

# 2 Konvergenz von Folgen

## 2.1 Einfache Eigenschaften

**Definition 2.1.** Eine Abbildung  $A : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{C}$  heißt *Folge*. Man schreibt  $a_n$  statt  $A(n)$  für  $n \in \mathbb{N}$  und  $(a_n)_{n \geq 1}$  oder  $(a_n)$  statt  $A$ . Wenn  $a_n \in \mathbb{R} \forall n \in \mathbb{N}$ , so heißt  $(a_n)$  *reelle Folge*.

**Definition 2.2.** Seien  $(a_n)$  eine Folge und  $a \in \mathbb{C}$ .  $(a_n)$  *konvergiert* gegen  $a$ , wenn es zu jedem  $\varepsilon > 0$  ein  $N_\varepsilon \in \mathbb{N}$  gibt, sodass  $|a_n - a| \leq \varepsilon$  für alle  $n \geq N_\varepsilon$ , wobei  $n \in \mathbb{N}$ , also

$$\forall \varepsilon > 0 \exists N_\varepsilon \in \mathbb{N} \forall n \geq N_\varepsilon : |a_n - a| \leq \varepsilon.$$

$a$  heißt dann *Grenzwert* (oder *Limes*) von  $(a_n)$  und man schreibt „ $a = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n$ “ oder „ $a_n \rightarrow a$  für  $n \rightarrow \infty$ “. Wenn  $(a_n)$  keinen Grenzwert hat, so heißt  $(a_n)$  *divergent* (div.).

*Bemerkung.*  $|a_n - a| \leq \varepsilon \iff a_n \in \overline{B}(a, \varepsilon) \iff$  Abstand von  $a_n$  und  $a$  ist kleiner als  $\varepsilon$

*Bemerkung.* Wenn  $a_n \rightarrow 0$  für  $n \rightarrow \infty$ , dann heißt  $(a_n)$  Nullfolge (NF). Somit  $a_n \rightarrow a$  für  $n \rightarrow \infty \iff (|a_n - a|)_{n \geq 1}$  ist Nullfolge.

**Beispiel 2.3.** (Sei stets  $n \in \mathbb{N}$ )

a) Sei  $z \in \mathbb{C}$  und  $a_n = z \forall n$ .

*Behauptung.*  $a_n \rightarrow z$  ( $n \rightarrow \infty$ ).

*Beweis.* Sei  $\varepsilon > 0$  beliebig gegeben. Wähle  $N_\varepsilon = 1$ . Sei  $n \geq N_\varepsilon = 1$ . Dann  $|a_n - z| = 0 < \varepsilon$ . □

b) Sei  $p \in \mathbb{Q}$  mit  $p > 0$  und  $a_n = n^{-p}$ , also  $(a_n) = (1, \frac{1}{2^p}, \frac{1}{3^p}, \dots)$ .

*Behauptung.*  $a_n \rightarrow 0$  ( $n \rightarrow \infty$ ) (speziell für  $p = 1$ :  $\frac{1}{n} \rightarrow 0$  ( $n \rightarrow \infty$ )).

*Beweis.* Sei  $\varepsilon > 0$  beliebig gegeben. Wähle  $N_\varepsilon \in \mathbb{N}$  mit  $N_\varepsilon \geq \varepsilon^{-\frac{1}{p}}$  ( $N_\varepsilon$  existiert nach Satz 1.20). Sei  $n \geq N_\varepsilon$ . Dann:

$$|a_n - 0| = n^{-p} \stackrel{1.264}{\leq} N_\varepsilon^{-p} \stackrel{1.264}{\leq} \left(\varepsilon^{-\frac{1}{p}}\right)^{-p} = \varepsilon.$$

□

c) Sei  $a_n = (-1)^n$ .

*Behauptung.* Diese Folge ist divergent.

*Beweis.* Zu zeigen:  $\forall a \in \mathbb{C} \exists \varepsilon_a > 0 \forall N \in \mathbb{N} \exists n = n_{a,N} \geq N : |a_N - a| > \varepsilon_a$ .

1. Fall:  $a = 1$ . Wähle  $\varepsilon_1 = 1$ . Sei  $N \in \mathbb{N}$  gegeben. Sei  $n \geq N$  ungerade. Dann  $|a_n - a| = |-1 - 1| = 2 > 1 = \varepsilon_1$ .
2. Fall:  $a = -1$  genauso.
3. Fall:  $a \in \mathbb{C} \setminus \{-1, 1\}$ . Wähle  $\varepsilon_a = \frac{1}{2} \min\{|1 - a|, |-1 - a|\} > 0$ . Sei  $N \in \mathbb{N}$  gegeben. Wähle  $n = N$ . Dann

$$|a_n - a| = \begin{cases} |1 - a|, & \text{wenn } n \text{ gerade} \\ |-1 - a|, & \text{wenn } n \text{ ungerade} \end{cases} > \varepsilon_a.$$

□

**Satz 2.4.** Die Folge  $(a_n)$  konvergiere gegen  $a \in \mathbb{C}$ . Dann gelten:

- a)  $(a_n)$  ist beschränkt, d.h.  $\exists M \geq 0 : |a_n| \leq M, \forall n \in \mathbb{N}$ .
- b) Wenn  $a_n \rightarrow b$  für  $n \rightarrow \infty$  und  $b \in \mathbb{C}$ , dann  $a = b$ .

*Beweis.* a) Wähle  $\varepsilon = 1$ . Nach Def. 2.2 gibt es  $N \in \mathbb{N}$  mit  $|a_n - a| \leq 1, \forall n \geq N$

$$\begin{aligned} \implies |a_n| &= |a_n - a + a| \stackrel{\Delta\text{-Ungl.}}{\leq} |a_n - a| + |a| \leq 1 + |a|, \forall n \geq N \\ \implies |a_n| &\leq \max\{1 + |a|, |a_1|, |a_2|, \dots, |a_{N-1}|\} =: M, \forall n \in \mathbb{N}. \end{aligned}$$

- b) Sei  $\varepsilon > 0$  gegeben. Nach Voraussetzung und Def. 2.2 existieren  $N_{\varepsilon,a} \in \mathbb{N}$  und  $N_{\varepsilon,b} \in \mathbb{N}$ , sodass  $|a_n - a| \leq \varepsilon \forall n \geq N_{\varepsilon,a}$  und  $|a_n - b| \leq \varepsilon \forall n \geq N_{\varepsilon,b}$ . Setze  $N_\varepsilon = \max\{N_{\varepsilon,a}, N_{\varepsilon,b}\}$ . Dann

$$0 \leq |a - b| = |a - a_n + a_n - b| \stackrel{\Delta\text{-Ungl.}}{\leq} |a - a_n| + |a_n - b| \leq 2\varepsilon$$

(nach obiger Abschätzung). Da  $\varepsilon > 0$  beliebig war, folgt  $|a - b| = 0$ , also  $a = b$  (siehe Satz 1.203)

□

**Beispiel 2.5.** Sei  $p \in \mathbb{Q}$  mit  $p > 0$  und  $a_n = n^p$  für  $n \in \mathbb{N}$ .

*Behauptung.*  $(a_n)$  ist unbeschränkt, also divergent nach Satz 2.41

*Beweis.* Ann.: Es existiere ein  $M \geq 0$  mit  $a_n = n^p \leq M, \forall n \in \mathbb{N} \xrightarrow{1.264} n \leq M^{\frac{1}{p}} \forall n \in \mathbb{N} \implies \nexists$  Satz 1.20 □

*Bemerkung 2.6.* a) Sei  $(a_n)_{n \geq 1}$  eine Folge. Es gebe ein  $a \in \mathbb{C}$  und eine Konstante  $c > 0$ , sodass:

$$\forall \varepsilon > 0 \exists N_\varepsilon \in \mathbb{N} \forall n \geq N_\varepsilon : |a_n - a| \leq c\varepsilon \quad (*)$$

*Behauptung.* Dann  $a_n \rightarrow a$  für  $n \rightarrow \infty$ .

