Kapitel 4

Nichtsinguläre Kurven

Sei k algebraisch abgeschlossener Körper. C sei irreduzible projektive Varietät der Dimension 1 über k.

C nicht singulär $\Leftrightarrow$ jedes $x \in C$ nichtsingulär
$\Leftrightarrow \mathcal{O}_{C,x}$ regulärer lokaler Ring für jedes $x \in C$

§ 20 Diskrete Bewertungsringe

Proposition 20.1
Sei (R, m) ein nullteilerfreier lokaler noetherscher Ring der Dimension 1. Dann sind äquivalent:

i) R ist regulär (das heißt $\dim_k(m/m^2) = 1, k = R/m$)
ii) m ist Hauptideal
iii) Es gibt $t \in m$, sodass jedes $x \in R - \{0\}$ eine eindeutige Darstellung $x = u \cdot t^n$ hat mit $n \in \mathbb{N}, u \in R^\times$
iv) R ist Hauptidealring

Beweis
(i)⇒(ii): ✓

(ii)⇒(iii): ✓

(iii)⇒(iv): Sei $(0) \neq I \subset R$ Ideal, n minimal, sodass es ein $x = u \cdot t^n \in I$ gibt.

$$\left.\begin{array}{l} \Rightarrow t^n \in I \Rightarrow m^n \subseteq I \\ I \subseteq m^n \text{ nach Wahl von } n \end{array}\right\} \Rightarrow I = m^n = (t^n)$$

(iv)⇒(i): R Hauptidealring $\Rightarrow m = (t)$ für ein $t \in m$. $\Rightarrow m/m^2$ wird von $\bar{t}$ erzeugt $\Rightarrow \dim_k(m/m^2) \leq 1$.

Andererseits: $\dim(m/m^2) \geq \dim R = 1$ □

Bemerkung 20.2
Sei (R, m) regulärer lokaler Ring der Dimension 1, $K = \mathrm{Quot}(R)$. Dann gilt:

a) Jedes $x \in K^\times$ hat eindeutige Darstellung $x = ut^n$ mit $u \in R^\times, n \in \mathbb{Z}$
b) Die Abbildung $v : K^\times \to \mathbb{Z}$, $ut^n \mapsto n$ erfüllt:
   i) $v(x \cdot y) = v(x) + v(y)$
   ii) $v(x + y) \geq \min(v(x), v(y))$ für $x + y \neq 0$

Definition + Bemerkung 20.3
Sei K ein Körper

a) Eine surjektive Abbildung $v : K^\times \to \mathbb{Z}$ mit i) und ii) heißt ***diskrete Bewertung*** auf K.
b) Ist v diskrete Bewertung auf K, so ist $\mathcal{O}_v := \{x \in K : x = 0 \text{ oder } v(x) \geq 0\}$ lokaler Ring mit maximalem Ideal $m_v = \{x \in K : x = 0 \text{ oder } v(x) > 0\}$.
c) Ein nullteilerfreier Ring R heißt ***diskreter Bewertungsring***, wenn es eine diskrete Bewertung v auf $K := \text{Quot}(R)$ gibt mit $R = \mathcal{O}_v$.
d) Jeder reguläre lokale Ring der Dimension 1 ist diskreter Bewertungsring.

Beweis

b) $\mathcal{O}_v$ *Ring:* $v(x) = v(1 \cdot x) = v(1) + v(x) \Rightarrow v(1) = 0$

$0 = v(1) = v((-1) \cdot (-1)) = v(-1) + v(-1)$

$\Rightarrow v(-x) = v(x) \forall x \in K \Rightarrow \mathcal{O}_v$ ist Ring

$\mathcal{O}_v$ *lokal:* Sei $x \in \mathcal{O}_v - m_v$, also $v(x) = 0$

$\Rightarrow v(x) + v(\frac{1}{x}) = v(x \cdot \frac{1}{x}) = v(1) = 0$

$\Rightarrow v(\frac{1}{x}) = -v(x) = 0 \Rightarrow \frac{1}{x} \in \mathcal{O}_v \Rightarrow x \in \mathcal{O}_v$

d) folgt aus 20.2 □

Proposition 20.4

Jeder diskrete Bewertungsring ist regulärer Ring der Dimension 1.

