3 Lipschitzfunktionen und Rektifizierbarkeit

3.1 Fortsetzbarkeit und Differenzierbarkeit von Lipschitzfunktionen

Definition
Seien $(X, d), (\bar{X}, \bar{d})$ metrische Räume, $f : A \to \bar{X}$, $\emptyset \neq A \subseteq X$. Setze

$$\operatorname{Lip}(f) := \sup\{\frac{\bar{d}(f(x), f(y))}{d(x, y)} : x, y \in A, x \neq y\}.$$

Man nennt f eine *Lipschitz-Abbildung*, falls $\operatorname{Lip}(f) < \infty$.

Satz 3.1
Sei (X, d) metrischer Raum, $\emptyset \neq A \subseteq X$.

(1) Ist $f : A \to \mathbb{R}$ Lipschitzfunktion, so ist

$$g(x) := \inf\{f(z) + \operatorname{Lip}(f) \cdot d(x, z) \colon z \in A\} \quad (x \in X)$$

eine Lipschitzfunktion mit $\operatorname{Lip}(g) = \operatorname{Lip}(f)$ und $g|_A = f$.

(2) Ist $f : A \to \mathbb{R}^n$ eine Lipschitzfunktion, so gibt es eine Lipschitzfunktion $h : X \to \mathbb{R}^n$ mit $\operatorname{Lip}(h) \leq \sqrt{n} \operatorname{Lip}(f)$ und $h|_A = f$.

Bemerkung: (1) Johnson, Lindenstrauss und Schechtman '86 zeigen, dass im Allgemeinen nicht $\operatorname{Lip}(h) = \operatorname{Lip}(f)$ möglich ist. Siehe auch Lang '99.

(2) Ist $f : A \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ Lipschitzfunktion, so existiert eine Lipschitz-Fortsetzung mit gleicher Lipschitzkonstante (Satz von Kirszbraun '34, Valentine '45).

Beweis
(1) Sei $f : A \to \mathbb{R}$. Für $x, y \in X$ ist

$$\begin{aligned} g(x) &\leq \inf\{f(x) + (d(x, y) + d(y, z)) \cdot \operatorname{Lip}(f) \colon z \in A\} \\ &\leq g(y) + \operatorname{Lip}(f) \cdot d(x, y) \end{aligned}$$

und aus Symmetriegründen also $|g(x) - g(y)| \leq \operatorname{Lip}(f) \cdot d(x, y)$. Insbesondere ist $\operatorname{Lip}(g) \leq \operatorname{Lip}(f)$. Für $x \in A$ gilt

$$f(x) + \operatorname{Lip}(f) \cdot d(x, x) = f(x) \leq f(z) + \operatorname{Lip}(f) \cdot d(x, z)$$

also $g(x) \leq f(x) \leq g(x)$, d.h. $g(x) = f(x)$ für $x \in A$. Somit ist $\operatorname{Lip}(g) \geq \operatorname{Lip}(f)$.

(2) Wir haben $f = (f_1, \dots, f_n)^T, f_i : A \to \mathbb{R}, \mathrm{Lip}(f_i) \le \mathrm{Lip}(f)$. Zu $i \in \{1, \dots, n\}$ gibt es nach (1) eine Lipschitz-Fortsetzung $h_i : X \to \mathbb{R}$ von f_i mit $\mathrm{Lip}(h_i) = \mathrm{Lip}(f_i)$. Dann ist $h := (h_1, \dots, h_n)^T$ eine Lipschitz-Fortsetzung von f und $\mathrm{Lip}(h) \le \sqrt{n}\,\mathrm{Lip}(f)$, denn

$$\begin{aligned}\|h(x) - h(y)\| &= \left(\sum_{i=1}^{n} (h_i(x) - h_i(y))^2\right)^{\frac{1}{2}} \\ &\le \left(\sum_{i=1}^{n} \mathrm{Lip}(h_i)^2 d(x,y)^2\right)^{\frac{1}{2}} \\ &\le \mathrm{Lip}(f) \cdot (nd(x,y)^2)^{\frac{1}{2}} \\ &= \sqrt{n}\,\mathrm{Lip}(f) d(x,y)\end{aligned}$$ ■

Satz 3.2 (Kirszbraun, Valentine)
Seien $(\mathcal{H}_1, \langle\cdot,\cdot\rangle_1)$ und $(\mathcal{H}_2, \langle\cdot,\cdot\rangle_2)$ Hilberträume, $\emptyset \neq D \subseteq \mathcal{H}_1$, $f : D \to \mathcal{H}_2$ eine Lipschitz-Abbildung. Dann existiert eine Lipschitz-Fortsetzung h von f mit $\mathrm{Lip}(h) = \mathrm{Lip}(f)$ und $h|_D = f$.

Beweis (Reich und Simons ’05)
Es genügt, den Fall $\mathcal{H}_1 = \mathcal{H}_2 = \mathcal{H}$ zu betrachten, sowie $\mathrm{Lip}(f) = 1$.

Skizze: $\mathcal{H} := \mathcal{H}_1 \oplus \mathcal{H}_2 := \{(x,y) \colon x \in \mathcal{H}_1, y \in \mathcal{H}_2\}, \langle (x_1,y_1),(x_2,y_2)\rangle := \langle x_1,x_2\rangle_1 + \langle y_1,y_2\rangle_2$, $(x_i,y_i) \in \mathcal{H}_1 \oplus \mathcal{H}_2$. Zu $f : D \subseteq \mathcal{H}_1 \to \mathcal{H}_2$ betrachte $\tilde{f} : D \oplus \mathcal{H}_2 \to \mathcal{H}_1 \oplus \mathcal{H}_2$, $(x,y) \mapsto (0, f(x))$, usw. (Übung)

Sei nun $f : D \subseteq \mathcal{H} \to \mathcal{H}$ mit $\mathrm{Lip}(f) = 1$. Zu f gebe es keine echte 1-Lipschitz-Fortsetzung. Seien

$$\mathcal{H}^2 := \mathcal{H} \oplus \mathcal{H} = \mathcal{H} \times \mathcal{H}$$

und

$$\chi : \mathcal{H}^2 \to (-\infty, \infty], \qquad \chi(x,y) := \sup\{\|y - f(z)\|^2 - \|x - z\|^2 \colon z \in D\}.$$

Lemma A: Es gilt $\chi \ge 0$ und $\{\chi = 0\} = G(f) := \{(z, f(z)) \colon z \in D\}$.

Beweis des Lemmas: Seien $x, y \in \mathcal{H}$. Ist $x \in D$, so ergibt die Wahl $z := x \in D$

$$\chi(x,y) \ge \|y - f(x)\|^2 - \|x - x\|^2 = \|y - f(x)\|^2 \ge 0.$$

Sei nun $x \notin D$. Sei $\tilde{f}$ die Fortsetzung von f auf $D \cup \{x\}$ mit $\tilde{f}(x) := y$. Da $\tilde{f}$ keine 1-Lipschitz-Abbildung ist, muss es ein $z \in D$ geben mit

$$\|y - f(z)\|^2 = \|\tilde{f}(x) - \tilde{f}(z)\|^2 > \|x - z\|^2,$$

also ist $\chi(x,y) > 0$. Damit ist $\chi \ge 0$ und $\{\chi = 0\} \subseteq G(f)$ gezeigt.

Sei nun $(x,y) \in G(f)$, d.h. $x \in D$ und $y = f(x)$. Also ist für $z \in D$

$$\|y - f(z)\|^2 = \|f(x) - f(z)\|^2 \le \|x - z\|^2.$$

Dies ergibt $\chi(x,y) \le 0$ und daher $\chi(x,y) = 0$, d.h. $G(f) \subseteq \{\chi = 0\}$.

Lemma B: Definiere die Abbildung $\varphi : \mathcal{H}^2 \to (-\infty, \infty]$, $\quad \varphi(x,y) \coloneqq \frac{1}{4}\chi(x+y, x-y) + \langle x, y\rangle$ für $x, y \in \mathcal{H}$.

(1) Für $x, y \in \mathcal{H}$ gilt

$$4 \cdot \varphi(x,y) = \sup\{\|f(z)\|^2 - \|z\|^2 + 2\langle x, z - f(z)\rangle + 2\langle y, z + f(z)\rangle \colon z \in D\}.$$

(2) Für $z \in D$ gilt

$$4 \cdot \varphi(\frac{z + f(z)}{2}, \frac{z - f(z)}{2}) = \|z\|^2 - \|f(z)\|^2.$$

(3) φ ist eine eigentliche ($\varphi \not\equiv \infty$), unterhalbstetige, konvexe Funktion mit $\varphi^*(x,y) \ge \varphi(y,x)$ für $x, y \in \mathcal{H}$. Hierbei ist φ^* die zu φ konjugierte Funktion, die erklärt ist durch

$$\varphi^*(\zeta) \coloneqq \sup\{\langle \zeta, \xi\rangle - \varphi(\xi) \colon \xi \in \mathcal{H}^2\}, \qquad \zeta \in \mathcal{H}^2.$$

Beweis des Lemmas:

(1) Für $x, y \in \mathcal{H}, z \in D$ gilt:

$$\begin{aligned}
&\|x - y - f(z)\|^2 - \|x + y - z\|^2 \\
={}& -4\langle x, y\rangle - 2\langle x - y, f(z)\rangle + 2\langle x + y, z\rangle + \|f(z)\|^2 - \|z\|^2 \\
={}& -4\langle x, y\rangle + 2\langle x, z - f(z)\rangle + 2\langle y, z + f(z)\rangle + \|f(z)\|^2 - \|z\|^2.
\end{aligned}$$

Bildung des Supremums über $z \in D$ ergibt die Behauptung.

(2) Direkt durch Einsetzen in die Definition erhält man für $z \in D$

$$4\varphi(\frac{z + f(z)}{2}, \frac{z - f(z)}{2}) = \underbrace{\chi(z, f(z))}_{=0} + \langle z + f(z), z - f(z)\rangle = \|z\|^2 - \|f(z)\|^2.$$

(3) Aus der rechten Seite von (1) erkennt man, dass φ als Supremum von stetigen, konvexen Funktionen konvex und unterhalbstetig ist. Aus (2) folgt, dass $\varphi \not\equiv \infty$ gilt. Für $x, y \in \mathcal{H}$ und $z \in D$ gilt

$$\begin{aligned}
\varphi^*(x,y) &\ge \left\langle \left(\frac{z + f(z)}{2}, \frac{z - f(z)}{2}\right), (x,y) \right\rangle - \varphi\left(\frac{z + f(z)}{2}, \frac{z - f(z)}{2}\right) \\
&= \frac{1}{4}\left(2\langle x, z + f(z)\rangle + 2\langle y, z - f(z)\rangle + \|f(z)\|^2 - \|z\|^2\right),
\end{aligned}$$

wobei zuletzt (2) verwendet wurde. Aufgrund von (1) ist das Supremum über $z \in D$ auf der rechten Seite gerade $\varphi(y,x)$.

Lemma C: Sei $\tilde{\mathcal{H}}$ ein Hilbertraum, $h(\zeta) \coloneqq \frac{1}{2}\|\zeta\|^2$, $\zeta \in \tilde{\mathcal{H}}$. Sei ferner $\psi : \tilde{\mathcal{H}} \to (-\infty, \infty]$ eine eigentliche, unterhalbstetige konvexe Funktion. Gilt $\psi(\zeta) + h(\zeta) \ge 0$ für alle $\zeta \in \tilde{\mathcal{H}}$, dann gibt es ein $v \in \tilde{\mathcal{H}}$ mit $\psi^*(v) + h(v) \le 0$.

Beweis des Lemmas: Nach Voraussetzung gilt $\psi(\zeta) \ge -h(\zeta)$ für $\zeta \in \tilde{\mathcal{H}}$. Sei

$$\operatorname{epi}(\psi) \coloneqq \{(\zeta, t) \in \tilde{\mathcal{H}} \times \mathbb{R} : \psi(\zeta) \le t\}, \quad \widetilde{\operatorname{epi}}(-h) \coloneqq \{(\zeta, s) \in \tilde{\mathcal{H}} \times \mathbb{R} : s \le -h(\zeta)\}.$$

Dann sind $\operatorname{epi}(\psi)$, $\widetilde{\operatorname{epi}}(-h)$ abgeschlossene, konvexe, nicht leere Mengen, die keine gemeinsamen inneren Punkt haben. Dann gibt es eine „nicht vertikale“ trennende Hyperebene, das heißt es gibt ein $\alpha \in \mathbb{R}$ und $v \in \tilde{\mathcal{H}}$ mit:

$$\psi(\zeta) \geq \langle \zeta, v \rangle + \alpha \geq -h(\zeta)$$

für alle $\zeta \in \tilde{\mathcal{H}}$. Insbesondere

$$\begin{aligned} \psi^*(v) &= \sup\{\langle \zeta, v \rangle - \psi(\zeta) : \zeta \in \tilde{\mathcal{H}}\} \\ &\leq -\alpha \\ &\leq \inf\{\langle \zeta, v \rangle + h(\zeta) : \zeta \in \tilde{\mathcal{H}}\} \\ &\leq \langle -v, v \rangle + \frac{1}{2}\|v\|^2 \\ &= -\frac{1}{2}\|v\|^2 = -h(v), \end{aligned}$$

also $\psi^*(v) + h(v) \leq 0$.

Lemma D: Hat $f : D \to \mathcal{H}$ keine echte 1-Lipschitzfortsetzung, so gilt $D = \mathcal{H}$.

Beweis des Lemmas: Sei $h(x, y) := \frac{1}{2}\|(x, y)\|^2$, $(x, y) \in \mathcal{H}^2$. Es gilt für $x, y \in \mathcal{H}$:

$$\begin{aligned} 4(\varphi(x, y) + h(x, y)) &= \chi(x + y, x - y) + 4\langle x, y \rangle + 2\|x\|^2 + 2\|y\|^2 \\ &= \chi(x + y, x - y) + 2\|x + y\|^2 \geq 0. \end{aligned}$$

Wegen Lemma B gilt somit

$$\varphi^*(y, x) + h(y, x) \geq \varphi(x, y) + h(x, y) \geq 0$$

für alle $x, y \in \mathcal{H}$. Nach Lemma C gibt es ein $(x_0, y_0) \in \mathcal{H}^2$ mit $\varphi(y_0, x_0) + h(y_0, x_0) \leq 0$, das heißt $\varphi^*(y_0, x_0) + h(y_0, x_0) = 0 = \varphi(x_0, y_0) + h(x_0, y_0)$ also $\chi(x_0 + y_0, x_0 - y_0) + 2\|x_0 + y_0\|^2 = 0$ und somit $x_0 = -y_0$ und $\chi(0, 2x_0) = 0$. Dies führt wegen Lemma A auf $(0, 2x_0) \in G(f)$, das heißt $0 \in D$.

Sei nun $x_1 \in \mathcal{H}$ beliebig. Definiere $f_{x_1} : D - x_1 \to \mathcal{H}$ durch $f_{x_1}(x) := f(x + x_1)$. Da f_{x_1} keine echte 1-Lipschitzfortsetzung hat, muss $0 \in= D - x_1$ gelten, also $x_1 \in D$ und somit $D = \mathcal{H}$.

Beweis des Satzes: Sei $f : D \to \mathcal{H}$ eine 1-Lipschitzabbildung mit $\emptyset \neq D \subset \mathcal{H}$. Betrachte

$$\mathcal{S} := \{(E, g) : D \subset E,\ g|_D = f,\ g \text{ ist 1-Lipschitzabbildung}\}.$$

Durch

$$(E, g) \prec (\tilde{E}, \tilde{g}) :\iff E \subset \tilde{E} \text{ und } \tilde{g}|_E = g$$

für $(E, g), (\tilde{E}, \tilde{g}) \in \mathcal{S}$ wird auf $\mathcal{S}$ eine Ordnung eingeführt, in der jede Kette eine obere Schranke besitzt. Nach dem Zornschen Lemma gibt es ein maximales Element in $\mathcal{S}$, etwa (E, g). Dann ist wegen Lemma D aber $E = \mathcal{H}$, das heißt $(\mathcal{H}, g)$ ist die gesuchte 1-Lipschitzfortsetzung von f. ∎

Eine Abbildung $f : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ heißt differenzierbar an der Stelle $x \in \mathbb{R}^m$, falls es eine lineare Abbildung $L : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ gibt mit

$$\lim_{y \to x} \frac{f(y) - f(x) - L(y - x)}{\|y - x\|} = 0.$$

In diesem Fall schreiben wir $Df(x) := Df_x := L$. Ferner ist

$$D_u f(x) := Df_x(u) = \lim_{t \to 0} \frac{f(x+tu) - f(x)}{t}$$

für $u \in \mathbb{R}^m$.

