

Definitionen
Dichte $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$ mit $\int_{\mathbb{R}} f(x) \, dx = 1$ $P([a, b]) = \int_a^b f(x) \, dx$
Ereignis $A \subseteq \Omega$ bzw. $A \in \mathfrak{A}$. <i>Elementarereignis:</i> $\{\omega\}, \omega \in \Omega$
Ergebnis $\omega \in \Omega$
Erwartungstreue $\forall \theta \in \Theta: E_{\theta}(T) = \theta$

Erwartungswert (Ex. falls mit $ \cdot < \infty$) $E(X) := \sum_{\omega \in \Omega} X(\omega) \cdot P(\{\omega\})$
$= \sum_{x \in \mathbb{R}: P(X=x) > 0} x \cdot P(X = x)$
$E(X) := E(X_+) - E(X_-)$
$= \int_{\mathbb{R}} x \cdot f(x) \, dx$

<i>bedingter Erwartungswert:</i>
$E(X Y = y) = \sum x P(X = x Y = y)$
<i>bedingte Erwartung:</i>
$E(X Y): \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}, y \mapsto E(X Y = y)$
<i>iterierter:</i>
$E(X) = E(E(X Y))$

Faltung $X(\Omega) + Y(\Omega)$ F. der Verteilungen $X, Y. \, (P^{X+Y} = P^X * P^Y)$
Fehler 1./2. Art <i>1. Art:</i> Wahre Hypothese abgelehnt. <i>2. Art:</i> Falsche Hypothese nicht verworfen.
Gütefunktion $g: \Theta \rightarrow [0, 1], \theta \mapsto P_{\theta}(X \in \mathcal{K})$ $g_{\varphi}: \Theta \rightarrow [0, 1], \theta \mapsto E_{\theta}(\varphi)$

Häufigkeit Sei $(x_1, \dots, x_n) \in \{a_1, \dots, a_s\}^n$ Stichprobe. <i>absolute:</i> $h_j = \sum_{i=1}^n \mathbb{1}\{x_i = a_j\}$
<i>relative:</i> $\frac{h_j}{n}$

Kombination
$Kom_k^n(mW) = \{(a_1, \dots, a_k) \in M^k: a_1 \leq \dots \leq a_k\}$
$Kom_k^n(oW) = \{(a_1, \dots, a_k) \in M^k: a_1 < \dots < a_k\}$
$ Kom_k^n(mW) = \binom{n+k-1}{k}$
$ Kom_k^n(oW) = \binom{n}{k}$

Konfidenzber./Bereichssch. $(\mathcal{X}, (P_{\theta})_{\theta \in \Theta})$ stat. Modell. $\mathcal{C}: \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{P}(\Theta)$ heißt Konfidenzbereich oder Bereichsschätzer. <i>Konfidenzniveau:</i> \mathcal{C} Konfidenzber. zum Niveau $1 - \alpha$: $P_{\theta}(\mathcal{A}(\theta)) \geq 1 - \alpha$
Konsistenz (T_n) <i>Schätzfolge:</i> $\forall \varepsilon > 0, \forall \theta \in \Theta:$ $\lim_{n \rightarrow \infty} P_{\theta}(T_n - \theta \geq \varepsilon) = 0$ φ_n <i>Testfolge:</i> $\forall \theta \in \Theta_1:$ $\lim_{n \rightarrow \infty} g_{\varphi_n}(\theta) = 1$
Konvergenz nach W-keit $Y_n \xrightarrow{P} Y \iff \forall \varepsilon > 0: P(Y_n - Y \geq \varepsilon) \overset{n \rightarrow \infty}{\rightarrow} 0$

Koppelung Das zu einem W-Maß P_1 und einer Übergangs-W-keit P_{12} gehörende W-Maß $P = P_1 \otimes P_{12}$ auf $\Omega_1 \times \Omega_2$ heißt Koppelung von P_1 und P_{12} .
--

Korrelationskoeffizient $\rho(X, Y) = \frac{C(X, Y)}{\sqrt{V(X)V(Y)}}$ <i>empirischer:</i> $r_{xy} := \frac{\frac{1}{n} \sum (x_j - \bar{x})(y_j - \bar{y})}{\sqrt{\frac{1}{n} \sum (x_j - \bar{x})^2 \cdot \frac{1}{n} \sum (y_j - \bar{y})^2}}$
Kovarianz $C(X, Y) = E((X - EX)(Y - EY)) = E(XY) - E(X)E(Y)$
kritischer Bereich $\mathcal{K} \subseteq \mathcal{X}$ mit: $x \in \mathcal{K} \implies d_1$ $x \in \mathcal{X} \setminus \mathcal{K} \implies d_0$

