

## § 10 Der Satz von Fubini

Die Bezeichnungen seien wie in den Paragraphen 8 und 9.

### Satz 10.1 (Satz von Tonelli)

Es sei  $f: \mathbb{R}^d \rightarrow [0, +\infty]$  messbar. (Aus §8 folgt dann, dass  $f^x, f_y$  messbar sind, wobei klar ist, dass  $f^x, f_y \geq 0$  sind.)

Für  $x \in \mathbb{R}^k$ :

$$F(x) := \int_{\mathbb{R}^l} f(x, y) dy = \int_{\mathbb{R}^l} f^x(y) dy$$

Für  $y \in \mathbb{R}^l$ :

$$G(y) := \int_{\mathbb{R}^k} f(x, y) dx = \int_{\mathbb{R}^k} f_y(x) dx$$

Dann sind  $F, G$  messbar und

$$\int_{\mathbb{R}^d} f(z) dz = \int_{\mathbb{R}^k} F(x) dx = \int_{\mathbb{R}^l} G(y) dy$$

also

$$\int_{\mathbb{R}^d} f(x, y) d(x, y) = \int_{\mathbb{R}^k} \left( \int_{\mathbb{R}^l} f(x, y) dy \right) dx = \int_{\mathbb{R}^l} \left( \int_{\mathbb{R}^k} f(x, y) dx \right) dy \quad (*)$$

(iterierte Integrale)

### Beweis

**Fall 1:** Sei  $C \in \mathfrak{B}_d$  und  $f = \mathbf{1}_C$ . Die Behauptungen folgen dann aus 9.1.

**Fall 2:** Sei  $f \geq 0$  und einfach. Die Behauptungen folgen aus Fall 1, 3.6 und 4.5.

**Fall 3 - Der allgemeine Fall:**

Sei  $(f_n)$  zulässig für  $f$ , also:  $0 \leq f_n \leq f_{n+1}$ ,  $f_n$  einfach und  $f_n \rightarrow f$  auf  $\mathbb{R}^d$ . Für  $x \in \mathbb{R}^k$  und  $n \in \mathbb{N}$  gilt:

$$F_n(x) := \int_{\mathbb{R}^l} f_n(x, y) dy$$

und nach Fall 2 ist  $F_n$  messbar.

Aus  $0 \leq f_n \leq f_{n+1}$  folgt  $0 \leq F_n \leq F_{n+1}$  und 4.6 liefert  $F_n \rightarrow F$  auf  $\mathbb{R}^k$ . Dann gilt

$$\int_{\mathbb{R}^d} f(z) dz = \lim \int_{\mathbb{R}^d} f_n(z) dz \stackrel{\text{Fall 2}}{=} \lim \int_{\mathbb{R}^k} F_n(x) dx \stackrel{4.6}{=} \int_{\mathbb{R}^k} F(x) dx$$

Genauso zeigt man

$$\int_{\mathbb{R}^d} (f(z) dz = \int_{\mathbb{R}^l} G(y) dy$$

■

**Satz 10.2 (Satz von Fubini (Version I))**

Es sei  $f: \mathbb{R}^d \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$  integrierbar. Dann existieren Nullmengen  $M \subseteq \mathbb{R}^k$  und  $N \subseteq \mathbb{R}^l$  mit

$$f^x: \mathbb{R}^l \rightarrow \overline{\mathbb{R}} \text{ ist integrierbar für jedes } x \in \mathbb{R}^k \setminus M$$

$$f_y: \mathbb{R}^k \rightarrow \overline{\mathbb{R}} \text{ ist integrierbar für jedes } y \in \mathbb{R}^l \setminus N$$

Setze

$$F(x) := \begin{cases} \int_{\mathbb{R}^l} f^x(y) dy = \int_{\mathbb{R}^l} f(x, y) dy & , \text{ falls } x \in \mathbb{R}^k \setminus M \\ 0 & , \text{ falls } x \in M \end{cases}$$

und

$$G(y) := \begin{cases} \int_{\mathbb{R}^k} f_y(x) dx = \int_{\mathbb{R}^k} f(x, y) dx & , \text{ falls } y \in \mathbb{R}^l \setminus N \\ 0 & , \text{ falls } y \in N \end{cases}$$

Dann sind  $F$  und  $G$  integrierbar und es gelten folgende zwei Gleichungen

$$\int_{\mathbb{R}^d} f(z) dz = \int_{\mathbb{R}^k} F(x) dx = \int_{\mathbb{R}^l} G(y) dy$$

Es gilt also wieder (\*) aus 10.1.