Satz 3.3 (Rademacher)
Jede Lipschitzfunktion $f : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ ist λ^m-fast-überall differenzierbar.

Beweis
Sei stets ohne Beschränkung der Allgemeinheit $n = 1$.

Teil 1: $m = 1$ und f ist monoton wachsend. Definiere

$$\nu_f(M) := \inf\{\sum_{i=1}^{\infty} \underbrace{(f(b_i) - f(a_i))}_{\geq 0} : a_i < b_i,\, M \subset \bigcup_{i=1}^{\infty} (a_i, b_i)\}.$$

Wie im Fall λ^1 ist $\nu_f \in \mathbb{M}(\mathbb{R})$. Beachte hierzu $\nu_f(M) \leq \mathrm{Lip}(f) \cdot \lambda^1(M)$. Dies zeigt auch $\nu_f \ll \lambda^1$ und daher $(\nu_f)_{\lambda^1} = \nu_f$. Das System

$$V := \{(x, [a,b]) : x \in [a,b]\}$$

ist eine λ^1-Vitali-Relation. Also ist λ^1-fast-überall $\mathbb{D}(\nu_f, \lambda^1, V, \cdot) \in [0, \infty)$ und

$$\mathbb{D}(\nu_f, \lambda^1, V, x) = V\text{-}\lim_{[a,b] \to x} \frac{\nu_f([a,b])}{\lambda^1([a,b])} = \lim_{y \to x} \frac{f(y) - f(x)}{y - x} = f'(x)$$

für λ^1-fast-alle $x \in \mathbb{R}$.

Teil 2: $m = 1$, $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ nicht notwendigerweise monoton. Für $x \in \mathbb{R}$ sei

$$g(x) := \begin{cases} \sup\{\sum_{i=1}^m |f(a_i) - f(a_{i-1})| : 0 = a_0 \leq a_1 \leq \dots \leq a_m = x,\, m \in \mathbb{N}\}, & x \geq 0, \\ -\sup\{\sum_{i=1}^m |f(a_i) - f(a_{i-1})| : x = a_0 \leq a_1 \leq \dots \leq a_m = 0,\, m \in \mathbb{N}\}, & x \leq 0. \end{cases}$$

Damit ist g monoton wachsend. Für $x > y$ gilt

$$\begin{aligned} g(x) &= g(y) + \sup\{\sum_{i=1}^m |f(a_i) - f(a_{i-1})| : y = a_0 \leq a_1 \leq \dots \leq a_m = x,\, m \in \mathbb{N}\} \\ &\leq g(y) + \mathrm{Lip}(f) \cdot \sup\{\sum_{i=1}^m |a_i - a_{i-1}| : y = a_0 \leq a_1 \leq \dots \leq a_m = x,\, m \in \mathbb{N}\} \\ &= g(y) + \mathrm{Lip}(f) \cdot |y - x| \end{aligned}$$

also $|g(x) - g(y)| \leq \mathrm{Lip}(f) \cdot |x - y|$. Außerdem erhalten wir für $x > y$, dass

$$g(x) \geq g(y) + |f(x) - f(y)| \geq g(y) + f(x) - f(y),$$

und somit $(g - f)(x) \geq (g - f)(y)$, das heißt $g - f$ ist ebenfalls monoton wachsend und ebenfalls Lipschitz. Nach Teil 1 sind daher g und $g - f$ λ^1-fast-überall differenzierbar. Somit auch $f = g - (g - f)$.

Nebenbemerkung: Aus dem Beweis folgt zunächst im Fall einer monotonen Lipschitzfunktion

$$\begin{aligned} f(b) - f(a) = \nu_f([a,b]) &= (\nu_f)_{\lambda^1}([a,b]) \\ &= \int_{[a,b]} \mathbb{D}(\nu_f, \lambda^1, V, x)\lambda(dx) \\ &= \int_{[a,b]} f'(x)\lambda(dx). \end{aligned}$$

Die Gleichung

$$f(b) - f(a) = \int_{[a,b]} f'(x)\lambda(dx)$$

erhält man dann sogar für jede Lipschitzfunktion aufgrund der in Teil 2 beschriebenen Zerlegung. Dies ist der Hauptsatz der Differenzial- und Integrationsrechnung für Lipschitzfunktionen.

Teil 3: $m \geq 1$. Sei $e \in S^{m-1}$. Sei N_e die Menge aller $x \in \mathbb{R}^m$, für die $t \mapsto f(x+te)$ in $t = 0$ nicht differenzierbar ist. Dann ist N_e eine Borelmenge und $\mathscr{H}^1(N_e \cap (x + \mathbb{R}e)) = 0$ nach Teil 2. Der Satz von Fubini zeigt $\lambda^m(N_e) = 0$ für beliebige $e \in S^{m-1}$.

Für λ^m-fast-alle $x \in \mathbb{R}^m$ existiert dann

$$\nabla f(x) \coloneqq (D_1 f(x), \ldots, D_m f(x)),$$

wobei $D_i f(x) \coloneqq D_{e_i} f(x)$ für die Standardbasis $(e_1, \ldots, e_m)$ des $\mathbb{R}^m$. Für festes $e \in S^{m-1}$ existiert $D_e f(x)$ für λ^m-fast-alle $x \in \mathbb{R}^m$. Sei $\varphi \in \mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R}^m)$. Für $t > 0$ und $e \in S^{m-1}$ gilt

$$\int_{\mathbb{R}^m} \frac{f(x+te) - f(x)}{t} \cdot \varphi(x)\lambda^m(dx) = -\int f(x) \cdot \frac{\varphi(x) - \varphi(x-te)}{t} \varphi(x)\lambda^m(dx).$$

Wegen $|\varphi| \leq \|\varphi\|_\infty \cdot \mathbb{1}_{\mathrm{supp}(\varphi)}$ und da f Lipschitz-stetig ist, erhält man mit dem Satz von der majorisierten Konvergenz:

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^m} D_e f(x)\varphi(x)\lambda^m(dx) &= -\int f(x) D_e\varphi(x)\lambda^m(dx) \\ &= -\sum_{j=1}^m \langle e, e_j\rangle \cdot \int f(x) \cdot D_j\varphi(x)\lambda^m(dx) \\ &= -\sum_{j=1}^m \langle e, e_j\rangle \cdot (-1) \int_{\mathbb{R}^m} D_{e_j} f(x)\varphi(x)\lambda^m(dx) \\ &= \int_{\mathbb{R}^m} \langle e, \nabla f(x)\rangle \varphi(x)\lambda^m(dx). \end{aligned}$$

Hieraus liest man $D_e f(x) = \langle e, \nabla f(x)\rangle$ für λ^m-fast-alle $x \in \mathbb{R}^m$ ab, und zwar für ein beliebiges (aber festes) $e \in S^{m-1}$.

Sei $E \subset S^{m-1}$ eine abzählbare dichte Teilmenge. Dann ist das Komplement der Menge

$$A \coloneqq \bigcap_{e \in E} \{x \in \mathbb{R}^m : D_e f(x) = \langle e, \nabla f(x)\rangle\}$$

eine λ^m-Nullmenge. Wir zeigen, dass f in $x \in A$ differenzierbar ist. Sei also $x \in A$. Für $t > 0$ und $e \in S^{m-1}$ sei

$$\Delta_t(e) := \frac{f(x+te) - f(x)}{t} - \langle e, \nabla f(x) \rangle.$$

Wir zeigen: $\Delta_t(e) \to 0$ für $t \to 0$ gleichmäßig in $e \in S^{m-1}$.

Setze $M := 2 \max\{\mathrm{Lip}(f), \|\nabla f(x)\|, 1\}$. Dann gilt für $e, \bar{e} \in S^{m-1}$:

$$|\Delta_t(e) - \Delta_t(\bar{e})| \leq |\frac{f(x+te) - f(x+t\bar{e})}{t}| + \|\nabla f(x)\| \cdot \|e - \bar{e}\| \leq M \cdot \|e - \bar{e}\|.$$

Ferner gilt $\Delta_t(e) \to 0$ für alle $e \in E$, wenn $t \to 0$. Sei nun $\varepsilon > 0$ beliebig vorgegeben. Dann gibt es eine endliche Teilmenge $\bar{E} \subset E$ mit $d(e, \bar{E}) \leq \frac{\varepsilon}{2M}$ für jedes $e \in S^{m-1}$. Bei fest gewählter Menge $\bar{E}$ gibt es ein $\delta > 0$, so dass $|\Delta_t(\bar{e})| \leq \frac{\varepsilon}{2}$ für alle $\bar{e} \in \bar{E}$ und $0 < t \leq \delta$. Für $e \in S^{m-1}$ und $0 < t \leq \delta$ gilt dann:

$$\begin{aligned} |\Delta_t(e)| &\leq \min_{\bar{e} \in \bar{E}} \{|\Delta_t(e) - \Delta_t(\bar{e})| + |\Delta_t(\bar{e})|\} \\ &\leq \min_{\bar{e} \in \bar{E}} \{M \cdot \|e - \bar{e}\| + \frac{\varepsilon}{2}\} \\ &\leq \frac{\varepsilon}{2M} \cdot M + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon. \end{aligned}$$

Dies zeigt $\Delta_t \to 0$ gleichmäßig für $t \to 0$, und daraus folgt die Behauptung. ■

3.2 Die Flächenformel

Sei $U \subset \mathbb{R}^n$ offen und $f : U \to \mathbb{R}^n$ ein C^1-Diffeomorphismus. Dann ist für eine beliebige λ^n-messbare Funktion $g : \mathbb{R}^n \to [0, \infty]$

$$\int_U g \circ f(x) \cdot Jf(x) \lambda^n(dx) = \int_{f(U)} g(y) \lambda^n(dy), \tag{$*$}$$

wobei $Jf(x) := |\det(Df(x))|$.

Ansätze für Verallgemeinerungen:

- Abbildungen $f : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ mit $m, n \in \mathbb{N}$ oder sogar allgemeiner $f : M \to N$ mit gewissen m-dimensionalen bzw. n-dimensionalen Mengen M, N.
- f nicht notwendig injektiv.
- f nicht notwendig differenzierbar, aber Lipschitz.

Ist speziell $A \subset U$ eine Borelmenge und $g(y) := \mathbb{1}_{f(A)}(y)$, dann geht $(*)$ über in

$$\int_A Jf(x) \lambda^n(dx) = \lambda^n(f(A)).$$

Für eine lineare Abbildung ist dies fast trivial. Umformulierung ergibt

$$\int_A Jf(x)\lambda^n(dx) = \int_{\mathbb{R}^n} \#\left(A \cap f^{-1}\{y\}\right) \lambda^n(dy),$$

wobei

$$\#\left(A \cap f^{-1}\{y\}\right) = \begin{cases} 1, & y \in f(A), \\ 0, & \text{sonst,} \end{cases}$$

da f injektiv ist.

Beispiel
Wie sieht es dagegen in der folgenden Situation aus? Es seien $n = 1$, $f : [-1,1] \to \mathbb{R}$ mit $f(t) = 1 - t^2$. Es ist $f'(t) = -2t$ und damit $Jf(t) = 2|t|$.

$$\int_{[-1,1]} Jf(y)dy = \int_{[-1,1]} 2|t|dt = 2 \cdot d \int_0^1 tdt = 4 \cdot \frac{1}{2} \cdot 1 = 2.$$

Aber es ist $f([-1,1]) = [0,1]$ und $\int_{f(A)} dt = \lambda(f(A)) = 1$. Man beachte jedoch

$$\int \underbrace{\#([-1,1] \cap f^{-1}(\{t\}))}_{=\begin{cases} 2, & t \in (0,1) \\ 1, & t \in \{0,1\} \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}} = 2 \cdot 1.$$

Definition
Eine lineare Abbildung $\varrho : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ heißt lineare Isometrie, falls

$$\langle \varrho(x), \varrho(y) \rangle = \langle x, y \rangle$$

für alle $x, y \in \mathbb{R}^m$.

Bemerkungen: (1) Eine lineare Isometrie ist injektiv und $\|\varrho(x) - \varrho(y)\| = \|x - y\|$ für alle $x, y \in \mathbb{R}^m$.

(2) $\mathscr{H}^t(\varrho(A)) = \mathscr{H}^t(A)$ für alle $A \subset \mathbb{R}^m$ und $t \geq 0$.

Lemma 3.4
Sei $m \leq n$ und $f : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ eine lineare Abbildung. Dann gibt es eine symmetrische lineare Abbildung $\sigma : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^m$ und eine lineare Isometrie $\varrho : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ mit $f = \varrho \circ \sigma$. Ist $(a_1, \ldots, a_m)$ eine Orthonormalbasis von $\mathbb{R}^m$, so gilt

$$[\![f]\!] := |\det(\sigma)| = \sqrt{\det(\langle f(a_i), f(a_j)\rangle)_{i,j=1,\ldots,m}},$$

und $\mathscr{H}^m(f(A)) = [\![f]\!] \cdot \mathscr{H}^m(A)$ für $A \subset \mathbb{R}^m$.

Beweis
Wir definieren eine Hilfsabbildung $\varphi = f^* \circ f : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^m$. Sie ist symmetrisch, da

$$\langle \varphi(x), y \rangle = \langle f^* \circ f(x), y \rangle = \langle f(x), f(y) \rangle,$$

und φ ist positiv semidefinit. Somit existiert eine Orthonormalbasis $a_1, \ldots, a_m$ aus Eigenvektoren von φ mit Eigenwerten $\lambda_1, \ldots, \lambda_m \geq 0$. Wir setzten $b_i := \frac{1}{\sqrt{\lambda_i}} \cdot f(a_i)$, falls $\lambda_i \neq 0$. Beachte dabei

$$\langle b_i, b_j \rangle = \frac{1}{\sqrt{\lambda_i \lambda_j}} \cdot \langle f(a_i), f(a_j) \rangle = \sqrt{\frac{\lambda_i}{\lambda_j}} \cdot \langle a_i, a_j \rangle = \delta_{ij},$$

falls $\lambda_i, \lambda_j \neq 0$. Wir ergänzen diese Vektoren zu einer Orthonormalbasis $(b_1, \ldots, b_m)$ des $\mathbb{R}^m$.

Wir definieren nun $\sigma(a_i) := \sqrt{\lambda_i} \cdot a_i$, $i = 1, \ldots, m$. σ ist symmetrisch, da $(a_1, \ldots, a_m)$ eine Orthonormalbasis ist. Wir definieren weiter $\varrho(a_i) := b_i$, $i = 1 \ldots, m$. ϱ ist eine lineare Isometrie. Nun gilt für $\lambda_i \neq 0$

$$\varrho \circ \sigma(a_i) = \varrho(\sqrt{\lambda_i} \cdot a_i) = \sqrt{\lambda_i} \cdot b_i = \sqrt{\lambda_i} \cdot \frac{1}{\sqrt{\lambda_i}} \cdot f(a_i) = f(a_i),$$

und für $\lambda_i = 0$ ist $\varrho \circ \sigma(a_i) = 0$ und es gilt

$$\langle f(a_i), f(a_i) \rangle = \langle \varphi(a_i), a_i \rangle = \langle \lambda_i a_i, a_i \rangle = 0$$

also $f(a_i) = 0$.

