

## Kapitel 9

# Unabhängige Zufallsvariablen

Die Unabhängigkeit von Zufallsvariablen wird auf die Unabhängigkeit von Ereignissen zurückgeführt. Im Folgenden sei  $(\Omega, \mathcal{A}, P)$  ein Wahrscheinlichkeitsraum.

### Definition 9.1

a) Zufallsvariablen  $X_1, \dots, X_n : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  heißen **unabhängig**, falls:

$$F_{X_1, \dots, X_n}(x_1, \dots, x_n) = \prod_{i=1}^n F_{X_i}(x_i), \text{ d.h.}$$

$$P(\underbrace{X_1 \leq x_1, \dots, X_n \leq x_n}_{A_1 \cap \dots \cap A_n}) = \prod_{i=1}^n P(\underbrace{X_i \leq x_i}_{A_i}) \quad \forall (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$$

b) Sei  $X_1, X_2, \dots$  eine (unendliche) Folge von Zufallsvariablen.  $X_1, X_2, \dots$  heißen unabhängig, falls jede endliche Teilfolge  $X_{i_1}, \dots, X_{i_k}$  aus unabhängigen Zufallsvariablen besteht.

**Satz 9.1** Die Zufallsvariablen  $X_1, \dots, X_n : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  sind genau dann unabhängig, wenn  $\forall B_1, \dots, B_n \in \mathfrak{B}$  gilt:

$$P(X_1 \in B_1, \dots, X_n \in B_n) = \prod_{i=1}^n P(X_i \in B_i) \text{ bzw. } P_X(B_1 \times \dots \times B_n) = \prod_{i=1}^n P_{X_i}(B_i)$$

d.h. die gemeinsame Verteilung ist das Produkt der einzelnen Randverteilungen.

### Beweis

“ $\Leftarrow$ “ setze  $B_i = (-\infty, x_i]$ ,  $i = 1, \dots, n$

“ $\Rightarrow$ “ Folgt aus Satz 4.4 und Übung ( $\{(-\infty, x_i] \times \dots \times (-\infty, x_n], x_i \in \mathbb{R} \cup \{\infty\}\}$ ) ist ein  $\cap$ -stabiler Erzeuger von  $\mathfrak{B}(\mathbb{R}^n)$ )

**Beispiel 9.1** Wir betrachten die mehrstufigen Zufallsexperimente aus §8.1. Es sei  $\Omega, \mathcal{A}$  wie in §8.1 und

$$P(A_1 \times \cdots \times A_n) = P_1(A_1) \cdots P_n(A_n) \text{ für } A_i \in \mathcal{A}_i \quad i = 1, \dots, n$$

das sogenannte Produktmaß.

Durch die Festlegung auf den Rechteckmengen ist es auf ganz  $\mathcal{A}$  eindeutig bestimmt (Satz 4.4). Weiter sei  $X_i(\omega) = X_i((\omega_1, \dots, \omega_n)) = \omega_i$  die  $i$ -te Projektion,  $i = 1, \dots, n$ . Dann sind  $X_1, \dots, X_n$  unabhängig, da

$$\begin{aligned} P(X_1 \in A_1, \dots, X_n \in A_n) &= P(A_1 \times \cdots \times A_n) = \prod_{i=1}^n P_i(A_i) \\ &= \prod_{i=1}^n P(\Omega_1 \times \cdots \times \Omega_{i-1} \times A_i \times \Omega_{i+1} \times \cdots \times \Omega_n) \\ &= \prod_{i=1}^n P(X_i \in A_i) \end{aligned}$$

**Satz 9.2** Sei  $X = (X_1, \dots, X_n)$  ein Zufallsvektor.

a) Ist  $X$  diskret mit  $P(X \in C) = 1$ ,  $C \in \mathbb{R}^n$  abzählbar, dann sind  $X_1, \dots, X_n$  unabhängig, genau dann wenn:

$$P(X_1 = x_1, \dots, X_n = x_n) = \prod_{i=1}^n P(X_i = x_i) \quad \forall (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$$

b) Ist  $X$  absolut stetig, so sind  $X_1, \dots, X_n$  unabhängig, genau dann wenn

$$f_X(x_1, \dots, x_n) = \prod_{i=1}^n f_{X_i}(x_i) \quad \forall (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R} \setminus B$$

wobei  $B$  "eine kleinere Menge" ist (vom Lebesgue-Maß 0). D.h. die gemeinsame Dichte ist das Produkt der Randdichten.

