

## § 5 Nullmengen

In diesem Paragraphen sei stets  $\emptyset \neq X \in \mathfrak{B}_d$ . Wir schreiben wieder  $\lambda$  statt  $\lambda_d$ .

### Definition

Sei  $N \in \mathfrak{B}_d$ .  $N$  heißt eine **(Borel-)Nullmenge**, genau dann wenn  $\lambda(N) = 0$  ist.

### Beispiel

- (1) Ist  $N \subseteq \mathbb{R}^d$  höchstens abzählbar, so ist  $N \in \mathfrak{B}_d$  und  $\lambda(N) = 0$ .
- (2) Sei  $j \in \{1, \dots, d\}$  und  $H_j := \{(x_1, \dots, x_d) \in \mathbb{R}^d : x_j = 0\}$ . Aus Beispiel (5) nach 2.7 folgt, dass  $H_j$  eine Nullmenge ist.

### Lemma 5.1

Seien  $M, N, N_1, N_2, \dots \in \mathfrak{B}_d$ .

- (1) Ist  $M \subseteq N$  und  $N$  Nullmenge, dann ist  $M$  Nullmenge.
- (2) Sind alle  $N_j$  Nullmengen, so ist auch  $\bigcup N_j$  eine Nullmenge.
- (3)  $N$  ist genau dann eine Nullmenge, wenn für alle  $\varepsilon > 0$  offene Intervalle  $I_1, I_2, \dots \subseteq \mathbb{R}^d$  existieren mit  $N \subseteq \bigcup I_j$  und  $\sum_{j=1}^{\infty} \lambda(I_j) \leq \varepsilon$ .

### Beweis

- (1)  $0 \leq \lambda(M) \leq \lambda(N) = 0$
- (2)  $0 \leq \lambda(\bigcup N_j) \leq \sum \lambda(N_j) = 0$
- (3) Folgt aus 2.10. ■

### Bemerkung:

- (1)  $\mathbb{Q}$  ist „klein“:  $\mathbb{Q}$  ist „nur“ abzählbar.
- (2)  $\mathbb{Q}$  ist „groß“:  $\overline{\mathbb{Q}} = \mathbb{R}$
- (3)  $\mathbb{Q}$  ist „klein“:  $\lambda(\mathbb{Q}) = 0$

### Definition

- (1) Sei  $(E)$  eine Eigenschaft für Elemente in  $X$ .  
 $(E)$  gilt **für fast alle** (ffa)  $x \in X$ , genau dann wenn  $(E)$  **fast überall** (fü) (auf  $X$ ) gilt, genau dann wenn eine Nullmenge  $N \subseteq X$  existiert, sodass  $(E)$  für alle  $x \in X \setminus N$  gilt.
- (2)  $\int_{\emptyset} f(x) \, dx := 0$

**Satz 5.2**

Seien  $f : X \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$  messbare Funktionen.

- (1) Ist  $f$  integrierbar, so ist  $f$  fast überall endlich.
- (2) Ist  $f \geq 0$  auf  $X$ , so ist  $\int_X f(x) \, dx = 0$  genau dann wenn fast überall  $f = 0$ .
- (3) Ist  $f$  integrierbar und  $N \subseteq X$  eine Nullmenge, so gilt:

$$\int_N f(x) \, dx = 0$$

**Beweis**

- (1) ist gerade 4.10.
- (2) ist gerade 4.5(3)
- (3) Setze  $g := \mathbb{1}_N f$ . Aus 4.11 folgt, dass  $g$  integrierbar ist, also ist nach 4.9 auch  $|g|$  integrierbar. Für  $x \in X \setminus N$  gilt:

$$g(x) = |g(x)| = 0$$

D.h.  $|g| = 0$  fast überall. Aus (2) folgt damit  $\int_X |g| \, dx = 0$ . Dann ist mit 4.11:

$$\left| \int_X g \, dx \right| \leq \int_X |g| \, dx = 0$$

und somit  $\int_X g \, dx = 0$ . ■

**Satz 5.3**

$f, g : X \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$  seien messbar.

- (1) Ist  $f$  integrierbar und gilt fast überall  $f = g$ , so ist  $g$  integrierbar und es gilt:

$$\int_X f \, dx = \int_X g \, dx$$

- (2) Ist  $f$  integrierbar und  $g := \mathbb{1}_{\{|f| < \infty\}} \cdot f$ , so ist  $g$  integrierbar und es gilt:

$$\int_X f \, dx = \int_X g \, dx$$

- (3) Sind  $f$  und  $g$  beide  $\geq 0$  auf  $X$ , und ist fast überall  $f = g$ , so ist

$$\int_X f \, dx = \int_X g \, dx$$

**Beweis**

- (1) Nach Voraussetzung existiert eine Nullmenge  $N \subseteq X$ , sodass gilt:

$$\forall x \in X \setminus N : f(x) = g(x)$$

Aus 5.2(3) folgt dann  $\int_N f \, dx = 0$ . Sei  $x \in X \setminus N$  Dann gilt:

$$(\mathbb{1}_N |g|)(x) = \mathbb{1}_N(x) \cdot |g(x)| = 0$$

D.h.: Fast überall ist  $\mathbb{1}_N |g| = 0$ . Aus 5.2(2) folgt  $\int_N |g| \, dx = \int_X \mathbb{1}_N \cdot |g| \, dx = 0$ . Dann gilt:

$$\begin{aligned} \int_X |g| \, dx &= \int_X (\mathbb{1}_N |g| + \mathbb{1}_{X \setminus N} |g|) \, dx \\ &= \int_X \mathbb{1}_N |g| \, dx + \int_X \mathbb{1}_{X \setminus N} |g| \, dx \\ &= \int_X \mathbb{1}_{X \setminus N} |g| \, dx \\ &\leq \int_X |f| \, dx \stackrel{4.9}{<} \infty \end{aligned}$$