Seien ϱ, σ und $(a_1, \ldots, a_m)$ wie in den Voraussetzungen des Lemmas gewählt:

$$\langle f(a_i), f(a_j) \rangle = \langle \varrho \circ \sigma(a_i), \varrho \circ \sigma(a_j) \rangle = \langle \sigma(a_i), \sigma(a_j) \rangle.$$

Sei S die beschreibende Matrix von σ bezüglich $(a_1, \ldots, a_m)$. Dann:

$$\begin{aligned} (\det(\sigma))^2 &= \det(S^\top) \cdot \det(S) = \det(S^\top \cdot S) = \\ &= \det((\langle \sigma(a_i), \sigma(a_j) \rangle)_{i,j=1,\ldots,m}) \\ &= \det((\langle f(a_i), f(a_j) \rangle)_{i,j=1,\ldots,m}). \end{aligned}$$

Ferner gilt für $A \subset \mathbb{R}^m$:

$$\mathscr{H}^m(f(A)) = \mathscr{H}^m(\varrho \circ \sigma(A)) = \mathscr{H}^m(\sigma(A)) = |\det(\sigma)| \cdot \mathscr{H}^m(A) = [\![f]\!] \cdot \mathscr{H}^m(A). \qquad \blacksquare$$

Bemerkungen: (1) Sei

$$\Lambda(n, m) := \{\alpha : \{1, \ldots, m\} \to \{1, \ldots, n\} : \alpha \text{ ist streng monoton wachsend}\}$$

für $m \leq n$. Für $\alpha \in \Lambda(n, m)$ sei $p_\alpha : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ mit

$$p_\alpha((x_1, \ldots, x_n)^\top) := (x_{\alpha(1)}, \ldots, x_{\alpha(m)})^\top$$

erklärt. Dann gilt

$$[\![f]\!]^2 = \sum_{\alpha \in \Lambda(n,m)} \det(p_\alpha \circ f)^2.$$

Dies ist der verallgemeinerte Satz des Pythagoras.

(2) Sei $f : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ linear mit $f = \varrho \circ \sigma$ und $a_1, \ldots, a_m$ eine Orthonormalbasis. Dann ist

$$\begin{aligned} [\![f]\!] &= \det(\sigma(a_1), \ldots, \sigma(a_m)) \\ &\leq \|\sigma(a_1)\| \cdot \cdots \cdot \|\sigma(a_m)\| \\ &= \|f(a_1)\| \cdot \cdots \cdot \|f(a_m)\|. \end{aligned}$$

Proposition 3.5
Seien $m \leq n$, $f : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ eine Lipschitzabbildung und $A \in \mathfrak{B}(\mathbb{R}^m)$. Dann ist die Abbildung

$$y \mapsto \#(A \cap f^{-1}(\{y\}))$$

eine $\mathscr{H}^m$-messbare Abbildung $\mathbb{R}^n \to [0, \infty]$ und

$$\int_{\mathbb{R}^n} \#(A \cap f^{-1}(\{y\}))\, \mathscr{H}^m(dy) \leq \operatorname{Lip}(f)^m \cdot \mathscr{H}^m(A).$$

Bemerkung: Eine entsprechende Aussage gilt allgemein für $f : (X, d) \to (Y, \bar{d})$, wobei (X, d) ein polnischer, das heißt separabler, vollständiger metrischer Raum ist.

Beweis
Betrachte Folgen von Zerlegungen für $i \in \mathbb{N}$:

$$\begin{aligned} \mathcal{C}_i &:= \{[0, 2^{-i})^m + 2^i \cdot z : z \in \mathbb{Z}^m\}, \\ \mathcal{B}_i &:= \{C \cap A : C \in \mathcal{C}_i\}. \end{aligned}$$

Dies ist eine abzählbare disjunkte Zerlegung des $\mathbb{R}^m$ mit

$$\sup\{\operatorname{diam}(C) : C \in \mathcal{C}_i\} \to 0$$

für $i \to \infty$, und ferner ist jedes $C \in \mathcal{C}_i$ disjunkte Vereinigung von gewissen Mengen $\tilde{C} \in \mathcal{C}_{i+1}$.

Zu $B \in \mathcal{B}_i$ existiert eine Folge $(K_j)_{j \in \mathbb{N}}$ kompakter Mengen mit $K_j \subset B$ und $\mathscr{H}^m(B \setminus K_j) < \frac{1}{j}$ und damit $\mathscr{H}^m(B \setminus \bigcup_{j=1}^{\infty} K_j) = 0$. Wegen

$$f(B) \setminus \bigcup_{j=1}^{\infty} f(K_j) = f(B) \setminus f(\bigcup_{j=1}^{\infty} K_j) \subset f(B \setminus \bigcup_{j=1}^{\infty} K_j)$$

folgt

$$0 \leq \mathscr{H}^m(f(B) \setminus \bigcup_{j=1}^{\infty} f(K_j)) \leq \operatorname{Lip}(f)^m \cdot \mathscr{H}^m(B \setminus \bigcup_{j=1}^{\infty} K_j) = 0.$$

Da $f(K_j) \in \mathfrak{B}(\mathbb{R}^n) \subset \mathcal{A}_{\mathscr{H}^m}$ und $f(B) \setminus \bigcup_{j=1}^{\infty} f(K_j) \in \mathcal{A}_{\mathscr{H}^m}$ folgt $f(B) \in \mathcal{A}_{\mathscr{H}^m}$. Wegen

$$\sum_{B \in \mathcal{B}_i} \mathbb{1}_{f(B)} \nearrow \#(A \cap f^{-1}(\{y\}))$$

für $i \to \infty$ folgt die Messbarkeitsbehauptung.

Mit dem Satz von der monotonen Konvergenz erhält man schließlich

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}^n} \#(A \cap f^{-1}(\{y\}))\, \mathscr{H}^m(dy) &= \int_{\mathbb{R}^n} \lim_{i\to\infty} \sum_{B\in\mathcal{B}_i} \mathbb{1}_{f(B)}(y)\mathscr{H}^m(dy)\\ &= \lim_{i\to\infty} \int_{\mathbb{R}^n} \sum_{B\in\mathcal{B}_i} \mathbb{1}_{f(B)}(y)\mathscr{H}^m(dy)\\ &= \lim_{i\to\infty} \sum_{B\in\mathcal{B}_i} \underbrace{\mathscr{H}^m(f(B))}_{\leq \mathrm{Lip}(f)^m\cdot\mathscr{H}^m(B)}\\ &\leq \mathrm{Lip}(f)^m \cdot \lim_{i\to\infty} \mathscr{H}^m(\underbrace{\bigcup_{B\in\mathcal{B}_i} B}_{=A})\\ &= \mathrm{Lip}(f)^m \cdot \mathscr{H}^m(A).\end{aligned}$$

■

Lemma 3.6
Ist $f : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ stetig, so ist

$$\{x \in \mathbb{R}^m : f \text{ ist in } x \text{ differenzierbar}\} \in \mathfrak{B}(\mathbb{R}^m).$$

Beweis
Übung

■

Definition
Sei $m \leq n$ und $f : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ differenzierbar in $x \in \mathbb{R}^m$. Dann heißt

$$Jf(x) := [\![Df_x]\!]$$

die Jakobische (Jakobi-Determinante) von f in x.

Unser Ziel im folgenden ist es, $\{x \in \mathbb{R}^m : Jf(x) \neq 0\}$ in Teile zu zerlegen, auf denen f injektiv ist und auf denen Df_x kontrolliert ist.

Lemma 3.7
Sei $m \leq n$ und $f : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ eine stetige Abbildung. Sei $t > 1$. Dann existiert eine abzählbare Borel-Überdeckung $\mathcal{E}$ der Menge

$$B := \{x \in \mathbb{R}^n : f \text{ ist differenzierbar in } x,\, Jf(x) \neq 0\}$$

derart, dass für jedes $E \in \mathcal{E}$ gilt:

(1) $f|_E$ ist injektiv.

(2) Es existiert ein Automophismus $\tau_E : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^m$ mit

   (i) $\mathrm{Lip}(f|_E \circ \tau_E^{-1}) \leq t$ und $\mathrm{Lip}(\tau_E \circ (f|_E)^{-1}) \leq t$.

(ii) $t^{-1} \cdot \|\tau_E(v)\| \leq \|Df_b(v)\| \leq t \cdot \|\tau_E(v)\|$ für alle $b \in B$ und $v \in \mathbb{R}^m$.

(iii) $t^{-m} \cdot |\det(\tau_E)| \leq J(f)|_E \leq t^m \cdot |\det(\tau_E)|$.

Beweis
Sei $\varepsilon > 0$ mit $t^{-1} + \varepsilon < 1 < t - \varepsilon$. Wähle abzählbare dichte Teilmengen $C \subset \mathbb{R}^m$ und $T \subset \mathrm{GL}(m, \mathbb{R})$. Für $c \in C$, $\tau \in T$ und $i \in \mathbb{N}$ sei $E(c, \tau, i)$ die Menge aller $b \in B \cap B(c, \frac{1}{i})$, für die gilt:

(a) $(t^{-1} + \varepsilon) \cdot \|\tau(v)\| \leq \|Df_b(v)\| \leq (t - \varepsilon) \cdot \|\tau(v)\|$ für alle $v \in \mathbb{R}^m$ und

(b) $\|f(a) - f(b) - Df_b(a - b)\| \leq \varepsilon \cdot \|\tau(a - b)\|$ für alle $a \in B(c, \frac{1}{i})$.

Sei $b \in E(c, \tau, i)$ und $a \in B(c, \frac{1}{i})$. Dann gilt

$$\begin{aligned} \|f(a) - f(b)\| &\leq \|Df_b(a - b)\| + \varepsilon \cdot \|\tau(a - b)\| \\ &\leq (t - \varepsilon)\|\tau(a - b)\| + \varepsilon \cdot \|\tau(a - b)\| \\ &= t \cdot \|\tau(a - b)\| = t \cdot \|\tau(a) - \tau(b)\| \end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned} \|f(a) - f(b)\| &\geq \|Df_b(a - b)\| - \varepsilon \cdot \|\tau(a - b)\| \\ &\geq (t^{-1} + \varepsilon)\|\tau(a - b)\| - \varepsilon \cdot \|\tau(a - b)\| \\ &= t^{-1} \cdot \|\tau(a) - \tau(b)\|. \end{aligned}$$

Zusammen erhält man für $a, b \in E(c, \tau, \frac{1}{i})$:

$$t^{-1} \cdot \|\tau(a) - \tau(b)\| \leq \|f(a) - f(b)\| \leq t \cdot \|\tau(a) - \tau(b)\|.$$

Dies zeigt (1). Für $a, b \in E(c, \tau, i)$ gilt also

$$\|f \circ \tau^{-1}(\tau(a)) - f \circ \tau^{-1}(\tau(b))\| \leq t \cdot \|\tau(a) - \tau(b)\|,$$

das heißt

$$\mathrm{Lip}(\underbrace{f|_{E(c,\tau,i)} \circ \tau^{-1}}_{\text{Abbildung auf } \tau(E(c,\tau,i))}) \leq t$$

sowie

$$\|\tau \circ f^{-1}(f(a)) - \tau \circ f^{-1}(f(b))\| \leq t \cdot \|f(a) - f(b)\|,$$

das heißt

$$\mathrm{Lip}(\underbrace{\tau \circ (f|_{E(c,\tau,i)})^{-1}}_{\text{Abbildung auf } f(E(c,\tau,i))}) \leq t.$$

Sei $b \in E(c, \tau, i)$. Sei $(e_1, \ldots, e_m)$ die Standardbasis. Da Df_b injektiv ist, ist in der Zerlegung $Df_b = \rho \circ \sigma$, wobei $\sigma : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^m$ symmetrisch und $\varrho : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ eine lineare Isometrie ist, die

Abbildung σ ein Automophismus. Wir schätzen ab

$$\begin{aligned}
Jf(b) &= |\det(\sigma)| = |\det(\sigma\circ\tau^{-1})|\cdot|\det(\tau)| \\
&= |\det(\sigma\circ\tau^{-1}(e_1),\dots,\sigma\circ\tau^{-1}(e_m))|\cdot|\det(\tau)| \\
&\leq \prod_{i=1}^{m}\|\sigma\circ\tau^{-1}(e_i)\|\cdot|\det(\tau)| \\
&= \prod_{i=1}^{m}\underbrace{\|Df_b(\tau^{-1}(e_i))\|}_{\leq t\cdot\|\tau(\tau^{-1}(e_i))\|=t}\cdot|\det(\tau)| \\
&\leq t^m\cdot|\det(\tau)|.
\end{aligned}$$

Analog erhält man:

$$\begin{aligned}
(Jf(b))^{-1} &= |\det(\sigma)|^{-1} = |\det(\sigma^{-1})| = |\det(\tau\circ\sigma^{-1})|\cdot|\det(\tau^{-1})| \\
&\leq |\det(\tau\circ\sigma^{-1}(e_1),\dots,\tau\circ\sigma^{-1}(e_m))|\cdot|\det(\tau)|^{-1} \\
&\leq \prod_{i=1}^{m}\|\tau\circ\sigma^{-1}(e_i)\|\cdot|\det(\tau)|^{-1} \\
&\leq \prod_{i=1}^{m} t\cdot\|Df_b(\sigma^{-1}(e_i))\|\cdot|\det(\tau)|^{-1} \\
&= t^m\cdot|\det(\tau)|^{-1},
\end{aligned}$$

das heißt

$$Jf(b)\geq t^{-1}\cdot|\det(\tau)|.$$

Zu zeigen ist noch, dass die Mengen $E(c,\tau,i)$ mit $c\in C,\tau\in T,i\in\mathbb{N}$ die Menge B überdecken. Sei hierzu $b\in B$. Dann ist $Df_b=\varrho\circ\sigma$ mit ϱ,σ wie oben. Wähle $\delta>0$ so, dass

$$(1-\delta\cdot\|\sigma^{-1}\|)^{-1}<t-\varepsilon \quad \text{und} \quad 1+\delta\cdot\|\sigma^{-1}\|<(t^{-1}+\varepsilon)^{-1}$$

und $\tau\in T$ so, dass $\|\sigma-\tau\|<\delta$. Dann gilt:

$$\begin{aligned}
\|\tau\circ\sigma^{-1}\| &= \|\mathrm{id}_{\mathbb{R}^m}+\tau\circ\sigma^{-1}-\mathrm{id}_{\mathbb{R}^m}\| \\
&\leq 1+\|\tau\circ\sigma-\sigma\circ\sigma^{-1}\| \\
&= 1+\|(\tau-\sigma)\circ\sigma^{-1}\| \\
&\leq 1+\|\tau-\sigma\|\cdot\|\sigma^{-1}\| \\
&< 1+\delta\cdot\|\sigma^{-1}\| \\
&< (t^{-1}+\varepsilon)^{-1}
\end{aligned}$$

und ähnlich folgt

$$\begin{aligned}\|\sigma \circ \tau^{-1}\| &\leq 1 + \|\sigma - \tau\| \cdot \|\tau^{-1}\| \\ &< 1 + \delta \cdot \|\tau^{-1}\| \\ &= 1 + \delta \cdot \|\sigma^{-1} \circ \sigma \circ \tau^{-1}\| \\ &\leq 1 + \delta \cdot \|\sigma^{-1}\| \cdot \|\sigma \circ \tau^{-1}\|\end{aligned}$$

und damit

$$\|\sigma \circ \tau^{-1}\| \leq (1 - \delta \cdot \|\sigma^{-1}\|)^{-1} < t - \varepsilon.$$

Wähle $i \in \mathbb{N}$ mit

$$\|f(a) - f(b) - Df_b(a-b)\| \leq \varepsilon \cdot \frac{\|a-b\|}{\mathrm{Lip}(\tau^{-1})}$$

für alle $a \in B(b, \frac{2}{i})$ und wähle $c \in C$ mit $\|c - b\| < \frac{1}{i}$. Für $v \in \mathbb{R}^m$ gilt dann

$$\begin{aligned}(t^{-1} + \varepsilon) \cdot \|\tau(v)\| &= (t^{-1} + \varepsilon) \cdot \|\tau \circ \sigma^{-1}(\sigma(v))\| \\ &\leq (t^{-1} + \varepsilon) \cdot \|\tau \circ \sigma^{-1}\| \cdot \|\sigma(v)\| \\ &\leq \|\sigma(v)\| \\ &= \|Df_b(v)\|\end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned}\|Df_b(v)\| = \|\sigma(v)\| &= \|\sigma \circ \tau^{-1}(\tau(v))\| \\ &\leq \|\sigma \circ \tau^{-1}\| \cdot \|\tau(v)\| \\ &\leq (t - \varepsilon)\|\tau(v)\|.\end{aligned}$$

Dies zeigt Bedingung (a).