Lagemaß $l: \{a_1, \dots, a_s\}^n \rightarrow \mathbb{R}$ ist ein Lagemaß, falls gilt: $l(x_1 + a, \dots, x_n + a) = l(x_1, \dots, x_n) + a$
Likelihood-Funktion $L_x: \Theta \rightarrow [0, 1], \theta \mapsto P_{\theta}(X = x)$
Marginalverteilung P W-Maß auf $\Omega_1 \times \dots \times \Omega_n$. j-te Marginalverteilung: $P_j(B) := P(\Omega' \times B \times \Omega'')$ mit $\Omega' := \Omega_1 \times \dots \times \Omega_{j-1}$ $\Omega' := \Omega_{j+1} \times \dots \times \Omega_n$ (Analog für Zufallsvektoren.)
Maximum-Likelihood-Schätzung $\hat{\theta}: \mathcal{X} \rightarrow \Theta$ ist ML-Schätzwert, falls $\forall x \in \mathcal{X}:$ $L_x(\hat{\theta}(x)) = \sup\{L_x(\theta): \theta \in \Theta\}$
Median Sei F^{-1} die Quantil-Funktion, dann heißt $F^{-1}(\frac{1}{2})$ der Median von F bzw. von X . <i>empirischer:</i> Sei $(x_{(1)}, \dots, x_{(n)})$ geordnete Stichprobe. $x_{\frac{1}{2}} := \begin{cases} x_{(\frac{n+1}{2})}, n = 2k + 1 \\ \frac{1}{2}(x_{(\frac{n}{2})} + x_{(\frac{n}{2}+1)}), n = 2k \end{cases}$
Mittel <i>arithmetisches:</i> $\bar{x}_n := \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n x_j$

<i>getrimmtes/gestutztes:</i>
$x_{t, \alpha} := \frac{1}{n - 2k} \sum_{j=k+1}^{n-k} x_{(j)}$
mit $0 < \alpha < \frac{1}{2}$ und $k := \lfloor n\alpha \rfloor$ heißt α -getrimmtes Mittel.
MQA $MQA_T(\theta) = E_{\theta}((T - \theta)^2)$ $= \sum_{x \in \mathcal{X}} (T(x) - \theta)^2 \cdot P_{\theta}(X = x)$

heißt mittlere quadratische Abweichung vom T an der Stelle θ . Moment <i>k-tes:</i> $E(X^k) = \int_{\mathbb{R}} x^k \cdot f(x) \, dx$
<i>k-tes absolutes:</i> $E(X ^k) = \int_{\mathbb{R}} x ^k \cdot f(x) \, dx$
<i>k-tes zentrales:</i> $E((X - EX)^k) = \int_{\mathbb{R}} (x - EX)^k \cdot f(x) \, dx$

Permutation $Per_k^n(mW) = M^k$ $Per_k^n(oW) = \{(a_1, \dots, a_k) \in M^k: a_i \neq a_j (i \neq j)\}$
$ Per_k^n(mW) = n^k$ $ Per_k^n(oW) = n \cdot \dots \cdot (n - k + 1) = n^{\underline{k}}$

Quantil <i>empirisches:</i> Ist $0 < p < 1$, so heißt $x_p := \begin{cases} x_{(\lfloor np + 1 \rfloor)}, np \notin \mathbb{N} \\ \frac{1}{2}(x_{(np)} + x_{(np+1)}), np \in \mathbb{N} \end{cases}$
--

empirisches p -Quantil. Quantil-Funktion X Zufallsvariable mit Verteilungsfunktion F . $F^{-1}: (0, 1) \rightarrow \mathbb{R}$ $p \mapsto \inf\{x \in \mathbb{R}: F(x) \geq p\}$ heißt Quantil-Funktion von X bzw. F . Quartil Sei F^{-1} die Quantil-Funktion, dann heißt $F^{-1}(\frac{1}{4})$ das untere und $F^{-1}(\frac{3}{4})$ das obere Quartil von F bzw. von X . <i>empirisch:</i> Das $\frac{1}{4}$ -Quantil heißt unteres und das $\frac{3}{4}$ -Quantil oberes Quartil.
Quartilsabstand $x_{\frac{3}{4}} - x_{\frac{1}{4}}$

Schätzer $(\mathcal{X}, (P_{\theta})_{\theta \in \Theta})$ stat. Modell. $T: \mathcal{X} \rightarrow \tilde{\Theta}$ heißt Schätzer für θ . Schätzfolge $\mathcal{X}_n \subseteq \mathbb{R}^n$ Stichprobenraum für $X_{(n)} = (X_1, \dots, X_n)$ und $T_n: \mathcal{X}_n \rightarrow \tilde{\Theta}$ Schätzer $\forall n \in \mathbb{N}$, dann heißt $(T_n)_{n \in \mathbb{N}}$ Schätzfolge.
Schätzwert $T(x)$ für $x \in \mathcal{X}$.
Spannweite $x_{(n)} - x_{(1)}$

Standardabweichung $\sigma_X := \sqrt{V(X)}$
<i>empirische:</i> $s := \sqrt{s^2}$
Standardisierung $X^* := \frac{X - EX}{\sqrt{V(X)}}$

Statistisches Modell $(\mathcal{X}, (P_{\theta})_{\theta \in \Theta})$, wobei \mathcal{X} der Stichprobenraum einer Zufallvariable X , $(P_{\theta})_{\theta \in \Theta}$ Bild einer bijektiven Abbildung des Parameterraum Θ auf eine Klasse von W-Maßen P ist.
Streuungsmaß $\sigma: \{a_1, \dots, a_s\}^n \rightarrow \mathbb{R}$ heißt ein Streuungsmaß, falls gilt: $\sigma(x_1 + a, \dots, x_n + a) = \sigma(x_1, \dots, x_n)$
Test <i>nichtrandomisiert:</i> $\varphi: \mathcal{X} \rightarrow \{0, 1\}, x \mapsto \mathbb{1}_{\mathcal{K}}$
<i>randomisiert:</i> $\varphi: \mathcal{X} \rightarrow [0, 1]$

