

## 8 Asymptotik von Schätzfehlern

### 8.1 Problemstellung

Seien  $X_1, X_2, \dots, X_n \overset{uiv}{\sim} P_\vartheta$ , mit  $\vartheta \in \Theta \subset \mathbb{R}^k$ .

Die Schätzfolge  $\hat{\vartheta}_n = \hat{\vartheta}_n(X_1, \dots, X_n)$  sei konsistent, es gilt also

$$\hat{\vartheta}_n \xrightarrow{P_\vartheta} \vartheta \text{ für } n \rightarrow \infty \quad \forall \vartheta \in \Theta$$

Sei  $(a_n)$  eine reelle Folge mit  $a_n > 0 \quad \forall n$  und  $a_n \rightarrow \infty$  für  $n \rightarrow \infty$ .

Die Folge  $(\hat{\vartheta}_n)_{n \geq 1}$  heißt  $a_n$ -**konsistent**, wenn

$$a_n(\hat{\vartheta}_n - \vartheta) = O_{P_\vartheta}(1) \quad \forall \vartheta \in \Theta.$$

Hierbei bedeutet  $Y_n = O_P(1)$  für eine Folge  $(Y_n)$ , dass für jedes  $\varepsilon > 0$  eine kompakte Menge  $K \subset \mathbb{R}^d$  existiert, so dass  $P(Y_n \in K) \geq 1 - \varepsilon$  für alle  $n \in \mathbb{N}$ .<sup>22</sup>

Typischerweise liegt  $\sqrt{n}$ -Konsistenz vor, d.h. es gilt

$$\sqrt{n}(\hat{\vartheta}_n - \vartheta) = O_{P_\vartheta}(1) \quad \forall \vartheta \in \Theta.$$

Zusätzlich kann man oftmals Aussagen über Konvergenz in Verteilung machen, insbesondere

$$\sqrt{n}(\hat{\vartheta}_n - \vartheta) \xrightarrow{D_\vartheta} \mathcal{N}_k(0, \Sigma(\vartheta)), \quad \vartheta \in \Theta.$$

### 8.2 Multivariater Zentraler-Grenzwert-Satz (ZGWS)

Seien  $Y_1, Y_2, \dots \overset{uiv}{\sim} Y$  mit einer  $\mathbb{R}^d$ -wertigen Zufallsvariablen  $Y$  mit  $E\|Y\|^2 < \infty$ . Mit  $a := EY$  und  $\Sigma := E(Y - a)(Y - a)^T$ , gilt

$$\frac{1}{\sqrt{n}} \left( \sum_{j=1}^n Y_j - na \right) \xrightarrow{D} \mathcal{N}_d(0, \Sigma).$$

---

<sup>22</sup>vergleiche Stochastik II: Straffheit

### 8.3 $\delta$ -Methode

Seien  $Z_1, Z_2, \dots$  d-dimensionale Zufallsvariablen mit

$$\sqrt{n}(Z_n - a) \xrightarrow{D} \mathcal{N}_d(0, \Sigma),$$

mit  $a := (a_1, \dots, a_d) \in \mathbb{R}^d$  und  $\Sigma \in \mathbb{R}^{d \times d}$ .

Sei  $g := (g_1, \dots, g_s)^T : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^s$  differenzierbar und

$$\frac{dg}{da} := \left( \frac{\partial g_j}{\partial a_k} \right)_{\substack{1 \leq j \leq s, \\ 1 \leq k \leq d}}$$

dann gilt

$$\sqrt{n}(g(Z_n) - g(a)) \xrightarrow{D} \mathcal{N}_s \left( 0, \frac{dg}{da} \Sigma \left( \frac{dg}{da} \right)^T \right).$$

Beweis:

Nach der Definition der Differenzierbarkeit gilt

$$\sqrt{n}(g(Z_n) - g(a)) = \underbrace{\frac{dg}{da} \sqrt{n}(Z_n - a)}_{=: U_n} + \underbrace{\|\sqrt{n}(Z_n - a)\| \cdot r(Z_n - a)}_{=: V_n},$$

mit  $r(Z_n - a) \rightarrow 0$  für  $Z_n \rightarrow a$ .

Beachte, dass  $\|\sqrt{n}(Z_n - a)\| \in O_p(1)$ .

