

## § 1.

### Der Raum $\mathbb{R}^n$

Sei  $n \in \mathbb{N}$ .  $\mathbb{R}^n = \{(x_1, \dots, x_n) : x_1, \dots, x_n \in \mathbb{R}\}$  ist mit der üblichen Addition und Skalarmultiplikation ein reeller Vektorraum.

$e_1 := (1, 0, \dots, 0)$ ,  $e_2 := (0, 1, 0, \dots, 0)$ , ...,  $e_n := (0, \dots, 0, 1) \in \mathbb{R}^n$ .

#### Definition

Seien  $x = (x_1, \dots, x_n)$ ,  $y = (y_1, \dots, y_n) \in \mathbb{R}^n$

- (1)  $x \cdot y := xy := x_1y_1 + \dots + x_ny_n$  heißt das **Skalar-** oder **Innenprodukt** von  $x$  und  $y$ .
- (2)  $\|x\| = (x \cdot x)^{\frac{1}{2}} = (x_1^2 + \dots + x_n^2)^{\frac{1}{2}}$  heißt die **Norm** oder **Länge** von  $x$ .
- (3)  $\|x - y\|$  heißt der **Abstand** von  $x$  und  $y$ .

#### Beispiele:

- (1)  $\|e_j\| = 1$  ( $j = 1, \dots, n$ )
- (2)  $n = 3 : \|(1, 2, 3)\| = (1 + 4 + 9)^{\frac{1}{2}} = \sqrt{14}$

#### Beachte:

- (1)  $x \cdot y \in \mathbb{R}$
- (2)  $\|x\|^2 = x \cdot x$

#### Satz 1.1 (Rechenregeln zur Norm)

Seien  $x, y, z \in \mathbb{R}^n$ ,  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ ,  $x = (x_1, \dots, x_n)$ ,  $y = (y_1, \dots, y_n)$

- (1)  $(\alpha x + \beta y) \cdot z = \alpha(x \cdot z) + \beta(y \cdot z)$ ,  $x(\alpha y + \beta z) = \alpha(xy) + \beta(xz)$
- (2)  $\|x\| \geq 0$ ;  $\|x\| = 0 \iff x = 0$
- (3)  $\|\alpha x\| = |\alpha| \|x\|$
- (4)  $|x \cdot y| \leq \|x\| \|y\|$  **Cauchy-Schwarzsche Ungleichung (CSU)**
- (5)  $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$
- (6)  $|\|x\| - \|y\|| \leq \|x - y\|$
- (7)  $|x_j| \leq \|x\| \leq |x_1| + |x_2| + \dots + |x_n|$  ( $j = 1, \dots, n$ )

**Beweis**

(1), (2), (3) nachrechnen.

(6) Übung.

(4) O.B.d.A:  $y \neq 0$  also  $\|y\| > 0$ .  $a := x \cdot x = \|x\|^2$ ,  $b := xy$ ,  $c := \|y\|^2 = y \cdot y$ ,  $\alpha := \frac{b}{c}$ .  $0 \leq \sum_{j=1}^n (x_j - \alpha y_j)^2 = \sum_{j=1}^n (x_j^2 - 2\alpha x_j y_j + \alpha^2 y_j^2) = a - 2\alpha b + \alpha^2 c = a - 2\frac{b}{c}b + \frac{b^2}{c^2}c = a - \frac{b^2}{c} \implies 0 \leq ac - b^2 \implies b^2 \leq ac \implies (xy)^2 \leq \|x\|^2 \|y\|^2$ .

(5)  $\|x+y\|^2 = (x+y)(x+y) \stackrel{(1)}{=} x \cdot x + 2xy + y \cdot y = \|x\|^2 + 2xy + \|y\|^2 \leq \|x\|^2 + 2|xy| + \|y\|^2 \stackrel{(4)}{\leq} \|x\|^2 + 2\|x\|\|y\| + \|y\|^2 = (\|x\| + \|y\|)^2$ .

