

## 7. Quadratische Formen

**Vereinbarung:** In diesem Paragraphen sei  $A$  stets eine reelle und symmetrische  $(n \times n)$ -Matrix,  $(A = A^\top)$ . Also:  $A = (a_{jk})$ , dann  $a_{jk} = a_{kj}$  ( $k, j = 1, \dots, n$ )

### Definition

$Q_A : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  durch  $Q_A(x) := x(Ax^T)$ .  $Q_A$  heißt die zu  $A$  gehörende **quadratische Form**. Für  $x = (x_1, \dots, x_n)$ :

$$Q_A(x) = \sum_{j,k=1}^n a_{jk} x_j x_k$$

### Beispiel

Sei  $f \in C^2(D, \mathbb{R})$ ,  $x_0 \in D$ ,  $h \in \mathbb{R}^n$ ,  $S[x_0, x_0 + h] \subseteq D$ .

$$H_f(x_0) := \begin{pmatrix} f_{x_1 x_1}(x_0) & \cdots & f_{x_1 x_n}(x_0) \\ f_{x_2 x_1}(x_0) & \cdots & f_{x_2 x_n}(x_0) \\ \vdots & & \vdots \\ f_{x_n x_1}(x_0) & \cdots & f_{x_n x_n}(x_0) \end{pmatrix}$$

heißt die **Hesse-Matrix** von  $f$  in  $x_0$ . 4.1  $\implies H_f(x_0)$  ist symmetrisch. Aus 6.7 folgt:

$$f(x_0 + h) = f(x_0) + \text{grad } f(x_0) \cdot h + \frac{1}{2} Q_B(h) \text{ mit } B = H_f(x_0 + \eta h)$$

### Definition

- $A$  heißt **positiv definit** (pd) :  $\iff Q_A(x) > 0 \ \forall x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$   
 $A$  heißt **negativ definit** (nd) :  $\iff Q_A(x) < 0 \ \forall x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$   
 $A$  heißt **indefinit** (id) :  $\iff \exists u, v \in \mathbb{R}^n : Q_A(u) > 0, Q_A(v) < 0$

### Beispiele:

- (1)  $(n = 2)$ ,  $A = \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix}$   
 $Q_A(x, y) := ax^2 + 2bxy + cy^2 \ ((x, y) \in \mathbb{R}^2)$ . Nachrechnen:

$$aQa(x, y) = (ax + by)^2 + (\det A)y^2 \ \forall (x, y) \in \mathbb{R}^2$$

Übung:

- $A$  ist positiv definit  $\iff a > 0, \det A > 0$   
 $A$  ist negativ definit  $\iff a < 0, \det A > 0$   
 $A$  ist indefinit  $\iff \det A < 0$

- (2)  $(n = 3)$ ,  $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$   
 $Q_A(x, y, z) = (x + z)^2 \ \forall (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ .  $Q_A(0, 1, 0) = 0$ .  $A$  ist weder pd, noch id, noch nd.

## 7. Quadratische Formen

- (3) ohne Beweis ( $\rightarrow$  Lineare Algebra).  $A$  symmetrisch  $\implies$  alle **Eigenwerte** (EW) von  $A$  sind  $\in \mathbb{R}$ .
- $A$  ist positiv definit  $\iff$  Alle Eigenwerte von  $A$  sind  $> 0$
- $A$  ist negativ definit  $\iff$  Alle Eigenwerte von  $A$  sind  $< 0$
- $A$  ist indefinit  $\iff \exists$  Eigenwerte  $\lambda, \mu$  von  $A$  mit  $\lambda > 0, \mu < 0$

### Satz 7.1 (Regeln zu definiten Matrizen und quadratischen Formen)

- (1)  $A$  ist positiv definit  $\iff -A$  ist negativ definit
- (2)  $Q_A(\alpha x) = \alpha^2 Q_A(x) \quad \forall x \in \mathbb{R}^n \quad \forall \alpha \in \mathbb{R}$
- (3)  $A$  ist positiv definit  $\iff \exists c > 0 : Q_A(x) \geq c\|x\|^2 \quad \forall x \in \mathbb{R}^n$   
 $A$  ist negativ definit  $\iff \exists c > 0 : Q_A(x) \leq -c\|x\|^2 \quad \forall x \in \mathbb{R}^n$

