_0 = c^*) \stackrel{!}{=} \frac{\alpha}{2}$.

$\Rightarrow P_{\vartheta_0}(|T(X) - t_0| > c^*) + \gamma^* P_{\vartheta_0}(|T(X) - t_0| = c^*) = \alpha$, d.h.
 $E_{\vartheta_0} \varphi^* = \alpha$ (*).

Weiter gilt: $E_{\vartheta_0} T(X) = t_0$, φ^* symmetrisch bezüglich t_0

$$\Rightarrow E_{\vartheta_0}[\varphi^* \cdot T] = \underbrace{E_{\vartheta_0}[(T - t_0) \cdot \varphi^*]}_{=0 \text{ s.u.}} + t_0 E_{\vartheta_0} \varphi^* \stackrel{(*)}{=} t_0 \cdot \alpha = \alpha \cdot E_{\vartheta_0} T$$

[Betrachte $g(t) = (t - t_0) \cdot \varphi^*(t)$
 $\Rightarrow E_{\vartheta_0}[(T - t_0) \cdot \varphi^*(T)] = \int g(t) P_{\vartheta_0}^T(dt) = 0.]$

D.h. auch die zweite Bedingung in (3) ist erfüllt.

φ^* ist also UMPU-Test zum Niveau α für H_0 gegen H_1 .

Bestimmung von c^*, γ^* also wie beim einseitigen UMP-Test zum Niveau $\frac{\alpha}{2}$.

Bemerkung:

Form des Tests bleibt unverändert unter streng monotonen Transformationen $\tilde{T}(x) = h(|T(x) - t_0|)$.

12.3 Beispiel (Zweiseitiger Gauss-Test)

$X_1, \dots, X_n \stackrel{uiv}{\sim} \mathcal{N}(\mu, \sigma_0^2), \sigma_0^2 > 0$ bekannt.

$$H_0 : \mu = \mu_0 \text{ gegen } H_1 : \mu \neq \mu_0$$

Verteilung von $X = (X_1, \dots, X_n)$ ist einparametrische Exponentialfamilie mit
 $\vartheta = \frac{\mu}{\sigma_0^2}, T(x) = \sum_{i=1}^n x_i, \sum_{i=1}^n X_i \sim \mathcal{N}(n\mu_0, n\sigma_0^2)$ unter H_0 .

Linear affine Transformation

$$\tilde{T}(x) = \frac{T(x) - n\mu_0}{\sqrt{n\sigma_0^2}} = \sqrt{n} \frac{\bar{x}_n - \mu_0}{\sigma_0}$$

liefert $P_{\mu_0}^{\tilde{T}} = \mathcal{N}(0, 1)$, also symmetrisch bezüglich 0.

Verteilungsfunktion ist stetig

$$\Rightarrow \varphi^* = \begin{cases} 1, & \sqrt{n} \left| \frac{\bar{x}_n - \mu_0}{\sigma_0} \right| > z_{1-\frac{\alpha}{2}} \\ 0, & \sqrt{n} \left| \frac{\bar{x}_n - \mu_0}{\sigma_0} \right| \leq z_{1-\frac{\alpha}{2}} \end{cases}$$

ist UMPU-Test für H_0 gegen H_1 .

12.4 Beispiel

$X = (X_1, \dots, X_n)$, $X_i \overset{uiv}{\sim} \text{Bin}(1, p)$, $0 < p < 1$

$$H_0 : p = p_0 \text{ gegen } H_1 : p \neq p_0$$

Einparametrische Exponentialfamilie mit $\vartheta = \log \frac{p}{1-p}$, $T(x) = \sum_{i=1}^n x_i$,
 $\sum_{i=1}^n X_i \sim \text{Bin}(n, p_0)$ unter H_0 .

Im Allgemeinen nicht symmetrisch! UMPU-Test:

$$\Rightarrow \varphi^*(x) = \begin{cases} 1, & \sum x_i < c_1^* \text{ oder } \sum x_i > c_2^* \\ \gamma_i^*, & \sum x_i = c_i^* \\ 0, & c_1^* < \sum x_i < c_2^* \end{cases}$$

mit (komplizierten) Bedingungen für $c_1^*, c_2^*, \gamma_1^*, \gamma_2^*$.

In der Praxis oft:

Konstruktion des Tests aus zwei einseitigen UMP-Tests zum Niveau $\frac{\alpha}{2}$,
 ist aber nicht UMPU.