4.9 liefert nun, dass  $|g|$  und damit auch  $g$  integrierbar ist. Weiter gilt:

$$\begin{aligned} \int_X g \, dx &\stackrel{4.12}{=} \int_N g \, dx + \int_{X \setminus N} g \, dx = \int_{X \setminus N} g \, dx \\ &= \int_{X \setminus N} f \, dx \stackrel{5.2(3)}{=} \int_N f \, dx + \int_{X \setminus N} f \, dx \\ &\stackrel{4.12}{=} \int_X f \, dx. \end{aligned}$$

(2) Setze  $N := \{|f| = \infty\}$ . Aus 5.2(1) folgt, dass  $N$  eine Nullmenge ist. Sei  $x \in X \setminus N$ , so ist  $x \in \{|f| < \infty\}$  und  $g(x) = f(x)$ . D.h. fast überall ist  $f = g$ . (Klar:  $g$  ist mb). Dann folgt die Behauptung aus (1).

(3) **Fall 1:**  $\int_X f \, dx < \infty$

Dann ist  $f$  integrierbar, damit ist nach (1) auch  $g$  integrierbar und es gilt:

$$\int_X f \, dx = \int_X g \, dx$$

**Fall 2:**  $\int_X f \, dx = \infty$ .

Annahme:  $\int_X g \, dx < \infty$ . Dann gilt nach Fall 1:  $\int_X f \, dx < \infty$ . ◻

### Definition

$(f_n)$  sei eine Folge von Funktionen  $f_n : X \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ .

- (1)  $(f_n)$  konvergiert fast überall (auf  $X$ ) genau dann, wenn eine Nullmenge  $N \subseteq X$  existiert, sodass für alle  $x \in X \setminus N$   $(f_n(x))$  in  $\mathbb{R}$  konvergiert.
- (2) Sei  $f : X \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ .  $(f_n)$  konvergiert fast überall (auf  $X$ ) gegen  $f$  genau dann, wenn eine Nullmenge  $N \subseteq X$  existiert mit:  $f_n(x) \rightarrow f(x) \forall x \in X \setminus N$   
In diesem Fall schreiben wir:  $f_n \rightarrow f$  fast überall.

### Satz 5.4

Sei  $(f_n)$  eine Folge messbarer Funktionen  $f_n : X \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$  und  $(f_n)$  konvergiere fast überall (auf  $X$ ). Dann:

- (1) Es existiert  $f : X \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$  messbar mit  $f_n \rightarrow f$  fast überall.
- (2) Ist  $g : X \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$  eine Funktion mit  $f_n \rightarrow g$  fast überall, so gilt  $f = g$  fast überall.

**Bemerkung:** Ist  $g$  wie in (2), so muss  $g$  nicht messbar sein (ein Beispiel gibt es in der Übung).

**Beweis**

- (1) Es existiert eine Nullmenge  $N_1 \subseteq X$  :  $(f_n(x))$  konvergiert in  $\overline{\mathbb{R}}$  für alle  $x \in X \setminus N_1$ .

$$f(x) = \begin{cases} 0 & x \in N_1 \\ \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) & x \in X \setminus N_1 \end{cases}$$

$g_n := \mathbb{1}_{X \setminus N} \cdot f_n$ ,  $g_n$  ist messbar und  $g_n(x) \rightarrow f(x)$  für alle  $x \in X$ . Mit 3.5 folgt:  $f$  ist messbar.

- (2) Es existiert eine Nullmenge  $N_2 \subseteq X$  :  $f_n(x) \rightarrow g(x) \forall x \in X \setminus N_2$ .  $N = N_1 \cup N_2$ . Aus 5.1 folgt:  $N$  ist eine Nullmenge.

Für  $x \in X \setminus N$  :  $f(x) = g(x)$ . ■

**Satz 5.5 (Satz von Beppo Levi (Version III))**

Sei  $(f_n)$  eine Folge messbarer Funktionen  $f_n : X \rightarrow [0, +\infty]$  und für jedes  $n \in \mathbb{N}$  gelte:  $f_n \leq f_{n+1}$  fast überall. Dann existiert eine messbare Funktion  $f : X \rightarrow [0, +\infty]$  mit:  $f_n \rightarrow f$  fast überall und

$$\int_X f dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_X f_n dx$$

**Beweis**

Zu jedem  $n \in \mathbb{N}$  existiert eine Nullmenge  $N_n$  :  $f_n(x) \leq f_{n+1}(x) \forall x \in X \setminus N_n$ .  $N := \bigcup_{n=1}^{\infty} N_n$ ; Mit 5.1 folgt:  $N$  ist eine Nullmenge.

Dann:  $f_n(x) \leq f_{n+1}(x) \forall x \in X \setminus N \forall n \in \mathbb{N}$ .

$\hat{f}_n := \mathbb{1}_{X \setminus N} \cdot f_n$ ,  $\hat{f}_n$  ist messbar,  $\hat{f}_n \leq \hat{f}_{n+1}$  auf  $X$  für alle  $n \in \mathbb{N}$ .

$f(x) := \lim_{n \rightarrow \infty} \hat{f}_n(x)$  ( $x \in X$ ); 3.5 liefert:  $f$  ist messbar. Weiter:  $\hat{f}_n \rightarrow f$ .

$$\int_X f dx \stackrel{4.6}{=} \lim_{n \rightarrow \infty} \int_X \hat{f}_n dx \stackrel{5.3.(2)}{=} \lim_{n \rightarrow \infty} \int_X f_n dx$$
■