

15.11.06

Das `latexki`-Team

Stand: 18. Oktober 2016

Für  $A \in \mathcal{L}_d$  und  $f : A^d \rightarrow \mathbb{C}$   $f : A \rightarrow [-\infty, \infty]$  beschränkt betrachtet man

$$\tilde{f}(x) = \begin{cases} f(x) & , x \in A \\ 0 & , x \in \mathbb{R}^d \setminus A \end{cases}$$

$f$  heißt integrierbar über  $A$  wenn  $\tilde{f}$  integrierbar ist (über  $\mathbb{R}^d$ ) und wir setzen

$$\int_A f(x) dx = \int_{\mathbb{R}^d} \tilde{f}(x) dx.$$

Beachte: Für integrierbare  $f$  auf  $\mathbb{R}^d$  gilt

$$\int_{\mathbb{R}^d} \chi_A(x) f(x) dx = \int_A f(x) dx.$$

### Bemerkung 1.34

a) Die obigen Def. sind unabhängig von der Darstellung der einfachen Funktionen und der Wahl der approx. Fkt.  $\varphi_k$  (siehe AÄ§, X, 2.1, 2.7, 3.2). Obiges Integral und das in Königsberger II stimmen überein.

b) Sei  $f : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{C}$  messbar. Dann ist  $f$  int'bar  $\iff |f|$  int'bar.

**Beweis** : „ $\Rightarrow$ “verwende zu  $\varphi_n$  aus Def. 1.33 die Folge  $|\varphi_n|$  (AE, X, 2.8).  
 „ $\Leftarrow$ “Es gilt  $f = f_1 - f_2 + if_3 - if_4$  mit  $0 \leq f_k \leq |f|$ . Verwende c). ■

c) Für  $A \in \mathcal{L}_d$  setzt man  $\mathcal{L}^1(A) : \{f : A \rightarrow \mathbb{C} : f \text{ integrierbar}\}$ .

Dann gilt:  $\mathcal{L}^1(A)$  ist VR und  $\|f\|_1 = \int_A |f| dx$  ist Halbnorm auf  $\mathcal{L}^1(A)$ .

(Beachte  $\|\chi_N\|_1 = \lambda(N) = 0$  für jede NM  $N$ .)

Seien  $f, g \in \mathcal{L}^1(A)$ ,  $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$ . Dann:

i)

$$\int_A (\alpha f + \beta g) dx = \alpha \int_A f dx + \beta \int_A g dx$$

ii)

$$\mathbb{K} = \mathbb{R}, f \leq g \implies \int_A f dx \leq \int_A g dx.$$

iii)

$$\left| \int_A f dx \right| \leq \int_A |f| dx \quad (\text{nach b))}$$

iv)  $h$  messbar,  $|h| \leq |f|$  dann  $h \in \mathcal{L}^1(A)$ . Analoge Eigenschaften für:  
 $f : A \rightarrow [0, \infty]$ . (Folgt leicht per Approximation. Siehe AE 2.4, 2.9, 2.11, 3.3)

d) Sei  $\varphi : A \rightarrow [0, \infty]$  messbar mit  $\int_A \varphi dx < \infty$ . Dann ist  $\varphi(x) < \infty$  ffa.  $x \in A$ .

**Beweis** Anm.:  $\varphi(x) = \infty$  für  $x \in B$  mit  $\lambda(B) > 0$ .  $B \subseteq A$  messbar. Dann folgt für alle  $n \in \mathbb{N}$ :  $\int_A \varphi dx \geq \int_A n \cdot \chi_B dx = n \cdot \lambda(B) \rightarrow_{n \rightarrow \infty} \infty$  Wid.! ■

**Theorem 1.35** (Lemma von Fatou, majorisierte Konvergenz) (Beppo Levi)

Seien  $f_n : A \rightarrow [0, \infty]$  messbar ( $n \in \mathbb{N}$ ),  $A \in \mathcal{L}_d$ .

Dann gelten:

a)

$$\int_A \lim_{n \rightarrow \infty} f_n dx \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \int_A f_n dx. (AE, X, 3.7)$$

b)

$$f_n \leq f_{n+1} \implies \int_A \lim_{n \rightarrow \infty} f_n dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_A f_n dx$$

**Theorem 1.36** (majorisierte Konvergenz)

Seien  $f_n, g \in \mathcal{L}^1(A)$ ,  $A \in \mathcal{L}_d$   $f_n(x) \rightarrow f(x)$  ( $n \rightarrow \infty$ ) ffa.  $x \in A$   
und  $|f_n(x)| \leq g(x)$  ffa.  $x \in A$  und alle  $n \in \mathbb{N}$ . Dann gilt:

$$f \in \mathcal{L}^1(A) \text{ und } \|f_n - f\|_1 \rightarrow 0 \text{ (} n \rightarrow \infty \text{) somit } \int_A f_n dx \rightarrow \int_A f dx.$$

**Bemerkung** Majorante bzw. Monotonie sind oben wesentlich.

Bsp: hier steht eine Zeichnung!

$$\implies f_n(x) \rightarrow 0 \quad \forall x \geq 0, n \rightarrow \infty \text{ aber } \|f_n\|_1 = n \rightarrow \infty$$