Im Folgenden Exponentialfamilie mit

$$(4) \quad f(x, \vartheta, \xi) = c(\vartheta, \xi) \cdot \exp(\vartheta \cdot U(x) + \sum_{i=1}^k \xi_i T_i(x)) \cdot h(x)$$

$$(\vartheta, \xi) \in \Theta \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^k, \Theta \text{ konvex}, \dot{\Theta} \neq \emptyset.$$

Zu testen:

$$H_0 : \vartheta \leq \vartheta_0 \text{ gegen } H_1 : \vartheta > \vartheta_0$$

bzw.

$$\tilde{H}_0 : \vartheta = \vartheta_0 \text{ gegen } \tilde{H}_1 : \vartheta \neq \vartheta_0$$

$\xi = (\xi_1, \dots, \xi_k)$ ist Störparameter, $T(x) = (T_1(x), \dots, T_k(x))$

Für festes t ist Dichte in (4) einparametrische Exponentialfamilie.

[Genauer: Man kann zeigen, dass die bedingte Verteilung $P_{\vartheta, \xi}^{U|T=t}$ eine einparametrische Exponentialfamilie mit Dichte

$$c_t(\vartheta) \cdot e^{\vartheta \cdot U} h(x)$$

(unabhängig von ξ) ist.]

\Rightarrow (bedingte) UMP- bzw. UMPU-Tests für H_0 bzw. \tilde{H}_0 existieren.

Es lässt sich zeigen, dass diese bedingten Tests auch für zufälliges $T = T(X)$ optimal sind:

12.5 Satz

a) Der Test φ_1 , definiert durch

$$\varphi_1(x) = \begin{cases} 1, & U > c(t) \\ \gamma(t), & U = c(t) \\ 0, & U < c(t) \end{cases}$$

wobei $E_{\vartheta_0}[\varphi_1(U, T)|T = t] \stackrel{!}{=} \alpha$, ist UMPU-Test²⁹ zum Niveau α für H_0 gegen H_1 .

b) Der Test φ_2 , definiert durch³⁰

$$\varphi_2(x) = \begin{cases} 1, & U < c_1(t) \text{ oder } U > c_2(t) \\ \gamma_i^*, & U = c_i(t) \\ 0, & c_1(t) < U < c_2(t) \end{cases}$$

wobei $E_{\vartheta_0}[\varphi_2(U, T)|T = t] \stackrel{!}{=} \alpha$,

$$E_{\vartheta_0}[\varphi_2(U, T) \cdot U|T = t] \stackrel{!}{=} \alpha \cdot E_{\vartheta_0}[U|T = t]$$

ist UMPU-Test zum Niveau α für \tilde{H}_0 gegen \tilde{H}_1 .

Die Tests aus 12.5 können manchmal so transformiert werden, dass $c(t), \gamma(t)$ beziehungsweise $c_1(t), c_2(t), \gamma_i(t)$ nicht von t abhängen.

12.6 Satz

Unter der Verteilungsannahme (4) sei $V = h(U, T)$ eine unter $\vartheta = \vartheta_0$ von T unabhängige reellwertige Statistik. Dann gilt:

a) Ist $h(u, t)$ streng monoton wachsend in u bei festem t , so ist

$$\tilde{\varphi}_1(v) = \begin{cases} 1, & v > \tilde{c} \\ \tilde{\gamma}, & v = \tilde{c} \\ 0, & v < \tilde{c} \end{cases}$$

wobei $E_{\vartheta_0}\tilde{\varphi}_1(V) = \alpha$, UMPU-Test zum Niveau α für H_0 gegen H_1 .

²⁹Kein Schreibfehler! Test ist kein UMP-Test sondern nur UMPU!

³⁰besser: $\gamma_i(t)$

b) Gilt $h(u, t) = a(t)u + b(t)$, $a(t) > 0$ so ist

$$\tilde{\varphi}_2(v) = \begin{cases} 1, & v < \tilde{c}_1 \text{ oder } v > \tilde{c}_2 \\ \tilde{\gamma}_i, & v = \tilde{c}_i \\ 0, & \tilde{c}_1 < v < \tilde{c}_2 \end{cases}$$

wobei $E_{\vartheta_0} \tilde{\varphi}_2(V) = \alpha$, $E_{\vartheta_0}[\tilde{\varphi}_2(V)V] = \alpha E_{\vartheta_0}(V)$ UMPU-Test zum Niveau α für \tilde{H}_0 gegen \tilde{H}_1 .