Beweis

Es genügt zu zeigen, dass m_v Hauptideal ist (wegen 20.1!!). Sei dazu $t \in m_v$ mit $v(t) = 1$. Sei $x \in m_v \setminus \{0\}$, $y := \frac{x}{t^{v(x)}} \in K^\times$.

$v(y) = v(x) - v(t^{v(x)}) = 0 \Rightarrow y \in \mathcal{O}_v^\times$

$\Rightarrow x = y \cdot t^{v(x)} \in (t)$ □

Beispiel

1) Sei k ein Körper, $a \in k$. Für $f \in k(X)^\times$ sei $\text{ord}_a(f)$ die Null-, beziehungsweise Polstellenordnung von f in a. Das heißt für $f \in k[X]$ ist $\text{ord}_a(f) = n$, wenn $f = (X-a)^n \cdot g$ mit $g(a) \neq 0$. Für $f = \frac{g}{h}$, $g, h \in k[X] \setminus \{0\}$, ist $\text{ord}_a(f) = \text{ord}_a(g) - \text{ord}_a(h)$.

$\Rightarrow \text{ord}_a : k(X)^\times \to \mathbb{Z}$ ist diskrete Bewertung. Der zugehörige Bewertungsring ist $k[X]_{(X-a)} = \mathcal{O}_{\mathbb{A}^1(k),a}$

2) Für $f = \frac{g}{h} \in k(X)^\times$, $g, h \in k[X] \setminus \{0\}$, sei $\text{ord}(f) := \deg(h) - \deg(g)$.

ord ist diskrete Bewertung auf $k(X)$:

$\text{ord}(\frac{g_1}{h_1} + \frac{g_2}{h_2}) = \text{ord}(\frac{g_1 h_2 + g_2 h_1}{h_1 h_2}) = \deg(h_1) + \deg(h_2) - \deg(g_1 h_2 + g_2 h_1)$

$\geq \min(\deg(h_1) + \deg(h_2) - \deg(g_1 h_2), \deg(h_1) + \deg(h_2) - \deg(g_2 h_1)) = \min(\text{ord}(\frac{g_1}{h_1}), \text{ord}(\frac{g_2}{h_2}))$

Anmerkung: ord „=“ ord_∞ wie in Beispiel 1.

Bemerkung 20.5

Ist k algebraisch abgeschlossen, so ist jede diskrete Bewertung auf $k(X)$ von der Form ord_a für ein $a \in k \cup \{\infty\}$.

Beweis

Übung oder Vorlesung □

Beispiel

3) $K = \mathbb{Q}$, $p \in \mathbb{Z}$ Primzahl. Schreibe $a \in \mathbb{Q}^\times$ in der Form $a = p^n \cdot \frac{b}{c}$, $b, c \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$, $p \nmid bc$. Setze $v_p(a) := n$.

$v_p : \mathbb{Q}^\times \to \mathbb{Z}$ ist diskrete Bewertung („p-adische Bewertung“).

$\mathcal{O}_{v_p} = \mathbb{Z}_{(p)} = \{\frac{a}{b} \in \mathbb{Q} \mid p \nmid b\}$

Bemerkung 20.6
Sei $v : K^\times \to \mathbb{Z}$ diskrete Bewertung auf Körper K. Sei $0 < \varrho < 1$. Setzte:

$$|x|_v := \begin{cases} \varrho^{v(x)} & , x \neq 0 \\ 0 & , x = 0 \end{cases}$$

Dann erfüllt $|\cdot|_v : K \to \mathbb{R}$:

- $|xy|_v = \varrho^{v(xy)} = \varrho^{v(x)+v(y)} = \varrho^{v(x)} \cdot \varrho^{v(y)} = |x|_v \cdot |y|_v$
- $|x+y|_v = \varrho^{v(x+y)} \leq \max(\varrho^{v(x)}, \varrho^{v(y)}) \leq \max(|x|_v, |y|_v)$ $(\leq |x|_v + |y|_v)$

Definition 20.7
Sei C nichtsinguläre Kurve, $P \in C$. Dann ist $\mathcal{O}_{C,P}$ diskreter Bewertungsring. Die zugehörige diskrete Bewertung auf $k(C) = \mathrm{Quot}(\mathcal{O}_{C,P})$ heißt ord_P. ord_P heißt die ***Ordnung*** von f in P.

