4. Geodätische Linien

Gegeben ist eine Riemann'sche Mannigfaltigkeit $(M, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ mit Levi-Civita-Zusammenhang D. Das Ziel ist es, ein Analogon für Geraden zu finden. Mögliche Charakterisierung von Geraden in der Euklidischen Geometrie sind:

- kürzeste Verbindung zweier Punkte (Variationseigenschaft).
- Kurven $c(t)$ (mit Bogenlänge parametrisiert) mit $c''(t) = 0$ (Differentialgleichung).

4.1. Definition von Geodätischen

Eine Geodätische (Linie) in $(M, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ ist eine differenzierbare Kurve $\gamma : I \to M$ so dass gilt: $D_{\gamma'(t)}\gamma'(t) = 0$ für alle $t \in I$. (Das heißt: Geodätische sind autoparallele Vektorfelder).

Das Tangentialvektorfeld ist parallel. $\gamma' = \frac{d\gamma}{dt} := d\gamma(\frac{\partial}{\partial t})$.

Folgerungen aus der Definition:

(1) $\|\gamma'(t)\|_{\gamma(t)}$ ist konstant.
Beweis
$\|\gamma'\|^2 = \langle\gamma',\gamma'\rangle$. Also $\frac{d}{dt}\|\gamma'\|^2 = \frac{d}{dt}\langle\gamma',\gamma'\rangle = \langle D_{\gamma'}\gamma',\gamma'\rangle + \langle\gamma', D_{\gamma'}\gamma'\rangle = 0$ ■

Ein (entarteter) Spezialfall ist $\gamma(t)$ konstant $p \in M$.

(2) Eine Geodätische ist proportional zur Bogenlänge parametrisiert:

$$s(\gamma) := \int_a^t \|\gamma'(\tau)\| d\tau = k|t-a|$$

Ist $k = 1$ so spricht man von einer normalen Geodätischen sowie von isometrischen Kopien von Intervallen.

(3) Ob eine Kurve eine „Geodätische" ist hängt von der Parametrisierung ab, nicht nur vom Bild $\gamma(I) \subset M$.
Beispiel
$\gamma_1(t) = (t, 0)$ ist eine Geodätische, aber $\gamma_2(t) = (t^3, 0)$ nicht, da $\|\gamma_2'\| = 3t^2$ nicht konstant ist.

4.2. Lokale Darstellung und Differentialgleichung für Geodätische

Sei $\gamma : I \to M$ eine Geodätische in $(M, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ und (U, φ) eine Karte um $\gamma(t_0)$ mit $\varphi \circ \gamma(t) = (x^1(t), \ldots, x^n(t))$.

Dann ist $\gamma'(t) = \sum_{i=1}^{n} x_i'(t) \left.\frac{\partial}{\partial x^i}\right|_{\gamma(t)}$. Die allgemeine Formel für Parallelfelder imn lokalen Koordinaten (vgl 3.2) ergibt:

$$0 = D_{\gamma'}\gamma' = \sum_{k=1}^{n} \left(x''^k + \sum_{i,j=1}^{n} \Gamma_{ij}^k x'^i x'^j \right) \frac{\partial}{\partial x^k}$$

lokal gilt also: $D_{\gamma'}\gamma' = 0$ ist äquivalent zu dem System von n Differentialgleichung 2. Ordnung

$$x''^k(t) = -\sum_{i,j=1}^{n} \Gamma_{ij}^k(x(t)) x'^i(t) x'^j(t) \qquad (1)$$

4.3. Das Geodätische Vektorfeld auf TM

Das System 2. Ordnung (1) ist äquivalent zu System 1. Ordnung:

$$\begin{aligned} x'^k &=: y^k \\ y'^k &= -\sum_{i,j=1}^{n} \Gamma_{ij}^k(x(t)) y^i(t) y^j(t) \end{aligned} \qquad (2)$$