Aus  $Z_n \xrightarrow{P} a$  folgt, dass  $r(Z_n - a) \xrightarrow{P} 0$ , und somit

$$V_n \xrightarrow{P} 0.$$

Aus der Voraussetzung folgt mit dem Abbildungssatz weiter

$$U_n \xrightarrow{D} \frac{dg}{da} \cdot T$$

mit  $T \sim \mathcal{N}_d(0, \Sigma)$  und somit

$$U_n \xrightarrow{D} \mathcal{N}_s \left( 0, \frac{dg}{da} \Sigma \left( \frac{dg}{da} \right)^T \right).$$

Die Behauptung folgt schließlich aus dem Lemma von Slutsky.

## 8.4 Asymptotik des Momentenschätzers (vgl. 4.8)

$X_1, \dots, X_n \overset{uiv}{\sim} X$ ,  $X$   $\mathbb{R}^1$ -wertig,  $P^X \in \{P_\vartheta : \vartheta \in \Theta\}$ ,  $\Theta \subset \mathbb{R}^k$ ,

$\vartheta = (\vartheta_1, \dots, \vartheta_k)$

Sei  $m_l := EX^l$ ,  $\hat{m}_l = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i^l$  ( $\hat{=} \bar{X}_n^l$  aus 4.8)

Voraussetzung:

$\vartheta = g(m_1, \dots, m_k)$  mit  $g: \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}^k$

Momentenschätzer:  $\hat{\vartheta} = g(\hat{\vartheta}_1, \dots, \hat{\vartheta}_k)$

Sei

$$Y_j := \begin{pmatrix} X_j \\ \vdots \\ X_j^k \end{pmatrix} \quad Y := \begin{pmatrix} X \\ \vdots \\ X^k \end{pmatrix}, \quad a := EY = \begin{pmatrix} m_1 \\ \vdots \\ m_k \end{pmatrix}$$

$$E \|Y\|^2 < \infty \Leftrightarrow EX^{2k} < \infty$$

$$\begin{aligned} \Sigma &:= E[(Y - a)(Y - a)^T] = (E[(X^i - m_i)(X^j - m_j)^T])_{i,j=(1,\dots,k)} \\ &= (EX^{i+j} - m_i m_j)_{i,j} \\ &= (m_{i+j} - m_i m_j)_{i,j} \end{aligned}$$

8.2  $\Rightarrow$

$$\begin{aligned} \frac{1}{\sqrt{n}} \left( \sum_{j=1}^n Y_j - na \right) &= \frac{1}{\sqrt{n}} \left( \begin{pmatrix} \sum_j X_j \\ \vdots \\ \sum_j X_j^k \end{pmatrix} - n \cdot \begin{pmatrix} m_1 \\ \vdots \\ m_k \end{pmatrix} \right) \\ &= \sqrt{n} \cdot \begin{pmatrix} \hat{m}_1 - m_1 \\ \vdots \\ \hat{m}_k - m_k \end{pmatrix} \xrightarrow{D_\vartheta} \mathcal{N}(0, \Sigma(\vartheta)) \end{aligned}$$

Aus 8.3 folgt: Falls  $EX^{2k} < \infty$  und  $g$  differenzierbar, so gilt:

$$\sqrt{n}(\hat{\vartheta}_n - \vartheta) \xrightarrow{D_\vartheta} \mathcal{N}_k(0, \frac{dg}{da} \Sigma(\vartheta) (\frac{dg}{da})^T)$$

Achtung:  $\Sigma$  hängt von  $m_1, \dots, m_{2k}$  und somit von unbekanntem  $\vartheta$  ab.

(Schreibweise „asymptotisch normalverteilt“:)

$$\sqrt{n}(\hat{\vartheta}_n - \vartheta) \approx \mathcal{N}_k(0, T) \Leftrightarrow \hat{\vartheta}_n \approx \mathcal{N}_k(\vartheta, \frac{T}{n}), \quad \hat{\vartheta}_n \sim AN(\vartheta, \frac{\hat{T}}{n}), \quad \hat{T} = T(\hat{\vartheta}_n)$$

### 8.5 Asymptotik des ML-Schätzers

$X_1, \dots, X_n \overset{uiv}{\sim} f_1(\xi, \vartheta)$  (Dichte bezüglich dominierendem Maß  $\mu$ )

$\vartheta \in \Theta \subset \mathbb{R}^k$ ,  $\Theta$  offen

Regularitätsvoraussetzungen: (a)-(e) aus 5.7- 5.9 seien erfüllt.

Zusätzlich gelte:

$\{\xi : f_1(\xi, \vartheta) > 0\}$  ist unabhängig von  $\vartheta$ !