*Beweis.* Setze  $\eta = c\varepsilon \iff \varepsilon = \frac{\eta}{c}$ . Setze  $N_\eta = N_\varepsilon$ . Dann liefert (\*):

$$\forall \eta > 0 \exists N_\eta \in \mathbb{N} \forall n \geq N_\eta : |a_n - a| \leq \eta$$

□

Vorsicht:  $c$  darf *nicht* von  $n, \varepsilon$  abhängen!

- b) Für  $n_0 \in \mathbb{Z}$  setze  $J(n_0) = \{n \in \mathbb{Z} : n \geq n_0\}$ . Eine Abbildung  $A : J(n_0) \rightarrow \mathbb{C}$  bezeichnet man auch als Folge. Man schreibt wieder  $a_n$  statt  $A(n)$  und  $(a_n)_{n \geq n_0}$  statt  $A$ . Die Konvergenz von  $(a_n)_{n \geq n_0}$  definiert man wie in Def. 2.2, wobei man zusätzlich  $N_\varepsilon \geq n_0$  fordert. Indem man  $b_n := a_{n+n_0-1}$  für  $n \in \mathbb{N}$  setzt, erhält man eine Folge  $(b_n)_{n \geq 1}$  mit Indexbereich  $J(n_0)$ . Offenbar konvergiert  $(a_n)_{n \geq n_0}$  genau dann, wenn  $(b_n)_{n \geq 1}$  konvergiert, und die jeweiligen Grenzwerte sind gleich. Somit können wir uns weiterhin auf den Fall  $n_0 = 1$  beschränken.

**Satz 2.7.** Seien  $(a_n)_{n \geq 1}$  und  $(b_n)_{n \geq 1}$  Folgen und  $a, b \in \mathbb{C}$ . Es gelte  $a_n \rightarrow a$  und  $b_n \rightarrow b$  für  $n \rightarrow \infty$ . Dann:

- a)  $a_n + b_n \rightarrow a + b$  für  $n \rightarrow \infty$   
b)  $a_n \cdot b_n \rightarrow ab$  für  $n \rightarrow \infty$  (speziell  $ab_n \rightarrow ab$  für  $n \rightarrow \infty$ )  
c) Wenn  $a \neq 0$ , dann existiert ein  $N \in \mathbb{N}$ , sodass  $a_n \neq 0$  für alle  $n \geq N$  und es gilt  $\frac{1}{a_n} \rightarrow \frac{1}{a}$  für  $n \rightarrow \infty$  ( $n \geq N$ ).

*Beweis.* Sei  $\varepsilon > 0$  (beliebig) gegeben. Nach Voraussetzung:

$$\exists N_{\varepsilon, a} \in \mathbb{N}, N_{\varepsilon, b} \in \mathbb{N}, \text{ sodass } |a_n - a| \leq \varepsilon \forall n \geq N_{\varepsilon, a} \text{ und } |b_n - b| \leq \varepsilon \forall n \geq N_{\varepsilon, b} \quad (2.1)$$

Setze  $N_\varepsilon = \max\{N_{\varepsilon, a}, N_{\varepsilon, b}\}$ . Sei  $n \geq N_\varepsilon$ .

$$\text{a) } |a_n + b_n - (a + b)| \stackrel{\Delta\text{-Ungl.}}{\leq} |a_n - a| + |b_n - b| \stackrel{(2.1)}{\leq} 2\varepsilon, \forall n \in \mathbb{N} \xrightarrow{\text{Bem 2.6}} \text{Beh. a)}$$

$$\text{b) } |a_n b_n - ab| = |(a_n - a)b + a(b_n - b)| \stackrel{\Delta\text{-Ungl., 1.28}}{\leq} |a_n - a| \cdot \underbrace{|b_n|}_{\leq M \text{ nach 2.4}} + |a| \cdot |b_n - b|$$

$$\stackrel{(2.1)}{\leq} (M + |a|) \cdot \varepsilon \quad \forall n \geq N_\varepsilon \xrightarrow{\text{Bem 2.6}} \text{Beh. b)}$$

- c) Sei  $\varepsilon_0 = \frac{|a|}{2} > 0$  (da  $a \neq 0$ ). Sei  $N = N_{\varepsilon_0, a} \in \mathbb{N}$  aus (2.1). Dann gilt für  $n \geq N$ :

$$|a_n| = |a + a_n - a| \stackrel{1.288}{\geq} |a| - |a_n - a| \stackrel{(2.1)}{\geq} |a| - \varepsilon_0 = \frac{|a|}{2} > 0 \implies \text{erste Beh.}$$

Setze  $\widetilde{N}_\varepsilon = \max\{N_\varepsilon, N\}$ . Sei  $n \geq \widetilde{N}_\varepsilon$ . Dann:

$$\left| \frac{1}{\varepsilon_n} - \frac{1}{a} \right| = \left| \frac{a - a_n}{a_n} \right| \stackrel{1.288}{=} \frac{|a - a_n|}{|a| - |a_n|} \stackrel{(2.1)}{\leq} \frac{\varepsilon}{|a| \cdot \frac{|a|}{2}} \quad (\forall n \geq \widetilde{N}_\varepsilon).$$

$\implies$  Beh. c).

□

**Beispiel 2.8.**

$$a_n = \frac{3n^2 + 2n}{5n^2 + 4n + i}$$

*Behauptung.*  $a_n \rightarrow \frac{3}{5}$  für  $n \rightarrow \infty$

*Beweis.*

$$a_n = \frac{3 + \frac{2}{n}}{5 + \frac{4}{n} + \frac{i}{n^2}}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Nach Bsp. 2.3:  $3 \rightarrow 3$ ,  $5 \rightarrow 5$ ,  $\frac{1}{n} \rightarrow 0$ ,  $\frac{1}{n^2} \rightarrow 0$  ( $n \rightarrow \infty$ ). Satz 2.7: Zähler  $\rightarrow 3 + 2 \cdot 0 = 3$ ,  
 Nenner  $\rightarrow 5 \neq 0$  ( $n \rightarrow \infty$ )  $\xrightarrow{\text{Satz 2.73}} a_n \rightarrow \frac{3}{5}$  für  $n \rightarrow \infty$   $\square$

**Satz 2.9.** Seien  $(a_n)_{n \geq 1}$ ,  $(b_n)_{n \geq 1}$ ,  $(c_n)_{n \geq 1}$  reelle Folgen mit  $a_n \rightarrow a$  und  $b_n \rightarrow b$  für  $n \rightarrow \infty$ . Dabei sei  $a, b \in \mathbb{R}$  (dies gilt stets gemäß Satz 2.11). Sei  $n_0 \in \mathbb{N}$ .

