

# Riemann'sche Geometrie

Die Mitarbeiter von <http://mitschriebwiki.nomeata.de/>

18. Oktober 2016



# Inhaltsverzeichnis

<b>I. Inhaltsverzeichnis</b>	<b>3</b>
<b>II. Vorwort</b>	<b>5</b>
<b>1. Mannigfaltigkeiten</b>	<b>7</b>
1.1. Differenzierbare Mannigfaltigkeiten . . . . .	7
1.2. Differenzierbare Abbildungen . . . . .	11
1.3. Tangentialvektoren und -räume . . . . .	12
1.4. Tangentialabbildungen . . . . .	15
1.5. Tangentialvektoren an Kurven . . . . .	17
1.6. Untermannigfaltigkeiten und spezielle differenzierbare Abbildungen . . . . .	18
1.7. Tangentialbündel und Vektorfelder . . . . .	19
<b>2. Riemann'sche Metriken</b>	<b>23</b>
2.1. Definition einer Riemann'schen Metrik und Struktur . . . . .	23
2.2. Beispiele und Konstruktionen . . . . .	24
2.2.1. $n$ -dimensionaler Euklidischer Raum . . . . .	24
2.2.2. $n$ -dimensionale hyperbolische Räume . . . . .	24
2.2.3. Konstruktion von neuen Riemann'schen Mannigfaltigkeiten aus gegebenen . . . . .	24
2.2.4. Riemann'sche Produkte . . . . .	25
2.3. Existenz von Riemann'schen Metriken . . . . .	26
2.4. Erste Anwendung von Riemann'schen Metriken: Länge von Kurven . . . . .	27
<b>3. Affine Zusammenhänge und Parallelverschiebung</b>	<b>29</b>
3.1. Motivation . . . . .	29
3.2. Affine Zusammenhänge . . . . .	29
3.3. Der Levi-Civita-Zusammenhang . . . . .	31
<b>4. Geodätische Linien</b>	<b>35</b>
4.1. Definition von Geodätischen . . . . .	35
4.2. Lokale Darstellung und Differentialgleichung für Geodätische . . . . .	35
4.3. Das Geodätische Vektorfeld auf $TM$ . . . . .	36
4.4. Die Exponential-Abbildung . . . . .	37
4.5. Minimaleigenschaft von Geodätischen . . . . .	39
<b>5. Krümmung</b>	<b>45</b>
5.1. Der Riemann'sche Krümmungstensor . . . . .	45
5.2. Schnittkrümmung . . . . .	47
5.3. Ricci-Krümmung . . . . .	49
<b>6. Jacobi-Felder (Verbindung Geometrie–Krümmung)</b>	<b>51</b>
6.1. Jacobi-Gleichung . . . . .	51
6.2. Jacobi-Felder und Schnittkrümmung . . . . .	54

<b>7. Riemann'sche Mannigfaltigkeiten als metrische Räume</b>	<b>57</b>
7.1. Schnittort einer vollständigen Riemann'schen Mannigfaltigkeit . . . . .	62
7.2. Volumenberechnung mit dem Zerlegungs-Satz . . . . .	66
<b>A. Satz um Satz (hüpf der Has)</b>	<b>69</b>
<b>B. Stichwortverzeichnis</b>	<b>69</b>

## II. Vorwort

### Über dieses Skriptum

Dies ist ein Mitschrieb der Vorlesung „Riemann’sche Geometrie“ von Herrn Dr. Leuzinger im Sommersemester 07 an der Universität Karlsruhe (TH). Die Mitschriften der Vorlesung werden mit ausdrücklicher Genehmigung von Herrn Dr. Leuzinger hier veröffentlicht, Herr Dr. Leuzinger ist für den Inhalt nicht verantwortlich.

### Wer

Gestartet wurde das Projekt von Joachim Breitner. Bei der Erstellung wurde bisweilen auf ein Skript für die englische Version der Vorlesung, geTeXt von Bernhard Konrad, zurückgegriffen.

### Wo

Alle Kapitel inklusive L<sup>A</sup>T<sub>E</sub>X-Quellen können unter <http://mitschriebwiki.nomeata.de> abgerufen werden. Dort ist ein von Joachim Breitner programmiertes *Wiki*, basierend auf <http://latexki.nomeata.de> installiert. Das heißt, jeder kann Fehler nachbessern und sich an der Entwicklung beteiligen. Auf Wunsch ist auch ein Zugang über *Subversion* möglich.



# 1. Mannigfaltigkeiten

## 1.1. Differenzierbare Mannigfaltigkeiten

### Erinnerung (LA/Analysis)

Euklidischer Raum	$\mathbb{R}^n, \langle \cdot, \cdot \rangle$
Norm	$\ a\  := \sqrt{\langle a, a \rangle}$
Metrik	$d(a, b) := \ a - b\ $
Winkel	$\cos \angle(a, b) := \frac{\langle a, b \rangle}{\ a\  \cdot \ b\ }$

Die Funktion  $f : U(\overset{\circ}{\subset} \mathbb{R}^n) \rightarrow \mathbb{R}$  ist glatt (oder  $C^\infty$ ) falls in jedem Punkt  $p \in U$  alle gemischten partiellen Ableitungen existieren und stetig sind.<sup>1</sup>

Die  $C^\infty$ -Funktion

$$u^i : \begin{array}{c} \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R} \\ p = (p_1, \dots, p_n) \mapsto p_i = u^i(p) \end{array}$$

heißt  $i$ -te Koordinatenfunktion ( $i = 1, \dots, n$ ). Eine Abbildung  $\phi : U(\overset{\circ}{\subset} \mathbb{R}^n) \rightarrow \mathbb{R}^n$  heißt glatt falls jede der reellen Funktionen  $u^i \circ \phi$  glatt ist ( $i = 1, \dots, n$ ).

### Karten und Atlanten

Sei  $M$  ein topologischer Raum, der hausdorff'sch ist und eine abzählbare Basis hat.

Ein Koordinatensystem (oder Karte) in  $M$  ist ein Homöomorphismus

$$\varphi : U(\overset{\circ}{\subset} M) \rightarrow \varphi(U)(\overset{\circ}{\subset} \mathbb{R}^n)$$

Schreibt man  $\varphi(p) = (x^1(p), \dots, x^n(p))$ , dann heißen die Funktionen  $x^i := u^i \circ \varphi : U \rightarrow \mathbb{R}$  Koordinatenfunktionen von  $\varphi$ .  $n$  heißt Dimension von  $(\varphi, U)$ .

Ein  $n$ -dimensionaler, differenzierbarer Atlas für  $M$  ist eine Kollektion  $\mathcal{A}$  von  $n$ -dimensionalen Karten von  $M$ . Es gilt:

- (A1) Jeder Punkt von  $M$  liegt im Definitionsbereich mindestens einer Karte, d.h.  $M$  ist lokal euklidisch.
- (A2) Alle zu  $\mathcal{A}$  gehörigen Kartenwechsel sind glatt, das heißt: Sind die Karten  $\varphi : U \rightarrow \varphi(U)$  und  $\psi : V \rightarrow \psi(V)$  in  $\mathcal{A}$  und  $V \cap U \neq \emptyset$ , so sind  $\varphi \circ \psi^{-1} : \psi(U \cap V) \rightarrow \varphi(U \cap V)$  sowie  $\psi \circ \varphi^{-1} : \varphi(U \cap V) \rightarrow \psi(U \cap V)$ , genannt Kartenwechsel, glatt.

---

<sup>1</sup>  $A \overset{\circ}{\subset} B := A$  offen und  $A \subset B$

## 1. Mannigfaltigkeiten

Eine Karte  $\psi$  von  $M$  heißt mit  $\mathcal{A}$  verträglich, wenn auch  $\mathcal{A} \cup \{\psi\}$  ein differenzierbarer Atlas für  $M$  ist.

$\mathcal{A}$  ist vollständig (oder maximal) wenn jede mit  $\mathcal{A}$  verträgliche Karte zu  $\mathcal{A}$  gehört.

### Definition

Eine  $n$ -dimensionale differenzierbare Mannigfaltigkeit ist ein topologischer Hausdorff-Raum mit abzählbarer Basis versehen mit einem vollständigen differenzierbaren  $n$ -dimensionalen Atlas.

### Beispiele

- (1)  $\mathbb{R}^n$ :  $\tilde{\mathcal{A}} = \{(\mathbb{R}^n, \text{id})\}$  ist ein Atlas. Durch Erweiterung zu einem vollständigen Atlas  $\mathcal{A}$  erhalten wir die standard-differenzierbare Struktur auf  $\mathbb{R}^n$ .

**Bemerkung:** Auf  $\mathbb{R}^n$ ,  $n \neq 4$ , existiert bis auf Diffeomorphismus genau eine differenzierbare Struktur. Auf  $\mathbb{R}^4$  existieren weitere, „exotische“ differenzierbare Strukturen.

- (2) Die Sphären  $S^n := \{p = (p_1, \dots, p_{n+1}) \in \mathbb{R}^{n+1} \mid \|p\| = 1\}$ . Wir behaupten:  $S^n$  ist eine  $n$ -dimensionale differenzierbare Mannigfaltigkeit.

Als Topologie wählen wir die Teilmengen-Topologie, d.h.  $U \subset S^n$  offen  $\iff \exists U' \subset \mathbb{R}^{n+1}$  offen, so dass  $U = S^n \cap U'$ . Daher folgt auch, dass die Sphären auch hausdorff'sch sind und eine abzählbare Basis haben.

Seien  $U_i^+$  bzw.  $U_i^-$  die offenen Hemisphären, definiert durch

$$\begin{aligned} U_i^+ &:= \{p \in S^n \mid p_i > 0\} \\ U_i^- &:= \{p \in S^n \mid p_i < 0\}. \end{aligned}$$

Die Abbildungen  $\varphi_i^\pm : U_i^\pm \rightarrow \mathbb{R}^n$  (Projektion in Richtung  $i$ -te Koordinaten-Achse) für  $i = 1, \dots, n+1$  mit

$$\varphi_i^\pm(p) := (u^1(p), \dots, u^{i-1}(p), u^{i+1}(p), \dots, u^{n+1}(p))$$

sind Karten mit glatten ( $C^\infty$ ) Kartenwechsel, was wir am Beispiel  $n = 2$  überprüfen:

$$(u^1, u^2) \xrightarrow{(\varphi_3^+)^{-1}} (u^1, u^2, \sqrt{1 - (u^1)^2 - (u^2)^2}) \xrightarrow{\varphi_1^+} (u^2, \sqrt{1 - (u^1)^2 - (u^2)^2}) \quad ((u^1)^2 + (u^2)^2 < 1)$$

- (3) Kurven und Flächen in  $\mathbb{R}^3$  sind 1- bzw. 2-dimensionale Mannigfaltigkeiten

- (4a) Der  $n$ -dimensionale reell-projektiver Raum  $P^n\mathbb{R}$

### Definition

Auf  $X := \mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\}$  betrachte die Äquivalenz-Relation

$$x \sim y \iff \exists t \in \mathbb{R}, t \neq 0, y = tx, \text{ also } (y^1, \dots, y^n) = (tx^1, \dots, tx^{n+1})$$

Die Äquivalenzklassen sind also Geraden durch den Ursprung. Nun definieren wir:

$$P^n\mathbb{R} := \mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\} / \sim$$

Wir behaupten nun dass  $P^n\mathbb{R}$  eine  $n$ -dimensionale differenzierbare Mannigfaltigkeit ist.



Die Topologie erhalten wir aus dem topologischen Raum  $\mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\}$  über die Quotienten-Topologie, für die wir die surjektive Abbildung  $\pi$  verwenden:

$$\begin{aligned} \pi : \mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\} &\rightarrow P^n\mathbb{R} \\ x &\mapsto [x]_{\sim} \end{aligned}$$

Zur Erinnerung: Die Quotiententopologie ist allgemein:

$$U \subset X / \sim \text{ offen} \iff \pi^{-1}(U) \subset X \text{ offen}$$

Um zu zeigen, dass  $P^n\mathbb{R}$  eine abzählbare Basis hat, genügt es nach Lemma 1 des verteilten Blattes „Einige Grundbegriffe der Topologie“ zu zeigen, dass  $\pi : \mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\} \rightarrow P^n\mathbb{R}$  offen ist. ( $\pi$  ist offen wenn  $\pi$ -Bilder offener Mengen offen sind.) Dazu betrachten wir die Streckung  $\alpha_t : X \rightarrow X; x \mapsto tx$  ( $t \neq 0$ ).  $\alpha_t$  ist ein Homöomorphismus mit  $\alpha_t^{-1} = \alpha_{\frac{1}{t}}$ .

Sei nun  $U \subset X$  offen, so ist  $\pi^{-1}(\pi(U)) = \bigcup_{t \neq 0} \alpha_t(U)$ . Da jedes  $\alpha_t(U)$  offen ist, ist  $\pi^{-1}(\pi(U))$  offen. Nach der Definition der Quotiententopologie also ist  $\pi(U)$  offen.

Weiter müssen wir zeigen, dass  $P^n\mathbb{R}$  hausdorff'sch ist. Anschaulich heißt das, um zwei „Geraden“  $[x]$  und  $[y]$  je einen offenen „Kegel“ zu finden, welche disjunkt sind. Wir zeigen dies über das Lemma 2 des Blattes „Einige Grundbegriffe der Topologie“, wozu wir zeigen müssen:  $R := \{(x, y) \in X \times X \mid x \sim y\}$  ist abgeschlossen.

Die Idee ist, auf  $X \times X \subset \mathbb{R}^{n+1} \times \mathbb{R}^{n+1}$  die reelle Funktion  $f$  zu betrachten:

$$f(x, y) = f(x^1, \dots, x^{n+1}, y^1, \dots, y^{n+1}) := \sum_{i \neq j} |x^i y^j - x^j y^i|$$

$f$  ist stetig und  $f(x, y) = 0 \iff y = tx$  für ein  $t \neq 0 \iff x \sim y$ . Also ist  $R = f^{-1}(\{0\})$ . Da  $f$  stetig ist, ist das Urbild einer abgeschlossenen Menge abgeschlossen, also ist  $R$  abgeschlossen. Damit ist gezeigt, dass  $X / \sim$  hausdorff'sch ist.

Also ist  $P^n\mathbb{R}$  ein topologischer Raum mit den gewünschten Eigenschaften. Es bleibt zu zeigen, dass für diese Menge ein vollständiger Atlas existiert.

Wir definieren also  $n+1$  Karten  $(U_i, \varphi_i)$  ( $i = 1, \dots, n+1$ ). Es ist  $\bar{U}_i := \{x \in X \mid x^i \neq 0\}$  und  $U_i := \pi(\bar{U}_i) \subset P^n\mathbb{R}$ . Damit ist  $P^n\mathbb{R}$  abgedeckt ( $\bigcup_{i=1, \dots, n+1} U_i = P^n\mathbb{R}$ ). Weiter ist:

$$\begin{aligned} U_i &\rightarrow \mathbb{R}^n \\ \varphi_i : [x] &\mapsto \left( \frac{x^1}{x^i}, \dots, \frac{x^{i-1}}{x^i}, \frac{x^{i+1}}{x^i}, \dots, \frac{x^n}{x^i} \right) \end{aligned}$$

Diese Definition ist representanten-unabhängig und injektiv:

$$\begin{aligned} \varphi_i([x]) = \varphi_i([y]) &\implies \frac{y^1}{y^i} = \frac{x^1}{x^i} =: t \\ &\implies y^1 = tx^1 \\ &\implies y = tx \\ &\implies [y] = [x] \end{aligned}$$

Auch ist  $\varphi_i$  stetig, und surjektiv:  $\varphi_i^{-1}(z^1, \dots, z^n) = \pi(z^1, \dots, z^{i-1}, 1, z^{i+1}, \dots, z^n)$ .

Die Koordinatenwechsel  $\varphi_j \circ \varphi_i^{-1}$  sind affin, also  $C^\infty$  (Übungsaufgabe).

Diese Karten lassen sich zu einem vollständigen Atlas für  $P^n\mathbb{R}$  erweitern, also liegt eine differenzierbare Mannigfaltigkeit vor.

## 1. Mannigfaltigkeiten

- (4b)  $P^n\mathbb{C}$  ist eine  $2n$ -dimensionale differenzierbare Mannigfaltigkeit, was sich ähnlich zeigen lässt. Die doppelte Dimension kommt von der 2-dimensionalität von  $\mathbb{C}$ .
- (5) Wir wollen aus gegebenen Mannigfaltigkeiten neue Mannigfaltigkeiten erhalten.

Sei  $M$  eine differenzierbare Mannigfaltigkeit mit vollständigem Atlas  $\mathcal{A}$ . Sei  $\mathcal{A}'$  die Menge aller Koordinatensysteme mit Definitionsbereich in einer offenen Teilmenge  $O \subset M$ .  $\mathcal{A}'$  ist ein Atlas für  $O$ . Die entsprechende differenzierbare Mannigfaltigkeit heißt offene Untermannigfaltigkeit.

### Beispiel

Die allgemeine lineare Gruppe

$$GL_n\mathbb{R} := \{A \in \mathbb{R}^{n \times n} \mid \det A \neq 0\}$$

ist eine  $n^2$ -dimensionale differenzierbare Mannigfaltigkeit:  $\mathbb{R}^{n \times n} = \mathbb{R}^{n^2}$  ist eine  $n^2$ -dimensionale Mannigfaltigkeit und  $GL_n\mathbb{R} = \mathbb{R}^{n \times n} \setminus \{\det A = 0\}$  ist offen, da die Determinantenfunktion stetig ist, also  $\{\det A = 0\}$  abgeschlossen ist.

- (6) Die Produkt-Mannigfaltigkeit: Sind  $M^m$  und  $N^n$   $m$ - bzw.  $n$ -dimensionale Mannigfaltigkeiten, so ist das topologische Produkt  $M \times N$  eine  $(n+m)$ -dimensionale Mannigfaltigkeit. Der Atlas besteht aus den Karten  $\varphi \times \psi : U \times V \rightarrow \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n = \mathbb{R}^{n+m}$  für Karten  $(U, \varphi)$  von  $M$  und  $(V, \psi)$  von  $N$ .

### Beispiel

( $S^1$  ist der Einheitskreis im  $\mathbb{R}^2$ )

$$\begin{aligned} \mathbb{R}^n &= \underbrace{\mathbb{R} \times \cdots \times \mathbb{R}}_{n \text{ Faktoren}} \\ \mathbb{T}^n &= \underbrace{S^1 \times \cdots \times S^1}_{n \text{-dimensionaler Torus}} \end{aligned}$$

- (7) Eine Lie-Gruppe  $G$  ist eine Gruppe die zugleich eine Mannigfaltigkeitsstruktur besitzt und zwar so, dass die Gruppenoperationen  $i$  und  $m$  differenzierbare Abbildungen (siehe nächster Abschnitt) sind.

$$\begin{aligned} m : G \times G &\rightarrow G, & m(g_1, g_2) &= g_1 g_2 \\ i : G &\rightarrow G, & i(g) &= g^{-1} \end{aligned}$$

### Beispiele

- (i) Die eindimensionalen Gruppen  $GL_n\mathbb{R}$ ,  $GL_1\mathbb{R} = (\mathbb{R} \setminus \{0\}, \cdot)$  und  $(\mathbb{R}^+, \cdot)$
- (ii) Die null-dimensionale Gruppe  $(\mathbb{Z}, +)$ .
- (iii) Die spezielle Orthogonale Gruppe

$$SO(2) := \left\{ \begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ -\sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \mid \theta \in [0, 2\pi) \right\}$$

welche homöomorph zu  $S^1$  ist.

- (iv) Die spezielle unitäre Gruppe

$$SU(2) := \left\{ \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ -\bar{\beta} & \bar{\alpha} \end{pmatrix} \mid \alpha, \beta \in \mathbb{C}, \alpha\bar{\alpha} + \beta\bar{\beta} = 1 \right\}$$

welche homöomorph zu  $S^3$  ist.

## 1.2. Differenzierbare Abbildungen

### Definition (differenzierbare Abbildung)

Eine Abbildung  $f : M^m \rightarrow N^n$  zwischen differenzierbaren Mannigfaltigkeiten heißt differenzierbar (oder glatt) im Punkt  $p \in M$  falls für eine (und damit jede) Karte  $\varphi : U \rightarrow U' = \varphi(U) \subset \mathbb{R}^m$  um  $p$  und  $\psi : V \rightarrow V' = \psi(V) \subset \mathbb{R}^n$  mit  $f(U) \subset V$  die Darstellung von  $f$  in lokalen Koordinaten  $\psi \circ f \circ \varphi^{-1} : U' \rightarrow V'$  glatt (oder  $C^\infty$ ) ist.

Die Unabhängigkeit der Aussage von der Wahl der Karte folgt aus der Definition des Atlases. Seien  $\tilde{\varphi}$  und  $\tilde{\psi}$  andere Karten um  $p$  bzw.  $f(p)$ .

$$\begin{aligned} \tilde{\psi} \circ f \circ \tilde{\varphi}^{-1} &= \tilde{\psi} \circ (\psi^{-1} \circ \psi) \circ f \circ (\varphi^{-1} \circ \varphi) \circ \tilde{\varphi}^{-1} \\ &= \underbrace{(\tilde{\psi} \circ \psi^{-1})}_{C^\infty, \text{ da Kartenwechsel}} \circ \psi \circ f \circ \varphi^{-1} \circ \underbrace{(\varphi \circ \tilde{\varphi}^{-1})}_{C^\infty, \text{ da Kartenwechsel}} \end{aligned}$$

Also  $\tilde{\psi} \circ f \circ \tilde{\varphi}^{-1}$  ist  $C^\infty \iff \psi \circ f \circ \varphi^{-1}$  ist  $C^\infty$ .

Spezialfälle sind:

- Falls  $n = 1$  heißt  $f : M \rightarrow \mathbb{R}$  differenzierbare Funktion
- Falls  $m = 1$  heißt  $f : \mathbb{R} \rightarrow N$  heißt differenzierbare Kurve

### Definition

$C^\infty(M)$  ist die Menge aller  $C^\infty$ -Funktionen auf einer differenzierbaren Mannigfaltigkeit  $M$ .

**Bemerkung:**  $C^\infty(M)$  ist eine  $\mathbb{R}$ -Algebra bezüglich Addition, Multiplikation, skalare Multiplikation: ( $p \in M, \lambda \in \mathbb{R}$ )

$$\begin{aligned} (f + g)(p) &:= f(p) + g(p) \\ (f \cdot g)(p) &:= f(p) \cdot g(p) \\ (\lambda f)(p) &:= \lambda f(p) \end{aligned}$$

### Definition (Diffeomorphismus)

Eine differenzierbare Abbildung  $f : M \rightarrow N$  heißt Diffeomorphismus falls  $f$  bijektiv und  $f$  sowie  $f^{-1}$  glatt sind.

### Beispiele

- (1) Identität auf  $M$
- (2) Kartenwechsel

Die Menge  $\text{Diff}(M)$  aller (Selbst-)Diffeomorphismen von  $M$  bilden eine Gruppe.

☠ Ein differenzierbarer Homöomorphismus ist im allgemeinen **kein** Diffeomorphismus! So ist etwa  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto x^3$  ein differenzierbarer Homöomorphismus, aber  $f^{-1} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto \sqrt[3]{x}$  ist zwar stetig aber nicht glatt.

### 1.3. Tangentialvektoren und -räume

#### Erinnerung

$v \in T_p \mathbb{R}^n = \{p\} \times \mathbb{R}^n$  und  $f : U(p) \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  sei  $C^\infty$ . Dann ist die Richtungsableitung von  $f$  in Richtung  $v$ :

$$\partial_v f := \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(p + tv) - f(p)}{t} = \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} f(p + tv)$$

Für  $v = e_i$  erhält man die  $i$ -te partielle Ableitung

$$\frac{\partial f}{\partial x^i} = \partial_{e_i} f$$

Es gilt:  $(a, b \in \mathbb{R}, f, g \in C^\infty(\mathbb{R}^n))$

$$\begin{aligned} \partial_v(af + bg) &= a\partial_v f + b\partial_v g \\ \partial_v(f \cdot g) &= f(p) \cdot \partial_v g + g(p) \cdot \partial_v f \end{aligned}$$

#### Definition (Funktionskeim)

Zwei Funktionen  $f, g : M \rightarrow \mathbb{R}$ , die auf offenen Umgebungen von  $p \in M$  differenzierbar sind, heißen äquivalent, falls sie auf einer Umgebung übereinstimmen. Die Äquivalenzklassen heißen Funktionskeime in  $p \in M$ . Die Menge aller Funktionskeime in  $p$  schreiben wir als  $C^\infty(p)$ .

#### Definition (Tangentialvektor)

Sei  $M$  eine differenzierbare Mannigfaltigkeit und  $p \in M$ . Ein Tangentialvektor an  $M$  in  $p$  ist eine Funktion  $v : C^\infty(p) \rightarrow \mathbb{R}$  so dass gilt:  $(a, b \in \mathbb{R}, f, g \in C^\infty(p))$

(T1)  $v$  ist  $\mathbb{R}$ -linear:  $v(af + bg) = av(f) + bv(g)$

(T2) Leibniz-Regel:  $v(fg) = v(f)g(p) + f(p)v(g)$

Sei  $T_p M$  die Menge aller Tangentialvektoren von  $M$  im Punkt  $p$

#### Beispiel

$$v(f) := 0$$

Wie rechnet man mit Funktionskeimen? Praktisch genügt es mit Repräsentanten, also in  $p$  differenzierbaren Funktionen zu rechnen.

#### Lemma 1.1

- a)  $v : C^\infty(p) \rightarrow \mathbb{R}$  erfülle (T1) und (T2) für Funktionen, die in  $p$  differenzierbar sind. Falls  $f$  und  $g$  in einer Umgebung von  $p$  übereinstimmen (d.h.  $f \sim g \iff [f] = [g]$ ) so ist  $v(f) = v(g)$ . Also insbesondere:  $\tilde{v}([f]) := v(f)$ .
- b) Falls  $h$  in einer Umgebung von  $p$  konstant ist, so ist  $v(h) = 0$ .

#### Beweis

- a) Da  $v$  linear ist, genügt es zu zeigen: Falls  $f = 0$  in einer Umgebung  $U$  von  $p$ , so ist  $v(f) = 0$ . Dazu betrachte die „Abschneidefunktion“  $\tilde{g}$  mit

- (1) Träger von  $\tilde{g} := \{q \in M \mid \tilde{g}(q) \neq 0\} \subset U$
- (2)  $0 \leq \tilde{g} \leq 1$  auf  $M$
- (3)  $\tilde{g} = 1$  in einer Umgebung  $V$  von  $p$ ,  $V \subset U$ .