Für  $A \in \mathcal{L}_d$ ,  $p \in [1, \infty]$  messbare  $f : A \rightarrow \mathbb{C}$  definiert man

$$\|f\|_p = \left( \int_A |f(x)|^p dx \right)^{\frac{1}{p}} \quad p < \infty \text{ (betrachte } |f|^p \text{ ist messbar.)}$$

$$\|f\|_\infty = \inf \{c \geq 0 : |f(x)| \leq c, \text{ für } x \notin N = N(c)\} = \text{ess sup}_{x \in A} |f(x)| \quad (\text{wobei } \inf \emptyset = \infty)$$

$$\mathcal{L}^p(A) = \{f : A \rightarrow \mathbb{C} : \text{messbar und } \|f\|_p < \infty\}$$

Schon gesehen  $\mathcal{L}^1(A)$  ist VR,  $\|\cdot\|_1$  ist Halbnorm.

**Satz 1.37**  $\mathcal{L}^\infty(A)$  ist VR mit Halbnorm  $\|\cdot\|_\infty$

**Beweis**

Seien  $f_j \in \mathcal{L}^\infty(A)$ ,  $|f_j(x)| \leq c_j \quad x \notin N_j, j = 1, 2, \dots, N_j = NM$

Dann:  $|f_1(x) + f_2(x)| \leq c_1 + c_2 \quad \forall x \notin N_1 \cup N_2$ , wobei  $N = N_1 \cup N_2 = NM$ .

$\implies f_1 + f_2 \in \mathcal{L}^\infty(A)$ ,  $\|f_1 + f_2\|_\infty \leq \|f_1\|_\infty + \|f_2\|_\infty$  " $\|\alpha f_1\| = |\alpha| \|f_1\|_\infty$ " zeigt man genau so. ■

**Satz 1.38** Seien  $p \in [1, \infty]$ ,  $A \in \mathcal{L}_d$ ,  $f, g \in \mathcal{L}^p(A)$ ,  $h \in \mathcal{L}^p(A)$ . Dann:

- a)  $fh \in \mathcal{L}^1(A)$ .  $\int_A |fh| dx = \|fh\|_1 \leq \|f\|_p \cdot \|h\|_p$
- b)  $\|f + g\|_p \leq \|f\|_p + \|g\|_p$   
und  $\mathcal{L}^p(A)$  ist VR mit Halbnorm  $\|\cdot\|_p$  (Minkowski).
- c)  $f_n \in \mathcal{L}^p(A)$ ,  $f_n \rightarrow \varphi$  f.ä.  $f \tilde{A}_{\frac{1}{4}}^1 r$  ( $n \rightarrow \infty$ ).  $|f_n| \leq g$  fast überall,  $g \in \mathcal{L}^p(A)$ .  
Dann  $\varphi \in \mathcal{L}^p(A)$ ,  $f_n \rightarrow \varphi$  in  $\mathcal{L}^p(A)$  ( $n \rightarrow \infty$ ).

**Beweis** Für Fall  $p = 1$  ist klar, verwende für Hölder (Bem 1.40)

Sei also  $p \in (1, \infty)$  und  $p' = \frac{p}{p-1}$ .

- a) Da  $f, g$  messbar sind, nur Abschätzung zu zeigen. Wie in (1.26) liefert (1.4)

$$\int_A |f(x)| |h(x)| dx \leq \underbrace{\frac{t^p}{p} \int_A |f(x)|^p dx + \frac{t^{-p'}}{p'} \int_A |h(x)|^{p'} dx}_{= \|f\|_p^p} \quad \forall t > 0$$

$\inf_{t>0}$  liefert Behauptung mit (1.4)

- b)  $|f(x) + g(x)|^p \leq 2^p(|f(x)|^p + |g(x)|^p) \implies f + g \in \mathcal{L}^p(A)$   
 $\underbrace{\|f + g\|_p^p}_{\text{endlich}} = \int_A |f + g|^p dx \leq \int_A |f|^p dx + \int_A |g|^p dx \leq \|f\|_p^p + \|g\|_p^p$   
 $\|f\|_p(\int_A |f + g|^{(p-1)\frac{p}{p-1}} dx)^{\frac{p-1}{p}} \leq \|f\|_p(\int_A |f + g|^{p-1} dx)^{\frac{p-1}{p}} + \|g\|_p(\int_A |f + g|^{p-1} dx)^{\frac{p-1}{p}} = (\|f\|_p + \|g\|_p)\|f + g\|_p^{p-1} \implies$  Behauptung (b).

- c) Haben  $|f_n|^p \leq g^p$  fast überall ( $n \in \mathbb{N}$ )  
 und  $|f_n|^p \rightarrow |f|^p$  fast überall ( $n \rightarrow \infty$ )  
 major.konv.  $\implies |f|^p \in \mathcal{L}^1(A) \implies f \in \mathcal{L}^p(A)$   
 Setze  $h_n = |f_n - f|^p \in \mathcal{L}^1(A) \implies h_n \rightarrow 0$  f.ü. ( $n \rightarrow \infty$ ).  
 $0 \leq h_n \leq 2^p(|f_n|^p + |f|^p) \leq 2^p(g^p + |f|^p) \in \mathcal{L}^1$ . majorisierte Konvergenz:  
 $\|f - f_n\|_p^p = \|h_n\|_1 \rightarrow 0$  ( $n \rightarrow \infty$ ) ■