(7)  $|x_j|^2 = x_j^2 \leq x_1^2 + \dots + x_n^2 = \|x\|^2 \implies 1. \text{ Ungleichung; } x = x_1 e_1 + \dots + x_n e_n \implies \|x\| = \|x_1 e_1 + \dots + x_n e_n\| \stackrel{(5)}{\leq} \|x_1 e_1\| + \dots + \|x_n e_n\| = |x_1| + \dots + |x_n|$  ■

Seien  $p, q, l \in \mathbb{N}$ . Es sei  $A$  eine reelle  $p \times q$ -Matrix.

$$A = \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \dots & \alpha_{1q} \\ \vdots & & \vdots \\ \alpha_{p1} & \dots & \alpha_{pq} \end{pmatrix} \quad \|A\| := \left( \sum_{j=1}^p \sum_{k=1}^q \alpha_{jk}^2 \right)^{\frac{1}{2}} \quad \text{Norm von } A$$

Sei  $B$  eine reelle  $q \times l$ -Matrix ( $\implies AB$  existiert). **Übung:**  $\|AB\| \leq \|A\| \|B\|$

Sei  $x = (x_1, \dots, x_q) \in \mathbb{R}^q$ .  $Ax := A \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_q \end{pmatrix}$  (**Matrix-Vektorprodukt**).

Es folgt:

$$\|Ax\| \leq \|A\| \|x\|$$

**Definition**

Sei  $x_0 \in \mathbb{R}^n$ ,  $\delta > 0$ ,  $A, U \subseteq \mathbb{R}^n$ .

(1)  $U_\delta(x_0) := \{x \in \mathbb{R}^n : \|x - x_0\| < \delta\}$  heißt  $\delta$ -Umgebung von  $x_0$  oder **offene Kugel** um  $x_0$  mit Radius  $\delta$ .

(2)  $U$  ist eine **Umgebung** von  $x_0 : \iff \exists \delta > 0 : U_\delta(x_0) \subseteq U$ .

(3)  $A$  heißt **beschränkt** :  $\iff \exists c \geq 0 : \|a\| \leq c \forall a \in A$ .

(4)  $x_0 \in A$  heißt ein **innerer Punkt** von  $A : \iff \exists \delta > 0 : U_\delta(x_0) \subseteq A$ .  
 $A^\circ := \{x \in A : x \text{ ist innerer Punkt von } A\}$  heißt das **Innere** von  $A$ . Klar:  $A^\circ \subseteq A$ .

(5)  $A$  heißt **offen** :  $\iff A = A^\circ$ . Zur Übung:  $A^\circ$  ist offen.

**Beispiele:**

(1) offene Kugeln sind offen,  $\mathbb{R}^n$  ist offen,  $\emptyset$  ist offen.

(2)  $A = \{x \in \mathbb{R}^n : \|x - x_0\| \leq \delta\}$ ,  $A^\circ = U_\delta(x_0)$

(3)  $n = 2$ :  $A = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^n : x_2 = x_1^2\}$ ,  $A^\circ = \emptyset$

**Definition**

$A \subseteq \mathbb{R}^n$

- (1)  $x_0 \in \mathbb{R}^n$  heißt ein **Häufungspunkt** (HP) von  $A : \iff \forall \delta > 0 : (U_\delta(x_0) \setminus \{x_0\}) \cap A \neq \emptyset$ .  
 $\mathcal{H}(A) := \{x \in \mathbb{R}^n : x \text{ ist Häufungspunkt von } A\}$ .
- (2)  $x_0 \in \mathbb{R}^n$  heißt ein **Berührungspunkt** (BP) von  $A : \iff \forall \delta > 0 : U_\delta(x_0) \cap A \neq \emptyset$ .  
 $\bar{A} := \{x \in \mathbb{R}^n : x \text{ ist ein Berührungspunkt von } A\}$  heißt der **Abschluss** von  $A$ .  
 Klar:  $A \subseteq \bar{A}$ . Zur Übung:  $\bar{A} = A \cup \mathcal{H}(A)$ .
- (3)  $A$  heißt **abgeschlossen** :  $\iff A = \bar{A}$ . Zur Übung:  $\bar{A}$  ist abgeschlossen.
- (4)  $x_0 \in \mathbb{R}^n$  heißt ein **Randpunkt** von  $A : \iff \forall \delta > 0 : U_\delta(x_0) \cap A \neq \emptyset$  und  $U_\delta(x_0) \cap (\mathbb{R}^n \setminus A) \neq \emptyset$ .  $\partial A := \{x \in \mathbb{R}^n : x \text{ ist ein Randpunkt von } A\}$  heißt der **Rand** von  $A$ . Zur Übung:  $\partial A = \bar{A} \setminus A^\circ$ .