Es ist dann  $f\tilde{g} = 0$  auf  $M$ . Nun folgt aus den Axiomen (T1) und (T2) dass wegen  $v(0) = v(0 + 0) = v(0) + v(0)$  gilt:  $v(0) = 0$ . Somit ist

$$0 = v(0) = v(f\tilde{g}) \stackrel{(T2)}{=} v(f) \underbrace{\tilde{g}(p)}_{=1} + \underbrace{f(p)}_{=0} v(\tilde{g}) = v(f).$$

- b) Nach a) können wir annehmen dass  $h$  konstant  $c$  auf  $M$  ist. Es ist dann  $v(h) = v(c \cdot 1) = c \cdot v(1)$ . Aus  $v(1) = v(1 \cdot 1) = v(1) \cdot 1 + 1 \cdot v(1)$  folgt  $v(1) = 0$  und damit die Behauptung. ■

$T_p M$  ist ein  $\mathbb{R}$ -Vektorraum: ( $v, w \in T_p M$ ,  $f \in C^\infty(p)$ ,  $a \in \mathbb{R}$ )

$$\begin{aligned} (v + w)(f) &:= v(f) + w(f) \\ (a \cdot v)(f) &:= a \cdot v(f) \end{aligned}$$

Weitere Beispiele von Tangentialvektoren via Karten:

Sei  $\varphi = (x^1, \dots, x^n)$  ein Koordinatensystem (eine Karte) von  $M$  im Punkt  $p$ . (d.h.  $x^i = u^i \circ \varphi$ ). Für  $f \in C^\infty(p)$  setze:

$$\frac{\partial f}{\partial x^i}(p) := \frac{\partial(f \circ \varphi^{-1})}{\partial u^i}(\varphi(p))$$

Eine direkte Rechnung zeigt:

$$\left. \frac{\partial}{\partial x^i} \right|_p : C^\infty p \rightarrow \mathbb{R} \quad f \mapsto \left. \frac{\partial}{\partial x^i} \right|_p (f) := \frac{\partial f}{\partial x^i}(p)$$

ist ein Tangentialvektor in  $p$ .

### Satz 1.1 (Basis-Satz)

Sei  $M$  eine  $m$ -dimensionale differenzierbare Mannigfaltigkeit und  $\varphi = (x^1, \dots, x^n)$  eine Karte um  $p \in M$ . Dann bilden die Tangentialvektoren  $\left. \frac{\partial}{\partial x^i} \right|_p$ ,  $i = 1, \dots, n$ , eine Basis von  $T_p M$  und es gilt für alle  $v \in T_p M$ :

$$v = \sum_{i=1}^m v(x^i) \left. \frac{\partial}{\partial x^i} \right|_p$$

Insbesondere ist  $\dim T_p M = m = \dim M$ .

Für diesen Satz benötigen wir noch das

**Lemma 1.2 (Analysis)**

Sei  $g$  eine  $C^\infty$ -Funktion in einer bezüglich  $o$  sternförmigen offenen Umgebung von  $o \in \mathbb{R}^n$ . Dann gilt:  $g = g(0) + \sum_{j=1}^n u^j g_j$  für  $C^\infty$ -Funktionen  $g_j$ ,  $j = 1, \dots, n$ .

**Beweis (Lemma 1.2)**

Taylorintegralformel:

$$g(u) - g(0) = \int_0^1 \frac{d}{dt} g(tu) dt = \sum_{j=1}^n u^j \int_0^1 \frac{\partial g}{\partial u^j}(tu) dt$$

■

**Beweis (Satz 1.1)**

- (a)  $\frac{\partial}{\partial x^i} \Big|_p$  ist ein Tangentialvektor in  $p$ . (Rechnung hier ausgelassen) und für die  $k$ -te Koordinatensystem  $x^k := u^k \circ \varphi$  gilt:

$$\frac{\partial}{\partial x^i} \Big|_p (x^k) = \frac{\partial (x^k \circ \varphi^{-1})}{\partial u^i}(\varphi(p)) = \frac{\partial u^k}{\partial u^i}(\varphi(p)) = \delta_{ik}.$$

- (b) Die Vektoren  $\frac{\partial}{\partial x^i} \Big|_p$ ,  $i = 1, \dots, n$ , sind linear unabhängig: Sei

$$\sum_{i=1}^m \lambda_i \frac{\partial}{\partial x^i} \Big|_p = 0 \quad (\lambda_i \in \mathbb{R})$$

Dann ist für  $k = 1, \dots, m$ :

$$0 = 0(x^k) = \sum_{i=1}^m \lambda_i \underbrace{\frac{\partial}{\partial x^i} \Big|_p (x^k)}_{\delta_{ik}} = \lambda_k$$

- (c) Die Vektoren  $\frac{\partial}{\partial x^i} \Big|_p$ ,  $i = 1, \dots, n$ , bilden ein Erzeugendensystem. Ohne Einschränkung gelte  $\varphi(p) = 0$  ((\*)). Sei  $v \in T_p M$  und  $a_k := v(x^k)$ ,  $k = 1, \dots, m$ . Setze

$$w := v - \sum_{k=1}^m a_k \frac{\partial}{\partial x^k} \Big|_p \in T_p M.$$

Dann ist für alle  $k = 1, \dots, m$ :

$$w(x^k) = v(x^k) - \sum_{i=1}^m a_i \frac{\partial}{\partial x^i} \Big|_p (x^k) = a_k - \sum_{i=1}^m a_i \delta_{ik} = 0 \quad (**)$$

Nun wollen wir zeigen:  $w = 0$ , d.h.  $w(f) = 0$  für alle  $f \in C^\infty(p)$ . Sei  $f \in C^\infty(p)$ . Dann

ist  $g := f \circ \varphi^{-1} \in C^\infty(\varphi(p))$ .

$$\begin{aligned}
 w(f) &= w(f \circ \varphi^{-1} \circ \varphi) \\
 &= w(g \circ \varphi) \\
 &\stackrel{\text{Lemma 1.2}}{=} w(g(0) + \sum_{j=1}^m (u^j \circ \varphi) \cdot (g_j \circ \varphi)) \\
 &\stackrel{(\text{T1}), (\text{T2})}{=} 0 + \sum_{j=1}^m \underbrace{w(x^j)}_{\stackrel{(**)}{=} 0} \cdot (g_j \circ \varphi)(p) + \underbrace{x^j(p)}_{\stackrel{(*)}{=} 0} \cdot w(g_j \circ \varphi) \\
 &= 0
 \end{aligned}$$

■

## 1.4. Tangentialabbildungen

In diesem Abschnitt verwendete Notation:  $\Phi : M \rightarrow N$  differenzierbar,  $f \in C^\infty(M)$  oder  $f \in C^\infty(p)$ ,  $\varphi : U \rightarrow U'$  eine Karte.

Sei  $\Phi : M^m \rightarrow N^n$  eine differenzierbare Abbildung zwischen differenzierbaren Mannigfaltigkeiten. Das Ziel ist  $\Phi$  in jedem Punkt von  $p \in M$  durch lineare Abbildungen  $d\Phi_p : T_p M \rightarrow T_{\Phi(p)} N$  zu „approximieren“.

### Definition

Das Differential (oder die Tangentialabbildung) von  $\Phi$  in  $p$  ist:  $d\Phi_p : T_p M \rightarrow T_{\Phi(p)} N$  mit  $d\Phi_p(v) : C^\infty(\Phi(p)) \rightarrow \mathbb{R}$  gegeben durch

$$d\Phi_p(v)(f) := v(f \circ \Phi).$$

Nun ist zu zeigen dass  $d\Phi_p(v) \in T_{\Phi(p)} N$ :

(T1)

$$\begin{aligned}
 d\Phi_p(v)(a \cdot f + b \cdot g) &= v((a \cdot f + b \cdot g) \circ \Phi) \\
 &= v(a \cdot f \circ \Phi + b \cdot g \circ \Phi) \\
 &= a \cdot v(f \circ \Phi) + b \cdot v(g \circ \Phi) \\
 &= a \cdot d\Phi_p(v)(f) + b \cdot d\Phi_p(v)(g)
 \end{aligned}$$

(T2)

$$\begin{aligned}
 d\Phi_p(v)(fg) &= v((fg) \circ \Phi) \\
 &= v((f \circ \Phi) \cdot (g \circ \Phi)) \\
 &= v(f \circ \Phi)(g \circ \Phi)(p) + v(g \circ \Phi)(f \circ \Phi)(p) \\
 &= d\Phi_p(v)(f) + \dots
 \end{aligned}$$

Beachte, dass aus der Definition direkt folgt: Ist  $\Phi = \text{id}_M : M \rightarrow M$ ,  $p \mapsto p$ , so gilt  $d\Phi_p(v) = d(\text{id})_p(v) = v$  für alle  $v \in T_p M$ .

**Lemma 1.3**

Sei  $\Phi \in C^\infty(M, N)$ ,  $\xi = (x^1, \dots, x^m)$  eine Karte um  $p \in M$  und  $\eta = (y^1, \dots, y^n)$  eine Karte um  $\Phi(p) \in N$ . Dann gilt:

$$d\Phi_p \left( \frac{\partial}{\partial x^j} \Big|_p \right) = \sum_{i=1}^n \frac{\partial(y^i \circ \Phi)}{\partial x^j}(p) \frac{\partial}{\partial y^i} \Big|_{\Phi(p)} \quad (*)$$

**Beweis**

Sei  $w \in T_{\Phi(p)}N$  die linke Seite von (\*). Dann gilt nach dem Basis-Satz (Satz 1.1) ist

$$w = \sum w(y^i) \frac{\partial}{\partial y^i} \Big|_{\Phi(p)}.$$

Nach der Definition des Differentials ist

$$w(y^i) = d\Phi_p \left( \frac{\partial}{\partial x^j} \Big|_p \right) (y^i) = \frac{\partial(y^i \circ \Phi)}{\partial x^j}(p).$$

■

**Definition**

Die Matrix

$$\left( \frac{\partial(y^j \circ \Phi)}{\partial x^i}(p) \right) = \left( \frac{\partial(y^j \circ \Phi \circ \xi^{-1})}{\partial u^i}(\xi(p)) \right) \quad (1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq m)$$

heißt Jacobi-Matrix von  $\Phi$  bezüglich  $\xi$  und  $\eta$ .

**Lemma 1.4 (Kettenregel)**

Falls  $\Phi \in C^\infty(M, N)$  und  $\Psi \in C^\infty(N, L)$ , so gilt

$$d(\Psi \circ \Phi)_p = d\Psi_{\Phi(p)} \circ d\Phi_p.$$

**Beweis**

Mit einer Testfunktion  $g$  überprüfen wir:

$$d(\Psi \circ \Phi)(v)(g) = v(g \circ \Psi \circ \Phi) = d\Phi(v)(g \circ \Psi) = d\Psi(d\Phi(v))(g)$$

■

**Bemerkung:** Falls  $\Phi : M \rightarrow N$  ein Diffeomorphismus ist, so folgt wegen

$$\text{id} = d(\text{id})_p = d(\Phi \circ \Phi^{-1})|_p \stackrel{\text{Lemma 1.4}}{=} d\Phi_p \circ d\Phi_{\Phi(p)}^{-1}$$

dass

$$(d\Phi_p)^{-1} = d\Phi_{\Phi(p)}^{-1}.$$

Das heißt insbesondere, dass  $d\Phi_p$  ein Vektorraum-Isomorphismus ist, und  $\dim M = \dim N$ .



**Satz 1.2 (Inverser Funktionensatz für Mannigfaltigkeiten)**

Ist  $\Phi \in C^\infty(M, N)$  und  $d\Phi_p : T_p M \rightarrow T_{\Phi(p)} N$  ein Vektorraum-Isomorphismus für ein Punkt  $p \in M$ , dann existiert eine Umgebung  $V$  von  $p$  und eine Umgebung  $W$  von  $\Phi(p)$  so dass  $\Phi|_V$  ein Diffeomorphismus von  $V$  auf  $\Phi(V) = W$  ist.  $\Phi|_V$  nennen wir einen lokalen Diffeomorphismus.

**Beweis**

Wähle eine Karte  $\xi$  um  $p \in M$  und eine Karte  $\eta$  um  $\Phi(p) \in N$ . Nach dem Satz über inverse Funktionen (Analysis II) ist  $\eta \circ \Phi \circ \xi^{-1}$  ein lokaler Diffeomorphismus (da  $d(\eta \circ \Phi \circ \xi^{-1}) = d\eta \circ d\Phi \circ (d\xi)^{-1}$ , was jeweils reguläre lineare Abbildungen sind). ■

**1.5. Tangentialvektoren an Kurven**

Die bisherige Herangehensweise an die Tangentialvektoren war sehr abstrakt, was Vor- und Nachteile hat. Ein weiterer Ansatz ist der Zugang über Kurven, den wir im Folgenden untersuchen.

Eine Kurve ist eine  $C^\infty$ -Abbildung  $c : I \rightarrow M$ , wobei  $I$  ein offenes Intervall in  $\mathbb{R}$  (meist mit  $0 \in I$ ) und  $M$  eine differenzierbare Mannigfaltigkeit ist.

Die erste (und einzige) Koordinatenfunktion der trivialen Karte von  $I \subset \mathbb{R}$  schreiben wir als  $u := u^1$ . Der Tangentialvektor ist dann  $\frac{d}{du}|_t := \frac{\partial}{\partial u^1}|_t \in T_t I = T_t \mathbb{R}$ .

**Definition**

Der Tangentialvektor an  $c$  in  $c(t)$  ist

$$c'(t) := dc_t \left( \frac{d}{du} \Big|_t \right) \in T_{c(t)} M.$$

Diese Tangentialvektoren haben interessante Eigenschaften:

- (1) Für  $f \in C^\infty(M)$  ist  $c'(t)(f) = \frac{d(f \circ c)}{dt}(t)$  (Richtungsableitung)
- (2) Falls  $v \in T_p M$  und  $c$  eine Kurve mit  $c(0) = p$  und  $c'(0) = v$ , dann gilt:

$$v(f) = \frac{d}{dt}(f \circ c)(0)$$

- (3) Ist  $c : I \rightarrow M$  eine glatte Kurve und  $\Phi : M \rightarrow N$  eine differenzierbare Abbildung, so ist  $\Phi \circ c : I \rightarrow N$  eine glatte Kurve in  $N$  und es gilt dass

$$d\Phi_{c(t)}(c'(t)) = (\Phi \circ c)'(t)$$

**Beweis**

$$d\Phi(c')(f) = c'(f \circ \Phi) = \frac{d}{du}(f \circ \Phi \circ c)(t) = (\Phi \circ c)'(t)(f)$$

## 1. Mannigfaltigkeiten

- (4) Ist  $\varphi$  eine Karte um  $p$  und  $c_i(t) : \varphi^{-1}(\varphi(p) + te_i)$ ,  $i = 1, \dots, n$  die  $i$ -te Koordinatenline um  $p$  bezüglich  $\varphi$ , so gilt

$$c'_i(0) = \frac{\partial}{\partial x^i} \Big|_p \quad (i = 1, \dots, n)$$

### Beweis

Sei  $f \in C^\infty(p)$ .

$$\begin{aligned} c_i(p)(f) &= \frac{d}{dt}(f \circ c_i)(0) \\ &= \frac{d}{dt}(f \circ \varphi^{-1}(\varphi(p) + te_i))(0) \\ &= \frac{\partial}{\partial u^i}(f \circ \varphi^{-1})(\varphi(p)) \\ &= \frac{\partial}{\partial x^i} \Big|_p (f) \end{aligned}$$

■

## 1.6. Untermannigfaltigkeiten und spezielle differenzierbare Abbildungen

Eine  $C^\infty$ -Abbildung  $\Phi : M^m \rightarrow N^n$  heißt

- Immersion, falls  $d\Phi_p : T_p M \rightarrow T_{\Phi(p)} N$  injektiv ist für alle  $p \in M$ .
- Submersion, falls  $d\Phi_p : T_p M \rightarrow T_{\Phi(p)} N$  surjektiv ist für alle  $p \in M$ .
- Einbettung,  $\Phi$  eine Immersion ist und  $M$  homöomorph zu  $\Phi(M) \subset N$  (versehen mit der Teilraum-Topologie) ist.

Eine Teilmenge  $M \subset N$  heißt (reguläre) Untermannigfaltigkeit, falls die Inklusionsabbildung  $i : M \hookrightarrow N$ ,  $i(p) := p$ , eine differenzierbare Einbettung ist.

Manchmal definiert man eine (allgemeine) Untermannigfaltigkeit als injektive Immersion  $\Phi : M \rightarrow N$ , so dass  $M$  und  $\Phi(M)$  diffeomorph sind. Dabei hat  $\Phi(M)$  nicht notwendigerweise die Teilraum-Topologie.

### Beispiele

- (1) Immersion:

$$\begin{aligned} \mathbb{R}^k &\rightarrow \mathbb{R}^{k+l} \\ (x^1, \dots, x^k) &\mapsto (x^1, \dots, x^k, 0, \dots, 0) \end{aligned}$$

Man kann zeigen: Lokal sieht jede Immersion so aus.

- (2) Submersion:

$$\begin{aligned} \mathbb{R}^{k+l} &\rightarrow \mathbb{R}^k \\ (x^1, \dots, x^{k+l}) &\mapsto (x^1, \dots, x^k) \end{aligned}$$

Auch hier kann man zeigen, dass jede Submersion lokal so aussieht.

- (3) Die Kurve  $c : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2, t \mapsto (t^3, t^2)$  ist differenzierbar, aber keine Immersion, denn

$$c'(0) = dc_0\left(\underbrace{\frac{d}{dt}}_{\neq 0}\right) = (0, 0).$$

- (4) Die Kurve  $c : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2, t \mapsto (t^3 - 4t, t^2 - 4)$  ist eine Immersion, aber keine Einbettung.

- (5)  $\mathbb{R}^2$  versehen mit der Äquivalenzrelation

$$(x, y) \sim (u, v) \iff \begin{aligned} x &\equiv u \pmod{2\pi\mathbb{Z}} \\ y &\equiv v \pmod{2\pi\mathbb{Z}} \end{aligned}$$

ergibt den zweidimensionalen Torus  $T^2 := \mathbb{R}^2 / \sim$ . Wir betrachten nun die Kurve  $c_\alpha : \mathbb{R} \rightarrow T^2, t \mapsto (e^{it}, e^{i\alpha t})$ .

**Satz (Kronecker)**

- $\alpha \in 2\pi\mathbb{Q} \implies c_\alpha(\mathbb{R})$  geschlossene Kurve.
- $\alpha \notin 2\pi\mathbb{Q} \implies c_\alpha(\mathbb{R})$  dicht in  $T^2$

**Beweis**

Siehe V.I. Arnold: Gewöhnliche Differenzialgleichungen ■

Daraus folgt: Für  $\alpha \notin 2\pi\mathbb{Q}$  ist  $c_\alpha$  eine injektive Immersion, aber keine Einbettung, da  $c_\alpha(\mathbb{R}) \subset T^2$  mit der Teilraumtopologie nicht homöomorph zu  $\mathbb{R}$  ist.

**Bemerkungen:** (1) Jede Immersion ist lokal eine Einbettung.

- (2) Einbettungs-Satz von Whitney (1936): Jede differenzierbare  $n$ -dimensionale Mannigfaltigkeit kann in  $\mathbb{R}^{2n+1}$  eingebettet werden:

$$\Phi : M^n \hookrightarrow \mathbb{R}^{2n+1}$$

(Beweis: L.Führer: Topologie)

## 1.7. Tangentialbündel und Vektorfelder

**Satz 1.3 (Tangentialbündel)**

Sei  $M$  eine  $n$ -dimensionale differenzierbare Mannigfaltigkeit und

$$TM := \bigcup_{p \in M} T_p M = \{(p, v) \mid p \in M, v \in T_p M\}.$$

$TM$  ist eine  $2n$ -dimensionale differenzierbare Mannigfaltigkeit.

$TM$  heißt Tangentialbündel und ist ein Spezialfall eines Vektorraumbündels. In der Physik entspricht dies dem Phasenraum (Ort, Geschwindigkeit).

**Beweis**

(Skizze) Sei  $(U_\alpha, \varphi_\alpha)_{\alpha \in A}$  ein Atlas für  $M$ . Ist  $\varphi_\alpha = (x_\alpha^1, \dots, x_\alpha^n)$ , so gilt nach Basis-Satz (Satz 1.1), dass  $\{\frac{\partial}{\partial x^i}|_p \mid i = 1, \dots, n\}$  eine Basis von  $T_p M$  für alle  $p \in U_\alpha$  ist. Für  $v \in T_p M$  gilt also  $v = \sum_{i=1}^n v(x^i) \frac{\partial}{\partial x^i}|_p$ .

Somit erhalten wir für jedes  $\alpha \in A$  eine bijektive Abbildung

$$h_\alpha : \begin{aligned} V_\alpha &:= TU_\alpha = \bigcup_{p \in U_\alpha} T_p M \rightarrow \mathbb{R}^{2n} \\ (p, v) &\mapsto (x^1(p), \dots, x^n(p), v(x^1), \dots, v(x^n)) \end{aligned}$$

Ohne Beweis:  $(V_\alpha, h_\alpha)_{\alpha \in A}$  ist ein differenzierbarer Atlas für  $TM$ . ■

**Definition**

Sei  $M$  eine differenzierbare Mannigfaltigkeit,  $TM$  das Tangentialbündel von  $M$  und  $\pi : TM \rightarrow M$ ,  $(p, v) \mapsto p$  die natürliche (oder kanonische) Projektion.

Ein Vektorfeld (VF) auf  $M$  ist eine Abbildung  $V : M \rightarrow TM$ ,  $p \mapsto v_p$  mit  $\pi \circ V = \text{id}_M$ , d.h.  $v_p \in T_p M$ .

Das Vektorfeld ist differenzierbar ( $C^\infty$ , glatt), falls  $V : M \rightarrow TM$  eine differenzierbare Abbildung ist. Äquivalent dazu: Für alle  $f \in C^\infty(M)$  ist  $Vf \in C^\infty(M)$  mit  $(Vf)(p) := v_p(f)$ .

Wir definieren für  $p \in M$  und  $f \in C^\infty(M)$ :

- $(f \cdot V)(p) := f(p)v_p$  sowie
- $(V + W)(p) := v_p + w_p$ .

Damit ist  $\mathcal{V}M$  (die Menge aller Vektorfelder auf  $M$ ) ein  $C^\infty(M)$ -Modul.

Die lokale Darstellung der Vektorfelder liefert uns Basisfelder: Sei  $\varphi = (x^1, \dots, x^n)$  für  $U \subset M$ . Dann ist für  $i = 1, \dots, n$

$$\frac{\partial}{\partial x^i} : \begin{aligned} U &\rightarrow TU \\ p &\mapsto \frac{\partial}{\partial x^i}|_p \end{aligned}$$

ein Vektorfeld auf  $U$ , nämlich das  $i$ -te Koordinaten-Vektorfeld von  $\varphi$  oder „begleitendes  $n$ -Bein“

Nach dem Basissatz (Satz 1.1) gilt: Jedes Vektorfeld  $V \in \mathcal{V}M$  kann auf  $U$  geschrieben werden als

$$V = \sum_{i=1}^n V(x^i) \frac{\partial}{\partial x^i}$$

**Definition**

Eine Derivation von  $C^\infty M$  ist eine Abbildung  $\mathcal{D} : C^\infty M \rightarrow C^\infty M$  mit

(D1)  $\mathcal{D}$  ist  $\mathbb{R}$ -linear:  $\mathcal{D}(af + bg) = a\mathcal{D}(f) + b\mathcal{D}(g)$

(D2) Leibnitz:  $\mathcal{D}(f \cdot g) = \mathcal{D}(f) \cdot g + f\mathcal{D}(g)$

Aus den Axiomen (T1), (T2) für Tangentialvektoren folgt, dass  $V \in \mathcal{V}M$  eine Derivation ist.

Umgekehrt gilt, dass Jede Derivation von einem Vektorfeld kommt: Sei  $\mathcal{D}$  eine Derivation. Definiere für jeden Punkt  $p \in M$ :  $v_p(f) := \mathcal{D}(f)(p)$ . Aus (D1), (D2) folgt:  $v_p \in T_p M$  und  $V : M \rightarrow TM$ ,  $p \mapsto v_p$  ist ein Vektorfeld.

Weiter gilt für alle  $p \in M$ :  $(Vf)(p) = v_p(f) = (\mathcal{D}f)(p)$ , also ist  $Vf = \mathcal{D}f$ , insbesondere ist  $V$  glatt. Also entspricht  $\mathcal{VM}$  den Derivationen auf  $C^\infty M$ .

Warum also führen wir Derivationen ein? Die entscheidende Eigenschaft ist dass das Produkt zwei Vektorfelder  $V$  und  $W$

$$(V \cdot W)(f) := V(Wf)$$

keine Derivation ist, da (D2) nicht erfüllt ist, also  $(V \cdot W)$  kein Vektorfeld ist!

Dies korrigieren wir mit der Lie-Klammer

$$[V, W] := V \cdot W - W \cdot V$$

welche eine Derivation liefert! Insbesondere ist also  $[V, W]$  wieder ein Vektorfeld.

Also

$$[\cdot, \cdot] : \begin{array}{l} \mathcal{VM} \times \mathcal{VM} \rightarrow \mathcal{VM} \\ (V, W) \mapsto [V, W] \end{array}$$

### Lemma 1.5

$\mathcal{VM}$  versehen mit der Lie-Klammer  $[\cdot, \cdot] : \mathcal{VM} \times \mathcal{VM} \rightarrow \mathcal{VM}$  ist eine Lie-Algebra.

### Definition

Eine reelle Lie-Algebra ist ein  $\mathbb{R}$ -Vektorraum  $L$  mit einer Verknüpfung  $[\cdot, \cdot] : L \times L \rightarrow L$  mit

(L1)  $\mathbb{R}$ -Linearität:  $[ax + by, z] = a[x, z] + b[y, z]$  sowie  $[x, ay + bz] = a[x, y] + b[x, z]$  für  $a, b \in \mathbb{R}$

(L2) Schiefsymmetrie:  $[x, y] = -[y, x]$

(L3) Jacobi-Identität:  $[[x, y], z] + [[z, x], y] + [[y, z], x] = 0$

## Vektorfelder und Differentialgleichungen

Sei  $V \in \mathcal{VM}$ . Eine Integralkurve von  $V$  ist eine differenzierbare Kurve  $\alpha : I \rightarrow M$  mit  $\alpha'(t) = V(\alpha(t))$  für alle  $t \in I$ .

In einem Koordinatensystem  $\varphi = (x^1, \dots, x^n)$  gilt:

$$\alpha'(t) = \sum_{i=1}^n \frac{d}{dt}(x^i \circ \alpha) \frac{\partial}{\partial x^i} \Big|_{\alpha(t)} \quad \text{sowie} \quad V(\alpha(t)) = \sum_{i=1}^n V(x^i \circ \alpha) \frac{\partial}{\partial x^i} \Big|_{\alpha(t)}$$

Also gilt für  $i = 1, \dots, n$

$$\alpha'(t) = V(\alpha(t)) \iff \frac{d}{dt}(x^i \circ \alpha) = V(x^i \circ \alpha)$$

Dies ist ein System von  $n$  gewöhnlichen Differentialgleichungen erster Ordnung. Aus Existenz- und Eindeutigkeitssätzen für solche Systeme (zum Beispiel Königsberger II, 4.2) folgt

**Satz 1.4 (Existenz und Eindeutigkeit der Integralkurven)**

Sei  $V \in \mathcal{VM}$ . Dann existiert für jeden Punkt  $p \in M$  ein Intervall  $I = I(p)$  um 0 und eine eindeutige Integralkurve  $\alpha : I \rightarrow M$  von  $V$  mit  $\alpha(0) = p$ .