**Beispiel 9.2** Sei  $X = (X_1, X_2)$  ein absolutstetiger Zufallsvektor mit Dichte

$$f_{X_1, X_2}(x_1, x_2) = \frac{1}{2\pi\sqrt{1-\varrho^2}} \exp\left(-\frac{1}{2} \frac{x_1^2 - 2\varrho x_1 x_2 + x_2^2}{1-\varrho^2}\right) \quad x_1, x_2 \in \mathbb{R} \text{ für } \varrho \in [0, 1)$$

Dies ist ein Spezialfall von Beispiel 8.4 mit  $\sigma_1 = \sigma_2 = 1$ ,  $\sigma_{12} = \varrho$ ,  $\mu_1 = \mu_2 = 0$   
Randdichte  $f_{X_1}(x_1)$  von  $X_1$ :

$$\begin{aligned} f_{X_1}(x_1) &= \int_{-\infty}^{\infty} f_{X_1, X_2}(x_1, x_2) dx_2 \\ &= \frac{1}{2\pi\sqrt{1-\varrho^2}} \exp\left(-\frac{1}{2} \frac{x_1^2 (1-\varrho^2)}{1-\varrho^2}\right) \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left(-\frac{1}{2} \frac{(x_2 - \varrho x_1)^2}{1-\varrho^2}\right) dx_2 \\ &= \frac{1}{2\pi} \exp\left(-\frac{1}{2} x_1^2\right) \cdot \underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{1}{2} u^2} du}_{=\sqrt{2\pi}} \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{1}{2} x_1^2\right) \quad (\text{also } X_1 \sim N(0, 1)) \end{aligned}$$

$$\text{Analog: } f_{X_2}(x_2) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{1}{2}x_2^2\right) \quad (\text{also } X_2 \sim N(0, 1))$$

das heißt die Randverteilungen sind für alle  $\varrho$  Standardverteilungen.  $X_1, X_2$  sind unabhängig  $\Leftrightarrow \varrho = 0$ . Für  $\varrho \neq 0$ :  $f_{X_1, X_2}(x_1, x_2) = f_{X_1}(x_1)f_{X_2}(x_2)$

**Bemerkung 9.1** Sind  $X_1, \dots, X_n$  unabhängige Zufallsvariablen und  $n_1 + \dots + n_k = n$ ,  $n_i \in \mathbb{N}$ ,  $\varphi_i \in \mathbb{R}^{n_i} \rightarrow \mathbb{R}$  messbar,  $i = 1, \dots, k$ , dann sind auch die Zufallsvariablen  $\varphi_1(X_1, \dots, X_{n_1}), \varphi_2(X_{n_1+1}, \dots, X_{n_1+n_2}), \dots, \varphi_k(X_{n_1+\dots+n_{k-1}+1}, \dots, X_n)$  unabhängig.

**Beispiel 9.3** Es gibt 2 Spieler. Spieler 1 denkt sich zwei Zahlen  $a, b \in \mathbb{R}$  aus. Eine faire Münze entscheidet, ob  $a$  oder  $b$  aufgedeckt wird. Spieler 2 muss raten, ob die verdeckte Zahl größer oder kleiner als die aufgedeckte Zahl ist.

Intuition: Wahrscheinlichkeit richtig zu raten =  $\frac{1}{2}$

Es geht besser: Spieler 2 generiert eine Zahl  $c$  zufällig  $C \sim N(0, 1)$

Entscheidung:  $c$  und die aufgedeckte Zahl werden verglichen.

