18. Konvergenzsätze

Definition
Sei (f_k) eine Folge von Funktionen, $f_k : \mathbb{R}^n \to \tilde{\mathbb{R}}$ und $f : \mathbb{R}^n \to \tilde{\mathbb{R}}$.

(1) (f_k) heißt L^1**-konvergent gegen f** $:\iff \|f - f_l\|_1 \to 0 \ (k \to \infty)$

(2) (f_k) heißt eine L^1**-Cauchyfolge** $:\iff \quad \forall \varepsilon > 0 \ \exists k_0 \in \mathbb{N} : \|f_k - f_l\|_1 < \varepsilon \ \forall k, l \geq k_0$.

Ist (f_k) L^1-konvergent gegen f, so ist (f_k) eine L^1-Cauchyfolge: $\|f_l - f_k\|_1 = \|f_l - f + f - f_k\|_1 \geq \|f - f_l\|_1 + \|f - f_k\|_1$.

Satz 18.1 (Satz von Riesz-Fischer)
(f_k) sei eine L^1-Cauchyfolge in $\mathrm{L}(\mathbb{R}^n)$, also $f_k \in \mathrm{L}(\mathbb{R}^n) \ \forall k \in \mathbb{N}$. Dann existiert ein $f \in \mathrm{L}(\mathbb{R}^n)$:

(1) $\|f - f_k\|_1 \to 0 \ (k \to \infty)$

(2) $\displaystyle\int f \mathrm{d}x = \lim_{k\to\infty} \int f_k \mathrm{d}x$

(3) (f_k) enthält eine Teilfolge, die fast überall auf $\mathbb{R}^n$ punktweise gegen f konvergiert.

(Ohne Beweis)

Satz 18.2 (Satz von Beppo Levi)
Sei (f_k) eine Folge in $\mathrm{L}(\mathbb{R})$ mit $f_1 \leq f_2 \leq f_3 \leq \cdots$ auf $\mathbb{R}^n$ und $(\displaystyle\int f_k \mathrm{d}x)$ beschränkt.
$f : \mathbb{R}^n \to \tilde{\mathbb{R}}$ sei definiert durch $f(x) := \lim\limits_{k\to\infty} f_k(x)$. Dann: $f \in L(\mathbb{R}^n)$ und

$$\int f \mathrm{d}x = \lim_{k\to\infty} \int f_k \mathrm{d}x \quad (= \int \lim_{k\to\infty} f_k(x) \mathrm{d}x)$$

Beweis
Für $k \geq l : \|f_k - f_l\|_1 \overset{16.5}{=} \int \underbrace{f_k - f_l}_{\geq 0} \mathrm{d}x = \int f_k \mathrm{d}x - \int f_l \mathrm{d}x = |\int f_k \mathrm{d}x - \int f_l \mathrm{d}x|$. $(\int f_k \mathrm{d}x)$ ist beschränkt und monoton, also konvergent $\implies$ $(\int f_k \mathrm{d}x)$ ist eine Cauchyfolge in $\mathbb{R}$ $\implies$ (f_k) ist eine L^1-Cauchyfolge in $\mathrm{L}(\mathbb{R}^n)$. 18.1 $\implies \exists g \in L(\mathbb{R}^n)$ mit: $\int g \mathrm{d}x = \lim \int f_k \mathrm{d}x$ und (f_k) enthält eine Teilfolge, die fast überall auf $\mathbb{R}^n$ punktweise gegen g konvergiert $\implies$ $f = g$ fast überall auf $\mathbb{R}^n \overset{17.7}{\implies} f \in L(\mathbb{R}^n)$ und $\int f \mathrm{d}x = \int g \mathrm{d}x = \lim \int f_k \mathrm{d}x$. ∎

Definition
Sei $A \subseteq \mathbb{R}^n, (A_k)$ sei eine Folge von Teilmengen von A. (A_k) ist eine **Ausschöpfung von A**: $\iff A_1 \subseteq A_2 \subseteq A_3 \ldots$ und $\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k = A$.

Satz 18.3
Sei $A \subseteq \mathbb{R}^n, (A_k)$ sei eine Ausschöpfung von A und es sei $f \in L(A_k)\ \forall k \in \mathbb{N}$. $f \in L(A) \iff (\int_{A_k} |f| \mathrm{d}x)$ ist beschränkt. In diesem Fall:

$$\int_A f \mathrm{d}x = \lim_{k \to \infty} \int_{A_k} f \mathrm{d}x$$

Beweis
„$\implies$“: $A_k \subseteq A \implies |f|_{A_k} \leq |f|_A \implies \underbrace{\int |f|_{A_k} \mathrm{d}x}_{=\int |f| \mathrm{d}x} \leq \int |f|_A \mathrm{d}x$.

