

iii Geometrische Eigenschaften

In diesem Kapitel sei stets K ein algebraisch abgeschlossener Körper.

1 Lokale Ringe zu Punkten



Gegeben die Strukturgarbe zu einer Varietät wollen wir „Funktionskeime“ in einem Punkt betrachten.

DEFINITION 1.1: Sei W eine quasi-projektive Varietät und $p \in W$.

(a) Es sei

$$\mathcal{O}_{W,p} = \{(U, f) \mid p \in U \subseteq W \text{ offen, } f \in \mathcal{O}_W(U)\} / \sim,$$

wobei $(U_1, f_1) \sim (U_2, f_2)$ bedeuten soll, dass es eine offene Menge $U_3 \subseteq U_1 \cap U_2$ mit $p \in U_3$ gibt, sodass $f_1|_{U_3} = f_2|_{U_3}$ gilt. Das ist eine K -Algebra und heißt *lokaler Ring von W in p* .

(b) Die Elemente in $\mathcal{O}_{W,p}$ heißen *Funktionskeime*.

Für die Äquivalenzklasse eines (U, f) schreiben wir auch f_p .

BEISPIEL 1.2: Sei $W = \mathbb{A}^1(K)$ und $x = 0$. Wir wissen, dass die nichtleeren offenen Teilmengen von $\mathbb{A}^1(K)$ alle von der Form $\mathbb{A}^1(K) \setminus \{x_1, \dots, x_n\}$ sind und reguläre Funktionen auf einer solchen Menge sind Quotienten von Polynomen $\frac{f}{g}$ mit $g(x) \neq 0$ für $x \neq x_i$, $i = 1, \dots, n$. Also ist $\mathcal{O}_{\mathbb{A}^1(K),0} \cong K[X]_{(X)}$.

BEMERKUNG 1.3: (a) Die Abbildung

$$\varphi_p: \mathcal{O}_{W,p} \longrightarrow K, \quad f_p = [(U, f)] \longmapsto f_p(p) := f(p),$$

ist ein wohldefinierter K -Algebrenhomomorphismus und heißt *Auswertung*.

(b) $\mathcal{O}_{W,p}$ ist ein lokaler Ring mit maximalem Ideal

$$\mathfrak{m}_p = \{[(U, f)] \in \mathcal{O}_{W,p} \mid f(p) = 0\}.$$

Beweis: (a) Die Wohldefiniertheit folgt direkt aus der Definition der Äquivalenzrelation.

(b) Die Abbildung φ_p ist surjektiv, denn die konstanten Abbildungen definieren Elemente in $\mathcal{O}_{W,p}$, und Kern $\varphi_p = \mathfrak{m}_p$. Damit gilt $\mathcal{O}_{W,p}/\mathfrak{m}_p \cong K$, also ist \mathfrak{m}_p ein maximales Ideal. Es bleibt noch zu zeigen, dass es kein weiteres maximales Ideal gibt. Sei dazu $I \subseteq \mathcal{O}_{W,p}$ ein Ideal mit $I \not\subseteq \mathfrak{m}_p$. Dann gibt es ein $[(U, f)] \in I$ mit $[(U, f)] \notin \mathfrak{m}_p$, also $f(p) \neq 0$. Wir definieren $\tilde{U} = \mathfrak{D}(f) \ni p$

und $g = \frac{1}{f} \in \mathcal{O}_W(\tilde{U})$. Dann gilt $[(U, f)] \cdot [(\tilde{U}, g)] = [(\tilde{U}, 1)] = 1$, also ist $[(U, f)] \in I$ invertierbar und damit $I = \mathcal{O}_{W,p}$. \square

BEMERKUNG 1.4: Die Abbildung

$$\psi_p: \mathcal{O}_W(U) \longrightarrow \mathcal{O}_{W,p}, \quad f \longmapsto [(U, f)] = f_p,$$

heißt *kanonische Keim-Abbildung*.

Sei $W = W_1 \cup \dots \cup W_k$ die Zerlegung von W in irreduzible Komponenten. Wir wissen: ist $U \subseteq W$ offen und $p \in U$, so ist $U \cap W_i$ dicht in W_i , falls $p \in W_i$.

Falls $U \cap W_j = \emptyset$ für alle W_j mit $p \notin W_j$, dann ist $\psi_p: \mathcal{O}_W(U) \longrightarrow \mathcal{O}_{W,p}$ injektiv.

Denn wenn $\psi_p(f) = 0$ ist, gibt es ein offenes $\tilde{U} \subseteq U$ mit $f|_{\tilde{U}} = 0$. Da \tilde{U} dicht in U ist, gilt $f|_U = 0$, denn „ $= 0$ “ ist eine abgeschlossene Bedingung.