Testfolge \mathcal{X}_n Stichprobenraum für $X_{(n)} = (X_1, \dots, X_n)$ und $\varphi_n: \mathcal{X}_n \rightarrow [0, 1]$ Test $\forall n \in \mathbb{N}$, dann heißt $(\varphi_n)_{n \in \mathbb{N}}$ Testfolge.
Übergangswahrscheinlichkeit $P_{12}: \Omega_1 \times \mathcal{P}(\Omega_2) \rightarrow [0, 1]$
heißt Übergangs-W-keit, falls $\forall \omega_1 \in \Omega_1$ $P_{12}(\omega_1, \cdot): \mathcal{P}(\Omega_2) \rightarrow [0, 1]$ ein W-Maß ist.
Unabhängigkeit <i>Ereignisse:</i> A_1, \dots, A_n unabhängig, falls $\forall T \subseteq 1, \dots, n$ $P(\bigcap_{j \in T} A_j) = \prod_{j \in T} P(A_j)$
<i>Zufallsvariablen diskret:</i> X_1, \dots, X_n unabhängig, falls $\forall A_j \subseteq \Omega_j$ bzw. $\forall x_j \in \Omega_j$ gilt: $P(X_1 \in A_1, \dots, X_n \in A_n) = \prod_{j=1}^n P(X_j \in A_j)$
<i>Zufallsvariablen indiskret:</i>

X_1, \dots, X_n unabhängig, falls gilt: $F(x) = \prod_{j=1}^n F(x_j)$ $f(x) = \prod_{j=1}^n f(x_j)$
--

Varianz (Ex. falls $E(X^2)$ existiert.) $V(X) = E(X - EX)^2 = E(X^2) - (EX)^2$ $= \int_{\mathbb{R}} (x - EX)^2 \cdot f(x) \, dx$
<i>empirische:</i> $s^2 := \frac{1}{n - 1} \sum_{j=1}^n (x_j - \bar{x}_n)^2$
Verteilung $X: \Omega \rightarrow \tilde{\Omega}$ Zufallsvariable. $P^X: \mathcal{P}(\tilde{\Omega}) \rightarrow [0, 1], A' \mapsto P(X^{-1}(A'))$ heißt Verteilung von X .
Verteilungsfunktion $P: \mathfrak{B}_1 \rightarrow [0, 1]$ W-Maß. $F: \mathbb{R} \rightarrow [0, 1], x \mapsto P((-\infty, x])$ heißt Verteilungsfunktion von P .
Verzerrung Verzerrung eines Schätzers T an der Stelle θ : $b_T(\theta) = E_{\theta}(T) - \theta$
Wahrscheinlichkeit <i>bedingte:</i> $P(A B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$

W-Funktion (Ω, P) W-Raum, $p: \Omega \rightarrow \mathbb{R}, \omega \mapsto P(\{\omega\})$ ist W-Funktion zum W-Maß P .
W-Maß $P: \mathcal{P}(\Omega) \rightarrow [0, 1]$ heißt W-Maß auf Ω , falls gilt <ol style="list-style-type: none">$P(A) \geq 0$$P(\Omega) = 1$$P(\sum_{j \in \mathbb{N}} A_j) = \sum_{j \in \mathbb{N}} P(A_j)$

W-Raum (Ω, P) bzw. (Ω, \mathcal{A}, P) mit \mathcal{A} σ -Algebra auf Ω , P W-Maß auf Ω bzw. \mathcal{A} . <i>Laplace'scher:</i> falls $P(A) := \frac{ A }{ \Omega }$
$X: \Omega \rightarrow \Omega'$ heißt Ω' -wertige Zufallsvariable, falls X \mathfrak{A} - \mathfrak{A}' -mb.
Zufallsvektor X heißt Zufallsvektor, falls es eine \mathbb{R}^d -wertige Zufallsvariable ist.

Sätze und Formeln Bayes-Formel Sei $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Zerlegung von Ω . Dann gilt: $P(A_k B) = \frac{P(A_k) \cdot P(B A_k)}{\sum_{j=1}^{\infty} P(A_j) \cdot P(B A_j)}$
Binomialkoeffizient $\binom{n+1}{k} = \binom{n}{k} + \binom{n}{k-1}$
Binomischer Lehrsatz $(x + y)^k = \sum_{j=0}^k \binom{k}{j} \cdot x^j \cdot y^{k-j}$

Blockungslemma Seien A_1, \dots, A_n unabhängig, $1 \leq k \leq n - 1$, $C \in \sigma(A_1, \dots, A_k)$, $D \in \sigma(A_k + 1, \dots, A_n)$. Dann sind auch C und D unabhängig.
Cauchy-Schwarz $C(X, Y)^2 \leq V(X) \cdot V(Y)$

Erwartungswert $E(aX) = a \cdot EX$ $E(X + Y) = EX + EY$ $ EX \leq E X $ Sind X, Y unkorreliert gilt außerdem: $E(X \cdot Y) = EX \cdot EY$