- a) Wenn  $a_n \leq b_n$  für  $n \geq n_0$ , dann  $a \leq b$ .
- b) Wenn  $a_n \leq c_n \leq b_n$  für  $n \geq n_0$  und  $a = b$ , dann  $c_n \rightarrow a$  für  $n \rightarrow \infty$  („Sandwichprinzip“).

*Beweis.* Sei  $\varepsilon > 0$  gegeben. Wie in (2.1) existiert ein  $N_\varepsilon \in \mathbb{N}$ , sodass

$$|a_n - a| \leq \varepsilon, \quad |b_n - b| \leq \varepsilon \quad \text{für alle } n \geq N_\varepsilon \quad (*)$$

Sei  $n \geq \max\{N_\varepsilon, n_0\}$ .

a)

$$a - b = a - a_n + \underbrace{a_n - b_n}_{\leq 0 \text{ (n.V.)}} + b_n - b \leq |a - a_n| + |b - b_n| \stackrel{(*)}{\leq} 2\varepsilon.$$

Da  $\varepsilon > 0$  beliebig ist, folgt  $a - b \leq 0$  (Wenn  $a - b > 0$  wäre, dann folgte  $\frac{1}{2}$  mit Satz 1.203)  $\implies a \leq b$ .

b)

$$|c_n - a| = \begin{cases} c_n - a \stackrel{\text{n.V.}}{\leq} b_n - a \leq |b_n - a| & \text{für } c_n \geq a \\ a - c_n \stackrel{\text{n.V.}}{\leq} a - a_n \leq |a_n - a| & \text{für } c_n < a \end{cases}$$

$$\stackrel{(*)}{\leq} \varepsilon \quad \text{für } n \geq \max\{N_\varepsilon, n_0\}, \text{ da } a = b \implies c_n \rightarrow a \text{ für } n \rightarrow \infty$$

$\square$

**Beispiel 2.10.** *Behauptung.* Sei  $q > 0$ . Dann  $a_n := q^{\frac{1}{n}} \rightarrow 1$  für  $n \rightarrow \infty$ .  
 $(a_n) = (a, \sqrt{a}, \sqrt[3]{a}, \sqrt[4]{a}, \dots)$

*Beweis.* a) Sei zuerst  $q \geq 1$ . Dann  $a_n \geq$  nach Satz 1.264. Weiter:

$$q = a_n^n = \left(1 + \underbrace{(a_n - 1)}_{> -1}\right)^n \stackrel{\text{Bernoulli-U.}}{\geq} 1 + n(a_n - 1)$$

$$\implies 0 \leq a_n - 1 \leq \frac{q - 1}{n} \rightarrow 0 \text{ für } n \rightarrow \infty$$

(nach Bsp. 2.3, Satz 2.7)  $\implies$  nach Satz 2.92  $a_n - 1 \rightarrow 0 \implies a_n \rightarrow 1$  für  $n \rightarrow \infty$ .

b) Sei nun  $0 < q < 1$ . Dann  $\frac{1}{q} > 1$  und  $\frac{1}{a_n} = \left(\frac{1}{a}\right)^{\frac{1}{n}} \rightarrow 1$  nach Teil a). Nach Satz 2.73  $\implies a_n = \left(\frac{1}{a_n}\right)^{-1} \rightarrow 1$  für  $n \rightarrow \infty$ . □

**Satz 2.11.** Sei  $(a_n)$  eine Folge. Dann:

- a) Sei zusätzlich  $a_n \rightarrow a$  für  $n \rightarrow \infty$ . Dann gelten  $\overline{a_n} \rightarrow \overline{a}$ ,  $\operatorname{Re} a_n \rightarrow \operatorname{Re} a$ ,  $\operatorname{Im} a_n \rightarrow \operatorname{Im} a$ ,  $|a_n| \rightarrow |a|$  (jeweils für  $n \rightarrow \infty$ ). Wenn zusätzlich  $(a_n)$  reell ist, dann ist  $a \in \mathbb{R}$ .
- b) Es gelte  $\operatorname{Re} a_n \rightarrow b$  und  $\operatorname{Im} a_n \rightarrow c$  für  $n \rightarrow \infty$ . Dann  $a_n \rightarrow b + ic$  für  $n \rightarrow \infty$ .

*Beweis.* a)  $0 \leq |\overline{a_n} - \overline{a}| \stackrel{1.28}{=} |\overline{a_n - a}| \stackrel{1.28}{=} |a_n - a| \rightarrow 0$  für  $n \rightarrow \infty$ . Satz 2.92  $\implies |\overline{a_n} - \overline{a}| \rightarrow 0 \implies \overline{a_n} \rightarrow \overline{a}$  für  $n \rightarrow \infty$ .  $\implies \operatorname{Re} a_n \stackrel{1.28}{=} \frac{1}{2}(a_n + \overline{a_n}) \rightarrow \frac{1}{2}(a + \overline{a}) = \operatorname{Re} a$  für  $n \rightarrow \infty$ . Entsprechend  $\operatorname{Im} a_n \rightarrow \operatorname{Im} a$  (verwende in beiden Fällen Satz 2.7).  
Ferner  $||a_n| - |a|| \stackrel{1.28}{\leq} |a_n - a| \xrightarrow{\text{n.V.}} 0$  ( $n \rightarrow \infty$ ). Satz 2.92  $\implies |a_n| \rightarrow |a|$  für  $n \rightarrow \infty$ . Wenn  $a_n \in \mathbb{R}$ , dann  $\operatorname{Im} a_n = 0 \implies \operatorname{Im} a = 0$ .

b)  $0 \leq |a_n - (b + ic)| = |(\operatorname{Re} a_n - b) + i(\operatorname{Im} a_n - c)| \stackrel{\Delta\text{-Ungl.}}{\leq} |\operatorname{Re} a_n - b| + |\operatorname{Im} a_n - c| \rightarrow 0$ , n. V. ( $n \rightarrow \infty$ ). Satz 2.92  $\implies$  Beh. b) □

## 2.2 Monotone Folgen

**Definition 2.12.** Sei  $(a_n)_{n \geq 1}$  eine reelle Folge.

- a)  $(a_n)$  wächst (strikt), wenn  $a_{n+1} \geq a_n$  ( $a_{n+1} > a_n$ ) für alle  $n \in \mathbb{N}$ .
- b)  $(a_n)$  fällt (strikt), wenn  $a_{n+1} \leq a_n$  ( $a_{n+1} < a_n$ ) für alle  $n \in \mathbb{N}$ .
- c)  $(a_n)$  ist (strikt) monoton, wenn  $(a_n)$  (strikt) wächst oder (strikt) fällt.