Was ist die Interpretation der von y^i in der Mannigfaltigkeit? Die Geodätische $t \mapsto \gamma(t)$ in M definiert differenzierbare Kurve $t \mapsto \big(\gamma(t), \gamma'(t)\big)$ in $TM = \{(p, v) \mid p \in M, v \in T_pM\}$. Lokale Koordinaten für TM: Sei (U, φ) eine Karte in M, $TU \cong U \times \mathbb{R}^n$ (nach Basissatz). Dies ergibt eine Darstellung von (p, v) als $(x^1, \ldots, x^n, y^1, \ldots, x^n)$ mit $v = \sum y^i \frac{\partial}{\partial x^i}$. Speziell gilt $\big(\gamma(t), \gamma(t)\big) \to \big(x^1(t), \ldots, x^n(t), x'^1(t), \ldots x'^n(t)\big)$.

Lemma 4.1
Es existiert genau ein Vektorfeld $G \in \mathcal{V}(TM)$ auf TM dessen Integralkurven (vergleiche 1.7) von der Form $\tilde{\gamma}(t) = \big(\gamma(t), \gamma'(t)\big)$ sind, wobei $\gamma(t)$ jeweils eine Geodätische in M ist.

Beweis

(a) Eindeutigkeit (unter der Annahme der Existenz): Die Integralkurven von G auf TU sind nach Voraussetzung gegeben durch $\tilde{\gamma}(t) = \big(\gamma(t), \gamma'(t)\big)$. Diese Kurve ist aber Lösung von (2), also zu gegebener Anfangsbedingung eindeutig:

$$\tilde{G}\big(\tilde{\gamma}(t)\big) = \tilde{\gamma}'(t) = G\big(\tilde{\gamma}(t)\big)$$

(b) Existenz: Wir definieren die Komponenten von G bezüglich Basisfelder lokal durch (2). Wegen (a) ist G auf ganz TM eindeutig. ∎

Definition
G heißt geodätisches Vektorfeld auf M. $(G(p, v) \in T_{(p,v)}(TM) \subset T(TM))$

Satz 4.1 (Lokale Integralkurve)
Für jede Karte U und $p \in M$ existiert ein offenes $O \in TM$ mit $(p, o) \in O$ eine Zahl $\delta = \delta(p)$ und eine C^∞-Abbildung $f : (-\delta, \delta) \times O \to TU \subset TM$, so dass $t \mapsto f\big(t, (q, v)\big)$ die eindeutige Integralkurve von G ist mit $f\big(0, (q, v)\big) = (q, v)$ für alle $(q, v) \in O$.

Beweis
Nach 1.7 gilt lokal, dass Integralkurven von Vektorfeldern den Lösungen eines Systems von gewöhnlichen Differentialgleichung entspricht. Die Existenz und Eindeutigkeit im Satz 4.1 folgt dann aus dem ensprechenden Satz über Existenz und Eindeutigkeit von Lösungen eines Differentialgleichungssystems zu gegebenen Anfangsbedingungen.

Dass f differenzierbar ist folgt aus der Tatsache, dass Lösungen von Differentialgleichungen (gewöhnlich, 1. Ordnung) differenzierbar von den Anfangsbedingungen abhängen (vergleiche zum Beispiel Arnold, „Gewöhnliche Differenzialgleichungen“, Gromoll-Klingenberg-Meryer, „Differenzialgleichungen im Großen“, S.275)

Sei $\pi : TM \to M;\ (q, v) \mapsto q$ die kanonische Projektion. Die offene Menge $O \subset TM$ im Satz kann man wie folgt wählen: Es existiert ein $V \subset U$ (offene Umgebung von p) und $\varepsilon_1 > 0$, so dass $O = \{(q, v) \in TU \cong U \times \mathbb{R}^n \mid q \in V, v \in T_qM, \|v\| < \varepsilon_1\}$ ∎

Aus Satz 4.1 folgt dann:

Satz 4.2 (Lokale Geodätische)
Zu $p \in M$ und einer Karte U um p existiert eine offene Menge V von p, Zahlen $\delta = \delta(p) < 0$, $\varepsilon_1 > 0$ und eine C^∞-Abbildung $\gamma := \pi \circ f : (-\delta, \delta) \times O \to M$ (mit O definiert wie oben), so dass die Kurve $t \mapsto \gamma(t, q, v)$ die eindeutige Geodätische in M ist mit $\gamma(0, q, v) = q$ und $\gamma'(0) = v$.