Beweis:

a) Nach Korollar 11.11 bleibt die Form des Tests unter streng monotoner Transformation unverändert, man erhält also einen Test der Form $\tilde{\varphi}_1$ mit $\tilde{c} = \tilde{c}(t)$, $\tilde{\gamma} = \tilde{\gamma}(t)$. Nach Voraussetzung ist V aber unabhängig von T unter $\vartheta = \vartheta_0$, deshalb hängen $\tilde{c}, \tilde{\gamma}$ nicht von t ab.

b) folgt analog mit Bemerkung 12.2(a)

Nachweis der Unabhängigkeit von V und T?

Übliche Methoden der Wahrscheinlichkeitstheorie, oder

12.7 Satz (Basu's Theorem)

Sei $\wp = \{P_\vartheta : \vartheta \in \Theta\}$. Statistik T sei suffizient und vollständig für ϑ . Ist V eine Statistik deren Verteilung nicht von ϑ abhängt, so sind V und T stochastisch unabhängig.³¹

Beispiel:

$X_1, \dots, X_n \stackrel{iid}{\sim} \mathcal{N}(\mu, \sigma_0^2)$, $\sigma_0^2 > 0$ bekannt, $\Theta = \{\mu : \mu \in \mathbb{R}\}$, $T = \sum_{i=1}^n X_i$ suffizient und vollständig für μ .

$$V = \underbrace{\sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X}_n)^2}_{(*)}$$

$(*) = \sum_i ((X_i - \mu)(\bar{X}_n - \mu))^2 = \sum_{i=1}^n (Y_i - \bar{Y}_n)^2$ wobei $Y_i \sim \mathcal{N}(0, \sigma_0^2)$

Verteilung von V unabhängig von μ ($V \sim \sigma_0^2 \chi_{n-1}^2$).

$\stackrel{12.7}{\Rightarrow}$ V und T sind unabhängig.

³¹V „ancillary“

Beweis:

Sei g beliebige beschränkte Funktion, $m = E_{\vartheta}g(V)$ (unabhängig von ϑ nach Voraussetzung).

$$h(T(x)) := E_{\vartheta}[g(V) - m | T = T(x)]$$

unabhängig von ϑ , da T suffizient. Wegen

$$E_{\vartheta}h(T) = E_{\vartheta}[E_{\vartheta}[g(V) - m | T]] = 0 \forall \vartheta \in \Theta$$

und der Vollständigkeit von T folgt $h(T) = 0$ P_{ϑ} -f.s., also

$$E_{\vartheta}[g(V) | T] = m = E_{\vartheta}g(V) \quad P_{\vartheta}\text{-f.s.}$$

und somit die Unabhängigkeit von V und T .

12.8 Korollar

Sei φ Exponentialfamilie wie in (4), wobei $\vartheta (= \vartheta_0)$ fest gewählt ist. Hängt die Verteilung einer Statistik V nicht von ξ ab, so sind V und T unabhängig.

Beweis:

Nach Beispiel 7.7 und 7.12 ist T vollständig und suffizient für ξ .

12.7 \Rightarrow Behauptung.

12.9 Beispiel (1-Stichproben-t-Test)

$X_1, \dots, X_n \overset{uiv}{\sim} \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$, $\vartheta = (\mu, \sigma^2) \in \Theta = \mathbb{R} \times \mathbb{R}_{>0}$, $X = (X_1, \dots, X_n)$

a) $H_0 : \mu \leq \mu_0$ gegen $H_1 : \mu > \mu_0$

2-parametrische Exponentialfamilie nach Beispiel 6.3, hat die Form in (4) mit $\vartheta = \frac{\mu}{\sigma^2}$, $\xi = -\frac{1}{2\sigma^2}$, $U(x) = \sum_{i=1}^n x_i$, $T(x) = \sum_{i=1}^n x_i^2$.

Ohne Einschränkung sei $\mu_0 = 0$, andernfalls betrachte man $x_i - \mu_0$ anstelle der x_i .

H_0 , H_1 sind dann äquivalent zu $H_0 : \vartheta \leq 0$, $H_1 : \vartheta > 0$.

Betrachte:

$$v = \frac{\sqrt{n}\bar{x}_n}{\sqrt{\frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x}_n)^2}} = \frac{1}{\sqrt{n}} \frac{u}{\sqrt{t - \frac{u^2}{n}}} =: h(u, t)$$

$\frac{\partial h(u, t)}{\partial u} > 0 \Rightarrow h(u, t)$ streng monoton wachsend in u bei festem t .

(Beachte: $t > \frac{u^2}{n} > 0$.)