Faltungsformel
für Dichten:
 f X + Y (x) = ∫<!-- ∫ --> R f X (t) ⋅<!-- ⋅ --> f Y (x −<!-- − --> t) d t {\displaystyle f_{X+Y}(x)=\int _{\mathbb {R} }f_{X}(t)\cdot f_{Y}(x-t)\,dt}
Gesetz großer Zahlen
Seien X 1 , . . . , X n {\displaystyle X_{1},\ldots ,X_{n}} unabhängige Zufallsvariablen mit existierender Varianz. Dann gilt ∀<!-- ∀ --> ε<!-- ε --> > 0 : P (1 n ∑<!-- ∑ --> j = 1 n X j −<!-- − --> E X 1 ≥<!-- ≥ --> ε<!-- ε -->) n →<!-- → --> ∞<!-- ∞ --> 0 {\displaystyle P\left({\frac {1}{n}}\sum _{j=1}^{n}X_{j}-EX_{1}\Big \geq \varepsilon \right){\stackrel {n\rightarrow \infty }{\rightarrow }}0}
Gesetz seltener Ereignisse
Ist (p n) n ∈<!-- ∈ --> N {\displaystyle (p_{n})_{n\in \mathbb {N} }} eine Folge in [0 , 1] {\displaystyle [0,1]} mit lim n →<!-- → --> ∞<!-- ∞ --> n p n = λ<!-- λ --> {\displaystyle \lim _{n\rightarrow \infty }np_{n}=\lambda } für ein 0 < λ<!-- λ --> < ∞<!-- ∞ --> , {\displaystyle 0<\lambda <\infty ,} so gilt:
 (n) p n (1 −<!-- − --> p n) n −<!-- − --> k n →<!-- → --> ∞<!-- ∞ --> e −<!-- − --> λ<!-- λ --> λ<!-- λ --> k k ! {\displaystyle {\binom {n}{p_{n}}}p_{n}^{n-k}{\stackrel {n\rightarrow \infty }{\rightarrow }}e^{-\lambda }{\frac {\lambda ^{k}}{k!}}}

Kovarianz

 C (X , Y) = C (Y , X) {\displaystyle C(X,Y)=C(Y,X)}
 C (X , X) = V (X) {\displaystyle C(X,X)=V(X)}
 C (a X + b , c Y + d) = a c ⋅<!-- ⋅ --> C (X , Y) {\displaystyle C(aX+b,cY+d)=ac\cdot C(X,Y)}
 ρ<!-- ρ --> (a X + b , c Y + d) = s g n (a c) ⋅<!-- ⋅ --> ρ<!-- ρ --> (X , Y) {\displaystyle \rho (aX+b,cY+d)=sgn(ac)\cdot \rho (X,Y)}
X, Y sind unkorreliert, genau dann wenn:

$$C(X,Y)=0$$

kleinste Quadrate
 (a ∗<!-- ∗ --> , b ∗<!-- ∗ -->) := arg ⁡<!-- ⁡ --> min a , b ∈<!-- ∈ --> R E (Y −<!-- − --> a −<!-- − --> b X) 2 {\displaystyle (a^{*},b^{*}):=\arg \min _{a,b\in \mathbb {R} }E(Y-a-bX)^{2}}
ist bestimmt durch
 a ∗<!-- ∗ --> = E Y −<!-- − --> b ∗<!-- ∗ --> E X {\displaystyle a^{*}=EY-b^{*}EX}
 b ∗<!-- ∗ --> = { 0 , V (X) V (Y) = 0 , C (X , Y) V (X) , V (X) V (Y) > 0 {\displaystyle b^{*}={\begin{cases}0& ,V(X)V(Y)=0\\{\frac {C(X,Y)}{V(X)}}& ,V(X)V(Y)>0\end{cases}}}

Methoden zur Dichtebest.

<i>Methode 1:</i>
X reelle Zufallsvariable mit Verteilungsfunktion <i>F</i> , stückweise stetiger Dichte <i>f</i> . Weiter sei <i>T</i> : ℝ → ℝ stetig differenzierbar und streng monoton wachsend, wobei <i>T</i> '(<i>x</i>) ≠ 0. Dann besitzt <i>Y</i> = <i>T</i> (<i>X</i>) die Verteilungsfunktion:
 G (y) = F (T −<!-- − --> 1 (y)) {\displaystyle G(y)=F(T^{-1}(y))}

 = ∫<!-- ∫ --> −<!-- − --> ∞<!-- ∞ --> T −<!-- − --> 1 (y) f (x) d x {\displaystyle =\int _{-\infty }^{T^{-1}(y)}f(x)\,dx}
(bzw. 1 − <i>G</i> (<i>y</i>) falls <i>T</i> monoton fallend), sowie die Dichte:

$$g(y)={\frac {f(T^{-1}(y))}{|T'(T^{-1}(y))|}}$$

<i>Methode 2:</i>
 X = (X 1 , . . . , X n) k {\displaystyle X=(X_{1},\ldots ,X_{n})^{k}} <i>k</i> -dimensionaler Zufallsvektor mit positiver Dichte <i>f</i> . Weiter sei <i>T</i> : ℝ ^{<i>k</i>} → ℝ ^{<i>k</i>} stetig differenzierbar und injektiv, wobei <i>T</i> '(<i>x</i>) ≠ 0. Dann besitzt <i>Y</i> = <i>T</i> (<i>X</i>) die Dichte:

$$g(y)={\frac {f(T^{-1}(y))}{|\det T'(T^{-1}(y))|}}$$

<i>Methode 3:</i>
Ist <i>T</i> : ℝ ^{<i>k</i>} → ℝ ^{<i>s</i>} mit <i>s</i> < <i>k</i> , so lässt sich <i>T</i> häufig zu einer Abbildung <i>T</i> ' : ℝ ^{<i>k</i>} → ℝ ^{<i>k</i>} ergänzen, die die Voraussetzungen von Methode 2 erfüllt. Die Gewünschte Dichte ergibt sich dann aus
Marginalverteilungsbildung.

