

# Kapitel 4.

## Tangentialbündel und Vektorfelder

**Definition 4.1 (Tangentialbündel)** Es sei  $M$  eine glatte Mannigfaltigkeit. Die Menge  $TM = \dot{\bigcup}_{p \in M} T_p M$  zusammen mit der sogenannten kanonischen Projektion  $\pi: TM \rightarrow M, T_p M \ni X_p \mapsto p$  heißt das **Tangentialbündel** von  $M$ .

### 1. Das Tangentialbündel als glatte Mannigfaltigkeit

Es sei  $(\varphi, U)$  eine Karte von  $M$ . Setzt man  $TM|_U = \pi^{-1}(U) = \dot{\bigcup}_{p \in U} T_p M$ , so ist nach Satz 2.9 die Abbildung

$$\bar{\varphi}: TM|_U \rightarrow \underbrace{\varphi(U) \times \mathbb{R}^m}_{\subset \mathbb{R}^{2m}} \quad \underbrace{\sum \xi^i \frac{\partial}{\partial x^i} \Big|_p}_{=X_p \in T_p M} \mapsto (\varphi(p), \xi)$$

bijektiv. Es sei eine Topologie auf  $TM$  dadurch erklärt, dass eine Menge  $V \subset TM$  genau dann offen ist, wenn für alle Karten  $(\varphi, U)$  die Menge  $\bar{\varphi}(V \cap TM|_U)$  offen in  $\mathbb{R}^{2m}$  ist. Diese Topologie ist hausdorffsch und besitzt eine abzählbare Basis, da dies für  $M$  und  $\mathbb{R}^m$  gilt. Nach Konstruktion sind alle  $\bar{\varphi}$  Homöomorphismen. Ist  $\mathcal{A} = \{(\varphi, U)\}$  ein  $C^\infty$ -Atlas von  $M$ , so definiert

$$\bar{\mathcal{A}} = \{(\bar{\varphi}, TM|_U) \mid (\varphi, U) \in \mathcal{A}\}$$

eine glatte Struktur auf  $TM$ . Für Karten  $(\varphi, U), (\psi, V)$  von  $M$  ist der Kartenwechsel  $X_p = \sum \xi^i \frac{\partial}{\partial x^i} \Big|_p$

$$\begin{aligned} \bar{\psi} \circ \bar{\varphi}^{-1}: \varphi(U \cap V) \times \mathbb{R}^m &\rightarrow \psi(U \cap V) \times \mathbb{R}^m \\ (x, \xi) &\mapsto (\psi \circ \varphi^{-1}(x), D(\psi \circ \varphi^{-1})|_x \xi), \end{aligned}$$

glatt. Damit trägt  $TM$  in kanonischer Weise eine glatte Struktur. Darüber hinaus ist die kanonische Projektion  $\pi: TM \rightarrow M$  bezüglich dieser glatten Struktur eine Submersion. (Beweis als Übungsaufgabe)

Ist  $N$  eine weitere glatte Mannigfaltigkeit und  $\Phi: M \rightarrow N$  glatt, so ist  $\Phi_*: TM \rightarrow TN, X_p \mapsto \Phi_{*p} X_p$  eine glatte Abbildung (ebensfalls Übungsaufgabe).

**Definition 4.2** Eine stetige Abbildung  $X: M \rightarrow TM$  mit  $\pi \circ X = \text{id}_M$  heißt **Vektorfeld** auf  $M$ . Ist  $X$  glatt (als Abbildung zwischen glatten Mannigfaltigkeiten), so heißt  $X$  ein **glattes Vektorfeld**.