Weiter gilt: Unter $\vartheta = \vartheta_0$ gilt $V \sim t_{n-1}$, also unabhängig von ξ .

$\stackrel{12.8}{\Rightarrow}$ V und T sind stochastisch unabhängig (unter $\vartheta = \vartheta_0$).

$\stackrel{12.6(a)}{\Rightarrow}$ Der UMPU-Test für $H_0 : \mu \leq \mu_0$ gegen $\mu > \mu_0$ zum Niveau α ist

$$\tilde{\varphi}_1(v) = \begin{cases} 1, & \sqrt{n} \frac{\bar{x}_n - \mu_0}{s} \geq t_{n-1; 1-\alpha} \\ 0, & \sqrt{n} \frac{\bar{x}_n - \mu_0}{s} < t_{n-1; 1-\alpha} \end{cases}$$

b) $\tilde{H}_0 : \mu = \mu_0$ gegen $\tilde{H}_1 : \mu \neq \mu_0$

Ohne Einschränkung $\mu_0 = 0$, dann $\tilde{H}_0 : \vartheta = \vartheta_0 = 0$, $\tilde{H}_1 : \vartheta \neq \vartheta_0$

$$h(u, t) = \frac{1}{\sqrt{n}} \frac{u}{\sqrt{\frac{t - u^2/n}{n-1}}}$$

nicht linear in u.

Betrachte

$$\tilde{v} = \tilde{h}(u, t) = \frac{u}{\sqrt{t}} = \frac{\sum x_i}{\sqrt{\sum x_i^2}}$$

Unter $\vartheta = 0$ gilt $\tilde{V} \sim \frac{\sum Y_i}{\sqrt{\sum Y_i^2}}$, wobei $Y_i \sim \mathcal{N}(0, 1)$.³²

\Rightarrow Verteilung von \tilde{V} ist unabhängig von ξ und symmetrisch um 0.

Nach 12.6(b) existiert ein UMPU-Test $\tilde{\varphi}_2(\tilde{v})$, der wegen der Symmetrie der Verteilung von \tilde{V} nach 12.2(b) einen Ablehnbereich der Form $|\tilde{v}| > \tilde{c}$ hat.

Nun gilt

$$v = h(u, t) = g(\tilde{v}) = \sqrt{\frac{n-1}{n}} \frac{\tilde{v}}{\sqrt{1 - \tilde{v}^2/n}}$$

bzw. $|v| = g(|\tilde{v}|)$.

$g(|\tilde{v}|)$ ist streng monoton wachsend auf $[0, \sqrt{n})$ ³³, so dass nach Bemerkung in 12.2(b) der UMPU-Test auch auf einem Ablehnbereich der Form $|v| \geq c$ basieren kann. Somit ist

$$\tilde{\varphi}_2(x) = \begin{cases} 1, & \sqrt{n} \frac{|\bar{x}_n - \mu_0|}{s} \geq t_{n-1; 1-\frac{\alpha}{2}} \\ 0, & \sqrt{n} \frac{|\bar{x}_n - \mu_0|}{s} < t_{n-1; 1-\frac{\alpha}{2}} \end{cases}$$

UMPU-Test für \tilde{H}_0 gegen \tilde{H}_1 .

³²Erweitere \tilde{v} mit $\frac{1}{\sigma}$ um dies zu erkennen!

³³Beachte: $\tilde{v} \in (-\sqrt{n}, \sqrt{n})$ (nachrechenbar)

12.10 Bemerkung

Ähnliche Überlegungen zeigen, dass auch der ein- bzw. zweiseitige 2-Stichproben-t-Test UMPU-Test ist.
(z.B. Lehmann/Romano, S. 157-161, 3. ed.)

12.11 Beispiel (Unabhängigkeitstest unter NV-Annahme)

$(X_1, Y_1), \dots, (X_n, Y_n) \overset{uiv}{\sim} \mathcal{N}_2(\mu, \nu, \sigma^2, \tau^2, \varrho)$, also Dichte³⁴

$$f((x_1, y_1), \dots, (x_n, y_n), \mu, \nu, \sigma^2, \tau^2, \varrho) = (2\pi\sigma\tau\sqrt{1-\varrho^2})^{-n}.$$

$$\exp\left(-\frac{1}{2(1-\varrho^2)}\left(\frac{1}{\sigma^2}\sum_i (x_i-\mu)^2 - \frac{2\varrho}{\sigma\tau}\sum_i (x_i-\mu)(y_i-\nu) + \frac{1}{\tau^2}\sum_i (y_i-\nu)^2\right)\right) \quad (*)$$

Zu testen: \tilde{H}_0 : X_1, Y_1 unabhängig; \tilde{H}_1 : X_1, Y_1 nicht unabhängig

Äquivalent: $\tilde{H}_0 : \varrho = 0$; $\tilde{H}_1 : \varrho \neq 0$

Bzw. die einseitige Hypothese $H_0 : \varrho \leq 0$ gegen $H_1 : \varrho > 0$.