Bemerkung 20.8
Sie C nichtsinguläre Kurve, $f \in k(C)^\times$. Dann gibt es nur endlich viele $P \in C$ mit $\mathrm{ord}_P(f) \neq 0$.

Beweis
Es ist $\mathrm{ord}_P(f) > 0 \Leftrightarrow f \in m_P \Leftrightarrow f(P) = 0$
$\mathrm{ord}_P(f) < 0 \Leftrightarrow \frac{1}{f} \in m_P \Leftrightarrow \frac{1}{f}(P) = 0$
$\Rightarrow \{P \in C : \mathrm{ord}_P(f) \neq 0\} = V(f) \cup V(\frac{1}{f})$
$V(f)$ und $V(\frac{1}{f})$ sind echte abgeschlossene Teilmengen von C.
$\dim C = 1 \Rightarrow V(f)$, $V(\frac{1}{f})$ sind endlich. □

Proposition 20.9
Sei C nichtsinguläre Kurve, $\emptyset \neq U \subseteq C$ offen, V projektive Varietät, $f : U \to V$ Morphismus. Dann gibt es genau einen Morphismus $\overline{f} : C \to V$ mit $\overline{f}|_U = f$.

Beweis
Eindeutigkeit: Seien $g, h : C \to V$ Morphismen mit $g|_U = h|_U = f$.
$\{x \in C : g(x) = h(x)\}$ ist abgeschlossen.
$\Rightarrow g|_{\overline{U}} = h|_{\overline{U}}$. Da $\overline{U} = C$, folgt $g = h$.
Existenz: Œ $U = C \setminus \{P\}$ für ein $P \in C$. Sei $V \subseteq \mathbb{P}^n(k)$, also Œ $V = \mathbb{P}^n(k)$.
Œ $f(U) \not\subseteq V(X_i)$ für ein $i \in \{0, \dots, n\}$ (sonst $V = \mathbb{P}^{n-1}(k)$).
$\Rightarrow W := f^{-1}(\bigcap_{i=0}^{n} U_i) \neq \emptyset$
$\Rightarrow W$ ist dicht in U.
Sei $h_{ij} := \frac{X_i}{X_j} \circ f$, $i, j = 0, \dots, n$
h_{ij} ist reguläre Funktion auf W und damit Element von $k(C)^\times$.
Sei $r_i := \mathrm{ord}_P(h_{i0})$, $i = 0, \dots, n$
Sei k so gewählt, dass $r_k \leq r_j$ für alle $j \neq k$
$\Rightarrow \mathrm{ord}_P(h_{ik}) = \mathrm{ord}_P(\frac{h_{i0}}{h_{k0}}) = r_i - r_k \geq 0 \ \forall\, i$
$\Rightarrow h_{ik} \in \mathcal{O}_{C,P}$, $i = 0, \dots, n$
$\Rightarrow \exists$ Umgebung $\widetilde{U}$ von P in C, sodass $h_{ik} \in \mathcal{O}_{C,P}(\widetilde{U})$, $i = 0, \dots, n$.

$$\text{Setze } \overline{f}(x) = \begin{cases} f(x) & : x \neq P \\ \underbrace{(h_{0k}(x) : \ldots : h_{nk}(x))}_{\in \mathbb{P}^n(k), \text{ da } h_{kk}=1} & : x = P \end{cases}$$

Für $x \in \overline{U} \setminus \{P\}$ gilt:

$$\begin{aligned}\overline{f}(x) \quad = \quad f(x) \quad &= \quad \left(\left(\tfrac{X_0}{X_k} \circ f\right)(x) : \left(\tfrac{X_1}{X_k} \circ f\right)(x) : \ldots : \left(\tfrac{X_n}{X_k} \circ f\right)(x)\right) \\ &= \quad (h_{0k}(x) : \ldots : h_{nk}(x))\end{aligned}$$

$\Rightarrow \overline{f}$ ist Morphismus. $\square$

§ 21 Divisoren

Sei C nichtsinguläre Kurve (also projektiv, irreduzibel, über algebraisch abgeschlossenem k).