**Korrolar**

Ist  $v \in T_p M$ , dann existiert eine differenzierbare Kurve  $\alpha : I \rightarrow M$  mit  $\alpha(0) = p$  und  $\alpha'(0) = v$ .

Beweisidee: Ergänze  $v$  zu einem Vektorfeld in einer Umgebung von  $p$  und wende Satz 1.4 an.

## 2. Riemann'sche Metriken

### 2.1. Definition einer Riemann'schen Metrik und Struktur

Eine Riemann'sche Metrik (oder Riemann'sche Struktur) auf einer differenzierbaren Mannigfaltigkeit  $M$  ist dadurch gegeben, dass jedem Punkt  $p \in M$  ein Skalarprodukt  $\langle \cdot, \cdot \rangle_p \equiv g_p(\cdot, \cdot)$  in  $T_p M$  zugeordnet wird.

Diese Zuordnung soll differenzierbar sein, das heißt für alle lokalen Koordinaten  $\phi : U \rightarrow \mathbb{R}^n$ ;  $q \mapsto (x^1(q), \dots, x^n(q))$  sind die Funktionen

$$g_{ij} : U \rightarrow \mathbb{R} \\ q \mapsto g_{ij}(q) := \left\langle \frac{\partial}{\partial x^i} \Big|_q, \frac{\partial}{\partial x^j} \Big|_q \right\rangle$$

$C^\infty$  für  $1 \leq i, j \leq n$ . Die  $(n \times n)$ -Matrix  $(g_{ij}(q))$  ist symmetrisch und positiv definit für alle  $q \in U$ .

Insbesondere gilt für  $v = \sum_{i=1}^n a_i \frac{\partial}{\partial x^i} \Big|_q$  und  $w = \sum_{j=1}^n b_j \frac{\partial}{\partial x^j} \Big|_q \in T_p M$ :

$$\langle v, w \rangle_q = \sum_{i,j=1}^n a_i b_j g_{ij}(q)$$

#### Definition

Eine Riemann'sche Mannigfaltigkeit ist ein Paar  $(M, g)$  (oder  $(M, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ ) bestehend aus einer differenzierbaren Mannigfaltigkeit  $M$  und einer Riemann'schen Struktur auf  $M$ .

**Bemerkung:** Ist  $g$  nicht positiv definit (d.h.  $g_p(v, v) \geq 0$  und  $g_p(v, v) = 0 \iff v = 0$ ), sondern nur semi-definit, so heißt  $g$  Pseudo-Riemann'sche Struktur. Zum Beispiel der  $\mathbb{R}^4$  versehen mit der Form  $x^2 + y^2 + z^2 - t^2$  modelliert die Minkowski-Raum-Zeit der speziellen Relativitätstheorie. Mehr dazu etwa in B. O'Neill: Semi-Riemannian Geometry.

Der Isometrie-Begriff auf Riemann'schen Mannigfaltigkeiten: Ein Diffeomorphismus  $\Phi : (M, \langle \cdot, \cdot \rangle) \rightarrow (N, \langle \cdot, \cdot \rangle)$  zwischen Riemann'schen Mannigfaltigkeiten heißt Isometrie falls für alle  $p \in M$  und alle  $v, w \in T_p M$  gilt:

$$\langle d\Phi_p(v), d\Phi_p(w) \rangle_{\Phi_p} = \langle v, w \rangle_p \quad (*)$$

Ein lokaler Diffeomorphismus  $\Phi : U \rightarrow V$  ( $U \subset M, V \subset N$ ) heißt lokale Isometrie falls  $(*)$  gilt für alle  $q \in U$  und alle  $v, w \in T_q M$ .

## 2.2. Beispiele und Konstruktionen

### 2.2.1. $n$ -dimensionaler Euklidischer Raum

$M = \mathbb{R}^n$  mit Atlas  $\{\text{id}\}$  ist eine Riemann'sche Struktur mit dem Standard-Skalarprodukt  $\langle \cdot, \cdot \rangle$ . Dabei ist  $g_{ij}(p) = \langle \frac{\partial}{\partial x^i} \big|_p, \frac{\partial}{\partial x^j} \big|_p \rangle = \langle e_i, e_j \rangle = \delta_{ij}$ , also ist  $(g_{ij}(p))$  die Einheitsmatrix.

### 2.2.2. $n$ -dimensionale hyperbolische Räume

$M = H^n := \{x = (x^1, \dots, x^n) \in \mathbb{R}^n \mid x^n > 0\}$ . Dies ist eine offene Teilmenge von  $\mathbb{R}^n$ , also eine offene Untermannigfaltigkeit.

Die Riemann'sche Metrik ist dann

$$g_{ij}(x) := \begin{cases} \frac{1}{(x^n)^2} & 1 \leq i = j \leq n \\ 0 & i \neq j \end{cases}$$

und die Matrix

$$(g_{ij}(x)) = \begin{pmatrix} \frac{1}{(x^n)^2} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \frac{1}{(x^n)^2} \end{pmatrix}$$

positiv definit und symmetrisch, also ist  $(H^n, g)$  eine Riemann'sche Mannigfaltigkeit und ist ein Modell für  $n$ -dimensionale hyperbolische Geometrien.

### 2.2.3. Konstruktion von neuen Riemann'schen Mannigfaltigkeiten aus gegebenen

Sei  $\Phi : M^m \rightarrow N^{n=m+k}$  sei eine Immersion. Weiter sei auf  $N$  eine Riemann'sche Struktur  $\langle \langle \cdot, \cdot \rangle \rangle$  gegeben. Diese induziert eine Riemann'sche Metrik  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  auf  $M$ :

Für  $p \in M$ ,  $u, v \in T_p M$  setze:  $\langle u, v \rangle_p := \langle \langle d\Phi_p u, d\Phi_p v \rangle \rangle_{\Phi(p)}$

Zu zeigen ist:  $\langle \cdot, \cdot \rangle_p$  ist symmetrisch, bilinear und positiv definit. Die Symmetrie und Bilinearität ist klar. Zu überprüfen: Ist  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  positiv definit? Es ist  $\langle u, u \rangle_p \geq 0$ . Ist  $0 = \langle u, u \rangle_p = \langle \langle d\Phi_p u, d\Phi_p u \rangle \rangle_{\Phi(p)}$ , so ist  $d\Phi_p u = 0 \xrightarrow{\Phi \text{ injektiv}} u = 0$

Die Abbildung  $\Phi : (M, \langle \cdot, \cdot \rangle) \rightarrow (N, \langle \langle \cdot, \cdot \rangle \rangle)$  heißt isometrische Immersion von  $M$  in  $N$ .

#### Beispiel

Flächen im  $\mathbb{R}^3$  mit Standardskalarprodukt, wobei  $\Phi = i : F \hookrightarrow \mathbb{R}^3$  die Inklusionsabbildung ist. Die so induzierte Riemann'sche Metrik auf  $F$  heißt die 1. Fundamentalform von  $F$ . Für  $u, v \in T_p F$  gilt dann:

$$\langle u, v \rangle := \langle di_p u, di_p v \rangle = \langle u, v \rangle$$

wobei das letzte Skalarprodukt das Standardskalarprodukt ist.

Analog kann man mit anderen Untermannigfaltigkeiten des  $(\mathbb{R}^m, \langle \cdot, \cdot \rangle)$  vorgehen. So kann man  $S^n = \{x \in \mathbb{R}^{n+1} \mid \|x\| = 1\} \subset \mathbb{R}^{n+1}$  mit der vom Standardskalarprodukt in  $\mathbb{R}^{n+1}$  induzierten Riemann'schen Metrik versehen. Diese heißt sphärische Geometrie.



**Bemerkung:** Die klassischen Geometrien (euklidische, hyperbolische, sphärische) sind Spezialfälle der Riemann'schen Geometrien.

### 2.2.4. Riemann'sche Produkte

Seien  $(M_1, \langle \cdot, \cdot \rangle^{(1)})$ ,  $(M_2, \langle \cdot, \cdot \rangle^{(2)})$  zwei Riemann'sche Mannigfaltigkeiten.  $M_1 \times M_2$  ist eine differenzierbare Mannigfaltigkeit. Weiter haben wir die zwei kanonischen Projektionen auf die Faktoren:

$$\begin{aligned} \pi_1 : M_1 \times M_2 &\rightarrow M_1 & \pi_2 : M_1 \times M_2 &\rightarrow M_2 \\ (m_1, m_2) &\mapsto m_1 & (m_1, m_2) &\mapsto m_2 \end{aligned}$$

#### Definition (Riemann'sche Produktmetrik)

Riemann'sche Produktmetrik auf  $M_1 \times M_2$  ist für alle  $u, v \in T_{(p,q)}(M_1 \times M_2)$  und für alle  $(p, q) \in M_1 \times M_2$ :

$$\begin{aligned} \langle u, v \rangle_{(p,q)} &:= \langle d\pi_{1(p,q)}u, d\pi_{1(p,q)}v \rangle^{(1)} \\ &\quad + \langle d\pi_{2(p,q)}u, d\pi_{2(p,q)}v \rangle^{(2)} \end{aligned}$$

$$(\text{Kurz: } \|u\|^2 = \langle u, u \rangle = \langle u_1, u_1 \rangle^{(1)} + \langle u_2, u_2 \rangle^{(2)} = \|u_1\|^2 + \|u_2\|^2)$$

$\langle \cdot, \cdot \rangle_{(p,q)}$  ist symmetrisch und positiv bilinear. Es ist auch positiv definit:

$$0 = \langle u, u \rangle \implies \left. \begin{aligned} d\pi_1 u &= 0 \\ d\pi_2 u &= 0 \end{aligned} \right\} \implies u = 0,$$

da  $u = d\pi_1 u \oplus d\pi_2 u$ .

#### Beispiele

$$(1) (\mathbb{R}^n, \langle \cdot, \cdot \rangle) = \prod_{i=1}^n (\mathbb{R}^1, \langle \cdot, \cdot \rangle). (a_1, \dots, a_n) = a \in T_x \mathbb{R}^n; \|a\|^2 = \sum_{i=1}^n a_i^2$$

(2) Flacher Torus:

$T^2 := S^1 \times S^1$ , wobei jeder Faktor  $S^1$  mit der kanonischen Riemann'schen Metrik, induziert von  $\mathbb{R}^2$ , versehen ist. Wir betrachten lokale Koordinaten  $(s, t)$ . Dann:

$$T_{(s,t)}(S^1 \times S^1) = \mathbb{R} \frac{\partial}{\partial s} \Big|_s \oplus \mathbb{R} \frac{\partial}{\partial t} \Big|_t$$

Sei nun  $u, v \in T_{(s,t)}(S^1 \times S^1)$  mit  $u = a \frac{\partial}{\partial s} + b \frac{\partial}{\partial t}$  und  $v = c \frac{\partial}{\partial s} + d \frac{\partial}{\partial t}$ . Das heißt:  $d\pi_1 u = a \frac{\partial}{\partial s}$  und  $d\pi_2 u = b \frac{\partial}{\partial t}$ . Ohne Einschränkung sei  $\langle \frac{\partial}{\partial s}, \frac{\partial}{\partial s} \rangle = 1$  und  $\langle \frac{\partial}{\partial t}, \frac{\partial}{\partial t} \rangle = 1$

Die Riemann'sche Produktmetrik auf  $T^2$  bezüglich lokalen Koordinaten  $(s, t)$ :

$$\begin{aligned} g_{11}(s, t) &= \left\langle d\pi_1 \left( \frac{\partial}{\partial s} + 0 \right), d\pi_1 \left( \frac{\partial}{\partial s} + 0 \right) \right\rangle + \left\langle d\pi_2 \left( \frac{\partial}{\partial s} + 0 \right), d\pi_2 \left( \frac{\partial}{\partial s} + 0 \right) \right\rangle \\ &= \left\langle \frac{\partial}{\partial s}, \frac{\partial}{\partial s} \right\rangle + \langle 0, 0 \rangle = 1 \end{aligned}$$

## 2. Riemann'sche Metriken

Analog:  $g_{22}(s, t) = \dots = \left\langle \frac{\partial}{\partial t}, \frac{\partial}{\partial t} \right\rangle = 1$

$$\begin{aligned} g_{12}(s, t) &= \left\langle d\pi_1\left(\frac{\partial}{\partial s} + 0\right), d\pi_1\left(\frac{\partial}{\partial t} + 0\right) \right\rangle + \left\langle d\pi_2\left(\frac{\partial}{\partial s} + 0\right), d\pi_2\left(\frac{\partial}{\partial t} + 0\right) \right\rangle \\ &= \left\langle \frac{\partial}{\partial s}, 0 \right\rangle + \left\langle 0, \frac{\partial}{\partial s} \right\rangle = 0 \end{aligned}$$

also ist

$$(g_{ij}(s, t)) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

das heißt:  $T^2$  mit Produktmetrik ist lokal isometrisch zur euklidischen Ebene.

☠  $T^2$  und  $\mathbb{R}^2$  sind nicht global isometrisch (sonst wären sie homöomorph, aber  $\mathbb{R}^2$  ist nicht kompakt, während  $T^2$  kompakt ist).

## 2.3. Existenz von Riemann'schen Metriken

### Satz 2.1 (Existenz der Riemann'schen Metrik)

Auf jeder  $n$ -dimensionalen differenzierbaren Mannigfaltigkeit existiert eine Riemann'sche Metrik.

### Beweis

Wir gehen in zwei Schritten vor:

#### 1. Schritt (lokale Konstruktion für Kartengebiete)

Gegeben eine Karte  $\varphi_\alpha : U_\alpha \rightarrow \mathbb{R}^n$ ,  $p \mapsto \varphi_\alpha(p) = (x_\alpha^1(p), \dots, x_\alpha^n(p))$ . Wir benötigen  $\frac{n(n+1)}{2}$   $C^\infty$ -Funktionen  $g_{ij} : U_\alpha \rightarrow \mathbb{R}$ , so dass die  $n \times n$ -Matrix  $(g_{ij}(q))$  positiv definit wird für alle  $q \in U_\alpha$ .

Eine Möglichkeit: Wähle Standardskalarprodukt  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  auf  $\varphi_\alpha(U_\alpha) \subset \mathbb{R}^n$ , das heißt  $\langle e_i, e_j \rangle = \delta_{ij}$  und setze für alle  $u, v \in T_q M$ ,  $q \in U_\alpha$ :

$$g_\alpha(u, v) := \langle d\varphi_\alpha|_q(u), d\varphi_\alpha|_q(v) \rangle_{\varphi_\alpha(q)},$$

das heißt  $\varphi_\alpha$  wird zu einer lokalen Isometrie gemacht.

Weil  $d\varphi_\alpha|_q\left(\frac{\partial}{\partial x^i}\Big|_q\right) = e_i$  für  $i = 1, \dots, n$  gilt, ist

$$g_{ij}^{(\alpha)}(q) = g_\alpha\left(\frac{\partial}{\partial x^i}\Big|_q, \frac{\partial}{\partial x^j}\Big|_q\right) = \langle e_i, e_j \rangle = \delta_{ij}.$$

#### 2. Schritt (Globale Konstruktion)

Wir nehmen ein Hilfsmittel aus der Differential-Topologie:

**Satz 2.2 („Zerlegung der Eins“)**

Sei  $M$  eine differenzierbare Mannigfaltigkeit (insbesondere Hausdorff'sch und es existiert eine abzählbare Basis) und  $(U_\alpha)_{\alpha \in A}$  eine (offene) Überdeckung von  $M$  von Karten.

Dann existiert eine lokal endliche Überdeckung  $(V_k)_{k \in I}$  und  $C^\infty$ -Funktionen  $f_k : M \rightarrow \mathbb{R}$  mit

- (1) Jedes  $V_k$  liegt in einem  $U_{\alpha=\alpha(k)}$ .
- (2)  $f_k \geq 0$  auf  $\bar{V}_k$  und  $f_k = 0$  auf dem Komplement von  $\bar{V}_k$ . (Das heißt: Der Träger von  $f_k$  ist eine Teilmenge von  $\bar{V}_k$ )
- (3)  $(\sum_{k \in I} f_k) = 1$  für alle  $p \in M$ . Diese Summe ist immer endlich, da die Überdeckung lokal endlich ist.

Lokal Endlich: Für jeden Punkt  $p \in M$  existiert eine Umgebung  $U = U(p)$  mit  $U \cap V_k \neq \emptyset$  für nur endlich viele  $k \in I$

**Beweis (von Satz 2.2)**

siehe zum Beispiel: Gromoll-Klingenberg-Meyer, „Riemann'sche Geometrie im Großen“. ■

Für die Konstruktion einer Riemann'schen Metrik auf  $M$  „verschmiert“ oder „glättet“ man jetzt alle im ersten Schritt konstruierten lokalen Riemann'schen Metriken  $g_k : g_\alpha|_{V_k}$  wie folgt:

Sei  $p \in M$  beliebig und  $u, v \in T_p M$ . Setze

$$\langle u, v \rangle_p := \sum_{k \in I} f_k(p) \cdot g_k(p)(u, v)$$

Diese Summe ist endlich, da  $f_k(p) \neq 0$  nur für endlich viele  $k$ .

Ist  $\langle \cdot, \cdot \rangle_p$  ein Skalarprodukt auf  $T_p M$ ?

- Symmetrie und Bilinearität sind klar.
- Positivität:

$$\langle u, u \rangle_p = \sum_{k \in I} \underbrace{f_k(p)}_{\geq 0} \underbrace{g_k(p)(u, u)}_{\geq 0} \geq 0.$$

- Definitheit: Sei  $\langle u, u \rangle_p = 0$ , dann ist für jedes  $k$   $f_k(p)g_k(p)(u, u) = 0$ . Wegen Punkt (3) von Satz 2.2 existiert mindestens ein  $k_0 \in I$ , so dass  $f_{k_0}(p) > 0$ . Daher ist  $g_{k_0}(p)(u, u) = 0$ , woraus  $u = 0$  folgt, da  $g_{k_0}$  positiv definit ist. ■

## 2.4. Anwendung: Länge von Kurven

Sei  $c : I \rightarrow M$  eine differenzierbare Kurve in einer Riemann'schen Mannigfaltigkeit  $M$ . Dann ist die Länge von  $c$

$$L(c) := \int_I \sqrt{\langle c'(t), c'(t) \rangle} dt = \int_I \|c'(t)\| dt$$

## 2. Riemann'sche Metriken

(Ein Spezialfall sind  $C^\infty$ -Kurven in  $\mathbb{R}^n$  versehen mit Standardskalarprodukt)

Die Länge ist unabhängig von der Parametrisierung der Kurve und invariant unter Isometrien  $\Phi : (M, \langle \cdot, \cdot \rangle_1) \rightarrow (N, \langle \cdot, \cdot \rangle_2)$ , also  $L(\Phi \circ c) = L(c)$ , da  $L(\Phi \circ c) = \int_I \|(\Phi \circ c)'\|_2 dt = \int_I \|d\Phi_{c(t)}c'(t)\|_2 dt \stackrel{\Phi \text{ iso.}}{=} \int_I \|c'\|_1 dt = L(c)$ .

### 3. Affine Zusammenhänge und Parallelverschiebung

#### 3.1. Motivation

In  $\mathbb{R}^n$  kann man Tangentialräume in verschiedenen Punkten vergleichen: Die Tangentialräume von  $x$  und  $y$  sind  $T_x\mathbb{R}^n = \{x\} \times \mathbb{R}^n \simeq \mathbb{R}^n$  und  $T_y\mathbb{R}^n \simeq \mathbb{R}^n$ . Es gibt dann eine Translation (Parallelverschiebung)  $T_{y-x} : T_x\mathbb{R}^n \rightarrow T_y\mathbb{R}^n$ ;  $(x, y) \mapsto (T_{y-x}(x), v)$ , wobei  $T_{y-x}(x) = x + (y - x) = y$ .

Die Situation für Mannigfaltigkeiten ist lokal die gleiche: Ist  $(U, \varphi)$  eine Karte, so gilt  $TU \simeq U \times \mathbb{R}^n$  (vergleiche Basis-Satz, Satz 1.1). Ist  $p, q \in U$ , so gilt:  $([\dots]$  affine Hülle)

$$T_p M = \left[ \frac{\partial}{\partial x^1} \Big|_p, \dots, \frac{\partial}{\partial x^n} \Big|_p \right] \text{ und } T_q M = \left[ \frac{\partial}{\partial x^1} \Big|_q, \dots, \frac{\partial}{\partial x^n} \Big|_q \right]$$

Die Parallelverschiebung  $T_p M \rightarrow T_q M$  bildet jetzt  $v = \sum a_i \frac{\partial}{\partial x^i} \Big|_p$  auf  $\bar{v} = \sum a_i \frac{\partial}{\partial x^i} \Big|_q$  ab.

Der globale Vergleich von Tangentialräumen erfordert jedoch eine Zusatzstruktur („Fernparallelismus“)

In der Flächentheorie realisiert man die Parallelverschiebung via Kovariante Ableitung: Ist  $c$  eine Flächenkurve der Fläche  $F$ , so ist  $\frac{D}{dt}c'$  die orthogonale Projektion von  $c''$  in die Tangentialebene  $T_{c(t)}F$ . Die Geodätischen in  $F$  (die „verallgemeinerten Geraden“) sind definiert als Lösungen von  $\frac{D}{dt}c' = 0$ .

#### 3.2. Affine Zusammenhänge

##### Definition (Affiner Zusammenhang)

Ein Affiner Zusammenhang  $D$  auf einer differenzierbaren Mannigfaltigkeit  $M$  ist eine Abbildung

$$D : \mathcal{V}M \times \mathcal{V}M \rightarrow \mathcal{V}M \\ (X, Y) \mapsto D_X Y$$

so dass für alle  $X, Y, Z \in \mathcal{V}M$  und  $f, g \in C^\infty M$  gilt:

$$(Z1) \quad D_{fX+gY}Z = fD_X Z + gD_Y Z$$

$$(Z2) \quad D_X(Y + Z) = D_X Y + D_X Z$$

$$(Z3) \quad D_X(fY) = fD_X Y + (Xf)Y$$

### 3. Affine Zusammenhänge und Parallelverschiebung

#### Beispiele

(1) Flächentheorie:  $D_X Y := Y'_T$

(2) In  $\mathbb{R}^n$ :  $X = \sum a_i \frac{\partial}{\partial x^i}$ ,  $\sum b_i \frac{\partial}{\partial x^i}$ ,  $D_X Y := \sum X(b_i) \frac{\partial}{\partial x^i}$

$D$  ist ein lokaler Begriff: Wähle Karte  $(U, \varphi)$  mit Basisfelder  $X_i = \frac{\partial}{\partial x^i}$ .  $X, Y \in \mathcal{V}U$ :  $X = \sum_{i=1}^n v^i X_i$ ,  $Y = \sum_{j=1}^n w^j X_j$ . Dann:

$$\begin{aligned} D_X Y &= D_{\sum_i v^i X_i} \left( \sum_j w^j X_j \right) \\ &\stackrel{(Z1)}{=} \sum_i v^i D_{X_i} \left( \sum_j w^j X_j \right) \\ &\stackrel{(Z2)}{=} \sum_i v^i \sum_j D_{X_i} (w^j X_j) \\ &\stackrel{(Z3)}{=} \sum_{i,j} v^i w^j D_{X_i} X_j + \sum_{i,j} v^i X_i (w^j) X_j \end{aligned}$$

wobei  $D_{X_i} X_j = \sum_{k=1}^n \Gamma_{ij}^k X_k$  (diese Darstellung existiert wegen dem Basissatz 1.1) für lokal definierte  $C^\infty$ -Funktionen  $\Gamma_{ij}^k : U \rightarrow \mathbb{R}$  (Christoffel-Symbole).

Wir haben also:

$$D_X Y = \sum_{k=1}^n \left( \sum_{i,j=1}^n v^i w^j \Gamma_{ij}^k + X(w^k) \right) X_k$$

Die Formel zeigt, dass  $D_X Y(p)$  bestimmt ist durch  $v^i(p)$ ,  $w^j(p)$  und  $X_p(w^k)$  (und  $\Gamma_{ij}^k$ ). Insbesondere braucht man das Vektorfeld  $Y$  (bzw.  $w^k$ ) nur „in Richtung  $X$ “ zu kennen.

Wir folgern: Man kann Vektorfelder längs einer Kurve in Richtung dieser Kurve ableiten: Falls  $Y$  ein Vektorfeld ist längs  $c$  (also  $Y(c(t)) = \sum_{i=1}^n w^i(t) X_i(c(t))$ ), dann ist

$$D_{c'} Y := \sum_{k=1}^n \left( \sum_{i,j} x^{i'}(t) w^j(t) \Gamma_{ij}^k(c(t)) + w^{k'}(t) \right)$$

(wobei  $\varphi \circ c(t) = (x^1(t), \dots, x^n(t))$  und damit  $c' = \sum x^{i'} X_i$ )

#### Definition

Ein Vektorfeld  $Y$  längs einer Kurve  $c$  heißt parallel bezüglich einem affinen Zusammenhang  $D$ , falls  $D_{c'} Y = 0$ .

#### Beispiele

(1) Im  $\mathbb{R}^n$  haben wir für ein paralleles Vektorfeld  $Y$ , dass  $D_{c'} Y = \sum_{j=1}^n w^{j'} X_j = \sum_{j=1}^n 0 X_j = 0$ , da bei Vektorfeldern in  $\mathbb{R}^n$  parallel und konstant gleichwertig ist.

(2) Ein Vektorfeld entlang eines Klein-Kreises der Sphäre ist nicht parallel. (Durch Skizze motiviert). Ein Vektorfeld entlang eines Groß-Kreises ist jedoch parallel, da  $c''$  orthogonal zum Groß-Kreis zum Mittelpunkt zeigt, die Projektion auf die Sphäre also 0 ist.

Später werden wir sehen, dass Geodätische (Kurven mit  $D_{c'} c' = 0$ ) Geraden verallgemeinert.

**Satz 3.1 (Eindeutigkeit der Parallelverschiebung)**

Sei  $M$  eine differenzierbare Mannigfaltigkeit mit affinem Zusammenhang  $D$ . Sei  $c : I = [a, b] \rightarrow M$  eine differenzierbare Kurve und  $v_o \in T_{c(a)}M$ . Dann existiert genau ein paralleles Vektorfeld  $V$  längs  $c$  mit  $V(c(a)) = v_o$ .

**Definition**

Der Vektor  $V(t)$  (aus Satz 3.1) heißt der längs  $c$  parallel verschobene Vektor  $V_0$ . Die Abbildung

$$c||_a^t : \begin{array}{ccc} T_{c(a)}M & \rightarrow & T_{c(t)}M \\ v_0 & \rightarrow & V(t) \end{array}$$

heißt Parallelverschiebung.

