

## 2 Ringe

### 2.1 Euklidische Ringe

**Definition 2.1** (a) Ein Integritätsbereich  $R$  heißt **euklidisch**, wenn es eine Abbildung:

$\delta : R \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{N}$  mit folgender Eigenschaft gibt: zu  $f, g \in R, g \neq 0$  gibt es  $q, r \in R$  mit  $f = qg + r$  mit  $r = 0$  oder  $\delta(r) < \delta(g)$ .

(b) Sei  $R$  euklidisch,  $a, b \in R \setminus \{0\}$ . Dann gilt:

- (i) in  $R$  gibt es einen ggT von  $a$  und  $b$ .
- (ii)  $d \in (a, b)$  (dh  $\exists x, y \in R$  mit  $d = xa + yb$ )
- (iii)  $(d) = (a, b)$

(c) Jeder euklidische Ring ist ein Hauptidealring.

**Beispiel:**  $\mathbb{Z}$  mit  $\delta(a) = |a|$ ,  $K[X]$  mit  $\delta(f) = \text{Grad}(f)$

### 2.2 Hauptidealringe

**Definition 2.2**

Ein kommutativer Ring mit Eins heißt **Hauptidealring**, wenn jedes Ideal in  $R$  ein Hauptideal ist.

**Satz 4**

Jeder nullteilerfreie Hauptidealring ist faktoriell.

**Satz 5**

Es sei  $R$  ein Hauptidealring  $p \in R$  eine von 0 verschiedene Nichteinheit. Dann ist äquivalent:

- (i)  $p$  ist irreduzibel
- (ii)  $p$  ist Primelement
- (iii)  $(p)$  ist maximales Ideal in  $R$

### 2.3 Faktorielle Ringe

**Proposition + Definition 2.3**

Sei  $R$  ein Integritätsbereich.

## 2 Ringe

(a) Folgende Eigenschaften sind äquivalent:

- (i) Jedes  $x \in R \setminus \{0\}$  läßt sich eindeutig als Produkt von Primelementen schreiben.
- (ii) Jedes  $x \in R \setminus \{0\}$  läßt sich "irgendwie" als Produkt von Primelementen schreiben.
- (iii) Jedes  $x \in R \setminus \{0\}$  läßt sich eindeutig als Produkt von irreduziblen Elementen schreiben.

(b) Sind diese drei Eigenschaften für  $R$  erfüllt, so heißt  $R$  **faktorieller Ring**. (Oder **ZPE-Ring** (engl.: UFD)). Dabei ist in (a) "eindeutig" gemeint, bis auf Reihenfolge und Multiplikation mit Einheiten. Präziser: Sei  $\mathcal{P}$  ein Vertretersystem der Primelemente ( $\neq 0$ ) bezüglich "assoziert".

Dann heißt (i)  $\forall x \in R \setminus \{0\} \exists! e \in R^\times$  und für jedes  $p \in \mathcal{P}$  ein  $\nu_p(x) \geq 0 : x = e \prod_{p \in \mathcal{P}} p^{\nu_p}$ . (beachte  $\nu_p \neq 0$  nur für endlich viele  $p$ ).

### Bemerkung 2.4

Ist  $R$  faktorieller Ring, so gibt es zu allen  $a, b \in R \setminus \{0\}$  einen  $\text{ggT}(a, b)$ .

### Bemerkung 2.5

Sei  $R$  ein faktoriellen Ring,  $a \in R$ .

$$a \text{ irreduzibel} \Leftrightarrow a \text{ prim}$$

## 2.4 Vererbung auf den Polynomring

### Bemerkung 2.6

Sei  $R$  ein Ring und  $R[X]$  der zugehörige Polynomring, dann vererben sich folgende Eigenschaften von  $R$  auf  $R[X]$ :

1. hat Eins
2. kommutativ
3. Integritätsbereich
4. faktoriell