**Mathematisches Modell:**

$(\Omega_1, \mathcal{A}_1, P_1)$  mit  $\Omega_1 = \{a, b\}$ ,  $\mathcal{A}_1 = \mathcal{P}(\Omega)$ ,  $P_1(\{a\}) = P_1(\{b\}) = \frac{1}{2}$

Sei  $M : \Omega_1 \rightarrow \{a, b\}$ ,  $M(a) = a$ ,  $M(b) = b$  die Zufallsvariablen, die das Ergebnis des Münzwurfes beschreibt.

$(\Omega_2, \mathcal{A}_2, P_2)$  mit  $\Omega_2 = \mathbb{R}$ ,  $\mathcal{A}_2 = \mathfrak{B}$ ,  $P_2(B) = \int_B \varphi_{0,1}(x) dx$

$C : \Omega_2 \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $C(\omega) = \omega$ .

Wichtig:  $M$  und  $C$  sind unabhängig. Sei o.B.d.A.  $a < b$ . Wir betrachten den Produktraum mit dem Produktmaß

$P = P_1 \otimes P_2$ . Es sei  $G$  das Ereignis, dass Spieler 2 richtig rät.

$$P(G|M=a) = \frac{P(G, M=a)}{P(M=a)} = \frac{P(C > a, M=a)}{P(M=a)} \stackrel{C, M \text{ unabh.}}{=} \frac{P(C > a)P(M=a)}{P(M=a)}$$

$$\text{Analog: } P(G|M=b) = P(C \leq b)$$

$$\begin{aligned} P(G) &= P(G|M=a)\frac{1}{2} + P(G|M=b)\frac{1}{2} = \frac{1}{2}(P(c > a) + P(c \leq b)) = \\ &= \frac{1}{2}(1 - \Phi(a) + \Phi(b)) = \frac{1}{2}(1 + \underbrace{\Phi(b) - \Phi(a)}_{>0}) > \frac{1}{2} \end{aligned}$$

**Satz 9.3** Sei  $X = (X_1, X_2) : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^2$  ein absolutstetiger Zufallsvektor mit gemeinsamer Dichte  $f_X$ . Dann ist auch die Zufallsvariable  $X_1 + X_2$  absolutstetig und ihre Dichte ist gegeben durch:

$$f_{X_1+X_2}(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f_X(y, x-y) dy \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

Falls die Zufallsvariable  $X_1$  und  $X_2$  unabhängig sind, gilt insbesondere die sog. **Faltungsformel**

$$f_{X_1+X_2}(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f_{X_1}(y) \cdot f_{X_2}(x-y) dy \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

**Bemerkung 9.2**

Sind  $X$  und  $Y$  unabhängig, so schreibt man

$$P_{X+Y} = P_X * P_Y$$

und nennt  $P_X * P_Y$  **Faltung**

**Beweis**

Zwischen Verteilungsfunktion und Dichte gibt es eine eindeutige Zuordnung. Also genügt es zu zeigen:

$$\begin{aligned} P(X_1 + X_2 \leq z) &= \int_{-\infty}^z \int_{-\infty}^{\infty} f_X(y, x-y) dy dx \\ \int_{-\infty}^z \int_{-\infty}^{\infty} f_X(y, x-y) dy dx &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^z f_X(y, x-y) dx dy \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{z-y} f_X(y, u) du dy \\ &= \int_{\{(u,y) \in \mathbb{R}^2 | u+y \leq z\}} f_X(y, u) du dy \\ &= P_X(\{(u, y) \in \mathbb{R}^2 | u+y \leq z\}) = P(X_1 + X_2 \leq z) \end{aligned}$$

Die Faltungsformel ergibt sich mit Satz 9.1.b).

**Beispiel 9.4** Ist  $X_1 \sim N(\mu_1, \sigma_1^2)$ ,  $X_2 \sim N(\mu_2, \sigma_2^2)$  und  $X_1, X_2$  unabhängig so gilt:

$$X_1 + X_2 \sim N(\mu_1 + \mu_2, \sigma_1^2 + \sigma_2^2)$$

d.h. die Normalverteilung ist **faltungsstabil**.