### Beweis

- (1) Klar
- (2)  $Q_A(\alpha x) = (\alpha x)(A(\alpha x)) = \alpha^2 x(Ax) = \alpha^2 Q_A(x)$
- (3) „ $\Leftarrow$ “: Klar. „ $\Rightarrow$ “:  $K := \{x \in \mathbb{R}^n : \|x\| = 1\} = \partial U_1(0)$  ist beschränkt und abgeschlossen.  $Q_A$  ist stetig auf  $K$ . 3.3  $\implies \exists x_0 \in K : Q_A(x_0) \leq Q_A(x) \quad \forall x \in K$ .  $c := Q_A(x_0)$ .  $A$  positiv definit,  $x_0 \neq 0 \implies Q_A(x_0) = c > 0$ . Sei  $x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ ;  $z := \frac{1}{\|x\|}x \implies z \in K \implies Q_A(z) \geq c \implies c \leq Q_A\left(\frac{1}{\|x\|}x\right) \stackrel{(2)}{=} \frac{1}{\|x\|^2} Q_A(x) \implies Q_A(x) \geq c\|x\|^2$  ■

### Satz 7.2 (Störung von definiten Matrizen)

- (1)  $A$  sei positiv definit (*negativ definit*). Dann existiert ein  $\varepsilon > 0$  mit: Ist  $B = (b_{jk})$  eine weitere symmetrische  $(n \times n)$ -Matrix und gilt: (\*)  $|a_{jk} - b_{jk}| \leq \varepsilon \quad (j, k = 1, \dots, n)$ , so ist  $B$  positiv definit (*negativ definit*).
- (2)  $A$  sei indefinit. Dann existieren  $u, v \in \mathbb{R}^n$  und  $\varepsilon > 0$  mit: ist  $B = (b_{jk})$  eine weitere symmetrische  $(n \times n)$ -Matrix und gilt: (\*)  $|a_{jk} - b_{jk}| \leq \varepsilon \quad (j, k = 1, \dots, n)$ , so ist  $Q_B(u) > 0, Q_B(v) < 0$ . Insbesondere:  $B$  ist indefinit.

### Beweis

- (1)  $A$  sei positiv definit  $\stackrel{7.1}{\implies} \exists c > 0 : Q_A(x) \geq c\|x\|^2 \quad \forall x \in \mathbb{R}^n$ .  $\varepsilon := \frac{c}{2n^2}$ . Sei  $B = (b_{jk})$  eine symmetrische Matrix mit (\*). Für  $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ :  $Q_A(x) - Q_B(x) \leq |Q_A(x) - Q_B(x)| = \left| \sum_{j,k=1}^n (a_{jk} - b_{jk}) x_j x_k \right| \leq \sum_{j,k=1}^n \underbrace{|a_{jk} - b_{jk}|}_{\leq \varepsilon} \underbrace{|x_j|}_{\leq \|x\|} \underbrace{|x_k|}_{\leq \|x\|} \leq \varepsilon \|x\|^2 n^2 = \frac{c}{2n^2} \|x\|^2 n^2 = \frac{c}{2} \|x\|^2$
- (2)  $A$  sei indefinit.  $\exists u, v \in \mathbb{R}^n : Q_A(u) > 0, Q_A(v) < 0$ .  $\alpha := \min \left\{ \frac{Q_A(u)}{\|u\|^2}, -\frac{Q_A(v)}{\|v\|^2} \right\} \implies \alpha > 0$ .  $\varepsilon := \frac{\alpha}{2n^2}$ . Sei  $B = (b_{jk})$  eine symmetrische Matrix mit (\*).  
Wie bei (1)  
 $Q_A(u) - Q_B(u) \leq \varepsilon u^2 \|u\|^2 = \frac{\alpha}{2n^2} n^2 \|u\|^2 = \frac{\alpha}{2} \|u\|^2 \leq \frac{1}{2} \frac{Q_A(u)}{\|u\|^2} \|u\|^2 = \frac{1}{2} Q_A(u) \implies Q_B(u) \geq \frac{1}{2} Q_A(u) > 0$ . Analog:  $Q_B(v) < 0$ . ■