„$\Leftarrow$“: OBdA: $f \geq 0$ auf A $(f = f^+ - f^-)$. Dann: $0 \leq f_{A_1} \leq f_{A_2} \leq f_{A_3} \leq \ldots$. $|\int f_{A_k} \mathrm{d}x| \leq \int |f|_{A_k} \mathrm{d}x = \int_{A_k} |f| \mathrm{d}x \implies (\int f_{A_k} \mathrm{d}x)$ beschränkt. Es gilt: $f_{A_k}(x) \to f_A(x)\ \forall x \in \mathbb{R}^n$. 18.2 $\implies f_A \in L(\mathbb{R}^n)$ und $\int f_A \mathrm{d}x = \lim \int f_{A_k} \mathrm{d}x \implies f \in L(A)$ und $\int_A f \mathrm{d}x = \lim \int_{A_k} f \mathrm{d}x$. ∎

Satz 18.4 (Uneigentliche Lebesgue- und Riemann-Integrale)
Es sei $f : [a, \infty) \to \mathbb{R}$ eine Funktion $(a \in \mathbb{R})$ und es gelte $f \in R[a,t]\ \forall t > a$. Dann: $f \in L([a,\infty)) \iff \int_a^\infty f \mathrm{d}x$ ist **absolut** konvergent. In diesem Fall:

$$\underbrace{\int_{[a,\infty)} f \mathrm{d}x}_{\text{L-Int.}} = \underbrace{\int_a^\infty f \mathrm{d}x}_{\text{uneigentl. R-Int.}}$$

Beweis
Sei (t_k) eine Folge in $[a,\infty)$ mit: $a < t_1 < t_2 < t_3 < \ldots$ und $t_k \to \infty$ $(k \to \infty)$. $A_k := [a, t_k]$ $(k \in \mathbb{N}), A := [a, \infty)$. Für $k \in N : I_k := \int_a^{t_k} f \mathrm{d}x, J_k := \int_a^{t_k} |f| \mathrm{d}x$ (R-Integrale). 16.9 $\implies f, |f| \in L([a, t_k])$ und $I_k = \int_{A_k} f \mathrm{d}x, J_k = \int_{A_k} |f| \mathrm{d}x$. $f \in L(A) \overset{18.3}{\iff} (\int |f| \mathrm{d}x)$ ist beschränkt $\iff (J_k)$ ist beschränkt $\overset{J_1 \subseteq J_2 \subseteq \cdots}{\iff} (J_k)$ konvergent $\iff \int_a^\infty |f| \mathrm{d}x$ konv. In diesem Fall: $\int_A f \mathrm{d}x \overset{16.3}{=} \lim \int_{A_k} f \mathrm{d}x = \lim I_k = \int_a^\infty f \mathrm{d}x$. ∎

Beispiele:

(1) $f(x) := \frac{1}{\sqrt{x}}$; Analysis 1 $\implies \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}} \mathrm{d}x$ abs. konv. $\overset{18.4}{\implies} f \in L([0,1])$. Analysis 1 $\implies \int_0^1 \frac{1}{x} \mathrm{d}x$ div. $\overset{18.4}{\implies} f^2 \notin L([0,1])$.

(2) $f(x) := \begin{cases} \frac{\sin x}{x} & , x > 0 \\ 1 & , x = 0 \end{cases}$

Analysis 1 $\implies \displaystyle\int_0^\infty \frac{\sin x}{x}$ konv., aber nicht abs. konv. 18.4 $\implies$ $f \notin L([0,\infty))$, aber $\displaystyle\int_0^\infty \frac{\sin x}{x}\mathrm{d}x$ existiert im uneigentlichen R-Sinne.

Satz 18.5
$(A_k), (B_k)$ seien Folgen qber Mengen im $\mathbb{R}^n$.

(1) Ist $A_1 \subseteq A_2 \subseteq \ldots$ und $A := \bigcup_{k=1}^\infty A_k$. Dann gilt: A ist qb $\iff$ $(v_n(A_k))$ ist beschränkt ($\iff$ $(v_n(A_k))$ konvergiert).

I. d. Fall: $v_n(A) = \lim_{k\to\infty} v_n(A_k)$.

(2) Für $j \neq k$ sei $B_j \cap B_k$ jeweils eine Nullmenge und $B := \bigcup_{k=1}^\infty B_k$. B ist qb $\iff$ $\sum_{j=1}^\infty v_n(B_j)$ konvergiert.