Definition 21.1

a) Ein ***Divisor*** auf C ist eine formale Summe $D = \sum\limits_{i=1}^{n} n_i P_i$ mit $n \in \mathbb{N}$, $n_i \in \mathbb{Z}$, $P_i \in C$.

b) $\mathrm{Div}(C) = \{D = \sum_{i=1}^{n} n_i P_i \mid D \text{ ist Divisor auf } C\}$ mit der formalen Addition heißt ***Divisorengruppe*** von C.

c) Für $D = \sum\limits_{i=1}^{n} n_i P_i$ heißt $\deg(D) := \sum\limits_{i=1}^{n} n_i$ der ***Grad*** von D.

d) $D = \sum\limits_{i=1}^{n} n_i P_i$ heißt ***effektiv***, wenn alle $n_i \geq 0$ sind.

Schreibweise: $D \geq 0$

Definition + Bemerkung 21.2

a) Für $f \in k(C)^\times$ heißt $\mathrm{div}(f) := \sum\limits_{P \in C} \mathrm{ord}_P(f)_P$ der ***Divisor von f***

b) $\mathrm{div}(f)$ ist Divisor (wegen Bemerkung 20.8)

c) $D \in \mathrm{Div}(C)$ heißt ***Hauptdivisor***, wenn es ein $f \in k(C)^\times$ gibt mit $D = \mathrm{div}(f)$.

d) $\mathrm{div} : k(C)^\times \to \mathrm{Div}(C)$, $f \mapsto \mathrm{div}(f)$ ist Gruppenhomomorphismus. $\mathrm{Bild}(\mathrm{div}) = \mathrm{Div}_H(C)$ sind die Hauptdivisoren.

e) $\mathrm{Cl}(C) := \mathrm{Div}(C)/\mathrm{Div}_H(C)$ heißt ***Divisorenklassengruppe*** von C.

f) $D, D' \in \mathrm{Div}(C)$ heißen ***linear äquivalent***, wenn $D - D'$ Hauptdivisor ist.

Schreibweise: $D \equiv D'$

Beispiel 21.3

$C = \mathbb{P}^1(k)$

Jedes $f \in k(C)^\times = k(X)^\times$ lässt sich eindeutig schreiben in der Form $f = \frac{\prod_{i=1}^{n}(X-a_i)}{\prod_{i=1}^{m}(X-b_j)}$ mit $a_i \neq b_j$ für alle i, j $(a_i, b_j \in k)$.

Dann ist $\mathrm{ord}_a(f) = \#\{i : a_i = a\} - \#\{j : b_j = a\}$ für $a \in k$

$\mathrm{ord}_\infty(f) = m - n$

$\Rightarrow \mathrm{div}(f) = \sum\limits_{i=1}^{n} a_i - \sum\limits_{j=1}^{m} b_j + (m-n) \cdot \infty \Rightarrow \deg(\mathrm{div}(f)) = 0$

Umgekehrt: Sei $D \in \mathrm{Div}(\mathbb{P}^1(k))$, $\deg(D) = 0$

Schreibe $D = \sum\limits_{i=1}^{n} P_i - \sum\limits_{j=1}^{n} Q_j$

Sei zum Beispiel $P_1 = \ldots = P_d = \infty$, $P_i \neq \infty$ für ein $i > d$

$\Rightarrow$ für $f = \frac{\prod_{i=d+1}^{n}(X-P_i)}{\prod_{j=1}^{n}(X-Q_j)}$ gilt: $\mathrm{div}(f) = D \Rightarrow \mathrm{Cl}(\mathbb{P}^1(k)) \cong \mathbb{Z}, [D] \mapsto \deg(D)$

Ziel

$\deg(\mathrm{div}(f)) = 0$ für jedes $f \in k(C)^\times$

Beobachtung

f induziert Morphismus $f : C \to \mathbb{P}^1(k)$ (Proposition 20.9)

Strategie

i) $\operatorname{div}(f) = f^*((0) - (\infty))$

ii) $\deg(f^*(D)) = \deg(f) - \deg(D)$

Definition + Bemerkung 21.4

Sei $f : C_1 \to C_2$ surjektiver Morphismus von nichtsingulären Kurven C_1, C_2.

a) Sei $Q \in C_2$, $P \in f^{-1}(Q)$, $t \in m_Q$ Uniformierende (das heißt $m_Q = (t)$). Dann heißt $e_P = e_P(f) := \operatorname{ord}_P(t \circ f)$ Verzweigungsordnung von f in P.

b) Definiere Gruppenhomomorphismus

$$f^* : \operatorname{Div}(C_2) \to \operatorname{Div}(C_1)$$

durch $f^*(Q) = \sum\limits_{P \in f^{-1}(Q)} e_P(f) \cdot P$

c) Für $g \in k(C_2)^\times$ gilt:

$$f^*(\operatorname{div}(g)) = \operatorname{div}(g \circ f)$$

d) f^* induziert Gruppenhomomorphismus:

$$f^* : \operatorname{Cl}(C_2) \to \operatorname{Cl}(C_1)$$

Beweis

a) *zu zeigen:* $e_P(f)$ hängt nicht von der Wahl von t ab.

