

### 3. Affine Zusammenhänge und Parallelverschiebung

#### 3.1. Motivation

In  $\mathbb{R}^n$  kann man Tangentialräume in verschiedenen Punkten vergleichen: Die Tangentialräume von  $x$  und  $y$  sind  $T_x\mathbb{R}^n = \{x\} \times \mathbb{R}^n \simeq \mathbb{R}^n$  und  $T_y\mathbb{R}^n \simeq \mathbb{R}^n$ . Es gibt dann eine Translation (Parallelverschiebung)  $T_{y-x} : T_x\mathbb{R}^n \rightarrow T_y\mathbb{R}^n$ ;  $(x, y) \mapsto (T_{y-x}(x), v)$ , wobei  $T_{y-x}(x) = x + (y - x) = y$ .

Die Situation für Mannigfaltigkeiten ist lokal die gleiche: Ist  $(U, \varphi)$  eine Karte, so gilt  $TU \simeq U \times \mathbb{R}^n$  (vergleiche Basis-Satz, Satz 1.1). Ist  $p, q \in U$ , so gilt:  $([\dots])$  affine Hülle

$$T_p M = \left[ \frac{\partial}{\partial x^1} \Big|_p, \dots, \frac{\partial}{\partial x^n} \Big|_p \right] \text{ und } T_q M = \left[ \frac{\partial}{\partial x^1} \Big|_q, \dots, \frac{\partial}{\partial x^n} \Big|_q \right]$$

Die Parallelverschiebung  $T_p M \rightarrow T_q M$  bildet jetzt  $v = \sum a_i \frac{\partial}{\partial x^i} \Big|_p$  auf  $\bar{v} = \sum a_i \frac{\partial}{\partial x^i} \Big|_q$  ab.

Der globale Vergleich von Tangentialräumen erfordert jedoch eine Zusatzstruktur („Fernparallelismus“)

In der Flächentheorie realisiert man die Parallelverschiebung via Kovariante Ableitung: Ist  $c$  eine Flächenkurve der Fläche  $F$ , so ist  $\frac{D}{dt}c'$  die orthogonale Projektion von  $c''$  in die Tangentialebene  $T_{c(t)}F$ . Die Geodätischen in  $F$  (die „verallgemeinerten Geraden“) sind definiert als Lösungen von  $\frac{D}{dt}c' = 0$ .

#### 3.2. Affine Zusammenhänge

##### Definition (Affiner Zusammenhang)

Ein Affiner Zusammenhang  $D$  auf einer differenzierbaren Mannigfaltigkeit  $M$  ist eine Abbildung

$$D : \begin{array}{l} \mathcal{V}M \times \mathcal{V}M \rightarrow \mathcal{V}M \\ (X, Y) \mapsto D_X Y \end{array}$$

so dass für alle  $X, Y, Z \in \mathcal{V}M$  und  $f, g \in C^\infty M$  gilt:

$$(Z1) \quad D_{fX+gY}Z = fD_X Z + gD_Y Z$$

$$(Z2) \quad D_X(Y + Z) = D_X Y + D_X Z$$

$$(Z3) \quad D_X(fY) = fD_X Y + (Xf)Y$$

### 3. Affine Zusammenhänge und Parallelverschiebung

#### Beispiele

(1) Flächentheorie:  $D_X Y := Y'_T$

(2) In  $\mathbb{R}^n$ :  $X = \sum a_i \frac{\partial}{\partial x^i}$ ,  $\sum b_i \frac{\partial}{\partial x^i}$ ,  $D_X Y := \sum X(b_i) \frac{\partial}{\partial x^i}$