**Satz 9.4** Seien  $X, Y : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  unabhängige Zufallsvariablen mit existierenden Erwartungswerten, so existiert auch der Erwartungswert von  $X \cdot Y$  und es gilt:

$$EX \cdot Y = EX \cdot EY$$

**Beweis**

Wir betrachten für den Beweis nur den Fall, dass  $(X, Y)$  diskret ist. (Zähldichte)

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} |x_k y_j| P(X = x_k, Y = y_j) &= \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} |x_k y_j| P(X = x_k) P(Y = y_j) \\ &= \underbrace{\left( \sum_{k=1}^{\infty} |x_k| P(X = x_k) \right)}_{< \infty \text{ nach Vor.}} \underbrace{\left( \sum_{j=1}^{\infty} |y_j| P(Y = y_j) \right)}_{< \infty \text{ nach Vor.}} < \infty \end{aligned}$$

Also existiert  $EXY$ . Gleiche Rechnung ohne Betragsstriche ergibt  $EXY = EX \cdot EY$ . Im Allgemeinen folgt die Existenz von  $EXY$  nicht aus der Existenz von  $EX$  und  $EY$ .

**Satz 9.5 (Cauchy-Schwarz-Ungleichung)** Es seien  $X, Y : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  Zufallsvariablen mit existierendem zweiten Moment, so existiert auch  $EXY$  und es gilt:

$$(EXY)^2 \leq EX^2 EY^2$$

**Beweis**

Es gilt:  $|X \cdot Y(\omega)| = |X(\omega)| |Y(\omega)| \stackrel{da (X-Y)^2 > 0}{\leq} X^2(\omega) + Y^2(\omega) \quad \forall \omega \in \Omega$

Aus der Voraussetzung und Satz 7.2.b) folgt die Existenz von  $EXY$ . Außerdem folgt mit Satz 7.2 die Existenz von  $E(X + aY)^2 \quad \forall a \in \mathbb{R}$

Es gilt:  $0 \leq E(X + aY)^2 = EX^2 + a^2 EY^2 + 2aEXY \quad \forall a \in \mathbb{R}$

1. Fall:  $EY^2 = 0 \Rightarrow EXY = 0$ , da die rechte Seite eine Gerade in  $a$  ist.  
 $\Rightarrow$  Ungleichung gilt.

2. Fall:  $EY^2 \neq 0$ : Rechte Seite wird minimal bei  $a^* = -\frac{EXY}{EY^2}$   
 Minimal-Stelle einsetzen ergibt:  $\frac{1}{EY^2}(EX^2 EY^2 - (EXY)^2) \geq 0$   
 $\Rightarrow$  Ungleichung gilt.

**Definition 9.2** Es seien  $X, Y$  Zufallsvariablen mit  $EX^2 < \infty$ ,  $EY^2 < \infty$ .

a) Dann heißt  $\text{Cov}(X, Y) := E[(X - EX)(Y - EY)]$  die **Kovarianz** von  $X$  und  $Y$ . Ist  $\text{Cov}(X, Y) = 0$ , so nennt man  $X$  und  $Y$  **unkorreliert**.

b) Ist  $\text{Var}(X) \cdot \text{Var}(Y) > 0$ , so heißt

$$\varrho(X, Y) := \frac{\text{Cov}(X, Y)}{\sqrt{\text{Var}(X) \text{Var}(Y)}}$$

der **Korrelationskoeffizient** von  $X$  und  $Y$ .