**Beweis**

Wir zeigen nur die Aussagen über  $f^x$ ,  $F$  und die erste der obigen beiden Gleichungen. Genauso zeigt man die Aussagen über  $f_y$ ,  $G$  und die zweite Gleichung.

Aus 8.1 folgt, dass  $f^x$  messbar ist. Definiere

$$\Phi(x) := \int_{\mathbb{R}^l} |f^x(y)| dy = \int_{\mathbb{R}^l} |f(x, y)| dy \quad \text{für } x \in \mathbb{R}^k$$

Nach 10.1 ist  $\Phi$  messbar und

$$\int_{\mathbb{R}^k} \Phi(x) dx = \int_{\mathbb{R}^k} \left( \int_{\mathbb{R}^l} |f(x, y)| dy \right) dx \stackrel{10.1}{=} \int_{\mathbb{R}^d} |f(z)| dz < \infty$$

(denn mit  $f$  ist nach 4.9 auch  $|f|$  integrierbar). Somit ist  $\Phi$  integrierbar. Setze  $M := \{\Phi = \infty\}$  was nach 4.10 eine Nullmenge ist. Also gilt:

$$\int_{\mathbb{R}^l} |f^x(y)| dy = \Phi(x) < \infty \quad \text{für jedes } x \in \mathbb{R}^k \setminus M$$

Das heißt,  $|f^x|$  ist für jedes  $x \in \mathbb{R}^k \setminus M$  integrierbar und es gilt nach 4.9 auch

$$f^x \text{ ist integrierbar für jedes } x \in \mathbb{R}^k \setminus M$$

Aus 9.2 folgt, dass  $M \times \mathbb{R}^l$  eine Nullmenge ist. Setze

$$\tilde{f}(z) := \begin{cases} f(z) & , \text{ falls } z \in \mathbb{R}^d \setminus (M \times \mathbb{R}^l) \\ 0 & , \text{ falls } z \in M \times \mathbb{R}^l \end{cases}$$

Aus 9.3 folgt, dass  $\tilde{f}$  messbar ist. Klar ist, dass fast überall  $f = \tilde{f}$  gilt. Es ist

$$\tilde{f}^x = \left( \mathbb{1}_{(M \times \mathbb{R}^l)^c} \cdot f \right)^x$$

Das heißt  $\tilde{f}^x$  ist integrierbar für jedes  $x \in \mathbb{R}^k$ . Dann gilt

$$F(x) \stackrel{5.3}{=} \int_{\mathbb{R}^l} \tilde{f}(x, y) dy = \underbrace{\int_{\mathbb{R}^l} \tilde{f}_+(x, y) dy}_{=: F^+(x)} - \underbrace{\int_{\mathbb{R}^l} \tilde{f}_-(x, y) dy}_{=: F^-(x)}$$

Nach 10.1 sind  $F^+$  und  $F^-$  messbar. Die Dreiecksungleichung liefert nun

$$|F(x)| \leq \int_{\mathbb{R}^l} |\tilde{f}(x, y)| dy \stackrel{5.3}{=} \int_{\mathbb{R}^l} |f(x, y)| dy = \Phi(x) \quad \text{für } x \in \mathbb{R}^k$$

Also ist  $|F| \leq \Phi$  und  $\Phi$  ist integrierbar. Aus 4.9 folgt, dass  $F$  und  $|F|$  integrierbar sind und dann sind auch  $F^+$  und  $F^-$  integrierbar (zur Übung). Es folgt

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^k} F(x) dx &= \int_{\mathbb{R}^k} F^+(x) dx - \int_{\mathbb{R}^k} F^-(x) dx \\ &= \int_{\mathbb{R}^k} \left( \int_{\mathbb{R}^l} \tilde{f}_+(x, y) dy \right) dx - \int_{\mathbb{R}^k} \left( \int_{\mathbb{R}^l} \tilde{f}_-(x, y) dy \right) dx \\ &\stackrel{10.1}{=} \int_{\mathbb{R}^d} \tilde{f}_+(z) dz - \int_{\mathbb{R}^d} \tilde{f}_-(z) dz \\ &= \int_{\mathbb{R}^d} \tilde{f}(z) dz \\ &= \int_{\mathbb{R}^d} f(z) dz \end{aligned} \quad \blacksquare$$