**Bemerkung** Ist  $(\varphi, U)$  eine Karte von  $M$ , so sind die Abbildungen  $U \rightarrow T M|_U$ ,  $p \mapsto \frac{\partial}{\partial x^i} \Big|_p$  glatte Vektorfelder (in der Karte  $\varphi$  sind diese genau die Abbildungen  $(x, e_i)$ ). Ist  $X$  ein glattes Vektorfeld, so gilt für jedes  $u \in U$ :

$$X_u = \sum \xi^i(u) \frac{\partial}{\partial x^i} \Big|_u,$$

wobei  $\xi(u) = (\xi^1(u), \dots, \xi^m(u))$  eine glatte Abbildung  $U \rightarrow \mathbb{R}^m$  ist. Ein Vektorfeld ist genau dann glatt, wenn für jede Karte  $(\varphi, U)$  die Koeffizientenfunktionen  $\xi^i(u)$  von  $X_u = \sum \xi^i(u) \frac{\partial}{\partial x^i} \Big|_u$  glatte Funktionen sind.

**Beispiel** Betrachte die  $n$ -Sphäre  $S^n \subset \mathbb{R}^{n+1}$  und deren Tangentialraum  $T_p S^n = p^\perp$ . Ein glattes Vektorfeld auf  $S^n$  ist also eine glatte Abbildung  $X: S^n \rightarrow \mathbb{R}^{n+1}$  mit  $X_p \perp p$ . Es sei  $n = 2k - 1$ , dann ist

$$X: S^n \rightarrow \mathbb{R}^{n+1} \quad (x^1, y^1, \dots, x^k, y^k) \mapsto (-y^1, x^1, \dots, -y^k, x^k)$$

ein glattes Vektorfeld auf  $S^n$  ohne eine Nullstelle.

**Bemerkung** Der **Satz vom Igel** besagt gerade: Jedes glatte Vektorfeld auf einer Sphäre gerader Dimension hat eine Nullstelle.

**Bemerkung** Es bezeichne  $\mathcal{V}(M)$  die Menge aller glatten Vektorfelder auf der Mannigfaltigkeit  $M$ . Der sogenannte **Nullschnitt**:

$$\sigma: M \rightarrow T M \quad p \mapsto 0_p \in T_p M$$

ist ein glattes Vektorfeld auf  $M$ .

*Übungsaufgabe:* Zeige dass der Nullschnitt eine Einbettung ist.

**Bemerkung** Sind  $X, Y \in \mathcal{V}(M)$  und ist  $g \in C^\infty(M)$ , so sind die punktweise Summe  $X + Y$  und das Produkt  $gX$  wieder glatte Vektorfelder auf  $M$ . Damit ist  $\mathcal{V}(M)$  ein  $\mathbb{R}$ -Vektorraum beziehungsweise  $C^\infty(M)$ -Modul. Jedes Vektorfeld  $X$  ist eine Derivation von  $C^\infty(M)$ :

$$X(fg)(p) = X(f)(p)g(p) + f(p)X(g)(p) = (gX(f) + fX(g))(p).$$

Es seien  $X, Y \in \mathcal{V}(M)$  glatte Vektorfelder. Die **Lieklammer**  $[X, Y]$  von  $X$  und  $Y$  ist dann durch den folgenden Ausdruck definiert:

$$[X, Y](f)(p) = X_p(Yf) - Y_p(Xf).$$

**Lemma 4.3** Die Lieklammer ist eine schiefsymmetrische  $\mathbb{R}$ -bilineare Abbildung  $\mathcal{V}(M) \times \mathcal{V}(M) \rightarrow \mathcal{V}(M)$ . Es gilt die sogenannte **Jacobiidentität**:

$$[X, [Y, Z]] + [Y, [Z, X]] + [Z, [X, Y]] = 0.$$

**Beweis** Es seien  $X, Y \in \mathcal{V}(M)$ ,  $f, g \in C^\infty(M)$  und  $p \in M$ . Dann gilt:

$$\begin{aligned} [X, Y](fg)[p] &= X_p(Y(f)g + fY(g)) - Y_p(X(f)g + fX(g)) \\ &= X_p(Y(f))g(p) + Y_p(f)X_p(g) + X_p(f)Y(g)(p) + f(p)X_p(Y(g)) \\ &\quad - Y_p(X(f))g(p) - X_p(f)Y_p(g) - Y_p(f)X(g)(p) - f(p)Y_p(X(g)) \\ &= (X_p(Y(f)) - Y_p(X(f)))g(p) + f(p)(X_p(Y(g)) - Y_p(X(g))) \\ &= [X, Y]_p(f)g(p) + f(p)[X, Y]_p(g). \end{aligned}$$

