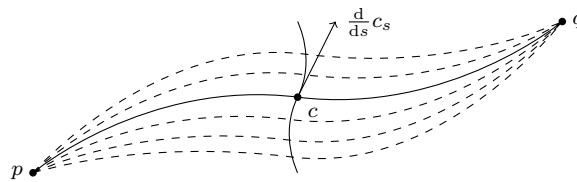


Kapitel 9.

Jacobifelder

Für $p, q \in M$ sei Ω_{pq} der Raum aller glatten Kurven $c : [0, 1] \rightarrow M$ mit $c(0) = p$ und $c(1) = q$.



Definition 9.1 Eine (*glatte*) **Variation** einer glatten Kurve $c : [a, b] \rightarrow M$ ist eine glatte Abbildung

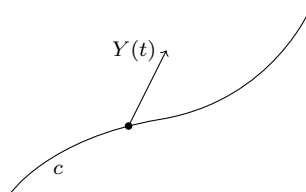
$$h : (-\varepsilon, \varepsilon) \times [a, b] \rightarrow M \quad h_s(t) = h(s, t)$$

mit $h_0 = c$. Gilt $h(\cdot, a) \equiv c(a)$ und $h(\cdot, b) \equiv c(b)$, so heißt h eine **Variation mit festen Endpunkten** oder **eigentliche Variation**. Man schreibt c_s für eine Variation h von c .

Ist c_s eine glatte Variation von c , so ist

$$\begin{aligned} Y(t) &:= \left. \frac{d}{ds} \right|_{s=0} c_s(t) \\ &= \left. \frac{d}{ds} \right|_{s=0} h(s, t) = h_{*(0,t)} \left(\frac{\partial}{\partial s} \right) \end{aligned}$$

ein Vektorfeld entlang c . Ist c_s eigentlich, so gilt $Y(a) = 0 \in T_{c(a)} M$ und $Y(b) = 0 \in T_{c(b)} M$.



Tatsächlich ist jedes Vektorfeld ein solches Variationsfeld einer Variation von c : Ist Y ein Vektorfeld entlang c , so definiert $h(s, t) = \exp_{c(t)}(sY(t))$ eine Variation von c und es gilt:

$$\begin{aligned} \left. \frac{d}{ds} \right|_{s=0} h(s, t) &= \exp_{c(t)*0}(Y(t)) \\ &= \text{id}_{T_{c(t)} M}(Y(t)) = Y(t). \end{aligned}$$

Falls Y in den Endpunkten von c verschwindet, so ist die so definierte Variation eigentlich. Bestimme $\frac{d}{ds}\Big|_{s=0} E(c_s)$ und $\frac{d}{ds}\Big|_{s=0} \mathcal{L}(c_s)$:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \frac{d}{ds}\Big|_{s=0} \langle \dot{c}_s, \dot{c}_s \rangle &= \langle \nabla_s \dot{c}(s), \dot{c}(s) \rangle \\ &= \left\langle \nabla_s \frac{d}{dt} c_s, \dot{c}(s) \right\rangle = \left\langle \nabla_t \frac{d}{ds} c_s, \dot{c}_s \right\rangle \\ &= \left\langle \frac{d}{ds}\Big|_{s=0} c_s, \dot{c}_s \right\rangle' - \left\langle \frac{d}{ds}\Big|_{s=0} c_s, \nabla_t \dot{c}_s \right\rangle \\ &= \langle Y, \dot{c} \rangle' - \langle Y, \nabla_t \dot{c} \rangle \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}\Big|_{s=0} \|\dot{c}_s\| &= \frac{1}{2\|\dot{c}_s\|} \frac{d}{ds}\Big|_{s=0} \langle \dot{c}_s, \dot{c}_s \rangle \\ &= \frac{\langle Y, \dot{c} \rangle' - \langle Y, \nabla_t \dot{c} \rangle}{\|\dot{c}\|} \end{aligned}$$

Damit folgt:

$$\frac{d}{ds}\Big|_{s=0} E(c_s) = \frac{d}{ds}\Big|_{s=0} \int_a^b \frac{1}{2} \|\dot{c}_s\|^2 = \langle Y, \dot{c} \rangle|_a^b - \int_a^b \langle Y, \nabla_t \dot{c} \rangle$$

Betrachte $E : \Omega_{pq} \rightarrow \mathbb{R}$. Dann ist $c \in \Omega_{pq}$ genau dann eine Geodätische, wenn c ein kritischer Punkt von E ist, das heißt $\frac{d}{ds}\Big|_{s=0} E(c_s) = 0$ für jede eigentliche Variation von c . Ist c ein kritischer Punkt von E , so sei c_s die von $Y = f \nabla_t \dot{c}$ mit $f(0) = 0 = f(1)$ erzeugte Variation. Dann ist c_s eigentlich und es gilt

$$0 = \frac{d}{ds}\Big|_{s=0} E(c_s) = - \int_a^b f \|\nabla_t \dot{c}\|^2$$

also $\nabla_t \dot{c} = 0$. Ist c nach der Bogenlänge parametrisiert, so gilt

$$\frac{d}{ds}\Big|_{s=0} \mathcal{L}(c_s) = \frac{d}{ds}\Big|_{s=0} E(c_s)$$

Eine Kurve $c \in \Omega_{pq}$ ist genau dann ein kritischer Punkt von \mathcal{L} , wenn c eine umparametrisierte Geodätische ist.

1. Ausblick: Hesse & Morse - Theorie

Sei $f \in C^\infty(M)$, sei nach Konvention $\nabla_X f = X(f) = df(X)$, und $\nabla f = df \in \Omega^1(M) = \Gamma(TM^*)$. Für die Hessesche $H_f = \nabla^2 f$ gilt nach Proposition 7.3:

$$\begin{aligned} \nabla^2 f(X, Y) &= (\nabla_X df)(Y) = X(df(Y)) - df(\nabla_X Y) \\ &= X(Yf) - (\nabla_X Y)(f) \quad (= \nabla_{X,Y}^2 \text{ in Kapitel 7}) \\ &= [X, Y]f + Y(Xf) - \underbrace{(\nabla_X Y - \nabla_Y X)f}_{[X,Y] \text{ Torsionsfreiheit}} - (\nabla_Y X)f \\ &= Y(Xf) - (\nabla_Y X)(f) = \nabla^2 f(Y, X) = H_f(Y, X) \end{aligned}$$

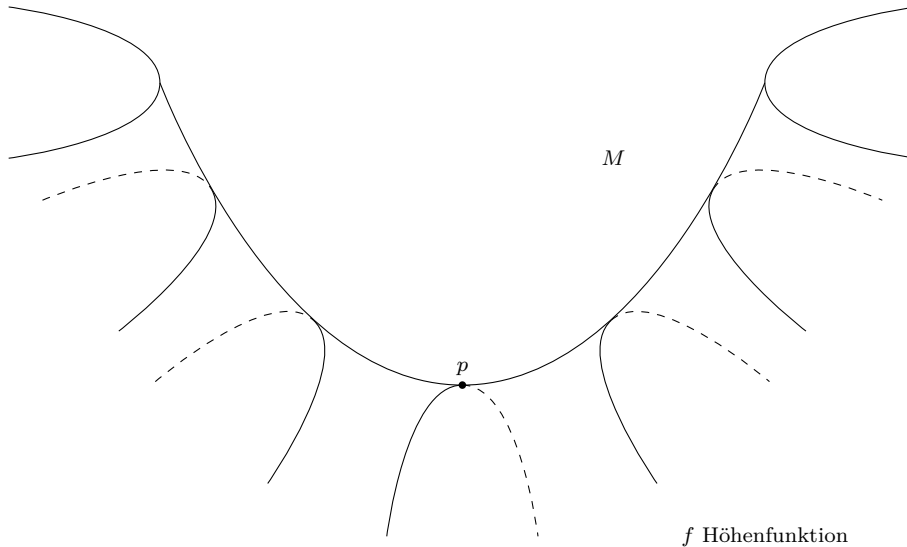
Die Hessesche ist also eine symmetrische \mathbb{R} -Bilinearform $H_f : \mathcal{V}(M) \times \mathcal{V}(M) \rightarrow C^\infty(M)$. Sie ist im Allgemeinen *nicht* $C^\infty(M)$ -bilinear. Ist $p \in M$ ein kritischer Punkt von f , das heißt $df|_p = 0$, dann hängt $H_f|_p$ nur von $\xi = X_p$ und $\eta = Y_p$ ab: Ist \tilde{X} ein Vektorfeld mit $\tilde{X}_p = \xi = X_p$, so gilt:

$$\begin{aligned} H_f|_p(\tilde{X}, Y) &= \tilde{X}_p(Yf) - \underbrace{df|_p(\nabla_{\tilde{X}} Y)}_{=0} = \tilde{X}_p(Yf) = \xi(Yf) \\ &= X_p(Yf) = \dots = H_f|_p(X, Y) \end{aligned}$$

$H_f|_p$ ist eine Bilinearform auf $T_p M$. Insbesondere hängt $H_f|_p$ nur von der differenzierbaren Struktur von M und *nicht* von der Riemannschen Struktur ab. Ist H_f nicht ausgeartet, so heißt die Anzahl der negativen Eigenwerte der **Index** von f in p . Ist $v \in T_p M$ der Eigenvektor zu einem negativen Eigenwert k und γ eine Kurve mit $\gamma(0) = p$ und $\dot{\gamma}(0) = v$. Dann gilt

$$0 > \lambda \|v\|^2 = H_f|_p(v, v) = v((f \circ \gamma)') = \left. \frac{d^2}{dt^2} \right|_{t=0} f(\gamma(t))$$

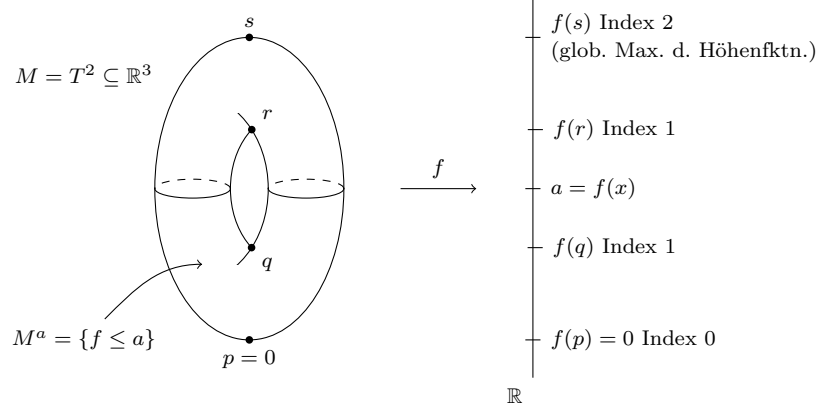
Entlang der Kurve γ nimmt f also ein striktes Maximum an.



Tatsächlich ist jeder nicht ausgeartete kritische Punkt von solcher Gestalt.

Morse-Lemma Es sei $p \in M$ ein nicht ausgearteter kritischer Punkt von $f \in C^\infty(M)$ mit Index α . Dann existiert eine Karte (φ, U) um p mit $\varphi(p) = 0$ und $f = f(p) - (\varphi^1)^2 - (\varphi^2)^2 - \dots - (\varphi^\alpha)^2 + (\varphi^{\alpha+1})^2 + \dots + (\varphi^m)^2$.

Morse-Theorie



Die Topologien von M^a und M^b sind identisch, wenn zwischen a und b keine kritischen Werte auftreten. „Rekonstruktion“: Klebe sukzessive für die nicht ausgearteten kritischen Punkte p Zellen der Dimension $\text{Ind}_f(p)$, das heißt $\mathbb{B}_1(0) \subseteq \mathbb{R}^{\text{Ind}_f(p)}$.

Auf jeder glatten Mannigfaltigkeit existiert eine sogenannte **Morse-Funktion**, das heißt eine Funktion mit isolierten kritischen Punkten, die alle nicht entartet sind und für die $f^{-1}([a, b])$ kompakt ist. Ist $f(p) = a$ ein kritischer Wert, so unterscheiden sich $M^{a-\varepsilon}$ und $M^{a+\varepsilon}$ durch das Ankleben einer $\text{Ind}_f(p)$ -Zelle.

Weitere Informationen zu diesem Thema lassen sich im Buch „Morse Theory“ von J. Milnor [6] finden.

