4. Topologie Übung

Ferdinand Szekeresch

18. Oktober 2016

Aufgabe 1
$(X, \leq), X$ Menge, $\leq$ Ordnungsrelation auf X.
Beh.: $O := \{U \subseteq X | \forall u \in U, x \in X : u \leq x \Rightarrow x \in U\}$ ist Topologie auf X.
Bew.:

- $\emptyset, X$ klar.
- Seien U_i Mengen aus O, $i \in I$ bel. Indexmenge. Dann gilt:
  Sei $u \in \bigcup\limits_{i \in I} u_i, x \in X$ mit $u \leq x \Rightarrow \exists i \in I : u \in U_i$
  $\overset{U_i \in O}{\Rightarrow} x \in U_i \Rightarrow x \in \bigcup\limits_{i \in I} U_i$
  $u \in \bigcap\limits_{i \in I} U_i, x \in X$ mit $u \leq x \Rightarrow \forall i \in I : x \in U_i \Rightarrow x \in \bigcap\limits_{i \in I} U_i$ Beh.:
  Die Ordnungserhaltenden und die stetigen Abbildungen von X nach Y stimmen überein.
  Bew.:

„$\supseteq$": Sei $F : X \to Y$ stetig, $x_1, x_2 \in X$ mit $x_1 \leq x_2$. Zu zeigen: $f(x_1) \leq f(x_2)$.
Betrachte folgende offene Menge in Y:

$$V := \{u \in Y | f(x) \leq y\}$$

Das Urbild $f^{-1}(V) =: U$ ist eine offene Menge in X, da f stetig ist.
$\Rightarrow \forall u \in U \forall x \in X : u \leq x \overset{x_1 \in U}{\Rightarrow} x_1 \leq x_2 x_2 \in U \Rightarrow f(x_2) \in V$
$\Rightarrow \overset{\text{Def. } V}{\Rightarrow} f(x_1) \leq f(x_2)$. Also: f ist abstandserhaltend.

„$\subseteq$": Sei f ordungserhaltend. Sei V eine offene Menge in Y. Zu zeigen: $U := f^{-1}(V)$ ist offen in X.
Seien also $u \in U, x \in X$ mit $u \leq x \overset{f \text{ ordnungserh.}}{\Rightarrow} f(u) \leq f(x)$
Da V offen in Y ist und $f(u) \in V$ ist, nach Definition von „offen"ist auch $f(x) \in V \Rightarrow x \in U$.
Also: U ist offen in X.

$\blacksquare$

Aufgabe 2

Beh.: $\mathrm{SO}(n) := \{A \in \mathbb{R}^{n\times n} | \det(A) = 1 \text{ und } A^T A = E\}$ ist zusammenhängend.
Bew.: $\mathrm{SO}(n)$ ist wegzusammenhängend, denn:
Lineare Algebra: Zu jedem $A \in \mathrm{SO}(n)$ existiert $U \in \mathrm{GL}(n, \mathbb{R})$ mit:

$$A = U \cdot \begin{pmatrix} 1 & & & & 0 \\ & \ddots & & & \\ & & D_{\theta_1} & & \\ & & & \ddots & \\ 0 & & & & D_{\theta_m} \end{pmatrix} \cdot U^{-1}$$

und $D_{\theta_i} = \begin{pmatrix} \cos(\theta_i) & -\sin(\theta_i) \\ \sin(\theta_i) & \cos(\theta_i) \end{pmatrix}$ Somit: Definiere Weg von E nach A durch $\gamma : [0,1] \to \mathrm{SO}(n)$

$$t \mapsto U \cdot \begin{pmatrix} 1 & & & & 0 \\ & \ddots & & & \\ & & D_{\theta_1(t)} & & \\ & & & \ddots & \\ 0 & & & & D_{\theta_m(t)} \end{pmatrix} \cdot U^{-1}$$

mit $\theta_i(t) := t \cdot \theta_i$
Das ist ein Weg von E nach A! Also: $\mathrm{SO}(n)$ ist zusammenhängend (da wegzusammenhängend).
Beh.: $O(n) := \{A \in \mathbb{R}^{n\times n} | A^T A = E\}$ ist nicht zusammenhängend.
Bew.: es gilt: $\det : O(n) \to \{-1, 1\}$ ist stetig (Leibniz-Formel) und surjektiv.
$\Rightarrow O(n) = f^{-1}(-1) \cup f^{-1}(1) \Rightarrow O(n)$ ist nicht zusammenhängend
■