Für $a \in B(c, \frac{1}{i}) \subset B(b, \frac{2}{i})$ ist

$$\begin{aligned}\|f(a) - f(b) - Df_b(a-b)\| &\leq \varepsilon \cdot \frac{\|a-b\|}{\mathrm{Lip}(\tau^{-1})} \\ &= \varepsilon \cdot \frac{\|\tau^{-1}(\tau(a)) - \tau^{-1}(\tau(b))\|}{\mathrm{Lip}(\tau^{-1})} \\ &\leq \varepsilon \cdot \|\tau(a-b)\|.\end{aligned}$$

Dies zeigt Bedingung (b). Somit ist eine Überdeckung gegeben.

Nun kommen wir zur Borel-Messbarkeit der überdeckenden Mengen.

Sei M die Menge aller $x \in \mathbb{R}^m$, für die f in x differenzierbar ist. Nach einer Übungsaufgabe, ist diese Menge messbar. Sei $\{x_i : i \in \mathbb{N}\}$ eine dichte Teilmenge von $\mathbb{R}^m$. Da τ und $Df_b(\cdot)$ stetig sind, gilt

$$\{b \in M : \text{ (a) gilt in } b\} = \underbrace{\bigcap_{j \in \mathbb{N}} \{b \in M : (t^{-1} + \varepsilon)\|\tau(x_j)\| \leq \|Df_b(x_j)\| \leq (t - \varepsilon)\|\tau(x_j)\|\}}_{\in \mathfrak{B}(\mathbb{R}^m)}$$

und

$$\{b \in M : \text{ (b) gilt in } b\} = \underbrace{\bigcap_{\substack{j \in \mathbb{N} \\ x_j \in B(c, 1/i)}} \{b \in M : \|f(x_j) - f(b) - Df_b(x_j - b)\| \leq \varepsilon \|\tau(x_j - b)\|\}}_{\in \mathfrak{B}(\mathbb{R}^m)}.$$

Zusammen ergibt dies die behauptete Messbarkeitsaussage. ■

Satz 3.8
Sei $m \leq n$, $f : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ eine Lipschitzabbildung und $A \subset \mathbb{R}^m$ eine λ^m-messbare Menge. Dann gilt

$$\int_A Jf(x) \lambda^m(dx) = \int_{\mathbb{R}^n} \#(A \cap f^{-1}(\{y\})) \, \mathscr{H}^m(dy).$$

Beweis
Die Abbildung $y \mapsto \#(A \cap f^{-1}(\{y\}))$ ist messbar, falls A eine Borelmenge ist. Zu der gegebenen $\mathscr{H}^m$-messbaren Menge A gibt es eine Borelmenge A' mit $A \subset A'$ und $\mathscr{H}^m(A' \setminus A) = 0$. Nach Proposition 3.5 ist $y \mapsto \#((A' \setminus A) \cap f^{-1}(\{y\}))$ $\mathscr{H}^m$ fast überall die Nullfunktion und damit $\mathscr{H}^m$-messbar. Hieraus folgt die Messbarkeit der Abbildung $y \mapsto \#(A \cap f^{-1}(\{y\}))$ allgemein.

Aufgrund des Satzes von Rademacher, Proposition 3.5, und der Regularität des Lebesguemaßes kann man annehmen, dass $A \in \mathfrak{B}(\mathbb{R}^m)$ und f in jedem Punkt von A differenzierbar ist. Ferner kann $\lambda^m(A) < \infty$ angenommen werden.

Fall (a): $A \subset \{x \in \mathbb{R}^m : Jf(x) \neq 0\}$. Sei $t > 1$ beliebig. Wähle eine Borel-Überdeckung $\mathcal{E}$ von $B := \{x \in \mathbb{R}^m : Jf(x) \neq 0\}$ wie in Lemma 3.7. Sei $\mathcal{G}$ eine abzählbare Zerlegung von A derart, das für jedes $G \in \mathcal{G}$ gilt: $G \in \mathfrak{B}(\mathbb{R}^m)$ und $G \subset E$ für ein $E \in \mathcal{E}$ mit τ_E wie in Lemma 3.7. Dann folgt

$$\begin{aligned} t^{-2m} \cdot \mathscr{H}^m(f(G)) &= t^{-2m} \cdot \mathscr{H}^m(((f|_E) \circ \tau_E^{-1})(\tau_E(G))) \\ &\leq t^{-2m} \cdot \underbrace{\mathrm{Lip}((f|_E) \circ \tau_E^{-1})^m}_{\leq t^m} \cdot \mathscr{H}^m(\tau_E(G)) \\ &\leq t^{-m} \cdot \mathscr{H}^m(\tau_E(G)) \\ &= t^{-m} \cdot |\det(\tau_E)| \cdot \mathscr{H}^m(G) \\ &= \int_G t^{-m} |\det(\tau_E)| d\lambda^m \\ &\leq \int_G Jf d\lambda^m. \end{aligned}$$

Die Abschätzungen lassen sich nun in analoger Weise fortsetzen:

$$\begin{aligned}\int_G Jf d\lambda^m &\leq \int_G t^m |\det(\tau_E)| d\lambda^m\\ &= t^m \cdot |\det(\tau_E)| \cdot \mathscr{H}^m(G)\\ &= t^m \cdot \mathscr{H}^m(\tau_E(G))\\ &= t^m \cdot \mathscr{H}^m(\tau_E \circ (f|_E)^{-1}(f|_E(G)))\\ &\leq t^m \cdot \operatorname{Lip}(\tau_E \circ (f|_E)^{-1})^m \cdot \mathscr{H}^m(f(G))\\ &\leq t^{2m} \cdot \mathscr{H}^m(f(G)).\end{aligned}$$

Da $f|_G$ für alle $G \in \mathcal{G}$ injektiv ist, erhält man zunächst

$$\begin{aligned}\sum_{G\in\mathcal{G}} \mathscr{H}^m(f(G)) &= \sum_{G\in\mathcal{G}} \int_{\mathbb{R}^n} \mathbb{1}_{f(G)} d\mathscr{H}^m\\ &= \sum_{G\in\mathcal{G}} \int_{\mathbb{R}^n} \#(G \cap f^{-1}(\{y\}))\, \mathscr{H}^m(dy)\\ &= \int_{\mathbb{R}^n} \#(A \cap f^{-1}(\{y\}))\, \mathscr{H}^m(dy)\end{aligned}$$

und hiermit

$$\begin{aligned}t^{-2m} \cdot \int_{\mathbb{R}^n} \#(A \cap f^{-1}(\{y\}))\, \mathscr{H}^m(dy) &\leq \int_A Jf d\lambda^m\\ &\leq t^{2m} \cdot \int_{\mathbb{R}^n} \#(A \cap f^{-1}(\{y\}))\, \mathscr{H}^m(dy).\end{aligned}$$

Dies gilt für jedes $t > 1$ und somit folgt die Gleichheit.

Fall (b): $A \subset \{x : Jf(x) = 0\}$. Sei $\varepsilon > 0$. Dann werden Lipschitzabbildungen g, p erklärt;

$$\begin{aligned}p &: \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n, && (y, z) \mapsto y\\ g &: \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m, && x \mapsto (f(x), \varepsilon \cdot x).\end{aligned}$$

Dann ist $f = p \circ g$. Für $x \in A$ gilt $Dg_x(v) = (Df_x(v), \varepsilon \cdot v)$ für $v \in \mathbb{R}^m$. Somit ist Dg_x injektiv und daher $Jg(x) \neq 0$ für $x \in A$. Da $Jf(x) = 0$ für $x \in A$ ist $q \coloneqq \dim(\operatorname{Kern}(Df_x)) \geq 1$. Sei $(b_1, \ldots, b_q)$ eine Orthonormalbasis von $\operatorname{Kern}(Df_x)$ und $(b_1, \ldots, b_m)$ eine Ergänzung zu einer Orthonormalbasis von $\mathbb{R}^m$. Somit gilt

$$\|Dg_x(b_i)\| = \|(0, \varepsilon \cdot b_i)\| = \varepsilon$$

für $i = 1, \ldots, q$ und

$$\|Dg_x(b_j)\| = \|(Df_x(b_j), \varepsilon \cdot b_j)\| \leq \operatorname{Lip}(f) + \varepsilon$$

für $j = q+1, \ldots, m$. Nach Fall (a) ist

$$\begin{aligned}\mathscr{H}^m(f(A)) &= \mathscr{H}^m(p \circ g(A))\\ &\leq \mathscr{H}^m(g(A)) = \int_A Jg d\lambda^m\\ &\leq \varepsilon^q \cdot (\operatorname{Lip}(f) + \varepsilon)^{m-q} \cdot \lambda^m(A).\end{aligned}$$

Dies zeigt $\mathscr{H}^m(f(A)) = 0$ und somit $\#(A \cap f^{-1}(\{y\})) = 0$ für $\mathscr{H}^m$-fast alle $y \in \mathbb{R}^n$. Dies zeigt die Gleichheit auch in diesem Fall. ■

Korollar 3.9
Seien $m \leq n$, $f : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ eine Lipschitzabbildung und $h : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$ eine Funktion, deren λ^m-Integral existiert. Dann gilt

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}^m} h(x) Jf(x)\, \lambda^m(dx) &= \int_{\mathbb{R}^n} \left(\sum_{x \in f^{-1}(\{y\})} h(x) \right) \mathscr{H}^m(dy) \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} \int_{f^{-1}(\{y\})} h(x)\, \mathscr{H}^0(dx)\, \mathscr{H}^m(dy).\end{aligned}$$

Beweis
Übung ■

Anwendung: Sei $m \leq n$, $A \subset \mathbb{R}^m$, $f : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ sei C^1 und injektiv. Dann gilt:

$$\mathscr{H}^m(f(A)) = \int_A Jf(x)\, \mathscr{H}^m(dx) = \int_A \sqrt{g(x)}\, \mathscr{H}^m(dx)$$

mit $g(x) = \det((\langle D_i f(x), D_j f(y) \rangle)_{i,j=1,\ldots,m})$. Ist f nicht injektiv, so nennt man

$$\int_{\mathbb{R}^n} \#(A \cap f^{-1}(\{y\}))\, \mathscr{H}^m(dy) \quad \geq \mathscr{H}^m(f(A))$$

die Hausdorff-Fläche von $f|_A$.

3.3 Die Koflächenformel

Sei jetzt $m \geq n$ und $f : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$. Sei ferner $g : \mathbb{R}^m \to [0, \infty]$ eine $\mathscr{H}^m$-messbare Abbildung. Dann besagt die Koflächenformel, dass

$$\int_{\mathbb{R}^m} g(x) Jf(x)\, \mathscr{H}^m(dx) = \int_{\mathbb{R}^n} \int_{f^{-1}(\{y\})} g(x)\, \mathscr{H}^{m-n}(dx)\, \mathscr{H}^n(dy)$$

gilt. Die Jakobische Jf von f wird nachfolgend erklärt. Im Spezialfall $g(x) = \mathbb{1}_A(x)$ mit einer $\mathscr{H}^m$-messbaren Menge $A \subset \mathbb{R}^m$ besagt dies gerade

$$\int_A Jf(x)\, \mathscr{H}^m(dx) = \int_{\mathbb{R}^n} \mathscr{H}^{m-n}(A \cap f^{-1}(\{y\}))\, \mathscr{H}^n(dy).$$

Aus diesem Spezialfall erhält man umgekehrt die allgemeine Aussage durch die üblichen Routineargumente.

Beispiel
Für die Abbildung $d : \mathbb{R}^m \to [0, \infty)$, $x \mapsto \|x\|$ gilt $d^{-1}(\{r\}) = \{x \in \mathbb{R}^m\colon \|x\| = r\}$. Die Berechnung der Jakobischen Jd von d erfolgt in den Übungen.

Lemma 3.10
Sei $k \geq m \geq n$, $A \subset \mathbb{R}^k$ und $f : \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^n$ eine Lipschitz-Abbildung. Dann gilt

$$\int_{\mathbb{R}^n}^{*} \mathscr{H}^{m-n}(A \cap f^{-1}(\{y\}))\, \mathscr{H}^n(dy) \;\leq\; \frac{\alpha(m-n)\alpha(n)}{\alpha(m)} \operatorname{Lip}(f)^m \cdot \mathscr{H}^m(A).$$

Beweis
Für $j \in \mathbb{N}$ gilt $\mathscr{H}^m_{\frac{1}{j}}(A) \leq \mathscr{H}^m(A) \leq \mathscr{H}^m(A) + \frac{1}{j}$. Dann existiert eine Folge $\mathcal{B}_j \in \bar{\Omega}_{\frac{1}{j}}(A)$ mit

$$\mathscr{H}^m_{\frac{1}{j}}(A) \leq \sum_{B \in \mathcal{B}_j} \frac{\alpha(m)}{2^m} \operatorname{diam}(B)^m \leq \mathscr{H}^m(A) + \frac{1}{j}.$$

Für $B \in \mathcal{B}_j$ ist $f(B)$ kompakt, also Borelmenge. Erkläre

$$g_B : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}, \qquad y \mapsto \frac{\alpha(m-n)}{2^{m-n}} \cdot \operatorname{diam}(B)^{m-n} \cdot \mathbb{1}_{f(B)}(y).$$

Insbesondere ist g_B eine $\mathscr{H}^n$-messbare Funktion und

$$\operatorname{diam}(B \cap f^{-1}(\{y\})) \leq \operatorname{diam}(B) \cdot \mathbb{1}_{f(B)}(y) \leq \frac{1}{j}.$$

Es folgt

$$\mathscr{H}^{m-n}_{\frac{1}{j}}(A \cap f^{-1}(\{y\})) \leq \sum_{B \in \mathcal{B}_j} \frac{\alpha(m-n)}{2^{m-n}} \operatorname{diam}(B \cap f^{-1}(\{y\}))^{m-n} \leq \sum_{B \in \mathcal{B}_j} g_B(y).$$

Mit dem Lemma von Fatou und dem Satz von der monotonen Konvergenz erhält man nun

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}^n}^{*} \mathscr{H}^{m-n}(A \cap f^{-1}(\{y\}))\, \mathscr{H}^n(dy) &= \int_{\mathbb{R}^n}^{*} \lim_{j\to\infty} \mathscr{H}^{m-n}_{\frac{1}{j}}(A \cap f^{-1}(\{y\}))\, \mathscr{H}^n(dy) \\
&\leq \int_{\mathbb{R}^n} \liminf_{j\to\infty} \sum_{B \in \mathcal{B}_j} g_B(y)\, \mathscr{H}^n(dy) \\
&\leq \liminf_{j\to\infty} \int_{\mathbb{R}^n} \sum_{B \in \mathcal{B}_j} g_B(y)\, \mathscr{H}^n(dy) \\
&= \liminf_{j\to\infty} \sum_{B \in \mathcal{B}_j} \int_{\mathbb{R}^n} g_B(y)\, \mathscr{H}^n(dy) \\
&= \liminf_{j\to\infty} \sum_{B \in \mathcal{B}_j} \frac{\alpha(m-n)}{2^{m-n}} \operatorname{diam}(B)^{m-n} \cdot \mathscr{H}^n(\underbrace{f(B)}_{\subset \mathbb{R}^n}).
\end{aligned}$$

Mit Hilfe der isodiametrichen Ungleichung ergibt dies

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}^n}^* \mathscr{H}^{m-n}(A \cap f^{-1}(\{y\}))\,\mathscr{H}^n(dy) &\leq \liminf_{j\to\infty} \sum_{B\in\mathcal{B}_j} \frac{\alpha(m-n)}{2^{m-n}} \operatorname{diam}(B)^{m-n} \cdot \frac{\alpha(n)}{2^n} \operatorname{diam}(f(B))^n \\ &\leq \liminf_{j\to\infty} \frac{\alpha(m-n)\alpha(n)}{\alpha(m)} \operatorname{Lip}(f)^n \cdot \underbrace{\sum_{B\in\mathcal{B}_j} \frac{\alpha(m)}{2^m} \operatorname{diam}(B)^m}_{\leq \mathscr{H}^m(A)+\frac{1}{j}} \\ &\leq \frac{\alpha(m-n)\alpha(n)}{\alpha(m)} \operatorname{Lip}(f)^n \mathscr{H}^m(A). \end{aligned}$$

■

Lemma 3.11
Sei $m \geq n$ und $f : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ eine Lipschitz-Abbildung. Sei ferner $A \subset \mathbb{R}^m$ eine $\mathscr{H}^m$-messbare Menge. Dann gilt:

(1) $A \cap f^{-1}(\{y\})$ ist $\mathscr{H}^{m-n}$-messbar für $\mathscr{H}^n$-fast-alle $y \in \mathbb{R}^n$.