*Bemerkung.*  $(a_n)$  wächst (strikt)  $\iff (-a_n)$  fällt (strikt)

**Beispiel 2.13.** a) Sei  $0 < p \in \mathbb{Q}$ . Dann fällt  $a_n = n^{-p}$  ( $n \in \mathbb{N}$ ) strikt, da  $(n+1)^{-p} < n^{-p}$  nach Satz 1.264.

- b)  $a_n = \frac{n}{2n+1} = \frac{1}{2} \cdot \frac{2n+1-1}{2n+1} = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2n+1}$  wächst strikt, da  $\frac{1}{2n+1}$  strikt fällt (vgl. a)).
- c)  $a_n = (-1)^n$  ist nicht monoton, da  $a_{n+1} = 1 > -1 = a_n$  für ungerade  $n$  und  $a_{n+1} = -1 < 1 = a_n$  für gerade  $n$ .

Standardbsp. für divergente Folgen:

- a)  $a_n = (-1)^n$  nicht monoton, aber beschränkt
- b)  $a_n = n$  monoton, aber nicht beschränkt

**Theorem 2.14.** Sei  $(a_n)_{n \geq 1}$  eine reelle Folge. Dann gelten:

- a) Wenn  $(a_n)$  wächst und nach oben beschränkt ist, dann existiert

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \sup_{n \geq 1} a_n := \sup \{a_n : n \in \mathbb{N}\}$$

- b) Wenn  $(a_n)$  fällt und nach unten beschränkt ist, dann existiert

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \inf_{n \geq 1} a_n := \inf \{a_n : n \in \mathbb{N}\}$$

*Beweis.* a) n. V.  $\exists a := \sup_{n \geq 1} a_n$ . Sei  $\varepsilon > 0$  beliebig gegeben. Satz 1.18  $\implies \exists N_\varepsilon \in \mathbb{N}$  mit  $a - \varepsilon < a_{N_\varepsilon} \leq a$ . Sei  $n \geq N_\varepsilon$ . Da  $(a_n)$  wächst und  $a = \sup a_n$  gilt:

$$a - \varepsilon \leq a_{N_\varepsilon} \leq a_n \implies a_n - a \leq \varepsilon \quad \forall n \geq N_\varepsilon$$

- b) Betrachte  $-a_n$  und verwende Teil a) und Satz 1.232

□

**Beispiel 2.15** (Heron-Verfahren zur Quadratwurzelbestimmung). Sei  $x > 0$  gegeben.

Definiere rekursiv  $a_1 = 1$  und  $a_{n+1} = \frac{1}{2}(a_n + \frac{x}{a_n})$  für  $n \in \mathbb{N}$ . (Beachte:  $a_1 > 0$ . Wenn

$a_n > 0$ , dann  $a_{n+1} > 0 \xrightarrow{\text{Indukt.}} a_k > 0$  für alle  $k \in \mathbb{N}$ .

*Behauptung.*  $a_n \rightarrow \sqrt{x}$  ( $n \rightarrow \infty$ )

*Beweis.* 1. Schritt: Zeige Konvergenz mit Thm. 2.14.

Sei  $n \in \mathbb{N}$ . Dann

$$a_{n+1} - a_n \stackrel{\text{Def.}}{=} \frac{a_n}{2} + \frac{x}{2a_n} - a_n = \frac{1}{2a_n} \underbrace{(x - a_n^2)}_{>0 \text{ Vorzeichen?}} \quad (*)$$

Sei  $n \geq 2$ . Dann

$$\begin{aligned} a_n^2 - x &\stackrel{\text{Def.}}{=} \frac{1}{4} \left( a_{n-1} + \frac{x}{a_{n-1}} \right)^2 - x = \frac{1}{4} \left( a_{n-1}^2 + 2x + \frac{x^2}{a_{n-1}^2} - 4x \right) - y \\ &= \frac{1}{4} \left( a_{n+1} - \frac{x}{a_{n-1}} \right)^2 \geq 0 \quad (**) \end{aligned}$$

$$\stackrel{(*)}{\underset{(**)}{\implies}} a_{n+1} - a_n \leq 0 \text{ und } a_n^2 \geq x \stackrel{1.26}{\implies} a_n \geq \sqrt{x} \text{ (für } n \geq 2).$$

Thm. 2.14  $\implies \exists a := \lim_{n \rightarrow \infty} a_n$ .

2. Schritt: Berechne  $a$  mit Hilfe der Rekursion. Satz 2.9:  $a \geq \sqrt{x} > 0$ .

Ferner:  $\underbrace{a_{n+1}}_{\rightarrow a} = \underbrace{\frac{1}{2} \left( a_n + \frac{x}{a_n} \right)}_{\rightarrow \frac{1}{2} \left( a + \frac{x}{a} \right)}$  für  $n \rightarrow \infty$  (nach Satz 2.7,  $a \neq 0$ ). Nach Satz 2.4:

$$a = \frac{1}{2} \left( a + \frac{x}{a} \right) \iff a = \frac{x}{a} \iff x = a^2 \stackrel{a>0}{\iff} a = \sqrt{x}$$

□

**Beispiel 2.16** (Die EULERSche Zahl  $e$ ). Sei  $x \in \mathbb{N}$ ,

$$a_n = \left( 1 + \frac{1}{n} \right)^n, \quad b_n = \sum_{j=0}^n \frac{1}{j!} = 1 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{6} + \dots + \frac{1}{n!}$$

*Behauptung.*  $\exists \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} b_n =: e \approx 2,71828 \dots$

*Beweis.* Überblick:

Beh. a)  $(a_n)$  wächst strikt

Beh. b)  $a_n \leq b_n < 3 \forall n \in \mathbb{N}$

$$\implies \begin{cases} \text{a) + b) + Thm. 2.14} & \implies \exists \lim_{n \rightarrow \infty} a_n =: a, \lim_{n \rightarrow \infty} b_n =: b \\ \text{b) + Satz 2.9 1} & \implies a \leq b \end{cases} \quad (*)$$

Beh. c)  $a \geq b$

Beachte:  $(b_n)$  wächst strikt.

$\implies$  Beh.

a) Sei  $n \in \mathbb{N}$ . Dann

$$\begin{aligned} \frac{a_{n+1}}{a_n} &= \left( 1 + \frac{1}{n+1} \right) \frac{\left( 1 + \frac{1}{n+1} \right)^n}{\left( 1 + \frac{1}{n} \right)^n} = \frac{n+2}{n+1} \left( \frac{\frac{n+2}{n+1}}{\frac{n+1}{n}} \right)^n = \frac{n+2}{n+1} \left( \frac{(n+1)^2 - 1}{(n+1)^2} \right)^n \\ &= \underbrace{\frac{n+2}{n+1}}_{>0} \underbrace{\left( 1 - \frac{1}{(1+n)^2} \right)^n}_{>-1} \stackrel{1.8}{\geq} \frac{n+2}{n+1} \left( 1 - \frac{n}{(1+n)^2} \right) = \frac{n+2}{n+1} \cdot \frac{1+n+n^2}{(1+n)} \\ &= \frac{n^3 + 3n^2 + 3n + 2}{(1+n)^3} \stackrel{\text{Bsp. 0.3}}{=} \frac{(n+1)^3 + 1}{(n+1)^3} > 1 \end{aligned}$$

$(b_n)$  wächst offensichtlich

b)

$$a_n \stackrel{\text{Bsp. 0.3}}{=} \sum_{j=0}^n \binom{n}{j} \left(\frac{1}{n}\right)^j$$

Für  $1 \leq j \leq n$  ist

$$\binom{n}{j} \frac{1}{n^j} = \frac{1}{j!} \cdot \frac{n!}{(n-j)!} \cdot \frac{1}{n^j} = \frac{1}{j!} \cdot \underbrace{\frac{n}{n}}_{=1} \cdot \underbrace{\frac{n-1}{n}}_{\in(0,1)} \cdot \underbrace{\frac{n-2}{n}}_{\in(0,1)} \cdots \underbrace{\frac{n-j+1}{n}}_{\in(0,1)} \leq \frac{1}{j!} \leq \frac{1}{2^{j-1}} \quad (+)$$

*Behauptung.*  $2^{n-1} \leq n! \forall n \in \mathbb{N}$

*Beweis.* (per vollst. Ind.)