Ist t' weitere Uniformierende, so ist $t' = u \cdot t$ für ein $u \in \mathcal{O}_{C_2,Q}^\times$

$\Rightarrow \operatorname{ord}_P(t' \circ f) = \operatorname{ord}_P(u \cdot t \circ f) = \operatorname{ord}_P((u \circ f) \cdot (t \circ f)) = \underbrace{\operatorname{ord}_P(u \circ f)}_{=0} + \operatorname{ord}_P(t \circ f)$

b) *zu zeigen:* $\#\{D \in C_1 : f(P) = Q\}$ ist endlich.

Denn $\underbrace{f^{-1}(\{Q\})}_{\neq C_1,\text{ da } f \text{ surj.}}$ ist abgeschlossen $\Rightarrow f^{-1}(\{Q\})$ endlich

c) Es ist

$$f^*(\operatorname{div} g) = \sum_{Q \in C_2} \operatorname{ord}_Q(g) \cdot f^*Q = \sum_{Q \in C_2} \operatorname{ord}_Q(g) \cdot \sum_{P \in f^{-1}(Q)} e_P(f) \cdot P$$

und

$$\operatorname{div}(g \circ f) = \sum_{P \in G} \operatorname{ord}_P(g \circ f) P = \sum_{Q \in C_2} \sum_{P \in f^{-1}(Q)} \operatorname{ord}_P(g \circ f) \cdot P$$

Zu zeigen ist also:

$$\underbrace{\operatorname{ord}_P(g \circ f)}_{=:s} = \underbrace{\operatorname{ord}_Q(g)}_{=:r} \cdot e_P(f) \text{ für alle } P \in C_1$$

Seien t_P und t_Q Uniformisierende in P beziehungsweise $Q = f(P)$. Dann gibt es Einheiten $u, u' \in \mathcal{O}_{C_1,P}$ und $v \in \mathcal{O}_{C_2,Q}$ mit $g \circ f = u \cdot t_P^s$, $g = v \cdot t_Q^r$, $t_Q \circ f = u' t_P^{e_P(f)}$

$\Rightarrow u \cdot t_P^s = g \circ f = (v \cdot t_Q^r) \circ f = (v \circ f) \cdot (t_Q \circ f)^r = \underbrace{(v \circ f)}_{\in \mathcal{O}_{C_1,P}} \cdot u'^r t_P^{r \cdot e_P(f)} \Rightarrow s = r \cdot e_P(f)$

d) folgt aus b) $\square$

Folgerung 21.5

Sei C nichtsinguläre Kurve, $f \in k(C)^\times$. Dann definiert f einen Morphismus $f : C \to \mathbb{P}^1(k)$ und es gilt:

$$\operatorname{div}(f) = f^*((0) - (\infty))$$

Beweis
Der erste Teil folgt aus 20.9. Für P mit $f(P) = 0$ ist $e_P(f) = \mathrm{ord}_P(X \circ f) = \mathrm{ord}_P(f)$; ist $f(P) = \infty$, so ist $\frac{1}{f}(P) = 0$ und $\mathrm{ord}_P(f) = -\mathrm{ord}_P(\frac{1}{f})$. □

Bemerkung + Definition 21.6
Sei $f : C_1 \to C_2$ surjektiver Morphismus nichtsingulärerer Kurven. Dann induziert f Körperhomomorphismus $f^\# : k(C_2) \to k(C_1)$. $f^\#$ macht $k(C_1)$ zu einer endlichen Körpererweiterung von $k(C_2)$.

$\deg(f) := [k(C_1) : k(C_2)]$ heißt ***Grad*** von f.