**Beweis**

Im ersten Schritt betrachten wir die Situation lokal. Sei  $t_1 \in I$ , so dass  $c([a, t_1]) \subset U$  (Kartengebiet um  $c(a)$ ). In der Karte  $(U, \varphi)$  ist die Definitionsgleichung  $D_{c'}V = 0$  äquivalent zu:

$$\sum_k \left( \frac{dv^k}{dt} + \sum_{i,j} \frac{dx^i}{dt} v^j \Gamma_{ij}^k \right) X_k = 0$$

wobei  $V = \sum_{i=1}^n v^i X_i$ ,  $X_i = \frac{\partial}{\partial x^i}$ ,  $\varphi \circ c(t) = (x^1(t), \dots, x^n(t))$ ,  $c'(t) = \sum_i \frac{dx^i}{dt}(t) X_i(c(t))$ . Das heißt wir haben ein System von  $n$  linearen Differentialgleichungen 1. Ordnung in  $v_k(t)$ :

$$0 = \frac{dv^k}{dt} + \sum_{i,j} \Gamma_{ij}^k \frac{dx^i}{dt} v^j, \quad k = 1, \dots, n$$

Dieses System hat zu gegebenen Anfangsbedingungen  $v(a) = v_0 = (v^1(a), \dots, v^n(a))$  genau eine Lösung für alle  $t \in [a, t_1]$ . Dann existiert eindeutig ein Parallelfeld  $V$  längs  $c([a, t_1])$  mit  $V(a) = v_0$ .

Im zweiten Schritt sei  $t_2 \in I$  beliebig. Das Segment  $c([a, t_2])$  ist kompakt in  $M$  und kann daher mit endlich vielen Karten überdeckt werden. In jeder Karte existiert ein  $V$  und ist eindeutig (nach Schritt 1). Daraus folgt, dass  $V$  global eindeutig existiert auf  $c([a, t_2])$  für beliebige  $t_2$ . ■

### 3.3. Der Levi-Civita-Zusammenhang

**Motivation:** Ein Parallelfeld im Euklidischen Raum  $(\mathbb{R}^n, \langle \cdot, \cdot \rangle)$  ist eine Isometrie.

**Definition**

Ein affiner Zusammenhang  $D$  auf einer Riemann'schen Mannigfaltigkeit  $(M, \langle \cdot, \cdot \rangle)$  heißt verträglich mit der Riemann'schen Struktur  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  falls für jede differenzierbare Kurve  $c : I \rightarrow M$  und jedes Paar von parallelen Vektorfeldern  $V_1, V_2$  längs  $c$  gilt:

$$\langle V_1(c(t)), V_2(c(t)) \rangle_{c(t)} \text{ ist für alle } t \in I \text{ konstant.}$$

Das heißt dass die Parallelverschiebung  $c||_{t_1}^{t_2} : T_{c(t_1)}M \rightarrow T_{c(t_2)}M$  eine lineare Isometrie ist.

**Satz 3.2 (Äquivalente Formulierung der Verträglichkeit)**

Sei  $(M, \langle \cdot, \cdot \rangle)$  eine Riemann'sche Mannigfaltigkeit. Ein affiner Zusammenhang  $D$  ist verträglich mit  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  genau dann, wenn für beliebige Vektorfelder  $V, W$  längs einer beliebigen Kurve  $c : I \rightarrow M$  für alle  $t \in I$  gilt:

$$\frac{d}{dt} \langle V(t), W(t) \rangle_{c(t)} = \langle D_{c'} V, W \rangle_{c(t)} + \langle V, D_{c'} W \rangle_{c(t)} \quad (*)$$

**Beweis**

$(*) \implies$  verträglich:  $V, W$  parallel ist äquivalent zu  $D_{c'} V = D_{c'} W = 0$ , also  $\frac{d}{dt} \langle V(t), W(t) \rangle_{c(t)} = 0$ , also verträglich.

Umgekehrt gilt: Sei  $D$  verträglich, wir haben also eine Parallelverschiebung, die Isometrie ist. Wähle eine Orthonormalbasis  $\{P_1(t_0), \dots, P_n(t_0)\}$  von  $T_{c(t_0)} M$ . Mittels der der Parallelverschiebung erhalten wir wieder für alle  $t \in I$  eine Orthonormalbasis  $\{P_1(t), \dots, P_n(t)\}$  von  $T_{c(t)} M$ . Wir können schreiben:

$$V(t) = \sum_{i=1}^n v_i(t) P_i(t) \quad \text{sowie} \quad W(t) = \sum_{i=1}^n w_i(t) P_i(t)$$

wobei  $v_i, w_i \in C^\infty$ . Also:

$$D_{c'} V = \sum_{i=1}^n \underbrace{c'(v_i)}_{v'_i} P_i + \sum_{i=1}^n v_i \underbrace{D_{c'} P_i}_{=0}$$

das heißt:  $D_{c'} V = \sum_{i=1}^n v'_i P_i$  und  $D_{c'} W = \sum_{i=1}^n w'_i P_i$ . Wir wollen zeigen, dass  $(*)$  gilt. Die rechte Seite ist:

$$\begin{aligned} \langle D_{c'} V, W \rangle + \langle V, D_{c'} W \rangle &= \left\langle \sum v'_i P_i, \sum w_j P_j \right\rangle + \left\langle \sum v_i P_i, \sum w'_j P_j \right\rangle \\ &= \sum_{i,j} (v'_i w_j \langle P_i, P_j \rangle + v_i w'_j \langle P_i, P_j \rangle) \\ &= \sum_{i,j} (v'_i w_j \delta_{ij} + v_i w'_j \delta_{ij}) \\ &= \sum_{i=1}^n (v'_i w_i + v_i w'_i) \\ &= \frac{d}{dt} \left( \sum_{i=1}^n v_i w_i \right) \end{aligned}$$

Die linke Seite ist:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \langle V, W \rangle &= \frac{d}{dt} \left\langle \sum_i v_i P_i, \sum_j w_j P_j \right\rangle \\ &= \frac{d}{dt} \left( \sum_{i,j} v_i w_j \langle P_i, P_j \rangle \right) \\ &= \frac{d}{dt} \left( \sum_{i=1}^n v_i w_i \right) \end{aligned}$$

■



Die Frage ist jetzt, ob zu einer gegebenen Riemann'schen Struktur ein verträglicher Zusammenhang existiert.

**Definition**

Ein affiner Zusammenhang  $D$  heißt symmetrisch (oder torsionsfrei) falls für alle  $X, Y \in \mathcal{VM}$ :

$$T(X, Y) := D_X Y - D_Y X - [X, Y] = 0$$

**Bemerkung:** In lokalen Koordinaten  $(U, \varphi)$  gilt für  $D$  symmetrisch und Basisfelder  $X_i = \frac{\partial}{\partial x^i}$ :

$$D_{X_i} X_j - D_{X_j} X_i = [X_i, X_j] = \left[ \frac{\partial}{\partial x^i}, \frac{\partial}{\partial x^j} \right] = 0$$

da  $\left[ \frac{\partial}{\partial x^i}, \frac{\partial}{\partial x^j} \right] f = \frac{\partial}{\partial x^i} \frac{\partial}{\partial x^j} f - \frac{\partial}{\partial x^j} \frac{\partial}{\partial x^i} f = 0$  wegen  $f \in C^\infty$  und Vertauschbarkeit der partiellen Ableitungen. Weiter gilt:

$$D_{X_i} X_j - D_{X_j} X_i = \sum_k \Gamma_{ij}^k X_k - \sum_k \Gamma_{ji}^k X_k = \sum_k (\Gamma_{ij}^k - \Gamma_{ji}^k) X_k \implies \Gamma_{ij}^k = \Gamma_{ji}^k$$

**Satz 3.3 (Levi-Civita-Zusammenhang)**

Auf jeder Riemann'schen Mannigfaltigkeit  $(M, \langle \cdot, \cdot \rangle)$  existiert genau ein affiner Zusammenhang  $D$ , so dass gilt:

- (1)  $D$  ist symmetrisch
- (2)  $D$  ist verträglich mit  $\langle \cdot, \cdot \rangle$

Dieser eindeutige Zusammenhang  $D$  heißt Levi-Civita-Zusammenhang von  $M$  bezüglich  $\langle \cdot, \cdot \rangle$ .

**Beweis**

Wir nehmen an, dass ein solches  $D$  existiert. Was sind die Eigenschaften?

$D$  verträglich:

$$X \langle Y, Z \rangle = \langle D_X Y, Z \rangle + \langle Y, D_X Z \rangle$$

Der Trick ist jetzt, die Gleichung zyklisch zu vertauschen:

$$\begin{aligned} Y \langle Z, X \rangle &= \langle D_Y Z, X \rangle + \langle Z, D_Y X \rangle \\ -Z \langle X, Y \rangle &= -\langle D_Z X, Y \rangle - \langle X, D_Z Y \rangle \end{aligned}$$

Summe der drei Gleichungen

$$X \langle Y, Z \rangle + Y \langle Z, X \rangle - Z \langle X, Y \rangle = \langle [X, Z], Y \rangle + \langle [X, Y], Z \rangle + 2 \langle Z, D_Y X \rangle + \langle [Y, Z], X \rangle$$

Wir erhalten die Kozul-Formel

$$\langle Z, D_Y X \rangle = \frac{1}{2} \left( X \langle Y, Z \rangle + Y \langle Z, X \rangle - Z \langle X, Y \rangle - \langle [X, Z], Y \rangle - \langle [X, Y], Z \rangle - \langle [Y, Z], X \rangle \right) \quad (*)$$

Diese Formel zeigt, dass  $D$  eindeutig durch die Riemann'sche Struktur  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  bestimmt ist, denn seien  $D$  und  $\tilde{D}$  zwei affine Zusammenhänge, die (1) und (2) erfüllen, dann gilt (\*) für beide, also  $\langle Z, D_Y X \rangle = \langle Z, \tilde{D}_Y X \rangle$  für alle  $X, Y, Z \in \mathcal{VM}$ , was heißt dass  $\langle D_Y X - \tilde{D}_Y X, Z \rangle = 0$ , was heißt dass  $D_Y X - \tilde{D}_Y X = 0$ . Also ist  $D = \tilde{D}$ .

Die Existenz folgt daraus, dass man  $D$  durch (\*) definieren kann. ■

### 3. Affine Zusammenhänge und Parallelverschiebung

**Lokale Form von  $D$**  Gegeben eine Karte  $(U, \varphi)$  mit Basisfelder  $X_i := \frac{\partial}{\partial x^i}$ ,  $i = 1, \dots, n$ , auf  $U$ . Wir haben  $g_{ij} = \langle X_i, X_j \rangle$ ,  $D_{X_i} X_j = \sum_{k=1}^n \Gamma_{ij}^k X_k$ ,  $[X_i, X_j] = 0$ . Kozulformel:

$$\langle X_k, D_{X_i} X_j \rangle = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial g_{ik}}{\partial x^j} + \frac{\partial g_{jk}}{\partial x^i} - \frac{\partial g_{ij}}{\partial x^k} + 0 \right) = \left\langle X_k, \sum_{l=1}^n \Gamma_{ij}^l X_l \right\rangle = \sum_{l=1}^n \Gamma_{ij}^l g_{kl}$$

$[g_{kl}]$  hat inverse Matrix  $[g^{mk}]$ . Damit

$$\Gamma_{ij}^m = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n g^{mk} \left( \frac{\partial g_{ik}}{\partial x^j} + \frac{\partial g_{jk}}{\partial x^i} - \frac{\partial g_{ij}}{\partial x^k} \right).$$

Dieser Ausdruck zeigt nochmals: Levi-Civita-Zusammenhang ist eindeutig durch die Metrik bestimmt.

#### Beispiel

Im Euklidischen Raum  $(\mathbb{R}^n, \text{Standardskalarprodukt})$  ist  $g_{ij} = \delta_{ij}$ , also  $\Gamma_{ij}^k = 0$ . Also: Der kanonische Zusammenhang ist der Levi-Civita-Zusammenhang.

## 4. Geodätische Linien

Gegeben ist eine Riemann'sche Mannigfaltigkeit  $(M, \langle \cdot, \cdot \rangle)$  mit Levi-Civita-Zusammenhang  $D$ . Das Ziel ist es, ein Analogon für Geraden zu finden. Mögliche Charakterisierung von Geraden in der Euklidischen Geometrie sind:

- kürzeste Verbindung zweier Punkte (Variationseigenschaft).
- Kurven  $c(t)$  (mit Bogenlänge parametrisiert) mit  $c''(t) = 0$  (Differentialgleichung).

### 4.1. Definition von Geodätischen

Eine Geodätische (Linie) in  $(M, \langle \cdot, \cdot \rangle)$  ist eine differenzierbare Kurve  $\gamma : I \rightarrow M$  so dass gilt:  $D_{\gamma'(t)}\gamma'(t) = 0$  für alle  $t \in I$ . (Das heißt: Geodätische sind autoparallele Vektorfelder).

Das Tangentialvektorfeld ist parallel.  $\gamma' = \frac{d\gamma}{dt} := d\gamma(\frac{\partial}{\partial t})$ .

Folgerungen aus der Definition:

- (1)  $\|\gamma'(t)\|_{\gamma(t)}$  ist konstant.

**Beweis**

$$\|\gamma'\|^2 = \langle \gamma', \gamma' \rangle. \text{ Also } \frac{d}{dt} \|\gamma'\|^2 = \frac{d}{dt} \langle \gamma', \gamma' \rangle = \langle D_{\gamma'}\gamma', \gamma' \rangle + \langle \gamma', D_{\gamma'}\gamma' \rangle = 0 \quad \blacksquare$$

Ein (entarteter) Spezialfall ist  $\gamma(t)$  konstant  $p \in M$ .

- (2) Eine Geodätische ist proportional zur Bogenlänge parametrisiert:

$$s(\gamma) := \int_a^t \|\gamma'(\tau)\| d\tau = k|t - a|$$

Ist  $k = 1$  so spricht man von einer normalen Geodätischen sowie von isometrischen Kopien von Intervallen.

- (3) Ob eine Kurve eine „Geodätische“ ist hängt von der Parametrisierung ab, nicht nur vom Bild  $\gamma(I) \subset M$ .

**Beispiel**

$\gamma_1(t) = (t, 0)$  ist eine Geodätische, aber  $\gamma_2(t) = (t^3, 0)$  nicht, da  $\|\gamma_2'\| = 3t^2$  nicht konstant ist.

### 4.2. Lokale Darstellung und Differentialgleichung für Geodätische

Sei  $\gamma : I \rightarrow M$  eine Geodätische in  $(M, \langle \cdot, \cdot \rangle)$  und  $(U, \varphi)$  eine Karte um  $\gamma(t_0)$  mit  $\varphi \circ \gamma(t) = (x^1(t), \dots, x^n(t))$ .

#### 4. Geodätische Linien

Dann ist  $\gamma'(t) = \sum_{i=1}^n x'_i(t) \frac{\partial}{\partial x^i} \Big|_{\gamma(t)}$ . Die allgemeine Formel für Parallelfelder im lokalen Koordinaten (vgl 3.2) ergibt:

$$0 = D_{\gamma'} \gamma' = \sum_{k=1}^n \left( x''^k + \sum_{i,j=1}^n \Gamma_{ij}^k x'^i x'^j \right) \frac{\partial}{\partial x^k}$$

lokal gilt also:  $D_{\gamma'} \gamma' = 0$  ist äquivalent zu dem System von  $n$  Differentialgleichung 2. Ordnung

$$x''^k(t) = - \sum_{i,j=1}^n \Gamma_{ij}^k(x(t)) x'^i(t) x'^j(t) \quad (1)$$

### 4.3. Das Geodätische Vektorfeld auf $TM$

Das System 2. Ordnung (1) ist äquivalent zu System 1. Ordnung:

$$\begin{aligned} x'^k &= y^k \\ y'^k &= - \sum_{i,j=1}^n \Gamma_{ij}^k(x(t)) y^i(t) y^j(t) \end{aligned} \quad (2)$$

Was ist die Interpretation der von  $y^i$  in der Mannigfaltigkeit? Die Geodätische  $t \mapsto \gamma(t)$  in  $M$  definiert differenzierbare Kurve  $t \mapsto (\gamma(t), \gamma'(t))$  in  $TM = \{(p, v) \mid p \in M, v \in T_p M\}$ . Lokale Koordinaten für  $TM$ : Sei  $(U, \varphi)$  eine Karte in  $M$ ,  $TU \cong U \times \mathbb{R}^n$  (nach Basissatz). Dies ergibt eine Darstellung von  $(p, v)$  als  $(x^1, \dots, x^n, y^1, \dots, y^n)$  mit  $v = \sum y^i \frac{\partial}{\partial x^i}$ . Speziell gilt  $(\gamma(t), \gamma'(t)) \rightarrow (x^1(t), \dots, x^n(t), x'^1(t), \dots, x'^n(t))$ .

#### Lemma 4.1

Es existiert genau ein Vektorfeld  $G \in \mathcal{V}(TM)$  auf  $TM$  dessen Integralkurven (vergleiche 1.7) von der Form  $\tilde{\gamma}(t) = (\gamma(t), \gamma'(t))$  sind, wobei  $\gamma(t)$  jeweils eine Geodätische in  $M$  ist.

#### Beweis

- (a) Eindeutigkeit (unter der Annahme der Existenz): Die Integralkurven von  $G$  auf  $TU$  sind nach Voraussetzung gegeben durch  $\tilde{\gamma}(t) = (\gamma(t), \gamma'(t))$ . Diese Kurve ist aber Lösung von (2), also zu gegebener Anfangsbedingung eindeutig:

$$\tilde{G}(\tilde{\gamma}(t)) = \tilde{\gamma}'(t) = G(\tilde{\gamma}(t))$$

- (b) Existenz: Wir definieren die Komponenten von  $G$  bezüglich Basisfelder lokal durch (2). Wegen (a) ist  $G$  auf ganz  $TM$  eindeutig. ■

#### Definition

$G$  heißt geodätisches Vektorfeld auf  $M$ . ( $G(p, v) \in T_{(p,v)}(TM) \subset T(TM)$ )

**Satz 4.1 (Lokale Integralkurve)**

Für jede Karte  $U$  und  $p \in M$  existiert ein offenes  $O \in TM$  mit  $(p, o) \in O$  eine Zahl  $\delta = \delta(p)$  und eine  $C^\infty$ -Abbildung  $f : (-\delta, \delta) \times O \rightarrow TU \subset TM$ , so dass  $t \mapsto f(t, (q, v))$  die eindeutige Integralkurve von  $G$  ist mit  $f(0, (q, v)) = (q, v)$  für alle  $(q, v) \in O$ .

**Beweis**

Nach 1.7 gilt lokal, dass Integralkurven von Vektorfeldern den Lösungen eines Systems von gewöhnlichen Differentialgleichung entspricht. Die Existenz und Eindeutigkeit im Satz 4.1 folgt dann aus dem entsprechenden Satz über Existenz und Eindeutigkeit von Lösungen eines Differentialgleichungssystems zu gegebenen Anfangsbedingungen.

Dass  $f$  differenzierbar ist folgt aus der Tatsache, dass Lösungen von Differentialgleichungen (gewöhnlich, 1. Ordnung) differenzierbar von den Anfangsbedingungen abhängen (vergleiche zum Beispiel Arnold, „Gewöhnliche Differentialgleichungen“, Gromoll-Klingenberg-Meyer, „Differentialgleichungen im Großen“, S.275)

Sei  $\pi : TM \rightarrow M; (q, v) \mapsto q$  die kanonische Projektion. Die offene Menge  $O \subset TM$  im Satz kann man wie folgt wählen: Es existiert ein  $V \subset U$  (offene Umgebung von  $p$ ) und  $\varepsilon_1 > 0$ , so dass  $O = \{(q, v) \in TU \cong U \times \mathbb{R}^n \mid q \in V, v \in T_q M, \|v\| < \varepsilon_1\}$  ■

Aus Satz 4.1 folgt dann:

**Satz 4.2 (Lokale Geodätische)**

Zu  $p \in M$  und einer Karte  $U$  um  $p$  existiert eine offene Menge  $V$  von  $p$ , Zahlen  $\delta = \delta(p) < 0$ ,  $\varepsilon_1 > 0$  und eine  $C^\infty$ -Abbildung  $\gamma := \pi \circ f : (-\delta, \delta) \times O \rightarrow M$  (mit  $O$  definiert wie oben), so dass die Kurve  $t \mapsto \gamma(t, q, v)$  die eindeutige Geodätische in  $M$  ist mit  $\gamma(0, q, v) = q$  und  $\gamma'(0) = v$ .

## 4.4. Die Exponential-Abbildung

**Lemma 4.2 (Homogenität von Geodätischen)**

Sei  $a \in \mathbb{R}$ ,  $a > 0$ . Falls die Geodätische  $\gamma(t, q, v)$  auf  $(-\delta, \delta)$  definiert ist, so ist die Geodätische  $\gamma(t, q, a \cdot v)$  auf  $(-\frac{\delta}{a}, \frac{\delta}{a})$  definiert und es gilt  $\gamma(t, q, a \cdot v) = \gamma(a \cdot t, q, v)$ .

**Beweis**

Betrachte die Kurve  $h : (-\frac{\delta}{a}, \frac{\delta}{a}) \rightarrow M; t \mapsto \gamma(at, q, v)$ . Es gilt:  $h(0) = \gamma(0, q, v) = q$  sowie  $h'(0) = \frac{d}{dt}\gamma(at, q, v)|_{t_0} = a\gamma'(0, q, v) = av$ . Weiter ist  $h'(t) = a\gamma'(at, q, v)$ , also  $D_{h'}h' = D_{a\gamma'}a\gamma' = a^2 D_{\gamma'}\gamma' = a^2 \cdot 0 = 0$ .

Das heißt:  $h$  ist eine Geodätische mit  $h(0) = q$ ,  $h'(0) = av$ . Aus der Eindeutigkeit von Geodätischen (Satz 4.2) folgt, dass  $\gamma(at, q, v) = h(t) = \gamma(t, q, av)$ . ■

#### 4. Geodätische Linien

Nach Satz 4.2 ist (für  $q \in V = V(p)$ )  $\gamma(t, q, v)$  definiert für  $|t| < \delta = \delta(p)$  und  $\|v\| < \varepsilon_1 = \varepsilon_1(p)$ . Mit Lemma 4.2 folgt jetzt, dass  $\gamma(t, q, \frac{\delta}{2}v)$  für  $|t| < 2$  definiert ist. Dann ist die Geodätische  $\gamma(t, q, w)$  definiert für  $q \in V$ ,  $|t| < 2$  und  $w \in T_q M$ ,  $\|w\| < \varepsilon$ . Damit ist gezeigt:

##### Satz 4.3

Für jeden Punkt  $p \in M$  existiert eine Umgebung  $V$  von  $p$ ,  $\varepsilon = \varepsilon(p) > 0$  und eine differenzierbare Abbildung:

$$\gamma : (-2, 2) \times \{(q, v) \in TM \mid q \in V, v \in T_q M, \|v\| < \varepsilon\}$$

so dass für ein festes  $(q, v)$  die Abbildung  $t \mapsto \gamma(t, q, v)$  die eindeutige Geodätische in  $M$  ist mit Anfangsbedingung  $\gamma(0, q, v) = q$ ,  $\gamma'(0, q, v) = v$ .

Sei  $p \in M$  und  $O$  wie in Satz 4.3.

##### Definition

Die Exponential-Abbildung (auf  $O$ ) ist:

$$\begin{aligned} \exp : O \subset TM &\rightarrow M \\ \exp(q, v) &:= \gamma(1, q, v) \\ &= \gamma(1, q, \|v\| \frac{v}{\|v\|}) \\ &= \gamma(\|v\|, q, \frac{v}{\|v\|}) \end{aligned}$$

**Bemerkungen:** (1)  $\exp$  ist differenzierbar, da  $\gamma$  differenzierbar ist (vergleiche Satz 4.2)

(2) Meistens benutzt man die Einschränkung von  $\exp$  auf *einen* Tangentialraum:

$$\exp_p := \exp(p, \cdot) : B_\varepsilon(0) (\subset TM) \rightarrow M$$

Wobei  $B_\varepsilon(0)$  ein offener Ball mit Radius  $\varepsilon$  und 0 ist.

##### Satz 4.4

Für jeden Punkt  $p$  einer  $n$ -dimensionalen differenzierbaren Riemann'schen Mannigfaltigkeit existiert ein  $r = r(p) > 0$ , so dass die Abbildung  $\exp_p : B_r(0) \subset T_p M \rightarrow \exp_p(B_r(0)) \subset M$  (mit  $B_r(0) := \{v \in T_p M \mid \|v\| < r\}$ ) ein Diffeomorphismus auf die offene Umgebung  $V := \exp_p(B_r(0))$  von  $p$  ist.

##### Beweis

Wir benutzen den Umkehrsatz für Mannigfaltigkeit (Satz 1.2). Zu zeigen ist:  $d \exp_p|_0 : T_p(B_r(0)) \cong T_p M \rightarrow T_{\exp_p(0)} M = T_p M$  ist ein Vektorraum-Isomorphismus.

Wähle dazu die Kurve  $c(t) = tv$  (mit  $c(0) = 0$ ,  $c'(0) = v$ ). Dann ist:  $d \exp_p|_0(v) = \frac{d}{dt}|_0(\exp_p \circ c)(t) = \frac{d}{dt}|_0 \exp_p(tv) = \frac{d}{dt}|_0 \gamma(1, p, tv) = \frac{d}{dt}|_0 \gamma(t, p, v) = v$ . Also ist  $d \exp_p|_0 = \text{id}$ , und damit ein Vektorraum-Isomorphismus. ■

**Definition**

Eine geodätische Normalumgebung von  $p \in M$  ist eine Umgebung  $U$  von  $p$ , so dass  $\exp_p : V \rightarrow U$  ein Diffeomorphismus ist.

$B_r(p) := \exp_p(B_r(0))$  heißt geodätischer Ball vom Radius  $r$ .

Die Koordinatenfunktionen der Karte  $\exp_p^{-1} : U = \exp_p(V) \rightarrow V \overset{\circ}{\subset} T_p M \cong \mathbb{R}^n$  heißen geodätische Normalkoordinaten.

**Beispiele**

- (1) Im  $\mathbb{R}^n$  mit Standardskalarprodukt sind die Geodätischen gerade die Geraden (mit Bogenlänge parametrisiert). Also, da  $T_p \mathbb{R}^n \cong \mathbb{R}^n$ ,  $\exp_0 : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  ist die Identität.
- (2) In  $M = S^n$  mit der von  $\mathbb{R}^{n+1}$  induzierten Metrik sind die Geodätischen die Großkreise (mit Bogenlänge parametrisiert, siehe 4.5). Durch Skizzen für die Fälle  $n = 1, 2$  motiviert:  $\exp_0$  ist ein Diffeomorphismus auf  $B_\pi(0)$ .
- (3) Der Name „Exponentialabbildung“ kommt aus der Lie-Theorie.  $G = U(1) \cong S^1$  sind die unitäre  $(1 \times 1)$ -Matrizen, dann steht der Tangentialraum am Punkt 1 senkrecht, also  $T_1 U(1) \cong i\mathbb{R}$ , und daher  $\exp_0(t) = e^t$ .
- (4) In der Lie-Gruppe  $G = (\mathbb{R}_{>0}, \cdot)$  ist  $T_1 \mathbb{R} \cong (\mathbb{R}, +)$ . Hier ist  $\exp_1(t) = e^t$ .
- (5)  $G = O(n) = \{A \in \mathbb{R}^{n \times n} \mid AA^t = E\}$ . Hier ist  $T_E O(n)$  die Menge der schiefsymmetrischen Matrizen. Für  $B \in T_E O(n)$  setze  $A := \exp(sB) := E + sB + \frac{s^2}{2}B^2 + \frac{s^3}{3!}B^3 + \dots$ . Es gilt:  $A \in O(n)$ .