Damit gilt  $[X, Y] \in \mathcal{V}(M)$ . Schiefsymmetrie und  $\mathbb{R}$ -Linearität gelten offensichtlich. Die Jacobiidentität sei als Übungsaufgabe überlassen (Nachrechnen!).  $\square$

**Lemma 4.4** *Es seien  $X, Y \in \mathcal{V}(M)$  glatte Vektorfelder und  $(\varphi, U)$  eine Karte von  $M$ . Sind dann  $X|_U = \sum \xi^i \frac{\partial}{\partial x^i}$ ,  $Y|_U = \sum \eta^i \frac{\partial}{\partial x^i}$  und  $[X, Y]|_U = \sum \zeta^i \frac{\partial}{\partial x^i}$  die entsprechenden lokalen Darstellungen, so gilt:*

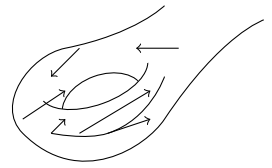
$$\zeta^j = \sum \left( \xi^i \frac{\partial \eta^j}{\partial x^i} - \eta^i \frac{\partial \xi^j}{\partial x^i} \right).$$

Der Beweis ist als Übung überlassen.

## 2. Flüsse

Was haben Vektorfelder mit Differentialgleichungen zu tun? Jedes glatte Vektorfeld  $X$  definiert ein Anfangswertproblem

$$\begin{cases} \dot{\gamma}(t) = X_{\gamma(t)} \\ \gamma(0) = p \end{cases},$$



oder in lokalen Koordinaten:

$$\begin{cases} \dot{\gamma}(t) = \xi(\tilde{\gamma}(t)) \\ \tilde{\gamma}(0) = 0, \text{ falls } \varphi(p) = 0, \end{cases}$$

mit  $\tilde{\gamma} = \varphi \circ \gamma$  für eine Karte  $(\varphi, U)$  um  $p$  und  $X|_U = \sum \xi^i \frac{\partial}{\partial x^i}$ .

**Definition 4.5** *Es sei  $X \in \mathcal{V}(M)$  ein glattes Vektorfeld und  $p \in M$ , sowie  $\mathcal{I} \subset \mathbb{R}$  ein offenes, zusammenhängendes Intervall um 0. Eine glatte Kurve  $\gamma: \mathcal{I} \rightarrow M$  mit*

$$\dot{\gamma}(t) = X_{\gamma(t)} \quad \gamma(0) = p$$

heißt **Integalkurve** oder **Trajektorie** von  $X$  durch  $p$ .

**Bemerkung** Eine Kurve  $\gamma$  ist genau dann Integalkurve von  $X$  durch  $p$ , wenn für jede Karte  $(\varphi, U)$  die Kurve  $\tilde{\gamma} = \varphi \circ \gamma$  eine Lösung des (autonomen) Anfangswertproblems

$$\dot{\tilde{\gamma}} = \xi(\tilde{\gamma}(t)) \quad \tilde{\gamma}(0) = \varphi(p)$$

ist, wobei  $X|_U = \sum \xi^i \frac{\partial}{\partial x^i}$  gelte.