Aufgabe 3

(a) Beh.: Für $U \subseteq \mathbb{R}^n$ offen gilt: U zusammenhängend $\Leftrightarrow$ U wegzusammenhängend.
Bew.:„$\Leftarrow$“klar.
„$\Rightarrow$“: Definiere Äquivalenzrelation $\sim$ auf $\mathbb{R}^n$ durch $x \sim y :\Leftrightarrow x$ kann mit y durch Weg verbunden werden.
Sei $U \neq \emptyset$ zusammenhängende offene Teilmenge von $\mathbb{R}^n$. Zu zeigen: U ist wegzusammenhängend.
Wähle $a \in U$ beliebig und setze $A := \{x \in U | x \sim a\}$. Zu zeigen: $A = U$.
Dazu zeige: A ist offen und abgeschlossen in U bzgl. der Teilraumtopologie.
(Dann folgt $A = U$ oder $A = \emptyset$, weil U zsh. $\Rightarrow A = U$, da $a \in A$ ist.)
Beh.: A ist offen in U.
Bew.: U offen in $\mathbb{R}^n, A \subseteq U \Rightarrow \forall x \in A \exists \varepsilon > 0 B_\varepsilon(x) \subseteq U$
$B_\varepsilon(x)$ ist konvex $\Rightarrow$ jedes $y \in B_\varepsilon(x)$ ist durch einen Weg mit x verbindbar.
$\forall y \in B_\varepsilon(x) : x \sim y$.

$x \in A \Rightarrow x \sim a \overset{\sim \text{ transitiv}}{\Rightarrow} y \sim a \Rightarrow y \in A$. Also: $B_\varepsilon(x) \subseteq A \Rightarrow A$ ist offen.
Beh.: A ist abgeschlossen un U.
bew.: Sei $x \in \bar{A}$, dem Abschluss von A bzgl. der Teilraumtopologie.
$x \in U \Rightarrow \exists \varepsilon > 0 : B_\varepsilon(x) \subseteq U x \in \bar{A} \overset{\text{Blatt 3}}{\Rightarrow} \emptyset \neq (B_\varepsilon(x) \cap U) \cap A = B_\varepsilon(x) \cap A$.
Wie eben gilt für $y \in B_\varepsilon(x) \cap A : y \sim x$.
Wegen $y \in A$ gilt auch $y \sim a \overset{y \text{ transitiv}}{\Rightarrow} x \sim a \rightarrow x \in A \Rightarrow \bar{A} = A \Rightarrow A$ abgeschlossen.
■

(b) $U := \{(x, \sin\left(\frac{1}{x}\right) | x > 0\} \cup \{(0,0)\}$
$U \backslash \{(0,0)\}$ ist zsh., da $U \backslash \{(0,0)\}$ Bild von $(0,1]$ unter der stetigen Abbildung

$$\begin{aligned} (0,1] &\rightarrow \mathbb{R}^2 \\ x &\mapsto (x, \sin\left(\frac{1}{x}\right)) \end{aligned}$$

$(0,0)$ liegt im Abschluss von $U \backslash \{(0,0)\}$, da jede Umgebung von $(0,0)$ einen Punkt aus $U \backslash (0,0)$ enthält.
$\overset{\text{Blatt 3}}{\Rightarrow} U$ ist zusammenhängend.
Ann.: U ist wegzsh. $\Rightarrow$ es ex. ein stetiger Weg $\gamma : [0,1) \rightarrow U, \gamma(0) = (0,0), \gamma(1) = (1,0)$.
Sei $\gamma(t) = (\gamma_1(t), \gamma_2(t)) \Rightarrow \gamma_1$ ist ebenfalls stetig.
Zwischenwertsatz $\Rightarrow \forall y \in (0,1) \exists t \in (0,1) : \gamma(t) = y$
Sei insbes. $y = \frac{1}{n} \Rightarrow \exists t_n \in (0,1) : \gamma_1(t_n) = \frac{1}{n} \Rightarrow \gamma(t_n) = (\gamma_1(t_n), \gamma_2(t_n)) = (\frac{1}{n}, \sin(n))$
γ ist stetig $\Rightarrow \gamma(t_n) \overset{n \to \infty}{\longrightarrow} (0,0) \lightning$

Aufgabe 4
X Top. Raum, $\sim$ Äquivalenzrel. auf X.

(a) $Y := X/\sim$ sei versehen mit der Quotiententopologie.
Beh.: Ist Z weiterer top. Raum und $f : Y \rightarrow Z$, dann ist f stetig $\Leftrightarrow f \circ \pi$ stetig. „$\Rightarrow$“Sei $f : X/\sim \rightarrow Z$ stetig. Dann ist $f \circ \pi$ Verkettung stetiger Abbildungen, also stetig.
„$\Leftarrow$“Sei $f \circ \pi$ stetig und $U \subseteq Z$ offen.
$\Rightarrow \pi^{-1}(f^{-1}(U)) = (f \circ \pi)^{-1}(U)$ offen in $X \Rightarrow f^{-1}$ ist offen in $X/\sim \Rightarrow f$ ist stetig.

(b) Beh.: Durch (a) ist die Quotiententopologie eindeutig bestimmt.
Bew.: Seien J_1, J_2 zwei Topologien auf $X/\sim$, die obige Eigenschaften erfüllen.
Z.z. $J_1 = J_2$.
Betrachte $\mathrm{id}_{X/\sim} : (X/\sim, J_1) \rightarrow (X/\sim, J_2)$. Nach obiger Eigenschaft ist id stetig $\Rightarrow$ alle $U \in J_2$ sind in J_1 enthalten.
$J_1 \subseteq J_2$.
Analog umgekehrt,