2. Zweite Ableitung des Energiefunktional (in kritischen Punkten)

Es sei c eine nach Bogenlänge parametrisierte Geodätische, c_s eine Variation von c und $Y(t) = \frac{d}{ds}\Big|_{s=0} c_s(t)$. Dann gelten die folgenden Gleichungen:

$$\begin{aligned}
 E(c_s) &= \frac{1}{2} \int_0^{\mathcal{L}} \|\dot{c}_s\|^2 \\
 \frac{d}{ds} \langle \dot{c}_s, \dot{c}_s \rangle &= 2 \langle \nabla_s \dot{c}_s, \dot{c}_s \rangle \\
 &= 2 \left\langle \nabla_t \frac{d}{ds} c_s, \dot{c}_s \right\rangle \\
 \frac{d^2}{ds^2} \langle \dot{c}_s, \dot{c}_s \rangle &= 2 \left\langle \nabla_s \nabla_t \frac{d}{ds} c_s, \dot{c}_s \right\rangle + 2 \left\langle \nabla_t \frac{d}{ds} c_s, \nabla_s \dot{c}_s \right\rangle \\
 &= 2 \left\langle \nabla_s \nabla_t \frac{d}{ds} c_s, \dot{c}_s \right\rangle + 2 \left\| \nabla_t \frac{d}{ds} c_s \right\|^2 \\
 \nabla_s \nabla_t \frac{d}{ds} c_s &= \nabla_t \nabla_s \frac{d}{ds} c_s + R \left(\underbrace{\frac{d}{ds} c_s, \frac{d}{dt} c_s}_{s=0: Y(t)} \right) \frac{d}{ds} c_s
 \end{aligned}$$

Zur Übersichtlichkeit setzen wir nun $\nabla_t Y =: Y'$

$$\begin{aligned}
 \frac{1}{2} \frac{d^2}{ds^2} \Big|_{s=0} \langle \dot{c}_s, \dot{c}_s \rangle &= \left\langle \nabla_t \nabla_s \frac{d}{ds} c_s, \dot{c}_s \right\rangle + \langle R(Y, \dot{c}) Y, \dot{c} \rangle + \|\nabla_t Y\|^2 \\
 &= \left\langle \nabla_s \frac{d}{ds} c_s, \dot{c} \right\rangle' - \langle R(Y, \dot{c}) \dot{c}, Y \rangle + \|Y'\|^2
 \end{aligned}$$

$$\frac{d^2}{ds^2} E(c_s) = \left\langle \nabla_s \frac{d}{ds} c_s, \dot{c}_s \right\rangle \Big|_0^{\mathcal{L}} + \int_0^{\mathcal{L}} \|Y'\|^2 - \langle R(Y, \dot{c}) \dot{c}, Y \rangle$$

$$\begin{aligned} \frac{d^2}{ds^2} \Big|_{s=0} \|\dot{c}_s\| &= \frac{d}{ds} \Big|_{s=0} \left(\frac{1}{2\|\dot{c}_s\|} \frac{d}{ds} \|\dot{c}_s\|^2 \right) \\ &= -\frac{1}{4} \left(\frac{d}{ds} \Big|_{s=0} \|\dot{c}_s\|^2 \right)^2 + \frac{1}{2} \frac{d^2}{ds^2} \Big|_{s=0} \|\dot{c}_s\|^2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{d^2}{ds^2} \Big|_{s=0} \mathcal{L}(c_s) &= \frac{d^2}{ds^2} \Big|_{s=0} E(c_s) - \frac{1}{4} \int \left(\frac{d}{ds} \Big|_{s=0} \|\dot{c}_s\|^2 \right)^2 \\ &= \left\langle \nabla_s \frac{d}{ds} c_s, \dot{c}_s \right\rangle \Big|_0^{\mathcal{L}} + \int_0^{\mathcal{L}} \|Y'\|^2 - \langle R(Y, \dot{c}) \dot{c}, Y \rangle - (\langle Y', \dot{c} \rangle)^2 \end{aligned}$$

Bezeichnet $Y^\perp = Y - \langle \dot{c}, Y \rangle \dot{c}$ den Normalenanteil von Y bezüglich \dot{c} , so gilt:

$$\begin{aligned} Y^{\perp'} &= Y' - \langle \nabla_t \dot{c}, Y \rangle \dot{c} - \langle \dot{c}, Y' \rangle \dot{c} - \langle \dot{c}, Y \rangle \nabla_t \dot{c} \\ &= Y' - \langle \dot{c}, Y' \rangle \dot{c} = (Y')^\perp \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \|Y'^\perp\| - \langle R(Y^\perp, \dot{c}) \dot{c}, Y^\perp \rangle &= \langle Y' - \langle \dot{c}, Y' \rangle \dot{c}, Y' - \langle \dot{c}, Y' \rangle \dot{c} \rangle - \langle R(Y, \dot{c}) \dot{c}, Y \rangle \\ &\quad + \langle R(Y, \dot{c}) \dot{c}, \langle \dot{c}, Y \rangle \dot{c} \rangle \\ &\quad + \langle R(\langle \dot{c}, Y \rangle \dot{c}, \dot{c}) \dot{c}, Y - \langle \dot{c}, Y' \rangle \dot{c} \rangle \\ &= \|Y'\|^2 - \langle R(Y, \dot{c}) \dot{c}, Y \rangle - (\langle Y', \dot{c} \rangle)^2 \end{aligned}$$

Es gilt:

$$\frac{d^2}{ds^2} \Big|_{s=0} \mathcal{L}(c_s) = \left\langle \nabla_s \frac{d}{ds} c_s, \dot{c} \right\rangle \Big|_0^{\mathcal{L}} + \int_0^{\mathcal{L}} \|Y'^\perp\|^2 - \langle R(Y^\perp, \dot{c}) \dot{c}, Y^\perp \rangle$$

Erinnerung Für eine glatte Funktion f auf M gilt in kritischen Punkten p :

$$H_f(v, v) = \frac{d^2}{dt^2} \Big|_{t=0} f(\gamma(t))$$

mit $\gamma(0) = p, \dot{\gamma}(0) = v$. Diese Eigenschaft verwenden wir in der folgenden Definition als Ausgangspunkt.

Definition 9.2 Es sei Y ein Vektorfeld entlang einer nach Bogenlänge parametrisierte geodätische Kurve c und c_s die von Y erzeugte Variation. Die durch

$$\mathcal{I}(Y, Y) = \frac{d^2}{ds^2} \Big|_{s=0} E(c_s)$$

auf dem Vektorraum der Vektorfelder entlang c definierte symmetrische Bilinearform heißt die **Indexform** von c .

Sind X, Y Vektorfelder entlang c , welche in den Endpunkten verschwinden, so gilt

$$\mathcal{I}(X, Y) = - \int_0^{\mathcal{L}} \langle X'' + R(X, \dot{c}) \dot{c}, Y \rangle$$

denn bezeichnet c_s die von Y erzeugte eigentliche Variation, so gilt

$$\begin{aligned} \frac{d^2}{ds^2} \Big|_{s=0} E(c_s) &= \left\langle \nabla_s \frac{d}{ds} c_s, \dot{c} \right\rangle \Big|_0^{\mathcal{L}} + \int_0^{\mathcal{L}} \|Y'\|^2 - \langle R(Y, \dot{c}) \dot{c}, Y \rangle \\ &= \int_0^{\mathcal{L}} \langle Y', Y \rangle' - \langle Y'', Y \rangle - \langle R(Y, \dot{c}) \dot{c}, Y \rangle \\ &= \langle Y', Y \rangle \Big|_0^{\mathcal{L}} - \int_0^{\mathcal{L}} \langle Y'', Y \rangle + \langle R(Y, \dot{c}) \dot{c}, Y \rangle \\ &= - \int_0^{\mathcal{L}} \langle Y'' + R(Y, \dot{c}) \dot{c}, Y \rangle. \end{aligned}$$

Die Indexform um eine Geodätische c ist genau dann ausgeartet, wenn ein in den Endpunkten verschwindendes Vektorfeld entlang c existiert mit

$$Y'' + R(Y, \dot{c}) \dot{c} \equiv 0. \quad (9.1)$$

Definition 9.3 Ein Vektorfeld entlang einer Geodätischen c heißt **Jacobifeld**, wenn es die obige Differentialgleichung (9.1) erfüllt.

Lemma 9.4 Es sei $c: [0, 1] \rightarrow M$ eine Geodätische, $p = c(0)$. Dann existiert für alle $v, w \in T_p M$ genau ein Jacobifeld \mathcal{J} entlang c mit $\mathcal{J}(0) = v$, $\mathcal{J}'(0) = w$.

Beweis Es sei $e_1, \dots, e_m \in T_p M$ eine Orthonormalbasis des Tangentialraums in p und es bezeichnen E_1, \dots, E_m die entlang c parallelen Vektorfelder mit $E_i(0) = e_i$. Dann ist jedes Vektorfeld Y entlang c von der Form $Y = \sum_i \eta^i E_i$ und es gilt:

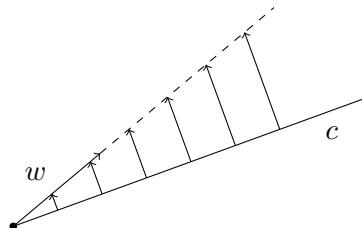
$$Y' = \sum_i (\dot{\eta}^i E_i + \eta^i \nabla_t E_i) = \sum_i \dot{\eta}^i E_i$$

sowie $Y'' = \sum \ddot{\eta}^i E_i$. Setzt man $R(E_j, \dot{c}) \dot{c} = \sum_i \varrho_j^i E_i$, so ist (9.1) zum System linearer Differentialgleichungen zweiter Ordnung

$$\ddot{\eta}^i + \sum_j \eta^j \varrho_j^i = 0.$$

Existenz und Eindeutigkeit folgen mit der Lösungstheorie gewöhnlicher Differentialgleichungen. \square

Beispiel (Jacobifelder des \mathbb{R}^n) Die Geodätischen des \mathbb{R}^n sind genau die Geraden. Ein Vektorfeld Y entlang einer Geraden ist genau dann ein Jacobifeld, wenn $Y'' = 0$ gilt; jedes solche ist der Form $Y(t) = v + tw$.



Sind die Startwerte eines Jacobifeldes tangential an c , etwa $\mathcal{J}(0) = \lambda \dot{c}(0)$ und $\mathcal{J}'(0) = \mu \dot{c}(0)$, so gilt

$$\mathcal{J}(t) = (\lambda + t\mu)\dot{c}(t),$$

denn

$$\begin{aligned}\mathcal{J}''(t) &= \nabla_t(\mu \dot{c}(t) + (\lambda + t\mu) \underbrace{\nabla_t \dot{c}(t)}_{=0}) = \mu \nabla_t \dot{c} = 0, \\ R(\mathcal{J}, \dot{c})\dot{c}|_t &= (\lambda + t\mu)R(\dot{c}, \dot{c})\dot{c} = 0.\end{aligned}$$

Zu c tangentiale Jacobifelder tragen keine geometrischen Informationen; vgl. zweite Ableitung des Längenfunktional. Gilt für die Startwerte eines Jacobifeldes $\mathcal{J}(0)$ und $\mathcal{J}'(0) = \dot{c}(0)^\perp$

$$\langle \mathcal{J}', \dot{c} \rangle' = \langle \mathcal{J}'', \dot{c} \rangle + \langle \mathcal{J}', \nabla_t \dot{c} \rangle = -\langle R(\mathcal{J}, \dot{c})\dot{c}, \dot{c} \rangle = 0,$$

also $\mathcal{J}'(t) \perp \dot{c}(t)$ für alle Zeiten t und $\langle \mathcal{J}, \dot{c} \rangle' = \langle \mathcal{J}', \dot{c} \rangle = 0$, somit $\mathcal{J}(t) \perp \dot{c}(t)$ für alle t .

Der \mathbb{R} -Vektorraum der Jacobifelder entlang einer Geodätischen c hat die Dimension $2\dim(M)$ und die zu c normalen Jacobifelder bilden einen Vektorraum der Dimension $2\dim(M) - 2$.

Satz 9.5 *Es sei $c: [0, 1] \rightarrow M$ eine Geodätische und c_s eine Variation von c , so dass alle Kurven c_s Geodätische sind. Dann ist das zugehörige Variationsfeld ein Jacobifeld entlang c . Jedes Jacobifeld ist von dieser Gestalt.*

Beweis Es sei c_s eine Variation von c und alle c_s seien Geodätische. Dann gilt:

$$\begin{aligned}Y'' &= \nabla_t \left(\nabla_t \frac{d}{ds} c_s \right) \Big|_{s=0} \\ &= \nabla_t \left(\nabla_s \frac{d}{dt} c_s \right) \Big|_{s=0} \\ &= \underbrace{\nabla_s \nabla_t \frac{d}{dt} c_s}_{=0} + R \left(\underbrace{\frac{d}{dt} c_s}_{=\dot{c}}, \underbrace{\frac{d}{ds} c_s}_{=Y} \right) \underbrace{\frac{d}{dt} c_s}_{=\dot{c}} \Big|_{s=0} \\ &= -R(Y, \dot{c})\dot{c}\end{aligned}$$

Es sei umgekehrt \mathcal{J} ein Jacobifeld entlang c , γ die durch $\gamma(0) = c(0)$, $\dot{\gamma}(0) = \mathcal{J}(0)$ definierte Geodätische, sowie V und W die entlang γ parallelen Vektorfelder mit $V(0) = \dot{c}(0)$ und $W(0) = \mathcal{J}'(0)$. Dann ist

$$c_s(t) = \exp_{\gamma(s)}(t(V(s) + sW(s)))$$

eine Variation von c und alle Kurven c_s sind Geodätische. Das zugehörige Variationsfeld $Y = \frac{d}{ds} \Big|_{s=0} c_s$ ist nach dem oben Bewiesenen ein Jacobifeld. Es gilt

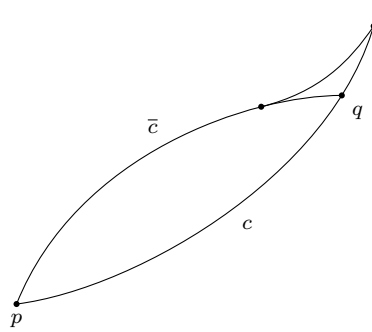
$$Y(0) = \frac{d}{ds} \Big|_{s=0} \exp_{\gamma(s)}(0) = \frac{d}{ds} \Big|_{s=0} \gamma(s) = \mathcal{J}(0).$$

und

$$\begin{aligned}
 Y'(0) &= \nabla_t \left. \frac{d}{ds} c_s \right|_{s=0} \Big|_{t=0} \\
 &= \nabla_s \left. \frac{d}{dt} \exp_{\gamma(s)}(t(V(s) + sW(s))) \right|_{s=0} \Big|_{t=0} \\
 &= \nabla_s (V(s) + sW(s)) \Big|_{s=0} \\
 &= V'(0) + W(0) + 0W'(0) \\
 &= W(0) = \mathcal{J}'(0)
 \end{aligned}$$

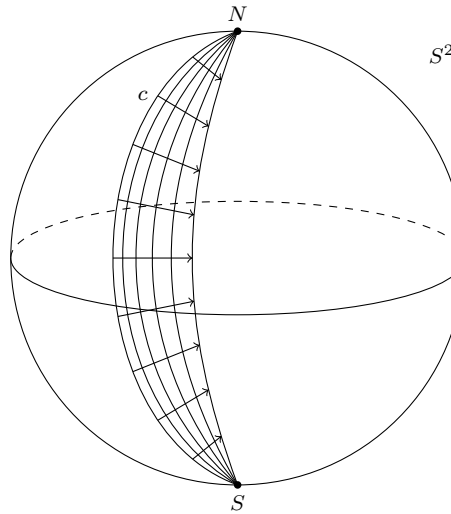
Nach Lemma 9.4 stimmen \mathcal{J} und Y überein. □

Erinnerung (Korollar 8.12 (iii)) Die zusammengesetzte Kurve oben ist kürzer als die durchgezogene Kurve unten.