Für jedes  $p \in M$  ist somit (lokal) ein Anfangswertproblem gestellt. Gesucht ist eine „simultane“ Lösung all dieser Anfangswertprobleme, also eine Abbildung  $(t, p) \mapsto \gamma(t, p) = \gamma^t(p)$  mit

$$\begin{cases} \dot{\gamma}^t(p) = X_{\gamma^t(p)} \\ \gamma^0(p) = p \end{cases}.$$

**Satz 4.6 (Lokale Existenz und Eindeutigkeit)** *Es sei  $U \subseteq \mathbb{R}^n$  offen und  $\mathcal{I}_\varepsilon = (-\varepsilon, \varepsilon)$  und  $F: \mathcal{I}_\varepsilon \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$   $C^k$ -differenzierbar. Dann existiert für alle  $x \in U$  eine Umgebung  $V$  von  $x$  in  $U$  und ein  $\delta > 0$ , so dass gilt:*

- (i) Für alle  $x \in V$  existiert eine  $C^{k+1}$ -Lösung  $\gamma_x: \mathcal{I}_\delta \rightarrow V$ , von  $\gamma'_x(t) = F(t, \gamma(t))$  und  $\gamma_x(0) = x$ .
- (ii) Diese Lösung ist lokal eindeutig, das heißt falls  $\tilde{\gamma}_x$  eine weitere Lösung auf  $\mathcal{I}_{\tilde{\delta}}$  ist, so gilt

$$\gamma_x(t) = \tilde{\gamma}_x(t)$$

(für alle  $|t| \leq \min\{\delta, \tilde{\delta}\}$ )

- (iii) Die Abbildung

$$\gamma: \mathcal{I}_\delta \times V \rightarrow U \quad (t, x) \mapsto \gamma_x(t)$$

ist  $C^k$ -differenzierbar.

Zum Beweis siehe Lang: „Differential and Riemannian Manifolds“, 3. Auflage, 1995, Chapter IV.1, p.65[5].

**Korollar 4.7** Es sei  $X \in \mathcal{V}(M)$  und  $p \in M$ . Dann existiert eine offene Umgebung  $U$  von  $p$ , ein  $\varepsilon > 0$  und eine glatte Abbildung:

$$\gamma: (-\varepsilon, \varepsilon) \times U \rightarrow M$$

so dass  $t \mapsto \gamma^t(p)$  eine Integralkurve von  $X$  durch  $p$  ist. (Setze dann  $F(t, x) = \xi(\varphi^{-1}(x))$ )

**Korollar 4.8** Sind  $\gamma_1: \mathcal{J}_1 \rightarrow M$ ,  $\gamma_2: \mathcal{J}_2 \rightarrow M$  Integralkurven eines Vektorfeldes  $X \in \mathcal{V}(M)$  durch  $p$ , dann gilt  $0 \in \mathcal{J}_1 \cap \mathcal{J}_2$  und  $\gamma_1(0) = p = \gamma_2(0)$ . Nach Satz 4.6 (ii) gilt dann  $\gamma_1(t) = \gamma_2(t)$  für alle  $t \in \mathcal{J}_1 \cap \mathcal{J}_2$ . Damit ist

$$\gamma: \mathcal{J}_1 \cup \mathcal{J}_2 \rightarrow M \quad t \mapsto \begin{cases} \gamma_1(t) & t \in \mathcal{J}_1 \\ \gamma_2(t) & t \in \mathcal{J}_2 \end{cases}$$

eine Integralkurve von  $X$  durch  $p$ . Also existiert für jedes  $p \in M$  ein maximaler Definitionsbereich  $\mathcal{I}_p$  für Integralkurven von  $X$  durch  $p$ ; dieser ist offen.

**Definition** Für  $X \in \mathcal{V}(M)$  heißt die, wie im vorigen Korollar definierte, Familie maximaler Integralkurven

$$\gamma(t, p) = \gamma^t(p) \quad (t \in \mathcal{I}_p)$$

der **Fluss** des Vektorfeldes  $X$ . Seinen Definitionsbereich notiert man mit:

$$\mathcal{D}_X = \{(t, p) \in \mathbb{R} \times M \mid t \in \mathcal{I}_p\}.$$

**Satz 4.9** Ist  $X \in \mathcal{V}(M)$  ein glattes Vektorfeld mit Fluss  $\gamma$ , so ist  $\mathcal{D}_X$  eine offene Menge und sein Fluss  $\gamma: \mathcal{D}_X \rightarrow M$  glatt.