I. d. Fall: $v_n(B) = \sum_{j=1}^\infty v_n(B_j)$.

Beweis

(1) Folgt aus 18.3 mit $f \equiv 1$

(2) $\tilde{A}_k := B_1 \cup B_2 \cup \ldots \cup B_k$ $(k \in \mathbb{N})$. Dann: $\tilde{A}_1 \subseteq \tilde{A}_2 \subseteq \ldots$ und $B = \bigcup_{k=1}^\infty \tilde{A}_k$. 17.2 $\implies \tilde{A}_k$ ist qb und $v_n(\tilde{A}_k) = v_n(B_1) + \ldots + v_n(B_k)$. B ist qb $\overset{(1)}{\iff}$ $(v_n(\tilde{A}_k))$ konvergiert $\iff \sum_{j=1}^\infty v_n(B_j)$ konvergiert.

I. d. Fall: $v_n(B) \overset{(1)}{=} \lim_{k\to\infty} v_n(\tilde{A}_k) = \sum_{j=1}^\infty v_n(B_j)$. ∎

Satz 18.6 (Satz von Lebesgue (Majorisierte Konvergenz))
Sei $A \subseteq \mathbb{R}^n$ und (f_k) eine Folge in $L(A)$ und (f_k) konv. fast überall auf A punktweise gegen $f : A \to \tilde{\mathbb{R}}$

(1) Ist $F \in L(A)$ und gilt $|f_k| \leq F$ auf A $\forall k \in \mathbb{N}$, so ist $f \in L(A)$ und $\int_A f dx = \lim \int_A f_k dx$.

(2) Ist A qb und ex. ein $M \geq 0$ mit $(f_k) \leq M$ auf A $\forall k \in \mathbb{N}$, so ist $f \in L(A)$ und $\int_A f dx = \lim \int_A f_k dx$.

Beweis

(1) O.B.d.A: $A = \mathbb{R}^n$ (Übergang $f \to f_A$). $\exists$ Nullmenge N mit $F(x) \in \mathbb{R}$ $\forall x \in \mathbb{R}^n \backslash N$ (17.8) *und* $f_k(x) \to f(x)$ $(k \to \infty)$ $\forall x \in \mathbb{R}^n \backslash N$. Dann: $f_k(x) \in \mathbb{R}$ $\forall x \in \mathbb{R}^n \backslash N$ $\forall k \in \mathbb{N}$. Wegen 17.7 ändern wir ab: $f(x) := f_k(x) := F(x) := 0$ $\forall x \in N$ $\forall k \in \mathbb{N}$. Dann: $f_k(x) \to f(x)$ $\forall x \in \mathbb{R}^n$. Für $k, \nu \in \mathbb{N} : g_k(x) := \sup\{f_j(x) : j \geq k\}$; $g_{k,\nu}(x) := \max\{f_k(x), f_{k+1}(x), \ldots, f_{k+\nu}(x)\}$. Dann: $|g_k|, |g_{k,\nu}| \leq F$ auf $\mathbb{R}^n$. 16.6 $\implies g_{k,\nu} \in L(\mathbb{R}^n)$.

Sei $k \in \mathbb{N}$ (fest). $g_{k,1} \leq g_{k,2} \leq g_{k,3} \leq \ldots$ auf $\mathbb{R}^n$, $|\int g_{k,\nu} dx| \leq \int |g_{k,\nu}| dx \leq \int F dx \implies \left(\int g_{k,\nu} dx\right)_{\nu=1}^\infty$ ist beschränkt. Es gilt: $g_{k,\nu}(x) \to g_k(x)$ $(\nu \to \infty)$ $\forall x \in \mathbb{R}^n$. 18.2 $\implies g_k \in$

$L(\mathbb{R}^n)$. Es ist: $g_1 \geq g_2 \geq g_3 \geq \dots$ auf $\mathbb{R}^n$; wie oben: $\left(\int g_k dx\right)$ beschränkt. Weiter gilt: $g_k(x) \to f(x)$ $(k \to \infty)$ $\forall x \in \mathbb{R}^n$.

18.2 $\implies$ $f \in L(\mathbb{R}^n)$ und $\int f dx = \lim \int g_k dx$. $h_k(x) := \inf\{f_j(x) : j \geq k\}$ $(x \in \mathbb{R}^n)$. Analog: $h_k \in L(\mathbb{R}^n)$ und $\int f dx = \lim \int h_k dx$. Es ist: $h_k \leq f_k \leq g_k$ auf $\mathbb{R}^n$ $\implies$ $\int h_k dx \leq \int f_k dx \leq \int g_k dx \overset{k\to\infty}{\implies} \int f dx = \lim \int f_k dx$.