$D$  ist ein lokaler Begriff: Wähle Karte  $(U, \varphi)$  mit Basisfelder  $X_i = \frac{\partial}{\partial x^i}$ .  $X, Y \in \mathcal{V}U$ :  $X = \sum_{i=1}^n v^i X_i$ ,  $Y = \sum_{j=1}^n w^j X_j$ . Dann:

$$\begin{aligned} D_X Y &= D_{\sum_i v^i X_i} \left( \sum_j w^j X_j \right) \\ &\stackrel{(Z1)}{=} \sum_i v^i D_{X_i} \left( \sum_j w^j X_j \right) \\ &\stackrel{(Z2)}{=} \sum_i v^i \sum_j D_{X_i} (w^j X_j) \\ &\stackrel{(Z3)}{=} \sum_{i,j} v^i w^j D_{X_i} X_j + \sum_{i,j} v^i X_i (w^j) X_j \end{aligned}$$

wobei  $D_{X_i} X_j = \sum_{k=1}^n \Gamma_{ij}^k X_k$  (diese Darstellung existiert wegen dem Basissatz 1.1) für lokal definierte  $C^\infty$ -Funktionen  $\Gamma_{ij}^k : U \rightarrow \mathbb{R}$  (Christoffel-Symbole).

Wir haben also:

$$D_X Y = \sum_{k=1}^n \left( \sum_{i,j=1}^n v^i w^j \Gamma_{ij}^k + X(w^k) \right) X_k$$

Die Formel zeigt, dass  $D_X Y(p)$  bestimmt ist durch  $v^i(p)$ ,  $w^j(p)$  und  $X_p(w^k)$  (und  $\Gamma_{ij}^k$ ). Insbesondere braucht man das Vektorfeld  $Y$  (bzw.  $w^k$ ) nur „in Richtung  $X$ “ zu kennen.

Wir folgern: Man kann Vektorfelder längs einer Kurve in Richtung dieser Kurve ableiten: Falls  $Y$  ein Vektorfeld ist längs  $c$  (also  $Y(c(t)) = \sum_{i=1}^n w^i(t) X_i(c(t))$ ), dann ist

$$D_{c'} Y := \sum_{k=1}^n \left( \sum_{i,j} x^{i'}(t) w^j(t) \Gamma_{ij}^k(c(t)) + w^{k'}(t) \right)$$

(wobei  $\varphi \circ c(t) = (x^1(t), \dots, x^n(t))$  und damit  $c' = \sum x^{i'} X_i$ )

#### Definition

Ein Vektorfeld  $Y$  längs einer Kurve  $c$  heißt parallel bezüglich einem affinen Zusammenhang  $D$ , falls  $D_{c'} Y = 0$ .

#### Beispiele

(1) Im  $\mathbb{R}^n$  haben wir für ein paralleles Vektorfeld  $Y$ , dass  $D_{c'} Y = \sum_{j=1}^n w^{j'} X_j = \sum_{j=1}^n 0 X_j = 0$ , da bei Vektorfeldern in  $\mathbb{R}^n$  parallel und konstant gleichwertig ist.

(2) Ein Vektorfeld entlang eines Klein-Kreises der Sphäre ist nicht parallel. (Durch Skizze motiviert). Ein Vektorfeld entlang eines Groß-Kreises ist jedoch parallel, da  $c''$  orthogonal zum Groß-Kreis zum Mittelpunkt zeigt, die Projektion auf die Sphäre also 0 ist.

Später werden wir sehen, dass Geodätische (Kurven mit  $D_{c'} c' = 0$ ) Geraden verallgemeinert.

**Satz 3.1 (Eindeutigkeit der Parallelverschiebung)**

Sei  $M$  eine differenzierbare Mannigfaltigkeit mit affinem Zusammenhang  $D$ . Sei  $c : I = [a, b] \rightarrow M$  eine differenzierbare Kurve und  $v_o \in T_{c(a)}M$ . Dann existiert genau ein paralleles Vektorfeld  $V$  längs  $c$  mit  $V(c(a)) = v_o$ .

**Definition**

Der Vektor  $V(t)$  (aus Satz 3.1) heißt der längs  $c$  parallel verschobene Vektor  $V_0$ . Die Abbildung

$$c||_a^t : \begin{array}{ccc} T_{c(a)}M & \rightarrow & T_{c(t)}M \\ v_0 & \rightarrow & V(t) \end{array}$$

heißt Parallelverschiebung.