$\forall i, j, l \in \{1, \dots, k\}$  existiert  $\frac{\partial^3 \log f_1(\xi, \vartheta)}{\partial \vartheta_i \partial \vartheta_j \partial \vartheta_l} = L_{ijl}(\xi, \vartheta)$

$\forall \vartheta \in \Theta \forall \delta > 0 \forall i, j, l \in \{1, \dots, k\}$  existiert eine Funktion  $M_{i,j,l}(\xi) \geq 0$  mit

$$|L_{i,j,l}(\xi, \eta)| \leq M_{i,j,l}(\xi), \quad \|\eta - \vartheta\| \leq \delta$$

und  $E_{\vartheta} M_{i,j,l}(X_1) < \infty$

Sei

$$\mathcal{U}_n(\vartheta) := \sum_{j=1}^n \frac{d}{d\vartheta} \log f_1(X_j, \vartheta), \quad E_{\vartheta} \mathcal{U}_n(\vartheta) = 0$$

$$I_n(\vartheta) = E[\mathcal{U}_n(\vartheta) \mathcal{U}_n(\vartheta)^T] = nI_1(\vartheta)$$

$$W_n(\vartheta) = \frac{d}{d\vartheta^T} \mathcal{U}_n(\vartheta), \quad E_{\vartheta}[W_n(\vartheta)] = -I_n(\vartheta)$$

#### 8.5.1 Satz

Es gelte  $\mathcal{U}_n(\hat{\vartheta}_n) = 0$  (d.h.  $\hat{\vartheta}_n$  ist Lösung der Likelihood-Gleichung  $\mathcal{U}_n(\vartheta) = 0$ ) und  $\hat{\vartheta}_n \xrightarrow{P_{\vartheta}} \vartheta$ ,  $\vartheta \in \Theta$  (d.h.  $(\hat{\vartheta}_n)_n$  ist konsistent). Dann folgt:

$$\sqrt{n}(\hat{\vartheta}_n - \vartheta) \xrightarrow{D_{\vartheta}} \mathcal{N}_k(0, I_1(\vartheta)^{-1})$$

$$\Leftrightarrow \hat{\vartheta}_n \sim AN\left(\vartheta, \frac{I_n^{-1}}{n}\right)$$

Beweisskizze:

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{1}{\sqrt{n}} \mathcal{U}_n(\hat{\vartheta}_n) \\ &\stackrel{\text{Taylor}}{=} \frac{1}{\sqrt{n}} \mathcal{U}_n(\vartheta) + \frac{1}{\sqrt{n}} W_n(\vartheta)(\hat{\vartheta}_n - \vartheta) + \underbrace{\frac{1}{\sqrt{n}} R_n(\vartheta, \hat{\vartheta}_n - \vartheta)}_{z.z.: = o_{P_{\vartheta}}(1)} \\ \Rightarrow \underbrace{\frac{1}{n} W_n(\vartheta)}_{\xrightarrow{P_{\vartheta}^{-f.s.}} -I_1(\vartheta)(SGGZ)} \sqrt{n}(\hat{\vartheta}_n - \vartheta) &= \underbrace{-\frac{1}{\sqrt{n}} \mathcal{U}_n(\vartheta)}_{\xrightarrow{D_{\vartheta}} \mathcal{N}_k(0, I_1(\vartheta)) \text{ (ZGWS 8.2)}} + o_{P_{\vartheta}}(1) \quad (*) \\ &\quad \underbrace{\xrightarrow{D_{\vartheta}} \mathcal{N}_k(0, I_1(\vartheta))} \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \sqrt{n}(\hat{\vartheta}_n - \vartheta) \xrightarrow{D_{\vartheta}} \mathcal{N}_k(0, -I_1(\vartheta)^{-1} I_1(\vartheta) (-I_1(\vartheta)^{-1}))$$

(z.B. Knight, 249 oder Lehmann/Casella, 443-468)<sup>23</sup>

Bemerkung: (asymptotische Linearisierbarkeit des Schätzfehlers)

$$\begin{aligned} (*) \Rightarrow \sqrt{n}(\hat{\vartheta}_n - \vartheta) &= I_1(\vartheta)^{-1} \frac{1}{\sqrt{n}} \mathcal{U}_n(\vartheta) + o_{P_{\vartheta}}(1) \\ &= \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{j=1}^n \underbrace{I_1(\vartheta)^{-1} \frac{d}{d\vartheta} \log f_1(X_j, \vartheta)}_{=: \tilde{l}(X_j, \vartheta)} + o_{P_{\vartheta}}(1) \end{aligned}$$

mit  $E_{\vartheta} \tilde{l}(X_1, \vartheta) = 0$

### 8.5.2 Satz

Unter den obigen Voraussetzungen existiert eine Folge  $\hat{\vartheta}_n = \hat{\vartheta}_n(X_1, \dots, X_n)$

mit:

Ist  $\vartheta_0$  der wahre Parameter, so gilt:

$$\lim P_{\vartheta_0}(\mathcal{U}_n(\hat{\vartheta}_n) = 0, \left| \hat{\vartheta}_n - \vartheta_0 \right| \leq \varepsilon) = 1 \quad \forall \varepsilon > 0$$

#### Korollar

Besitzt die Likelihood-Gleichung  $\mathcal{U}_n(\vartheta) = 0$  für jedes  $n$  eine eindeutige Lösung  $\hat{\vartheta}_n$ , so gilt:

$$\hat{\vartheta}_n \xrightarrow{P_{\vartheta}} \vartheta, \quad \vartheta \in \Theta$$

#### Anmerkung:

(1)  $\{P_{\vartheta} : \vartheta \in \Theta\}$  mit Dichte  $f(x, \vartheta)$  bzgl. dem Maß  $\mu$ . Dann  $\forall \vartheta \neq \vartheta_0$ :

$$\begin{aligned} E_{\vartheta_0} \left[ \log \frac{f(X, \vartheta)}{f(X, \vartheta_0)} \right] &\stackrel{\text{Jensensche Ungl.}}{<} \underbrace{\log E_{\vartheta_0} \left[ \frac{f(X, \vartheta)}{f(X, \vartheta_0)} \right]}_{\int f(x, \vartheta) dx = 1} \\ &= 0 \end{aligned}$$

$$\Leftrightarrow E_{\vartheta_0}[\log f(X, \vartheta_0)] > E_{\vartheta_0}[\log f(X, \vartheta)] \quad \forall \vartheta \neq \vartheta_0$$

$$\text{d.h. } \boxed{\vartheta_0 \text{ maximiert } E_{\vartheta_0}[\log f(X, \vartheta)] \text{ bezüglich } \vartheta!}$$

<sup>23</sup> $o_{P_{\vartheta}}(1)$  bedeutet stochastische Konvergenz gegen 0

- (2) Funktional in (\*) ist nicht auswertbar, da  $\vartheta_0$  unbekannt!

Aber:

$$\frac{1}{n} \underbrace{\sum_{i=1}^n \log f(X_i, \vartheta)}_{l(X, \vartheta), \text{ „Log-Likelihood Funktion“}} \xrightarrow{P_{\vartheta} \text{ f.s.}} E_{\vartheta_0}[\log f(X, \vartheta)] \forall \vartheta \in \Theta$$

Maximierung von  $l(X, \vartheta)$  als „Ersatz“ für (\*).

- (3) f, g  $\mu$ -Dichten:

$$E_f \left[ \log \frac{f(X)}{g(X)} \right] \geq 0$$

$$“=” \Leftrightarrow f = g$$

„Entropie“ zwischen f und g, Kullbach-Leibler-Information von g bezüglich f, Kullbach-Leibler-Abstand zwischen f und g

- (4) Was tun, falls Lösung von  $\mathcal{U}_n(\vartheta) = 0$  nicht eindeutig?

- (i) Oft ist die Folge von globalen Maxima konsistent.  
(Theorie von Wald 1949, Le Cam 1953)
- (ii) Sei  $(\delta_n)$  konsistent. Wähle Folge  $\vartheta_n^*$ , die am nächsten zu  $\delta_n$  liegt  $\Rightarrow (\vartheta_n^*)$  konsistent, 8.5.1 anwendbar.
- (iii) 1-Schritt-MLE verwenden:  
 $(\vartheta_n^{(0)})$  sei  $\sqrt{n}$ -konsistent. Mache einen Newton-Schritt zur Lösung von  $\mathcal{U}_n(\vartheta) = 0$ :

$$\vartheta_n^{(1)} = \vartheta_n^{(0)} - \frac{\mathcal{U}'_n(\vartheta_n^{(0)})}{\mathcal{U}''_n(\vartheta_n^{(0)})}$$

Dann hat  $(\vartheta_n^{(1)})_{n \geq 1}$  dasselbe asymptotische Verhalten wie in 8.5.1.