**4.5. Minimaleigenschaft von Geodätischen**

Zur technischen Vorbereitung benötigen wir „Vektorfelder längs Flächen“. Sei  $A$  eine zusammenhängende Menge in  $\mathbb{R}^2$  mit stückweise differenzierbarem Rand und  $M$  sei eine differenzierbare Mannigfaltigkeit. Eine parametrisierte Fläche in  $M$  ist eine differenzierbare Abbildung  $f : A(\subset \mathbb{R}^2) \rightarrow M$ ;  $(u, v) \mapsto f(u, v)$ .

Ein Vektorfeld längs  $f$  ist eine differenzierbare Abbildung  $V : A \rightarrow TM$  mit  $V(u, v) \in T_{f(u, v)} M$ . Die Parameterlinien  $f(u, v_0)$  bzw.  $f(u_0, v)$  mit  $v_0$  bzw.  $u_0$  fest definieren die „Tangential-Vektorfelder“

$$\frac{\partial f}{\partial u}(u, v) := df|_{(u, v)} \left( \frac{\partial}{\partial u} \Big|_{(u, v)} \right) \quad \text{sowie} \quad \frac{\partial f}{\partial v}(u, v) := df|_{(u, v)} \left( \frac{\partial}{\partial v} \Big|_{(u, v)} \right)$$

Weiter definieren wir die kovariante Ableitung für ein Vektorfeld  $V$  längs  $f$  wie folgt:

$$\frac{DV}{\partial u}(u, v_0) := D_{\frac{\partial f}{\partial u}(u, v_0)} V(u, v_0) \quad \text{sowie} \quad \frac{DV}{\partial v}(u_0, v) := D_{\frac{\partial f}{\partial v}(u_0, v)} V(u_0, v)$$

**Lemma 4.3 (Symmetrie)**

Sei  $M$  ein differenzierbare Mannigfaltigkeit und  $D$  ein symmetrischer Zusammenhang auf  $M$ . Für eine parametrisierte Fläche  $f : A \rightarrow M$  gilt:

$$\frac{D}{\partial v} \left( \frac{\partial f}{\partial u} \right) = \frac{D}{\partial u} \left( \frac{\partial f}{\partial v} \right)$$

**Beweis**

In lokalen Koordinaten  $(U, \varphi)$  in der Umgebung eines Punktes von  $f(A) \subset M$  sei  $\varphi \circ f(u, v) = (x^1(u, v), \dots, x^n(u, v))$ . Es gilt:

$$\begin{aligned} \frac{D}{\partial v} \left( \frac{\partial f}{\partial u} \right) &= \frac{D}{\partial v} \left( \sum_{i=1}^n \frac{\partial x^i}{\partial u} \frac{\partial}{\partial x^i} \right) \\ &= \sum_{i=1}^n \frac{\partial^2 x^i}{\partial v \partial u} \frac{\partial}{\partial x^i} + \sum_{i=1}^n \frac{\partial x^i}{\partial u} D_{\sum_j \frac{\partial x^j}{\partial v} \frac{\partial}{\partial x^j}} \frac{\partial}{\partial x^i} \\ &= \sum_{i=1}^n \frac{\partial^2 x^i}{\partial v \partial u} \frac{\partial}{\partial x^i} + \sum_{i=1, j}^n \frac{\partial x^i}{\partial u} \frac{\partial x^j}{\partial v} D_{\frac{\partial}{\partial x^j}} \frac{\partial}{\partial x^i} \end{aligned}$$

Wegen der Symmetrie von  $D$  erhalten wir dann durch zurückrechnen

$$= \frac{D}{\partial u} \left( \frac{\partial f}{\partial v} \right) \quad \blacksquare$$

**Satz 4.5 (Gauß-Lemma)**

Sei  $(M, \langle \cdot, \cdot \rangle)$  eine Riemann'sche Mannigfaltigkeit. Sei  $p \in M$  und  $v \in T_p M$  so dass  $\exp_p(v) =: q$  definiert ist. Für  $w \in T_v(T_p M) \cong T_p M$  gilt:

$$\langle d(\exp_p)|_v v, d(\exp_p)|_v w \rangle_q = \langle v, w \rangle_p$$

**Beweis**

Zerlege  $w = w_T + w_N$ , wobei  $w_T$  die Komponente in Richtung  $v$  und  $w_N$  die dazu orthogonale Komponente ist (also  $w_T = \langle v, w \rangle_{\|v\|} \frac{v}{\|v\|}$ ,  $w_N = w - w_T$ ). Das Differential

$$d \exp_p |_v : T_v(T_p M) \cong T_p M \rightarrow T_{\exp_p v} M = T_q M$$

ist linear. Also:

$$d \exp_p |_v (w_T + w_N) = d \exp_p |_v (w_T) + d \exp_p |_v (w_N)$$

Es gilt zunächst

$$d \exp_p |_v w_T = \left. \frac{d}{dt} \right|_0 \exp_p(v + t w_T) = \left. \frac{d}{dt} \right|_0 \exp_q(t w_T) = w_T$$

sowie

$$d \exp_p |_v v = \left. \frac{d}{dt} \right|_0 \exp_p(v + t v) = \left. \frac{d}{dt} \right|_0 \exp_q(t v) = v$$

das heißt, das Gauß-Lemma gilt für  $w = w_T$ .

Ohne Einschränkung sei nun  $w = w_N$ . Nach Voraussetzung ist  $q = \exp_p(v)$ , also existiert ein  $\varepsilon > 0$ , so dass die Exponentialabbildung definiert ist für:  $u := t v(s)$  wobei  $v(s)$  eine Kurve in  $T_p M$  mit  $v(0) = v$ ,  $\|v(s)\|$  konstant und  $v'(0) = w (\perp v)$ . Die Fläche  $A \subset \mathbb{R}^2$  ist jetzt die Menge der  $u$  für  $0 \leq t \leq 1$  und  $-\varepsilon < s < \varepsilon$ .

Betrachte jetzt die parametrisierte Fläche

$$f : A \rightarrow M; f(t, s) := \exp_p(t v(s))$$



Es gilt:  $f(t, s_0)$  ist eine Geodätische für ein festes  $s_0$ , sowie  $f(1, 0) = \exp_p v = q$ .

Wir haben für  $t = 1$

$$\left. \frac{\partial f}{\partial s} \right|_{(1,0)} \stackrel{\text{Lemma 1.3}}{=} (d \exp_p)_v(v'(0)) = d \exp_p|_v(w)$$

und für  $s = 0$

$$\left. \frac{\partial f}{\partial t} \right|_{(1,0)} = v = d \exp_p|_v(v)$$

Also ist zu zeigen:

$$\left\langle \left. \frac{\partial f}{\partial s} \right|_{(1,0)}, \left. \frac{\partial f}{\partial t} \right|_{(1,0)} \right\rangle_q = 0 \quad (*)$$

Wir zeigen dazu zuerst:

$$\left\langle \left. \frac{\partial f}{\partial s} \right|_{(t,s)}, \left. \frac{\partial f}{\partial t} \right|_{(t,s)} \right\rangle_q$$

ist unabhängig von  $t$ .

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \left\langle \left. \frac{\partial f}{\partial s} \right|_{(t,s)}, \left. \frac{\partial f}{\partial t} \right|_{(t,s)} \right\rangle_q &\stackrel{\text{Verträglichkeit}}{=} \left\langle \frac{D}{\partial t} \frac{\partial f}{\partial s}, \frac{\partial f}{\partial t} \right\rangle_q + \left\langle \frac{\partial f}{\partial s}, \underbrace{\frac{D}{\partial t} \frac{\partial f}{\partial t}}_{=0} \right\rangle_q \\ &\stackrel{\text{Lemma 1.3}}{=} \left\langle \frac{D}{\partial s} \frac{\partial f}{\partial t}, \frac{\partial f}{\partial t} \right\rangle \\ &= \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial s} \underbrace{\left\langle \frac{\partial f}{\partial t}, \frac{\partial f}{\partial t} \right\rangle}_{\text{konstant (Geodätische!)}} = 0 \end{aligned}$$

Es war  $t$  beliebig, also wählen wir  $t = 0$ .

$$(*) \iff \left\langle \left. \frac{\partial f}{\partial s} \right|_{(0,0)}, \left. \frac{\partial f}{\partial t} \right|_{(0,0)} \right\rangle_q = 0$$

Aber für ein festes  $t$  gilt:

$$\begin{aligned} \left. \frac{\partial f}{\partial s} \right|_{(t,0)} &= (d \exp_p)_{tv(s)}(tv'(s)) \Big|_{s=0} \\ &= d \exp_p|_{tv}(tw) \end{aligned}$$

■

### Frage: Geodätische und Kürzeste

Ein Segment  $\gamma|_{[a,b]}$  einer Geodätischen  $\gamma : I \rightarrow M([a,b] \subset I)$  heißt minimierend, falls  $L(\gamma|_{[a,b]}) \leq L(c)$ , wobei  $c$  eine beliebige Kurve mit  $c(a) = \gamma(a)$ ,  $c(b) = \gamma(b)$  und  $L(\cdot)$  die Länge ist.

**Satz 4.6 (Geodätische sind lokal minimierend)**

Sei  $p \in M$ ,  $U$  eine normale Umgebung von  $p$  und  $B \subset U$  ein normaler Ball mit Zentrum  $p$ . Sei  $\gamma : [0, 1] \rightarrow B$  ein geodätisches Segment mit  $\gamma(0) = p$ . Falls  $c : [0, 1] \rightarrow M$  eine beliebige, stückweise  $C^\infty$ -Kurve mit  $\gamma(0) = c(0)$  und  $\gamma(1) = c(1)$  ist, dann gilt  $L(\gamma) \leq L(c)$ , und falls  $L(\gamma) = L(c)$ , so ist  $\gamma([0, 1]) = c([0, 1])$ .

**Beweis**

1. Fall:  $c([0, 1]) \subset B$ .  $\exp_p$  ist ein Diffeomorphismus, also können wir schreiben ("Polarkoordinaten"):  $c(t) = \exp_p(r(t)v(t))$ ,  $t \in [0, 1]$ , wobei  $v(t)$  eine Kurve in  $T_p M$  ist mit  $\|v(t)\| = 1$  und  $r : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^+$  stückweise differenzierbar. Sei  $f(r, t) := \exp_p(r \cdot v(t))$  eine parametrisierte Fläche in  $B$ , die  $c$  enthält. Es gilt für fast alle  $t$ :

$$\frac{dc}{dt} = \frac{\partial f}{\partial r} r' + \frac{\partial f}{\partial t}.$$

Nach dem Gauß-Lemma (4.5) ist  $\langle \frac{\partial f}{\partial t}, \frac{\partial f}{\partial r} \rangle = 0$ , also

$$\left\| \frac{dc}{dt} \right\|^2 = \underbrace{\left\| \frac{df}{dr} \right\|^2}_{=1} |r'|^2 + \underbrace{\left\| \frac{df}{dt} \right\|^2}_{\geq 0} \geq |r'|^2.$$

Damit gilt  $\int_\varepsilon^1 \left\| \frac{dc}{dt} \right\| dt \geq \int_\varepsilon^1 |r'| dt \geq \int_\varepsilon^1 r' dt = r(1) - r(\varepsilon)$ . (Beachte dass  $r$  bei 0 nicht differenzierbar ist, aber  $r(\varepsilon) \rightarrow 0$  für  $\varepsilon \rightarrow 0$ .) Also  $L(c) = \int_0^1 \left\| \frac{dc}{dt} \right\| dt \geq r(1) = c(1) = \text{Endpunkt von } c = L(\gamma)$ .

Die Gleichheit  $L(c) = L(\gamma)$  gilt dann, wenn Gleichheit in allen Abschätzungen oben gilt, also  $\left\| \frac{\delta f}{\delta t} \right\| = 0$ , also  $\frac{\delta f}{\delta t} = 0 \stackrel{\text{Kettenregel}}{=} d\exp_p(rv') \iff rv' = 0 \implies v' = 0 \implies v$  ist konstant, also das heißt, dass die Richtung konstant ist. Weiter muss dann  $\int_\varepsilon^1 |r'| dt = \int_\varepsilon^1 r' dt$  sein, also  $|r'| = r' > 0$ , also ist  $c$  eine monotone Parametrisierung von  $\gamma$ , insbesondere  $c([0, 1]) = \gamma([0, 1])$ .

2. Fall:  $c([0, 1]) \not\subset B$ . Sei  $\varepsilon$  der Radius von  $B$  und  $t_1 \in [0, 1]$  der erste Parameterwert mit  $c(t_1) \in S_\varepsilon(p) = \partial B_\varepsilon(p) = \partial B$ . Dann ist

$$L(c) > L(c|_{[0, t_1]}) \stackrel{1. \text{ Fall}}{\geq} \varepsilon \geq L(\gamma') \geq L(\gamma).$$

■

**Fazit:** Aus „ $\gamma$  ist eine Geodätische“ folgt „ $\gamma$  ist lokal minimierend“. Doch gilt auch die Umkehrung?

**Satz 4.7**

Für jeden Punkt  $p$  einer Riemann'schen Mannigfaltigkeit existiert eine Umgebung  $W$  von  $p$  und  $\delta = \delta(p) > 0$ , so dass für alle  $q \in W$  gilt:

$$\exp_q : B_\delta(0) (\subset T_q M) \rightarrow M$$

ist ein Diffeomorphismus mit  $\exp_q(B_\delta(0)) \supseteq W$ . Das heißt:  $W$  ist eine normale Umgebung für jeden ihrer Punkte. Eine solche Umgebung von  $p$  heißt total normal.

**Beweis**

(Skizze) Betrachte  $F : U (\subset TM) \rightarrow M \times M$ , wobei  $F(q, v) := (q, \exp_q(v))$ . Die Jacobi-Matrix von  $F$  im Punkt  $(p, 0)$  ist  $J_p := \begin{pmatrix} E & 0 \\ E & E \end{pmatrix}$ , wobei  $E$  die  $n \times n$ -Einheitsmatrix ist.  $J_F$  ist regulär in  $(p, 0)$ . Weiter ist  $F$  ein lokaler Diffeomorphismus von einer  $(p, 0)$ -Umgebung  $U' \subset U$  auf eine Umgebung  $W'$  um  $F(p, 0) = (p, p)$ . Wähle nun die Umgebung  $W$  von  $p$  so, dass  $W \times W \subset W'$ . ■

**Bemerkung:** Nach Satz 4.6 und 4.7 gilt: Für je zwei Punkte  $q_1, q_2 \in W$  (wie in Satz 4.7) existiert *genau eine* minimierende Geodätische der Länge  $< \delta$ , welche  $q_1$  und  $q_2$  verbindet. Damit kann man die Radialsymmetrie verlassen und hat mehr „Beweglichkeit“.

**Korollar (Geodätische erkennen)**

Sei  $\gamma$  eine stückweise differenzierbare Kurve  $\gamma : [a, b] \rightarrow M$ , mit der Bogenlänge parametrisiert. Falls  $L(\gamma) \leq L(c)$  für irgendeine stückweise differenzierbare Vergleichskurve  $c$ , die  $\gamma(a)$  und  $\gamma(b)$  verbindet, so ist  $\gamma$  eine Geodätische.

Es gilt also: „ $\gamma$  minimierend  $\implies \gamma$  Geodätische“ (keine Lokalität zunächst!).

**Beweis**

Sei  $t \in [a, b]$  und  $W$  eine total normale Umgebung von  $\gamma(t)$ . Dann existiert ein abgeschlossenes Intervall  $[t_1, t_2] \subset [a, b]$ , so dass  $t \in I$  und  $\gamma(I) \subset W$ .  $\gamma|_I$  ist stückweise differenzierbar und minimierend (sonst wäre  $\gamma$  nicht minimierend). Nach Satz 4.6 ist  $L(\gamma|_I)$  die Länge eines radialen geodätischen Segments (da  $W$  total normal) von  $\gamma(t_1)$  nach  $\gamma(t_2)$ . Da  $\gamma$  nach Bogenlänge parametrisiert ist, folgt nach Satz 4.6, dass  $\gamma|_I$  eine Geodätische in der Umgebung von  $t$  ist.  $t$  war beliebig, woraus die Behauptung folgt. ■

**Anwendungen:**

- (1) Eine Riemann'sche Isometrie bildet Geodätische auf Geodätische ab.

**Beweis**

$\varphi : M \rightarrow N$  sei eine Isometrie;  $\gamma$  ist eine Geodätische, dann ist  $L(\varphi \circ \gamma) = L(\gamma)$ . Also:  $\gamma$  ist minimierend, dann  $\varphi \circ \gamma$  minimierend. Dann folgt die Behauptung aus dem Korollar.

Alternativ:  $D_{\gamma'} \gamma' = 0 \implies D_{(\varphi \circ \gamma)'} (\varphi \circ \gamma)' = 0$ . ■

- (2) Geodätische von  $S^n = \{x \in \mathbb{R}^{n+1} \mid \|x\| = 1\}$  sind Großkreise.

**Beweis**

Sei  $c$  ein Großkreis, das heißt  $c = S^n \cap \sigma$ , wobei  $\sigma$  eine 2-dimensionale Ebene in  $\mathbb{R}^{n+1}$  durch 0 ist. Wähle  $p, q \in c$  genügend nahe, so dass es nach Satz 4.7 genau eine Geodätische  $\gamma$  zwischen  $p, q$  existiert. Dann ist die euklidische Spiegelung  $R$  an  $\sigma$  eine euklidische Isometrie von  $S^n$ .  $R$  fixiert  $c$  punktweise und bildet  $\gamma$  auf  $\tilde{\gamma}$  ab (auch durch  $p, q$ ). Also muss wegen Eindeutigkeit  $\gamma = \tilde{\gamma}$  gelten und  $\gamma$  bleibt punktweise fest, das heißt  $\gamma \subset c =$  die Fixpunkte von  $R = S^n \cap \sigma$ . Damit ist der Großkreis selber die Geodätische  $\gamma$ . ■



## 5. Krümmung

### 5.1. Der Riemann'sche Krümmungstensor

Gegeben sei eine Riemann'sche Mannigfaltigkeit  $(M, \langle \cdot, \cdot \rangle)$  mit Levi-Civita-Zusammenhang  $D$ . Der Riemann'sche Krümmungstensor von  $M$  bezüglich  $D$  ist die Abbildung  $R : \mathcal{V}M \times \mathcal{V}M \times \mathcal{V}M \rightarrow \mathcal{V}M$ ,  $(X, Y, Z) \mapsto R(X, Y)Z$ , wobei

$$R(X, Y)Z := D_Y D_X Z - D_X D_Y Z + D_{[X, Y]}Z.$$

#### Beispiel

Im  $(\mathbb{R}^n, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ , wobei  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  das Standardskalarprodukt ist, betrachten wir das Vektorfeld  $Z = (z^1, \dots, z^n) \in \mathcal{V}\mathbb{R}^n$ . Da  $D_X Z = (Xz^1, \dots, Xz^n)$ , folgt:  $D_Y D_X Z = (YXz^1, \dots, YXz^n)$ . Wegen  $[X, Y] = XY - YX$  folgt:  $R(X, Y)Z = 0$ .

Das oben definierte  $R$  ist somit ein „Maß“ für die Abweichung der Riemann'schen Mannigfaltigkeit  $(M, \langle \cdot, \cdot \rangle)$  von der euklidischen Geometrie.

**Bemerkung:** Bezüglich lokalen Basisfeldern  $\frac{\partial}{\partial x^i}$  ( $i = (1, \dots, n)$ ) gilt:  $[\frac{\partial}{\partial x^i}, \frac{\partial}{\partial x^j}] = 0$  für  $C^\infty$ -Funktionen. Dann ist  $R(\frac{\partial}{\partial x^i}, \frac{\partial}{\partial x^j})\frac{\partial}{\partial x^k} = D_{\frac{\partial}{\partial x^j}} D_{\frac{\partial}{\partial x^i}} \frac{\partial}{\partial x^k} - D_{\frac{\partial}{\partial x^i}} D_{\frac{\partial}{\partial x^j}} \frac{\partial}{\partial x^k}$ . „ $R$  ist ein Maß für die Vertauschbarkeit der 2. kovarianten Ableitungen.“

#### Definition

Setze  $\mathcal{V}_0 M := C^\infty M$ ,  $\mathcal{V}_r M := \mathcal{V}M \times \dots \times \mathcal{V}M$ . ( $r$  Summanden).  $\mathcal{V}_r M$  ist ein  $C^\infty M$ -Modul. Ein  $(s, r)$ -Tensorfeld auf  $M$  ist eine  $r$ -lineare Abbildung  $T : \mathcal{V}_r \rightarrow \mathcal{V}_s M$  über dem Ring  $C^\infty M$ , das heißt

$$\begin{aligned} T(X_1, \dots, X_{i-1}, fX + gY, X_{i+1}, \dots, X_r) &= fT(X_1, \dots, X_{i-1}, X, X_{i+1}, \dots, X_r) \\ &\quad + gT(X_1, \dots, X_{i-1}, Y, X_{i+1}, \dots, X_r) \end{aligned}$$

für alle Argumente von  $T$ ,  $X, Y \in \mathcal{V}M$

#### Satz 5.1

$R$  ist ein  $(1,3)$ -Tensorfeld

#### Beweis

Exemplarisch für  $R(X, Y)(fZ) = fR(X, Y)Z \forall f \in C^\infty M$ .

$D_Y D_X (fZ) = D_Y (fD_X Z + (Xf)Z) = (Yf)D_X Z + fD_Y D_X Z + (YXf)Z + (Xf)D_Y Z$ . Also:  $D_Y D_X (fZ) - D_X D_Y (fZ) = f(D_Y D_X Z - D_X D_Y Z) + (YXf - XYf)Z$ ;  $D_{[X, Y]}fZ = fD_{[X, Y]}Z + ([X, Y]f)Z \implies R(X, Y)fZ = fR(X, Y)Z$ . ■

**Satz 5.2 (Symmetrie-Eigenschaften)**

$(M, \langle \cdot, \cdot \rangle)$  sei eine Riemann'sche Mannigfaltigkeit.  $D$  der Levi-Civita-Zusammenhang und  $R$  ein Krümmungstensor. Dann gilt

- (1)  $R(X, Y)Z + R(X, Z)Y + R(Z, X)Y = 0$  (zyklisch Vertauschbar). „Bianchi-Identität“
- (2)  $\langle R(X, Y)Z, T \rangle = -\langle R(Y, X)Z, T \rangle$
- (3)  $\langle R(X, Y)Z, T \rangle = -\langle R(X, Y)T, Z \rangle$
- (4)  $\langle R(X, Y)Z, T \rangle = \langle R(Z, T)X, Y \rangle$

**Beweis**

(1) ist äquivalent zur Jacobi-Identität für Lie-Klammern.

(2) folgt direkt aus der Definition.

(3) ist äquivalent zu  $\langle R(X, Y)W, W \rangle = 0$  (setzte  $W = Z + T$  und verwende Satz 5.1).

Es ist  $\langle R(X, Y)W, W \rangle = \langle D_Y D_X W - D_X D_Y W + D_{[X, Y]} W, W \rangle$ ,  $\langle D_Y D_X W, W \rangle \stackrel{\text{Levi-Civita, vertaeglich}}{=} Y \langle D_X W, W \rangle - \langle D_X W, D_Y W \rangle$ , analog  $\langle D_X D_Y W, W \rangle = \frac{1}{2} [X, Y] \langle W, W \rangle$ .  
Somit:  $\langle R(X, Y)W, W \rangle = Y \langle D_X W, W \rangle - \langle D_X W, D_Y W \rangle - X \langle D_Y W, W \rangle + \langle D_Y W, D_X W \rangle + \frac{1}{2} [X, Y] \langle W, W \rangle = 0$ .

(4) Analog. ■

**Krümmungstensor in lokalen Koordinaten  $(u, \varphi)$** 

Die Basisfelder seien  $X_i := \frac{\partial}{\partial x^i}$ ,  $i = 1, \dots, n$ . Dann:  $R(X_i, X_j)X_k := \sum_{l=1}^n R_{ijk}^l X_l$  (per Basisatz), wobei  $R_{ijk}^l$  die Komponenten des Krümmungstensors in lokalen Koordinaten sind, also  $C^\infty$ -Funktionen und symmetrisch bezüglich  $i, j$ .

Für beliebige Vektorfelder  $X, Y, Z \in \mathcal{VM}$  mit

$$X = \sum_{i=1}^n u^i X_i, \quad Y = \sum_{j=1}^n v^j X_j, \quad Z = \sum_{k=1}^n w^k X_k$$

gilt wegen Satz 5.1:

$$R(X, Y)Z = \sum_{i,j,k,l=1}^n u^i v^j w^k R_{ijk}^l X_l \quad (*)$$

(man muss alles an der Stelle  $p$  kennen).

**Bemerkung:** (Trägereigenschaft von  $R$ ) Die Formel  $(*)$  zeigt, dass  $(R(X, Y)Z)(p)$  nur von den Werten der Vektorfelder  $X, Y, Z$  im Punkt  $p$  abhängig ist.

**Formel für  $R_{ijk}^l$** 

$$\begin{aligned}
R(X_i, X_j)X_k &= D_{X_j}(D_{X_i}X_k) - D_{X_i}(D_{X_j}X_k) + D_{\underbrace{[X_i, X_j]}_{=0}}X_k \\
&= D_{X_j}\left(\sum_{m=1}^n \Gamma_{ik}^m X_m\right) - D_{X_j}\left(\sum_{m=1}^n \Gamma_{jk}^m X_m\right) \\
&= \sum_{m=1}^n \left[ (X_j(\Gamma_{ik}^m X_m) + \Gamma_{ik}^m \underbrace{D_{X_j}X_m}_{\sum_{l=1}^m \Gamma_{jm}^l X_l}) - \sum_{m=1}^n [X_i(\Gamma_{jk}^m X_m) + \Gamma_{jk}^m \underbrace{D_{X_i}X_m}_{\sum_{l=1}^m \Gamma_{im}^l X_l}] \right] \\
\Rightarrow R_{ijk}^l &= \frac{\partial}{\partial x^j} \Gamma_{ik}^l + \sum_{m=1}^n \Gamma_{ik}^m \Gamma_{jm}^l - \frac{\partial}{\partial x^i} \Gamma_{jk}^l - \sum_{m=1}^n \Gamma_{jk}^m \Gamma_{im}^l
\end{aligned}$$

(so hatte es Riemann definiert)

Setze nun

$$R_{ijks} := \sum_{l=1}^n R_{ijk}^l \cdot g_{ls} = \langle R(X_i, X_j)X_k, X_s \rangle$$

„Herunterziehen von Indizes“, „Ricci-Kalkül“. Nach Satz 5.2 gilt:

- $R_{ijks} + R_{jkis} + R_{kij s} = 0$
- $R_{ijks} = -R_{ijsk}$
- $R_{ijks} = -R_{jik s}$
- $R_{ijks} = R_{ksij}$

**Bemerkung:** Für  $\dim M = 2$  sind  $i, j, k, s \in \{1, 2\}$  und aufgrund obiger Symmetrien ist im wesentlichen nur  $R_{1212} \neq 0$ . Dies ist gerade die Gauß-Krümmung.