(2) $y \mapsto \mathscr{H}^{m-n}(A \cap f^{-1}(\{y\}))$ ist $\mathscr{H}^n$-messbar.

Beweis
Sei A kompakt. Dann ist $A \cap f^{-1}(\{y\})$ kompakt, also Borelmenge. Sei $t > 0$ beliebig. Für $j \in \mathbb{N}$ sei U_j die Menge aller $y \in \mathbb{R}^n$, für die es eine endliche, offene Überdeckung $\mathcal{G}$ von $A \cap f^{-1}(\{y\})$ gibt mit $\operatorname{diam}(G) \leq \frac{1}{j}$ $(G \in \mathcal{G})$ und

$$\sum_{G\in\mathcal{G}} \frac{\alpha(m-n)}{2^{m-n}} \operatorname{diam}(G)^{m-n} \leq t + \frac{1}{j}.$$

Dann bestätigt man leicht

$$\{y \in \mathbb{R}^n \colon \mathscr{H}^{m-n}(A \cap f^{-1}(\{y\})) \leq t\} = \bigcap_{j\in\mathbb{N}} U_j.$$

Wir zeigen, dass U_j eine offene Menge und damit eine Borelmenge ist. Sei hierzu $y \in U_j$ und $\mathcal{G}$ eine offene, endliche Überdeckung von $A \cap f^{-1}(\{y\})$. Da A kompakt ist, ist $A \setminus \bigcup_{G\in\mathcal{G}} G$ kompakt und somit auch $f(A \setminus \bigcup_{G\in\mathcal{G}} G)$. Daher ist $f(A \setminus \bigcup_{G\in\mathcal{G}} \subset \mathbb{R}^n)^c$ offen.

Behauptung: Für $z \in \mathbb{R}^n$ gilt:

$$z \in f(A \setminus \bigcup_{G\in\mathcal{G}})^c \Leftrightarrow A \cap f^{-1}(\{z\}) \subseteq \bigcup_{G\in\mathcal{G}} G.$$

Dies ist leicht einzusehen.

Eine zweimalige Anwendung der Behauptung zeigt $y \in f(A \cap \bigcup_{G\in\mathcal{G}} G)^c \subseteq U_j$. Also ist U_j offen.

Sei $A \subset \mathbb{R}^m$ nun eine beliebige $\mathscr{H}^m$-messbare Menge. Es genügt, $\mathscr{H}^m(A) < \infty$ zu betrachten. Zu A gibt es eine aufsteigende Folge kompakter Mengen $A_i \subset A$ mit $\mathscr{H}^m(A \setminus \bigcup_{i\geq 1} A_i) = 0$. Lemma 3.10 zeigt

$$\mathscr{H}^{m-n}((A \setminus \bigcup_{i\geq 1} A_i) \cap f^{-1}(\{y\})) = 0$$

für $\mathscr{H}^n$-fast-alle $y \in \mathbb{R}^n$. Hieraus folgt (1) und wegen

$$\mathscr{H}^{m-n}(A \cap f^{-1}(\{y\})) = \lim_{i\to\infty} \mathscr{H}^{m-n}(A_i \cap f^{-1}(\{y\}))$$

auch (2). ■

Notation: Zu $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^n)$ ist $f^* \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$ die adjungierte Abbildung, die durch die Bedingung $\langle f(x), y\rangle = \langle x, f^*(y)\rangle$ für $x \in \mathbb{R}^m, y \in \mathbb{R}^n$ festgelegt ist.

Lemma 3.12
Sei $f : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ eine lineare Abbildung und $m \geq n$. Dann gilt:

(1) $f^{**} = f$.

(2) $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^n)$, $g \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^p) \;\Rightarrow\; (g \circ f)^* = f^* \circ g^* \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^p, \mathbb{R}^m)$.

(3) Ist $\varrho \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$ orthogonal, so gilt $\varrho^* \circ \varrho = \mathrm{id}_{\mathbb{R}^n}$ und $\mathrm{Bild}(\varrho) = \mathrm{Kern}(\varrho^*)^\perp$.

(4) Zu f existiert $\sigma \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$ symmetrisch und $\varrho \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$ orthogonal mit $f = \sigma \circ \varrho^*$.

(5) Ist $h \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^m)$, so gilt $[\![h]\!] = [\![h^*]\!] = |\det(h)| = |\det(h^*)|$.

(6) Setze $[\![f]\!] := [\![f^*]\!]$. Dann gilt:

   (a) $[\![f]\!] = 0$, falls $\dim(f(\mathbb{R}^m)) < n$.

   (b) Ist $\dim(f(\mathbb{R}^m)) = n$ und $(b_1, \dots, b_n)$ eine Orthonormalbasis von $\mathrm{Kern}(f)^\perp$, so gilt:

$$[\![f]\!] = |\det(f(b_1), \dots, f(b_n))|.$$

(7) Ist $(a_1, \dots, a_n)$ eine ONB von $\mathbb{R}^n$, so gilt:

$$[\![f]\!] = \sqrt{\det(f \circ f^*)} = \sqrt{\det(\langle f^*(a_i), f^*(a_j)\rangle_{i,j=1,\dots,n})}.$$

Beweis
Übung ■

Lemma 3.13
Sei $m \leq n$ und seien $h : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$, $\tilde{h} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ Lipschitz-Abbildungen. Sei ferner $E \subset \{x \in \mathbb{R}^m : \tilde{h} \circ h(x) = x\}$ eine $\mathscr{H}^m$-messbare Menge. Dann gibt es eine $\mathscr{H}^m$-messbare Menge $S_E \subset E$ mit $\mathscr{H}^m(E \setminus S_E) = 0$, so dass für $x \in S_E$ gilt:

- h ist in x differenzierbar.
- $\tilde{h}$ ist in $h(x)$ differenzierbar.
- $D\tilde{h}_{h(x)} \circ Dh_x = \mathrm{id}_{\mathbb{R}^m}$.

Beweis
Sei $Z := \{x \in \mathbb{R}^m : \tilde{h} \circ h(x) - x = 0\} = \{x \in \mathbb{R}^m : (\tilde{h} \circ h - \mathrm{id})(x) = 0\}$. Dann gilt (nach Übung) für $\mathscr{H}^m$-fast-alle $x \in Z$, dass $D(\tilde{h} \circ h - \mathrm{id})_x = 0$, d.h. $D(\tilde{h} \circ h)_x = \mathrm{id}_{\mathbb{R}^m}$. Ist $E \subset Z$, so gilt dies auch für $\mathscr{H}^m$-fast-alle $x \in E$.

Sei $F := \{x \in \mathbb{R}^m : h \text{ ist differenzierbar in } x\}$, $G := \{y \in \mathbb{R}^n : \tilde{h} \text{ ist differenzierbar in } y\}$ und $D := F \cap \{x \in \mathbb{R}^m : h(x) \in G\}$. Dann gilt:

$$E \setminus D = (E \setminus F) \cup (E \setminus \{x \in \mathbb{R}^m : h(x) \in G\}) = (E \setminus F) \cup \{x \in E : h(x) \notin G\},$$

wobei aufgrund des Satzes von Rademacher $\mathscr{H}^m(E \setminus F) = 0$ und wegen $\{x \in E : h(x) \notin G\} \subset \tilde{h}(\mathbb{R}^n \setminus G)$ auch

$$\mathscr{H}^m(\{x \in E : h(x) \notin G\}) \leq \mathscr{H}^m(\tilde{h}(\mathbb{R}^n \setminus G)) \leq \mathrm{Lip}(\tilde{h})^m \cdot \mathscr{H}^m(\mathbb{R}^n \setminus G) = 0.$$

Hieraus folgen leicht alle Behauptungen. ∎

Lemma 3.14
Sei $m \geq n$ und sei $f : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ stetig. Dann existiert eine abzählbare Borelüberdeckung $\mathcal{E}$ von $B := \{x \in \mathbb{R}^m : f \text{ differenzierbar in } x \text{ und } Df_x(\mathbb{R}^m) = \mathbb{R}^n\}$ derart, dass für jedes $E \in \mathcal{E}$ eine (lineare) Orthogonalprojektion $p_E : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^{m-n}$ und Lipschitzabbildungen $h_E : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^{m-n}$, $\tilde{h}_E : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^{m-n} \to \mathbb{R}^m$ existieren mit

$$h_E(x) = (f(x), p_E(x)) \quad \text{und} \quad \tilde{h}_E \circ h_E(x) = x \qquad \text{für alle } x \in E.$$

Beweis
Für $\gamma \in \Lambda(m, m-n)$ sei $p_\gamma : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^{m-n}$ gegeben durch

$$p_\gamma(x_1, \ldots, x_m) := (x_{\gamma(1)}, \ldots, x_{\gamma(m-n)}).$$

Ferner sei $h_\gamma : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^{m-n}$ gegeben durch $h_\gamma(x) := (f(x), p_\gamma(x))$. Setze

$$A_\gamma := \{x \in \mathbb{R}^m : h_\gamma \text{ ist differenzierbar in } x \text{ und } Dh_\gamma(x) \text{ ist injektiv}\}.$$

Die Abbildung f ist differenzierbar in x genau dann, wenn h_γ in x differenzierbar ist und $\mathrm{Kern}((Dh_\gamma)_x) = \mathrm{Kern}(Df_x) \cap \mathrm{Kern}(p_\gamma)$. Hieraus folgt leicht

$$B = \bigcup_{\gamma \in \Lambda(m,m-n)} A_\gamma.$$

Nach Lemma 3.7 gibt es zu jedem $t > 1$ eine abzählbare Borel-Überdeckung $\mathcal{E}_\gamma$ von A_γ derart, dass für jedes $E \in \mathcal{E}_\gamma$ ein Automorphismus $\tau_E : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^m$ existiert, so dass gilt: $(h_\gamma)|_E$ ist injektiv und $\mathrm{Lip}((h_\gamma)|_E \circ \tau_E^{-1}) \leq t$ sowie $\mathrm{Lip}(\tau_E \circ ((h_\gamma)|_E)^{-1}) \leq t$.

Für $x, y \in E$ gilt dann

$$\begin{aligned}\|h_\gamma(x) - h_\gamma(y)\| &= \|(h_\gamma)|_E \circ \tau_E^{-1}(\tau_E(x)) - (h_\gamma)|_E \circ \tau_E^{-1}(\tau_E(y))\| \\ &\leq t \cdot \|\tau_E(x) - \tau_E(y)\| \leq t \cdot \mathrm{Lip}(\tau_E) \cdot \|x - y\|\end{aligned}$$

und für $u, v \in h_\gamma(E)$ gilt

$$\begin{aligned}\|(h_\gamma|_E)^{-1}(u) - (h_\gamma|_E)^{-1}(v)\| &= \|\tau_E^{-1} \circ \tau_E \circ (h_\gamma|_E)^{-1}(u) - \tau_E^{-1} \circ \tau_E \circ (h_\gamma|_E)^{-1}(v)\| \\ &\leq \mathrm{Lip}(\tau_E^{-1}) \cdot t \cdot \|u - v\|.\end{aligned}$$

Also sind $h_\gamma|_E$ und $(h_\gamma|_E)^{-1}$ Lipschitzabbildungen. Somit existieren Lipschitzfortsetzungen h von $(h_\gamma|_E)$ und $\tilde{h}$ von $(h_\gamma|_E)^{-1}$ mit $h : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^{m-n}$ und $\tilde{h} : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^{m-n} \to \mathbb{R}^m$, wobei $h|_E = (h_\gamma)|_E$ und $\tilde{h}|_{h(E)} = (h_\gamma|_E)^{-1}|_{h_\gamma(E)}$. Daher ist $h(x) = (f(x), p_\gamma(x))$ für $x \in E$ und $\tilde{h} \circ h(x) = x$ für $x \in E$. Hieraus folgt die Behauptung. ■

Der folgende Hilfssatz stellt gewissermaßen eine lokale Version der Koflächenformel dar. Die hierbei auftretenden Annahmen sind nach dem vorangehenden Hilfssatz stets erfüllbar. Zusammen erhalten wir dann schließlich die allgemeine Aussage.

Lemma 3.15
Sei $m > n$, $f : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ eine Lipschitzabbildung und $E \subset \mathbb{R}^m$ eine Borelmenge derart, dass für alle $x \in E$ die Abbildung f differenzierbar in x ist und Df_x surjektiv. Sei $p : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^{m-n}$ eine Orthogonalprojektion und $h : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^{m-n}$, $\tilde{h} : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^{m-n} \to \mathbb{R}^m$ seien Lipschitzabbildungen so dass $\tilde{h} \circ h(x) = x$ für $x \in E$ und $h(x) = (f(x), p(x))$ für $x \in E$. Dann gilt für alle $A \subset E$ mit $A \in \mathcal{A}_{\mathscr{H}^m}$

$$\int_A Jf(x)\, \mathscr{H}^m(dx) = \int_{\mathbb{R}^n} \mathscr{H}^{m-n}(A \cap f^{-1}(\{y\}))\, \mathscr{H}^n(dy).$$

Beweis
Nach Voraussetzung sind $h|_E$ und $\tilde{h}|_{h(E)}$ injektiv. Für $y \in \mathbb{R}^n$ gilt

$$\begin{aligned}h(E \cap f^{-1}(\{y\})) &= \{(f(x), p(x)) : x \in E \cap f^{-1}(\{y\})\} \\ &= \{(y, p(x)) : x \in E \cap f^{-1}(\{y\})\} \\ &= \{y\} \times p(E \cap f^{-1}(\{y\})).\end{aligned}$$

Für $y \in \mathbb{R}^n$ setzte $\tilde{h}_y : \mathbb{R}^{m-n} \to \mathbb{R}^m$, $\tilde{h}_y(z) := \tilde{h}(y, z)$ für $z \in \mathbb{R}^{m-n}$. Da $\tilde{h}$ auf der Menge $\{y\} \times p(E \cap f^{-1}(\{y\})) \subset h(E)$ injektiv ist, ist $\tilde{h}_y$ injektiv auf $p(E \cap f^{-1}(\{y\}))$. Ferner gilt

$$\begin{aligned}\tilde{h}_y(p(E \cap f^{-1}(\{y\}))) &= \tilde{h}(\{y\} \times p(E \cap f^{-1}(\{y\})) \\ &= \tilde{h}(h(E \cap f^{-1}(\{y\}))) \\ &= E \cap f^{-1}(\{y\}). \qquad (*)\end{aligned}$$