Definition 9.6 Ein Punkt $p \in M$ heißt zu q **konjugiert**, wenn q ein singulärer Wert von \exp_p ist. p heißt **konjugiert zu q entlang der Geodätischen c** , wenn $\exp_{p*\dot{c}(0)}$ singulär ist, das heißt $\text{Kern } \exp_{p*\dot{c}(0)} \neq \{0\}$.

Proposition 9.7 Ein Punkt p ist genau dann konjugiert zu q entlang einer Geodätischen c , wenn es ein nichttriviales Jacobifeld entlang c gibt, welches in den Endpunkten verschwindet.



Beweis Nach Satz 9.5 ist jedes Jacobifeld \mathcal{J} entlang c mit $\mathcal{J}(0) = 0$ von der Gestalt $\mathcal{J}(t) = \frac{d}{ds}\Big|_{s=0} \exp_p(t(\dot{c}(0) + s\mathcal{J}'(0)))$, oder allgemein $\frac{d}{ds}\Big|_{s=0} \exp_{\gamma(s)}(t(V(s) + sW(s)))$. Es gilt dann

$$\mathcal{J}(1) = \frac{d}{ds}\Big|_{s=0} \exp_p(\dot{c}(0) + s\mathcal{J}'(0)) = \exp_{p*\dot{c}(0)}(\mathcal{J}'(0))$$

Damit existiert genau dann ein nichttriviales Jacobifeld \mathcal{J} entlang c mit $\mathcal{J}(0) = 0$, $\mathcal{J}(1) = 0$, wenn $\text{Kern } \exp_{p*\dot{c}(0)} \neq \{0\}$. \square

Bemerkung 1) Der Raum der nichttrivialen Jacobifelder mit verschwindenden Endpunkten entlang c hat genau die Dimension $\dim \text{Kern } \exp_{p*\dot{c}(0)}$.

2) Ist p konjugiert zu q , so ist q konjugiert zu p .

3) Für jedes Jacobifeld \mathcal{J} entlang c mit $\mathcal{J}(0) = 0 = \mathcal{J}(1)$ gilt $\langle \mathcal{J}, \dot{c} \rangle = \langle \mathcal{J}', \dot{c} \rangle = 0$, denn

$$\langle \mathcal{J}', \dot{c} \rangle' = \langle \mathcal{J}'', \dot{c} \rangle = -\langle R(\mathcal{J}, \dot{c})\dot{c}, \dot{c} \rangle = 0,$$

also ist $\langle \mathcal{J}', \dot{c} \rangle = \langle \mathcal{J}, \dot{c} \rangle'$ konstant. Ferner gilt $\langle \mathcal{J}(0), \dot{c}(0) \rangle = 0 = \langle \mathcal{J}(1), \dot{c}(1) \rangle$, also ist $\langle \mathcal{J}, \dot{c} \rangle \equiv 0$.

4) Sind p und q nicht entlang c zueinander konjugiert, dann ist jedes Jacobifeld \mathcal{J} entlang c eindeutig durch $\mathcal{J}(0)$ und $\mathcal{J}(1)$ bestimmt, denn sind \mathcal{J} und $\tilde{\mathcal{J}}$ Jacobifelder mit identischen Randwerten, so ist $\mathcal{J} - \tilde{\mathcal{J}}$ ein Jacobifeld welches in den Endpunkten verschwindet.

5) Zwei Punkte sind genau dann konjugiert entlang der Geodätischen c , wenn eine eigentliche geodätische Variation von c existiert.

Satz 9.8 Es seien $p, q \in M$ und sei $c : [0, 1] \rightarrow M$ eine Geodätische von p nach q .

(i) Ist entlang c kein Punkt zu p konjugiert, dann existiert eine Umgebung U von c in Ω_{pq} , so dass $\mathcal{L}(\tilde{c}) > \mathcal{L}(c)$ und $E(\tilde{c}) \geq E(c)$ für alle $\tilde{c} \in U$ gelten.

(ii) Falls ein $t_0 \in (0, 1)$ existiert, so dass $p = c(0)$ zu $c(t_0)$ entlang c konjugiert ist, so existiert eine eigentliche Variation c_s von c mit $\mathcal{L}(c_s) < \mathcal{L}(c)$ und $E(c_s) < E(c)$ für hinreichend kleine s .

Lemma 9.9 (globales Gauß Lemma) Es seien $v, w \in T_p M$ und $c(t) = \exp_p(t \cdot v)$. Dann gilt

$$\langle \exp_{p*tv}(v), \exp_{p*tv}(w) \rangle = \langle v, w \rangle.$$

Inbesondere ist jede Geodätische in p orthogonal zu der Abstandssphäre

$$S_r(p) = \{q \mid d(p, q) = r\}.$$

Beweis Y sei das durch die Startwerte $Y(0) = 0$ und $Y'(0) = \frac{w}{t}$ bestimmte Jacobifeld entlang c . Dann gilt:

$$\begin{aligned} Y(t) &= \frac{d}{ds}\Big|_{s=0} \exp_{\gamma(s)}(t(V(s) + sW(s))) & \gamma(0) = p, \dot{\gamma}(0) = Y(0) = 0 \\ &= \frac{d}{ds}\Big|_{s=0} \exp_p\left(t\left(v + s\frac{w}{t}\right)\right) & V(s) = V(0) = \dot{c}(0) = v \\ &= \exp_{p*tv}(w) & W(s) = \dots = \frac{w}{t} \end{aligned}$$

Es sei $\frac{w}{t} = \lambda v + u$ mit $u \perp v$. Der zu c tangential Anteil von Y ist dann

$$Y^T(s) = \lambda s \dot{c}(s),$$

denn $Y^{T''} = 0$ und $R(Y^T, \dot{c})\dot{c} = \lambda s R(\dot{c}, \dot{c})\dot{c} = 0$. Also gilt $Y(t) = \lambda t \dot{c}(t) + Y^\perp(t)$, wobei Y^\perp der zu c orthogonale Anteil von Y ist. Es folgt

$$\begin{aligned} \langle \exp_{p*tv}(v), \exp_{p*tv}(w) \rangle &= \left\langle \underbrace{\frac{d}{dt} \exp_p(tv)}_{=c}, Y(t) \right\rangle \\ &= \langle \dot{c}(t), \lambda t \dot{c}(t) + Y^\perp(t) \rangle \\ &= \lambda t \|\dot{c}(t)\|^2 = \lambda t \|v\|^2 \end{aligned}$$

$$\langle v, w \rangle = \langle v, t(\lambda v + w) \rangle = t\lambda \|v\|^2 \quad \square$$

Lemma 9.10 *Es sei $c: [0, 1] \rightarrow M$ eine Geodätische, $v = \dot{c}(0) \in T_p M$ und ψ (stückweise) glatte Kurve in $T_p M$ mit $\psi(0) = 0$ und $\psi(1) = v$, dann gilt*

$$\mathcal{L}(\exp_p \circ \psi) \geq \mathcal{L}(c),$$

wobei Gleichheit genau dann gilt, wenn ψ eine monotone Reparametrisierung von $t \mapsto tv$ ist.

Beweis Es seien ϱ und ϑ glatt, so dass $\psi = \varrho\vartheta$ mit $\|\vartheta\| \equiv 1$ (Polarkoordinaten).

$$\begin{aligned} \|(\exp_p \circ \psi)'\|^2 &= \|\exp_{p*\varrho\vartheta}(\varrho'\vartheta + \varrho\vartheta')\|^2 \\ &= \varrho'^2 \underbrace{\langle \exp_{p*\varrho\vartheta}(\vartheta), \exp_{p*\varrho\vartheta}(\vartheta) \rangle}_{=\langle \vartheta, \vartheta \rangle = 1} \\ &\quad + 2\varrho\varrho' \underbrace{\langle \exp_{p*\varrho\vartheta}(\vartheta), \exp_{p*\varrho\vartheta}(\vartheta') \rangle}_{=\langle \vartheta, \vartheta' \rangle = \frac{1}{2}\|\vartheta\|^{2'} = 0} \\ &\quad + \varrho^2 \langle \exp_{p*\varrho\vartheta}(\vartheta'), \exp_{p*\varrho\vartheta}(\vartheta') \rangle \\ &= \varrho'^2 + \varrho^2 \|\exp_{p*\psi}(\vartheta')\|^2 \end{aligned}$$

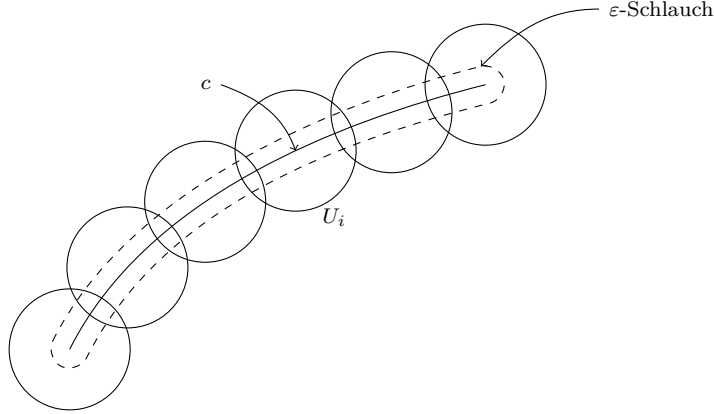
Damit folgt

$$\mathcal{L}(\exp_p \circ \psi) \geq \int_0^1 |\varrho'| \geq |\varrho(1) - \varrho(0)| = \|v\| = \mathcal{L}(c)$$

Gleichheit gilt genau dann, wenn ϑ konstant und ϱ monoton ist. \square

Beweis (von Satz 9.8) (i) Es sei $c: [0, 1] \rightarrow M$ eine Geodätische, seien $p = c(0)$ und $q = c(1)$ und es existieren keine zu p konjugierten Punkte entlang c . Es bezeichne $\varphi: [0, 1] \rightarrow T_p M$ mit $\varphi(t) = tv$. Für jedes $t \in [0, 1]$ ist nach Voraussetzung $\exp_{p*\varphi(t)}$ regulär, also eine lokaler Diffeomorphismus. Es sei $\{W_i\}$ eine endliche offene Überdeckung von $\varphi([0, 1])$, so dass $\exp_p|_{W_i}: W_i \rightarrow \exp_p(W_i) = U_i$ ein Diffeomorphismus ist.

Ziel: Lifte Variationen von M nach $T_p M$.



Es sei t_i eine Partition von $[0, 1]$, so dass $\varphi([t_{i-1}, t_i]) \subseteq W_i$. Ist c_s eine Variation von c , so kann $\varepsilon > 0$ so gewählt werden, dass

$$c_s: [t_{i-1}, t_i] \times (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow U_i = \exp_p(W_i)$$

gilt. Dies definiert eine Variation ψ_s von φ wie folgt: Ist ψ_s bis t_{i-1} definiert und gilt $\psi_s(t_{i-1}) \in W_i$, so setzt man $\psi_s(t) = \exp_p|_{W_i}^{-1}(c_s(t))$. Nach Lemma 9.10 gilt also

$$\mathcal{L}(\exp_p \circ \psi_s) = \mathcal{L}(c_s) \geq \mathcal{L}(c)$$

für alle s . Mit der Cauchy-Schwarz Ungleichung folgt dann:

$$E(c_s) \geq \frac{1}{2} \mathcal{L}(c_s)^2 \geq \frac{1}{2} \mathcal{L}(c)^2 = E(c)$$

(ii) Es sei $c(t_0)$ entlang c zu $p = c(0)$ konjugiert.

Behauptung: Dann existiert ein zu c orthogonales Vektorfeld Y entlang der Geodätischen c mit $Y(0) = 0$, $Y(1) = 0$ und $\mathcal{I}(Y, Y) = 0$.

Dann gilt für die zugehörige eigentliche Variation c_s von c :

$$\left. \frac{d}{ds} \right|_{s=0} \mathcal{L}(c_s) = \lambda \left. \frac{d}{ds} \right|_{s=0} E(c_s) = 0$$

und, da Y normal ist,

$$\left. \frac{d^2}{ds^2} \right|_{s=0} \mathcal{L}(c_s) = \left. \frac{d^2}{ds^2} \right|_{s=0} E(c_s) = \mathcal{I}(Y, Y) < 0$$

Somit ist c lokales Maximum.

Beweis der Behauptung: Es existiert ein nichttriviales (zu c orthogonales) Jacobifeld \mathcal{J} entlang $c|_{[0, t_0]}$ mit $\mathcal{J}(0) = 0$ und $\mathcal{J}(t_0) = 0$. *Erinnerung:* Ist $c \in \Omega_{pq}$ eine Geodätische und $t_0 \in (0, 1)$, so dass $c(t_0)$ zu $p = c(0)$ entlang c konjugiert ist, so existiert ein Vektorfeld Y entlang c mit $\mathcal{I}(Y, Y) < 0$.