**Riemann'scher Krümmungstensor**

Sei  $(M, \langle \cdot, \cdot \rangle)$  eine Riemann'sche Mannigfaltigkeit und  $D$  der zugehöriger Levi-Civita-Zusammenhang. Dann ist

$$\begin{aligned}
R: \mathcal{V}M \times \mathcal{V}M \times \mathcal{V}M &\rightarrow \mathcal{V}M \\
(X, Y, Z) &\mapsto R(X, Y)Z := D_Y D_X Z - D_X D_Y Z - D_{[X, Y]}Z
\end{aligned}$$

multilinear bezüglich  $C^\infty M$ .

**5.2. Schnittkrümmung**

Vorbemerkung aus der Linearen Algebra. Sei  $V$  ein  $\mathbb{R}$ -Vektorraum mit Skalarprodukt  $\langle \cdot, \cdot \rangle$ . Für  $x, y \in V$  setze

$$|x \wedge y| := \sqrt{\|x\|^2 \|y\|^2 - \langle x, y \rangle^2} \geq 0$$

(Flächeninhalt des von  $x$  und  $y$  aufgespannten Parallelogramms). Für orthonormierte Vektoren ist  $|x \wedge y| = 1$ .

**Lemma 5.1**

Sei  $(M, \langle \cdot, \cdot \rangle)$  eine Riemann'sche Mannigfaltigkeit,  $p \in M$ ,  $\sigma$  ein 2-dimensionaler Untervektorraum von  $T_p M$  mit Basis  $x, y$ . Dann ist

$$K(x, y) := \frac{\langle R(x, y)x, y \rangle_p}{|x \wedge y|^2}$$

unabhängig von der Wahl der Basis.

In der Konsequenz macht folgende Definition Sinn:

**Definition**

Für  $p \in M$ ,  $\sigma \subset T_p M$  ein 2-dimensionaler Untervektorraum setze  $K(p, \sigma) := K(x, y)$  für eine beliebige Basis  $\{x, y\}$  von  $\sigma$ .  $K(p, \sigma)$  heißt Schnittkrümmung von  $\sigma$  in  $p \in M$ .

**Bemerkungen:** (1) Für  $n = 2$  ist  $K(p, \sigma) = K(p)$  die Gauß-Krümmung von  $M$  im Punkt  $p$ . Die Menge der Krümmungstensoren  $R$  im Punkt  $p$  ist vollständig bestimmt.

**Beispiel**

Schnittkrümmung von  $(\mathbb{R}^n, \text{kan})$  ist konstant null, da  $R = 0$ .

(2)  $(S^n, \text{kan})$ . Behauptung: Schnittkrümmung ist konstant 1.

**Lemma 5.2**

Sei  $f : (M, \langle \cdot, \cdot \rangle) \rightarrow (N, \langle \cdot, \cdot \rangle)$  eine Riemann'sche Isometrie. Für  $\sigma \subset T_p M$  ist  $df|_p(\sigma) \subset T_{f(p)} N$  ein 2-dimensionaler Untervektorraum und  $K^M(p, \sigma) = K^N(f(p), df|_p(\sigma))$ . Das heißt: Schnittkrümmung ist invariant unter Isometrie.

**Beweis**

Es gilt (Übungsblatt 7 Aufgabe 1):

- $D_{dfx}^N df(y) = df(D_x^M y)$
- $[df(x), df(y)]^N = df([x, y]^M)$
- $\langle df(x), df(y) \rangle = \langle x, y \rangle$

$\implies R^N(df(x), df(y))df(z) = df(R^M(x, y)z)$ . Es genügt zu zeigen: Zu  $\sigma \subset T_x S^n$  und  $\tau \subset T_y S^n$ , jeweils 2-dimensionale Untervektorräume, existiert eine Isometrie  $f : S^n \rightarrow S^n$  mit  $df_x(\sigma) = \tau$ .

Sei nun  $\sigma = [u, v]$ ,  $\tau = [\tilde{u}, \tilde{v}]$ , wobei  $u, v$  bzw.  $\tilde{u}, \tilde{v}$  Orthonormalbasen sind.  $l_1 = x$ ,  $l_2 = u$ ,  $l_3 = v$ .

$$y = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_{n+1} \end{pmatrix} = f_1 \quad \tilde{u} = \begin{pmatrix} \tilde{u}_1 \\ \vdots \\ \tilde{u}_{n+1} \end{pmatrix} = f_2 \quad \tilde{v} = \begin{pmatrix} \tilde{v}_1 \\ \vdots \\ \tilde{v}_{n+1} \end{pmatrix} = f_3$$



ergänze zu einer Orthonormalbasis  $\{f_1, \dots, f_{n+1}\}$  von  $\mathbb{R}^{n+1}$ . Dann ist  $A := [f_1, f_2, \dots, f_{n+1}] \in O(n+1)$ , also eine orthogonale  $(n+1) \times (n+1)$ -Matrix, mit  $A_{li} = f_i$ ,  $f: \mathbb{R}^{n+1} \rightarrow \mathbb{R}^{n+1}$ ;  $w \mapsto Aw$  ist eine euklidische Isometrie (Rotation von  $(\mathbb{R}^{n+1}, \text{kan})$  die  $S^n$  invariant lässt. Dies induziert also eine Isometrie von  $(S^n, \text{kan})$ .

Da  $f$  linear ist,  $df = f$ , also  $df_x(\sigma) = df_x([u, v]) = [df_x u, df_x v] = [\tilde{u}, \tilde{v}] = \tau \implies$  Behauptung.  $S^n$  hat konstante Schnittkrümmung. Es gilt  $K = 1$  (siehe später). ■

- (3)  $n$ -dimensionale hyperbolische Räume  $H^n \mathbb{R} := \{x \in \mathbb{R}^n \mid x_n > 0\}$  mit der Identität als Karte und lokalen Koordinaten  $x_1, \dots, x_n$ . Es ist

$$(g_{ij}) := \begin{pmatrix} \frac{1}{(x_n)^2} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \frac{1}{(x_n)^2} \end{pmatrix} = \frac{1}{(x_n)^2} \begin{pmatrix} 1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & 1 \end{pmatrix}$$

Berechnung der  $R_{ijk}$  zeigt: Schnittkrümmung  $R$  ist konstant  $-1$ .

- (4) Konforme Änderung der Metrik  $(M, g)$  einer Riemann'schen Mannigfaltigkeit um  $\lambda \in C^\infty M$ ,  $\lambda > 0$ :  $\tilde{g} := \lambda g$  ist wieder eine Riemann'sche Metrik.

Für konstantes  $\lambda > 0$  ist die Schnittkrümmung für  $\tilde{g}$ :  $\tilde{R} = \frac{1}{\lambda} R$ . Insbesondere kann man jede Mannigfaltigkeit mit beliebiger, konstanter Krümmung durch Reskalierung der Riemann'schen Metrik zu  $S^n$  oder  $H^n$  formen. (besseres verb bitte!?)

## Ergänzende Sätze (ohne Beweis, vergleiche: do Carmo, Kapitel 8)

### Satz

$(M, \langle \cdot, \cdot \rangle)$  hat konstante Schnittkrümmung, also

$$K(p, \sigma) = K_0 \forall \sigma \subset T_p M \forall p \in M \iff \langle R(x, y)w, z \rangle = K_0(\langle x, w \rangle \langle y, z \rangle - \langle y, w \rangle \langle x, z \rangle)$$

insbesondere ist  $\langle R(x, y)x, y \rangle = K_0(\|x\|^2 \|y\|^2 - \langle x, y \rangle^2)$ .

### Satz (Hopf)

Eine vollständige, einfach zusammenhängende, ??? Riemann'sche Mannigfaltigkeit mit konstanter Krümmung 0, 1 oder -1 ist isometrisch zu  $\mathbb{R}^n$ ,  $S^n$ ,  $H^n \mathbb{R}$ . Dabei heißt

- Vollständig: Jede Geometrie ist auf ganz  $\mathbb{R}^n$  definiert
- Einfach zusammenhängend: Jede geschlossene Kurve ist auf einen Punkt zusammenziehbar
- „???“ = Riemann'sche Mannigfaltigkeit konstanter Krümmung.

## 5.3. Ricci-Krümmung

Sei  $R$  der Krümmungstensor einer Riemann'schen Mannigfaltigkeit  $(M, \langle \cdot, \cdot \rangle)$  und  $X, Y, Z \in \mathcal{V}M$ . In jedem Punkt  $p \in M$  ist  $Y(p) \mapsto R(X(p), Y(p))Z(p)$  ein Endomorphismus von  $T_p M$ . Oder: Für  $X, Z \in \mathcal{V}M$  fest ist  $R(X, \cdot)Z$  ein  $(1,1)$ -Tensormodul.

## 5. Krümmung

Für ein beliebiges (1,1)-Tensorfeld  $A$  ist  $A(p) : T_p M \rightarrow T_p M$  ein Endomorphismus und wir definieren die Spur von  $A$  durch

$$(\text{Spur } A)(p) := \sum_{i=1}^n \langle A(p)e_i, e_i \rangle_p$$

wobei  $[e_i]$  eine Orthonormalbasis von  $T_p M$  ist. Lineare Algebra: Es gibt einen Endomorphismus  $\Phi$  mit Abbildungsmatrix  $A$  und  $\text{Spur } \Phi = \text{Spur } A = \sum_{i=1}^n A_{ii}$  (insbesondere für Orthonormalbasen,  $a_{ii} = \langle A e_i, e_i \rangle$ ).

Der Ricci-Tensor von  $M$  ist der (0,2)-Tensor  $\text{Ric}(x, y) := \text{Spur}(y \mapsto R(x, y)z)$ . (In manchen Quellen noch mit  $\frac{1}{n-1}$  normiert.) Die Ricci-Krümmung von  $M$  in Richtung  $v \in T_p M$  ist

$$r(v) := \frac{\text{Ric}(v, v)}{\|v\|^2}.$$

Für eine Orthonormalbasis  $\{e_i\}$  von  $T_p M$  ist  $\text{Ric}(v, w) = \sum_{i=1}^n \langle R(v, e_i)w, e_i \rangle$ . Also insbesondere ist der Ricci-Tensor symmetrisch und  $r(e_1) = \sum_{i=2}^n K(p, [e_1, e_i])$ .

Die Skalar-Krümmung ist eine differenzierbare Funktion auf  $S : M \rightarrow \mathbb{R}, p \mapsto \sum_{j=1}^n r(e_j)$ , wobei  $\{e_j\}$  eine Orthonormalbasis von  $T_p M$  ist.

$$S(p) = \sum_{j=1}^n r(e_j) = \sum_{j=1}^n \text{Ric}(e_j, e_j) = \sum_{i,j=1}^n \langle R(e_j, e_i)e_j, e_i \rangle = \sum_{i,j=1, i \neq j}^n K(p, [e_i, e_j])$$

Eine Riemann'sche Mannigfaltigkeit  $(M, g)$  heißt Einstein-Raum falls  $\text{Ric}(x, y) = \lambda g(x, y) \forall x, y \in \mathcal{V}M$ , wobei  $\lambda : M \rightarrow \mathbb{R}$  eine differenzierbare Funktion ist.

### Beispiel

Räume mit konstanter Krümmung sind Einstein-Räume:  $K = c_0$  konstant.  $\text{Ric}(X, X) = \sum_{i=1}^n k([X, e_i])g(X, X) = (n-1)c_0 g(X, X)$

**Bemerkung:** Der Einstein-Tensor ist... (bitte jemand eintragen!)

## 6. Jacobi-Felder (Verbindung Geometrie–Krümmung)

### 6.1. Jacobi-Gleichung

Sei  $(M, \langle \cdot, \cdot \rangle)$  eine Riemann'sche Mannigfaltigkeit. Für  $v \in T_p M$  sei  $\exp_p$  definiert. Wir betrachten die parametrisierte Fläche  $f(t, s) := \exp_p(tv(s))$  mit  $0 \leq t \leq 1$  und  $-\varepsilon \leq s \leq \varepsilon$ , wobei  $v(s)$  eine Kurve in  $T_p M$  mit  $\|v(s)\| = \|v(0)\|$ ,  $v(0) = v$ ,  $v'(0) = w$  ist.

Es gilt (vergleiche Beweis Gauß-Lemma):

$$d\exp_p|_v w = \frac{\partial l}{\partial s}(1, 0) = T_{\exp_p(v)} M.$$

$\|d\exp_p|_v w\|$  ist ein Maß dafür, wie schnell die Geodätischen  $t \mapsto f(t, s)$  auseinanderlaufen.

Betrachte dazu das Vektorfeld  $d\exp_p|_{tv} tw = \frac{\partial f}{\partial s}(t, v)$  längs  $\gamma(t) := \exp_p(tv)$ ,  $0 \leq t \leq 1$ . Wir halten fest: Da  $\gamma$  eine Geodätische ist, gilt für alle  $t, s$ :  $\frac{D}{\partial t} \frac{\partial f}{\partial t}(t, s) = 0$ .

#### Lemma 6.1

$$f: \begin{array}{l} A \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow M \\ (u, v) \mapsto f(u, v) \end{array}$$

sei eine parametrisierte Fläche und  $V(u, v)$  sei ein Vektorfeld längs  $f$ . Dann gilt:

$$\frac{D}{\partial V} \frac{D}{\partial U} V - \frac{D}{\partial U} \frac{D}{\partial V} V = R\left(\frac{\partial f}{\partial U}, \frac{\partial f}{\partial V}\right)V$$

wobei  $\frac{D}{\partial U} = D_{\frac{\partial f}{\partial U}}$ .

#### Beweis

Betrachte Karte  $(U, \varphi)$ . Dann sind die Basisfelder also  $V = \sum_{i=1}^n v^i X_i$ ,  $v^i = v^i(u, v)$ ,  $\frac{D}{\partial U} V = \frac{D}{\partial U} (\sum_{i=1}^n u^i x_i) = \sum_{i=1}^n \frac{\partial u^i}{\partial U} x_i + \sum_{i=1}^n v^i \frac{D}{\partial U} x_i$ .  $\frac{D}{\partial U} (\frac{D}{\partial U} V) = \sum_{i=1}^n \frac{\partial^2 u^i}{\partial v \partial u} x_i + \sum_{i=1}^n \frac{\partial v^i}{\partial u} \frac{D}{\partial v} x_i + \sum_{i=1}^n \frac{\partial u^i}{\partial v} \frac{\partial D}{\partial u} x_i$   
 $\implies \frac{D}{\partial v} \frac{D}{\partial u} v - \frac{D}{\partial u} \frac{D}{\partial v} v = \sum_{i=1}^n v_i (\frac{D}{\partial v} \frac{D}{\partial u} x_i - \frac{D}{\partial u} \frac{D}{\partial v} x_i)$  (+) (Bitte auf v- und u-Verwechsler prüfen!)

Berechne  $\frac{D}{\partial v} \frac{D}{\partial u} x_i$ : Für  $f(u, v) = (x^1(u, v), \dots, x^n(u, v))$  ist  $\frac{\partial f}{\partial u} = \sum_{j=1}^n \frac{\partial x^j}{\partial u} x_j$ ;  $\frac{\partial f}{\partial v} = \sum_{k=1}^n \frac{\partial x^k}{\partial v} x_k$   
 und  $\frac{D}{\partial u} x_i = D_{\frac{\partial f}{\partial u}} x_i = \sum_{j=1}^n \frac{\partial x^j}{\partial u} D_{x_j} x_j$ .  $\frac{D}{\partial v} \frac{D}{\partial u} v_i = \sum_{j=1}^n \frac{\partial^2 x^j}{\partial v \partial u} D_{x_j} x_i + \sum \frac{\partial x^j}{\partial u} D_{\frac{\partial f}{\partial v}} (D_{x_j} x_i) =$   
 $\sum_j \frac{\partial^2 x^j}{\partial u \partial v} D_{x_j} x_i + \sum_d \frac{\partial x^i}{\partial u} (\sum_k \frac{\partial x^k}{\partial u} D_{x_k} D_{x_j} x_i) = \sum_j \text{ WTF } \dots$

Weiter gilt:

$$0 = \frac{D}{\partial s} \left( \frac{D}{\partial t} \frac{\partial f}{\partial t} \right) \stackrel{\text{Lemma 1}}{=} \frac{D}{\partial t} \left( \frac{D}{\partial s} \frac{\partial f}{\partial t} \right) - R \left( \frac{\partial f}{\partial s}, \frac{\partial f}{\partial t} \right) \frac{\partial f}{\partial t} \\ \stackrel{\text{Lemma 3 Kap 4} + \text{schiefsym.}}{=} \frac{D}{\partial t} \left( \frac{D}{\partial t} \frac{\partial f}{\partial s} \right) - R \left( \frac{\partial f}{\partial t}, \frac{\partial f}{\partial s} \right) \frac{\partial f}{\partial t}$$

Wir setzen  $\gamma(t) = \exp_p(tv) = f(t, 0)$  und  $J(t) \equiv J(\gamma(t)) := \frac{\partial f}{\partial s}(t, 0)$  ein Vektorfeld längs  $\gamma$ . Dann gilt die Jacobi-Gleichung:

$$\frac{D}{\partial t} \frac{D}{\partial t} J(t) + R(\gamma'(t), J(t))\gamma'(t) = 0$$

mit der Kurzschreibweise

$$\frac{D}{\partial t} \frac{D}{\partial t} J(t) =: J''(t)$$

### Definition

Sei  $\gamma : [0, a] \rightarrow M$  eine Geodätische. Ein Vektorfeld  $J$  längs  $\gamma$  heißt Jacobi-Feld, falls  $J$  für alle  $t \in [0, a]$  die Jacobi-Gleichung erfüllt.

Es gilt: Ein Jacobi-Feld ist eindeutig bestimmt durch die Anfangsbedingungen  $J(0)$  und  $J'(0) := D_{\gamma'} J(0)$ .

Begründung: Betrachte orthonormale Parallelfelder  $E_1(t), \dots, E_n(t)$ , wobei  $E_i(t) = E_i(\gamma(t))$ , längs  $\gamma$ . Dann kann man schreiben:  $J(t) = \sum_{i=1}^n f_i(t) E_i(t)$  mit  $f_i \in C^\infty$ . Also  $J'(t) = D_{\gamma'} J(t) = \sum_{i=1}^n D_{\gamma'} D_{\gamma'} (f_i E_i) = \sum_{i=1}^n (f'_i E_i + f_i \underbrace{D_{\gamma'} E_i}_{=0}) = \sum_{i=1}^n f'_i(t) E_i(t)$  und  $J''(t) = \sum_{i=1}^n f''_i(t) E_i(t)$ .

Weiter sei  $a_{ij}(t) := \langle R(\gamma'(t), E_i(t))\gamma'(t), E_j(t) \rangle_{\gamma(t)}$ . Dann gilt  $R(\gamma', J)\gamma' = \sum_j \langle R(\gamma', J)\gamma', E_j \rangle E_j = \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^n f_i \langle R(\gamma' E_i)\gamma', E_j \rangle E_j = \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^n f_i a_{ij}(t) E_j(t)$

Damit ist die Jacobi-Gleichung äquivalent zum System linearer Differentialgleichungen 2. Ordnung

$$f''_j(t) + \sum_{i=1}^n a_{ij}(t) f_i(t) = 0, \quad j = 1, \dots, n$$

Die Lösungen bilden einen Vektorraum der Dimension  $2n$ , wobei  $n = \dim M$ . Zu gegebener Anfangsbedingung  $J(0), J'(0)$  bzw.  $f_1(0), \dots, f_n(0), f'_1(0), \dots, f'_n(0)$  existiert genau ein Jacobi-Feld längs ganz  $\gamma$ , also eine Lösung des obigen Differentialgleichungssystems für alle  $t \in [0, a]$ .

**Folgerung:** Längs der Geodätischen  $\gamma : [0, a] \rightarrow M$  existieren  $2n$  linear unabhängige Jacobi-Felder, wobei  $n = \dim M$ .

**Bemerkung:** Gewisse Jacobi-Felder kann man direkt angeben:  $J(t) := \gamma'(t)$  ist ein Jacobi-Feld, da  $J'' + R(\gamma', J)\gamma' = \gamma''' + R(\gamma', \gamma')\gamma' = D_{\gamma'} \gamma'' + 0 = D_{\gamma'} D_{\gamma'} \gamma' = 0$ .

Ansatz:  $J(t) := a(t)\gamma'(t)$  für  $a : I \rightarrow \mathbb{R}$  ist Jacobi-Feld, genau dann, wenn  $a(t)$  linear ist. Also:  $J'' = a''\gamma'$ ,  $R(\gamma', J)\gamma' = R(\gamma', a\gamma')\gamma' = aR(\gamma', \gamma')\gamma' = 0$ . Das heißt die Jacobi-Gleichung gilt  $\iff a''\gamma' = 0 \iff a'' = 0 \iff a(t) = \alpha + t\beta$ ,  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ .

**Folgerung:**  $J_1(t) := \gamma'(t)$  und  $J_2(t) := t\gamma'(t)$  sind verschieden, da  $J_1(0) = \gamma'(0) \neq J_2(0) = 0$ , und spannen einen 2-dimensionalen Untervektorraum des Vektorraumes aller Jacobi-Felder längs  $\gamma$  auf.

Es genügt dann den  $2(n-1)$ -dimensionalen Untervektorraum aller Jacobi-Felder orthogonal zu  $\gamma'$  zu verstehen.

**Beispiel (Jacobi-Felder für Riemann'sche Mannigfaltigkeiten konstanter Krümmung)**

Sei  $(M, \langle \cdot, \cdot \rangle)$  eine Riemann'sche Mannigfaltigkeit mit konstanter Schnittkrümmung  $k_0$ , etwa  $(\mathbb{R}^2, \text{kan}) : k_0 = 0$ ,  $(S^2, \text{kan}) : k_0 = 1$ ,  $(H^2\mathbb{R}, \text{kan}) : k_0 = -1$ .

Weiter sei  $\gamma : [0, a] \rightarrow M$  eine normale Geodätische und  $J$  ein Jacobi-Feld längs  $\gamma$ , so dass  $J(t) \perp \gamma'(t)$ .

Für ein beliebiges Vektorfeld  $X$  längs  $\gamma$  gilt die Formel (vgl. 5.2):

$$\langle R(\gamma', J)\gamma', X \rangle = k_0 \underbrace{(\langle \gamma', \gamma' \rangle \langle J, X \rangle)}_{=1} - \underbrace{\langle \gamma', X \rangle \langle J, \gamma' \rangle}_{=0} = k_0 \langle J, X \rangle$$

also

$$R(\gamma', J)\gamma' = k_0 J$$

Die Jacobi-Gleichung lautet hier:

$$J'' + k_0 J = 0 \quad (*)$$

Es sei  $E(t)$  ein Parallelfeld längs  $\gamma$  mit  $\|E(t)\|_{\gamma(t)} = 1$  und  $\langle E(t), \gamma'(t) \rangle_{\gamma(t)} = 0$  für alle  $t$ . Dann ist

$$J(t) := \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{k_0}} \cdot \sin(t\sqrt{k_0}) \cdot E(t), & k_0 > 0 \\ t \cdot E(t), & k_0 = 0 \\ \frac{1}{\sqrt{-k_0}} \cdot \sinh(t\sqrt{-k_0}) \cdot E(t), & k_0 < 0 \end{cases}$$

eine Lösung von  $(*)$  mit Anfangsbedingung  $J(0) = 0$  und  $J'(0) = E(0)$ .

**Satz 6.1**

Sei  $\gamma : [0, a] \rightarrow M$  eine normale Geodätische (also  $\|\gamma'\| = 1$ ) und  $J$  ein Jacobi-Feld längs  $\gamma$  mit  $J(0) = 0$  und  $J'(0) = \frac{D}{dt}J(0) = (D_{\gamma'}J)(0) =: w$ . Schließlich sei  $v := \gamma'(0)$ .

Wir betrachten  $w$  als Element von  $T_{av}(T_{\gamma(0)}M)$  und wählen Kurve  $v(s)$  in  $T_{\gamma(0)}M$  mit  $v(0) = av$ ,  $v'(0) = aw$ . Für die parametrisierte Fläche  $f(t, s) := \exp_{\gamma(0)}(\frac{t}{a}v(s))$ ,  $|s| < \varepsilon$ ,  $0 \leq \frac{t}{a} \leq 1$  ist  $\bar{J}(t) := \frac{\partial f}{\partial s}(t, 0)$  ein Jacobi-Feld längs  $\gamma$  mit  $J(t) = \bar{J}(t)$  für alle  $t \in [0, a]$ .

**Beweis**

Jacobi-Feld ist durch Anfangsbedingungen vollständig bestimmt, das heißt es genügt zu zeigen:  $J(0) = \bar{J}(0)$  und  $J'(0) = \bar{J}'(0)$ .

Es ist einfach zu sehen, dass  $\bar{J}(0) = \frac{\partial f}{\partial s}(0, 0) = 0$ .

Weiter gilt

$$\begin{aligned} \bar{J}'(t) &= \frac{D}{dt} \frac{\partial f}{\partial s}(t, 0) = \frac{D}{dt} (d \exp_p|_{\frac{t}{a}v(0)} \cdot \frac{t}{a}v'(0)) = \frac{D}{dt} (d \exp_p|_{tv} tw) \\ &= \frac{D}{dt} (td \exp_p|_{tv} w) = 1 \cdot d \exp_p|_{tv} w + t \frac{D}{dt} (d \exp_p|_{tv} w). \end{aligned}$$

Daher ist  $\bar{J}'(0) = d \exp_p|_0 w = w = J'(0)$ . ■

**Bemerkungen:** (1) Es gilt folgende Formel für ein Jacobi-Feld längs einer normalen Geodätischen  $\gamma : [0, a] \rightarrow M$  mit  $J(0) = 0$ :

$$J(t) = d \exp_p|_{t\gamma'(0)}(tJ'(0)), \quad t \in [0, a]$$

(2) Eine analoge Konstruktion (Jacobi-Felder erzeugen durch Variation einer Geodätischen) gilt auch für Jacobi-Felder mit Anfangsbedingung  $J(0) \neq 0$ .

## 6.2. Jacobi-Felder und Schnittkrümmung

### Satz 6.2

Sei  $p \in M$ ,  $\gamma : [0, a] \rightarrow M$  eine normale Geodätische mit  $\gamma(0) = p$ ,  $\gamma'(0) = v$  und  $w \in T_v(T_p M) \cong T_p M$  mit  $\|w\| = 1$ . Weiter sei  $J(t) = d \exp_p|_{tv}(tw)$ ,  $0 \leq t \leq a$  ein Jacobi-Feld längs  $\gamma$ .

