$$Av = (v \cdot w^\top) = v \underbrace{(w^\top v)}_{\in\mathbb{R}} = (w^\top v) \cdot v = \text{Spur}(A)v$$

Weil $v \neq 0$ ist also Spur A EW von A. □

0.18 Übung 18, 06.06.2005

0.18.1 Aufgabe 1

a) $< A, B >= Spur(A^\top B) \overset{(*)}{=} \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} a_{ji} b_{ji} \qquad (**)$

- $Spur\,(((c_{ij}))) = \sum_{i=1}^{n} c_{ii}$
- $A^\top B = ((c_{ij}))$, dann gilt $c_{ii} = \sum_{j=1}^{n} a_{ji} b_{ji}$ wobei $A = ((a_{ij}))$ und $B = ((b_{ij}))$ sein soll.

Aus (**) ergibt sich die Symmetrie von $< \cdot, \cdot >$ ebenso wie die Linearität im ersten Argument direkt.

Für $< A, A > \overset{(**)}{=} \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} a_{ji}^2 \geq 0$ und

$$\begin{aligned} < A, A >= 0 \Leftrightarrow \quad & a_{ji}^2 = 0 \quad , \text{für alle } i, j \in \{1, n\} \\ \Leftrightarrow \quad & a_{ji} = 0 \quad , \text{für alle } i, j \in \{1, n\} \\ \Leftrightarrow \quad & A = 0 \end{aligned}$$

b)

$$||Ax||^2 = \sum_{i=1}^{n} (\underbrace{\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j}_{\text{j-te Komp. des Vektors Ax}})^2 \overset{\text{CSU}}{\leq} \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} (a_{ij})^2 \cdot (\sum_{i=1}^{n} x_i^2) =< A, A > \cdot ||x||^2$$

$\overset{\text{Def}}{=} ||A||^2 ||x||^2 \Rightarrow ||Ax|| \leq ||A|| \cdot ||x||$

0.18.2 Aufgabe 2

Seien $|| \cdot ||_1$ und $|| \cdot ||_2$ die durch $< \cdot, \cdot >_1$ bzw. $< \cdot, \cdot >_2$ induzierten Normen.
Weiter seien $x, y \in V$ mit $||x||_1 = ||y||_1$.

Beweis:

Dann gilt: $< x + y, x - y >_1 =< x, x >_1 + \overbrace{< y, x >_1 - < x, y >_1}^{=0} - < y, y >_1 = ||x||_1^2 - ||y||_1^2 = 0$

Daraus folgt: $0 =< x + y, x - y >_2 = ||x||_2^2 - ||y||_2^2$, also $||x||_2 - ||y||_2$

Sei $x_0 \in V$ mit $||x_0||_1 = 1$ und $x \in V$

$$||x||_1 = ||x||_1 \cdot ||x_0||_1 = || \quad ||x_1||_1 \cdot x_0 \quad ||_1 \Rightarrow ||x||_2 = || \quad ||x||_1 \cdot x_0 \quad ||_2 = ||x||_1 \cdot \underbrace{||x_0||_2}_{=c}$$

Nun gilt aber auch für $x, y \in V$:

$$< x, y >_2 \overset{\text{Vorl.}}{=} \frac{1}{4}(||x+y||_2^2 - ||x-y||_2^2) = \frac{1}{4} \cdot (c'||x+y||_1^2 - c'||x-y||_1^2) = c' < x, y >_1$$

$\square$

0.18.3 Übungsaufgabe 1

Es seien G, G' Gruppen und $\Phi : G \to G'$ und $\Psi : G \to G'$ Gruppenhomomorphismen. Zeigen Sie:

Ist $H \subsetneq G$ eine (echte) Untergruppe von G und gilt:

$$\Phi(a) = \Psi(a) \text{ für alle } a \in G \setminus H$$

so ist $\Phi = \Psi$. **Beweis:** Sei $a \in G \setminus H, b \in H$.