Beweis der Existenz von Y : Da $c(t_0)$ zu p entlang c konjugiert ist, existiert ein nichttriviales Jacobifeld J entlang $c|_{[0, t_0]}$ mit $J(0) = 0$, $J(t_0) = 0$.

Es sei X das entlang c parallele Vektorfeld mit $X(t_0) = -J'(t_0)$ (nach Lemma 9.4 ist $J'(t_0) \neq 0$) und $\alpha: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ mit $\alpha(0) = 0 = \alpha(1)$ und $\alpha(t_0) = 1$. Für $z = \alpha \cdot X$ und $\eta > 0$ sei

$$Y(t) = \begin{cases} J(t) + \eta \cdot Z(t) & \text{für } 0 \leq t \leq t_0 \\ \eta \cdot Z(t) & \text{für } t_0 < t \leq 1 \end{cases}$$

Y ist nun stückweise glatt, die Variationsformeln für \mathcal{L} und E , beziehungsweise die Indexform lassen sich aber ganz analog für stückweise glatte Vektorfelder beziehungsweise Variationen formalisieren. Es gilt, da Y orthogonal zu c ist, für die zu Y gehörigen Variationen c_s :

$$\begin{aligned} J(Y, Y) &= \frac{d^2}{ds^2} \Big|_{s=0} E(c_s) = \frac{d^2}{ds^2} \Big|_{s=0} \mathcal{L}(c_s) \\ &= \int_0^1 \|Y'\|^2 - \langle R(Y, \dot{c})\dot{c}, Y \rangle \\ &= \int_0^{t_0} \langle J', J' \rangle - \langle R(J, \dot{c})\dot{c}, J \rangle \\ &\quad + 2\eta \int_0^{t_0} \langle J', Z' \rangle - \langle R(J, \dot{c})\dot{c}, Z \rangle \\ &\quad + \eta^2 \int_0^1 \langle Z', Z' \rangle - \langle R(Z, \dot{c})\dot{c}, Z \rangle \end{aligned}$$

und mit

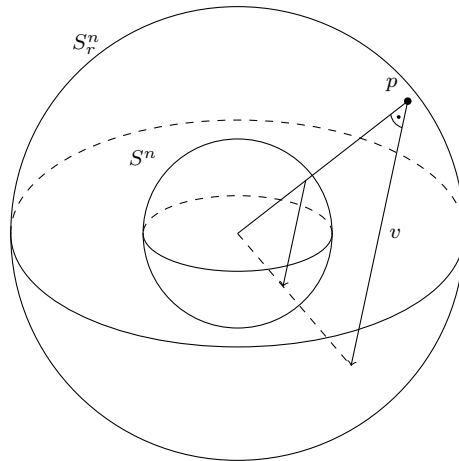
$$\begin{aligned} \langle J', J \rangle' &= \langle J', J' \rangle + \langle J'', J \rangle \\ &= \langle J', J' \rangle - \langle R(J, \dot{c})\dot{c}, J \rangle \\ \langle J', Z \rangle' &= \langle J', Z' \rangle + \langle J'', Z \rangle \\ &= \langle J', Z' \rangle - \langle R(J, \dot{c})\dot{c}, Z \rangle \end{aligned}$$

folgt

$$\begin{aligned} J(Y, Y) &= \langle J', J \rangle \Big|_0^{t_0} + 2\eta \langle J', Z \rangle \Big|_0^{t_0} + \eta^2 J(Z, Z) \\ &= 0 + 2\eta (\langle J'(t_0), Z(t_0) \rangle - \langle J'(0), Z(0) \rangle) + \eta^2 J(Z, Z) \\ &= -2\eta \|J'(t_0)\|^2 + \eta^2 J(Z, Z) \end{aligned}$$

Für hinreichend kleines $\eta > 0$ ist damit $\mathcal{J}(Y, Y) < 0$. □

Betrachte die Sphäre vom Radius $r > 0$, $S_r^n \subseteq \mathbb{R}^{n+1}$:



Als differenzierbare Mannigfaltigkeit ist S_r^n diffeomorph zur Standardsphäre $S^n = S_1^n$, vermöge der Abbildung $p \mapsto \frac{1}{r}p$. Bezeichnet $\langle \cdot, \cdot \rangle_r$, die von \mathbb{R}^{n+1} auf S_r^n induzierte Riemannsche Metrik, so sind $(S_r^n, \langle \cdot, \cdot \rangle_r)$ und $(S^n, r^2 \langle \cdot, \cdot \rangle_1)$ isometrisch. Es folgt

also $\text{diam}(S_r^n, \langle \cdot, \cdot \rangle_r) = \pi r = r \text{diam}(S^n, \langle \cdot, \cdot \rangle_1)$. Für die Schnittkrümmung einer von $v, w \in T_p M$ aufgespannte Ebene

$$\begin{aligned} \sec_p^{S_r^n}(\{v, w\}) &= \frac{\langle R(v, w)w, v \rangle_r}{\|v\|_r^2 \|w\|_r^2 - \langle v, w \rangle_r} = \frac{r^2 \langle R(v, w)w, v \rangle_1}{r^4 (\|v\|_1^2 \|w\|_1^2 - \langle v, w \rangle_1)} \\ &= \frac{1}{r^2} \sec_p^{S^n}(\{v, w\}) = \frac{1}{r^2}. \end{aligned}$$

Insbesondere gilt für die Ricci-Krümmung:

$$\begin{aligned} \text{ric}_p^{S_r^n}(v, v) &= \sum_i \left\langle R\left(e_i, \frac{v}{\|v\|_1}\right) \frac{v}{\|v\|_1}, e_i \right\rangle \\ &= \|v\|_1^2 \sum_{i \geq 2} \sec_p^{S_r^n}(\{v, e_i\}) = \|v\|_1^2 \frac{1}{r^2} (n-1) \\ &= (n-1) \frac{1}{r^2} \langle v, v \rangle_1. \end{aligned}$$

wobei $\{\frac{v}{\|v\|_1}, e_2, \dots, e_n\}$ eine Orthonormalbasis ist.

Satz 9.11 (Bonnet-Myers) *Es sei (M, g) eine vollständige m -dimensionale Riemannsche Mannigfaltigkeit mit*

$$\text{ric}_p \geq (m-1) \frac{1}{r^2} g$$

für ein $r > 0$. Dann gilt

$$\text{diam}(M, g) \leq \pi r = r \text{diam}(S^m, \langle \cdot, \cdot \rangle_1).$$

Insbesondere ist M kompakt.

Beweis Es sei $l < \text{diam}(M, g)$. Dann existieren $p, q \in M$ mit $(p, q) = l$ und nach dem Satz von Hopf-Rinow eine minimale Geodätische $c: [0, l] \rightarrow M$ von p nach q . Für jedes Vektorfeld Y entlang c , welches in den Endpunkten verschwindet, ist $J(Y, Y) \geq 0$. Es sei $\dot{c}(0) = e_1, \dots, e_m \in T_p M$ eine Orthonormalbasis und E_i die entlang c parallelen Vektorfelder mit $E_i(0) = e_i$ für $i \leq m$. Für

$$\begin{aligned} Y_i(t) &= \sin\left(\frac{\pi}{l}t\right) E_i(t) \\ 0 \leq J(Y_i, Y_i) &= - \int_0^l \langle Y_i'' + R(Y_i, \dot{c})\dot{c}, Y_i \rangle \\ &= - \int_0^l \left\langle -\frac{\pi^2}{l^2} \sin\left(\frac{\pi}{l}t\right) E_i(t) + \sin\left(\frac{\pi}{l}t\right) R(E_i, \dot{c})\dot{c}, \sin\left(\frac{\pi}{l}t\right) E_i(t) \right\rangle \\ &= \int_0^l \sin^2\left(\frac{\pi}{l}t\right) \left(\frac{\pi^2}{l^2} - \langle R(E_i, \dot{c})\dot{c}, E_i(t) \rangle \right). \end{aligned}$$

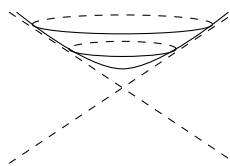
Es folgt

$$0 \leq \sum_{i \geq 2} J(Y_i, Y_i) = \int_0^l \sin^2\left(\frac{\pi}{l}t\right) \underbrace{\left((m-1) \frac{\pi^2}{l^2} - \text{ric}(\dot{c}(t), \dot{c}(t)) \right)}_{\leq (m-1) \left(\frac{\pi^2}{l^2} - \frac{1}{r^2} \right)}$$

und somit $\frac{\pi^2}{l^2} - \frac{1}{r^2} \geq 0$, also $l \leq \pi r$. □

Bemerkung (1) Die Existenz einer uniformen positiven Krümmungsschranke ist entprechend

$$M = \{x \in \mathbb{R}^3 \mid x_1^2 + x_2^2 - x_3^2 = -1, x_3 > 0\}$$



Dies ist nicht \mathbb{H}^2

Es gilt:

$$\sec_x(M, g) = \frac{1}{\|x\|^4}$$

also $\sec > 0$, aber $\sec_x \xrightarrow{\|x\| \rightarrow \infty} 0$ und M ist nicht kompakt.

- (2) Die Durchmesserschranke im Satz von Bonnet-Myers ist scharf in dem Sinne, dass falls (M, g) eine vollständige Riemannsche Mannigfaltigkeit mit $\text{ric} \geq (m - 1)\frac{1}{r^2}$ ist und $\text{diam}(M, g) = \pi r$ gilt, so folgt (M, g) ist isometrisch zu S_r^m . (Cheng, 1975 [3])

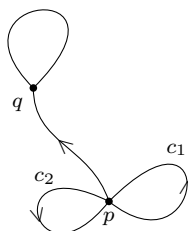
3. Exkurs: Überlagerungen, Fundamentalgruppe und Gruppenwirkungen

Erinnerung Zwei Wege, stetige Abbildungen, $c_0, c_1 : [0, 1] \rightarrow M$ heißen **homotop**, wenn eine stetige Abbildung

$$H : [0, 1] \times [0, 1] \rightarrow M$$

existiert mit $H(0, \cdot) = c_0$ und $H(1, \cdot) = c_1$. Gilt $H(\cdot, 0) \equiv c_0(0) = c_1(0) = p$ und $H(\cdot, 1) \equiv c_0(1) = c_1(1) = q$, so heißt H eigentlich.

Bemerkung Sind zwei glatte Wege homotop, so kann eine glatte Homotopie gewählt werden. Die **Fundamentalgruppe** $\pi_1(M, p)$ ist die Menge der Homotopieklassen von Wegen $c \in \Omega_{pq}$ bezüglich eigentlicher Homotopien mit der durch die Verkettung von Wegen induzierten Gruppenstruktur.



Für eine zusammenhängende Mannigfaltigkeit sind $\pi_1(M, p)$ und $\pi_1(M, q)$ isomorph, schreibe $\pi_1(M)$. Eine Mannigfaltigkeit heißt **einfach zusammenhängend**, falls M zusammenhängend ist und $\pi_1(M) = 0$ gilt.

Eine glatte Abbildung $\pi : \tilde{M} \rightarrow M$ heißt **Überlagerung**, wenn für alle $p \in M$ eine Umgebung U existiert, so dass $\pi^{-1}(U) = \dot{\bigcup} U_i$ eine disjunkte Vereinigung offener Mengen U_i ist und für alle $U_i : \pi|_{U_i} : U_i \rightarrow U$ ein Diffeomorphismus ist. Sind M und \tilde{M} Riemannsch, so heißt eine Überlagerung π **Riemannsche Überlagerung**, falls π eine lokale Isometrie ist.

Proposition 9.12 *Es seien M und \tilde{M} zusammenhängende Riemannsche Mannigfaltigkeiten, \tilde{M} vollständig und $\pi : \tilde{M} \rightarrow M$ eine lokale Isometrie. Dann ist π eine Riemannsche Überlagerung.*

Beweis Für $p \in M$ und $v \in T_p M$ seien $\tilde{p} \in \pi^{-1}(p)$, $\tilde{v} = \pi_{*\tilde{p}}^{-1}(v) \in T_{\tilde{p}} \tilde{M}$ und \tilde{c} die Geodätische von \tilde{M} mit $\tilde{c}(0) = \tilde{p}$, $\dot{\tilde{c}}(0) = \tilde{v}$. Dann existiert \tilde{c} für alle Zeiten. Da π eine lokale Isometrie ist, ist $c = \pi \circ \tilde{c}$ eine auf ganz \mathbb{R} definierte Geodätische von M mit $c(0) = \pi(\tilde{p}) = p$ und $\dot{c}(0) = \pi_{*\tilde{p}}(\dot{\tilde{c}}(0)) = v$. Nach dem Satz 8.11 von Hopf-Rinow ist M damit vollständig. Es sei $p = \pi(\tilde{p})$ und sei $q \in M$. Dann existiert eine Geodätische $c : [0, 1] \rightarrow M$ von p nach q . Es sei \tilde{c} die Geodätische in \tilde{M} mit $\tilde{c}(0) = \tilde{p}$ und $\dot{\tilde{c}} = \pi_{*\tilde{p}}^{-1}(\dot{c}(0))$. Dann gilt $\pi \circ \tilde{c} = c$ und $\pi(\tilde{c}(1)) = c(1) = q$. Damit ist π surjektiv. Betrachte nun das folgende Diagramm:

$$\begin{array}{ccc}
 \mathbb{B}_\varepsilon(0_{\tilde{p}}) & \xrightarrow{\exp_{\tilde{p}}} & \mathbb{B}_\varepsilon(\tilde{p}) \\
 \pi_{*\tilde{p}} \downarrow & \# & \downarrow \pi \\
 T_p M \supseteq \mathbb{B}_\varepsilon(0_p) & \xrightarrow{\exp_p} & \mathbb{B}_\varepsilon(p) \subseteq M
 \end{array}
 \quad \tilde{p} \in \pi^{-1}(p)$$