**Bemerkung** Es gilt:  $\gamma^0 = \text{id}_M$ . Ist  $(s, p) \in \mathcal{D}_X$ , so gilt

$$\left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} (t \mapsto \gamma^{t+s}(p)) = X_{\gamma^s(p)},$$

also ist  $t \mapsto \gamma^{t+s}(p)$  eine Integralkurve von  $X$  durch  $q = \gamma^s(p)$ . Aus der Eindeutigkeit folgt damit:

$$\gamma^{t+s}(p) = \gamma^t(\gamma^s(p))$$

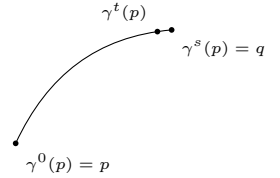
für alle  $s, t$ ,  $s + t \in \mathcal{I}_p$ , ferner gilt  $\mathcal{I}_q = \mathcal{I}_p - s$ . Kurz geschrieben:  $\gamma^{t+s} = \gamma^t \circ \gamma^s$ . Für alle  $t$  ist dann  $\mathcal{D}_t = \{p \in M \mid (t, p) \in \mathcal{D}_X\}$  offen und  $\gamma^t$  ein Diffeomorphismus von  $\mathcal{D}_t$  auf  $\mathcal{D}_{-t}$ , denn  $\gamma^{-t} \circ \gamma^t = \gamma^{-t+t} = \gamma^0 = \text{id}_M = \gamma^t \circ \gamma^{-t}$ . So definiert  $\gamma$  einen „lokalen Gruppenhomomorphismus“ von  $\mathbb{R}$  in  $M^M$ .

**Beweis (von Satz 4.9)** Es sei  $p \in M$  und  $\mathcal{J}_p^+$  die Menge aller  $t \geq 0$ , für welche eine offene Umgebung  $U$  von  $[0, t] \times \{p\}$  in  $\mathbb{R} \times M$  existiert, so dass  $\gamma$  auf  $U$  glatt ist.

- $\mathcal{J}_p^+$  ist ein Intervall,
- $\mathcal{J}_p^+ \subseteq \mathcal{J}_p \cap \mathbb{R}_{\geq 0}$
- $0 \in \mathcal{J}_p^+$
- $\mathcal{J}_p^+$  ist offen in  $\mathbb{R}_{\geq 0}$ .

Es bleibt zu zeigen, dass  $\mathcal{J}_p^+$  abgeschlossen ist.

Es sei  $s \in \overline{\mathcal{J}_p^+} \cap (\mathcal{J}_p \cap \mathbb{R}_{\geq 0})$  und  $q = \gamma^s(p)$ . Dann existieren  $\varepsilon > 0$  und eine Umgebung  $U$  von  $q$ , so dass  $\gamma$  auf  $(-\varepsilon, \varepsilon) \times U$  glatt ist. Es sei  $t \in \mathcal{J}_p^+$  mit  $|s - t| < \varepsilon$  und  $\gamma^t(p) \in U$ . Nach Definition von  $\mathcal{J}_p^+$  existiert eine offene Umgebung  $V$  von  $p$  in  $M$  und  $\delta > 0$ , so dass  $(-\delta, t + \delta) \times V \subseteq \mathcal{D}_X$  gilt und darauf  $\gamma$  glatt ist. Dann ist  $V' = (\gamma^t|_V)^{-1}(U) = \{p' \in V \mid \gamma^t(p') \in U\}$  eine offene Umgebung von  $p$ . Für alle  $p' \in V'$  ist



$$r \mapsto \begin{cases} \gamma^r(p') & \text{falls } r < t + \delta \\ \gamma^{r-t}(\gamma^t(p')) & \text{falls } r \in (t, t + \varepsilon) \end{cases}$$

eine Integralkurve von  $X$  durch  $p'$  (die Flüsse  $\gamma^r$  und  $\gamma^{r-t} \circ \gamma^t$  existieren für die angegebenen Zeiten und stimmen auf dem Schnitt der Intervalle,  $(t, t + \delta)$ , überein). Es gilt also  $(-\delta, t + \varepsilon) \subseteq \mathcal{J}_{p'}$  für alle  $p' \in V'$  und somit  $(-\delta, t + \varepsilon) \times V' \subset \mathcal{D}_X$ . An der obigen Darstellung sieht man, dass  $\gamma$  auf dieser offenen Umgebung von  $[0, s] \times \{p\}$  glatt ist. Also gilt  $s \in \mathcal{J}_p^+$ . Analog argumentiert man für  $\mathcal{J}_p^-$ .  $\square$