4.4. Die Expontential-Abbildung

Lemma 4.2 (Homogenität von Geodätischen)
Sei $a \in \mathbb{R}$, $a > 0$. Falls die Geodätische $\gamma(t, q, v)$ auf $(-\delta, \delta)$ definiert ist, so ist die Geodätische $\gamma(t, q, a \cdot v)$ auf $(-\frac{\delta}{a}, \frac{\delta}{a})$ definiert und es gilt $\gamma(t, q, a \cdot v) = \gamma(a \cdot t, q, v)$.

Beweis
Betrachte die Kurve $h : (-\frac{\delta}{a}, \frac{\delta}{a}) \to M; t \mapsto \gamma(at, q, v)$. Es gilt: $h(0) = \delta(0, q, v) = q$ sowie $h'(0) = \frac{d}{dt}\gamma(at, q, v)|_{t_0} = a\gamma'(0, q, v) = av$. Weiter ist $h'(t) = a\gamma'(at, q, v)$, also $D_{h'}h' = D_{a\gamma'}a\gamma' = a^2 D_{\gamma'}\gamma' = a^2 \cdot 0 = 0$.

Das heißt: h is eine Geodätische mit $h(0) = q$, $h'(0) = av$. Aus der Eindeutigkeit von Geodätischen (Satz 4.2) folgt, dass $\gamma(at, q, v) = h(t) = \gamma(t, q, av)$. ∎

Nach Satz 4.2 ist (für $q \in V = V(p)$) $\gamma(t, q, v)$ definiert für $|t| < \delta = \delta(p)$ und $\|v\| < \varepsilon_1 = \varepsilon_1(p)$. Mit Lemma 4.2 folgt jetzt, dass $\gamma(t, q, \frac{\delta}{2}v)$ für $|t| < 2$ definiert ist. Dann ist die Geodätische $\gamma(t, q, w)$ definiert für $q \in V, |t| < 2$ und $w \in T_qM$, $\|w\| < \varepsilon$. Damit ist gezeigt:

Satz 4.3
Für jeden Punkt $p \in M$ existiert eine Umgebung V von p, $\varepsilon = \varepsilon(p) > 0$ und eine differenzierbare Abbildung:

$$\gamma : (-2, 2) \times \{(q, v) \in TM \mid q \in V, v \in T_qM, \|v\| < \varepsilon\}$$

so dass für ein festes (q, v) die Abbildung $t \mapsto \gamma(t, q, v)$ die eindeutige Geodätische in M ist mit Anfangsbedingung $\gamma(0, q, v) = q$, $\gamma'(0, q, v) = v$.

Sei $p \in M$ und O wie in Satz 4.3.

Definition
Die Expontential-Abbildung (auf O) ist:

$$\begin{aligned} \exp :\quad & O \subset TM \to M \\ \exp(q, v) &:= \gamma(1, q, v) \\ &= \gamma(1, q, \|v\| \frac{v}{\|v\|}) \\ &= \gamma(\|v\|, q, \frac{v}{\|v\|}) \end{aligned}$$

Bemerkungen: (1) exp ist differenzierbar, da γ differenzierbar ist (vergleiche Satz 4.2)

(2) Meistens benutzt man die Einschränkung von exp auf *einen* Tangentialraum:

$$\exp_p := \exp(p, \cdot) : B_\varepsilon(0)(\subset TM) \to M$$

Wobei $B_\varepsilon(0)$ ein offener Ball mit Radius ε und 0 ist.