**Satz 9.6** Seien  $X, Y$  Zufallsvariablen mit  $EX^2 < \infty$ ,  $EY^2 < \infty$ . Dann gilt:

a)  $\text{Cov}(X, Y) = EXY - EX \cdot EY$

b) Sind  $X$  und  $Y$  unabhängig, so auch unkorreliert.

c) Ist  $\varrho(X, Y)$  erfüllt, so gilt:  $-1 \leq \varrho(X, Y) \leq 1$

**Beweis**

a) Es gilt:  $\text{Cov}(X, Y) = E[XY - XEY - YEX + EX \cdot EY] = EXY - EXEY$

b) folgt aus a) und Satz 9.4

c) Mit Satz 9.5 folgt:

$$\begin{aligned} \text{Var}(X) \text{Var}(Y) \varrho^2(X, Y) &= (E[(X - EX)(Y - EY)])^2 \leq E(X - EX)^2 E(Y - EY)^2 \\ &= \text{Var}(X) \text{Var}(Y) \end{aligned}$$

**Bemerkung 9.3**

- a) Der Korrelationskoeffizient ist ein Maß für die lineare Abhängigkeit der zwei Zufallsvariablen. Betrachte den Extremfall  $Y = aX + b$  mit  $a \neq 0, b \in \mathbb{R}$  gilt  $\text{Cov}(X, Y) = E[(X - EX)(aX + b - aEX - b)] = a \text{Var}(X)$ . und

$$\varrho(X, Y) = \frac{a \text{Var}(X)}{\sqrt{a^2 \text{Var}^2(X)}} = \begin{cases} 1 & \text{falls } a > 0 \\ -1 & \text{falls } a < 0 \end{cases}$$

- b) Es gibt Zufallsvariablen, die unkorreliert, aber nicht stochastisch unabhängig sind.

Es sei z.B.  $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \omega_3\}$

$\omega$	$P(\{\omega\})$	$X(\omega)$	$Y(\omega)$	$X(\omega) \cdot Y(\omega)$
$\omega_1$	$\frac{1}{3}$	0	-1	0
$\omega_2$	$\frac{1}{3}$	1	0	0
$\omega_3$	$\frac{1}{3}$	0	1	0

Es gilt:  $\text{Cov}(X, Y) = 0 - 0 = 0$  unkorreliert, aber  $P(X = 0, Y = 1) = \frac{1}{3}$   
 $P(X = 0)P(Y = 1) = \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{3} = \frac{2}{9} \neq \frac{1}{3} = P(X = 0, Y = 1)$  sind nicht unabhängig.

- c) Es gilt:  $\text{Cov}(X, X) = \text{Var}(X)$ ,  $\text{Cov}(X, Y) = \text{Cov}(Y, X)$

**Satz 9.7**

Seien  $X_1, \dots, X_n$  Zufallsvariablen mit existierendem zweiten Moment, so gilt:

$$\text{Var}(X_1 + \dots + X_n) = \sum_{i=1}^n \text{Var}(X_i) + 2 \sum_{1 \leq i, j \leq n} \text{Cov}(X_i, X_j)$$

Sind die Zufallsvariablen unabhängig (oder unkorreliert), so gilt:

$$\text{Var}(X_1 + \dots + X_n) = \sum_{i=1}^n \text{Var}(X_i)$$

**Beweis**

Mit Satz 7.2 gilt:

$$\begin{aligned} \text{Var}(X_1 + \dots + X_n) &= E \left( \sum_{i=1}^n (X_i - EX_i) \right)^2 = E \sum_{1 \leq i, j \leq n} (X_i - EX_i)(X_j - EX_j) \\ &= \sum_{1 \leq i, j \leq n} \text{Cov}(X_i, X_j) = \sum_{i=1}^n \text{Var}(X_i) + 2 \sum_{1 \leq i < j \leq n} \text{Cov}(X_i, X_j) \end{aligned}$$

Der zweite Teil aus Satz 9.6 b)

**Definition 9.3**

Sei  $X = (X_1, \dots, X_n)$  ein Zufallsvektor mit  $EX_i^2 < \infty, \forall i = 1, \dots, n$

- a)  $EX = (EX_1, \dots, EX_n)$  heißt **Erwartungswertvektor von X**.  
 b) Die  $n \times n$ -Matrix  $\text{Cov } X = (\text{Cov}(X_i, X_j))_{1 \leq i, j \leq n}$  heißt **Kovarianzmatrix von X**.