**Beweis**

Im ersten Schritt betrachten wir die Situation lokal. Sei  $t_1 \in I$ , so dass  $c([a, t_1]) \subset U$  (Kartengebiet um  $c(a)$ ). In der Karte  $(U, \varphi)$  ist die Definitionsgleichung  $D_{c'}V = 0$  äquivalent zu:

$$\sum_k \left( \frac{dv^k}{dt} + \sum_{i,j} \frac{dx^i}{dt} v^j \Gamma_{ij}^k \right) X_k = 0$$

wobei  $V = \sum_{i=1}^n v^i X_i$ ,  $X_i = \frac{\partial}{\partial x^i}$ ,  $\varphi \circ c(t) = (x^1(t), \dots, x^n(t))$ ,  $c'(t) = \sum_i \frac{dx^i}{dt}(t) X_i(c(t))$ . Das heißt wir haben ein System von  $n$  linearen Differentialgleichungen 1. Ordnung in  $v_k(t)$ :

$$0 = \frac{dv^k}{dt} + \sum_{i,j} \Gamma_{ij}^k \frac{dx^i}{dt} v^j, \quad k = 1, \dots, n$$

Dieses System hat zu gegebenen Anfangsbedingungen  $v(a) = v_0 = (v^1(a), \dots, v^n(a))$  genau eine Lösung für alle  $t \in [a, t_1]$ . Dann existiert eindeutig ein Parallelfeld  $V$  längs  $c([a, t_1])$  mit  $V(a) = v_0$ .

Im zweiten Schritt sei  $t_2 \in I$  beliebig. Das Segment  $c([a, t_2])$  ist kompakt in  $M$  und kann daher mit endlich vielen Karten überdeckt werden. In jeder Karte existiert ein  $V$  und ist eindeutig (nach Schritt 1). Daraus folgt, dass  $V$  global eindeutig existiert auf  $c([a, t_2])$  für beliebige  $t_2$ . ■

### 3.3. Der Levi-Civita-Zusammenhang

**Motivation:** Ein Parallelfeld im Euklidischen Raum  $(\mathbb{R}^n, \langle \cdot, \cdot \rangle)$  ist eine Isometrie.

**Definition**

Ein affiner Zusammenhang  $D$  auf einer Riemann'schen Mannigfaltigkeit  $(M, \langle \cdot, \cdot \rangle)$  heißt verträglich mit der Riemann'schen Struktur  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  falls für jede differenzierbare Kurve  $c : I \rightarrow M$  und jedes Paar von parallelen Vektorfeldern  $V_1, V_2$  längs  $c$  gilt:

$$\langle V_1(c(t)), V_2(c(t)) \rangle_{c(t)} \text{ ist für alle } t \in I \text{ konstant.}$$

Das heißt dass die Parallelverschiebung  $c||_{t_1}^{t_2} : T_{c(t_1)}M \rightarrow T_{c(t_2)}M$  eine lineare Isometrie ist.

**Satz 3.2 (Äquivalente Formulierung der Verträglichkeit)**

Sei  $(M, \langle \cdot, \cdot \rangle)$  eine Riemann'sche Mannigfaltigkeit. Ein affiner Zusammenhang  $D$  ist verträglich mit  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  genau dann, wenn für beliebige Vektorfelder  $V, W$  längs einer beliebigen Kurve  $c : I \rightarrow M$  für alle  $t \in I$  gilt:

$$\frac{d}{dt} \langle V(t), W(t) \rangle_{c(t)} = \langle D_{c'} V, W \rangle_{c(t)} + \langle V, D_{c'} W \rangle_{c(t)} \quad (*)$$

**Beweis**

$(*) \implies$  verträglich:  $V, W$  parallel ist äquivalent zu  $D_{c'} V = D_{c'} W = 0$ , also  $\frac{d}{dt} \langle V(t), W(t) \rangle_{c(t)} = 0$ , also verträglich.