Satz 4.4
Für jeden Punkt p einer n-dimensionalen differenzierbaren Riemann'schen Mannigfaltigkeit existiert ein $r = r(p) > 0$, so dass die Abbildung $\exp_p : B_r(0) \subset T_pM \to \exp_p(B_r(0)) \subset M$ (mit $B_r(0) := \{v \in T_pM \mid \|v\| < r\}$) ein Diffeomorphismus auf die offene Umgebung $V := \exp_p(B_r(0))$ von p ist.

Beweis
Wir benutzen den Umkehrsatz für Mannigfaltigkeit (Satz 1.2). Zu zeigen ist: $d\exp_p|_0 : T_p(B_r(0)) \cong T_pM \to T_{\exp_p(0)}M = T_pM$ ist ein Vektorraum-Isomophismus.

Wähle dazu die Kurve $c(t) = tv$ (mit $c(0) = 0, c'(0) = v$). Dann ist: $d\exp_p|_0(v) = \frac{d}{dt}|_0(\exp_p \circ c)(t) = \frac{d}{dt}|_0 \exp_p(tv) = \frac{d}{dt}|_0\gamma(1, p, tv) = \frac{d}{dt}|_0\gamma(t, p, v) = v$. Also ist $d\exp_p|_0 = \mathrm{id}$, und damit ein Vektorraum-Isomophismus. ■

Definition
Eine geodätische Normalumgebung von $p \in M$ ist eine Umgebung U von p, so dass $\exp_p : V \to U$ ein Diffeomorphismus ist.
$B_r(p) := \exp_p(B_r(0))$ heißt geodätischer Ball vom Radius r.
Die Koordinatenfunktionen der Karte $\exp_p^{-1} : U = \exp_p(V) \to V \overset{\circ}{\subset} T_pM \cong \mathbb{R}^n$ heißen geodätische Normalkoordinaten.

Beispiele

(1) Im $\mathbb{R}^n$ mit Standardskalarprodukt sind die Geodätischen gerade die Geraden (mit Bogenlänge parametrisiert). Also, da $T_p\mathbb{R}^n \cong \mathbb{R}^n$, $\exp_0 : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ ist die Identität.

(2) In $M = S^n$ mit der von $\mathbb{R}^{n+1}$ induzierten Metrik sind die Geodätischen die Großkreise (mit Bogenlänge parametrisiert, siehe 4.5). Durch Skizzen für die Fälle $n = 1, 2$ motiviert: $\exp_0$ ist ein Diffeomorphismus auf $B_\pi(0)$.

(3) Der Name „Exponentialabbildung“ kommt aus der Lie-Theorie. $G = U(1) \cong S^1$ sind die unitäre (1×1)-Matrizen, dann steht der Tangentialraum am Punkt 1 senkrecht, also $T_1U(1) \cong i\mathbb{R}$, und daher $\exp_0(t) = e^t$.

(4) In der Lie-Gruppe $G = (\mathbb{R}_{>0}, \cdot)$ ist $T_1\mathbb{R} \cong (\mathbb{R}, +)$. Hier ist $\exp_1(t) = e^t$.

(5) $G = O(n) = \{A \in \mathbb{R}^{n\times n} \mid AA^t = E\}$. Hier ist $T_EO(n)$ die Menge der schiefsymetrischen Matrizen. Für $B \in T_EO(n)$ setze $A := \exp(sB) := E + sB + \frac{s^2}{2}B^2 + \frac{s^3}{3!}B^3 + \cdots$. Es gilt: $A \in O(n)$.

4.5. Minimaleigenschaft von Geodätischen

Zur technischen Vorbereitung benötigen wir „Vektorfelder längs Flächen“. Sei A eine zusammenhängende Menge in $\mathbb{R}^2$ mit stückweise differenzierbarem Rand und M sei eine differenzierbare Mannigfaltigkeit. Eine parametrisierte Fläche in M ist eine differenzierbare Abbildung $f : A(\subset \mathbb{R}^2) \to M$; $(u, v) \mapsto f(u, v)$.