### Satz 10.3 (Satz von Fubini (Version II))

Sei  $\emptyset \neq X \in \mathfrak{B}_k$ ,  $\emptyset \neq Y \in \mathfrak{B}_l$  und  $D := X \times Y$  (nach §8 ist  $D \in \mathfrak{B}_d$ ). Es sei  $f: D \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$  messbar. Ist  $f \geq 0$  auf  $D$  oder ist  $f$  integrierbar, so gilt

$$\int_D f(x, y) d(x, y) = \int_X \left( \int_Y f(x, y) dy \right) dx = \int_Y \left( \int_X f(x, y) dx \right) dy$$

### Beweis

Definiere  $\tilde{f}$  wie in 9.3 und wende 10.1 beziehungsweise 10.2 an. ■

**Bemerkung:** 10.1, 10.2 und 10.3 gelten natürlich auch für mehr als zwei iterierte Integrale.

### “Gebrauchsanweisung“ für Fubini:

Gegeben:  $\emptyset \neq D \subseteq \mathfrak{B}_d$  und messbares  $f: D \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ . Setze  $f$  auf  $\mathbb{R}^d$  zu einer messbaren Funktion  $\tilde{f}$  fort (zum Beispiel wie in 9.3). Aus 3.8 folgt dann, dass  $\mathbb{1}_D \tilde{f}$  messbar ist und 10.1 liefert

$$\int_{\mathbb{R}^d} |\mathbb{1}_D \tilde{f}| dz = \int_{\mathbb{R}^k} \left( \int_{\mathbb{R}^l} |\mathbb{1}_D \tilde{f}| dy \right) dx = \int_{\mathbb{R}^l} \left( \int_{\mathbb{R}^k} |\mathbb{1}_D \tilde{f}| dx \right) dy$$

Ist eines der drei obigen Integrale endlich, so ist  $|\mathbb{1}_D \tilde{f}|$  integrierbar und damit ist nach 4.9 auch  $\mathbb{1}_D \tilde{f}$  integrierbar.

Dann ist  $f$  integrierbar und es folgt

$$\begin{aligned} \int_D f(z) dz &= \int_{\mathbb{R}^d} (\mathbb{1}_D \tilde{f})(z) dz \\ &\stackrel{10.2}{=} \int_{\mathbb{R}^k} \left( \int_{\mathbb{R}^l} (\mathbb{1}_D \tilde{f})(x, y) dy \right) dx \\ &= \int_{\mathbb{R}^l} \left( \int_{\mathbb{R}^k} (\mathbb{1}_D \tilde{f})(x, y) dx \right) dy \end{aligned}$$

### Beispiel

- (1) Sei  $D = [a_1, b_1] \times [a_2, b_2] \times \cdots \times [a_d, b_d]$  mit  $a_i \leq b_i$  ( $i = 1, \dots, d$ ). Es sei  $f: D \rightarrow \mathbb{R}$  stetig.  $D$  ist kompakt, also gilt  $D \in \mathfrak{B}_d$ . Nach 4.12(2) ist  $f \in \mathfrak{L}^1(D)$  und aus obiger Bemerkung folgt

$$\int_D f(x_1, \dots, x_d) d(x_1, \dots, x_d) = \int_{a_d}^{b_d} \left( \cdots \left( \int_{a_2}^{b_2} \left( \int_{a_1}^{b_1} f(x_1, \dots, x_d) dx_1 \right) dx_2 \right) \cdots \right) dx_d$$

Die Reihenfolge der Integrationen darf beliebig vertauscht werden. Aus 4.13 folgt

$$\int_{a_i}^{b_i} \cdots dx_i = \text{R-} \int_{a_i}^{b_i} \cdots dx_i$$

### Konkretes Beispiel

Sei  $D := [a, b] \times [c, d] \subseteq \mathbb{R}^2$ ,  $f \in C([a, b])$  und  $g \in C([c, d])$ .