Beweis
Die Existens von $f^\#$ steht in 13.7. Da $\dim C_1 = \dim C_2 = 1$, ist $\mathrm{trdeg}(k(C_1)) = \mathrm{trdeg}(k(C_2)) = 1$ (Folgerung 19.8), also $k(C_1)|k(C_2)$ algebraisch. Außerdem ist $k(C_1)|k(C_2)$ endlich erzeugt, weil $k(C_1)$ schon über k endlich erzeugt ist. □

Satz 11
a) Sei C eine nichtsinguläre Kurve. Dann hat jeder Hauptdivisor auf C Grad 0.
b) Sei $f : C_1 \to C_2$ surjektiver Morphismus von nichtsingulären Kurven. Dann gilt für jeden Divisor D auf C_2:
$$\deg(f^*(D)) = \deg(f) \cdot \deg D$$
c) Sei f wie in b). Dann gilt für jedes $Q \in C_2$:
$$\deg(f^*(Q)) = \sum_{P \in f^{-1}(Q)} e_P = \deg f =: n$$

Beweis
b) folgt offensichtlich aus c).
a) folgt aus b) mit 21.5.
c) Beweis nur im folgenden affinen Beispiel (die Aussage ist lokal, daher ist affines Beispiel sinnvoll): □

Beispiel
$C_2 = \mathbb{A}^1(k), C_1 = V(h) \subset \mathbb{A}^2(k), h(X,Y) = Y^n + a_{n-1}(X)Y^{n-1} + \ldots + a_1(X)Y + a_0(X) \in k[X,Y]$ irreduzibel, $f : C_2 \to C_1, (x,y) \mapsto x$

Es ist $k(C_1) = k(X)[Y]/(h)$ und $f^\# : k(X) \hookrightarrow k(X)[Y]/(h)$ die natürliche Einbettung.

Also: $\deg(f) = n$

Für $x_0 \in k = \mathbb{A}^1(k)$ ist $f^{-1}(x_0) = \{(x_0, y) \in k^2 : h(x_0, y) = 0\}$.

$h(x_0, y) = 0$ ist ein Polynom vom Grad n in y mit Koeffizienten in k, hat also, mit Vielfachkeit gezählt, n Nullstellen. Zu zeigen ist also:

Behauptung: Ist $y_0 \in k$ e-fache Nullstelle von $h(x_0, y)$, so gilt für den Punkt $P = (x_0, y_0) \in C_1$:
$$e_P(f) = e$$

Beweis: Œ $(x_0, y_0) = (0, 0)$

Dann ist $h(0, y) = y^e \cdot \tilde{g}(y)$ (*) mit $\tilde{g}(0) \neq 0$ $(e \geq 1)$

Es ist $\tilde{g}(y) = g(0, y)$, wobei $g(x, y) = y^{n-e} + a_{n-1}(x)y^{n-e-1} + \ldots + a_{e+1}(x)y + a_e(x)$

Aus $\tilde{g}(0) \neq 0$ folgt $g(0, 0) \neq 0$, also $g \in \mathcal{O}^\times_{C_1,P}$

Weiter folgt aus (*): $a_0(0) = \ldots = a_{e-1}(0) = 0$
$\Rightarrow a_i(x) = x \cdot \tilde{a}_i(x)$, $i = 0, \ldots, e-1$ ($\tilde{a}_i \in k[X]$)
$\Rightarrow 0 = h(x,y) = y^e g(x,y) + x \cdot b(x,y)$ (**) mit $b(x,y) = \tilde{a}_{e-1}(x)y^{e-1} + \ldots + \tilde{a}_1(x)y + \tilde{a}_0(x)$
Gesucht ist $e_P(f) = \operatorname{ord}_P(t \circ f) = \operatorname{ord}_P(f^\#(t))$ für einen Erzeuger von $m_{C_2,f(t)}$.
Da $C_2 = \mathbb{A}^1(k)$ und $f(P) = 0$, ist $t = x$ eine mögliche Wahl $\Rightarrow e_P(f) = \operatorname{ord}_P(x)$
Dazu muss x in der Form $u \cdot s^d$ geschrieben werden für einen Erzeuger s von $m_{C_1,P}$ und ein $u \in \mathcal{O}_{C_1,P}$.