(*) ist Exponentialfamilie wie in (4) mit

$$U = \sum_i x_i y_i, T_1 = \sum_i x_i^2, T_2 = \sum_i y_i^2, T_3 = \sum_i x_i, T_4 = \sum_i y_i$$

$$\vartheta = \frac{\varrho}{\sigma\tau(1-\varrho^2)}$$

$$\xi_1 = -\frac{1}{2\sigma^2(1-\varrho^2)}, \quad \xi_2 = -\frac{1}{2\tau^2(1-\varrho^2)},$$

$$\xi_3 = \frac{1}{1-\varrho^2}\left(\frac{\mu}{\sigma^2} - \frac{\nu\varrho}{\sigma\tau}\right), \quad \xi_4 = \frac{1}{1-\varrho^2}\left(\frac{\nu}{\tau^2} - \frac{\mu\varrho}{\sigma\tau}\right)$$

a) $H_0 : \vartheta \leq 0$ gegen $H_1 : \vartheta > 0$

Sei

$$R = \frac{\sum_i (X_i - \bar{X})(Y_i - \bar{Y})}{\sqrt{\sum_i (X_i - \bar{X})^2 \cdot \sum_i (Y_i - \bar{Y})^2}}$$

empirischer Korrelationskoeffizient nach Pearson.

Transformation $X_i \rightarrow \frac{X_i - \mu}{\sigma}$, $Y_j \rightarrow \frac{Y_j - \nu}{\tau}$ ändert R nicht, deshalb hängt die Verteilung von R nicht von $\mu, \nu, \sigma^2, \tau^2$ ab, sondern nur von ϱ .

Für $\vartheta = 0$ ist die Verteilung von R also unabhängig von $\xi_1, \xi_2, \xi_3, \xi_4$.

³⁴ ϱ ist Korrelationskoeffizient (s. Stochastik 1)

Korollar 12.8 \Rightarrow R ist unabhängig von (T_1, \dots, T_4) unter $\vartheta = 0$.

$\stackrel{12.6}{\Rightarrow}$ UMPU-Test hat Ablehnbereich der Form $R \geq c$ oder äquivalent

$$w := \frac{R}{\sqrt{\frac{1-R^2}{n-2}}} \geq \tilde{c}$$

$[R = \frac{U-T_3T_4/n}{\sqrt{(T_1-T_3^2/n)(T_2-T_4^2/n)}}$ ist streng monoton wachsend in U

$\Rightarrow w$ ist streng monoton wachsend³⁵ in U]

Nach Aufgabe 36 gilt: $w \sim t_{n-2}$ falls $\varrho = 0$ (bzw. $\vartheta = 0$).

Deshalb:

$$\varphi_1(w) = \begin{cases} 1, & w \geq t_{n-2, 1-\alpha} \\ 0, & w < t_{n-2, 1-\alpha} \end{cases}$$

UMPU-Test zum Niveau α für H_0 gegen H_1 .

b) Test von $\tilde{H}_0 : \vartheta = 0, \tilde{H}_1 : \vartheta \neq 0$

R ist linear in U mit um 0 symmetrischer Verteilung für $\vartheta = 0$

\Rightarrow UMPU-Test hat Ablehnbereich der Form $|R| \geq \tilde{c}$.

Die Funktion $x \rightarrow \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$ ist streng monoton wachsend für $0 \leq x \leq 1$,
woraus wie in 12.9(b) folgt:

$$\varphi_2(w) = \begin{cases} 1, & |w| \geq t_{n-2, 1-\frac{\alpha}{2}} \\ 0, & |w| < t_{n-2, 1-\frac{\alpha}{2}} \end{cases}$$

ist UMPU-Test zum Niveau α für $\tilde{H}_0 : \varrho = 0$ gegen $\tilde{H}_1 : \varrho \neq 0$.

³⁵ w ist streng monoton wachsend in R (Beachte: $R \in [-1, 1]$ und $w'(R) > 0 \forall R \in (-1, 1)$)