$$\begin{aligned} \int_D f(x)g(y) d(x, y) &= \int_c^d \left( \int_a^b f(x)g(y) dx \right) dy \\ &= \int_c^d \left( g(y) \left( \int_a^b f(x) dx \right) \right) dy \\ &= \left( \int_a^b f(x) dx \right) \left( \int_c^d g(y) dy \right) \end{aligned}$$

- (2) Wir rechtfertigen die ‘‘Kochrezepte‘‘ aus Analysis II, Paragraph 15. Seien  $a, b \in \mathbb{R}$  mit  $a < b$  und  $I := [a, b]$ . Weiter seien  $h_1, h_2 \in C(I)$  mit  $h_1 \leq h_2$  auf  $I$  und

$$A := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \in I, h_1(x) \leq y \leq h_2(x)\}$$

Sei  $f: A \rightarrow \mathbb{R}$  stetig. Da  $h_1$  und  $h_2$  stetig sind, ist  $A$  kompakt und somit gilt  $A \in \mathfrak{B}_2$ . Aus 4.12(2) folgt dann  $f \in \mathfrak{L}^1(A)$ . Definiere

$$\tilde{f}(x, y) = \begin{cases} f(x, y) & , \text{ falls } (x, y) \in A \\ 0 & , \text{ falls } (x, y) \notin A \end{cases}$$

Nach 9.3 ist  $\tilde{f}$  messbar. Setze

$$M := \max\{|f(x, y)| : (x, y) \in A\}$$

Dann gilt  $|\tilde{f}| \leq M \cdot \mathbb{1}_A$ . Wegen  $\lambda_2(A) < \infty$  ist  $M \cdot \mathbb{1}_A$  integrierbar und nach 4.9 ist  $|\tilde{f}|$  und damit auch  $\tilde{f}$  integrierbar. Dann ist

$$\begin{aligned} \int_A f(x, y) d(x, y) &= \int_{\mathbb{R}^2} \tilde{f}(x, y) d(x, y) \\ &\stackrel{10.3}{=} \int_{\mathbb{R}} \left( \int_{\mathbb{R}} \tilde{f}(x, y) dy \right) dx \\ &= \int_a^b \left( \int_{h_1(x)}^{h_2(x)} f(x, y) dy \right) dx \end{aligned}$$

Damit ist 15.1 aus Analysis II bewiesen. Genauso zeigt man 15.3.

- (3) Sei  $D := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \geq 1, 0 \leq y \leq \frac{1}{x}\}$  und  $f(x, y) := \frac{1}{x} \cos(xy)$ .  $D$  ist abgeschlossen und somit ist  $D \in \mathfrak{B}_2$ . Außerdem ist  $f$  stetig, also messbar.

**Behauptung:**

$$f \in \mathfrak{L}^1(D) \text{ und } \int_D f(x, y) d(x, y) = \sin(1)$$

**Beweis:** Setze  $X := (0, \infty)$ ,  $Y := [0, \infty)$  und  $Q := X \times Y$ . Sei nun

$$\tilde{f}(x, y) := \frac{1}{x} \cos(xy) \text{ für } (x, y) \in Q$$

$\tilde{f}$  ist eine Fortsetzung von  $f$  auf  $X \times Y$ .  $\tilde{f}$  ist also messbar. Es ist

$$\begin{aligned} \int_D |f| d(x, y) &= \int_Q \mathbb{1}_D \cdot |\tilde{f}| d(x, y) \\ &\stackrel{10.1}{=} \int_X \left( \int_Y \mathbb{1}_D(x, y) \frac{1}{x} |\cos(xy)| dy \right) dx \\ &= \int_1^\infty \left( \int_0^{\frac{1}{x}} \frac{1}{x} |\cos(xy)| dy \right) dx \\ &\leq \int_1^\infty \left( \int_0^{\frac{1}{x}} \frac{1}{x} dy \right) dx \\ &= \int_1^\infty \frac{1}{x^2} dx = 1 < \infty \end{aligned}$$