Is $a \circ b \in G \setminus H$? Ja, denn:

$$\left.\begin{matrix} a \circ b \in H \\ b^{-1} \in H \end{matrix}\right\} \underbrace{(a \circ b)}_{\in H} \circ \underbrace{b^{-1}}_{\in H} = a \circ (b \circ b^{-1}) = a \in H\grave{}$$

Also gilt: $\Phi(a \circ b) \overset{\text{Vor}}{=} \Psi(a \circ b) = \Psi(a) \circ' \Psi(b)$

Insgesamt:

$$\Psi(a) \circ' \Phi(b) = \Psi(a) \circ' \Psi(b)$$

$$\Rightarrow \Psi(a)^{-1} \circ \Psi(a) \circ \Phi(b) = \Psi(a)^{-1} \circ \Psi(b) \Leftrightarrow \Phi(b) = \Psi(b)$$

Also gilt: $\Phi = \Psi$

0.18.4 Übungsaufgabe 2

Geben Sie alle Gruppenhomomorphismen von $(\mathbb{Z}_6, +)$ nach $(\mathbb{Z}_7, +)$ an.

$$\mathbb{Z}_m := \{[z]_\sim : z \in \mathbb{Z}\}$$

$$\forall z_1, z_2 \in \mathbb{Z} : z_1 \sim z_2 \Leftrightarrow z_1 - z_2 = k \cdot m \text{ für ein } k \in \mathbb{Z}$$

$[z_1]_\sim + [z_2]_\sim := [z_1 + z_2]_\sim$ (+ ist wohldefiniert)

Sei $z_1' \in [z_1]_\sim$ und $z_2' \in [z_2] \sim$, $z_1' = z_1 + k \cdot m$ und $z_2' = z_2 + l \cdot m$

$$z_1' + z_2']_\sim = [z_1 + km + z_2 + lm]_\sim = [z_1 + z_2 + (k+l) \cdot m]_\sim = [z_1 + z_2]_\sim$$

Für alle $m \in \mathbb{N}$ ist $\mathbb{Z}_m$ eine Gruppe

$$\mathbb{Z}_6 := \{[z]_6 : z \in \mathbb{Z}\} \text{ und } \mathbb{Z}_7 := \{[z]_7 : z \in \mathbb{Z}\}$$

Für alle $m \in \mathbb{N}$ gilt: $(\mathbb{Z}_m, +)$ ist zyklisch.

$$[k]_m = \underbrace{[1]_m + ... + [1]_m}_{k-mal}$$

D.h.: Für jede Gruppe G' gilt: $\Phi : \mathbb{Z}_m \to G'$ ist eindeutig durch $\Phi(1)$ festgelegt.

$$\Phi([0]_m) = e_{G'}$$

Sei $\Phi : \mathbb{Z}_6 \to \mathbb{Z}_6$ Gruppenhomomorphismus

Dann muss gelten: $\Phi([0]_6) = [0]_7$ (Eigenschaften eines Grp.-hom)

$$[3]_6 + [3]_6 = [6]_6 = [0]_6, \text{ d.h. } [3]_6 \text{ ist selbstinvers}$$

$$\Psi(x^{-1} = \Psi(x)^{-1}, \text{ d.h. } x = x^{-1}, \text{ so ist } \Psi(x)^{-1} = \Psi(x)$$

also: selbstinverse Elemente werden auf selbstinverse Elemente abgebildet.

Also gilt: $\Phi([3]_\sim) = [0]_\sim$

$$\Phi([1]_6) = [k]_7 \text{ für ein } k \in \{0, ..., 6\}$$

$$\Phi([3]_6) = \Phi([1]_6+[1]_6+[1]_6) = \Phi([1]_6)+\Phi([1]_6)+\Phi([1]_6) = [k]_7+[k]_7+[k]_7 = [3k]_7 = [3]_7 \cdot [k]_7 = [0]_7$$

$$\overset{\mathbb{Z}_7 \text{ ist Körper}}{\Rightarrow} k = 0, \text{ also } \Phi([1]_6) = [0]_7$$

Also ist: $\Phi : \mathbb{Z}_6 \to \mathbb{Z}_7, [k]_6 \mapsto [0]_7$. Es gibt also nur einen Grp.-homo. von $\mathbb{Z}_6$ nach $\mathbb{Z}_7$. $\square$