IA:  $n = 1$  ist klar.

IS: Beh. gelte für ein  $n \in \mathbb{N}$  (IV).

$$\implies 2^n \stackrel{\text{IV}}{\leq} 2n! \leq (n+1)n! = (n+1)! \quad \square$$

$$\begin{aligned} \implies a_n &= 1 + \sum_{j=1}^n \binom{n}{j} \frac{1}{n^j} \stackrel{(+)}{\leq} 1 + \sum_{j=1}^n \frac{1}{j!} = b_n \\ &\leq 1 + \sum_{j=1}^n \frac{1}{2^{j-1}} \stackrel{k:=j-1}{=} 1 + \sum_{k=0}^{n-1} \left(\frac{1}{2}\right)^k \stackrel{0.2}{=} 1 + \frac{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^n}{1 - \frac{1}{2}} < 1 + \frac{1}{\frac{1}{2}} = 3 \end{aligned}$$

c) Sei  $m \in \mathbb{N}$  und  $n \geq m$ ,  $m$  fest. Wie in b):

$$\begin{aligned} a_n &= 1 + \sum_{j=1}^n \underbrace{\frac{1}{j!} \cdot \frac{n}{n} \cdot \frac{n-1}{n} \cdot \frac{n-2}{n} \cdots \frac{n-j+1}{n}}_{>0} \\ &\geq 1 + \sum_{j=1}^n \frac{1}{j!} \underbrace{\left(1 - \frac{1}{n}\right)}_{\rightarrow 1(n \rightarrow \infty)} \cdots \underbrace{\left(1 - \frac{j-1}{n}\right)}_{\rightarrow 1(n \rightarrow \infty)} =: c_{mn} \quad (++) \end{aligned}$$

nach Bsp. 2.3, Satz 2.7  $\implies c_{mn} \rightarrow 1 + \sum_{j=1}^m \frac{1}{j!} = b_m$  für  $n \rightarrow \infty$ ,  $m$  fest. Lasse

$n \rightarrow \infty$  gehen in  $(++)$ . Dann liefern  $(*)$  und Satz 2.9, dass  $a \geq b_m$  für  $m \in \mathbb{N}$ . Mit  $m \rightarrow \infty$ ,  $(*)$ , Satz 2.9 folgt  $a \geq b$ .

$\square$



## 2.3 Teilfolgen und Vollständigkeit

**Motivation.**  $(a_n) = ((-1)^n) = (-1, 1, -1, 1, \dots)$  ist divergent, enthält aber konvergente „Teile“.

**Definition 2.17.** Sei  $(a_n)_{n \geq 1}$  eine Folge und  $\varphi : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$  eine strikt wachsende Funktion (d.h.  $\varphi(n+1) > \varphi(n) \forall n \in \mathbb{N}$ ). Setze  $b_j = a_{\varphi(j)}, j \in \mathbb{N}$ . Dann heißt die Folge  $(b_j)_{j \geq 1}$  *Teilfolge* von  $(a_n)_{n \geq 1}$  (TF). Man schreibt meist  $(a_{n_j})_{j \geq 1}$  statt  $(b_j)_{j \geq 1}$ .

**Beispiel.** a)  $(a_n)$  ist Teilfolge von sich selbst, wähle  $\varphi(j) = j \forall j \in \mathbb{N}$

b) Sei  $a_n = (-1)^n$ . Wähle  $\varphi(j) = 2j$  für  $j \in \mathbb{N}$ . Dann ist  $b_j := a_{2j} = 1 \forall j \in \mathbb{N}$ .

c) Sei

$$a_n = \begin{cases} \frac{1}{n^2} & \text{wenn } n \text{ Primzahl} \\ 1 & \text{sonst} \end{cases}, n \in \mathbb{N}. (a_n) = (1, \frac{1}{4}, \frac{1}{9}, 1, \frac{1}{25}, 1, \dots)$$

Setze  $\varphi(j) = j\text{-te Primzahl}, j \in \mathbb{N}. \implies (b_j) = (a_{\varphi(j)}) = (\frac{1}{4}, \frac{1}{9}, \frac{1}{25}, \dots)$

*Bemerkung.*  $a_n \rightarrow a (n \rightarrow \infty) \implies a_{n_j} \rightarrow a (j \rightarrow \infty)$  für jede Teilfolge.

**Definition 2.18.** Sei  $(a_n)$  eine Folge und  $a \in \mathbb{C}$ . Dann heißt  $a$  *Häufungspunkt* (HP) von  $(a_n)$ , wenn für jedes  $\varepsilon > 0$  für unendlich viele  $n$  die Ungleichung  $|a - a_n| \leq \varepsilon$  gilt.

**Beispiel.** a)  $(-1)^n$  hat HP  $+1$  und  $-1$ , da  $a_n \in \overline{B}(1, \varepsilon)$  für alle  $\varepsilon > 0$  und alle geraden  $n \in \mathbb{N}$ , sowie  $a_n \in \overline{B}(-1, \varepsilon)$  für alle  $\varepsilon > 0$  und alle ungeraden  $n \in \mathbb{N}$ .

b) Die Folge  $a_n = n$  hat keinen HP, da  $|a_n - a_m| \geq 1, n \neq m$ . Also liegt in einer Kugel  $\overline{B}(a, \frac{1}{3})$  höchstens ein  $a_n$ .

**Satz 2.19.** Sei  $(a_n)$  eine Folge und  $a \in \mathbb{C}$ . Dann:

$$a \text{ ist HP} \iff \exists \text{ TF mit } a_{n_j} \rightarrow a (j \rightarrow \infty)$$

*Beweis.* „ $\implies$ “ Sei  $a$  HP. Wir definieren rekursiv eine TF  $(a_{n_j})$  mit  $|a - a_{n_j}| \leq \frac{1}{j} \forall j \in \mathbb{N}$ .  $\implies a_{n_j} \rightarrow a$  nach Satz 2.9 (für  $j \rightarrow \infty$ ). Wähle  $n_1 \in \mathbb{N}$  mit  $|a_{n_1} - a| \leq 1$  (verwende Voraussetzung mit  $\varepsilon = 1$ ). Sei  $n_{j-1}$  mit  $n_{j-1} > n_{j-2}$  und  $|a_{n_{j-1}} - a| \leq \frac{1}{j-1}$  gewählt. Nach Voraussetzung gibt es unendlich viele  $a_n$  in  $\overline{B}(a, \frac{1}{j})$ . Da  $\{1, \dots, n_{j-1}\}$  endlich ist, existiert ein  $n_j > n_{j-1}$  mit  $|a_{n_j} - a| \leq \frac{1}{j}$ . Induktionsprinzip liefert gewünschte TF  $a_{n_j} \rightarrow a$ .