Markow-Ungleichung
Sei ϕ<!-- ϕ --> : [0 , ∞<!-- ∞ -->) →<!-- → --> [0 , ∞<!-- ∞ -->) {\displaystyle \varphi :[0,\infty)\rightarrow [0,\infty)} monoton wachsend. Dann gilt für jede Zufallsvariable <i>Y</i> mit <i>E</i> ϕ<!-- ϕ --> (Y) < ∞<!-- ∞ --> {\displaystyle E\varphi (Y)<\infty } und jedes ε<!-- ε --> > 0 {\displaystyle \varepsilon >0} mit ϕ<!-- ϕ --> (ε<!-- ε -->) > 0 : {\displaystyle \varphi (\varepsilon)>0:}
 P (Y ≥<!-- ≥ --> ε<!-- ε -->) ≤<!-- ≤ --> 1 ϕ<!-- ϕ --> (ε<!-- ε -->) E ϕ<!-- ϕ --> (Y) {\displaystyle P(Y \geq \varepsilon)\leq {\frac {1}{\varphi (\varepsilon)}}E\varphi (Y)}

Quantilsfunktion
 F (x) ≥<!-- ≥ --> p ⟺<!-- ⟺ --> x ≥<!-- ≥ --> F −<!-- − --> 1 (p) {\displaystyle F(x)\geq p\iff x\geq F^{-1}(p)}
 F (F −<!-- − --> 1 (p)) ≥<!-- ≥ --> p {\displaystyle F(F^{-1}(p))\geq p}
 F (F −<!-- − --> 1 (p)) = p ⟺<!-- ⟺ --> p ∈<!-- ∈ --> F (R) {\displaystyle F(F^{-1}(p))=p\iff p\in F(\mathbb {R})}
Außerdem ist <i>F</i> ^{−1} monoton wachsend und linksseitig stetig.
Siebformel/Poincare-Sylvester
Für 1 ≤ <i>ν</i> ≤ <i>n</i> sei
 S ν<!-- ν --> := ∑<!-- ∑ --> 1 ≤<!-- ≤ --> i 1 < ⋯<!-- ⋯ --> < i ν<!-- ν --> ≤<!-- ≤ --> n P (A i 1 ∩<!-- ∩ --> ⋯<!-- ⋯ --> ∩<!-- ∩ --> A i ν<!-- ν -->) {\displaystyle S_{\nu }:=\sum _{1\leq i_{1}<\cdots <i_{\nu }\leq n}P(A_{i_{1}}\cap \cdots \cap A_{i_{\nu }})}
(Summation über <i>ν</i> -elementige Teilmengen.) Dann gilt:
 P (⋃<!-- ⋃ --> j = 1 n A j) = ∑<!-- ∑ --> ν<!-- ν --> = 1 n (−<!-- − --> 1) ν<!-- ν --> −<!-- − --> 1 S ν<!-- ν --> {\displaystyle P\left(\bigcup _{j=1}^{n}A_{j}\right)=\sum _{\nu =1}^{n}(-1)^{\nu -1}S_{\nu }}

Steiner-Formel

 ∀<!-- ∀ --> a ∈<!-- ∈ --> R : V (X) = E (X −<!-- − --> a) 2 −<!-- − --> (E X −<!-- − --> a) 2 {\displaystyle \forall a\in \mathbb {R} :V(X)=E(X-a)^{2}-(EX-a)^{2}}
Stetigkeit
Es gilt:

$$P\left(\bigcup_{j=1}^{\infty}A_j\right)=\lim_{j\rightarrow\infty}P(A_j)$$

für jede aufsteigende Folge
 A 1 ⊆<!-- ⊆ --> A 2 ⊆<!-- ⊆ --> ⋯<!-- ⋯ --> {\displaystyle A_{1}\subseteq A_{2}\subseteq \cdots } Ebenso gilt:

$$P\left(\bigcap_{j=1}^{\infty}A_j\right)=\lim_{j\rightarrow\infty}P(A_j)$$

für jede absteigende Folge
 A 1 ⊇<!-- ⊇ --> A 2 ⊇<!-- ⊇ --> ⋯<!-- ⋯ --> {\displaystyle A_{1}\supseteq A_{2}\supseteq \cdots }
Subadditivität

$$P\left(\bigcup_{j=1}^{\infty}A_j\right)\leq\sum_{j=1}^{\infty}P(A_j)$$

totale W-keit
Sei (A n) n ∈<!-- ∈ --> N {\displaystyle (A_{n})_{n\in \mathbb {N} }} eine Zerlegung von Ω<!-- Ω --> {\displaystyle \Omega } . Dann gilt:
 P (B) = ∑<!-- ∑ --> j = 1 ∞<!-- ∞ --> P (A j) ⋅<!-- ⋅ --> P (B A j) {\displaystyle P(B)=\sum _{j=1}^{\infty }P(A_{j})\cdot P(B A_{j})}

Transformationsformel

 E (g (Z)) = ∑<!-- ∑ --> z ∈<!-- ∈ --> R k g (z) ⋅<!-- ⋅ --> P (Z = z) {\displaystyle E(g(Z))=\sum _{z\in \mathbb {R} ^{k}}g(z)\cdot P(Z=z)}
 = ∫<!-- ∫ --> R k g (x) d x {\displaystyle =\int _{\mathbb {R} ^{k}}g(x)\,dx}