### Beispiele:

- (1)  $\mathbb{R}^n$  ist abgeschlossen,  $\emptyset$  ist abgeschlossen;  
 $\bar{A} = \overline{U_\delta(x_0)} = \{x \in \mathbb{R}^n : \|x - x_0\| \leq \delta\}$  (**abgeschlossene Kugel** um  $x_0$  mit Radius  $\delta$ )
- (2)  $\partial U_\delta(x_0) = \{x \in \mathbb{R}^n : \|x - x_0\| = \delta\} = \partial \overline{U_\delta(x_0)}$
- (3)  $A = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2; x_2 = x_1^2\}$ .  $A = \bar{A} = \partial A$

### Satz 1.2 (Offene und abgeschlossene Mengen)

- (1) Sei  $A \subseteq \mathbb{R}^n$ .  $A$  ist abgeschlossen :  $\iff \mathbb{R}^n \setminus A$  ist offen.
- (2) Die Vereinigung offener Mengen ist offen.
- (3) Der Durchschnitt abgeschlossener Mengen ist abgeschlossen.
- (4) Sind  $A_1, \dots, A_n \subseteq \mathbb{R}^n$  offen  $\implies \bigcap_{j=1}^n A_j$  ist offen
- (5) Sind  $A_1, \dots, A_n \subseteq \mathbb{R}^n$  abgeschlossen  $\implies \bigcup_{j=1}^n A_j$  ist abgeschlossen

### Beispiel

( $n = 1$ ).  $A_t := (0, 1 + t)$  ( $t > 0$ ). Jedes  $A_t$  ist offen.  $\bigcap_{t>0} A_t = (0, 1]$  ist nicht offen.

### Beweis

- (1) „ $\implies$ “: Sei  $x_0 \in \mathbb{R}^n \setminus A$ . Annahme:  $\forall \delta > 0 : U_\delta(x_0) \not\subseteq \mathbb{R}^n \setminus A \implies \forall \delta > 0 : U_\delta(x_0) \cap A \neq \emptyset \implies x_0 \in \bar{A} \stackrel{\text{Vor.}}{=} A$ , Widerspruch  
 „ $\impliedby$ “: Annahme:  $\subset \bar{A} \implies \exists x_0 \in \bar{A} : x_0 \notin A$ ; also  $x_0 \in \mathbb{R}^n \setminus A$ . Voraussetzung  
 $\implies \exists \delta > 0 : U_\delta(x_0) \subseteq \mathbb{R}^n \setminus A \implies U_\delta(x_0) \cap A = \emptyset \implies x_0 \notin \bar{A}$ , Widerspruch!
- (2) Sei  $(A_\lambda)_{\lambda \in M}$  eine Familie offener Mengen und  $V := \bigcup_{\lambda \in M} A_\lambda$ . Sei  $x_0 \in V \implies \exists \lambda_0 \in M : x_0 \in A_{\lambda_0}$ .  $A_{\lambda_0}$  offen  $\implies \exists \delta > 0 : U_\delta(x_0) \subseteq A_{\lambda_0} \subseteq V$
- (3) folgt aus (1) und (2) (Komplemente!)
- (4)  $D := \bigcap_{j=1}^m A_j$ . Sei  $x_0 \in D$ .  $\forall j \in \{1, \dots, m\} : x_0 \in A_j$ , also existiert  $\delta_j > 0 : U_{\delta_j}(x_0) \subseteq A_j$ .  
 $\delta := \min\{\delta_1, \dots, \delta_m\} \implies U_\delta(x_0) \subseteq D$
- (5) folgt aus (1) und (4) ■