Dann gilt für die Taylorentwicklung von  $\|J(t)\|_{\gamma(t)}^2 = \langle J(t), J(t) \rangle_{\gamma(t)}$  bei  $t = 0$ :

$$\|J(t)\|_{\gamma(t)}^2 = t^2 - \frac{1}{3} \langle R(v, w)v, w \rangle_p t^4 + o(t^4)$$

### Beweis

Es ist  $J(0) = 0$ ,  $J'(0) = w$ ,  $\|w\| = 1$ . Für die ersten drei Koeffizienten der Taylorreihe in  $t$  folgt:

$$(0) \quad \|J(p)\|_p^2 = \langle J, J \rangle(0) = 0$$

$$(1) \quad \langle J, J \rangle'(0) = 2 \langle J', J \rangle(0) = 0$$

$$(2) \quad \langle J, J \rangle''(0) = 2 \langle J'', J \rangle(0) + 2 \langle J', J' \rangle(0) = 0 + 2\|w\|^2 = 2$$

$$(3) \quad \langle J, J \rangle'''(0) = 2 \langle J''', J \rangle(0) + 2 \langle J'', J' \rangle(0) + 4 \langle J'', J' \rangle(0) = 0 + 6 \langle -R(\gamma', J)\gamma', J' \rangle(0) = 6 \langle -R(\gamma', 0)\gamma', J' \rangle(0) = 6 \langle 0, J' \rangle(0) = 0$$

$$(4) \quad \langle J, J \rangle''''(0) = 2 \langle J'''', J \rangle(0) + 2 \langle J''', J' \rangle(0) + 6 \langle J''', J' \rangle(0) + 6 \langle J'', J'' \rangle(0) = 8 \langle J''', J' \rangle(0) = -8 \langle R(\gamma', J')\gamma', J' \rangle(0) = -8 \langle R(v, w)v, w \rangle_p$$

Nebenrechnung für  $J''' = -\frac{D}{dt}R(\gamma', J)\gamma'$ . Dazu betrachten wir ein beliebiges Vektorfeld  $Z$  mit  $Z' = \frac{D}{dt}Z = D_{\gamma'}Z$ . Es ist

$$\begin{aligned} \left\langle \frac{D}{dt}R(\gamma', J)\gamma', Z \right\rangle &= \frac{d}{dt} \langle R(\gamma', J)\gamma', Z \rangle - \langle R(\gamma', J)\gamma', Z' \rangle \\ &= \frac{d}{dt} \langle R(\gamma', Z)\gamma', J \rangle - \langle R(\gamma', J)\gamma', Z' \rangle \\ &= \left\langle \frac{D}{dt}R(\gamma', Z)\gamma', J \right\rangle + \langle R(\gamma', Z)\gamma', J' \rangle - \langle R(\gamma', J)\gamma', Z' \rangle. \end{aligned}$$

Für  $t = 0$  ist  $J(0) = 0$ , also:

$$\begin{aligned}\left\langle \frac{D}{dt} R(\gamma', J) \gamma', Z \right\rangle(0) &= 0 + \langle R(\gamma', Z) \gamma', J \rangle'(0) - 0 \\ &= \langle R(\gamma', J') \gamma', Z \rangle(0)\end{aligned}$$

■

Da  $Z$  beliebig war, gilt  $J'''(0) = -\frac{D}{dt} R(\gamma', J) \gamma'(0) = -R(\gamma', J') \gamma'(0)$

### Korollar

Falls  $\langle v, w \rangle_p = 0$ , ( $v, w$  also orthonormiert) gilt:  $\langle R(v, w)v, w \rangle_p = K(p, \sigma) =$  Schnittkrümmung der von  $v$  und  $w$  aufgespannten Ebene  $\sigma$ , also

$$\|J(t)\|_{\gamma(t)}^2 = t^2 - \frac{1}{3}K(p, \sigma)t^4 + o(t^4)$$

sowie

$$\|J(t)\|_{\gamma(t)} = t - \frac{1}{6}K(p, \sigma)t^3 + o(t^3)$$

### Beweis

Die Formel für  $\|J(t)\|_{\gamma(t)}$  folgt aus einem Koeffizientenvergleich der Taylorreihen:

$$\begin{aligned}f(t) &= a + bt + ct^2 + dt^3 + \dots \\ (f(t))^2 &= a^2 + 2abt + \dots\end{aligned}$$

■

**Anwendung** Länge von geodätischen Kreisen.  $p \in M$ ,  $v, w \in T_p M$ ,  $v \perp w$ ,  $\|v\| = \|w\| = 1$ ,  $f(r, \theta) := \exp_p(r(\cos \theta \cdot v + \sin \theta \cdot w))$ . Für ein festes  $r$  heißt  $K_r(\theta) = f(r, \theta)$  für  $0 \leq \theta \leq 2\pi$  ein geodätischer Kreis von Radius  $r$ .

Die Länge von  $K_r$  ist  $L(K_r) := \int_0^{2\pi} \left\| \frac{d}{d\theta} K_r(\theta) \right\| d\theta = \int_0^{2\pi} \left\| \frac{\partial f}{\partial \theta} \right\| d\theta$ , wobei  $\frac{\partial f}{\partial \theta}$  ein Jacobi-Feld längs  $\gamma_\theta(r) = \exp_p(rv(\theta))$  ist. Daher

$$L(K_r) = \int_0^{2\pi} \left[ r - \frac{1}{6}K(p, \sigma)r^3 + o(r^3) \right] d\theta = 2\pi r \left( 1 - \frac{1}{6}K(p, \sigma)r^2 + o(r^2) \right).$$

Das ist die klassische Formel von Bertrand-Puiseux (1848) für Flächen in  $\mathbb{R}^3$ .

Umgekehrt hat man  $K(p, \sigma) = \frac{3}{\pi r^3}(2\pi r - L(K_r) + o(r^3))$  oder

$$K(p, \sigma) = \lim_{r \rightarrow 0} \frac{3}{\pi r^3}(2\pi r - L(K_r)).$$

Im euklidischen ist  $L(K_r) = 2\pi r$ , also  $K(p, \sigma) = 0$ . Im sphärischen ist  $L(K_r) = 2\pi \sin r = 2\pi(r - \frac{r^3}{3!} + \dots)$ , also  $K(p, \sigma) = +1$ . Im hyperbolischen ist  $L(K_r) = 2\pi \sinh r = 2\pi(r + \frac{r^3}{3!} + \dots)$ , also  $K(p, \sigma) = -1$ .





## 7. Riemann'sche Mannigfaltigkeiten als metrische Räume

Sei  $(M, \langle \cdot, \cdot \rangle)$  eine differenzierbare Mannigfaltigkeit, also insbesondere ein topologischer Raum (nach Definition), der Hausdorff'sch ist, eine abzählbare Basis hat und lokal euklidisch ist. Solche topologischen Räume sind metrisierbar.

Bisher waren die Konzepte „lokal“, etwa die Geodätischen, die Exponentialabbildung, der Krümmungstensor, die Jacobi-Felder. Für globale Aussagen benötigen wir zusätzliche topologische Voraussetzungen.

Ein Prototyp für eine solche Voraussetzung ist der Satz von Gauß-Bounet in der Flächentheorie: Gegeben eine kompakte Fläche  $S$  im  $\mathbb{R}^3$  ohne Rand und die Gauß-Krümmung  $K$ , so ist  $\int_S K dA = 2\pi\chi(S) = 2\pi(2 - 2g)$ , wobei  $\chi$  die Euler-Charakteristik ist. Diese Gleichung verbindet links eine Aussage über die „lokale Geometrie“ mit rechts einer topologischen Invariante.

Die einfachste Globale Frage ist: Gegeben zwei Punkte  $p, q \in M$ , gibt es einen stetigen Weg zwischen  $p$  und  $q$ ? Notwendig dafür ist:  $M$  zusammenhängend<sup>1</sup>. Zusammenhängend ist auch hinreichend:

### Lemma 7.1

Ist  $M$  zusammenhängend, so ist  $M$  auch wegzusammenhängend. Das heißt, dass zu  $p, q \in M$  ein stetiger Weg  $c : [0, 1] \rightarrow M$  mit  $c(0) = p$  und  $c(1) = q$  existiert.

**Bemerkung:** In allgemeinen topologischen Räumen gilt: Aus wegzusammenhängend folgt zusammenhängend, aber aus zusammenhängend folgt nicht zwingend wegzusammenhängend. Ein Beispiel dafür ist  $X := [(0, -1), (0, 1)] \cup \{(x, \sin \frac{1}{x}) \in \mathbb{R}^2 \mid x > 0\}$  mit der von  $\mathbb{R}^2$  induzierten Topologie. (Für einen Beweis siehe: Singer-Therpe, Elementary Topology & Geometry, Seite 53)

### Beweis

Sei  $p \in M$  und  $A := \{q \in M \mid q \text{ ist mit } p \text{ durch einen stetigen Weg verbindbar}\}$ .

- $A \neq \emptyset$ , da  $p \in A$ :  $c : [0, 1] \rightarrow M$ ;  $c(t) := p$ .
- $A$  ist offen: Ist  $q \in A$  und  $r \in B_\varepsilon(q)$  (= normale Umgebung von  $q$ ), dann ist  $r \in A$ .
- $A$  ist abgeschlossen, also  $M \setminus A$  ist offen: Ist  $q \in M \setminus A$ ,  $r \in B_\varepsilon(q)$ , dann ist  $r \in M \setminus A$ . ■

Daher sei in diesem Kapitel stets vorausgesetzt, dass  $M$  zusammenhängend ist.

<sup>1</sup>Ein topologischer Raum  $X$  heißt zusammenhängend wenn  $X$  nicht in zwei disjunkte, offene, nichtleere Teilmengen zerlegt werden kann. Dazu äquivalent:  $X$  und  $\emptyset$  sind die einzigen Teilmengen von  $X$  die sowohl offen als auch abgeschlossen sind.

Daraus folgt: Zwei beliebige Punkte  $p, q \in M$  sind durch stückweise differenzierbare (bzw. stückweise geodätische) Wege verbindbar.

### Beweis

Wähle stetigen Weg zwischen  $p$  und  $q$ :  $c : [0, 1] \rightarrow M$ .  $c([0, 1])$  ist kompakt. Diese Menge kann durch endlich viele total normale Umgebungen überdeckt werden. In diesen Umgebungen lässt sich der Weg wie gewünscht abändern. ■

**Bemerkung:** Im Allgemeinen existiert zwischen zwei Punkten  $p$  und  $q$  einer Riemann'schen Mannigfaltigkeit keine Geodätische! Etwa in  $(\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}, \text{kan})$ , wo Geodätische Geradenstücken entsprechen, gibt es keine Geodätische zwischen  $(0, -1)$  und  $(0, 1)$ .

Setze  $\Omega_{pq} := \{\text{stückweise differenzierbare Kurven zwischen } p \text{ und } q\}$ .

### Satz 7.1 (Längenmetrik)

$(M, \langle \cdot, \cdot \rangle)$  sein eine Riemann'sche Mannigfaltigkeit.

$$d : M \times M \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0} \\ (p, q) \mapsto \inf_{c \in \Omega_{pq}} L(c)$$

Dann ist  $(M, d)$  ein metrischer Raum, also es gilt für  $p, q, r \in M$ :

- (1)  $d(p, q) = d(q, p) \geq 0$
- (2)  $d(p, q) \leq d(p, r) + d(r, q)$
- (3)  $d(p, q) = 0 \iff p = q$

### Beweis

- (1) „rückwärts laufen“:  $c[0, l] \rightarrow M$ ,  $t \mapsto c(t)$ , sei Kurve zwischen  $p$  und  $q$ , also  $c \in \Omega_{pq}$ . Dann ist  $\tilde{c}(t) := c(t - l) \in \Omega_{qp}$  und  $L(c) = L(\tilde{c})$ .
- (2) Da  $\Omega_{pq}$  eine Obermenge der Wege von  $p$  nach  $q$  über  $r$  ist, gilt  $\inf_{c \in \Omega_{pq}} L(c) \leq \inf_{c \in \Omega_{pr}} L(c) + \inf_{c \in \Omega_{rq}} L(c)$
- (3) Klar: Ist  $p = q$ , so ist hat der konstante Weg  $c[0, 1] \rightarrow M$ ;  $t \mapsto p$  die Länge 0, also  $d(p, q) = 0$ .

Annahme  $p \neq q$ . Wähle eine normale Umgebung  $U_\varepsilon(p)$  um  $p$  mit  $q \notin U_\varepsilon(p)$ . Dann gilt für eine beliebiges  $c \in \Omega_{pq}$  nach Satz 4.6:  $L(c) \geq \varepsilon \implies d(p, q) \geq \varepsilon$ . ■

### Korollar

- (1) Die Topologie des metrischen Raumes  $(M, d)$  ist äquivalent zur ursprünglich auf  $M$  gegebenen Topologie (also  $U$  ist offen in  $M \iff U$  ist offen in  $(M, d)$ ). Das heißt: Riemann'sche Mannigfaltigkeiten sind metrisierbar.
- (2) Für  $p_0 \in M$  ist  $d_{p_0} : M \rightarrow \mathbb{R}$ ;  $d_{p_0}(p) := d(p_0, p)$  ist stetig (gilt für beliebige metrische Räume).

(3) Ist  $M$  kompakt, so ist der Durchmesser von  $M$  beschränkt:

$$\text{Diam}(M) = \sup_{p,q \in M} d(p,q) < \infty$$

### Beweis

(1) Nach Satz 4.6 sind normale offene Bälle von genügend kleinem Radius  $r$  identisch mit metrischen Bällen von Radius  $r$  (bezüglich  $d$ ):

$$B_r^{(d)}(p) := \{q \in M \mid d(p,q) < r\} = \exp_p(B_r(0))$$

wobei  $B_r(0) = \{v \in T_p M \mid \|v\| < r\}$ .

$$(2) \quad |d_{p_0}(p) - d_{p_0}(q)| = |d(p_0, p) - d(p_0, q)| \leq d(p, q)$$

(3) Seien  $p, q$  beliebig aus  $M$  kompakt.

$$d(p, q) \leq d(p, p_0) + d(p_0, q) \leq 2 \max_{r \in M} d(p_0, r) < \infty$$

Das Maximum wird angenommen, da  $M$  kompakt und  $d_{p_0}$  stetig ist. ■

### Definition

$(M, d)$  ist vollständig genau dann, wenn jede Cauchy-Folge konvergiert.

$(M, \langle \cdot, \cdot \rangle)$  ist geodätisch vollständig genau dann, wenn für jedes  $p \in M$  die Exponentialabbildung  $\exp_p$  auf ganz  $T_p M$  definiert ist, also jede Geodätische  $\gamma(t)$  mit  $\gamma(0) = p$  ist für alle  $t \in \mathbb{R}$  definiert.

### Satz 7.2 (Hopf-Rinow, 1931)

Sei  $M$  eine zusammenhängende Riemann'sche Mannigfaltigkeit und  $p \in M$ . Folgende Aussagen sind äquivalent:

- (1)  $\exp_p$  ist auf ganz  $T_p M$  definiert.
- (2) Jede abgeschlossene Teilmenge  $A \subset M$  mit beschränktem Durchmesser ist kompakt.
- (3) Der metrische Raum  $(M, d)$  ist vollständig, das heißt, jede Cauchy-Folge konvergiert.
- (4)  $M$  ist geodätisch vollständig.

In diesem Falle gilt: Für jeden Punkt  $q \in M$  existiert mindestens eine Geodätische  $\gamma$ , welche  $p$  und  $q$  verbindet und für die gilt:  $L(\gamma) = d(p, q)$ , das heißt,  $\gamma$  realisiert die kürzeste Verbindung zwischen  $p$  und  $q$ .

### Beweis

Die Vorgehensweise ist:  $1 \implies 2 \implies 3 \implies 4 \implies 1$ .

$(1) \implies (2)$   $A$  ist abgeschlossen.

$$\text{Diam}(A) = \sup_{a,b \in A} d(a,b) \leq c < \infty.$$

Für ein festes  $q_0 \in A$  gilt für alle  $q \in A$ :

$$d(p, q) \leq d(p, q_0) + d(q_0, q) \leq d(p, q_0) + c =: R.$$

Das heißt:  $A \subset \overline{B_{2R}(p)} \stackrel{(1)}{=} \exp_p(\overline{B_{2R}(0)})$  ist kompakt, da  $\exp_p$  stetig und  $\overline{B_{2R}(0)} \subset T_p M$  kompakt ist. Also ist  $A$  als abgeschlossene Teilmenge einer kompakten Menge selbst auch kompakt.

(2)  $\implies$  (3) Eine Cauchy-Folge  $\{p_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  ist beschränkt: Wähle  $\varepsilon > 0$ , so gilt  $d(p_n, p_m) < \varepsilon$  für alle  $m, n \geq n_0(\varepsilon)$ . Also ist nach (2)  $\{p_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  in einer kompakten Menge enthalten. Insbesondere hat  $\{p_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  eine konvergente Teilfolge. Da  $\{p_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  eine Cauchy-Folge ist, konvergiert  $\{p_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  selbst.

(3)  $\implies$  (4) Sei  $\gamma : I \rightarrow M$  eine normale Geodätische in  $M$ . Zu zeigen:  $I$  ist offen und abgeschlossen in  $\mathbb{R}$ , also  $I = \mathbb{R}$ .

$I$  ist offen (und nicht leer): Aus der (lokalen) Eindeutigkeit und Existenz von Geodätischen (Satz 4.3) folgt: Ist  $\gamma(t_0)$  definiert, so auch  $\gamma(t_0 + t)$  für genügend kleine  $t$ .

$I$  abgeschlossen: Sei  $(t_n)_{n \in \mathbb{N}}$  eine monoton wachsende Folge in  $I$ , welche gegen  $t_*$  konvergiert. Zu zeigen:  $t_* \in I$ . Zunächst ist für  $m \geq n$

$$d(\gamma(t_n), \gamma(t_m)) \leq L(\gamma|_{[t_n, t_m]}) = |t_n - t_m|.$$

Daher ist  $(\gamma(t_n))_{n \in \mathbb{N}}$  eine Cauchy-Folge in  $M$  und nach Voraussetzung (3) konvergent.

Sei  $p := \lim_{n \rightarrow \infty} \gamma(t_n)$ . Sei  $W(p)$  eine total normale Umgebung um  $p$ . Satz 4.7 besagt: Es existiert ein  $\delta > 0$ , so dass jede normale Geodätische, welche in  $W(p)$  beginnt, auf  $(-\delta, \delta)$  definiert ist. Wähle  $n$  so groß, dass  $|t_n - t_*| < \frac{\delta}{2}$  und  $\gamma(t_n) \in W(p)$ . Dann ist  $\gamma(t)$  definiert für alle  $t$  mit  $|t_n - t| < \delta$ , also insbesondere für  $t_*$ , das heißt  $t_* \in I$  und  $I$  ist abgeschlossen.

(4)  $\implies$  (1) Klar.

Es gelte nun (1), und wir zeigen die letzte Aussage des Satzes.

1. Schritt: Wir finden einen Kandidaten für die Geodätische  $\gamma$ . Sei  $r := d(p, q)$  und für  $0 < \delta < r$  sei  $B_\delta(p)$  ein normaler Ball um  $p$  mit geodätischer Sphäre  $S_\delta(p) = \partial B_\delta(p)$  als Rand.  $S_\delta(p)$  ist kompakt.

Die Idee ist,  $x_0$  als denjenigen Punktauf dem Rand zu wählen, wo die stetige Funktion  $d_q|_{S_\delta} := d(q, \cdot)|_{S_\delta}$  ein Minimum annimmt. Dann existiert nach Voraussetzung (1) ein  $v \in T_p M$  mit  $\|v\| = 1$  und  $x_0 = \exp_p(\delta v)$ .

Definiere  $\gamma(s) := \exp_p(sv)$ ,  $s \in \mathbb{R}$ , was nach Voraussetzung (1) geht.

2. Schritt: Wir zeigen, dass  $\gamma$  die Punkte  $p$  und  $q$  verbindet. Zu zeigen ist also:  $\gamma(r) = q$  (bzw.  $d(q, \gamma(r)) = 0$ ). Betrachte dazu die Menge

$$A := \{s \in [0, r] \mid d(\gamma(s), q) = r - s \quad (*)\}.$$

Wir zeigen, dass  $A = [0, r]$ .  $A$  ist abgeschlossen.  $A \neq \emptyset$ , da  $0 \in A$ . Sei  $s_0 := \max A$ .

Annahme:  $s_0 < r$ . Betrachte wieder normalen Ball  $B_{\delta'}(\gamma(s_0))$  mit Rand  $S'$  um  $\gamma(s_0)$  mit  $\delta'$  so klein, dass  $q \notin B_{\delta'}(\gamma(s_0))$ .  $x'_0$  sei ein Punkt auf  $S'$  in dem,  $d_q|_{S'}$  ein Minimum annimmt.

**Behauptung:** Es gilt  $x'_0 = \gamma(s_0 + \delta')$  (\*\*).

**Beweis (der Behauptung)**

Zunächst ist

$$d(\gamma(s_0), q) = \delta' + \min_{x \in S'} d(x, q) = \delta' + d(x'_0, q).$$

Nach Voraussetzung (\*) und Definition von  $s_0$  ist  $d(\gamma(s_0), q) = r - s_0$ , also

$$r - s_0 = \delta' + d(x'_0, q). \quad (***)$$

Weiter mit der Dreiecks-Ungleichung:

$$d(p, x'_0) \geq d(p, q) - d(q, x'_0) \stackrel{(***)}{=} r - (r - s_0 - \delta') = s_0 + \delta'$$

Ebenso gilt für die stückweise differenzierbare Kurve  $c$ :

$$d(p, x'_0) \leq d(p, \gamma(s_0)) + d(\gamma(s_0), x'_0) \leq s_0 + \delta'$$

Die Kurve  $c$  ist also minimierend und somit eine Geodätische, hat also keinen „Knick“ bei  $s_0$ . Daher gilt:  $x'_0 = \gamma(s_0 + \delta')$ . ■

Aus (\*\*) und (\*\*\*) folgt:

$$r - (s_0 + \delta') \stackrel{(***)}{=} d(x'_0, q) \stackrel{(**)}{=} d(\gamma(s_0 + \delta'), q)$$

Also gilt (\*) für  $s_0 + \delta' > s_0$  im Widerspruch zur Definition von  $s_0$ . Daher ist die Annahme  $s_0 < r$  falsch und  $s_0 = r$ . ■

### Korollar

Eine zusammenhängende kompakte Riemann'sche Mannigfaltigkeit ist (geodätisch) vollständig.

### Beweis

$(M, d)$  ist vollständig, also nach Hopf-Rinow geodätisch vollständig. ■

### Korollar

$M$  sei eine zusammenhängende und vollständige, aber nicht kompakte, Riemann'sche Mannigfaltigkeit. Dann existiert ein geodätischer Strahl in  $M$ , also eine Geodätische  $\gamma : [0, \infty) \rightarrow M$ , welche für alle  $t \in [0, \infty)$  minimierend ist:  $d(\gamma(t), \gamma(0)) = t$ .

### Beweis

Wähle Folge  $(q_n)_{n \in \mathbb{N}}$  in  $M$ , so dass  $d(q_0, q_n) \rightarrow \infty$  für  $n \rightarrow \infty$ . Schreibe  $q_n = \exp(t_n v_n)$ ,  $\|v_n\| = 1$ . Die Folge  $(v_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset \{w \in T_{q_0}M \mid \|w\| = 1\}$  kompakt, also hat  $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$  eine konvergente Teilfolge, ohne Einschränkung sei diese  $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}: v_n \rightarrow v$ .

Nun haben wir die Geodätischen  $\gamma_n(t) := \exp_{q_0}(tv_n)$  und  $\gamma(t) := \exp_{q_0}(tv)$ . Zu zeigen ist  $d(\gamma(t_1), \gamma(t_2)) = |t_1 - t_2|$ : Aber  $\lim_{n \rightarrow \infty} \gamma_n(t) = \lim_{n \rightarrow \infty} \exp_{q_0}(tv_n) = \exp_{q_0}(\lim_{n \rightarrow \infty} tv_n) = \exp_{q_0}(tv) = \gamma(t) \implies$  Behauptung. ■

## 7.1. Schnittpunkt einer vollständigen Riemann'schen Mannigfaltigkeit

### Lemma 7.2

$M$  sei eine zusammenhängende vollständige Riemann'sche Mannigfaltigkeit und  $\gamma : [a, b] \rightarrow M$  sei eine normale Geodätische.

- (1) Falls keine weitere Geodätische zwischen  $\gamma(a)$  und  $\gamma(b)$  existiert, die kürzer ist als  $\gamma$ , dann ist  $\gamma$  minimierend auf  $[a, b]$ .
- (2) Falls eine Geodätische  $c \neq \gamma$  zwischen  $\gamma(a)$  und  $\gamma(b)$  mit  $L(c) = L(\gamma)$  existiert, so ist  $\gamma$  nicht mehr minimierend auf  $[a, b + \varepsilon]$  für ein  $\varepsilon > 0$ .
- (3) Ist  $\gamma$  minimierend auf einem Intervall  $I$ , so ist sie auch auf  $J \subseteq I$  minimierend.

### Beweis

- (1) Nach Hopf-Rinow existiert eine minimierende Geodätische  $\gamma^*$  zwischen  $\gamma(a)$  und  $\gamma(b)$ . Es ist dann  $L(\gamma^*) \leq L(\gamma)$ , also nach Voraussetzung  $L(\gamma^*) = L(\gamma)$ , also muss  $\gamma$  minimierend sein.
- (2) Sei  $c$  eine Geodätische zwischen  $\gamma(a)$  und  $\gamma(b)$ ,  $c \neq \gamma$ , mit  $L(c) = L(\gamma)$ . Wähle  $\delta > 0$ , so dass  $W = W(\delta)$  eine total normale Umgebung von  $\gamma(b)$  (siehe Satz 4.7). Betrachte die Kurve

$$\alpha(t) := \begin{cases} c(t), & t \in [a, b] \\ \gamma(t), & t \in [b, b + \frac{\delta}{2}] \end{cases}$$

$\alpha$  verbindet  $\gamma(a)$  und  $\gamma(b + \frac{\delta}{4})$ . Da  $W$  total normal ist existiert eine minimale Geodätische zwischen  $\alpha(b - \frac{\delta}{4})$  und  $\alpha(b + \frac{\delta}{4})$ .  $\alpha$  ist keine Geodätische (wegen dem „Knick“ bei  $\gamma(b)$ ), also ist die Länge des minimalen geodätischen Segments zwischen  $\alpha(b - \frac{\delta}{4})$  und  $\alpha(b + \frac{\delta}{4})$  echt kleiner als das entsprechende Stück von  $\alpha$ . Daher existiert eine Kurve von  $\gamma(a)$  nach  $\gamma(\frac{\delta}{4})$  die kürzer ist als  $\alpha|_{[a, b + \frac{\delta}{4}]}$ . Konstruktion ist  $L(\gamma|_{[a, b + \frac{\delta}{4}]}) = L(\alpha|_{[a, b + \frac{\delta}{4}]})$  und somit nicht mehr kürzeste nach  $\gamma(b)$ .