Nach Lemma 3.14 ist für $\mathscr{H}^m$-fast-alle $x \in E$ die Abbildung h in x und die Abbildung $\tilde{h}$ in $h(x)$ differenzierbar und $D\tilde{h}_{h(x)} = (Dh_x)^{-1}$. Für $\mathscr{H}^m$-fast-alle $x \in E$ existiert somit die Abbildung $L_x : \mathbb{R}^{m-n} \to \mathbb{R}^m$ mit $L_x := D(\tilde{h}_{f(x)})_{p(x)}$, wobei die Existenz und die erste Gleichung

$$L_x = D(\tilde{h}_{f(x)})_{p(x)} = D\tilde{h}_{(f(x),p(x))} \circ (0_{n,n-m}, \mathrm{id}_{\mathbb{R}^{m-n}}) = (Dh_x)^{-1} \circ (0_{n,n-m}, \mathrm{id}_{\mathbb{R}^{m-n}})$$

aus der Kettenregel (betrachte hierzu: $z \mapsto (y,z) \mapsto \tilde{h}(y,z)$) folgt. Wegen $Dh_x = (Df_x, p)$ erhält man

$$L_x(\mathbb{R}^{m-n}) = (Dh_x)^{-1}(\{0_{\mathbb{R}^n}\} \times \mathbb{R}^{m-n}) = \mathrm{Kern}(Df_x).$$

Dies zeigt insbesondere, dass L_x maximalen Rang hat. Sei nun $(b_1, \ldots, b_m)$ eine Orthonormalbasis von $\mathbb{R}^m$, so dass $(b_1, \ldots, b_{m-n})$ eine Orthonormalbasis von $\mathrm{Kern}(Df_x)$ ist, das heißt $(b_{m-n+1}, \ldots, b_m)$ ist eine Orthonormalbasis von $\mathrm{Kern}(Df_x)^\perp$. Damit folgt

$$\begin{aligned}
Jh(x) &= |\det(Dh_x(b_1), \ldots, Dh_x(b_m))| \\
&= \left|\det\big((0, p(b_1)), \ldots, (0, p(b_{m-n})), (Df_x(b_{m-n+1}), p(b_{m-n+1})), \ldots, (Df_x(b_m), p(b_m))\big)\right| \\
&= \left|\det\big((0, p(b_1)), \ldots, (0, p(b_{m-n})), (Df_x(b_{m-n+1}), 0), \ldots, (Df_x(b_m), 0)\big)\right| \\
&= \left|\det\big(p(b_1), \ldots, p(b_{m-n})\big)\right| \cdot Jf(x),
\end{aligned}$$

wobei wir verwendet haben, dass $(0, p(b_1)), \ldots, (0, p(b_{m-n}))$ linear unabhängig sind. Für $v \in \mathbb{R}^{m-n}$ gilt

$$(0_{n,m-n}, \mathrm{id}_{\mathbb{R}^{m-n}})(v) = Dh_x \circ L_x(v) = (Df_x(L_x(v)), p(L_x(v)))$$

und daher

$$p \circ L_x = \mathrm{id}_{\mathbb{R}^{m-n}},$$

das heißt $\det(p \circ L_x) = 1$. Sei nun $\sigma : \mathbb{R}^{m-n} \to \mathbb{R}^{m-n}$ eine symmetrische und $\varrho : \mathbb{R}^{m-n} \to \mathbb{R}^m$ eine orthogonale Abbildung, so dass $L_x = \varrho \circ \sigma$. Da L_x maximalen Rang hat, ist σ ein Automorphismus. Daher ist $\mathrm{Kern}(Df_x) = L_x(\mathbb{R}^{m-n}) = \varrho \circ \sigma(\mathbb{R}^{m-n}) = \varrho(\mathbb{R}^{m-n})$. Da ϱ orthogonal ist, gibt es eine Orthonormalbasis $\bar{b}_1, \ldots, \bar{b}_{m-n}$ in $\mathbb{R}^{m-n}$ mit $\varrho(\bar{b}_i) = b_i$. Somit folgt

$$\begin{aligned}
1 = \det(p \circ L_x) &= \det(p \circ \varrho \circ \sigma) = \det(p \circ \varrho) \cdot \det(\sigma) \\
&= |\det(p \circ \varrho(\bar{b}_1), \ldots, p \circ \varrho(\bar{b}_{m-n}))| \cdot [\![L_x]\!] \\
&= |\det(p(b_1), \ldots, p(b_{m-n}))| \cdot J(\tilde{h}_{f(x)})(p(x)).
\end{aligned}$$

Dies ergibt schließlich

$$Jf(x) = Jh(x) \cdot J(\tilde{h}_{f(x)})(p(x)).$$

Da h auf E und $\tilde{h}$ auf $h(E)$ injektiv sind, folgt für $A \subset E$ mit $A \in \mathcal{A}_{\mathscr{H}^m}$ durch zweimalige Anwendung der Flächenformel

$$\begin{aligned}
\int_A Jf(x)\, \mathscr{H}^m(dx) &= \int_{\mathbb{R}^m} \mathbb{1}_A(x) \cdot J(\tilde{h}_{f(x)})(p(x)) \cdot Jh(x)\, \mathscr{H}^m(dx) \\
&= \int_{\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^{m-n}} \mathbb{1}_{h(A)}(y,z) \cdot J(\tilde{h}_y)(z)\, (\mathscr{H}^n \otimes \mathscr{H}^{m-n})(d(y,z)) \\
&= \int_{\mathbb{R}^n} \int_{p(A \cap f^{-1}(\{y\}))} J(\tilde{h}_y)(z)\, \mathscr{H}^{m-n}(dz)\, \mathscr{H}^n(dy) \\
&= \int_{\mathbb{R}^n} \mathscr{H}^{m-n}(\underbrace{\tilde{h}_y(p(A \cap f^{-1}(\{y\})))}_{\overset{(*)}{=} A \cap f^{-1}(\{y\})})\, \mathscr{H}^n(dy) \\
&= \int_{\mathbb{R}^n} \mathscr{H}^{m-n}(A \cap f^{-1}(\{y\}))\, \mathscr{H}^n(dy). \qquad \blacksquare
\end{aligned}$$

Satz 3.16
Seien $m \geq n$ und $f : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ eine Lipschitzabbildung. Für jede $\mathscr{H}^m$-messbare Menge $A \subset \mathbb{R}^m$ gilt
$$\int_A Jf(x)\, \mathscr{H}^m(dx) = \int_{\mathbb{R}^n} \mathscr{H}^{m-n}(A \cap f^{-1}(\{y\}))\, \mathscr{H}^n(dy).$$

Korollar 3.17
Seien $m \geq n$, $f : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ eine Lipschitzabbildung und $h : \mathbb{R}^m \to [0, \infty]$ eine $\mathscr{H}^m$-messbare Abbildung. Dann gilt
$$\int h(x) Jf(x)\, \mathscr{H}^m(dx) = \int_{\mathbb{R}^n} \int_{f^{-1}(\{y\})} h(x)\, \mathscr{H}^{m-n}(dx)\, \mathscr{H}^n(dy).$$

Beweis (von Satz 3.16)
Ist $\mathscr{H}^m(A) = 0$, so sind beide Seiten der behaupteten Gleichung Null (Lemma 3.10). Daher können wir den Beweis wie früher auf den Fall $\mathscr{H}^m(A) < \infty$, f differenzierbar in allen $x \in A$ sowie $A \in \mathfrak{B}(\mathbb{R}^m)$ reduzieren.

(a) Sei $Jf(x) > 0$ für alle $x \in A$. Also ist $Df_x(\mathbb{R}^m) = \mathbb{R}^n$. Dann existiert eine abzählbare Borel-Überdeckung $\mathcal{E}$ von A derart, dass für jedes $E \in \mathcal{E}$ eine Orthogonalprojektion $p : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^{m-n}$ und Lipschitzabbildungen $h : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^{m-n}$, $\tilde{h} : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^{m-n} \to \mathbb{R}^m$ existieren mit $h(x) = (f(x), p(x))$ und $\tilde{h} \circ h(x) = x$ für $x \in E$. Wähle eine abzählbare Zerlegung $\mathcal{G}$ von A, so dass für jedes $G \in \mathcal{G}$ ein $E \in \mathcal{E}$ existiert mit $G \subset E$. Aus Lemma 3.15 folgt nun
$$\begin{aligned}\int_A Jf(x)\, \mathscr{H}^m(dx) &= \sum_{G \in \mathcal{G}} \int_G Jf(x)\, \mathscr{H}^m(dx) \\ &= \sum_{G \in \mathcal{G}} \int_{\mathbb{R}^n} \mathscr{H}^{m-n}(G \cap f^{-1}(\{y\}))\, \mathscr{H}^n(dy) \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} \mathscr{H}^{m-n}(A \cap f^{-1}(\{y\}))\, \mathscr{H}^n(dy).\end{aligned}$$

(b) Sei $Jf(x) = 0$ für alle $x \in A$, das heißt $\mathrm{Rang}(Df_x(\mathbb{R}^m)) < n$. Sei $\varepsilon > 0$ beliebig vorgegeben. Definiere Abbildungen $g : \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ und $p : \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ durch
$$g(x, y) \coloneqq f(x) + \varepsilon y \qquad \text{und} \qquad p(x, y) \coloneqq y \qquad \text{für } x \in \mathbb{R}^m, y \in \mathbb{R}^n.$$
Für $x \in A$ und $y \in \mathbb{R}^n$ erhält man
$$Dg_{(x,y)}(v, w) = Df_x(v) + \varepsilon w, \qquad v \in \mathbb{R}^m, w \in \mathbb{R}^n$$
und folglich
$$\|Dg_{(x,y)}(v, w)\| \leq \|Df_x(v)\| + \varepsilon\|w\| \leq \mathrm{Lip}(f)\|v\| + \varepsilon\|w\| \leq (\mathrm{Lip}(f) + \varepsilon)\|(v, w)\|,$$

also
$$\|Dg_{(x,y)}(v,w)\| \leq \operatorname{Lip}(f) + \varepsilon.$$
Ferner ist
$$\operatorname{Kern}(Dg_{(x,y)}) = \left\{ \left(v, -\frac{1}{\varepsilon} Df_x(v) \right) : v \in \mathbb{R}^m \right\},$$
also $\dim(\operatorname{Kern}(Dg_{(x,y)})) = m$ und $\dim(\operatorname{Bild}(Dg_{(x,y)})) = n$. Unter (b) gibt es einen Vektor $w \in Df_x(\mathbb{R}^m)^\perp$ mit $\|w\| = 1$, und wir können hiermit $b_1 := \left(\frac{1}{\varepsilon} Df_x^*(w), w\right) \in \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n$ definieren. Dann gilt
$$\|b_1\|^2 = \left\langle \frac{1}{\varepsilon} Df_x^*(w), \frac{1}{\varepsilon} Df_x^*(w) \right\rangle + \langle w, w \rangle = \frac{1}{\varepsilon^2} \langle w, Df_x \circ Df_x^*(w) \rangle + 1 = 1,$$
wobei
$$\|Df_x \circ Df_x^*(w)\|^2 = \langle \underbrace{w}_{\in Df_x(\mathbb{R}^m)^\perp}, \underbrace{Df_x \circ Df_x^* \circ Df_x \circ Df_x^*(w)}_{\in Df_x(\mathbb{R}^m)} \rangle = 0,$$
also $Df_x \circ Df_x^*(w) = 0$ verwendet wurde. Wir erhalten $b_1 \in \operatorname{Kern}(Dg_{(x,y)})^\perp$, da für alle $v \in \mathbb{R}^m$ gilt
$$\left\langle b_1, (v, -\frac{1}{\varepsilon} Df_x(v)) \right\rangle = \frac{1}{\varepsilon} \langle Df_x^*(w), v \rangle - \frac{1}{\varepsilon} \langle w, Df_x(v) \rangle = 0,$$
und ferner
$$\|Dg_{(x,y)}(b_1)\| = \left\| \frac{1}{\varepsilon} Df_x \circ Df_x^*(w) + \varepsilon w \right\| = \varepsilon.$$
Wir ergänzen nun b_1 zu einer Orthonormalbasis $(b_1, \ldots, b_n)$ von $\operatorname{Kern}(Dg_{(x,y)})^\perp$. Hierfür gilt die Abschätzung
$$Jg(x,y) = |\det(Dg_{(x,y)}(b_1), \ldots, Dg_{(x,y)}(b_n))| = \prod_{i=1}^n \|Dg_{(x,y)}(b_i)\| \leq \varepsilon(\operatorname{Lip} + \varepsilon)^{n-1}.$$
Die Translationsinvarianz des Hausdorff-Maßes zeigt, dass
$$\int_{\mathbb{R}^n} \mathscr{H}^{m-n}(A \cap f^{-1}(\{y - \varepsilon z\}))\, \mathscr{H}^n(dy)$$
von ε und z unabhängig ist. Setze $B := A \times B^n(0,1)$, wobei $B^n(0,1)$ die Einheitskugel im $\mathbb{R}^n$ ist. Hierbei gilt wegen $\{(x,z) : x \in A, f(x) + \varepsilon z = y\} = \{(x,z) : x \in A \cap f^{-1}(\{y - \varepsilon z\})\}$
$$B \cap g^{-1}(\{y\}) \cap p^{-1}(\{z\}) = \begin{cases} \{(x,z) : x \in A \cap f^{-1}(\{y - \varepsilon z\})\}, & \text{falls } z \in B^n(0,1), \\ \emptyset, & \text{sonst.} \end{cases}$$
Es bezeichne $\alpha(n)$ das Volumen der n-dimensionalen Einheitskugel. Mit Hilfe von Lemma 3.10 (mit $k = m + n$) und Anwendung des Resultats aus Teil (a) folgt
$$\begin{aligned}
&\int_{\mathbb{R}^n} \mathscr{H}^{m-n}(A \cap f^{-1}(\{y\}))\, \mathscr{H}^n(dy) \\
&= \alpha(n)^{-1} \int_{B^n(0,1)} \int_{\mathbb{R}^n} \mathscr{H}^{m-n}(A \cap f^{-1}(\{y - \varepsilon z\}))\, \mathscr{H}^n(dy)\, \mathscr{H}^n(dz) \\
&= \alpha(n)^{-1} \int_{\mathbb{R}^n} \int_{\mathbb{R}^n} \mathscr{H}^{m-n}(B \cap g^{-1}(\{y\}) \cap p^{-1}(\{z\}))\, \mathscr{H}^n(dz)\, \mathscr{H}^n(dy) \\
&\leq \alpha(n)^{-1} \frac{\alpha(m-n)\alpha(n)}{\alpha(m)} \operatorname{Lip}(p)^n \mathscr{H}^m(B \cap g^{-1}(\{y\})).
\end{aligned}$$

Wegen $\mathrm{Lip}(p) = 1$ und da $Dg_{(x,y)}$ vollen Rang hat, folgt schließlich mit Hilfe von Teil (a), der für die Abbildung g anwendbar ist,

$$\begin{aligned}
&\int_{\mathbb{R}^n} \mathscr{H}^{m-n}(A \cap f^{-1}(\{y\}))\, \mathscr{H}^n(dy) \\
&\leq \frac{\alpha(m-n)}{\alpha(m)} \int_{\mathbb{R}^n} \mathscr{H}^m(B \cap g^{-1}(\{y\}))\, \mathscr{H}^n(dy) \\
&= \frac{\alpha(m-n)}{\alpha(m)} \int_B Jg\, d(\mathscr{H}^m \otimes \mathscr{H}^n) \\
&\leq \frac{\alpha(m-n)\alpha(n)}{\alpha(m)} \cdot \mathscr{H}^m(A) \cdot \varepsilon \cdot (\mathrm{Lip}(f) + \varepsilon)^{n-1}.
\end{aligned}$$

Da $\varepsilon > 0$ beliebig klein gewählt werden kann, ist das Integral Null. ■

3.4 Rektifizierbare Mengen

Motivation:

- Verallgemeinerung von Mannigfaltigkeit
- Allgemeine Fassung der Flächenformel und Koflächenformel
- Trägermengen für rektifizierbare Ströme und rektifizierbare Varifaltigkeiten

Definition

- Eine Menge $M \subset \mathbb{R}^p$ heißt n-rektifizierbar, falls es eine beschränkte Menge $A \subset \mathbb{R}^n$ und eine Lipschitzabbildung $f : A \to \mathbb{R}^p$ gibt mit $f(A) = M$.
- Eine Menge $M \subset \mathbb{R}^p$ heißt abzählbar n-rektifizierbar, falls es eine Menge $M_0 \subset \mathbb{R}^p$ mit $\mathscr{H}^n(M_0) = 0$ und Lipschitzabbildungen $f_j : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^p$ für $j \in \mathbb{N}$ gibt, so dass gilt:

$$M \subset M_0 \cup \bigcup_{j \in \mathbb{N}} f_j(\mathbb{R}^n).$$

Hinweis: Die Terminlogie im Buch von Federer weicht von dieser hier ab.

