

§ 23.

Homogene lineare Systeme mit konstanten Koeffizienten

In diesem Paragraphen sei A eine reelle konstante $n \times n$ -Matrix. Wir betrachten das homogene System

$$y' = Ay \quad (\text{H})$$

Ohne Beweise geben wir ein „Kochrezept“ an, wie man zu einem Fundamentalsystem von (H) kommt.

Vorbereitungen:

- (1) Es sei stets $p(\lambda) := \det(A - \lambda I)$ das **charakteristische Polynom** von A (I = Einheitsmatrix).
Sei $\lambda_0 \in \mathbb{C}$ ein Eigenwert (EW) von A , dann ist $p(\lambda_0) = 0$. Die Koeffizienten von p sind reell, also ist $p(\overline{\lambda_0}) = 0$ und damit $\overline{\lambda_0}$ ein Eigenwert von A .
- (2) Für $\lambda_0 \in \mathbb{C}$ gilt:

$$\text{Kern}(A - \lambda_0 I) \subseteq \text{Kern}((A - \lambda_0 I)^2) \subseteq \text{Kern}((A - \lambda_0 I)^3) \subseteq \dots$$

Kochrezept:

- (1) Bestimme die **verschiedenen** Eigenwerte $\lambda_1, \dots, \lambda_r$ ($r \leq n$) von A und deren Vielfachheiten k_1, \dots, k_r , also:

$$p(\lambda) = (-1)^n (\lambda - \lambda_1)^{k_1} (\lambda - \lambda_2)^{k_2} \dots (\lambda - \lambda_r)^{k_r}$$

Ordne diese Eigenwerte wie folgt an: $\lambda_1, \dots, \lambda_m \in \mathbb{R}, \lambda_{m+1}, \dots, \lambda_r \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$.

Aus der Liste $\lambda_{m+1}, \dots, \lambda_r$ entferne jedes λ_j mit $\text{Im}(\lambda_j) < 0$. Es bleibt:

$$M := \{\lambda_1, \dots, \lambda_m\} \cup \{\lambda_j : m+1 \leq j \leq r, \text{Im}(\lambda_j) > 0\}$$

- (2) Zu $\lambda_j \in M$ bestimme eine Basis von $V_j := \text{Kern}((A - \lambda_j I)^{k_j})$ wie folgt: Bestimme eine Basis von $\text{Kern}(A - \lambda_j I)$, ergänze diese Basis zu einer Basis von $\text{Kern}((A - \lambda_j I)^2)$, usw.
- (3) Sei $\lambda_j \in M$ und v ein Basisvektor von V_j .

$$y(x) := e^{\lambda_j x} \left(v + \frac{x}{1!} (A - \lambda_j I)v + \frac{x^2}{2!} (A - \lambda_j I)^2 v + \dots + \frac{x^{k_j-1}}{(k_j-1)!} (A - \lambda_j I)^{k_j-1} v \right)$$

Fall 1: $\lambda_j \in \mathbb{R}$.

Dann ist $y(x) \in \mathbb{R}^n \forall x \in \mathbb{R}$ und y ist eine Lösung von (H).

Fall 2: $\lambda_j \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$.

Zerlege y komponentenweise in Real- und Imaginärteil:

$$y(x) := y^{(1)}(x) + iy^{(2)}(x)$$

mit $y^{(1)}(x), y^{(2)}(x) \in \mathbb{R}^n$. Dann sind $y^{(1)}, y^{(2)}$ linear unabhängige Lösungen von (H).

- (4) Führt man (3) für **jedes** $\lambda_j \in M$ und **jeden** Basisvektor von V_j durch, so erhält man ein Fundamentalsystem von (H).

Definition

[...] bezeichne die **lineare Hülle**.

Beispiele:

- (1) Bestimme ein Fundamentalsystem der Gleichung:

$$y' = Ay \tag{*}$$

mit

$$A := \begin{pmatrix} 1 & -4 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Es gilt:

$$p(\lambda) = \det(A - \lambda I) = (\lambda - (1 + 2i))(\lambda - (1 - 2i))$$

$$\lambda_1 = 1 + 2i$$

$$\lambda_2 = 1 - 2i$$

$$k_1 = 1$$

$$k_2 = 1$$

Also ist $M := \{\lambda_1\}$. Aus $\text{Kern}(A - \lambda_1 I) = \left[\begin{pmatrix} 2i \\ 1 \end{pmatrix} \right]$ folgt:

$$\begin{aligned} y(x) &= e^{(1+2i)x} \begin{pmatrix} 2i \\ 1 \end{pmatrix} \\ &= e^x (\cos(2x) + i \sin(2x)) \begin{pmatrix} 2i \\ 1 \end{pmatrix} \\ &= e^x \begin{pmatrix} -2 \sin(2x) \\ \cos(2x) \end{pmatrix} + i e^x \begin{pmatrix} 2 \cos(2x) \\ \sin(2x) \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Sei also:

$$y^{(1)}(x) := e^x \begin{pmatrix} -2 \sin(2x) \\ \cos(2x) \end{pmatrix} \quad y^{(2)}(x) := e^x \begin{pmatrix} 2 \cos(2x) \\ \sin(2x) \end{pmatrix}$$

Dann ist $y^{(1)}, y^{(2)}$ ein Fundamentalsystem von (*).