Ein Vektorfeld längs f ist eine differenzierbare Abbildung $V : A \to TM$ mit $V(u, v) \in T_{f(u,v)}M$. Die Parameterlinien $f(u, v_0)$ bzw. $f(u_0, v)$ mit v_0 bzw. u_0 fest definieren die „Tangential-Vektorfelder“

$$\frac{\partial f}{\partial u}(u, v) := df|_{(u,v)}\Big(\frac{\partial}{\partial u}\Big|_{(u,v)}\Big) \quad \text{sowie} \quad \frac{\partial f}{\partial v}(u, v) := df|_{(u,v)}\Big(\frac{\partial}{\partial v}\Big|_{(u,v)}\Big)$$

Weiter definieren wir die kovariante Ableitung für ein Vektorfeld V längs f wie folgt:

$$\frac{DV}{\partial u}(u, v_0) := D_{\frac{\partial f}{\partial u}(u,v_0)}V(u, v_0) \quad \text{sowie} \quad \frac{DV}{\partial v}(u_0, v) := D_{\frac{\partial f}{\partial v}(u_0,v)}V(u_0, v)$$

Lemma 4.3 (Symmetrie)
Sei M ein differenzierbare Mannigfaltigkeit und D ein symmetrischer Zusammenhang auf M. Für eine parametrisierte Fläche $f : A \to M$ gilt:

$$\frac{D}{\partial v}\Big(\frac{\partial f}{\partial u}\Big) = \frac{D}{\partial u}\Big(\frac{\partial f}{\partial v}\Big)$$

Beweis
In lokalen Koordinaten (U, φ) in der Umgebung eines Punktes von $f(A) \subset M$ sei $\varphi \circ f(u,v) = \big(x^1(u,v), \dots, x^n(u,v)\big)$. Es gilt:

$$\begin{aligned}
\frac{D}{\partial v}\Big(\frac{\partial f}{\partial u}\Big) &= \frac{D}{\partial v}\Big(\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial x^i}{\partial u}\frac{\partial}{\partial x^i}\Big) \\
&= \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial^2 x^i}{\partial v \partial u}\frac{\partial}{\partial x^i} + \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial x^i}{\partial u} D_{\sum_j \frac{\partial x^j}{\partial v}\frac{\partial}{\partial x^j}} \frac{\partial}{\partial x^i} \\
&= \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial^2 x^i}{\partial v \partial u}\frac{\partial}{\partial x^i} + \sum_{i=1,j}^{n} \frac{\partial x^i}{\partial u}\frac{\partial x^j}{\partial v} D_{\frac{\partial}{\partial x^j}} \frac{\partial}{\partial x^i}
\end{aligned}$$

Wegen der Symmetrie von D erhalten wir dann durch zurückrechnen

$$= \frac{D}{\partial u}\Big(\frac{\partial f}{\partial v}\Big)$$

■

Satz 4.5 (Gauß-Lemma)
Sei $(M, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ eine Riemann'sche Mannigfaltigkeit. Sei $p \in M$ und $v \in T_pM$ so dass $\exp_p(v) =: q$ definiert ist. Für $w \in T_v(T_pM) \cong T_pM$ gilt:

$$\big\langle d(\exp_p)|_v v, d(\exp_p)|_v w \big\rangle_q = \langle v, w\rangle_p$$

Beweis
Zerlege $w = w_T + w_N$, wobei w_T die Komponente in Richtung v und w_N die dazu orthogonale Komponente ist (also $w_T = \langle v, w\rangle \frac{v}{\|v\|}$, $w_N = w - w_T$). Das Differential

$$d\exp_p|_v : T_v(T_pM) \cong T_pM \to T_{\exp_p v}M = T_qM$$

ist linear. Also:

$$d\exp_p|_v(w_T + w_N) = d\exp_p|_v(w_T) + d\exp_p|_v(w_N)$$

Es gilt zunächst

$$d\exp_p|_v w_T = \frac{d}{dt}\Big|_0 \exp_p(v + t w_T) = \frac{d}{dt}\Big|_0 \exp_q(t w_T) = w_T$$

sowie

$$d\exp_p|_v v = \frac{d}{dt}\Big|_0 \exp_p(v + t v) = \frac{d}{dt}\Big|_0 \exp_q(t v) = v$$

das heißt, das Gauß-Lemma gilt für $w = w_T$.