Umgekehrt gilt: Sei  $D$  verträglich, wir haben also eine Parallelverschiebung, die Isometrie ist. Wähle eine Orthonormalbasis  $\{P_1(t_0), \dots, P_n(t_0)\}$  von  $T_{c(t_0)} M$ . Mittels der der Parallelverschiebung erhalten wir wieder für alle  $t \in I$  eine Orthonormalbasis  $\{P_1(t), \dots, P_n(t)\}$  von  $T_{c(t)} M$ . Wir können schreiben:

$$V(t) = \sum_{i=1}^n v_i(t) P_i(t) \quad \text{sowie} \quad W(t) = \sum_{i=1}^n w_i(t) P_i(t)$$

wobei  $v_i, w_i \in C^\infty$ . Also:

$$D_{c'} V = \sum_{i=1}^n \underbrace{c'(v_i)}_{v'_i} P_i + \sum_{i=1}^n v_i \underbrace{D_{c'} P_i}_{=0}$$

das heißt:  $D_{c'} V = \sum_{i=1}^n v'_i P_i$  und  $D_{c'} W = \sum_{i=1}^n w'_i P_i$ . Wir wollen zeigen, dass  $(*)$  gilt. Die rechte Seite ist:

$$\begin{aligned} \langle D_{c'} V, W \rangle + \langle V, D_{c'} W \rangle &= \left\langle \sum v'_i P_i, \sum w_j P_j \right\rangle + \left\langle \sum v_i P_i, \sum w'_j P_j \right\rangle \\ &= \sum_{i,j} (v'_i w_j \langle P_i, P_j \rangle + v_i w'_j \langle P_i, P_j \rangle) \\ &= \sum_{i,j} (v'_i w_j \delta_{ij} + v_i w'_j \delta_{ij}) \\ &= \sum_{i=1}^n (v'_i w_i + v_i w'_i) \\ &= \frac{d}{dt} \left( \sum_{i=1}^n v_i w_i \right) \end{aligned}$$

Die linke Seite ist:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \langle V, W \rangle &= \frac{d}{dt} \left\langle \sum_i v_i P_i, \sum_j w_j P_j \right\rangle \\ &= \frac{d}{dt} \left( \sum_{i,j} v_i w_j \langle P_i, P_j \rangle \right) \\ &= \frac{d}{dt} \left( \sum_{i=1}^n v_i w_i \right) \end{aligned}$$

■

Die Frage ist jetzt, ob zu einer gegebenen Riemann'schen Struktur ein verträglicher Zusammenhang existiert.

**Definition**

Ein affiner Zusammenhang  $D$  heißt symmetrisch (oder torsionsfrei) falls für alle  $X, Y \in \mathcal{VM}$ :

$$T(X, Y) := D_X Y - D_Y X - [X, Y] = 0$$

**Bemerkung:** In lokalen Koordinaten  $(U, \varphi)$  gilt für  $D$  symmetrisch und Basisfelder  $X_i = \frac{\partial}{\partial x^i}$ :

$$D_{X_i} X_j - D_{X_j} X_i = [X_i, X_j] = \left[ \frac{\partial}{\partial x^i}, \frac{\partial}{\partial x^j} \right] = 0$$

da  $\left[ \frac{\partial}{\partial x^i}, \frac{\partial}{\partial x^j} \right] f = \frac{\partial}{\partial x^i} \frac{\partial}{\partial x^j} f - \frac{\partial}{\partial x^j} \frac{\partial}{\partial x^i} f = 0$  wegen  $f \in C^\infty$  und Vertauschbarkeit der partiellen Ableitungen. Weiter gilt:

$$D_{X_i} X_j - D_{X_j} X_i = \sum_k \Gamma_{ij}^k X_k - \sum_k \Gamma_{ji}^k X_k = \sum_k (\Gamma_{ij}^k - \Gamma_{ji}^k) X_k \implies \Gamma_{ij}^k = \Gamma_{ji}^k$$

**Satz 3.3 (Levi-Civita-Zusammenhang)**

Auf jeder Riemann'schen Mannigfaltigkeit  $(M, \langle \cdot, \cdot \rangle)$  existiert genau ein affiner Zusammenhang  $D$ , so dass gilt:

- (1)  $D$  ist symmetrisch
- (2)  $D$  ist verträglich mit  $\langle \cdot, \cdot \rangle$

Dieser eindeutige Zusammenhang  $D$  heißt Levi-Civita-Zusammenhang von  $M$  bezüglich  $\langle \cdot, \cdot \rangle$ .