Beispiele

(1) $\mathbb{R}^m$ ist abzählbar n-rektifizierbar für $m \leq n$.

(2) Teilmengen und abzählbare Vereinigungen von abzählbar n-rektifizierbaren Mengen sind abzählbar n-rektifizierbare Mengen.

(3) Sei $(x_i)_{i \in \mathbb{N}} \subset \mathbb{R}^2$ abzählbar, dicht. Dann ist

$$M := \bigcup_{i \in \mathbb{N}} S^1(x_i, 2^{-i})$$

abzählbar 1-rektifizierbar, $\mathscr{H}^1(M) < \infty$ und $\overline{M} = \mathbb{R}^2$.

(4) Sei $K \subset \mathbb{R}^p$ kompakt und konvex. Der Rand ∂K von K ist $(p-1)$-rektifizierbar.

(5) Ist $A \subset \mathbb{R}^p$ abzählbar n-rektifizierbar, so gibt es $B \in \mathfrak{B}(\mathbb{R}^p)$ mit $A \subset B$ und B ist abzählbar n-rektifizierbar.

(6) D sei ein gleichseitiges Dreieck in $\mathbb{R}^2$ mit Kantenlänge 1. Eine Kante von D sei parallel zur x-Achse. D_1 sei die Vereinigung von drei gleichseitigen Dreiecken in $\mathbb{R}^2$ mit Kantenlänge $\frac{1}{3}$ „in den Ecken von D". Definiere D_i, $i > 1$, analog und

$$\hat{D} := \bigcap_{i=1}^{\infty} D_i \subset \mathbb{R}^2.$$

Es ist $\mathscr{H}^1(\hat{D}) = 1$, aber $\mathscr{H}^1(\pi_1(\hat{D})) = 0$, wobei π_1 die Orthogonalprojektion auf die y-Achse ist. Seien π_2, π_3 Orthogonalprojektionen auf die Geraden, die mit der y-Achse den Winkel 120° einschließen. Dann gilt $\mathscr{H}^1(\pi_i(\hat{D})) = 0$, $i = 1, 2$. Somit ist $\hat{D}$ nicht abzählbar 1-rektifizierbar.

Satz 3.18 (Struktursatz)
Sei $A \subset \mathbb{R}^p$ mit $\mathscr{H}^n(A) < \infty$. Dann gibt es eine disjunkte Zerlegung $A = R \dot\cup N$, so dass gilt

(a) $R = A \cap R_0$ mit einer abzählbar n-rektifizierbaren Borelmenge $R_0 \subset \mathbb{R}^p$.

(b) Für jede abzählbar n-rektifizierbare Menge $F \subset \mathbb{R}^p$ gilt $\mathscr{H}^n(N \cap F) = 0$.

Beweis
Sei $s := \sup\{\mathscr{H}^n(A \cap B) : B \in \mathfrak{B}(\mathbb{R}^p)$, abzählbar n-rektifizierbar$\} < \infty$. Es gibt $B_j \in \mathfrak{B}(\mathbb{R}^p)$, abzählbar n-rektifizierbar mit $\mathscr{H}^n(A \cap B_j) \geq s - \frac{1}{j}$, $j \in \mathbb{N}$. Dann ist

$$R_0 := \bigcup_{j \in \mathbb{N}} B_j \in \mathfrak{B}(\mathbb{R}^p)$$

abzählbar n-rektifizierbar. Setze $N := A \setminus R_0$. Sei $F \subset \mathbb{R}^p$ abzählbar n-rektifizierbar. Es gibt $\tilde{F} \supset F$ mit $\tilde{F} \in \mathfrak{B}(\mathbb{R}^p)$ und abzählbar n-rektifizierbar.

Dann folgt

$$\begin{aligned}
s &\geq \mathscr{H}^n(A \cap (R_0 \cup \tilde{F})) \\
&= (\mathscr{H}^n \lfloor A)(R_0 \cup \tilde{F}) \\
&= (\mathscr{H}^n \lfloor A)(R_0 \cup (\tilde{F} \setminus R_0)) \\
&= (\mathscr{H}^n \lfloor A)(R_0) + (\mathscr{H}^n \lfloor A)(\tilde{F} \setminus R_0) \\
&= \underbrace{\mathscr{H}^n(A \cap R_0)}_{=s} + \mathscr{H}^n(\underbrace{(A \setminus R_0)}_{=N} \cap \tilde{F}).
\end{aligned}$$

Also ist $\mathscr{H}^n(N \cap \tilde{F}) = 0$. Setze $R := A \cap R_0$. ∎

Definition
Eine Menge $N \subset \mathbb{R}^p$ heißt rein nicht n-rektifizierbar, falls $\mathscr{H}^n(N \cap F) = 0$ für jede abzählbar n-rektifizierbare Mengen $F \subset \mathbb{R}^p$ gilt.

Satz 3.19 (Charakterisierungssatz)

(a) Ist $N \subset \mathbb{R}^p$ rein nicht n-rektifizierbar, so gilt für fast alle $E \in G(p,n)$:
$$\mathscr{H}^n(N \mid E) = 0.$$

(b) Ist $A \subset \mathbb{R}^p$, $A = \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i$, $\mathscr{H}^n(A_i) < \infty$ und gilt für alle $B \subset A$ mit $\mathscr{H}^n(B) > 0$ stets $\mathscr{H}^n(B \mid E) > 0$ für eine Menge von $E \in G(p,n)$ positiven Maßes, so ist A abzählbar n-rektifizierbar.

(c) Ist $A \subset \mathbb{R}^p$ abzählbar n-rektifizierbar und $0 < \mathscr{H}^n(A) < \infty$, so ist $\mathscr{H}^n(A \mid E) = 0$ für höchstens ein $E \in G(p,n)$.

Beweis

Aussage (a) ist eine aufwändig zu beweisende Aussage. Wir können hier keinen Beweis angeben.

(b) folgt leicht aus (a) und dem Struktursatz.

(c) ist ebenfalls leicht zu zeigen. ■

Proposition 3.20

Für $M \subset \mathbb{R}^p$ sind äquivalent:

(a) M ist abzählbar n-rektifizierbar.

(b) Es gibt $M_0 \subset \mathbb{R}^p$ mit $\mathscr{H}^n(M_0) = 0$ und Mengen $A_j \subset \mathbb{R}^n$ mit Lipschitzabbildungen $f_j : A_j \to \mathbb{R}^p$, so dass
$$M \subset M_0 \cup \bigcup_{j=1}^{\infty} f_j(A_j).$$

(c) Es gibt $N_0 \subset \mathbb{R}^p$ mit $\mathscr{H}^n(N_0) = 0$ und n-dimensionale Untermannigfaltigkeiten $N_j \subset \mathbb{R}^p$ der Klasse C^1 mit $\mathscr{H}^n(N_j) < \infty$ und
$$M \subset N_0 \cup \bigcup_{j=1}^{\infty} N_j.$$

Beweis

- (a) $\Longrightarrow$ (c): Wir verwenden den folgenden C^1-Approximationssatz für Lipschitzabbildungen, der unter anderem auf einm Spezialfall eines Satzes von Whitney beruht:

  Sei $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ Lipschitz und $\varepsilon > 0$. Dann existiert eine C^1-Abbildung $g\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ mit
  $$\mathscr{H}^n(\{x \in \mathbb{R}^n : f(x) \neq g(x) \text{ oder } \nabla f(x) \neq \nabla g(x)\}) < \varepsilon.$$

  Wiederholte Anwendung dieses Approximationssatz zeigt: Zu $j \in \mathbb{N}$ existieren eine Menge

$E_j \subset \mathbb{R}^p$ und C^1-Abbildungen $g_i^{(j)} \colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^p$ mit

$$f_j(\mathbb{R}^n) \subset E_j \cup \bigcup_{i=1}^{\infty} g_i^{(j)}(\mathbb{R}^n),$$

wobei $\mathscr{H}^n(E_j) = 0$.

Setze $C_{ij} := \{x \in \mathbb{R}^n : \operatorname{rg}(Dg_i^{(j)}(x)) < n\}$. (Ohne Beschränkung der Allgemeinheit ist $p \geq n$). Die Flächenformel ergibt $\mathscr{H}^n(g_i^{(j)}(C_{ij})) = 0$. Für

$$N_0 := \bigcup_{j=1}^{\infty} E_j \cup \bigcup_{i=1}^{\infty} g_i^{(j)}(C_{ij})$$

ist $\mathscr{H}^n(N_0) = 0$.

Zu $x \in \mathbb{R}^n \setminus C_{ij}$ gibt es eine Umgebung $U_{ij}(x)$, so dass $g_j^{(i)}(U_{ij}(x)) \subset \mathbb{R}^p$ eine n-dimensionale Untermannigfaltigkeit der Klasse C^1 ist. Da $\mathbb{R}^n \setminus C_{ij}$ offen ist, kann es durch abzählbar viele solcher Umgebungen überdeckt werden. (Hierzu schreibt man $\mathbb{R}^n \setminus C_{ij}$ zunächst als abzählbare Vereinigung von abgeschlossenen und dann von kompakten Teilmengen.) ∎

Beispiele

(1) $M = \bigcup_{n=1}^{\infty} \{(x, \frac{1}{n} \cdot x^2) : x \in \mathbb{R}\} \subset \mathbb{R}^2$ ist eine abzählbar 1-rektifizierbare Menge.

(2) $M = \bigcup_{n=1}^{\infty} ([-e_1, e_1] + \frac{1}{n} \cdot e_2) \subset \mathbb{R}^2$ ist eine abzählbar 1-rektifizierbare Menge.

(3) $[0,1] \setminus \mathbb{Q}$ ist abzählbar 1-rektifizierbar. Diese Menge ist aber nicht *gleich* einer abzählbaren Vereinigung von eindimensionalen Untermannigfaltigkeiten der Klasse C^1, da sie überabzählbar viele Zusammenhangskomponenten hat.

Definition

Sei $M \subset \mathbb{R}^p$ eine $\mathscr{H}^n$-messbare Menge und $(\mathscr{H}^n \lfloor M) \in \mathbb{M}(\mathbb{R}^p)$, das heißt $\mathscr{H}^n(M \cap K) < \infty$ für alle kompakten Mengen $K \subset \mathbb{R}^p$. Sei $x \in \mathbb{R}^p$ und $P \in G(p,n)$. Dann heißt P *approximativer Tangentialraum* von M in x, falls

$$\mathscr{H}^n \lfloor \left(\frac{M - x}{\lambda} \right) \xrightarrow{\text{v}} \mathscr{H}^n \lfloor P \qquad \text{für } \lambda \searrow 0,$$

das heißt, für jede Funktion $f \in C_0(\mathbb{R}^p)$ gilt

$$\lim_{\lambda \searrow 0} \int_{\frac{M-x}{\lambda}} f(y) \, \mathscr{H}^n(dy) = \int_P f(y) \, \mathscr{H}^n(dy).$$

Bemerkungen: (1) Man kann umformen:

$$\lim_{\lambda \searrow 0} \int_{\frac{M-x}{\lambda}} f(y) \, \mathscr{H}^n(dy) = \lim_{\lambda \searrow 0} \lambda^{-n} \int_M f(\frac{z-x}{\lambda}) \, \mathscr{H}^n(dz).$$

(2) Sei $\eta_{x,\lambda} \colon \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}^p$, $z \mapsto \frac{1}{\lambda}(z - x)$. Dann ist

$$\mathscr{H}^n \lfloor \left(\frac{M - x}{\lambda} \right) = (\eta_{x,\lambda})_{\#}(\lambda^{-n} \cdot (\mathscr{H}^n \lfloor M)).$$

(3) Falls der approximative Tangentialraum von M in x existiert, so ist er eindeutig bestimmt und wird mit $T_x M$ bezeichnet. In diesem Fall ist $x \in \overline{M}$.

(4) Ist $N \subset \mathbb{R}^p$ eine n-dimensionale C^1-Untermannigfaltigkeit von $\mathbb{R}^p$ und $x_0 \in N$, dann existiert der approximative Tangentialraum und stimmt mit dem differenzialgeometrischen Tangentialraum $\widetilde{T_{x_0} N}$ überein.

Ansatz: $N \cap V = \{x + g(x) := G(x) : x \in (x_0 + \widetilde{T_{x_0} N}) \cap U\}$ mit V, U Umgebungen von x_0, $g : (\widetilde{T_{x_0} N} + x_0) \cap U \to (\widetilde{T_{x_0} N}^{\perp})$, wobei $g(x_0) = 0$ und $Dg(x_0) = 0$. Weiter folgt für $f \in C_0(\mathbb{R}^p)$, falls $\lambda > 0$ hinreichend klein ist,

$$\begin{aligned}\lambda^{-n} \cdot \int_N f\left(\frac{z - x_0}{\lambda}\right) \mathscr{H}^n(dz) &= \lambda^{-n} \int_{x_0 + T_{x_0} N} f\left(\frac{x + g(x) - x_0}{\lambda}\right) JG(x) \mathscr{H}^n(dx) \\ &= \lambda^{-n} \int_{T_{x_0} N} f\left(z + \frac{1}{\lambda} g(x_0 + \lambda z)\right) JG(x_0 + \lambda z) \lambda^n \mathscr{H}^n(dz) \\ &\to \int_{T_{x_0} N} f(z) \mathscr{H}^n(dz)\end{aligned}$$

für $\lambda \searrow 0$, wobei $G(x) := x + g(x)$, $x \in T_{x_0} N + x_0$.

Definition
Ist μ ein äußeres Maß auf $\mathbb{R}^p$, $A \subset \mathbb{R}^p$ und $x \in \mathbb{R}^p$, so nennt man

$$\theta^{n*}(\mu, A, x) := \limsup_{r \searrow 0} \frac{\mu(A \cap B(x, r))}{\alpha(n) \cdot r^n}$$

die n-dimensionale obere Dichte und

$$\theta^n_*(\mu, A, x) := \liminf_{r \searrow 0} \frac{\mu(A \cap B(x, r))}{\alpha(n) \cdot r^n}$$

die n-dimensionale untere Dichte von A in x bezüglich μ.

Ist $\theta^{n*}(\mu, A, x) = \theta^n_*(\mu, A, x)$, so nennt man $\theta^n(\mu, A, x) := \theta^n_*(\mu, A, x)$ die Dichte von A in x bezüglich μ.

Lemma 3.21
Sei μ ein Borelreguläres äußeres Maß auf $\mathbb{R}^p$, $A \subset \mathbb{R}^p$ μ-messbar und $\mu \lfloor A \in \mathbb{M}(\mathbb{R}^p)$. Dann gilt $\theta^n(\mu, A, x) = 0$ für $\mathscr{H}^n$-fast-alle $x \in \mathbb{R}^p \setminus A$.

Ohne Beweis (ist kompliziert).

Proposition 3.22
Ist $M \subset \mathbb{R}^p$ abzählbar n-rektifizierbar, $\mathscr{H}^n$-messbar und $\mathscr{H}^n \lfloor M \in \mathbb{M}(\mathbb{R}^p)$, dann existiert $T_x M$ für $\mathscr{H}^n$-fast-alle $x \in M$.