Tschebyschow-Ungleichung

 P (X −<!-- − --> E X ≥<!-- ≥ --> ε<!-- ε -->) ≤<!-- ≤ --> 1 ε<!-- ε --> 2 ⋅<!-- ⋅ --> V (X) {\displaystyle P(X-EX \geq \varepsilon)\leq {\frac {1}{\varepsilon ^{2}}}\cdot V(X)}

Varianz

 V (X) = min a ∈<!-- ∈ --> R E (X −<!-- − --> a) 2 {\displaystyle V(X)=\min _{a\in \mathbb {R} }E(X-a)^{2}}
 V (a ⋅<!-- ⋅ --> X + b) = a 2 ⋅<!-- ⋅ --> V (X) {\displaystyle V(a\cdot X+b)=a^{2}\cdot V(X)}
 V (X) ≥<!-- ≥ --> 0 {\displaystyle V(X)\geq 0}
 V (X) = 0 ⟺<!-- ⟺ --> ∃<!-- ∃ --> a ∈<!-- ∈ --> R : P (X = a) = 1 {\displaystyle V(X)=0\iff \exists a\in \mathbb {R} :P(X=a)=1}
 V (X + Y) = V (X) + V (Y) + 2 C (X , Y) {\displaystyle V(X+Y)=V(X)+V(Y)+2C(X,Y)}
 V (X 1 + ⋯<!-- ⋯ --> + X n) = ∑<!-- ∑ --> j = 1 n V (X j) + 2 ∑<!-- ∑ --> 1 ≤<!-- ≤ --> i < j ≤<!-- ≤ --> n C (X i , X j) {\displaystyle V(X_{1}+\cdots +X_{n})=\sum _{j=1}^{n}V(X_{j})+2\sum _{1\leq i<j\leq n}C(X_{i},X_{j})}
(siehe auch Steiner-Formel)

ZGWS
Sei X n ∼<!-- ∼ --> B i n (n , p n) {\displaystyle X_{n}\sim Bin(n,p_{n})} mit lim n →<!-- → --> ∞<!-- ∞ --> n p n (1 −<!-- − --> p n) = ∞<!-- ∞ --> {\displaystyle \lim _{n\rightarrow \infty }np_{n}(1-p_{n})=\infty } . Dann gilt:
 lim n →<!-- → --> ∞<!-- ∞ --> P (a ≤<!-- ≤ --> X n −<!-- − --> n p n √<!-- √ --> n p n (1 −<!-- − --> p n) ≤<!-- ≤ --> b) = Φ<!-- Φ --> (b) −<!-- − --> Φ<!-- Φ --> (a) {\displaystyle \lim _{n\rightarrow \infty }P\left(a\leq {\frac {X_{n}-np_{n}}{\sqrt {np_{n}(1-p_{n})}}}\leq b\right)=\Phi (b)-\Phi (a)}
 lim n →<!-- → --> ∞<!-- ∞ --> P (X n −<!-- − --> n p n √<!-- √ --> n p n (1 −<!-- − --> p n) ≤<!-- ≤ --> b) = Φ<!-- Φ --> (b) {\displaystyle \lim _{n\rightarrow \infty }P\left({\frac {X_{n}-np_{n}}{\sqrt {np_{n}(1-p_{n})}}}\leq b\right)=\Phi (b)}

Verteilungen
Binomialverteilung
 X ∼<!-- ∼ --> B i n (n , p) {\displaystyle X\sim Bin(n,p)}
 P (X = k) = (n k) ⋅<!-- ⋅ --> p k ⋅<!-- ⋅ --> (1 −<!-- − --> p) n −<!-- − --> k {\displaystyle P(X=k)={\binom {n}{k}}\cdot p^{k}\cdot (1-p)^{n-k}}
 F X (x) = ∑<!-- ∑ --> k ≤<!-- ≤ --> x (n k) ⋅<!-- ⋅ --> p k ⋅<!-- ⋅ --> (1 −<!-- − --> p) n −<!-- − --> k {\displaystyle F_{X}(x)=\sum _{k\leq x}{\binom {n}{k}}\cdot p^{k}\cdot (1-p)^{n-k}}
 E X = n p {\displaystyle EX=np}
 V (X) = n p (1 −<!-- − --> p) {\displaystyle V(X)=np(1-p)}
Ist Y ∼<!-- ∼ --> B i n (m , p) {\displaystyle Y\sim Bin(m,p)} und X , Y {\displaystyle X,Y} unabhängig, so gilt
 X + Y ∼<!-- ∼ --> B i n (n + m , p) {\displaystyle X+Y\sim Bin(n+m,p)}
Exponentialverteilung
 X ∼<!-- ∼ --> E x p (λ<!-- λ -->) {\displaystyle X\sim Exp(\lambda)}
 F X (x) = (1 −<!-- − --> e −<!-- − --> λ<!-- λ --> x) ⋅<!-- ⋅ --> 1 [0 , ∞<!-- ∞ -->) (x) {\displaystyle F_{X}(x)=(1-e^{-\lambda x})\cdot \mathbb {1} _{[0,\infty)}(x)}
 f x (x) = λ<!-- λ --> ⋅<!-- ⋅ --> e −<!-- − --> λ<!-- λ --> x ⋅<!-- ⋅ --> 1 [0 , ∞<!-- ∞ -->) (x) {\displaystyle f_{x}(x)=\lambda \cdot e^{-\lambda x}\cdot \mathbb {1} _{[0,\infty)}(x)}
 E X = 1 λ<!-- λ --> {\displaystyle EX={\frac {1}{\lambda }}}
 V (X) = 1 λ<!-- λ --> 2 {\displaystyle V(X)={\frac {1}{\lambda ^{2}}}}