**Beweis**

Wir nehmen an, dass ein solches  $D$  existiert. Was sind die Eigenschaften?

$D$  verträglich:

$$X \langle Y, Z \rangle = \langle D_X Y, Z \rangle + \langle Y, D_X Z \rangle$$

Der Trick ist jetzt, die Gleichung zyklisch zu vertauschen:

$$\begin{aligned} Y \langle Z, X \rangle &= \langle D_Y Z, X \rangle + \langle Z, D_Y X \rangle \\ -Z \langle X, Y \rangle &= -\langle D_Z X, Y \rangle - \langle X, D_Z Y \rangle \end{aligned}$$

Summe der drei Gleichungen

$$X \langle Y, Z \rangle + Y \langle Z, X \rangle - Z \langle X, Y \rangle = \langle [X, Z], Y \rangle + \langle [X, Y], Z \rangle + 2 \langle Z, D_Y X \rangle + \langle [Y, Z], X \rangle$$

Wir erhalten die Kozul-Formel

$$\langle Z, D_Y X \rangle = \frac{1}{2} \left( X \langle Y, Z \rangle + Y \langle Z, X \rangle - Z \langle X, Y \rangle - \langle [X, Z], Y \rangle - \langle [X, Y], Z \rangle - \langle [Y, Z], X \rangle \right) \quad (*)$$

Diese Formel zeigt, dass  $D$  eindeutig durch die Riemann'sche Struktur  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  bestimmt ist, denn seien  $D$  und  $\tilde{D}$  zwei affine Zusammenhänge, die (1) und (2) erfüllen, dann gilt (\*) für beide, also  $\langle Z, D_Y X \rangle = \langle Z, \tilde{D}_Y X \rangle$  für alle  $X, Y, Z \in \mathcal{VM}$ , was heißt dass  $\langle D_Y X - \tilde{D}_Y X, Z \rangle = 0$ , was heißt dass  $D_Y X - \tilde{D}_Y X = 0$ . Also ist  $D = \tilde{D}$ .

Die Existenz folgt daraus, dass man  $D$  durch (\*) definieren kann. ■

### 3. Affine Zusammenhänge und Parallelverschiebung

**Lokale Form von  $D$**  Gegeben eine Karte  $(U, \varphi)$  mit Basisfelder  $X_i := \frac{\partial}{\partial x^i}$ ,  $i = 1, \dots, n$ , auf  $U$ . Wir haben  $g_{ij} = \langle X_i, X_j \rangle$ ,  $D_{X_i} X_j = \sum_{k=1}^n \Gamma_{ij}^k X_k$ ,  $[X_i, X_j] = 0$ . Kozulformel:

$$\langle X_k, D_{X_i} X_j \rangle = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial g_{ik}}{\partial x^j} + \frac{\partial g_{jk}}{\partial x^i} - \frac{\partial g_{ij}}{\partial x^k} + 0 \right) = \left\langle X_k, \sum_{l=1}^n \Gamma_{ij}^l X_l \right\rangle = \sum_{l=1}^n \Gamma_{ij}^l g_{kl}$$

$[g_{kl}]$  hat inverse Matrix  $[g^{mk}]$ . Damit

$$\Gamma_{ij}^m = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n g^{mk} \left( \frac{\partial g_{ik}}{\partial x^j} + \frac{\partial g_{jk}}{\partial x^i} - \frac{\partial g_{ij}}{\partial x^k} \right).$$

Dieser Ausdruck zeigt nochmals: Levi-Civita-Zusammenhang ist eindeutig durch die Metrik bestimmt.

#### Beispiel

Im Euklidischen Raum  $(\mathbb{R}^n, \text{Standardskalarprodukt})$  ist  $g_{ij} = \delta_{ij}$ , also  $\Gamma_{ij}^k = 0$ . Also: Der kanonische Zusammenhang ist der Levi-Civita-Zusammenhang.