- (2) Bestimme ein Fundamentalsystem der Gleichung:

$$y' = Ay \tag{*}$$

mit

$$A := \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -2 & 3 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Es gilt:

$$p(\lambda) = \det(A - \lambda I) = -(\lambda - 2)(\lambda - 1)^2$$

$$\lambda_1 = 2 \qquad \lambda_2 = 1$$

$$k_1 = 1 \qquad k_2 = 2$$

Also ist $M := \{\lambda_1, \lambda_2\}$.

$$\lambda_1 = 2: \text{ Aus } \text{Kern}(A - 2I) = \left[\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right] \text{ folgt:}$$

$$y^{(1)}(x) := e^{2x} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\lambda_2 = 1: \text{ Aus } \text{Kern}(A - I) = \left[\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right] \subseteq \left[\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right] = \text{Kern}((A - I)^2) \text{ folgt:}$$

$$y^{(2)}(x) := e^x \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad y^{(3)}(x) := e^x \left(\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + x(A - I) \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right) = e^x \begin{pmatrix} -x \\ -x \\ 1 \end{pmatrix}$$

$y^{(1)}, y^{(2)}, y^{(3)}$ ist ein Fundamentalsystem von $(*)$.

(3) Sei A wie in Beispiel (2). Löse das AWP

$$\begin{cases} y' = Ay \\ y(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \end{cases}$$

Die allgemeine Lösung von $y' = Ay$ lautet:

$$y(x) = c_1 e^{2x} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + c_2 e^x \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + c_3 e^x \begin{pmatrix} -x \\ -x \\ 1 \end{pmatrix} \quad c_1, c_2, c_3 \in \mathbb{R}$$

Es gilt:

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \stackrel{!}{=} y(0) = c_1 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + c_3 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_2 \\ c_1 + c_2 \\ c_1 + c_3 \end{pmatrix}$$

$$\implies c_1 = -1 \qquad c_2 = 1 \qquad c_3 = 2$$

Lösung des AWP:

$$y(x) = -e^{2x} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + e^x \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + 2e^x \begin{pmatrix} -x \\ -x \\ 1 \end{pmatrix}$$

(4) Bestimme die allgemeine Lösung von

$$y' = Ay + \begin{pmatrix} e^x \\ e^x \end{pmatrix} \quad (*)$$

Mit

$$A := \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Bestimme dazu zunächst die allgemeine Lösung von $y' = Ay$. Es gilt:

$$p(\lambda) = \det(A - \lambda I) = (1 - \lambda)(1 + \lambda)$$

$$\begin{array}{ll} \lambda_1 = 1 & \lambda_2 = -1 \\ k_1 = 1 & k_2 = 1 \end{array}$$

Da $\text{Kern}(A - I) = \left[\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right]$ und $\text{Kern}(A + I) = \left[\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right]$ ist, ist

$$y^{(1)}(x) = e^x \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad y^{(2)}(x) = e^{-x} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

ein Fundamentalsystem von $y' = Ay$.

Sei nun $Y(x) := \begin{pmatrix} e^x & 0 \\ 0 & e^{-x} \end{pmatrix}$

Dann ist

$$\begin{aligned} y_s(x) &= Y(x) \int Y(x)^{-1} \begin{pmatrix} e^x \\ e^x \end{pmatrix} dx \\ &= Y(x) \int \begin{pmatrix} e^{-x} & 0 \\ 0 & e^x \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^x \\ e^x \end{pmatrix} dx \\ &= Y(x) \int \begin{pmatrix} 1 \\ e^{2x} \end{pmatrix} dx \\ &= \begin{pmatrix} e^x & 0 \\ 0 & e^{-x} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ \frac{1}{2}e^{2x} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} xe^x \\ \frac{1}{2}e^x \end{pmatrix} \end{aligned}$$

eine spezielle Lösung von (*).

Die allgemeine Lösung von (*) lautet also:

$$y(x) = c_1 e^x \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + c_2 e^{-x} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} xe^x \\ \frac{1}{2}e^x \end{pmatrix} \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}$$