Also ist  $|f|$  integrierbar und dann nach 4.9 auch  $f$ , also  $f \in \mathfrak{L}^1(D)$ . Dann:

$$\begin{aligned} \int_D f d(x, y) &= \int_X \left( \int_Y \mathbb{1}_D(x, y) \frac{1}{x} \cos(xy) dy \right) dx \\ &\stackrel{\text{wie oben}}{=} \int_1^\infty \left( \int_0^{\frac{1}{x}} \frac{1}{x} \cos(xy) dy \right) dx \\ &= \int_1^\infty \left( \frac{1}{x} \cdot \frac{1}{x} \sin(xy) \Big|_{y=0}^{y=\frac{1}{x}} \right) dx \\ &= \int_1^\infty \frac{1}{x^2} \sin(1) dx \\ &= \sin(1) \end{aligned}$$

**Vorbemerkung:** Sei  $x > 0$ . Für  $b > 0$  gilt

$$\int_0^b e^{-xy} dy = -\frac{1}{x} e^{-xy} \Big|_0^b = -\frac{1}{x} e^{-xb} + \frac{1}{x} \xrightarrow{b \rightarrow \infty} \frac{1}{x}$$

und daraus folgt  $\int_0^\infty e^{-xy} dy = \frac{1}{x}$

**Beispiel**

(4) Sei

$$g := \begin{cases} \frac{\sin x}{x} & , \text{ falls } x > 0 \\ 1 & , \text{ falls } x = 0 \end{cases}$$

$g$  ist stetig auf  $[0, \infty)$ . Aus Analysis 1 ist bekannt, dass  $\int_0^\infty g(x) dx$  konvergent, aber **nicht** absolut konvergent ist. Aus 4.14 folgt, dass  $g \notin \mathcal{L}^1([0, \infty))$

**Behauptung:**  $\int_0^\infty g(x) dx = \frac{\pi}{2}$

**Beweis:** Setze  $X := [0, R]$  mit  $R > 0$ ,  $Y := [0, \infty)$  und  $D := X \times Y$ , sowie

$$f(x, y) := e^{-xy} \sin x \text{ für } (x, y) \in D$$

Es ist  $D \in \mathfrak{B}_2$  und  $f$  stetig, also messbar. Es ist weiter  $f \in \mathcal{L}^1(D)$  (warum?) und

$$\begin{aligned} \int_D f(x, y) d(x, y) &\stackrel{10.3}{=} \int_X \left( \int_Y f(x, y) dy \right) dx \\ &= \int_0^R \left( \int_0^\infty e^{-xy} \sin x dy \right) dx \\ &= \int_0^R \sin x \left( \int_0^\infty e^{-xy} dy \right) dx \\ &\stackrel{\text{Vorbemerkung}}{=} \int_0^R \frac{\sin x}{x} dx =: I_R \end{aligned}$$

Dann gilt

$$I_R \stackrel{10.3}{=} \int_Y \left( \int_X f(x, y) dx \right) dy = \int_0^\infty \underbrace{\left( \int_0^R e^{-xy} \sin x dx \right)}_{=: \varphi(y)} dy$$

Zweimalige partielle Integration liefert (nachrechnen!):

$$\varphi(y) = \frac{1}{1+y^2} - \frac{1}{1+y^2} e^{-yR} (y \sin R + \cos R)$$

Damit gilt

$$I_R = \int_0^\infty \frac{dy}{1+y^2} - \int_0^\infty \frac{1}{1+y^2} e^{-yR} (y \sin R + \cos R) dy$$

Aus Analysis 1 ist bekannt, dass das erste Integral gegen  $\frac{\pi}{2}$  konvergiert und das zweite Integral setzen wir gleich  $\tilde{I}_R$ .

Es gilt

$$\begin{aligned} |\tilde{I}_R| &\leq \int_0^\infty \frac{1}{1+y^2} e^{-yR} (y |\sin R| + |\cos R|) dy \\ &\leq \int_0^\infty \frac{y+1}{y^2+1} e^{-yR} dy \\ &\leq 2 \int_0^\infty e^{-yR} dy \\ &\stackrel{\text{Vorbemerkung}}{=} \frac{2}{R} \end{aligned}$$

Das heißt also  $\tilde{I}_R \rightarrow 0$  ( $R \rightarrow \infty$ ) und damit folgt die Behauptung durch

$$I_R = \frac{\pi}{2} - \tilde{I}_R \rightarrow \frac{\pi}{2} \quad (R \rightarrow \infty)$$