Für hinreichend kleines $\varepsilon > 0$ ist \exp ein Diffeomorphismus und das folgende Diagramm kommutiert. Damit ist $\pi|_{\mathbb{B}_\varepsilon(\tilde{p})}$ ein Diffeomorphismus. Wären für \tilde{p}_1 und \tilde{p}_2 die ε -Bälle nicht disjunkt und es existiere eine nichttriviale Geodätische der Länge $< 2\varepsilon$ von \tilde{p}_1 nach \tilde{p}_2 und damit eine Geodätische von p nach p der Länge $< 2\varepsilon$, also in $\mathbb{B}_\varepsilon(p)$. Also sind $\mathbb{B}_\varepsilon(\tilde{p}_1)$ und $\mathbb{B}_\varepsilon(\tilde{p}_2)$ für $\tilde{p}_1 \neq \tilde{p}_2$ disjunkt. \square

Proposition 9.13 *Es seien \tilde{M} und M zusammenhängenden Riemannsche Mannigfaltigkeiten und $\pi : \tilde{M} \rightarrow M$ eine Riemannsche Überlagerung. Dann ist \tilde{M} genau dann vollständig, wenn M vollständig ist.*

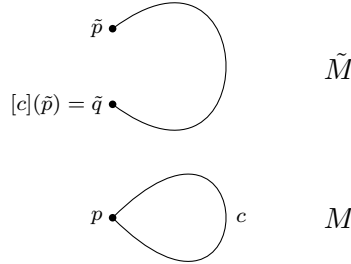
Beweis „ \Rightarrow “: Folgt nach Proposition 9.12

„ \Leftarrow “: Es sei M vollständig und \tilde{p}_i eine Cauchy-Folge in \tilde{M} . Dann ist $p_i = \pi(\tilde{p}_i)$ auch eine Cauchy-Folge, denn π ist 1-Lipschitz, konvergiert also gegen $p \in M$. Dann liegen fast alle p_i in einer Umgebung U , so dass $\pi|_{U_k} : U_k \rightarrow U$ eine Isometrie ist. Sei U_k so, dass fast alle \tilde{p}_i in U_k liegen. Dann konvergiert \tilde{p}_i gegen $\tilde{p} \in U_i$, mit $\tilde{p} \in \pi^{-1}(p)$. \square

Für jede zusammenhängende Riemannsche Mannigfaltigkeit M existiert eine bis auf Isometrie eindeutige einfach zusammenhängende Riemannsche Überlagerung \tilde{M} . Betrachte die topologisch universelle Überlagerung \tilde{M} von M . Zieht man die differenzierbare und geometrische Struktur von M auf \tilde{M} zurück, so wird \tilde{M} zu einer Riemannschen Mannigfaltigkeit und die Überlagerungsabbildung zu einer Riemannschen Überlagerung,

Problem: Es ist nicht klar, warum \tilde{M} eine abzählbare Basis der Topologie hat. Es gibt dabei zwei Auswege, zum Einen kann man zeigen dass $\pi_1(M)$ abzählbar ist (Diplomarbeit von M. Herrmann), die andere Möglichkeit ist in „Foundations of Differential Geometry“, Band I, Appendix 2 [4] beschrieben.

Die Fundamentalgruppe $\pi_1(M)$ ist isomorph zur Gruppe der Decktransformationen:



Jede Decktransformation ist glatt, also ein Diffeomorphismus, und sogar eine Isometrie, da π eine lokale Isometrie ist. Jedes Element von $\pi_1(M)$ induziert eine Isometrie von \tilde{M} .

4. Wirkung diskreter Gruppen

Es seien Γ eine diskrete Gruppe und X eine Menge. Eine **Wirkung** von Γ auf X , geschrieben $\Gamma \curvearrowright X$, ist ein Gruppenhomomorphismus $\varrho : \Gamma \rightarrow \text{Sym}(X)$, schreibe $\varrho(\gamma)(x) = \gamma.x$, und insbesondere gilt $\gamma.(\delta.x) = (\gamma\delta).x$ und $1_\Gamma.x = x$. Ist $\Gamma \curvearrowright X$ eine Wirkung, so bezeichnet $\Gamma.x = \{\gamma.x \mid \gamma \in \Gamma\}$ die **Bahn** oder den **Orbit** von x und $\Gamma_x = \{\gamma \in \Gamma \mid \gamma.x = x\}$ die **Isotropieuntergruppe** von Γ in x . Jede Wirkung induziert eine Äquivalenzklassenrelation auf X :

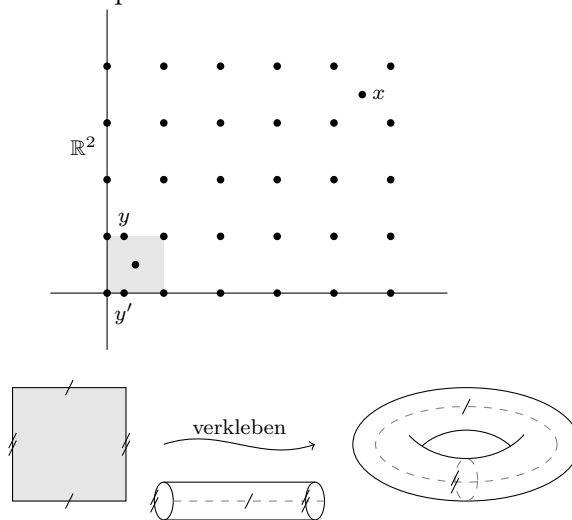
$$x \sim y \Leftrightarrow \exists \gamma \in \Gamma : \gamma.x = y \Leftrightarrow y \in \Gamma.x$$

Die Äquivalenzklasse $[x]_\sim$ ist also genau die Bahn durch x . Der Quotient $X/\Gamma = x/\sim = \bigcup \Gamma.x$ heißt **Bahnenraum** der Wirkung, die Abbildung $X \rightarrow X/\Gamma, x \mapsto [x]_\sim$ die **kanonische Projektion**. Eine Wirkung heißt **frei**, wenn für alle $x \in X$ $\Gamma_x = \{1_\Gamma\}$ gilt. Es sei M eine Riemannsche Mannigfaltigkeit und Γ eine glatte oder isometrische Wirkung, das heißt $\varrho : \Gamma \rightarrow \text{Diff}(M)$ oder $\varrho : \Gamma \rightarrow \text{Iso}(M)$. Eine solche Wirkung heißt **eigentlich diskontinuierlich**, wenn für jedes Kompaktum $K \subseteq M$ mit $\#\{\gamma \in \Gamma \mid \gamma.K \cap K \neq \emptyset\} < \infty$; in diesem Fall ist M/Γ hausdorffsch. Ist diese Wirkung zudem frei, so ist der Bahnenraum M/Γ in natürlicher Weise eine (Riemannsche) Mannigfaltigkeit und die kanonische Projektion $\pi : M \rightarrow M/\Gamma$ eine Riemannsche Überlagerung.

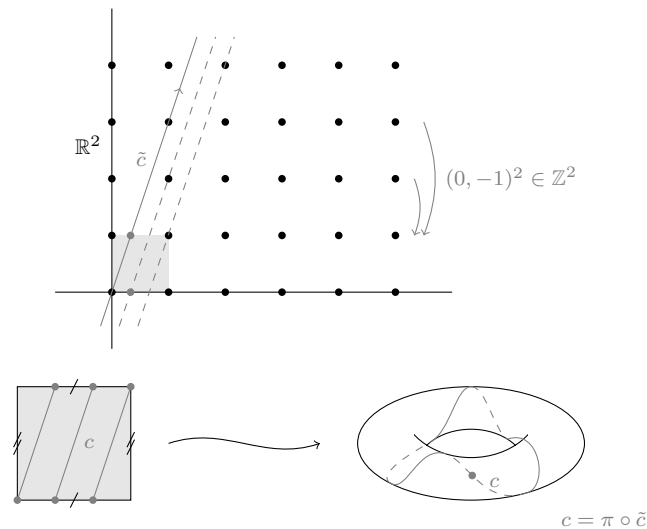
Beispiel 9.14 (1) Ist $\pi : \tilde{M} \rightarrow M$ eine universelle Riemannsche Überlagerung, so ist $\pi_1(M) \curvearrowright \tilde{M}$ frei und eigentlich diskontinuierlich und isometrisch, der Quotient $\tilde{M}/\pi_1(M)$ ist isometrisch zu M .

- (2) Betrachte die Wirkung $\mathbb{Z}^2 \curvearrowright \mathbb{R}^2$ durch Translationen $(a, b) \cdot (x, y) = (x + a, y + b)$. Die Wirkung von \mathbb{Z}^2 auf \mathbb{R}^2 ist isometrisch, frei und eigentlich diskontinuierlich.

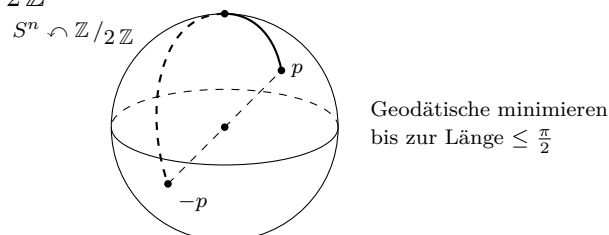
Beweis Der Quotient $\mathbb{R}^2 / \mathbb{Z}^2$ ist diffeomorph zum Torus $T^2 = S^1 \times S^1$. Die glatte Abbildung $\mathbb{R}^2 \rightarrow T^2$, $(x, y) \mapsto (e^{2\pi i x}, e^{2\pi i y})$ faktorisiert über die Wirkung und induziert einen Diffeomorphismus.



Die durch die Wirkung auf T^2 induzierte Metrik ist flach, in dem Sinne dass die Krümmung konstant Null ist. Die Geodätischen des flachen Torus sind genau die Bilder von Geodätischen des \mathbb{R}^2 , also von Geraden, unter der kanonischen Projektion.

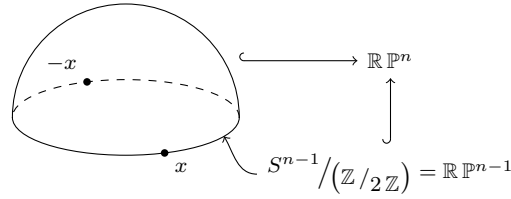


- (3) Der n -dimensionale reell-projektive Raum \mathbb{RP}^n : betrachte $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \curvearrowright S^n$, $\gamma \cdot p = -p$, $\gamma \neq 1 \in \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$.



Geodätische minimieren
bis zur Länge $\leq \frac{\pi}{2}$

$$\mathbb{R}P^n = S/(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$$



Es sei (M, g) vollständig und $\text{ric}_{(M, g)} \geq (n-1)\frac{1}{r^2}g$ für ein $r > 0$. Dann erfüllt auch \tilde{M} diese Voraussetzungen; insbesondere ist \tilde{M} (ebenfalls) kompakt. Da $\pi_1(M) \curvearrowright \tilde{M}$ eigentlich diskontinuierlich wirkt, gilt

$$\#\pi(M) = \#\{\gamma \in \pi_1(M) \mid \gamma \cdot \tilde{M} \cap \tilde{M} \neq \emptyset\} < \infty$$

Korollar (zum Satz von Bonnet-Myers) Unter den Voraussetzungen des Satzes hat M eine endliche Fundamentalgruppe.

Satz 9.15 (Hadamard-Cartan) *Es sei (M, g) eine vollständige Riemannsche Mannigfaltigkeit mit $\text{sec}_{(M, g)} \leq 0$. Dann ist für alle $p \in M$ die Exponentialabbildung $\exp_p : T_p M \rightarrow M$ eine Überlagerung. Insbesondere ist jede einfach zusammenhängende vollständige Riemannsche Mannigfaltigkeit mit $\text{sec} \leq 0$ diffeomorph zu \mathbb{R}^m .*

Beweis Es sei c eine Geodätische und Y ein Jacobifeld entlang c mit $Y(0) = 0$. Dann gilt für $f(t) = \|Y(t)\|^2$:

$$f'(0) = 2\langle Y'(0), Y(0) \rangle = 0$$

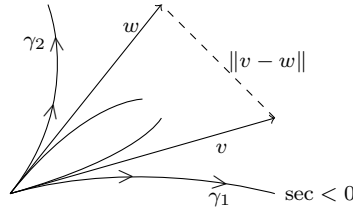
und

$$\begin{aligned} f'' &= 2(\langle Y'', Y \rangle + \langle Y', Y' \rangle) \\ &= 2(\|Y'\|^2 - \underbrace{\langle R(Y, \dot{c})\dot{c}, Y \rangle}_{=\lambda \text{sec}(\dot{c}, Y) \leq 0}) \geq 0 \end{aligned}$$

Also ist f nichtnegativ und konvex. Wäre Y ein nichttriviales Jacobifeld, welches in Punkten 0 und t_0 verschwindet, so folgte aus $f(0) = 0$ und $f(t_0) = 0$, dass f , und damit Y verschwindet. Somit existieren auf M keine zueinander konjugierten Punkte. Die Exponentialabbildung ist also ein lokaler Diffeomorphismus. Die Metrik $\tilde{g} = \exp_{p*}(g)$ auf $T_p M$ ist nach dem Gauß-Lemma und dem Satz von Hopf-Rinow vollständig. Nach Proposition 9.12 ist damit $\exp_p(T_p M, \tilde{g}) \rightarrow (M, g)$ eine Riemannsche Überlagerung. \square

Erinnerung (Blatt 12, Aufgabe 2) Seien γ_1 und γ_2 Geodätische mit $\gamma_i(0) = p$, $v = \dot{\gamma}_1(0)$, $w = \dot{\gamma}_2(0)$ und $\mathcal{L}(t) = d(\gamma_1(t), \gamma_2(t))$. Dann gilt:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(t) &= t\|v - w\| \left(1 - \frac{1}{12} \text{sec}(v, w)(1 + \langle v, w \rangle)t^2 \right) + o(t^3) \\ \left(1 - \frac{1}{12} \text{sec}(v, w)(1 + \langle v, w \rangle)t^2 \right) + o(t^3) &\begin{cases} > 1 & \text{für } \text{sec} < 0 \\ = 1 & \text{für } \text{sec} = 0 \\ < 1 & \text{für } \text{sec} > 0 \end{cases} \end{aligned}$$

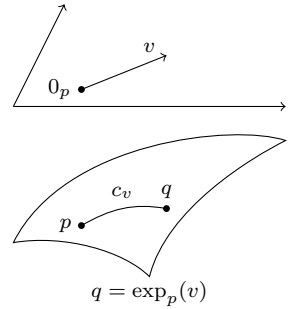


Ziel: Wir suchen ein globales Analogum.

