

- Ist N Poissonprozess und Y_n Markov-Kette mit $P = E + \frac{1}{\lambda}Q$, dann ist $X_t = Y_{N_t}$ Markov-Kette mit Intensitätsmatrix Q .
- μ ist invariantes Maß $\iff \mu Q = 0$
- Ist X_n rekurrent, irreduzibel, dann gilt $\lim_{t \rightarrow \infty} p_{ij}(t) = \frac{1}{m_j q_j}$

Ist (B_t) eine Brownsche Bewegung, dann auch:

- $(-B_t), (B_{a+t} - B_a), (cB_{\frac{t}{c^2}})$
- Zeitumkehr: $(tB_{\frac{1}{t}})$
- Spiegelungsprinzip: Der nach τ gespiegelte Prozess.

Eigenschaften der Brownschen Bewegung:

- $\sup B_t = \infty, \inf B_t = -\infty$, also unendlich oft weit hoch und runter.
- P -fast-sicher nie Lipschitzs-Stetig
- Totalvariation ∞ , quadratische Variation $\xrightarrow{P} t$.
- Stochastischer Kern $P_t(x, \cdot) = \mathcal{N}(x, t)$
- $\mathcal{G}f = \frac{1}{2}f''$
- Ist τ endliche Stoppzeit, dann ist $(B_{\tau+t} - B_\tau)$ verteilt wie (B_t) und unabhängig von \mathcal{F}_τ .
- Identisch verteilt sind: $M_t := \sup_{0 \leq s \leq t} B_s, M_t - B_t, |B_t|$
- P -fast-sicher Nullstellenmenge perfekt

Invarianzprinzip von Dansker: Ist $E\xi_i = 0, 0 < \text{Var}(\xi_i) =: \sigma^2 < \infty, S_k = \sum_{j=1}^k \xi_j, Y_t = S_{[t]} + (t - [t])\xi_{[t]+1}, (X_t^{(n)}) := \frac{1}{\sigma\sqrt{n}}Y_{nt}$, dann konvergieren die Wahrscheinlichkeitsmaße P_n schwach gegen P , wobei P so ist, dass die Projektionen π_t eine Brownsche Bewegung sind.

3 Wichtige Beweismethoden

3.1 Konvergenz gegen stationäre Verteilung

Voraussetzungen: (X_n) irreduzibel, aperiodisch, positiv rekurrent. „Kopplungs-Argument“: (Y_n) Kette mit gleicher Übergangsmatrix, $Y_n \sim \pi, T := \inf\{n \in \mathbb{N} \mid X_n = Y_n\}$.

- Zeige $P(T < \infty) = 1$
- Definiere

$$Z_n := \begin{cases} X_n, & n \leq T \\ Y_n, & n > T \end{cases}$$

- Schätze ab

$$|p_{ij}^{(n)} - \pi(j)| \leq 2 \cdot P_\nu(T > n) \rightarrow P(T = \infty) = 0$$