1. Fall: $e = 1$

Dann folgt aus (**): $y = -x \cdot b(x,y) \cdot g(x,y)^{-1} \in (x)$
$\Rightarrow x$ erzeugt $m_P \Rightarrow \operatorname{ord}_P(x) = 1 = e$

2. Fall: $e > 1$

Behauptung: In diesem Fall ist $\tilde{a}_0(0) \neq 0$
Dann ist $b(0,0) \neq 0$, also $b \in \mathcal{O}^\times_{C_1,P}$ und damit $x = y^e \cdot \underbrace{g \cdot b^{-1}}_{=u \in \mathcal{O}^\times_{C_1,P}}$

$\Rightarrow m_P$ wird von y erzeugt und $\operatorname{ord}_P(x) = e$.

hier fehlen ein paar Sachen (sicher?)

§ 22 Der Satz von Riemann-Roch

Sei weiterhin C nichtsinguläre Kurve.

Definition + Bemerkung 22.1
Sei $D = \sum\limits_{P \in C} n_P \cdot P \in \operatorname{Div}(C)$

a) $L(D) := \{f \in k(C)^\times \mid D + \operatorname{div}(f) \geq 0\} \cup \{0\}$ ist k-Vektorraum, der ***Riemann-Roch-Raum*** zu D.
b) $l(D) := \dim L(D)$
c) $L(0) = k$
d) Ist $\deg(D) < 0$, so ist $L(D) = 0$
e) Ist $D' \equiv D$ für ein $D' \in \operatorname{Div}(C)$, so ist $l(D') = l(D)$

Beweis
a) $\operatorname{div}(f) \geq -D \Leftrightarrow \operatorname{ord}_P(f) \geq -n_P \ \forall P$
$\operatorname{ord}_P(f+g) \geq \min\{\operatorname{ord}_P(f), \operatorname{ord}_P(g)\}$
e) Sei $D' = D + \operatorname{div}(g)$ für ein $g \in k(C)^\times$. Dann ist $L(D') \to L(D)$; $f \mapsto f \cdot g$ ein Isomorphismus von k-Vektorräumen.
Denn: $D + \operatorname{div}(fg) = \underbrace{D + \operatorname{div}(g)}_{=D'} + \operatorname{div}(f) \geq 0$
$(h \cdot \frac{1}{g} \mapsfrom h)$ □

Proposition 22.2
Sei $D \in \operatorname{Div}(C)$

a) $l(D + P) \leq l(D) + 1$
b) $l(D) \leq \deg(D) + 1$ (falls $\deg(D) \geq 1$)

Insbesondere ist $L(D)$ endlich dimensionaler Vektorraum

Beweis
a) Es ist $L(D) \subseteq L(D+P)$. Ist $f \in L(D+P) - L(D)$, dann ist $\operatorname{ord}_P(f) = -(n_P + 1)$. Ist $L(D+P) \neq L(D)$, so wähle $f \in L(D+P) - L(D)$.
Behauptung: $L(D+P)$ wird erzeugt von $L(D)$ und f.
Denn: Sei $g \in L(D+P) - L(D)$
$\Rightarrow \operatorname{ord}_P(g) = -n_P - 1$
$\Rightarrow f = ut^{-n_P-1}$, $g = u't^{-n_P-1}$ für ein $t \in m_P$ mit $m_P = (t)$ $(u, u' \in \mathcal{O}_P^\times)$
Sei $h := u(P)g - u'(P)f \in L(D+P)$
$= (u(P) \cdot u' - u'(P) \cdot u)t^{-n_P-1}$
$\Rightarrow \operatorname{ord}_P(h) \geq -(n_P+1) + 1 \Rightarrow h \in L(D)$
$\Rightarrow g = \frac{1}{u(P)} \cdot (h - u'(P)f) \in L(D) + (f)$
b) Induktion über $d = \deg(D)$
$d = -1$: $L(D) = 0$
$d \geq 0$: Sei $P \in C$, $D' = D - P$
$\overset{\text{I. V.}}{\Longrightarrow} l(D') \leq \deg(D') + 1 = d$
$\overset{\text{a)}}{\Longrightarrow} l(D) = l(D' + P) \leq d + 1$ □

Satz + Definition 12 (Riemann-Roch)

a) Es gibt ein $\gamma \in \mathbb{N}$, sodass für alle $D \in \operatorname{Div}(C)$ gilt:

$$l(D) \geq \deg(D) + 1 - \gamma$$

b) Das kleinste γ, für das a) erfüllt ist, heißt ***Geschlecht*** von C ($g(C) = g$).