5. Krümmungsschranken und Trigonometrie

Es bezeichne d_p die Abstandsfunktion $d_p(q) = d(p, q)$. Diese ist, in einer punktierten Umgebung von p , glatt und es gilt $d_p(q) = \|\exp_p^{-1}(q)\|$. Es folgt dann

$$\begin{aligned} X(d_p)(q) &= \frac{d}{dt} \|\exp_p^{-1}(\exp_p(tX))\| \\ &= \frac{1}{\|\underbrace{\exp_p^{-1}(q)}_{=v}\|} \langle \exp_{p*}^{-1}(X), v \rangle \\ &\stackrel{\text{G.L.}}{=} \frac{1}{\|v\|} \langle X, \underbrace{\exp_{p*}(v)}_{\dot{c}_v(1)} \rangle \quad (\text{nach Gauß-Lemma}) \end{aligned}$$



Für eine glatte Funktion f heißt das durch $X(f) = \langle \text{grad } f, X \rangle$ definierte Vektorfeld der **Gradient** von f . Es ist $X(f) = df(X)$ und $\langle \text{grad } f, \cdot \rangle = df$. Für den Gradienten von d_p gilt nach der obigen Rechnung:

$$\text{grad } d_p = \frac{\exp_{p*}(v)}{\|v\|} = \frac{\dot{c}(1)}{\|\dot{c}(0)\|} = \frac{\dot{c}(1)}{\|\dot{c}(1)\|},$$

also $\|\text{grad } d_p\| \equiv 1$. Eine Funktion $f : U \rightarrow \mathbb{R}$, U offen in M , heißt **lokale Abstandsfunktion**, wenn $\|\text{grad } f\| \equiv 1$ gilt. Für $p \in U$ sei c_p die Integralkurve von $\text{grad } f$ mit $c_p(f(p)) = p$. Ist c eine (stückweise) glatte Kurve von p nach q , so gilt

$$\mathcal{L}(c) = \int_0^1 \|\dot{c}\| \stackrel{C.S.}{\geq} \left| \int_0^1 \langle \text{grad } f, \dot{c} \rangle \right| = |f(q) - f(p)|$$

wobei Gleichheit genau dann gilt, wenn c eine monotone Reparametrisierung von c_p ist. Damit ist c_p eine (minimale) Geodätische, welche die Niveaumengen von f durchläuft. Es gilt

$$\begin{aligned} H_f(X, Y) &= X(Yf) - (\nabla_X Y)(f) \\ &= X \langle \text{grad } f, Y \rangle - \langle \text{grad } f, \nabla_X Y \rangle \\ &= \langle \nabla_X \text{grad } f, Y \rangle \end{aligned}$$

und mit $\|\text{grad } f\| \equiv 1$ folgt

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{1}{2} X \|\text{grad } f\|^2 \\ &= \langle \nabla_X \text{grad } f, \text{grad } f \rangle \\ &= H_f(X, \text{grad } f). \end{aligned}$$

Für ein $r \in \mathbb{R}$ sei $M_r = f^{-1}(r)$ eine Niveaufläche von f . Ist X tangential zu M_r , das heißt existiert eine Integralkurve γ von X in M_r , dann gilt

$$0 = \frac{d}{dt} \Big|_{t=0} (f(\gamma(t))) = X(f) = \langle \text{grad } f, X \rangle,$$

also ist $\text{grad } f$ orthogonal zu M_r . Für zu M_r tangentialen Vektorfelder X und Y gilt dann

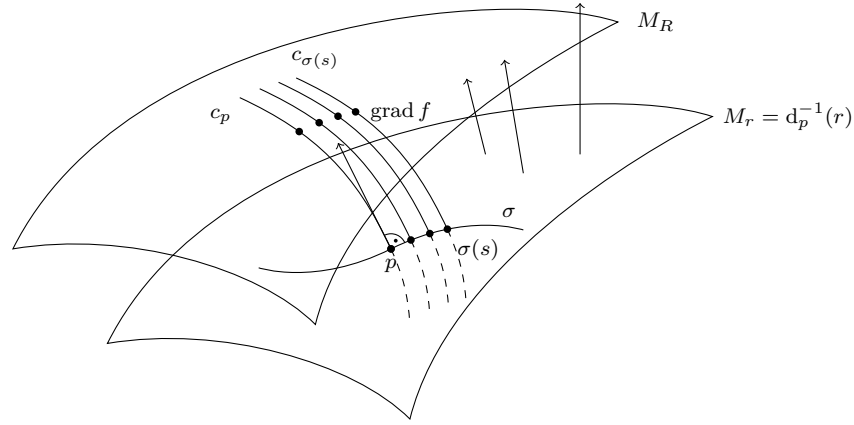
$$0 = X \langle \text{grad } f, Y \rangle = \langle \nabla_X \text{grad } f, Y \rangle + \langle \text{grad } f, \nabla_X Y \rangle$$

also $H_f(X, Y) = -\langle \text{grad } f, \nabla_X Y \rangle$. Für $p \in U$ wird durch $X \mapsto \nabla_X \text{grad } f$ ein linearer Endomorphismus $A_p : \text{grad } f^\perp \rightarrow \text{grad } f^\perp$ definiert. Es bezeichne

$$A_t = A_{c_p(t)} : \dot{c}_p(t)^\perp \rightarrow \dot{c}_p(t)^\perp$$

$\text{grad } f|_{c_p(t)}$

eine Einschränkung auf c_p . Es sei $\sigma : (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow M_r$ eine glatte Kurve mit $\sigma(0) = p$.



Dann ist $(t, s) \mapsto c_{\sigma(s)}(t)$ glatt und für alle $s \in (-\varepsilon, \varepsilon)$ ist dann $c_{\sigma(s)}$ eine Geodätische durch $\sigma(s)$; also ist $c_s = c_{\sigma(s)}$ eine geodätische Variation von $c_0 = c_p$. Es bezeichne \mathcal{J} das zugehörige Jacobifeld entlang c_p mit $\mathcal{J}'(t) = A_t \cdot \mathcal{J}(p)$.

Sei $f = d_p$ die Abstandsfunktion zu $p \in M$ und c eine Geodätische von p nach $q = c(r)$ (nicht konjugiert zu c), das heißt $q \in M_r = d_p^{-1}(r)$. Dann ist jedes Jacobifeld \mathcal{J} entlang c mit $\mathcal{J}(0) = 0$ und $\mathcal{J} \perp \dot{c}$ von obiger Gestalt: \mathcal{J} wird von einer geodätischen Variation c_s erzeugt. Jede Geodätische $t \mapsto c_s(t)$ ist minimierend, also

- $c_s(r) \in M_r = d_p^{-1}(r)$
- $d_p(c_s(t)) = t \Rightarrow c_s$ ist eine Integralkurve von $\text{grad } d_p$

Für $\sigma(s) = c_s(r)$ stimmt dann \mathcal{J} mit obiger Konstruktion überein.

$$A' \mathcal{J} = (A \mathcal{J})' - A \mathcal{J}' = \mathcal{J}'' - A^2 \mathcal{J} = -R(\mathcal{J}, \dot{c}) \dot{c} - A^2 \mathcal{J}$$

Setzt man $R_t = R(\cdot, \dot{c}) \dot{c}$, so gilt

$$A'_t + A_t^2 + R_t = 0,$$

die sogenannte **Riccatigleichung**. Ist E ein entlang c paralleles Vektorfeld mit $\|E\| = 1$ und $E \perp \dot{c}$, so gilt

$$\langle AE, E \rangle' = \langle A'E, E \rangle = -\langle R(E, \dot{c}) \dot{c}, E \rangle - \langle A^2 E, E \rangle = -\sec(E, \dot{c}) - \|AE\|^2$$

Ist die Krümmung von (M, g) nach unten beschränkt, $\sec_{(M, g)} \geq \kappa$, so folgt die sogenannte **Riccatiungleichung**:

$$\langle AE, E \rangle' = -\sec(E, i) - \|AE\|^2 \leq -\kappa - \langle AE, E \rangle^2$$

Setzt man $a = \langle AE, E \rangle$, so gilt

$$a' \leq -\kappa - a^2$$

6. Räume konstanter Krümmung

Es bezeichne M_κ^n den endlich zusammenhängenden n -dimensionalen Raum mit konstanter Krümmung κ , also für $\kappa = -1$ den hyperbolischen Raum \mathbb{H}^n , für $\kappa = 0$ die Ebene \mathbb{R}^n und die Sphäre S^n im Falle $\kappa = 1$. Dann ist ein Jacobifeld entlang einer Geodätischen c in M_κ^n eine Linearkombination von Jacobifeldern $j \cdot E$, wobei E ein entlang c paralleles Einheitsfeld ist und j eine Lösung der eindimensionalen Jacobigleichung

$$j'' + \kappa j = 0$$

Es bezeichnen sn_κ und cs_κ die Lösungen mit $\text{sn}_\kappa(0) = 0$, $\text{sn}'_\kappa(0) = 1$ und $\text{cs}_\kappa(0) = 1$, $\text{cs}'_\kappa(0) = 0$, das heißt

$$\text{sn}_\kappa(t) = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{-\kappa}} \sinh(\sqrt{-\kappa}t) & \text{für } \kappa < 0 \\ t & \text{für } \kappa = 0 \\ \frac{1}{\sqrt{\kappa}} \sin(\sqrt{\kappa}t) & \text{für } \kappa > 0 \end{cases}$$

$$\text{cs}_\kappa(t) = \begin{cases} \cosh(\sqrt{-\kappa}t) & \text{für } \kappa < 0 \\ t & \text{für } \kappa = 0 \\ \cosh(\sqrt{\kappa}t) & \text{für } \kappa > 0 \end{cases}$$

Dabei gilt $\text{sn}'_\kappa = \text{cs}_\kappa$ und $\text{cs}'_\kappa = -\kappa \text{sn}_\kappa$. Setzt man $\text{ct}_\kappa(t) = \frac{\text{cs}_\kappa(t)}{\text{sn}_\kappa(t)}$ ($= (\ln \text{sn}_\kappa)'$), so gilt $\text{ct}'_\kappa = -\kappa - \text{ct}_\kappa^2$. Allgemeiner gilt für eine Lösung j von $j'' + \kappa j = 0$ und $b = (\ln j)'$

$$b' = \left(\frac{j'}{j} \right)' = \frac{j''j - j'^2}{j^2} = \frac{-\kappa j^2 - j'^2}{j^2} = -\kappa - b^2$$

das heißt b löst die eindimensionale Riccatiungleichung. Es sei \mathcal{J} ein Jacobifeld entlang einer Geodätischen c in M_κ^n mit $\mathcal{J}(0) = 0$ und $\mathcal{J} \perp \dot{c}$. Dann ist $\mathcal{J} = \text{sn}_\kappa Y$, wobei Y ein zu c orthogonales und entlang c paralleles Vektorfeld ist.

$$AY = A \frac{1}{\text{sn}_\kappa} \mathcal{J} = \frac{1}{\text{sn}_\kappa} \mathcal{J}' = \frac{\text{sn}'_\kappa}{\text{sn}_\kappa} Y = \frac{\text{cs}_\kappa}{\text{sn}_\kappa} Y = \text{ct}_\kappa Y.$$

Ziel: Wir suchen eine Abschätzung für Eigenwerte, beziehungsweise Operatornorm von A_t und für das Wachstum von Jacobifeldern bei unteren Krümmungsschranken.

Lemma 9.16 *Es seien $a, b: \mathcal{I} \rightarrow \mathbb{R}$ glatt für ein Intervall \mathcal{I} , sowie*

- $a' \leq -\kappa - a^2$
- $b' = -\kappa - b^2$

- $a(t_0) \leq b(t_0)$ für ein $t_0 \in \mathcal{I}$.

Dann gilt:

- (i) $a(t) \leq b(t)$ für alle $t \geq t_0$
- (ii) Gilt $a(t_0) = b(t_0)$ und $a(t_1) = b(t_1)$ für $t_1 > t_0$, so folgt $a|_{[t_0, t_1]} = b|_{[t_0, t_1]}$.
- (iii) Gilt $\mathcal{I} = (0, t_1]$ und $\lim_{t \rightarrow 0} a(t) = \infty$, so folgt $a \leq \text{ct}_\kappa$ und falls $a(t_0) = \text{ct}_\kappa(t_0)$, so gilt $a = \text{ct}_\kappa$ auf \mathcal{I} .