„ $\impliedby$ “ Sei  $a_{n_j} \rightarrow a (j \rightarrow \infty)$ . Sei  $\varepsilon > 0$  beliebig gegeben. Dann  $\exists J_\varepsilon \in \mathbb{N} : \forall j \geq J_\varepsilon : |a_{n_j} - a| \leq \varepsilon$ . Also  $\#\{a_{n_j} : j \geq J_\varepsilon\} = \#\{j \in \mathbb{N} : j \geq J_\varepsilon\} = \infty$  nach Satz 1.22.  $\square$

**Korollar 2.20.** Wenn  $\exists \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$ , dann ist  $a$  der einzige Häufungspunkt von  $(a_n)$ .

*Beweis.* Satz 2.19  $\implies a$  ist HP, da es der Limes ist. Sei  $b$  ein weiterer HP von  $(a_n)$ . Nach Satz 2.19  $\exists$  TF  $a_{n_j} \rightarrow b$  ( $j \rightarrow \infty$ ). Dann gilt aber auch  $a_{n_j} \rightarrow a$  ( $j \rightarrow \infty$ ). Satz 2.4  $\implies a = b$ .  $\square$

Sei  $(a_n)$  eine reelle beschränkte Folge. Setze  $A_n = \{a_j : j \geq n\}$  für  $n \in \mathbb{N}$ . Beachte  $A_{n+1} \subset A_n$ ,  $A_n$  ist beschränkt für alle  $n \in \mathbb{N}$ .

$$\implies \exists b_n := \sup A_n, c_n := \inf A_n, \text{ wobei } b_n \geq a_j \geq c_n \forall j \geq n \quad (2.2)$$

Satz 1.231a liefert  $b_1 \geq b_n \geq b_{n+1} \geq c_{n+1} \geq c_n \geq c_1$  ( $\forall n \in \mathbb{N}$ . Nach Thm. 2.14 existieren

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} b_n &= \inf_{n \in \mathbb{N}} b_n = \inf_{n \in \mathbb{N}} \sup_{j \geq n} a_j =: \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} a_n = \limsup_{n \rightarrow \infty} a_n \text{ („Limes superior“)} \\ \text{und } \lim_{n \rightarrow \infty} c_n &= \sup_{n \in \mathbb{N}} c_n = \sup_{n \in \mathbb{N}} \inf_{j \geq n} a_j =: \underline{\lim}_{n \rightarrow \infty} a_n = \liminf_{n \rightarrow \infty} a_n \text{ („Limes inferior“)} \end{aligned} \quad (2.3)$$

(2.2), Satz 2.9  $\implies$

$$\underline{\lim}_{n \rightarrow \infty} a_n \leq \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} a_n \quad (2.4)$$

**Beispiel.**  $\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} (-1)^n = 1$ ,  $\underline{\lim}_{n \rightarrow \infty} (-1)^n = -1$ , da in  $A_n$  nur  $+1$  und  $-1$  stehen.

**Theorem 2.21** (Satz von BOLZANO-WEIERSTRASS). *Jede beschränkte Folge  $(a_n)_{n \geq 1}$  hat eine konvergente Teilfolge und damit einen Häufungspunkt. Wenn die Folge außerdem reell ist, dann ist  $\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} a_n$  das Maximum aller Häufungspunkte und  $\underline{\lim}_{n \rightarrow \infty} a_n$  das Minimum aller Häufungspunkte.*

*Beweis.* a) Sei  $(a_n)$  reell und beschränkt. Setze  $\bar{a} = \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} a_n$ . Suche TF  $a_{n_j} \rightarrow \bar{a}$  ( $j \rightarrow \infty$ ). Wir wissen aus (2.2) und (2.3):  $b_n = \sup_{j \geq n} a_j$  konvergiert gegen  $\bar{a}$  für  $n \rightarrow \infty$ .  $b_n$  muss nicht ein Folgenglied sein.

Definiere rekursiv die gewünschte TF  $(a_{n_j})$ : wähle  $N_1 \in \mathbb{N}$  mit  $|\bar{a} - b_{N_1}| \leq \frac{1}{2}$ . Da  $b_{N_1} = \sup_{j \geq N_1} a_j$  ist, existiert nach Satz 1.18 ein  $n_1 > N_1$  mit  $|b_{N_1} - a_{n_1}| \leq \frac{1}{2} \implies |\bar{a} - a_{n_1}| \leq |\bar{a} - b_{N_1}| + |b_{N_1} - a_{n_1}| \leq 1$ . Es  $n_{j-1} > n_{j-2}$  konstruiert mit  $|\bar{a} - a_{n_{j-1}}| \leq \frac{1}{j-1}$ . Wähle  $N_j > n_{j-1}$  mit  $|\bar{a} - b_{N_j}| \leq \frac{1}{2j}$  (verwende (2.3)). Da  $b_{N_j} = \sup_{k \geq N_j} a_k$  existiert nach Satz 1.18 ein  $n_j \geq N_j > n_{j-1}$  mit  $|b_{N_j} - a_{n_j}| \leq \frac{1}{2j} \implies |\bar{a} - a_{n_j}| \leq |\bar{a} - b_{N_j}| + |b_{N_j} - a_{n_j}| \leq \frac{1}{j}$ . Erhalten induktiv TF  $a_{n_j} \rightarrow \bar{a}$ . Insbesondere ist  $\bar{a}$  ein HP von  $(a_n)$  nach Satz 2.19. Entsprechend sieht man, dass  $\underline{\lim}_{n \rightarrow \infty} a_n$  ist ein HP von  $(a_n)$ . Sei  $(a_{n_l})$  eine weitere TF mit Grenzwert  $a$ .

$$\begin{array}{ccc} \xrightarrow[2.19]{(2.2)} & \underbrace{c_{n_l}}_{\rightarrow \underline{\lim}_{n \rightarrow \infty} a_n} & \leq \underbrace{a_{n_l}}_{\rightarrow a} \leq \underbrace{b_{n_l}}_{\rightarrow \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} a_n} \end{array}$$

b) Sei  $(a_n)$  eine beschränkte Folge (in  $\mathbb{C}$ ). Sei  $x_n = \operatorname{Re} a_n$ ,  $y_n = \operatorname{Im} a_n$ . Dann ist (nach Satz 1.28)  $(x_n)_n$  beschränkt  $\xrightarrow{a)} \exists$  TF  $x_{n_l} \rightarrow x \in \mathbb{R}$  ( $l \rightarrow \infty$ ). Weiter ist  $(y_{n_l})_l$  beschränkt  $\xrightarrow{a)} \exists$  TF  $y_{n_{l_j}} \rightarrow y \in \mathbb{R}$  ( $j \rightarrow \infty$ ). Damit gilt:

$$a_{n_{l_j}} = x_{n_{l_j}} + iy_{n_{l_j}} \rightarrow x + iy \quad (j \rightarrow \infty).$$

$\square$

**Lemma 2.22.** Sei  $(a_n)$  eine Folge mit den Häufungspunkten  $\alpha_1, \dots, \alpha_m$  und den zugehörigen Teilfolgen  $a_{\varphi_1(j)} \rightarrow \alpha_1, \dots, a_{\varphi_m(j)} \rightarrow \alpha_m$  ( $j \rightarrow \infty$ ). Jedes  $a_n$  liege in (mindestens) einer Teilfolge. Dann hat  $(a_n)$  keine weiteren Häufungspunkte.