c) Es gibt einen Divisor $K \in \operatorname{Div}(C)$ („kanonischer Divisor“), sodass für jedes $D \in \operatorname{Div}(C)$ gilt:

$$l(D) - l(K - D) = \deg(D) + 1 - g$$

Dabei ist $K = \operatorname{div} \omega$ für ein (beliebiges) Differential $\omega \in \Omega(C)$. Zum Beispiel $\omega = \mathrm{d}\, f$ für ein $f \in k(C)^\times$; $\operatorname{ord}_P(\omega) = \operatorname{ord}_P(\frac{\mathrm{d}\, f}{\mathrm{d}\, t_P})$, t_P Uniformisierende in P.

Beispiel

1) $C = \mathbb{P}^1(k)$, $\omega = \mathrm{d}\, x$, $\operatorname{div} \omega = ?$

Für $a \in k$ ist $t_a := x - a$ Uniformisierende, $\frac{\mathrm{d}\, x}{\mathrm{d}(x-a)} = 1$

In ∞ ist $\frac{1}{x}$ Uniformisierende.

$\frac{\mathrm{d}\, x}{\mathrm{d}(\frac{1}{x})} = (-\frac{1}{x})^{-2} \Rightarrow \operatorname{ord}_\infty(\mathrm{d}\, x) = -2$

$\Rightarrow K = -2 \cdot \infty$ ist kanonischer Divisor auf $\mathbb{P}^1(k)$.

2) $C = \overline{V(Y^2 - X^3 + X)}$, $\omega = \frac{\mathrm{d}\, y}{x} \Rightarrow \operatorname{div} \omega = 0$ (Rechnung selber)

Folgerung 22.3

a) $l(K) = g$

(setze $D = 0$ in Satz 12 c) ein: $\underbrace{l(0)}_{=1} - l(K) = \underbrace{\deg 0}_{=0} + 1 - g$)

b) $\deg K = 2g - 2$

(setze K in Satz 12 c) ein: $\underbrace{l(K)}_{=g} - \underbrace{l(0)}_{=1} = \deg K + 1 - g$)

Beweis (von Satz 12)

a) Setze $s(D) := \deg D + 1 - l(D)$

Es gilt:

- $s(D) = s(D')$ falls $D' \equiv D$
- $D' \leq D \Rightarrow s(D') \leq s(D)$

Sei nun $f \in k(C)^\times$ und $N := f^*(0)$ der Nullstellendivisor.

Behauptung 1: Für jedes $D \in \operatorname{Div}(C)$ gibt es D' mit $D' \equiv D$, sodass $D' \leq m \cdot N$ für ein $m \geq 1$.

Behauptung 2: Es gibt $\gamma \geq 0$ mit $s(m \cdot N) \leq \gamma \; \forall m \geq 1$.

Aus Behauptung 1 und Behauptung 2 folgt 12 a).

Beweis 1: Sei $D = \sum_{P \in C} n_P P$

Gesucht: $h \in k(C)^\times$ mit $n_P + \operatorname{ord}_P h \leq \begin{cases} m \cdot \operatorname{ord}_P(f) & : \operatorname{ord}_P(f) > 0 \\ 0 & : \operatorname{ord}_P(f) \leq 0 \end{cases}$

Ersetze dann D durch $D' = D + \operatorname{div}(h)$.

Seien $P_1, \ldots, P_r \in C$ die Punkte mit $\operatorname{ord}_P(f) \leq 0$ und $n_P > 0$.

$h_i := \frac{1}{f} - \frac{1}{f}(P_i) \in m_{P_i}$

$h := \prod_{i=1}^{r} h_i^{-n_{P_i}}$ tut's

Beweis 2: $[k(C) : k(f)] = \deg(f) =: r$

Sei $g_1, \dots, g_r$ Vektorraum-Basis von $k(C)$ über $k(f)$. ŒE jede Polstelle von g_i ist auch Polstelle von f. $\Rightarrow \frac{g_i}{f^j} \in L(mN)$ mit $i = 1, \dots, r$, $j = 0, \dots, m \Rightarrow \underset{\deg(mN)=mr}{\dots} \Rightarrow l(mN) \geq mr - r(\gamma_0 - 1)$ □