Beweis Es gilt

$$\begin{aligned} \left((b-a)e^{\int b+a} \right)' &= ((b' - a') + (b-a)(b+a)) e^{\int b+a} \\ &= \underbrace{(b' + b^2)}_{=-\kappa} - \underbrace{(a' + a^2)}_{\leq -\kappa} e^{\int b+a} \geq 0 \end{aligned}$$

Also ist $(b-a)e^{\int b+a}$ monoton wachsend, das heißt $b-a \geq 0$ und es gilt (i). (ii) folgt sofort aus der Monotonie. Gilt $a(t) \xrightarrow{t \rightarrow 0} \infty$, so existiert ein $\varphi: \mathcal{I} \rightarrow \mathbb{R}$ mit $a(t) = (\text{ct}_\kappa \circ \varphi)(t)$ und $\varphi(0) = 0$. Nun gilt $a' = \varphi'(\text{ct}'_\kappa \circ \varphi)$, also

$$\begin{aligned} 0 &= -\kappa + \kappa = (\text{ct}'_\kappa + \text{ct}_\kappa^2) \circ \varphi - (a' + a^2) \\ &= \text{ct}'_\kappa \circ \varphi + (\text{ct}_\kappa \circ \varphi)^2 - \varphi'(\text{ct}'_\kappa \circ \varphi) - (\text{ct}_\kappa \circ \varphi)^2 \\ &= (1 - \varphi') \underbrace{(\text{ct}'_\kappa \circ \varphi)}_{\leq 0} \end{aligned}$$

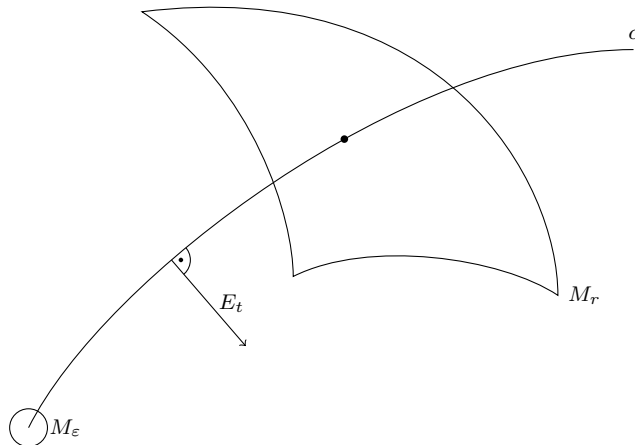
und es folgt $\varphi' \geq 1$. Da $\varphi(0) = 0$, folgt $\varphi(t) \geq t$. Da ct_κ monoton fallend ist, gilt

$$a = (\text{ct}_\kappa \circ \varphi) \leq \text{ct}_\kappa.$$

Die Gleichheit wird wie oben gezeigt. □

Es gelte $\sec_{(M,g)} \geq \kappa$ und es sei c eine nach Bogenlänge parametrisierte Geodätische mit $c(0) = p$. Wie oben bezeichne A_t das symmetrische Endomorphismenfeld $A_t: \dot{c}(t)^\perp \rightarrow \dot{c}(t)^\perp$, $X \mapsto \nabla_X \text{grad } d_p$. Für ein entlang c paralleles Vektorfeld E mit $\|E\| = 1$ und $E \perp \dot{c}$ sei $a = \langle AE, E \rangle$. Dann gilt:

$$a' = \langle A'E, E \rangle = -\langle R(E, \dot{c})\dot{c}, E \rangle - \langle A^2 E, E \rangle \leq -\kappa - \langle AE, E \rangle^2 = -\kappa - a^2.$$



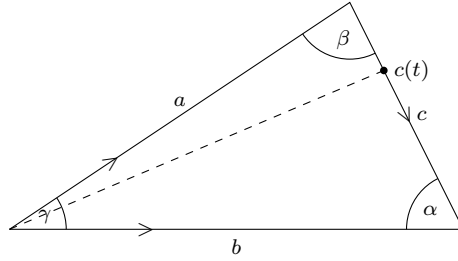
An jeder Stelle, solange kein konjugierter Punkt vorliegt, kann E als normiertes Jacobifeld $\frac{\mathcal{J}}{\|\mathcal{J}\|}(t)$ realisiert werden, wobei $\mathcal{J}(0) = 0$ und $\mathcal{J} \perp \dot{c}$.

$$a = \left\langle A \frac{\mathcal{J}}{\|\mathcal{J}\|}, \frac{\mathcal{J}}{\|\mathcal{J}\|} \right\rangle = \frac{\langle \mathcal{J}', \mathcal{J} \rangle}{\langle \mathcal{J}, \mathcal{J} \rangle} = \left(\ln \overbrace{\|\mathcal{J}\|}^{\rightarrow 0}_{\rightarrow \infty} \right)' \rightarrow \infty$$

Mit $a \xrightarrow{t \rightarrow 0} \infty$ und Lemma 9.16 folgt $a \leq ct_\kappa$ (bis zum ersten konjugierten Punkt). Insbesondere folgt

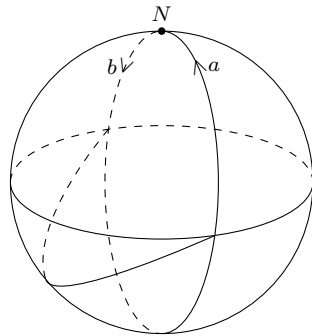
$$\|A\| = \sup_{\|E\|=1} \langle AE, E \rangle \leq ct_\kappa.$$

Definition Ein (**geodätisches**) **Dreieck** $\Delta(a, b, c)$ in M besteht aus drei geodätischen Segmenten a , b und c mit $a(0) = b(0)$, $a(1) = c(0)$ und $c(1) = b(1)$. Es bezeichnen α , β und γ die inneren Winkel in Δ . Ferner sei $|a| = \mathcal{L}(a)$ die Länge von a (analog für b und c).



Ein Vergleichsdreieck in M_κ^2 , der einfach zusammenhängenden vollständigen Riemannschen Mannigfaltigkeit mit $\sec \equiv \kappa$, ist ein Dreieck $\bar{\Delta}(\bar{a}, \bar{b}, \bar{c})$ mit $|\bar{a}| = |a|$, $|\bar{b}| = |b|$ und $|\bar{c}| = |c|$. Es existiert ein (bis auf Isomorphie) eindeutiges Vergleichsdreieck, wenn gilt:

- (i) $|a| + |b| \geq |c|$, $|b| + |c| \geq |a|$, $|c| + |a| \geq |b|$
- (ii) $U(\Delta(a, b, c)) = |a| + |b| + |c| < \frac{2\pi}{\sqrt{\kappa}}$ (für $\kappa > 0$)

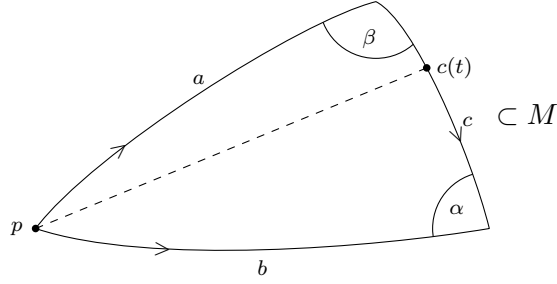


mehrere Möglichkeiten
für c in diesem Beispiel

Satz 9.17 (Alexandrov-Toponogov) Es sei (M, g) eine vollständige Riemannsche m -Mannigfaltigkeit mit $\sec_{(M, g)} \geq \kappa$ und im Falle $\kappa > 0$ gelte $M \not\cong S_{1/\sqrt{\kappa}}^m$. Ist dann $\Delta(a, b, c)$ ein geodätisches Dreieck mit $|c| \leq |a| + |b|$, sowie, im Falle $\kappa > 0$, $|c| < \frac{\pi}{\sqrt{\kappa}}$ und a und b seien minimierende Geodätische. Dann gilt für das Vergleichsdreieck $\bar{\Delta}(\bar{a}, \bar{b}, \bar{c})$ in M_κ^2 : $\bar{d}_{\bar{p}} \leq d_p$

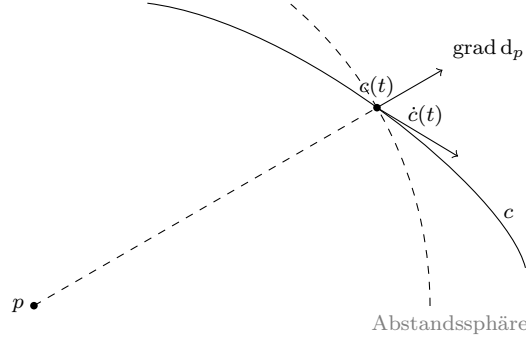
- (i) $d(\bar{p}, \bar{c}(t)) \leq d(p, c(t))$

(ii) $\bar{\alpha} \leq \alpha$ und $\bar{\beta} \leq \beta$.



Bemerkung Das Ausssschließen von $S_{1/\sqrt{\kappa}}^m$ ist nach dem Satz von Cheng[3] keine Einschränkung.

Es seien a , b und c nach Bogenlänge parametrisiert und $p = a(0) = b(0)$. Es existiere zu jedem $c(t)$ eine eindeutige Geodätische von p . Dann ist insbesondere d_p um $c(t)$ glatt. Die Abstandsfunktion wird nun so modifiziert, dass in der Abschätzung nicht zwischen dem zu $\text{grad } d_p$ kollinearen Anteil und dem zur Abstandssphäre tangentialen Teil unterschieden werden muss.



Karchers Trick Es sei

$$m_\kappa(r) = \int_0^r \text{sn}_\kappa = \begin{cases} \frac{1}{\kappa}(1 - \text{cs}_\kappa(r)) & \kappa \neq 0 \\ \frac{1}{2}r^2 & \kappa = 0 \end{cases},$$

dann ist $m_\kappa(0) = 0, m'_\kappa = \text{sn}_\kappa$, also m_κ streng monoton auf $[0, \frac{\pi}{\sqrt{\kappa}}]$, und es gilt $\text{cs}_\kappa + \kappa m_\kappa \equiv 1$. Es sei $r(t) = d(p, c(t))$ und $e = m_\kappa \circ r$. Dann ist

$$\begin{aligned} r' &= \frac{d}{dt}(d_p \circ c) = \dot{c}(d_p) = \langle \text{grad } d_p, \dot{c} \rangle, \\ r'' &= \langle \nabla_{\dot{c}} \text{grad } d_p, \dot{c} \rangle = H_{d_p}(\dot{c}, \dot{c}) \end{aligned}$$

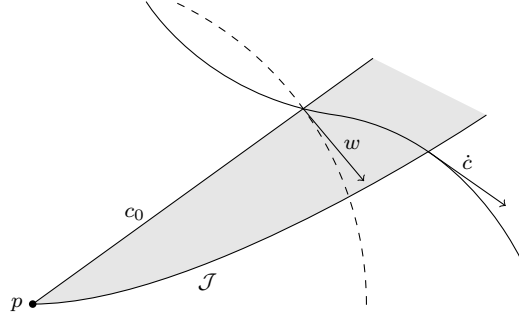
Zerlegt man \dot{c} orthogonal in $\dot{c} = v + w$ mit $w \perp \text{grad } d_p$, so folgt aus $H_{d_p}(\text{grad } d_p, \cdot) \equiv 0$ gerade

$$H_{d_p}(\dot{c}, \dot{c}) = H_{d_p}(w, w) = \|w\|^2 \left\langle A \frac{w}{\|w\|}, \frac{w}{\|w\|} \right\rangle \leq (\text{ct}_\kappa) \|w\|^2.$$

Somit gilt

$$\begin{aligned} e'' &= (m''_\kappa \circ r)r'^2 + (m'_\kappa \circ r)r'' = (\text{cs}_\kappa \circ r) \langle \text{grad } d_p, \dot{c} \rangle^2 + (\text{sn}_\kappa \circ r) H_{d_p}(\dot{c}, \dot{c}) \\ &\leq (\text{cs}_\kappa \circ r) \|v\|^2 + (\text{sn}_\kappa \circ r) (\text{ct}_\kappa \circ r) \|w\|^2 = (\text{cs}_\kappa \circ r) (\|v\|^2 + \|w\|^2) = (\text{cs}_\kappa \circ r) \\ &= 1 - \kappa(m_\kappa \circ r) = 1 - \kappa e, \end{aligned}$$

also $e'' + \kappa e \leq 1$.



Im Fall konstanter Krümmung gilt für eine analog definierte modifizierte Abstandsfunktion

$$\bar{e} = (m_\kappa \circ \bar{r}), \quad \bar{e}'' + \kappa \bar{e} \equiv 1.$$

Ist wie oben $\dot{\bar{c}} = \bar{v} + \bar{w}$ (mit $w, \bar{w} \neq 0$), so existiert ein Jacobifeld entlang der Geodätischen von p nach $c(t)$ von der Form $J = \text{sn}_\kappa E$, wobei E die parallele Fortsetzung von \bar{w} ist, und es gilt $J(d_{\bar{p}}(\bar{c}(t))) = w$. Damit folgt

$$H_{d_{\bar{p}}}(\dot{\bar{c}}, \dot{\bar{c}})|_r = \langle AJ, J \rangle|_r = \langle J', J \rangle|_r = \text{cs}_\kappa(r) \langle E, w \rangle = \text{ct}_\kappa \|w\|^2$$

und in der obigen Abschätzung gilt die Gleichheit.

Beweisskizze (zum Satz von Alexandrov-Toponogov 9.17)

- (i) *Annahme:* Es gelte $|a| + |b| + |c| < \frac{2\pi}{\sqrt{\kappa}}$. Der Fall $|a| + |b| = |c|$ ist trivialerweise korrekt. Es gelte also $|a| + |b| > |c|$, dann ist jedenfalls $p \notin c$. Es seien $r = d_p \circ c$ und $e = m_\kappa \circ r$ wie oben, sowie \bar{r} und \bar{e} für das Vergleichsdreieck. Betrachte $f = e - \bar{e}$.