**Definition 4.10 (vollständiges Vektorfeld)** Ein Vektorfeld auf  $M$  heißt **vollständig**, wenn der Definitionsbereich seines Flusses gleich  $\mathbb{R} \times M$  ist.

**Bemerkung** Dies ist genau dann der Fall, wenn alle Integralkurven für alle Zeiten existieren. Ist  $X \in \mathcal{V}(M)$  vollständig und bezeichnet  $\gamma$  seinen Fluss, so ist jede  $\gamma^t$  ein Diffeomorphismus von  $M$  mit Inversen  $\gamma^{-t}$ .

**Lemma 4.11** Es sei  $c: \mathcal{I} \rightarrow M$  eine Integralkurve von  $X \in \mathcal{V}(M)$  durch  $p$  und  $t_n \in \mathcal{I}$  eine Folge, so dass die Grenzwerte  $t_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} t_\infty \in \mathbb{R}$  und  $c(t_n) \rightarrow q \in M$  existieren.

Dann gilt  $t_\infty \in \mathcal{I}_p$  und  $\gamma^{t_\infty}(p) = q$ .

**Beweis** Nach Korollar 4.7 existiert eine Umgebung  $U$  von  $q$  und  $\varepsilon > 0$ , so dass auf  $(-\varepsilon, \varepsilon) \times U$  ein lokaler Fluss von  $X$  definiert ist.

Wählt man  $k$  so groß, dass  $t_\infty - t_k < \varepsilon$  gilt, so ist für  $\bar{q} = c(t_k)$  und  $t$  mit  $|t - t_k| < \varepsilon$  der Fluss  $t \mapsto \gamma^{t-t_k}(\bar{q})$  erklärt. Aus Korollar 4.8 folgt, dass  $\gamma^{t_k}(p) = c(t_k) = \bar{q}$  gilt. Damit ist die Kurve

$$\bar{c}(t) = \begin{cases} c(t) & \text{für } t < t_\infty \\ \gamma^{t-t_k}(\bar{q}) & \text{falls } |t - t_k| < \varepsilon \end{cases}$$

eine glatte Fortsetzung von  $c$  und eine Integralkurve von  $X$  durch  $p$ . Insbesondere gilt  $t_\infty < t_k + \varepsilon$ , also  $t_\infty \in \mathcal{I}_p$  und

$$\gamma^{t_\infty}(p) = \gamma^{t_\infty - t_k}(\gamma^{t_k}(p)) = \bar{c}(t_\infty) = \lim_{t \rightarrow t_\infty} c(t) = q. \quad \square$$

**Bemerkung 4.12 (Moral des obigen Lemmas)** Integralkurven existieren für alle Zeiten oder aber sie verlassen jedes Kompaktum.

**Korollar 4.13** Hat  $X \in \mathcal{V}(M)$  kompakten Träger, so ist  $X$  vollständig. Ist  $M$  kompakt, so ist jedes glatte Vektorfeld vollständig.