*Beweis.* Annahme: Sei  $\alpha \in \mathbb{C}$  ein weiterer HP. Satz 2.19  $\implies \exists$  TF  $a_{n_l} \rightarrow \alpha$  ( $l \rightarrow \infty$ ). Sei  $\varepsilon_0 = \frac{1}{3} \min \{|\alpha - \alpha_1|, |\alpha - \alpha_2|, \dots, |\alpha - \alpha_m|\} > 0$ . Ferner existiert  $L \in \mathbb{N}$  mit  $|a_{n_l} - \alpha| \leq \varepsilon_0 \forall l \geq L$ .  $\implies$  Für  $l \geq L$ ,  $j \in \{1, \dots, m\}$  gilt  $|a_{n_l} - \alpha_j| \geq |\alpha_j - \alpha| - |\alpha - a_{n_l}| \geq 3\varepsilon_0 - \varepsilon_0 = 2\varepsilon_0 \implies a_{n_l} \notin B(\alpha_j, \varepsilon_0) \forall l \geq L, j \in \{1, \dots, m\}$ . Andererseits liegen die  $a_{n_l}$  in mindestens einer TF die gegen ein  $\alpha_j$  konvergiert  $\implies \nexists$   $\square$

**Beispiel 2.23.**

$$a_n = \begin{cases} (-1)^{\frac{n}{2}} \frac{1}{n} & , n \text{ gerade} \\ (-1)^{\frac{n+1}{2}} \frac{2n^2 + 3}{3n^2 - 1} & , n \text{ ungerade} \end{cases}$$

$\exists$  konv. TF:

$$\begin{aligned} b_k &= a_{2k} = (-1)^k \cdot \frac{1}{2k} \rightarrow 0 \quad (k \rightarrow \infty) \\ c_k &= a_{4k+1} = \underbrace{(-1)^{2k+1}}_{=-1} \cdot \frac{2(4k+1)^2 + 3}{3(4k+1)^2 - 1} \rightarrow -\frac{2}{3} \quad (k \rightarrow \infty) \\ d_k &= a_{4k+3} = \underbrace{(-1)^{2k+2}}_{=1} \cdot \frac{2(4k+3)^2 + 3}{3(4k+3)^2 - 1} \rightarrow \frac{2}{3} \quad (k \rightarrow \infty) \end{aligned}$$

$\implies \exists$  HP  $-\frac{2}{3}, 0, \frac{2}{3}$ . Nach Lemma 2.22 sind das alle HP der Folge.  
 $\xrightarrow{2.21} \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} a_n = \frac{2}{3}, \underline{\lim}_{n \rightarrow \infty} a_n = -\frac{2}{3}$ .

**Korollar 2.24.** Sei  $(a_n)$  beschränkt und  $a \in \mathbb{C}$ . Dann gelten:

- a)  $a_n \rightarrow a$  ( $n \rightarrow \infty$ )  $\iff (a_n)$  besitzt genau einen HP und dieser ist  $a$
- b) Sei  $(a_n)$  reell. Dann konvergiert  $(a_n)$  genau dann, wenn  $\underline{\lim}_{n \rightarrow \infty} a_n = \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} a_n$ .  
 In diesem Fall gilt  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \underline{\lim}_{n \rightarrow \infty} a_n = \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} a_n$ .

*Beweis.* a) „ $\implies$ “ Kor. 2.20.

„ $\impliedby$ “ Sei  $a$  der einzige HP von  $(a_n)$ . Annahme:  $a_n \not\rightarrow a$  ( $n \rightarrow \infty$ ). Das heißt  $\exists \varepsilon_0 > 0 : \forall N \in \mathbb{N} : \exists n \geq N : |a_n - a| > \varepsilon_0$ . Wir erhalten induktiv eine TF  $(a_{n_l})_l$  mit  $|a_{n_l} - a| > \varepsilon_0 \forall l \in \mathbb{N}$  (vgl. Beweis von Satz 2.19). Andererseits: Da  $(a_{n_l})_l$  beschränkt ist, liefert Thm. 2.21 eine konvergente TF  $(a_{n_{l_j}})_j$ . Nach Satz 2.19 und der Voraussetzung gilt  $a_{n_{l_j}} \rightarrow a \nexists$

- b) Sei nun  $(a_n)$  reell. Dann zeigt Thm. 2.21  $\exists!$  HP von  $(a_n)$   $\iff \underline{\lim}_{n \rightarrow \infty} a_n = \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} a_n \xrightarrow{a)} \text{Beh.}$

$\square$

*Bemerkung.*

$$a_n = \begin{cases} 1 & , n \text{ gerade,} \\ n & , n \text{ ungerade,} \end{cases}$$

hat genau einen HP ( $= 1$ ), ist aber unbeschränkt, also divergent.

$\implies$  in 2.24 muss man Beschränktheit voraussetzen!

**Definition 2.25.** Eine Folge  $(a_n)$  heißt *CAUCHY-Folge* (CF), wenn es für jedes  $\varepsilon > 0$  ein  $N_\varepsilon \in \mathbb{N}$  gibt, sodass  $|a_n - a_m| \leq \varepsilon$  für alle  $n, m \geq N_\varepsilon$ , d.h.

$$\forall \varepsilon > 0 \exists N_\varepsilon \in \mathbb{N} \forall n, m \geq N_\varepsilon : |a_n - a_m| \leq \varepsilon$$

**Theorem 2.26.** Eine Folge  $(a_n)$  konvergiert genau dann, wenn sie eine CAUCHY-Folge ist. (Man sagt, dass  $\mathbb{C}$  (und damit  $\mathbb{R}$ ) vollständig sind.)

*Beweis.* „ $\implies$ “ Sei  $a_n \rightarrow a$  ( $n \rightarrow \infty$ ). Für  $\varepsilon > 0$  existiert also ein  $N_\varepsilon \in \mathbb{N}$  mit  $|a_k - a| \leq \varepsilon$  für alle  $k \geq N_\varepsilon$ . Damit  $|a_n - a_m| \leq |a_n - a| + |a - a_m| \leq 2\varepsilon$  für alle  $n, m \geq N_\varepsilon$ .

