10. Exakte Differentialgleichungen

Vereinbarung: In diesem Paragraphen sei $D \subseteq \mathbb{R}^2$ stets ein Gebiet, $P, Q \in C(D, \mathbb{R})$ und $(x_0, y_0) \in D$

Wir betrachten die Gleichung $P(x,y) + Q(x,y)y' = 0$. Diese Gleichung schreibt man in der Form:

(i) $P(x,y)\mathrm{d}x + Q(x,y)\mathrm{d}y = 0$. Weiter betrachten wir das AWP:

$$(ii)\quad \begin{cases} P(x,y)\mathrm{d}x + Q(x,y)\mathrm{d}y = 0 \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$$

Erinnerung: Analysis 2, Paragraph 14

(1) Eine Funktion $F \in C^1(D, \mathbb{R})$ heißt eine Stammfunktion von $(P, Q) :\iff F_x = P, F_y = Q$.

(2) Ist D sternförmig und sind $P, Q \in C^1(D, \mathbb{R})$, so gilt: (P, Q) hat auf D eine Stammfunktion $\iff P_y = Q_x$ auf D.

Definition
Die Gleichung (i) heißt auf D exakt $:\iff (P, Q)$ besitzt auf D eine Stammfunktion.

Satz
Die Gleichung (i) sei auf D exakt und F sei eine Stammfunktion (P, Q) auf D.

(1) Sei $I \subseteq \mathbb{R}$ ein Intervall, $y : I \to \mathbb{R}$ differenzierbar und $(x, y(x)) \in D\ \forall x \in I$. y ist eine Lösung von (i) auf $I \iff \exists c \in \mathbb{R} :\ F(x, y(x)) = c\ \forall x \in I$.

(2) Ist $Q(x_0, y_0) \neq 0$, so existiert eine Umgebung U von x_0: das AWP (ii) hat auf U genau eine Lösung.

Beweis

(1) $g(x) := F(x, y(x))\ (x \in I)$; g ist differenzierbar auf I und $g'(x) = F_x(x, y(x)) \cdot 1 + F_y(x, y(x))y'(x) = P(x, y(x)) + Q(x, y(x))y'(x)$. y ist eine Lösung von $(i) \iff g'(x) = 0\ \forall x \in I \iff \exists c \in \mathbb{R} :\ g(x) = c\ \forall x \in I \iff \exists c \in \mathbb{R} :\ F(x, y(x)) = c\ \forall x \in I$.

(2) $f(x,y) := F(x,y) - F(x_0, y_0)\ ((x,y) \in D)$. $f(x_0, y_0) = 0, f_y(x_0, y_0) = F_y(x_0, y_0) = Q(x_0, y_0) \neq 0$. Analysis 2, Paragraph 10 $\implies \exists$ Umgebung U von x_0, V von y_0 und *genau* eine differenzierbare Funktion $y : U \to V$ mit: $U \times V \subseteq D, y(x_0) = y_0$ und $f(x, y(x)) = 0\ \forall x \in U \implies F(x, y(x)) = F(x_0, y_0)\ \forall x \in U \overset{(1)}{\implies}$ Behauptung. ∎

Beispiele:

(1)

$$\text{AWP: } \begin{cases} x\mathrm{d}x + y\mathrm{d}y = 0 \\ y(0) = 1,\ (D = \mathbb{R}^2, P = x, Q = y) \end{cases}$$

$P_y = Q_x \implies$ die Dgl. ist auf D exakt. $F(x,y) = \frac{1}{2}(x^2+y^2)$ ist eine Stammfunktion von (P,Q) auf D. $\frac{1}{2}(x^2+y^2) = c \iff y^2 = 2c - x^2 \iff y(x) = \pm\sqrt{2c-x^2}$ $(c \in \mathbb{R})$ allgemeine Lösung der Dgl. $1 = y(0)^2 - 2c \implies c = \frac{1}{2}$. Lösung des AWPs: $y(x) = +\sqrt{1-x^2}$ auf $(-1,1)$.

(2)

$$\text{AWP: } \begin{cases} x\mathrm{d}x + y\mathrm{d}y = 0 \\ y(0) = 0 \end{cases}$$

$0 = y(0)^2 = 2c \implies c = 0 \implies y^2 = -x^2$, Widerspruch! Das AWP ist nicht lösbar.

(3)

$$\text{AWP: } \begin{cases} x\mathrm{d}x - y\mathrm{d}y = 0 \\ y(0) = 0 \end{cases}$$

$F(x,y) = \frac{1}{2}(x^2-y^2)$ ist eine Stammfunktion von (P,Q) auf $\mathbb{R}^2$. $\frac{1}{2}(x^2-y^2) = c \iff y^2 = x^2 - 2c$; also: $y(x) = \pm\sqrt{x^2-2c}$. $0 = y(0)^2 = -2c \implies c = 0$. $y(x) = x$ und $y(x) = -x$ sind Lösungen des AWPs auf $\mathbb{R}$.

(4) $D = (0,\infty) \times (0,\infty)$; $(*)\ \underbrace{\frac{1}{y}\mathrm{d}x}_{=P} + \underbrace{\frac{1}{x}\mathrm{d}y}_{=Q} = 0$. $P_y = -\frac{1}{y^2}$, $Q_x = -\frac{1}{x^2} \implies (*)$ ist auf D nicht exakt. Multiplikation von $(*)$ mit $\underbrace{xy}_{\neq 0} \implies (**)\ x\mathrm{d}x + y\mathrm{d}y = 0$.

Definition
Sei $\mu \in C(D,\mathbb{R})$ und $\mu(x,y) \neq 0\ \forall (x,y) \in D$.
μ heißt ein **Multiplikator** von (i) auf $D :\iff$ (iii) $(\mu P)dx + (\mu Q)dy = 0$ ist auf D exakt.

Bemerkung: Es sei $\mu \in C(D,\mathbb{R})$ und $\mu(x,y) \neq 0\ \forall (x,y) \in D$

(1) Ist $I \subseteq \mathbb{R}$ ein Intervall, $y(I) \to \mathbb{R}$ eine Funktion und $(x,y(x)) \in D\ \forall x \in I$, so gilt: y ist Lösung von (i) auf $I \iff y$ ist Lösung von (iii) auf I.

(2) Ist D sternförmig und sind $P, Q, \mu \in C^1(D,\mathbb{R})$, so gilt: μ ist Multiplikator von (i) auf D $\iff (\mu P)_y = (\mu Q)_x$ auf D.

(3) Hängt $f := \frac{1}{Q}(P_y - Q_x)$ nur von x ab, so ist $\mu(x) = e^{\int f(x)dx}$ ein Multiplikator.
Hängt $f := \frac{1}{P}(P_y - Q_x)$ nur von y ab, so ist $\mu(x) = e^{-\int f(y)dy}$ ein Multiplikator.

Beispiel

$$(*) \quad \underbrace{(2x^2y + 2xy^3 + y)}_{=P}\,dx + \underbrace{(3y^2 + x)}_{=Q}\,dy = 0$$

$P_y = 2x^2 + 6xy^2 + 1$; $Q_x = 1 \implies (*)$ ist nicht exakt. $\frac{P_y - Q_x}{Q} = 2x \implies \mu(x) = e^{x^2}$ ist ein Multiplikator. Lösung von $(*)$ in impliziter Form: $(xy(x) + y(x)^3)e^{x^2} = c$ $(c \in \mathbb{R})$.