(2) folgt aus (1): A qb $\implies 1 \in L(A) \implies M \in L(A)$, $F := M$. ∎

Beispiel
Für $k \in \mathbb{N}$ sei $f_k : [1,k] \to \mathbb{R}$ def. durch

$$f_k(x) := \frac{k^3 \sin(\frac{x}{k})}{(1+kx^2)^2}$$

Bestimme: $\lim_{k\to\infty} \int_1^k f_k(x)dx$.

$$g_k(x) := \begin{cases} f_k(x), & x \in [1,k] \\ 0, & x > k \end{cases} \quad (x \in [1,\infty))$$

Sei $x \in [1,\infty) \implies \exists k_0 \in \mathbb{N} : x \in [1,k]\ \forall k \geq k_0$. Für $k \geq k_0 : g_k(x) = f_k(x) = \frac{\sin(\frac{x}{k})}{\frac{x}{k}} \cdot \frac{k^2x^2}{(1+kx^2)^2} = \frac{\sin(\frac{x}{k})}{\frac{x}{k}} \cdot \frac{1}{(\frac{1}{kx}+x)^2} \overset{k\to\infty}{\to} \frac{1}{x^2} =: f(x)$.

$|g_k(x)| = \underbrace{\frac{|\sin\frac{x}{k}|}{\frac{x}{k}}}_{\leq 1} \cdot \underbrace{\frac{1}{(\frac{1}{kx}+x)^2}}_{\leq \frac{1}{x^2}} \leq \frac{1}{x^2} = f(x)$. $f_k \in R[1,k] \overset{16.9}{\implies} f_k \in L([1,k]) \overset{17.7}{\implies} g_k \in L([1,\infty))$

und $\int_{[1,\infty)} f dx = \int_1^\infty \frac{1}{x^2} dx = 1$. 18.6 $\implies \underbrace{\int_{[1,\infty)} g_k dx}_{\int_1^k f_k dx} \to \int_{[1,\infty)} f dx = 1$.

Erinnerung: (Ana I, 23.5): $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ sei auf $[a,b]$ db und $f' \in R[a,b]$. Dann: $\int_a^b f' dx = f(b) - f(a)$.

> **Satz 18.7**
> $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ sei db auf $[a,b]$ und f' sei auf $[a,b]$ beschränkt. Dann: $f' \in L([a,b])$ und $\int_{[a,b]} f' dx = f(b) - f(a)$.

Beweis
$M := \sup\{|f'(x)| : x \in [a,b]\}$. $f_k(x) := \begin{cases} \frac{f(x+\frac{1}{k})-f(x)}{\frac{1}{k}}, & x \in [a, b-\frac{1}{k}] \\ 0, & x \in (b-\frac{1}{k}, b] \end{cases}$. Ana I $\implies f_k \in R[a,b] \overset{16.9}{\implies} f \in L([a,b]) : |f(x+\frac{1}{k}) - f(x)| \overset{\text{MWS}}{=} |f'(\xi)|\frac{1}{k} \leq M\frac{1}{k}$ $(x \in [a, b-\frac{1}{k}]) \implies$

$|f_k(x)| \leq M \ \forall x \in [a,b]$. Sei $x \in [a,b) \implies \exists k_0 \in \mathbb{N} : x \in [a, b-\frac{1}{k}] \ \forall k \geq k_0$. Für $k \geq k_0$: $f_k(x) = \frac{f(x+\frac{1}{k})-f(x)}{\frac{1}{k}} \overset{k\to\infty}{\to} f'(x)$. Also: $f_k(x) \to g(x) := \begin{cases} f'(x), & x \in [a,b) \\ 0, & x = b \end{cases} \ \forall x \in [a,b]$.

$18.6 \implies g \in L([a,b]) \overset{17.7}{\implies} f' \in L([a,b])$ und $\int_{[a,b]} f'dx = \int_{[a,b]} gdx \overset{18.6}{=} \lim_{k\to\infty} \int_{[a,b]} f_k dx \overset{16.9}{=} \lim_{k\to\infty} \int_a^b f_k dx$.

$f \in C[a,b] \overset{\text{Ana I}}{\implies} f$ besitzt auf $[a,b]$ eine Stammfunktion F. $\int_a^b f_k(x)dx = k\int_a^{b-\frac{1}{k}} (f(x+\frac{1}{k}) - f(x))dx = k\int_1^{b-\frac{1}{k}} f(x+\frac{1}{k})dx - k\int_a^{b-\frac{1}{k}} f(x)dx \overset{z:=x+\frac{1}{k}}{=} \int_{a+\frac{1}{k}}^b f(z)dz - k\int_a^{b-\frac{1}{k}} f(x)dx = k(F(b) - F(a+\frac{1}{k})) - k(F(b-\frac{1}{k}) - F(a)) = \frac{F(b)-F(b-\frac{1}{k})}{\frac{1}{k}} - \frac{F(a+\frac{1}{k})-F(a)}{\frac{1}{k}} \overset{k\to\infty}{\to} F'(b) - F'(a) = f(b) - f(a)$. ■