Fall 1: Zu jedem $c(t)$ existiert eine eindeutige minimierende Geodätische, damit ist r und damit auch f differenzierbar. Es gilt

$$f'' = e'' - \bar{e}'' \leq 1 - \kappa e - (1 - \kappa \bar{e}) = -\kappa f.$$

Angenommen es gäbe ein $s \in (0, l)$, $l = |c|$ mit $f(s) < 0$. Weiter sei $\varepsilon > 0$ so, dass gilt

$$l + \varepsilon < \frac{\pi}{\sqrt{\kappa + \varepsilon}}.$$

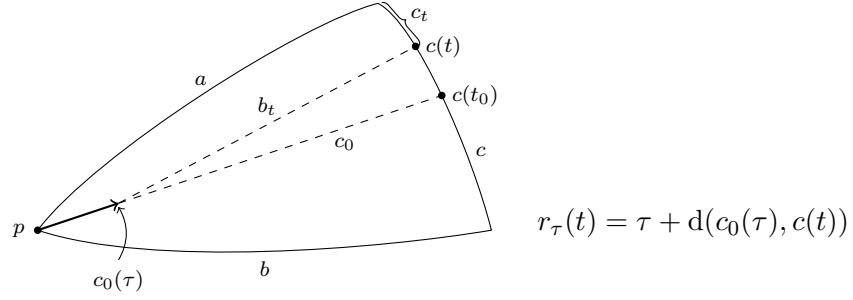
Es sei $g(t) = \text{sn}_{\kappa+\varepsilon}(t+\varepsilon)$ die, auf $[0, l]$ positive, Lösung von $g'' + (\kappa + \varepsilon)g = 0$. Betrachte $h = \frac{f}{g}$. Dann gilt $h(s) < 0$ und $h(0) = 0 = h(l)$ und somit nimmt h ein negatives Minimum, etwa t_0 , an.

Es gilt also $h(t_0) < 0$, $h'(t_0) = 0$ und $h''(t_0) \geq 0$. Dann folgt

$$\begin{aligned} f'' + \kappa f &= g''h + 2g'h' + gh'' + \kappa gh = -(\kappa + \varepsilon)gh + 2g'h' + gh'' + \kappa gh \\ \text{in } t_0: &\underbrace{-\varepsilon gh}_{>0} + \underbrace{2g'h'}_{=0} + \underbrace{gh''}_{\geq 0} > 0 \end{aligned}$$

im Widerspruch zu $f'' + \kappa f \leq 0$.

Fall 1 gilt nicht: Es gibt nun keine eindeutige Geodätische und für den Umfang gilt $\|a\| + \|b\| + \|c\| \geq \frac{2\pi}{\sqrt{\kappa}}$

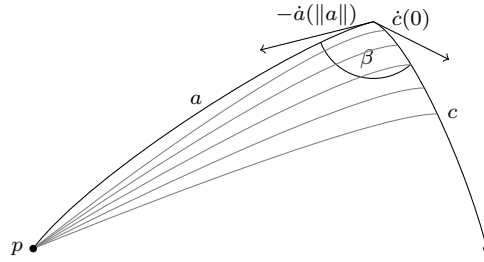


Es sei $t_0 = \sup\{t \mid \text{Umfang } \Delta(a, b_t, c_t) < \frac{2\pi}{\sqrt{\kappa}}\}$. Für $t \rightarrow t_0$ konvergiert $\Delta(a, b_t, c_t)$ gegen ein Dreieck mit Umfang $\frac{2\pi}{\sqrt{\kappa}}$, das heißt das Vergleichsdreieck konvergiert gegen einen Großkreis. Insbesondere folgt mit dem ersten Teil aus (i):

$$\max_{s \in [0, t]} d(p, c(s)) \xrightarrow{t \rightarrow t_0} \frac{\pi}{\sqrt{\kappa}}.$$

Damit existiert ein $q \in M$ mit $d(p, q) = \frac{\pi}{\sqrt{\kappa}}$, im Widerspruch zur Voraussetzung $M \not\cong S_{\frac{1}{\sqrt{\kappa}}}^n$ (siehe Cheng [3]).

(ii) Variationsfeld:



Es sei c_s die minimierende, nach Bogenlänge parametrisierte Geodätische von p nach $c(s)$ und Y das von c_s erzeugte Variationsfeld. Dann gilt

$$\begin{aligned} -\cos \beta &= \langle \dot{c}(0), \dot{a}(|a|) \rangle = \langle Y(|a|), \dot{a}(|a|) \rangle = \int_0^{|a|} \langle Y, \dot{a} \rangle' = \mathcal{L}'(c_s) \stackrel{(i)}{\geq} \mathcal{L}'(\bar{c}_s) \\ &= \dots = -\cos \bar{\beta} \end{aligned}$$

Also insgesamt: $\bar{\beta} \leq \beta$.

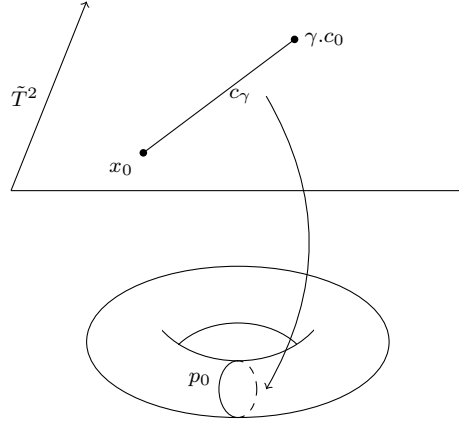
(□)

7. Anwendung

Satz 9.18 (Gromov) Es existieren Konstanten $c(n), c(n, \lambda, D)$, so dass gilt:

- (i) Hat M^n die Schnittkrümmung $\text{sec} \geq 0$, so läßt sich $\pi_1(M^n)$ mit $\leq c(n)$ Elementen erzeugen.
- (ii) Hat M^n die Schnittkrümmung $\text{sec} \geq -\lambda^2$ und $\text{diam}(M) \leq D$, so lässt sich $\pi_1(M)$ mit $\leq c(n, \lambda, D)$ Elementen erzeugen.

Beweisskizze Es sei $\Gamma = \pi_1(M, p_0) \curvearrowright \tilde{M}$ und sei $x_0 \in \pi^{-1}(p_0)$.



Für $\gamma \in \Gamma$ sei $|\gamma| = d(x_0, \gamma.x_0)$. Ist dann c_γ minimal von x_0 nach $\gamma.x_0$, so ist eine Projektion $\bar{c}_\gamma = \pi \circ c_\gamma$ eine Schleife in γ . Ferner gilt $\#\{\gamma \in \Gamma \mid |\gamma| \leq r\} < \infty$, denn andernfalls gäbe es eine (nichtkonstante) Folge $\gamma_i \in \Gamma$ mit $|\gamma_i| \leq r$, das heißt $\gamma_i.x_0 \in \bar{B}_r(x_0)$, also ohne Einschränkung $\gamma_i.x_0 \xrightarrow{i \rightarrow \infty} y$ und $q = \pi(y)$. Dann gälte

$$\pi^{-1}(B_\delta(q)) = \dot{\bigcup}_i B_\delta = \dot{\bigcup}_{\gamma \in \Gamma} \gamma.B_\delta(y) \quad \nexists$$

Wähle $\gamma_1 \in \Gamma$ mit $|\gamma_1| = \min\{|\gamma| \mid \gamma \in \Gamma \setminus \{1_p\}\}$. Sind $\gamma_1, \dots, \gamma_k$ gewählt mit $|\gamma_1| \leq |\gamma_2| \leq \dots \leq |\gamma_k|$, so bezeichne $G_k = \langle \gamma_1, \dots, \gamma_k \rangle$. Ist $G_k \neq \Gamma$, so sei $\gamma_{k+1} \in \Gamma$ mit $|\gamma_{k+1}| = \min\{|\gamma| \mid \gamma \in \Gamma \setminus G_k\}$.

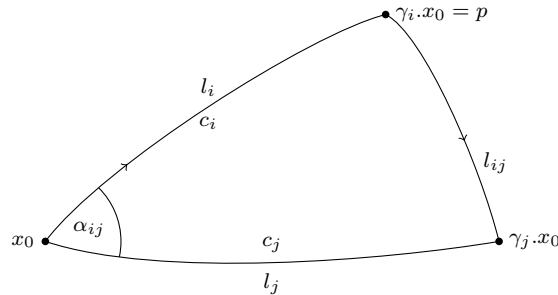
Es bezeichne $l_i = |\gamma_i|$, $l_{ij} = d(\gamma_i.x_0, \gamma_j.x_0) = d(x_0, \gamma_i^{-1}\gamma_j.x_0) = |\gamma_i^{-1}\gamma_j|$. Dann gilt für $i < j$:

$$l_i \leq l_j \leq l_{ij}.$$

Wäre $l_{ij} < l_j = |\gamma_j|$, so gälte für $\tilde{\gamma}_j = \gamma_i^{-1}\gamma_j$:

$$|\tilde{\gamma}_j| < |\gamma_j| \text{ und } \langle \gamma_1, \dots, \gamma_j \rangle = \langle \gamma_1, \dots, \tilde{\gamma}_j \rangle$$

im Widerspruch zur Wahl von γ_j .

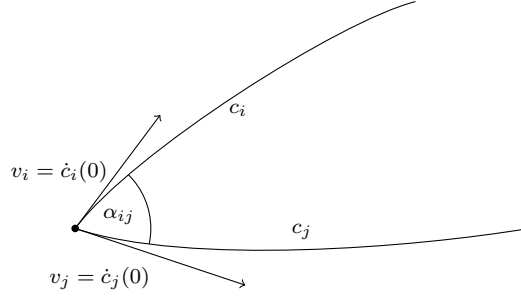


Nach Topogonov folgt $\bar{\alpha} = \bar{\alpha}_{ij} \leq \alpha_{ij}$.

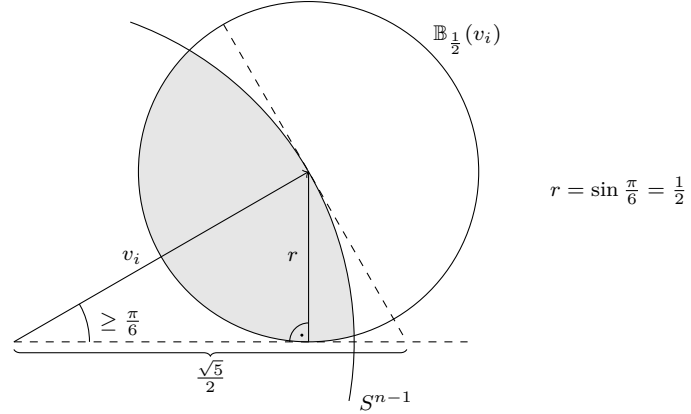
(i) Von nun an sei $\sec \geq 0$.

$$\cos \bar{\alpha}_{ij} = \frac{l_i^2 + l_j^2 - l_{ij}^2}{2l_i l_j} \leq \frac{l_i^2 + l_j^2 - l_j^2}{2l_i^2} = \frac{1}{2} = \cos \frac{\pi}{3}$$

Daraus folgt $\alpha_{ij} \geq \bar{\alpha}_{ij} \geq \frac{\pi}{3}$



$\{v_i\} \subseteq \underbrace{\overline{B}_1(0)}_{\text{kompakt}} \subseteq T_{x_0}\tilde{M}$ und $\#\{v_i\} = \#\{\gamma_i\}$ endlich.



$r = \sin \frac{\pi}{6} = \frac{1}{2}$, also sind die Bälle $B_{\frac{1}{2}}(v_i)$ disjunkt. Betrachte das Volumen der „unteren Hälfte“, diese liegt in $B_{\frac{\sqrt{5}}{2}}(0)$. Damit gilt

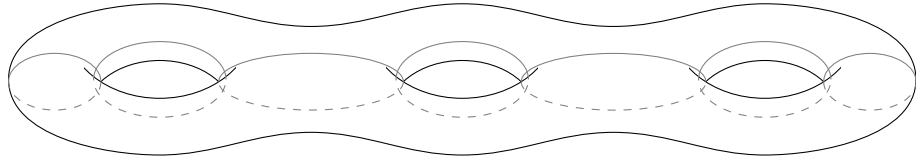
$$\frac{\kappa}{2} \text{vol}(B_{\frac{1}{2}}(0)) \leq \text{vol } B_{\frac{\sqrt{5}}{2}}(0),$$

also

$$\kappa \leq 2 \frac{\text{vol}\left(B_{\frac{\sqrt{5}}{2}}(0)\right)}{\text{vol}\left(B_{\sqrt{\frac{5}{2}}}\right)} = 2\sqrt{5}^n (= c(n))$$

(ii) Fall: $\kappa \geq -\lambda^2$.

Gibt es eine Durchmesserschranke?



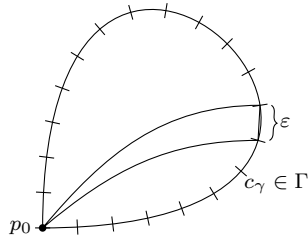
$\pi_1(\sum g)$ wird erzeugt von $2g$ Elementen und es gilt

$$\cos \bar{\alpha}_{ij} = \frac{\cosh(\lambda l_i)^2 + \cosh(\lambda l_j)^2 - \cosh(\lambda l_{ij})^2}{\sinh(\lambda l_i) \sinh(\lambda l_j)}$$

$\bar{\alpha}_{ij}$ fällt monoton in l_i , also wächst $\cos \bar{\alpha}_{ij}$ monoton in l_i und es lässt sich folge Abschätzung verwenden:

$$\cos \bar{\alpha}_{ij} \leq \dots \leq \frac{\cosh(\lambda l_j)}{\cosh(\lambda l_j) + 1} \leq \frac{\cosh(2\lambda D + 1)}{\cosh(2\lambda D + 1) + 1}$$

Jedes $\gamma \in \pi_1(M)$ ist Produkt von Klassen von Schleifen der Länge $\leq 2D + \varepsilon$.



Damit funktioniert der Rest des Beweises ähnlich wie oben.

(□)