geometrische Verteilung
 X ∼<!-- ∼ --> G (p) = N b (1 , p) {\displaystyle X\sim G(p)=Nb(1,p)}
Gibt die Wahrscheinlichkeit an, dass vor dem ersten Treffer in einem Bernoullischen Versuchsschema mit Trefferwahrscheinlichkeit <i>p</i> genau <i>k</i> Nieten gezogen werden.

$$P(X=k)=p\cdot (1-p)^k$$

$$F_X(x)=\sum_{k\leq x}p\cdot (1-p)^k$$

$$EX={\frac {1-p}{p}}$$

$$V(X)={\frac {1-p}{p^2}}$$

Ist Y ∼<!-- ∼ --> G (p) {\displaystyle Y\sim G(p)} und X , Y {\displaystyle X,Y} unabhängig, so gilt X + Y ∼<!-- ∼ --> N b (2 , p) {\displaystyle X+Y\sim Nb(2,p)} .
--

Gleichverteilung
 X ∼<!-- ∼ --> U (A) {\displaystyle X\sim U(A)}
<i>diskrete:</i>
Sei A = { x 1 , . . . , x n } {\displaystyle A=\{x_{1},\ldots ,x_{n}\}} .
 P (X = x j) = 1 n {\displaystyle P(X=x_{j})={\frac {1}{n}}}
 E X = 1 n ∑<!-- ∑ --> j = 1 n x j {\displaystyle EX={\frac {1}{n}}\sum _{j=1}^{n}x_{j}}
 V (X) = 1 n ⎡<!-- ⎡ --> ∑<!-- ∑ --> j = 1 n x j 2 −<!-- − --> ⎡<!-- ⎡ --> ∑<!-- ∑ --> j = 1 n x j ⎤<!-- ⎤ --> 2 ⎤<!-- ⎤ --> {\displaystyle V(X)={\frac {1}{n}}\left(\sum _{j=1}^{n}x_{j}^{2}-\left(\sum _{j=1}^{n}x_{j}\right)^{2}\right)\,}
<i>indiskrete:</i>
Sei A ∈<!-- ∈ --> B 1 . {\displaystyle A\in {\mathfrak {B}}_{1}.}
 P (B) = λ<!-- λ --> 1 (A ∩<!-- ∩ --> B) λ<!-- λ --> 1 (A) {\displaystyle P(B)={\frac {\lambda _{1}(A\cap B)}{\lambda _{1}(A)}}}
 F X (x) = λ<!-- λ --> 1 (A ∩<!-- ∩ --> (−<!-- − --> ∞<!-- ∞ --> , x]) λ<!-- λ --> 1 (A) {\displaystyle F_{X}(x)={\frac {\lambda _{1}(A\cap (-\infty ,x])}{\lambda _{1}(A)}}}
 f x (x) = 1 λ<!-- λ --> 1 (A) ⋅<!-- ⋅ --> 1 A (x) {\displaystyle f_{x}(x)={\frac {1}{\lambda _{1}(A)}}\cdot \mathbb {1} _{A}(x)}

hypergeometrische Verteilung
 X ∼<!-- ∼ --> H y p (n , r , s) {\displaystyle X\sim Hyp(n,r,s)}
Gibt die Wahrscheinlichkeit an, beim <i>n</i> -maligen Ziehen ohne Zurücklegen <i>k</i> der <i>r</i> roten von insgesamt <i>r</i> + <i>s</i> Kugeln zu ziehen.
 P (X = k) = (r k) ⋅<!-- ⋅ --> (n −<!-- − --> r n −<!-- − --> k) (r + s n) {\displaystyle P(X=k)={\frac {\textstyle {\binom {r}{k}}\cdot {\binom {n-r}{n-k}}}{\textstyle {\binom {r+s}{n}}}}
 E X = r n r + s {\displaystyle EX={\frac {rn}{r+s}}}
 V (X) = (r s r + s) ⎡<!-- ⎡ --> ⎡<!-- ⎡ --> 1 −<!-- − --> r r + s ⎤<!-- ⎤ --> ⎡<!-- ⎡ --> r + s −<!-- − --> n r + s −<!-- − --> 1 ⎤<!-- ⎤ --> ⎤<!-- ⎤ --> {\displaystyle V(X)={\textstyle {\binom {rs}{r+s}}\left[\left[1-{\frac {r}{r+s}}\right]\left[{\frac {r+s-n}{r+s-1}}\right]\right]}