Ohne Einschränkung sei nun $w = w_N$. Nach Voraussetzung ist $q = \exp_p(v)$, also existiert ein $\varepsilon > 0$, so dass die Exponentialabbildung definiert ist für: $u := tv(s)$ wobei $v(s)$ eine Kurve in T_pM mit $v(0) = v$, $\|v(s)|$ konstant und $v'(0) = w$ $(\perp v)$. Die Fläche $A \subset \mathbb{R}^2$ ist jetzt die Menge der u für $0 \le t \le 1$ und $-\varepsilon < s < \varepsilon$.

Betrachte jetzt die parametrisierte Fläche

$$f : A \to M; f(t,s) := \exp_p(tv(s))$$

Es gilt: $f(t, s_o)$ ist eine Geodätische für ein festes s_0, sowie $f(1,0) = \exp_p v = q$.

Wir haben für $t = 1$

$$\left.\frac{\partial f}{\partial s}\right|_{(1,0)} \overset{\text{Lemma 1.3}}{=} (d\exp_p)_v(v'(0)) = d\exp_p|_v(w)$$

und für $s = 0$

$$\left.\frac{\partial f}{\partial t}\right|_{(1,0)} = v = d\exp_p|_v(v)$$

Also ist zu zeigen:

$$\left\langle \left.\frac{\partial f}{\partial s}\right|_{(1,0)}, \left.\frac{\partial f}{\partial t}\right|_{(1,0)} \right\rangle_q = 0 \qquad (*)$$

Wir zeigen dazu zuerst:

$$\left\langle \left.\frac{\partial f}{\partial s}\right|_{(t,s)}, \left.\frac{\partial f}{\partial t}\right|_{(t,s)} \right\rangle_q$$

ist unabhängig von t.

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial t}\left\langle \left.\frac{\partial f}{\partial s}\right|_{(t,s)}, \left.\frac{\partial f}{\partial t}\right|_{(t,s)} \right\rangle_q &\overset{\text{Verträglichkeit}}{=} \left\langle \frac{D}{\partial t}\frac{\partial f}{\partial s}, \frac{\partial f}{\partial t} \right\rangle_q + \left\langle \frac{\partial f}{\partial s}, \underbrace{\frac{D}{\partial t}\frac{\partial f}{\partial t}}_{=0} \right\rangle_q \\
&\overset{\text{Lemma 1.3}}{=} \left\langle \frac{D}{\partial s}\frac{\partial f}{\partial t}, \frac{\partial f}{\partial t} \right\rangle \\
&= \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial s}\underbrace{\left\langle \frac{\partial f}{\partial t}, \frac{\partial f}{\partial t} \right\rangle}_{\text{konstant (Geodätische!)}} = 0
\end{aligned}$$

Es war t beliebig, also wählen wir $t = 0$.

$$(*) \iff \left\langle \left.\frac{\partial f}{\partial s}\right|_{(0,0)}, \left.\frac{\partial f}{\partial t}\right|_{(0,0)} \right\rangle_q = 0$$

Aber für ein festes t gilt:

$$\begin{aligned}
\left.\frac{\partial f}{\partial s}\right|_{(t,0)} &= \left.(d\exp_p)_{tv(s)}(tv'(s))\right|_{s=0} \\
&= d\exp_p|_{tv}(tw)
\end{aligned}$$

∎

Frage: Geodätische und Kürzeste

Ein Segment $\gamma|_{[a,b]}$ einer Geodätischen $\gamma : I \to M([a,b] \subset I)$ heißt minimierend, falls $L(\gamma|_{[a,b]}) \leq L(c)$, wobei c eine beliebige Kurve mit $c(a) = \gamma(a)$, $c(b) = \gamma(b)$ und $L(.)$ die Länge ist.