Beweis
Die Menge M kann in der Form $M = M_0 \dot\cup \dot\bigcup_{j\geq 1} M_j$ mit paarweise disjunkten Mengen M_j, M_j $\mathscr{H}^n$-messbar und $M_j \subset N_j$, geschrieben werden, wobei N_j eine n-dimensionale C^1-Untermannigfaltigkeit von $\mathbb{R}^p$ ist mit $\mathscr{H}^n(N_j) < \infty$. ($M_0 := N_0$, $M_1 := M \cap N_1 \setminus M_0$, $M_2 := M \cap N_2 \setminus (M_0 \cup M_1)$, $\ldots$). Für $\mathscr{H}^n$-fast-alle $x \in M_j$ gilt wegen Lemma 3.21:

$$\theta^n(\mathscr{H}^n, M \setminus M_j, x) = \theta^n(\mathscr{H}^n, N_j \setminus M_j, x) = 0.$$

Für jedes solches x existieren die approximativen Tangentialräume $T_x M$ und $T_x N_j$. Sei $f \in C_0(\mathbb{R}^p)$ mit $\mathrm{supp}(f) \subset B(0, R)$ (für ein $R \in (0, \infty)$). Dann gilt

$$\begin{aligned} \left| \lambda^{-n} \cdot \int_{M \setminus M_j} f(\frac{z-x}{\lambda}) \mathscr{H}^n(dz) \right| &\leq \lambda^{-n} \cdot \int_{M \setminus M_j} \|f\|_\infty \mathbb{1}_{B(x,\lambda R)} d\mathscr{H}^n \\ &\leq \|f\|_\infty \lambda^{-n} \mathscr{H}^n(M \setminus M_j \cap B(x, \lambda R)) \\ &= \alpha(n) R^n \|f\|_\infty \frac{\mathscr{H}^n(M \setminus M_j \cap B(x, \lambda R))}{\alpha(n)(\lambda R)^n}. \end{aligned}$$

Also gilt

$$\lim_{\lambda \searrow 0} \lambda^{-n} \int_{M \setminus M_j} f(\frac{z-x}{\lambda}) \mathscr{H}^n(dz) = 0.$$

Ebenso folgt

$$\lim_{\lambda \searrow 0} \lambda^{-n} \int_{N_j \setminus M_j} f(\frac{z-x}{\lambda}) \mathscr{H}^n(dz) = 0.$$

Wegen

$$\begin{aligned} \int_{T_{x_0} N_j} f(z) \mathscr{H}^n(dz) &= \lim_{\lambda \searrow 0} \lambda^{-n} \int_{N_j} f(\frac{z-x}{\lambda}) \mathscr{H}^n(dz) \\ &= \lim_{\lambda \searrow 0} \lambda^{-n} \int_{M_j} f(\frac{z-x}{\lambda}) \mathscr{H}^n(dz) \\ &= \lim_{\lambda \searrow 0} \lambda^{-n} \int_{M} f(\frac{z-x}{\lambda}) \mathscr{H}^n(dz) \end{aligned}$$

folgt die Behauptung. ∎

Definition
Sei $M \subset \mathbb{R}^p$ eine $\mathscr{H}^n$-messbare Menge. Man nennt eine $\mathscr{H}^n$-messbare Funktion $\theta : M \to (0, \infty)$, die

$$\int_{M \cap K} \theta d\mathscr{H}^n < \infty$$

für alle $\mathscr{H}^n$-messbaren und beschränkten Mengen $K \subset \mathscr{H}^n$ erfüllt, eine Gewichtsfunktion zu M.

Bemerkung: Sind M, θ wie in der Definition, so ist

$$\mathscr{H}^n \lfloor \theta(\bullet) := \int_\bullet \theta(x) \mathscr{H}^n(dx) \in \mathbb{M}(\mathbb{R}^p).$$

Lemma 3.23
Sei $M \subset \mathbb{R}^p$ eine $\mathscr{H}^n$-messbare Menge. Dann gilt:

(a) Genau dann existiert eine Gewichtsfunktion θ zu M, wenn $M = \bigcup_{j\geq 1} M_j$ mit $\mathscr{H}^n$-messbaren Mengen $M_j \subset \mathbb{R}^p$ und $\mathscr{H}^n \lfloor M_j \in \mathbb{M}(\mathbb{R}^p)$.

(b) Ist M abzählbar n-rektifizierbar, so existiert eine Gewichtsfunktion zu M.

Beweis
Übung. ∎

Definition
Sei $M \subset \mathbb{R}^p$ eine $\mathscr{H}^n$-messbare Menge und $\theta : M \to (0, \infty)$ eine Gewichtsfunktion zu M. Dann heißt $P \in G(p, n)$ n-dimensionaler *approximativer Tangentialraum* von M in x bezüglich θ, falls

$$(\eta_{x,\lambda})_\# \left(\lambda^{-n}(\mathscr{H}^n \lfloor \theta)\right) \overset{v}{\to} \theta(x)(\mathscr{H}^n \lfloor P) \quad \text{für } \lambda \searrow 0,$$

das heißt für $f \in C_0(\mathbb{R}^p)$ gelte

$$\int_{\frac{M-x}{\lambda}} f(y)\theta(x + \lambda y)\mathscr{H}^n(dy) = \lambda^{-n} \int_M f(\frac{z - x}{\lambda})\theta(z)\mathscr{H}^n(dz) \xrightarrow{\lambda \searrow 0} \theta(x) \int_P f(y)\mathscr{H}^n(dy).$$

Bemerkungen: (1) Ist θ fest, so ist der approximative Tangentialraum P von M in x bezüglich θ eindeutig bestimmt, falls er existiert. In diesem Fall schreiben wir $T_x^\theta M :=P$.

(2) Sei $x \in M$. Für $\eta > 0$ sei $M_\eta := \{y \in M : \theta(y) > \eta\}$. Dann hat M_η lokal endliches Hausdorffmaß, das heißt $\mathscr{H}^n \lfloor M_\eta \in \mathbb{M}(\mathbb{R}^p)$. Zu $x \in M$ existiert stets $\eta > 0$ mit $x \in M_\eta$. Für $\mathscr{H}^n$-fast-alle $x \in M_\eta$ gilt:

$$T_x M_\eta \quad \text{existiert genau dann, wenn } T_x^\theta M \text{ existiert.}$$

In diesem Fall gilt $T_x M_\eta = T_x^\theta M$.

(3) Sind θ und $\tilde{\theta}$ Gewichtsfunktionen zu M, so gilt für $M_\theta := \{x \in M : T_x^\theta M \text{ existiert}\}$, $M_{\tilde{\theta}} := \{x \in M : T_x^{\tilde{\theta}} M \text{ existiert}\}$:

$$\mathscr{H}^n(M_\theta \,\Delta\, M_{\tilde{\theta}}) = \mathscr{H}^n\left((M_\theta \setminus M_{\tilde{\theta}}) \cup (M_{\tilde{\theta}} \setminus M_\theta)\right) = 0,$$

und für $\mathscr{H}^n$-fast-alle $x \in M_\theta \cap M_{\tilde{\theta}}$ ist $T_x^\theta M = T_x^{\tilde{\theta}} M$.

Satz 3.24
Sei $M \subset \mathbb{R}^p$ eine $\mathscr{H}^n$-messbare Menge. Dann sind äquivalent:

(a) M ist abzählbar n-rektifizierbar.

(b) M hat eine Gewichtsfunktion θ, so dass $T_x^\theta M$ für $\mathscr{H}^n$-fast-alle $x \in M$ existiert.

(c) Für jede Gewichtsfunktion θ von M gilt: $T_x^\theta M$ existiert für $\mathscr{H}^n$-fast-alle $x \in M$.

Beweis (Skizze)
(a) $\Rightarrow$ (c): Zu M betrachtet man eine Zerlegung $M = M_0 \dot\cup \dot\bigcup_{j\geq 1} M_j$ mit $\mathscr{H}^n$-messbaren Mengen $M_j \subset \mathbb{R}^p$, wobei $\mathscr{H}^n(M_0) = 0$ und $M_j \subset N_j$, N_j ist n-dimensionale C^1-Untermannigfaltigkeit von $\mathbb{R}^p$ mit $\mathscr{H}^n(N_j) < \infty$. Sei θ eine beliebige Gewichtsfunktion zu M und $\mu := \mathscr{H}^n \lfloor \theta$. Betrachte $x \in M_j$ mit folgenden Eigenschaften:

(1) $\theta^n(\mu, M \setminus M_j, x) = 0$,

(2) $\theta^n(\mathscr{H}^n, N_j \setminus M_j, x) = 0$,

(3) $\theta^n(\mu, M_j \setminus S_\varepsilon, x) = 0$, wobei $S_\varepsilon := \{z \in M \colon |\theta(z) - \theta(x)| \leq \varepsilon\}$, $\varepsilon > 0$,

(4) $\theta^n(\mathscr{H}^n, M_j \setminus S_\varepsilon, x) = 0$.

Mit Hilfe von Lemma 3.21 für (1) und (2) und mit Hilfe des Satzes von Lusin für (3) und (4) folgt, dass $\mathscr{H}^n$-fast-alle $x \in M_j$ diese Eigenschaften erfüllen. Dann folgert man in mehreren Schritten, dass

$$\lim_{\lambda \searrow 0} \lambda^{-n} \cdot \int_M f(\frac{z-x}{\lambda}) \theta(z) \mathscr{H}^n(dz) = \theta(x) \int_{T_x N_j} f(z) \mathscr{H}^n(dz)$$

für $f \in C_0(\mathbb{R}^p)$. Dies zeigt insbesondere $T_x^\theta M = T_x N_j$. Die Details werden in den Übungen besprochen. ∎

Beispiel
Sei

$$M = [-e_1, e_1] \cup \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \left([-e_1, e_1] + \frac{1}{n} e_2 \right)$$

und setze $\theta|_{M_i} = \left(\frac{1}{2}\right)^i$ und $\theta|_{[-e_1,e_1]} := \theta(0)$. Man kann nun $T_0^\theta M = \mathbb{R} e_1$ zeigen. Die Details werden in den Übungen besprochen.

Das Ziel im Folgenden ist es, eine allgemeine Form der Flächen- und Koflächenformel zu finden, sowie eine Definition von Ableitungen von Lipschitz-Abbildungen relativ zu rektifizierbaren Mengen.

Sei $M \subset \mathbb{R}^p$ eine abzählbare m-rektifizierbare Menge. Dazu sei $M = \dot\bigcup_{j=0} M_j$ eine disjunkte Zerlegung von M in $\mathscr{H}^m$-messbare Mengen $M_j \subset \mathbb{R}^p$ mit $\mathscr{H}^m(M_0) = 0$, wobei $M_j \subset N_j$ mit m-dimensionalen C^1-Untermannigfaltigkeiten N_j, $j \geq 1$, $\mathscr{H}^m(N_0) = 0$ sowie $\mathscr{H}^m(N_j) < \infty$.

Sei $U \subset \mathbb{R}^p$ offen, $M \subset U$ und $f \colon U \to \mathbb{R}$ eine Lipschitzfunktion. Sei $x \in M$. Dann gibt es ein $j \in \mathbb{N}_0$ mit $x \in M_j$. Ist $j \geq 1$ und $f|_{N_j}$ differenzierbar in x, so erklärt man

$$\nabla^M f(x) := \nabla^{N_j} f(x) := \sum_{k=1}^m D_{\tau_k} f(x) \cdot \tau_k \in T_x N_j,$$

wobei $(\tau_1, \ldots, \tau_m)$ eine Orthonormalbasis von $T_x N_j$ ist.

In diesem Fall existiert eine in x differenzierbare Fortsetzung $\bar{f} \colon \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}$ von $f|_{N_j}$ und für diese gilt

$$\nabla^M f(x) = \sum_{k=1}^m \langle \nabla \bar{f}(x), \tau_k \rangle \cdot \tau_k,$$

wobei der Gradient hier im umgebenden Raum $\mathbb{R}^p$ gebildet wird.

Bemerkungen: (1) Ist die Zerlegung von M gewählt, so existiert $\nabla^M f(x)$ für $\mathscr{H}^m$-fast-alle $x \in M$ und ist eindeutig bestimmt.

(2) Tatsächlich ist $\nabla^M f(x)$ von der Wahl der Zerlegung von M unabhängig.

Ist nämlich $x \in M_j \subset N_j$, existiert $\nabla^M f(x) = \nabla^{N_j} f(x)$, das heißt ist $f|_{N_j}$ in x differenzierbar und existiert $T_x M = T_x N_j$, so ist $f|_{(x+T_xM)}$ differenzierbar in x und $\nabla^M f(x) = \nabla^{N_j} f(x) = \nabla(f|_{(x+T_xM)})$. Für den Nachweis dieser Aussage wird verwendet, dass f Lipschitzfunktion auf U ist.

Fazit: Ist $M \subset \mathbb{R}^p$ eine abzählbar m-rektifizierbare Menge, $U \subset \mathbb{R}^p$ offen mit $M \subset U$, $f: U \to \mathbb{R}$ eine *lokale Lipschitzfunktion*, dann existiert $\nabla^M f(x)$ für $\mathscr{H}^m$-fast-alle $x \in M$ und die Definition $\nabla^M f(x) = \nabla^{N_j} f(x)$ ist korrekt.

In dieser Situation definieren wir:

$$\begin{aligned} d^M f_x \colon T_x M &\to \mathbb{R} \\ \tau &\mapsto d^M f_x(\tau) := \langle \nabla^M f(x), \tau \rangle. \end{aligned}$$

Ist $f\colon U \to \mathbb{R}^q$ lokal Lipschitz, $f = (f^1, \ldots, f^q)^\top$ und existiert $\nabla^M f_x^j$ für $j = 1, \ldots, q$, so sei

$$\begin{aligned} d^M f_x \colon T_x M &\to \mathbb{R}^q \\ \tau &\mapsto d^M f_x(\tau) := \sum_{j=1}^q d^M f_x^j(\tau) \cdot e_j = \sum_{j=1}^q \langle \nabla^M f^j(x), \tau \rangle \cdot e_j. \end{aligned}$$

Definition (Jakobi-Determinante)
Sei $f\colon U \subset \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}^q$, sei M abzählbar m-rektifizierbar und es existiere $\nabla^M f(x)$ in $x \in M$.

Für $m \le q$ sei

$$J_M f(x) := \sqrt{\det\big((d^M f_x)^* \circ (d^M f_x)\big)}$$

und für $m > q$ sei

$$J_M f(x) := \sqrt{\det\big((d^M f_x) \circ (d^M f_x)^*\big)}.$$

Satz 3.25
Sei $M \subset \mathbb{R}^p$ eine $\mathscr{H}^m$-messbare, abzählbar m-rektifizierbare Menge. Sei $U \subset \mathbb{R}^p$ offen und $M \subset U$ sowie $f\colon U \to \mathbb{R}^q$ eine lokale Lipschitzabbildung. Sei schließlich $g\colon M \to [0, \infty]$ eine $\mathscr{H}^m$-messbare Funktion.

(a) Dann gilt für $m \le q$:

$$\int_M g(x) \cdot J_M f(x)\, \mathscr{H}^m(dx) = \int_{\mathbb{R}^q} \int_{f^{-1}(\{z\})} g(x)\, \mathscr{H}^0(dx)\, \mathscr{H}^m(dz).$$

(b) Dann gilt für $m \ge q$:

$$\int_M g(x) \cdot J_M f(x)\, \mathscr{H}^m(dx) = \int_{\mathbb{R}^q} \int_{f^{-1}(\{z\})} g(x)\, \mathscr{H}^{m-q}(dx)\, \mathscr{H}^q(dz).$$

Auch diese Fassung lässt sich weiter verallgemeinern:

Satz 3.26
Sei $M \subset \mathbb{R}^p$ eine $\mathscr{H}^m$-messbare, abzählbar m-rektifizierbare Menge, und $Z \subset \mathbb{R}^q$ eine $\mathscr{H}^n$-messbare, abzählbar n-rektifizierbare Menge. Sei $f\colon M \to Z$ eine lokale Lipschitzabbildung und $g : M \to [0, \infty]$ $\mathscr{H}^m$-messbar. Dann gilt

$$\int_M g(x) \cdot J_M f(x) \, \mathscr{H}^m(dx) = \int_Z \int_{f^{-1}(\{z\})} g(x) \, \mathscr{H}^{m-n}(dx) \, \mathscr{H}^n(dz).$$