**Beispiel** Das Vektorfeld  $X: \mathbb{R} \rightarrow T\mathbb{R}, t \mapsto t^2 \frac{\partial}{\partial t}$  ist nicht vollständig, denn  $c(t) = (1-t)^{-1}$  ist die Integralkurve von  $X$  durch 1.

$$\begin{array}{ccc} TM & \xrightarrow{\Phi_*} & TN \\ X \uparrow & & \uparrow \Phi_* X \\ M & \xleftarrow{\Phi^{-1}} & N \end{array}$$

Ist  $\Phi: M \rightarrow N$  glatt, so ist  $\Phi_*: TM \rightarrow TN$  glatt. Ist  $\Phi$  ein Diffeomorphismus, so ist  $\Phi^{-1}$  glatt und  $q \mapsto (\Phi_* X)_q = \Phi_{*\Phi^{-1}(q)} X_{\Phi^{-1}(q)}$  ist ein glattes Vektorfeld auf  $N$ . Es gilt für  $f \in C^\infty(N)$ :

$$(\Phi_* X)(f)(q) = X_{\Phi^{-1}(q)}(f \circ \Phi).$$

**Lemma 4.14** Es sei  $X \in \mathcal{V}(M)$ ,  $\Phi: M \rightarrow N$  ein Diffeomorphismus und es bezeichne  $\gamma$  den Fluss von  $X$  und  $\mathcal{D}_X$  seinen (maximalen) Definitionsbereich. Dann ist

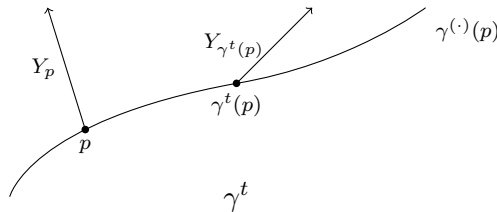
$$\{(t, q) \mid (t, \Phi^{-1}(q)) \in \mathcal{D}_X\} \rightarrow N \quad (t, q) \mapsto \Phi \circ \gamma^t \circ \Phi^{-1}(q)$$

der Fluss von  $\Phi_* X$ .

**Beweis** Für  $f \in C^\infty(N)$  und  $q \in N$  gilt

$$\begin{aligned} (\Phi_* X)(f)(q) &= X_{\Phi^{-1}(q)}(f \circ \Phi) \\ &= \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} (f \circ \Phi)(\gamma^t(\Phi^{-1}(q))) \\ &= \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} f(\underbrace{\Phi \circ \gamma^t \circ \Phi^{-1}(q)}_{\text{Fluss von } \Phi_* X}). \end{aligned} \quad \square$$

*Erinnerung:*  $\frac{1}{t}(F(x+tv) - F(x))$  oder für  $c$  mit  $c(0) = x, \dot{c}(0) = v$ :  $\frac{1}{t}(F(c(t)) - F(x))$ . Nun seien  $X, Y \in \mathcal{V}(M)$ .



Im Allgemeinen liegen  $Y_{\gamma^t(p)}$  und  $Y_p$  in unterschiedlichen Tangentialräumen. Da aber  $\gamma^t$  (für kleine Zeiten) ein (lokaler) Diffeomorphismus ist, gilt

$$(\gamma_*^{-t}Y)_p := \gamma_{*\gamma^t(p)}^{-t}(Y_{\gamma^t(p)}) \in T_p M.$$

Die Differenz  $(\gamma_*^{-t}Y)_p - Y_p$  ist also wohldefiniert.

**Definition 4.15** Es seien  $X, Y \in \mathcal{V}(M)$  und  $\gamma$  der Fluss von  $X$ . Das durch

$$p \mapsto \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{t} \left( (\gamma_*^{-t}Y)_p - Y_p \right)$$

definierte glatte Vektorfeld heißt **Lieableitung** von  $Y$  längs  $X$ . Man schreibt  $\mathcal{L}_X Y$ .

Die Kurve  $(\gamma_*^{-t}Y)_p$  in  $T_p M$  ist glatt und  $(\mathcal{L}_X Y)_p = \frac{d}{dt} \Big|_{t=0} (\gamma_*^{-t}Y)_p$ . Dass  $\mathcal{L}_X Y$  glatt ist, rechnet man entweder in lokalen Koordinaten nach oder benutzt den folgenden Satz.