Satz 4.6 (Geodätische sind lokal minimierend)
Sei $p \in M$, U eine normale Umgebung von p und $B \subset U$ ein normaler Ball mit Zentrum p. Sei $\gamma : [0,1] \to B$ ein geodätisches Segment mit $\gamma(0) = p$. Falls $c : [0,1] \to M$ eine beliebige, stückweise C^∞ - Kurve mit $\gamma(0) = c(0)$ und $\gamma(1) = c(1)$ ist, dann gilt $L(\gamma) \le L(c)$, und falls $L(\gamma) = L(c)$, so ist $\gamma([0,1]) = c([0,1])$.

Beweis
1. Fall: $c([0,1]) \subset B$. $\exp_p$ ist ein Diffeomorphismus, also können wir schreiben ("Polarkoordinaten"): $c(t) = \exp_p(r(t)v(t))$, $t \in [0,1]$, wobei $v(t)$ ein Kurve in T_pM ist mit $\|v(t)\| = 1$ und $r : [0,1] \to \mathbb{R}^+$ stückweise differenzierbar. Sei $f(r,t) := \exp_p(r \cdot v(t))$ eine parametrisierte Fläche in B, die c enthält. Es gilt für fast alle t:

$$\frac{dc}{dt} = \frac{\partial f}{\partial r} r' + \frac{\partial f}{\partial t}\,.$$

Nach dem Gauß-Lemma (4.5) ist $\langle \frac{\partial f}{\partial t}, \frac{\partial f}{\partial r} \rangle = 0$, also

$$\|\frac{dc}{dt}\|^2 = \underbrace{\|\frac{df}{dr}\|^2}_{=1} |r'|^2 + \underbrace{\|\frac{df}{dt}\|^2}_{\ge 0} \ge |r'|^2\,.$$

Damit gilt $\int_\varepsilon^1 \|\frac{dc}{dt}\| dt \ge \int_\varepsilon^1 |r'| dt \ge \int_\varepsilon^1 r' dt = r(1) - r(\varepsilon)$. (Beachte dass r bei 0 nicht differenzierbar ist, aber $r(\varepsilon) \to 0$ für $\varepsilon \to 0$.) Also $L(c) = \int_0^1 \|\frac{dc}{dt}\| dt \ge r(1) = c(1) =$ Endpunkt von $c = L(\gamma)$.

Die Gleichheit $L(c) = L(\gamma)$ gilt dann, wenn Gleichheit in allen Abschätzungen oben gilt, also $\|\frac{\delta f}{\delta t}\| = 0$, also $\frac{\delta f}{\delta t} = 0 \overset{\text{Kettenregel}}{=} d\exp_p(rv') \iff rv' = 0 \implies v' = 0 \implies v$ ist kostant, a das heißt, dass die Richtung konstant ist. Weiter muss dann $\int_\varepsilon^1 |r'| dt = \int_\varepsilon^1 r' dt$ sein, also $|r'| = r' > 0$, also ist c eine monotone Parametrisierung von γ, insbesondere $c([0,1]) = \gamma([0,1])$.

2. Fall: $c([0,1]) \not\subset B$. Sei ε der Radius von B und $t_1 \in [0,1]$ der erste Parameterwert mit $c(t_1) \in S_\varepsilon(p) = \partial B_\varepsilon(p) = \partial B$. Dann ist

$$L(c) > L(c|_{[0,t_1]}) \overset{\text{1. Fall}}{\ge} \varepsilon \ge L(\gamma') \ge L(\gamma)\,.$$ ∎

Fazit: Aus „γ ist eine Geodätische“ folgt „γ ist lokal minimierend“. Doch gilt auch die Umkehrung?

Satz 4.7
Für jeden Punkt p einer Riemann'schen Mannigfaltigkeit existiert eine Umgebung W von p und $\delta = \delta(p) > 0$, so dass für alle $q \in W$ gilt:

$$\exp_q : B_\delta(0)\ (\subset T_qM) \to M$$

ist ein Diffeomorphismus mit $\exp_q(B_\delta(0)) \supseteq W$. Das heißt: W ist eine normale Umgebung für jeden ihrer Punkte. Eine solche Umgebung von p heißt total normal.