- (3) Annahme:  $\gamma$  nicht minimierend auf  $J \subseteq I$ , dann wäre  $\gamma$  nicht minimierend auf  $J$ . ■

Für  $p \in M$ ,  $v \in T_p M$ ,  $\|v\| = 1$  sei  $\gamma_v := \exp_p(tv)$  die eindeutige normale Geodätische mit  $\gamma_v(0) = p$ ,  $\gamma'_v(0) = v$ . Setze  $I_v := \{t \in [0, \infty) \mid d(\gamma_v(t), \gamma_v(0)) = t\}$ , das heißt:  $\gamma$  minimierend

zwischen  $\gamma_v(0)$  und  $\gamma_v(t)$ .  $I_v \neq \emptyset$ , da  $[0, \varepsilon] \subseteq I_v$  für genügend kleines  $\varepsilon$ .  $I_v$  ist abgeschlossen, da  $d(\gamma_v(0), \cdot)$  stetig. Es gilt also entweder  $I_v = [0, \infty)$ , also  $\gamma_v$  ist geodätischer Strahl, oder es existiert  $s(v) > 0$ , so dass  $I_v = [0, s(v)]$ . In diesem Fall heißt  $\gamma_v(s(v))$  Schnittpunkt von  $p$  längs  $\gamma_v$ .

**Bemerkung:** (a) Es gilt (ohne Beweis): Die Abbildung

$$s : E_p M := \{v \in T_p M \mid \|v\| = 1\} \rightarrow \mathbb{R} \cup \{\infty\} \\ v \mapsto s(v)$$

ist stetig.

(b) Für kompakte  $M$  ist  $s(v) < \infty$  für alle  $v \in E_p M$ ,  $p \in M$ .

(c) Ist  $M$  nicht kompakt, so existiert nach dem Korollar ein geodätischer Strahl und somit  $p \in M$  und  $v \in T_p M$ , so dass  $s(v) = \infty$ .

Für ein beliebiges, aber festes  $p \in M$  ist

$$U_p := \{w \in T_p M \setminus \{0\} \mid \|w\| < s(\frac{w}{\|w\|})\} \cup \{0\}$$

eine offene Umgebung von  $0 \in T_p M$ . Der Rand von  $U_p$ ,  $\partial U_p$ , ist die Menge  $\{w \in T_p M \mid \|w\| = s(\frac{w}{\|w\|})\} = \{s(v) \cdot v \in T_p M \mid v \in E_p M\}$ . Der Schnittpunkt von  $p \in M$  ist

$$\text{Cut}(p) := \exp_p(\partial U_p).$$

### Beispiel

In  $(S^n, \text{kan})$  sind die Geodätischen mit Bogenlänge parametrisierte Großkreise der Länge  $2\pi$ . Also sind Geodätische  $\gamma_v(t)$  minimierend für  $t < \pi$ . Also ist für alle  $p \in S_1^n$  ist  $U_p = \{w \in T_p M \mid \|w\| < \pi\}$ , also

$$\exp_p(U_p) = \{q \in S^n \mid d(p, q) < \pi\} = S^n \setminus \{-p\}$$

und

$$\text{Cut}(p) = \{q \in S^n \mid d(p, q) = \pi\} = \{-p\}.$$

Man kann also die Sphäre disjunkt zerlegen in  $\exp_p(U_p)$  und  $\exp_p(\partial U_p) = \text{Cut}(p)$ . Dies gilt allgemein!

**Bemerkung:** Es gilt (ohne Beweis) der Satz: (Berker 1980)

Ist  $(M, \langle \cdot, \cdot \rangle)$  eine zusammenhängende kompakte Riemann'sche Mannigfaltigkeit mit  $\text{Diam}(M) = \pi$  und  $\text{Cut}(p) = \{\text{Punkt}\}$  für alle  $p \in M$ , so ist  $(M, \langle \cdot, \cdot \rangle)$  isometrisch zu  $(S^n, \text{kan})$ . Solche Mannigfaltigkeiten heißen „Wiedersehen-Mannigfaltigkeit“.

### Satz 7.3 (Zerlegungssatz)

Sei  $M$  eine zusammenhängende, vollständige Riemann'sche Mannigfaltigkeit. Dann gilt für jeden Punkt  $p \in M$  die disjunkte Zerlegung

$$M = \exp_p(U_p) \uplus \text{Cut}(p).$$

### Beweis

Nach Hopf-Rinow gibt es für jeden Punkt  $q \in M$  eine minimale Geodätische  $\gamma_v$  zwischen  $p$  und  $q$  mit  $q = \gamma_v(t_0 v)$ ,  $t_0 \leq s(v)$ ,  $\|v\| = 1$ . Insbesondere ist  $t_0 v \in \overline{U_p} = U_p \cup \partial U_p$ . Da  $q$  beliebig ist  $M \subset \exp_p(\overline{U_p}) = \exp_p(U_p) \cup \exp_p(\partial U_p) = \exp_p(U_p) \cup \text{Cut}(p) \subset M$ .

Noch zu zeigen ist:  $\exp_p(U_p) \cap \text{Cut}(p) = \emptyset$ . Wir nehmen an, dass  $q \in \exp_p(U_p) \cap \text{Cut}(p)$ .

Da  $q \in \exp_p(U_p)$  existiert eine minimierende Geodätische  $\gamma : [a, b] \rightarrow M$  mit  $\gamma(a) = p$  und  $\gamma(b) = q$ .  $U_p$  ist offen also  $\gamma$  auch minimierend auf  $[a, b + \varepsilon]$  für  $\varepsilon$  genügend klein.

$q \in \text{Cut}(p)$  heißt:  $q$  ist Schnittpunkt einer von  $p$  ausgehenden Geodätischen, das heißt es existiert eine minimierende Geodätische  $c : [\alpha, \beta] \rightarrow M$  mit  $c(\alpha) = p$ ,  $c(\beta) = q$ , die nach  $c(\beta)$  nicht mehr minimierend ist (insbesondere  $c \neq \gamma$ ), aber mit  $L(c|_{[\alpha, \beta]}) = L(\gamma|_{[a, b]}) = d(p, q)$ . Nach Lemma 2 (2) angewandt auf  $\gamma$  ist die Geodätische  $\gamma$  nicht mehr minimierend nach  $\gamma(b)$ , im Widerspruch zur Annahme! ■

### Weitere Eigenschaften von $\text{Cut}(p)$

(a)  $\text{Cut}(p)$  hat keine inneren Punkte.

#### Beweis

Wir nehmen an es existiert ein  $q$  im Inneren von  $\text{Cut}(p)$  längs  $\gamma$ . Dann existiert ein  $q' \in \gamma \cap \text{Cut}(p)$  „vor“  $q$ . Nach Definition des Schnittpunktes existiert eine minimierende Geodätische  $c$  zwischen Punkten  $p$  und  $q'$ .

1. Fall:  $c = \gamma$ : nach Definition des Schnittpunktes ist dann  $\gamma$  nicht minimierend nach  $q'$ , im Widerspruch zur Annahme.
2. Fall:  $c \neq \gamma$ : Nach Lemma 2 (2) ist  $\gamma$  nicht mehr minimierend „nach“  $q'$ , im Widerspruch zur Annahme. ■

(b)  $\exp_p|_{U_p}$  ist injektiv. Es gilt sogar ohne Beschränkung:  $\exp_p|_{U_p}$  ist eine differenzierbare Einbettung. Das heißt: für  $q \in \exp_p(U_p)$  existiert genau eine minimierende Geodätische von  $p$  nach  $q$ .

#### Beweis

Sei  $q \in \exp_p(U_p)$  und  $\exp_p(v_1) = q = \exp_p(v_2)$ . Nehmen wir an, dass  $v_1 \neq v_2$ , so hat man zwei minimierende Geodätische  $\gamma_1 \neq \gamma_2$  zwischen  $p$  und  $q$ , das heißt nach Definition des Schnittpunktes bzw. Lemma 2(4), dass  $q \in \text{Cut}(p)$ , im Widerspruch zur Annahme. ■

- (c) Für ein kompaktes  $M$  nimmt die stetige Funktion  $s : E_p M \rightarrow \mathbb{R}$  ein Maximum bzw. Minimum an und ist somit beschränkt. Also ist  $\overline{U_p} = \{tv \in T_p M \mid v \in E_p M, 0 \leq t \leq s(v)\}$  homöomorph zum Einheitsball  $B_p := \{tv \in T_p M \mid v \in E_p M, 0 \leq t \leq 1\}$ .
- (d) Da  $\exp_p : \overline{U_p} \rightarrow M$  surjektiv ist (Satz 7.3) und auf  $U_p$  injektiv ist, erhält man eine kompakte Riemann'sche Mannigfaltigkeit topologisch dadurch, dass man die Randpunkte eines Einheitsballs „geeignet“ identifiziert (beispielsweise werden für  $S^n$  alle Punkte identifiziert). Die topologische Komplexität einer kompakten Mannigfaltigkeit steckt also im Schnittpunkt.



**Definition**

Der Injektivitätsradius von  $p$  ist definiert als

$$\text{Inj}(p) := \text{Dist}(p, \text{Cut}(p)) .$$

Der Injektivitätsradius von  $M$  ist dann

$$\text{Inj}(M) := \inf_{p \in M} \text{Inj}(p) .$$

**Beispiel**

$\text{Inj}(S^n) = \pi$  und  $\text{Inj}(p) = \pi$  für jeden Punkt  $p \in S^n$ .

**Satz 7.4**

(Ohne Beweis, vergleiche do Carmo, Kapitel 13, Proposition 2.2)

- (1) Sei  $q \in \text{Cut}(p)$  mit  $l := d(p, q) = \text{Dist}(p, \text{Cut}(p)) = \text{Inj}(p)$ . Dann gilt entweder, dass es eine Geodätische  $\gamma$  zwischen  $p$  und  $q$  gibt, so dass  $q$  zu  $p$  längs  $(\gamma)$  konjugiert ist (das heißt, es gibt ein Jacobi-Feld  $J$  längs  $\gamma$ , so dass  $J(p) = 0 = J(q)$ ), oder es existieren genau zwei minimierende Geodätische  $\gamma$  und  $\tau$  zwischen  $p$  und  $q$  mit  $\gamma'(l) = -\tau'(l)$ .
- (2) Falls für  $p \in M$  gilt:  $\text{Inj}(p) = \text{Inj}(M)$ , also  $\text{Dist}(p, \text{Cut}(p))$  minimal in  $M$ , so gilt: Entweder ist  $q$  zu  $p$  konjugiert längs einer minimierenden Geodätischen oder  $q$  ist Mittelpunkt einer geschlossenen Geodätischen (das heißt: differenzierbar in  $p$  und  $q$ ).

Beispiel für konjugierte Punkte: Breitner-Fläche (Vesperdose)

**Beispiel**

- (0)  $(\mathbb{R}^n, \text{kan})$  hat keine Schnittpunkte, da die Geodätischen Geraden sind. Also  $\text{Cut}(p) = \emptyset$  für jeden Punkt  $p \in \mathbb{R}^n$ , und laut Zerlegungssatz gilt  $\mathbb{R}^n = \exp_p(T_p M)$ .
- (1) Hyperbolische Ebene  $(H^2, \frac{1}{y^2} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix})$ : Auch hier gilt  $\text{Cut}(p) = \emptyset$  für jeden Punkt  $p \in H^2$ , also  $H^2 = \exp_p(T_p H^2)$ .

**Bemerkung:** Allgemeiner gilt der Satz von Hadamard-Cartan: Für einfach zusammenhängende und zusammenhängende Riemann'sche Mannigfaltigkeit  $M$  mit nicht-positiver Schnittkrümmung. So gilt  $\text{Cut}(p) = \emptyset$  für alle  $p \in M$ .

- (2)  $(\mathbb{P}^n, \text{kan}) = (S^n / \sim, \text{die von } S^n \text{ indizierte Metrik})$ , wobei  $p \sim q$  genau dann, wenn  $p$  und  $q$  Antipoden sind. Hier sind Geodätische minimierend für  $d(p, \cdot) < \frac{\pi}{2}$ . Sei  $pr : S^n \rightarrow \mathbb{P}^n$ ;  $pr(p) := [p] = \{p, -p\}$  die Projektion von  $S^n$  auf  $\mathbb{P}^n$ . Dann ist

$$\text{Cut}(p) = pr(\text{„Äquator“}) = pr(q \in S^n \mid d(p, q) = \frac{\pi}{2}) = S^{n-1} / \sim = \mathbb{P}^{n-1} .$$

Weiter ist  $\exp_p(U_p)$  die offene „obere Hemisphäre“ und damit diffeomorph zu  $\mathbb{R}^n$ , etwa durch die Zentralprojektion  $Z : S_-^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  oder die Orthogonalprojektion  $O : S_-^n \rightarrow D^n = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \|x\| < 1\}$ .

Nach dem Zerlegungssatz gilt also topologisch betrachtet:

$$\mathbb{P}^n = \exp_p(U_p) \uplus \text{Cut}(p) \cong \mathbb{R}^n \uplus \mathbb{P}^{n-1}$$

Mit Induktion nach  $n = \dim \mathbb{P}^n$  folgt mit  $\mathbb{R}^0 := \{0\}$ :

$$\mathbb{P}^n = \mathbb{R}^n \uplus \mathbb{R}^{n-1} \uplus \dots \uplus \mathbb{R}^1 \uplus \mathbb{R}^0$$

Beispielsweise ist  $\mathbb{P}^2 = \mathbb{R}^2 \uplus \mathbb{R}^1 \uplus \mathbb{R}^0$ . Dies nennt man auch eine Zellenzerlegung des projektiven Raumes.

(3) Rotationszylinder.

(4) Flacher Torus  $T^2 = S^1 \times S^1 = \mathbb{R}/\mathbb{Z} \times \mathbb{R}/\mathbb{Z}$ .

**Bemerkungen:** (1) Der Schnittort ist im allgemeinen nicht differenzierbar, sondern in zwei-dimensionalen Mannigfaltigkeiten ein Graph, also ein simplizialer 1-Komplex.

(2) Für obige Beispiele  $M$  gilt immer, dass die Schnittorte eines jeden Punktes gleich aussehen. Dies liegt daran, dass  $M$  jeweils homogen war, also für beliebige Punkte  $p, q \in M$  existiert eine Isometrie  $\varphi$  mit  $\varphi(p) = q$ .

### Beispiel

für einen Raum mit  $\text{Cut}(p) \neq \text{Cut}(q)$ : Rotationsellipsoid mit Rotationsachse  $z$ -Achse.

## 7.2. Volumenberechnung mit dem Zerlegungs-Satz

Sei zuerst  $G \subset M$  ein Gebiet, also offen, zusammenhängend und relativ kompakt, das ganz in einer Karte  $(U, \varphi)$  liegt (mit  $\varphi(p) = (x^1, \dots, x^n)$  als Koordinaten).

In der linearen Algebra bezeichnen wir das Volumen des von  $a_1, \dots, a_n \in \mathbb{R}^n$  aufgespannten Parallelepipeds als  $V = \sqrt{\det(\langle a_i, a_j \rangle)}$  (Gramsche Determinante).

### Definition

Das Volumen des Gebietes bezeichnen wir als

$$\text{vol}(G) := \int_{\varphi(G)} \sqrt{\det(g_{ij}(\varphi^{-1}(x)))} dx^1 \dots dx^n =: \int_{\varphi(G)} d\text{vol}$$

mit  $g_{ij}(p) = \langle \frac{\partial}{\partial x^i}|_p, \frac{\partial}{\partial x^j}|_p \rangle_p$ .

Nach der Substitutionsregel für Integrale gilt:  $\text{vol}(G)$  ist unabhängig von der gewählten Karten und invariant unter Isometrien.

**Bemerkung:** Um das Volumen eines kompakten Gebietes  $G$ , das nicht ganz in einem Kartengebiet liegt, zu definieren benutzt man eine Überdeckung von  $G$  durch (endlich viele) Karten  $(U_i, \varphi_i)$  und eine zugehörige Zerlegung der Eins  $(f_i)_{i \in I}$ . Dann setzt man:

$$\text{vol}(G) := \sum_{i \in I} \int_{\varphi_i(G \cap U_i)} f_i d\text{vol}_i$$

wobei  $d\text{vol}_i := \sqrt{\det(g_{ij}(\varphi_i^{-1}(p)))} dx_i^1 \dots dx_i^n$ .

Man kann zeigen, dass  $\text{vol}(G)$  nicht von der Wahl der Karten und der entsprechenden Zerlegung der Eins abhängt.

**Beispiele**

(1) In der Flächentheorie ist  $d \text{ vol} = dA = \sqrt{EG - F^2} du dv$ .

(2)  $(\mathbb{R}^n, \text{id})$ . Hier ist  $d \text{ vol} = dx^1 \dots dx^n$  bezüglich cartesischen Koordinaten.

Bezüglich Polarkoordinaten  $(t, u)$ ,  $u \in S^{n-1}$ , ist  $d \text{ vol} = t^{n-1} dt d\sigma$ , wobei  $d\sigma$  das Volumenelement auf der Einheitssphäre  $S^{n-1} \subset \mathbb{R}^n$  ist.

Wir wissen:

- $M = \exp_p(U_p) \uplus \text{Cut}(p)$ .
- $\text{Cut}(p)$  hat keine inneren Punkte, also ist  $\text{vol}(M) = \text{vol}(\exp_p(U_p))$ .
- $\exp_p|_{U_p}$  ist ein Diffeomorphismus auf das Bild in  $M$ .

Das heißt: Wir können  $\exp_p^{-1} : \exp_p(U_p) \rightarrow T_p M \cong \mathbb{R}^n$  als Karte benutzen.

Sei  $c(t) := \exp_p(tu)$  eine normale Geodätische und  $\{u, e_2, \dots, e_n\}$  eine Orthonormalbasis von  $T_p M$ . Weiter seien  $Y_i(t)$ ,  $i = 1, \dots, n$ , die eindeutigen Jacobifelder längs  $c(t)$  mit  $Y_i(0) = 0$  und  $Y_i(0) = e_i$ . Es gilt (siehe 7.1):  $d \exp_p|_{tu}(u) = c'(t)$  und  $d \exp_p|_{tu}(te_i) = Y_i(t)$ ,  $i = 2, \dots, n$ .

$(t = x^1, \dots, x^n)$  seien die Koordinaten in  $T_p M$  bezüglich der Orthonormalbasis  $\{u, e_2, \dots, e_n\}$ . Dann gilt:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t}|_{c(t)} &= c'(t) \text{ und } c'(0) = u \\ \frac{\partial}{\partial x^i}|_{c(t)} &= \frac{\partial}{\partial s}|_0 \exp_p(tu + se_i) = d \exp_p|_{tu}(e_i) = \frac{1}{t} Y_i(t) \end{aligned}$$

Also:

$$\begin{aligned} g_{11}(c(t)) &= \left\langle \frac{\partial}{\partial t}, \frac{\partial}{\partial t} \right\rangle_{c(t)} = 1 \\ g_{1k}(c(t)) &= \left\langle \frac{\partial}{\partial t}, \frac{\partial}{\partial x^k} \right\rangle_{c(t)} = 0 \\ g_{ij}(c(t)) &= \left\langle \frac{\partial}{\partial x^i}, \frac{\partial}{\partial x^j} \right\rangle_{c(t)} = \frac{1}{t^2} \langle Y_i(t), Y_j(t) \rangle_{c(t)} \end{aligned}$$

und

$$\sqrt{\det(g_{ij}(c(t)))} = \frac{1}{t^{n-1}} \sqrt{\det \underbrace{\langle Y_i, Y_j \rangle_{c(t)}}_{(n-1) \times (n-1)\text{-Matrix}}} =: J(u, t)$$

Also:

$$\begin{aligned} d \text{ vol} &= \sqrt{\det(g_{ij})} dx^1 \dots dx^n \\ &= J(u, t) x^1 \dots dx^n = J(u, t) t^{n-1} dt du \end{aligned}$$

wobei  $du$  das euklidische Volumen-Element auf der Einheitssphäre  $S^{n-1} \subset T_p M$  ist.

Daraus können wir folgende Volumenformel ableiten:

## 7. Riemann'sche Mannigfaltigkeiten als metrische Räume

Ist  $s(u) \in \mathbb{R} \cup \{\infty\}$  der Abstand von  $p$  zum Schnittpunkt von  $p$  in Richtung  $u \in T_p M$ ,  $\|u\| = 1$ , so gilt:

$$\begin{aligned} \text{vol}(M) &= \text{vol}(\exp_p(U_p)) \\ &= \int_{S^{n-1}} \int_0^{s(u)} J(u, t) t^{n-1} dt du \end{aligned}$$

Allerdings kann man im allgemeinen  $J(u, t)$  nicht explizit berechnen, nur abschätzen.

Einfache Beispiele sind Mannigfaltigkeiten mit konstanter Krümmung.

- (1)  $(\mathbb{R}^n, \text{kan})$  mit Schnittkrümmung konstant 0. Hier ist  $Y_i(t) = tE_i(t)$ , wobei  $E_i(t) = \|_{c(t)} e_i$  ein Parallelfeld längs  $c$  ist. Hier ist  $J(t, u) = 1$ .
- (2)  $(S^n, \text{kan})$ . Hier ist  $Y_i(t) = \sin(t)E_i(t)$ . Also

$$\text{vol}(S^n) = \int_{S^{n-1}} \int_0^\pi \left( \frac{\sin(t)}{t} \right)^{n-1} t^{n-1} dt du = \text{vol}(S^{n-1}) \int_0^\pi (\sin t)^{n-1} dt$$

Diese Rekursionsformel führt zu:

$$\begin{aligned} \text{vol}(S^{2n}) &= \frac{2(2\pi)^n}{(2n-1)(2n-3) \cdots 3 \cdot 1} \\ \text{vol}(S^{2n+1}) &= 2 \frac{\pi^{n+1}}{n!} \end{aligned}$$

Das heißt auch:  $\text{vol}(S^n) \rightarrow 0$  für  $n \rightarrow \infty$ .

- (3) Hyperbolische Räume  $H^n$ . Hier ist  $s(u) = \infty$  für alle  $u \in S^{n-1} \subset T_p M$ .  $Y_i(t) = \sinh(t)E_i(t)$ .  $J(u, t) = \left( \frac{\sinh(t)}{t} \right)^{n-1}$ . Daraus ergibt sich  $\text{vol}(H^n) = \infty$ . Betrachten wir also einen Ball von Radius  $R$  (das heißt  $B_R(p) := \{q \in H^n, d(p, q) \leq R\}$ ):

$$\text{vol}(B_R(p)) = \int_{S^{n-1}} \int_0^R (\sinh t)^{n-1} dt du = \text{vol}(S^{n-1}) \int_0^R (\sinh t)^{n-1} dt$$

Für sehr große  $R$  wächst  $\text{vol}(B_R(p))$  wie  $e^{(n-1)R}$ . Das Volumenwachstum von Bällen vom Radius  $R$  in hyperbolischen Räumen ist exponentiell in  $R$ . Vergleiche das mit dem Volumenwachstum von Bällen von Radius  $R$  in  $\mathbb{R}^n$ , welches polynomial ist.

Diese Beobachtungen waren Ausgangspunkt um den Krümmungsbegriff in allgemeinen metrischen Räumen einzuführen.

# A. Satz um Satz (hüpft der Has)

1.1. Basis-Satz . . . . .	13
1.2. Inverser Funktionensatz für Mannigfaltigkeiten . . . . .	17
1.3. Tangentialbündel . . . . .	19
1.4. Existenz und Eindeutigkeit der Integralkurven . . . . .	22
2.1. Existenz der Riemann'schen Metrik . . . . .	26
2.2. „Zerlegung der Eins“ . . . . .	27
3.1. Eindeutigkeit der Parallelverschiebung . . . . .	31
3.2. Äquivalente Formulierung der Verträglichkeit . . . . .	32
3.3. Levi-Civita-Zusammenhang . . . . .	33
4.1. Lokale Integralkurve . . . . .	37
4.2. Lokale Geodätische . . . . .	37
4.3. . . . . .	38
4.4. . . . . .	38
4.5. Gauß-Lemma . . . . .	40
4.6. Geodätische sind lokal minimierend . . . . .	42
4.7. . . . . .	42
5.1. . . . . .	45
5.2. Symmetrie-Eigenschaften . . . . .	46
6.1. . . . . .	53
6.2. . . . . .	54
7.1. Längenmetrik . . . . .	58
7.2. Hopf-Rinow, 1931 . . . . .	59
7.3. Zerlegungssatz . . . . .	63
7.4. . . . . .	65



# Stichwortverzeichnis

- $C^\infty$ , 7
- $C^\infty(M)$ , 11
- $P^n\mathbb{R}$ , 8
- Abbildung
  - differenzierbare, 11
- Affiner Zusammenhang, 29
- Atlas, 7
  - vollständiger, 8
- Basisfeld, 20
- Derivation, 20
- Diffeomorphismus, 11
  - lokaler, 17
- Differential, 15
- Differenzierbare Abbildung, 11
- Einbettung, 18
- Exponential-Abbildung, 38
- Funktionskeim, 12
- geodätisch vollständig, 59
- Geodätische, 35
- geodätische Normalkoordinaten, 39
- geodätische Normalumgebung, 39
- geodätischer Ball, 39
- geodätischer Kreis, 55
- geodätisches Vektorfeld, 36
- glatt
  - Abbildung, 11
  - Funktion, 7
- Immersion, 18
  - isometrische, 24
- Injektivitätsradius, 65
- Isometrie, 23
- Isometrische Immersion, 24
- Jacobi-Gleichung, 52
- Jacobi-Matrix, 16
- Karte, 7
- Koordinaten-Vektorfeld, 20
- Koordinatenlinie, 18
- Koordinatensystem, 7
- Kozul-Formel, 33
- Krümmungstensor, 45
- Kurve, 17
- Levi-Civita-Zusammenhang, 33
- Lie-Algebra, 21
- Lie-Gruppe, 10
- Lie-Klammer, 21
- lokale Isometrie, 23
- Lokaler Diffeomorphismus, 17
- Mannigfaltigkeit
  - $n$ -dimensional und differenzierbar, 8
  - Riemann'sche, 23
- Metrik
  - Riemann'sche, 23
- normale Geodätische, 35
- paralleles Vektorfeld, 30
- paramterisierte Fläche, 39
- Produkt-Mannigfaltigkeit, 10
- Reell-Projektiver Raum, 8
- Riemann'sche Krümmungstensor, 45
- Riemann'sche Mannigfaltigkeit, 23
- Riemann'sche Metrik, 23
- Riemann'sche Struktur, 23
- Schnittort, 63
- Schnittpunkt, 63
- Sphärische Geometrie, 24
- Struktur
  - Riemann'sche, 23
  - standard-differenzierbare, 8
- Submersion, 18
- symmetrischer Zusammenhang, 33
- Tangentialabbildung, 15
- Tangentialbündel, 19

Tensorfeld, 45

total normale Umgebung, 42

Untermannigfaltigkeit

    allgemein, 18

    offen, 10

    reguläre, 18

Vektorfeld, 20

    geodätisches, 36

verträglicher Zusammenhang, 31, 32

vollständig, 59

Volumen, 66

Zusammenhang

    affiner, 29

    verträglicher, 31, 32