Multinomialverteilung
 X = (X 1 , . . . , X s) ∼<!-- ∼ --> M u l t (n , p 1 , . . . , p s) {\displaystyle X=(X_{1},\ldots ,X_{s})\sim Mult(n,p_{1},\ldots ,p_{s})}
 P (X = x) = (n x 1 , . . . , x s) ⋅<!-- ⋅ --> ∏<!-- ∏ --> j = 1 s p j x j {\displaystyle P(X=x)={\binom {n}{x_{1},\ldots ,x_{s}}}\cdot \prod _{j=1}^{s}p_{j}^{x_{j}}}
 X k ∼<!-- ∼ --> B i n (n , p k) {\displaystyle X_{k}\sim Bin(n,p_{k})}
 ∑<!-- ∑ --> j = 1 k X i j ∼<!-- ∼ --> B i n (n , ∑<!-- ∑ --> j = 1 k p i j) {\displaystyle \sum _{j=1}^{k}X_{ij}\sim Bin(n,\sum _{j=1}^{k}p_{ij})}
 C (X i , X j) = −<!-- − --> n p i p j {\displaystyle C(X_{i},X_{j})=-np_{i}p_{j}}
 ρ<!-- ρ --> (X i , X j) = −<!-- − --> p i p j (1 −<!-- − --> p i) (1 −<!-- − --> p j) {\displaystyle \rho (X_{i},X_{j})=-{\sqrt {\frac {p_{i}p_{j}}{(1-p_{i})(1-p_{j})}}}}

negative Binomialverteilung
 X ∼<!-- ∼ --> N b (r , p) {\displaystyle X\sim Nb(r,p)}
Gibt die Wahrscheinlichkeit an, dass vor dem <i>r</i> -ten Treffer in einem Bernoullischen Versuchsschema mit Trefferwahrscheinlichkeit <i>p</i> genau <i>k</i> Nieten gezogen werden.
 P (X = k) = (k + r −<!-- − --> 1 k) ⋅<!-- ⋅ --> p r ⋅<!-- ⋅ --> (1 −<!-- − --> p) k {\displaystyle P(X=k)={\binom {k+r-1}{k}}\cdot p^{r}\cdot (1-p)^{k}}
 F X (x) = ∑<!-- ∑ --> k ≤<!-- ≤ --> x (k + r −<!-- − --> 1 k) ⋅<!-- ⋅ --> p r ⋅<!-- ⋅ --> (1 −<!-- − --> p) k {\displaystyle F_{X}(x)=\sum _{k\leq x}{\binom {k+r-1}{k}}\cdot p^{r}\cdot (1-p)^{k}}
 E X = r ⋅<!-- ⋅ --> 1 p {\displaystyle EX=r\cdot {\frac {1-p}{p}}}
 V (X) = r ⋅<!-- ⋅ --> 1 p 2 {\displaystyle V(X)=r\cdot {\frac {1-p}{p^{2}}}}
Ist Y ∼<!-- ∼ --> N b (s , p) {\displaystyle Y\sim Nb(s,p)} und X , Y {\displaystyle X,Y} unanähängig, so gilt
 X + Y ∼<!-- ∼ --> N b (r + s , p) {\displaystyle X+Y\sim Nb(r+s,p)} .

Normalverteilung
 X ∼<!-- ∼ --> N (μ<!-- μ --> , σ<!-- σ --> 2) {\displaystyle X\sim N(\mu ,\sigma ^{2})}
 F X (x) = Φ<!-- Φ --> ⎡<!-- ⎡ --> x −<!-- − --> μ<!-- μ --> σ<!-- σ --> ⎤<!-- ⎤ --> {\displaystyle F_{X}(x)=\Phi \left({\frac {x-\mu }{\sigma }}\right)}

 Φ<!-- Φ --> (x) = ∫<!-- ∫ --> −<!-- − --> ∞<!-- ∞ --> x 1 √<!-- √ --> 2 π<!-- π --> exp ⁡<!-- ⁡ --> ⎡<!-- ⎡ --> −<!-- − --> y 2 2 ⎤<!-- ⎤ --> d y {\displaystyle \Phi (x)=\int _{-\infty }^{x}{\frac {1}{\sqrt {2\pi }}}\exp \left(-{\frac {y^{2}}{2}}\right)\,dy}
 Φ<!-- Φ --> (x) = 1 −<!-- − --> Φ<!-- Φ --> (−<!-- − --> x) {\displaystyle \Phi (x)=1-\Phi (-x)}
 Φ<!-- Φ --> −<!-- − --> 1 (x) = −<!-- − --> Φ<!-- Φ --> −<!-- − --> 1 (1 −<!-- − --> x) {\displaystyle \Phi ^{-1}(x)=-\Phi ^{-1}(1-x)}
 f x (x) = 1 σ<!-- σ --> √<!-- √ --> 2 π<!-- π --> ⋅<!-- ⋅ --> exp ⁡<!-- ⁡ --> ⎡<!-- ⎡ --> −<!-- − --> (x −<!-- − --> μ<!-- μ -->) 2 2 σ<!-- σ --> 2 ⎤<!-- ⎤ --> {\displaystyle f_{x}(x)={\frac {1}{\sigma {\sqrt {2\pi }}}}\cdot \exp \left(-{\frac {(x-\mu)^{2}}{2\sigma ^{2}}}\right)}
 E X = μ<!-- μ --> {\displaystyle EX=\mu }
 V (X) = σ<!-- σ --> 2 {\displaystyle V(X)=\sigma ^{2}}
Ist Y ∼<!-- ∼ --> N (μ<!-- μ --> , σ<!-- σ --> 2) {\displaystyle Y\sim N({\bar {\mu }},\sigma ^{2})} und X , Y {\displaystyle X,Y} unanähängig, so gilt
 X + Y ∼<!-- ∼ --> N (μ<!-- μ --> + μ<!-- μ --> , σ<!-- σ -->