Beweis
(Skizze) Betrachte $F : U\ (\subset TM) \to M \times M$, wobei $F(q,v) := (q, \exp_q(v))$. Die Jacobi-Matrix von F im Punkt $(p,0)$ ist $J_p := \begin{pmatrix} E & 0 \\ E & E \end{pmatrix}$, wobei E die $n \times n$-Einheitsmatrix ist. J_F ist regulär in $(p,0)$. Weiter ist F ein lokaler Diffeomorphismus von einer $(p,0)$-Umgebung $U' \subset U$ auf eine Umgebung W' um $F(p,0) = (p,p)$. Wähle nun die Umgebung W von p so, dass $W \times W \subset W'$. ∎

Bemerkung: Nach Satz 4.6 und 4.7 gilt: Für je zwei Punkte $q_1, q_2 \in W$ (wie in Satz 4.7) existiert *genau eine* minimierende Geodätische der Länge $< \delta$, welche q_1 und q_2 verbindet. Damit kann man die Radialsymetrie verlassen und hat mehr „Beweglichkeit“.

Korrolar (Geodätische erkennen)
Sei γ eine stückweise differenzierbare Kurve $\gamma : [a,b] \to M$, mit der Bogenlänge parametrisiert. Falls $L(\gamma) \leq L(c)$ für irgendeine stückweise differenzierbare Vergleichskurve c, die $\gamma(a)$ und $\gamma(b)$ verbindet, so ist γ eine Geodätische.

Es gilt also: „γ minimierend $\implies$ γ Geodätische“ (keine Lokalität zunächst!).

Beweis
Sei $t \in [a,b]$ und W eine total normale Umgebung von $\gamma(t)$. Dann existiert ein abgeschlossenes Intervall $[t_1, t_2] \subset [a,b]$, so dass $t \in I$ und $\gamma(I) \subset W$. $\gamma|_I$ ist stückweise differenzierbar und minimierend (sonst wäre γ nicht minimierend). Nach Satz 4.6 ist $L(\gamma|_I)$ die Länge eines radialen geodätischen Segments (da W total normal) von $\gamma(t_1)$ nach $\gamma(t_2)$. Da γ nach Bogenlänge parametrisiert ist, folgt nach Satz 4.6, dass $\gamma|_I$ eine Geodätische in der Umgebung von t ist. t war beliebig, woraus die Behauptung folgt. ∎

Anwendungen:

(1) Eine Riemann'sche Isometrie bildet Geodätische auf Geodätische ab.

Beweis
$\varphi : M \to N$ sei eine Isometrie; γ ist eine Geodätische, dann ist $L(\varphi \circ \gamma) = L(\gamma)$. Also: γ ist minimierend, dann $\varphi \circ \gamma$ minimierend. Dann folgt die Behauptung aus dem Korrolar.

Alternativ: $D_{\gamma'}\gamma' = 0 \implies D_{(\varphi\circ\gamma)'}(\varphi \circ \gamma)' = 0.$ ∎

(2) Geodätische von $S^n = \{x \in \mathbb{R}^{n+1} \mid \|x\| = 1\}$ sind Großkreise.

Beweis
Sei c ein Großkreis, das heißt $c = S^n \cap \sigma$, wobei σ eine 2-dimensionale Ebene in $\mathbb{R}^{n+1}$ durch 0 ist. Wähle $p, q \in c$ genügend nahe, so dass es nach Satz 4.7 genau eine Geodätische γ zwischen p, q existiert. Dann ist die euklidische Spiegelung R an σ eine euklidische Isometrie von S^n. R fixiert c punktweise und bildet γ auf $\tilde{\gamma}$ ab (auch durch p, q). Also mus wegen Eindeutigkeit $\gamma = \tilde{\gamma}$ gelten und γ bleibt punktweise fest, das heißt $\gamma \subset c =$ die Fixpunkte von $R = S^n \cap \sigma$. Damit ist der Großkreis selber die Geodätische γ. ∎