„ $\impliedby$ “ Sei  $(a_n)$  eine CF. Nach Def. 2.25 mit  $\varepsilon = 1$  existiert ein  $N_1 \in \mathbb{N}$  mit  $|a_n - a_{N_1}| \leq 1$  für alle  $n \geq N_1$ .  $\implies |a_n| \leq |a_n - a_{N_1}| + |a_{N_1}| \leq 1 + |a_{N_1}|$  ( $\forall n \geq N_1$ )  $\implies (a_n)$  ist beschränkt. Thm 2.21  $\implies$  existiert TF  $a_{n_j} \rightarrow a$  ( $j \rightarrow \infty$ ). Sei  $\varepsilon > 0$  gegeben. Dann existiert ein  $J_\varepsilon \in \mathbb{N}$  mit

$$|a_{n_j} - a| \leq \varepsilon \quad \forall j \geq J_\varepsilon \quad (*)$$

Sei ferner  $N_\varepsilon$  aus Def. 2.25. Wähle  $n \geq N_\varepsilon$ . Dann existiert ein  $n_j \geq N_\varepsilon$  mit  $j \geq J_\varepsilon$ .

$$\text{Somit } |a_n - a| \leq |a_n - a_{n_j}| + |a_{n_j} - a| \stackrel{2.25, (*)}{\leq} \varepsilon + \varepsilon = 2\varepsilon$$

□

*Bemerkung.* a) CAUCHY-Folgen haben also (in  $\mathbb{R}$  und  $\mathbb{C}$ ) dieselben Eigenschaften wie konvergente Folgen (kann man auch direkt zeigen).

b) In Bsp. 2.15 mit  $x = 2$  und  $a_1 = 1$  ist  $a_{n+1} = \frac{1}{2} \left( a_n + \frac{2}{a_n} \right) \in \mathbb{Q}$  (Beweis per Induktion). Ferner gilt  $a_n \rightarrow \sqrt{2}$ . Nach Bsp 1.16 gilt  $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q} \implies \mathbb{Q}$  ist nicht vollständig

c) Bsp.  $a_n = \sqrt{a_n}$ . Folge ist unbeschränkt  $\implies$  divergent  $\implies$  keine CF. Andererseits:  $0 \leq \sqrt{n+1} - \sqrt{n} = \frac{1}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}} \rightarrow 0$  ( $n \rightarrow \infty$ ). Also: Def 2.25 gilt für  $m = n+1$ , aber  $(a_n)$  ist keine CAUCHY-Folge.

**Lemma 2.27.** Sei  $(a_n)$  eine beschränkte und reelle Folge und  $\varepsilon > 0$ . Dann

$$\exists J_\varepsilon \in \mathbb{N} \text{ mit } -\varepsilon + \lim_{n \rightarrow \infty} a_n \leq a_j \leq \varepsilon + \overline{\lim_{n \rightarrow \infty}} a_n \quad \forall j \geq J_\varepsilon.$$

*Beweis.* Nach Satz 1.18  $\exists \overline{J}_\varepsilon \in \mathbb{N}$  mit

$$\varepsilon + \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} a_n \stackrel{2.3}{=} \varepsilon + \inf_{n \in \mathbb{N}} \sup_{j \geq n} a_j \stackrel{1.18}{\geq} \sup_{j \geq \overline{J}_\varepsilon} a_j \geq a_j \quad \forall j \geq \overline{J}_\varepsilon.$$

Entsprechend:  $\exists \underline{J}_\varepsilon \in \mathbb{N}$  mit  $a_j \geq -\varepsilon + \underline{\lim}_{n \rightarrow \infty} a_n \quad \forall j \geq \underline{J}_\varepsilon \implies$  Beh. mit  $J_\varepsilon = \max \{\overline{J}_\varepsilon, \underline{J}_\varepsilon\}$ .  $\square$

**Satz 2.28.** Seien  $(a_n), (b_n)$  beschränkte reelle Folgen. Dann gelten:

a)

$$\underline{\lim}_{n \rightarrow \infty} a_n = - \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} (-a_n)$$

b) Wenn  $a_n \leq b_n$  für alle  $n \in \mathbb{N}$ , dann

$$\underline{\lim}_{n \rightarrow \infty} a_n \leq \underline{\lim}_{n \rightarrow \infty} b_n, \quad \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} a_n \leq \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} b_n$$

c)

$$\begin{aligned} \underline{\lim}_{n \rightarrow \infty} (a_n + b_n) &\geq \underline{\lim}_{n \rightarrow \infty} a_n + \underline{\lim}_{n \rightarrow \infty} b_n \\ \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} (a_n + b_n) &\leq \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} a_n + \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} b_n \end{aligned}$$

d) Seien  $a_n, b_n \geq 0$  für alle  $n \in \mathbb{N}$ . Dann:

$$\begin{aligned} \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} (a_n \cdot b_n) &\leq \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} a_n \cdot \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} b_n \\ \underline{\lim}_{n \rightarrow \infty} (a_n \cdot b_n) &\geq \underline{\lim}_{n \rightarrow \infty} a_n \cdot \underline{\lim}_{n \rightarrow \infty} b_n \end{aligned}$$

e) Wenn in 3 oder 4 eine der beiden Folgen konvergiert, dann gilt „=“ in den Aussagen.

*Bemerkung.* In 3 oder 4 kann „<“ bzw. „>“ gelten. Bsp.:  $a_n = (-1)^n, b_n = (-1)^{n+1} \implies a_n + b_n = 0 \implies \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} a_n + b_n = 0, \quad \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} a_n = \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} b_n = 1.$

*Beweis.* a)

$$\underline{\lim}_{n \rightarrow \infty} a_n \stackrel{(2.3)}{=} \sup_{n \in \mathbb{N}} \inf_{j \geq n} a_j \stackrel{1.23}{=} \sup_{n \in \mathbb{N}} (-\sup_{j \geq n} (-a_j)) \stackrel{1.23}{=} - \inf_{n \in \mathbb{N}} \sup_{j \geq n} (-a_j) \stackrel{(2.3)}{=} - \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} (-a_n)$$

b) Sei  $a_j \leq b_j \quad \forall j$ . Nach Def. ?? des Supremums  $\sup_{j \geq n} a_j \leq \sup_{j \geq n} b_j \quad \forall n \in \mathbb{N}$ . Def. des Infimums liefert

$$\underbrace{\inf_{n \in \mathbb{N}} \sup_{j \geq n} a_j}_{= \underline{\lim}_{n \rightarrow \infty} a_n} \leq \underbrace{\inf_{n \in \mathbb{N}} \sup_{j \geq n} b_j}_{= \underline{\lim}_{n \rightarrow \infty} b_n}$$

c) Sei  $\varepsilon > 0$ . Nach Lemma 1.18  $\exists N_\varepsilon \in \mathbb{N}$ , sodass

$$a_j \leq \varepsilon + \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} a_n, b_j \leq \varepsilon + \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} b_n \quad \forall j \geq N_\varepsilon.$$

$$\implies \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} (a_n + b_n) \stackrel{\text{Def.}}{\leq} \sup_{j \geq N_\varepsilon} (a_j + b_j) \geq 2\varepsilon + \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} a_n + \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} b_n.$$

Da  $\varepsilon > 0$  beliebig ist, folgt Beh. c1).  
Andere Behauptungen zeigt man ähnlich. □