**Satz 4.16** Für  $X, Y \in \mathcal{V}(M)$  gilt:

$$\mathcal{L}_X Y = [X, Y].$$

**Beweis** Es seien  $X, Y \in \mathcal{V}(M)$ ,  $f \in \mathbb{C}^\infty(M)$  und  $\gamma$  der Fluss von  $X$ .

Es ist zu zeigen:  $[X, Y]_p(f) = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} ((\gamma_*^{-t}Y)_p(f) - Y_p(f))$ . Dazu sei (um  $(0, p)$ )

$$h(t, q) = f(\gamma^{-t}(q)) - f(q) \quad \text{und} \quad g_t(q) = \int_0^1 h'(ts, q) ds.$$

Dann gilt:

$$tg_t(q) = \int_0^1 h'(ts, q)(t) ds = \int_0^t h' = h(t, q) - h(0, q) = f(\gamma^{-t}(q)) - f(q)$$

also  $f \circ \gamma^t = f + tg_t$  und

$$g_0(q) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{tg_t(q)}{t} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{t} (f(\gamma^{-t}(q)) - f(q)) = \frac{d}{dt} \Big|_{t=0} (f \circ \gamma^{-t})(q) = -X_q(f)$$

Betrachte:

$$(\gamma_*^{-t}Y)_p(f) = Y(f \circ \gamma^{-t})(\gamma^t(p)) = Y(f)(\gamma^t(p)) + tY_{g_t}(\gamma^t(p)).$$

Es folgt:

$$\begin{aligned} (\mathcal{L}_X Y)_q(f) &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{t} ((\gamma_*^{-t}Y)_p(f) - Y_p(f)) \\ &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{t} (Yf(\gamma^t(p)) - Y_p(f)) + \lim_{t \rightarrow 0} Y_{g_t}(\gamma^t(p)) \\ &= \frac{d}{dt} \Big|_{t=0} (Yf \circ \gamma^t)(p) + Yg_0(p) \\ &= X_p(Yf) - Y_p(Xf) = [X, Y]_p(f). \end{aligned} \quad \square$$

**Satz 4.17** Die Lieklammer  $[X, Y]$  zweier Vektorfelder  $X, Y \in \mathcal{V}(M)$  verschwindet genau dann, wenn ihre Flüsse (lokal) kommutieren, i.e.

$$\gamma_X^s \circ \gamma_Y^t = \gamma_Y^t \circ \gamma_X^s.$$

Der Beweis sei als Übungsaufgabe überlassen.

Es seien  $X, Y \in \mathcal{V}(M)$  und  $\Phi: M \rightarrow N$ . Bezeichnet  $\gamma$  den Fluss von  $X$ , so gilt

$$\begin{aligned} [\Phi_*X, \Phi_*Y] &= \mathcal{L}_{\Phi_*X}\Phi_*Y \\ &= \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} \left( \Phi_* \circ \gamma_*^{-t} \circ \Phi_*^{-1}(\Phi_*Y) \right) \\ &= \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} \left( \Phi_* \circ \gamma_*^{-t}Y \right) = \Phi_* \left( \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} \gamma_*^{-t}Y \right) \\ &= \Phi_*(\mathcal{L}_XY) = \Phi_*[X, Y]. \end{aligned}$$

Man erhält einen alternativen Beweis der Jacobiidentität.

**Beweis** Es seien  $X, Y, Z \in \mathcal{V}(M)$  und  $\gamma$  der Fluss von  $X$ . Dann gilt:

$$\begin{aligned} [X, [Y, Z]] &= \mathcal{L}_X[Y, Z] = \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} \left( \gamma_*^{-t}[Y, Z] \right) \\ &= \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} [\gamma_*^{-t}Y, \gamma_*^{-t}Z] \\ &= \left[ \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} \gamma_*^{-t}Y, Z \right] + \left[ Y, \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} \gamma_*^{-t}Z \right] \\ &= [\mathcal{L}_XY, Z] + [Y, \mathcal{L}_XZ] \\ &= [[X, Y], Z] + [Y, [X, Z]] \\ &= -[Z, [X, Y]] - [Y, [Z, X]]. \end{aligned} \quad \square$$