PROPOSITION 1.5: Ist V eine affine Varietät, so gilt

$$\mathcal{O}_{V,p} \cong K[V]_{\mathfrak{m}_p^V}.$$

Hierbei ist $\mathfrak{m}_p^V = \{f \in K[V] \mid f(p) = 0\}$.

Beweis: Wir definieren

$$\varphi: K[V]_{\mathfrak{m}_p^V} \longrightarrow \mathcal{O}_{V,p}, \quad \frac{f}{g} \longmapsto \left[\left(\mathfrak{D}(g), x \longmapsto \frac{f(x)}{g(x)} \right) \right].$$

φ ist wohldefiniert: φ wird induziert von

$$\psi_p: \mathcal{O}_V(V) = K[V] \longrightarrow \mathcal{O}_{V,p}, \quad f \longmapsto [(V, x \longmapsto f(x))],$$

denn für $g \notin \mathfrak{m}_p^V$ gilt $g(p) \neq 0$, also ist $\psi_p(g)$ eine Einheit in $\mathcal{O}_{V,p}$.

φ ist injektiv: Sei $\varphi(\frac{f}{g}) = 0$, dann gibt es ein $U \subseteq \mathfrak{D}(g)$ mit $\frac{f(x)}{g(x)} = 0$ für alle $x \in U$. Für $h \in K[V]$ mit $p \in \mathfrak{D}(h) \subseteq U$ gilt dann $h(p) \neq 0$, also $h \in \mathfrak{m}_p^V$. Also gilt $h(x)f(x) = 0$ für alle $x \in V$, also $f = 0$ in $K[V]_{\mathfrak{m}_p^V}$.

φ ist surjektiv: Sei $[(U, f)] \in \mathcal{O}_{V,p}$. Ohne Einschränkung ist

$$U = \mathfrak{D}(h) \text{ für ein } h \in K[V].$$

Es gilt dann $f \in \mathcal{O}_V(U) = \mathcal{O}_V(\mathfrak{D}(h)) = K[V]_h$, also ist $f = \frac{g}{h^k}$ für ein $g \in K[V]$ und $k \in \mathbb{N}_0$. Damit ist $[(U, f)] = \varphi(\frac{g}{h^k})$. \square

KOROLLAR 1.6: Sei W eine quasi-projektive Varietät und $x \in W$. Sei weiter $V_0 \subseteq W$ offen und affin mit $p \in V_0$. Dann gilt

$$\mathcal{O}_{W,p} \cong \mathcal{O}_{V_0,p} \cong K[V_0]_{\mathfrak{m}_p^{V_0}}.$$

PROPOSITION 1.7: Seien W_1, W_2 quasi-projektive Varietäten. Seien weiter $p \in W_1$, $q \in W_2$ und $\mathcal{O}_{W_1,p} \cong \mathcal{O}_{W_2,q}$. Dann gibt es offene Umgebungen U_1 und U_2 von p bzw. q mit $U_1 \cong U_2$, d.h. „der lokale Ring kennt die Umgebung eines Punktes“.

Beweis: Sei $\varphi: \mathcal{O}_{W_1,p} \longrightarrow \mathcal{O}_{W_2,p}$ ein Isomorphismus.

- (1) Wir wählen U_1 offen und affin in W_1 mit $p \in U_1$ und so, dass U_1 nur die irreduziblen Komponenten von W_1 schneidet, die p enthalten. Entsprechend wählen wir ein \widetilde{U}_2 für q . Wir haben dann

$$\mathcal{O}(U_1) \xrightarrow{\psi_p} \mathcal{O}_{W_1,p} \xrightarrow{\sim} \mathcal{O}_{W_2,q} \xleftarrow{\psi_q} \mathcal{O}(\widetilde{U}_2).$$

Wir hätten gerne, dass $\varphi \circ \psi_p(\mathcal{O}(U_1)) \subseteq \psi_q(\mathcal{O}(\widetilde{U}_2))$ gilt (sogar „=“).

- (2) Da U_1 affin ist, gilt $\mathcal{O}(U_1) = K[U_1]$. Seien f_1, \dots, f_k Erzeuger von $K[U_1]$. Wir betrachten $\varphi((f_1)_p), \dots, \varphi((f_k)_p)$ in $\mathcal{O}_{W_2,q} \cong K[\widetilde{U}_2]_{\mathfrak{m}_q}$: es ist

$$\varphi((f_i)_p) = \frac{g_i}{h_i} \text{ mit } g_i, h_i \in K[U_2] \text{ und } h_i \notin \mathfrak{m}_q^{\widetilde{U}_2}.$$

Wir wählen nun eine offene und affine Teilmenge $U_2 \subseteq \widetilde{U}_2 \cap \mathfrak{D}(h_1) \cap \dots \cap \mathfrak{D}(h_n)$ mit $q \in U_2$. Es gilt dann $\frac{g_i}{h_i} \in \mathcal{O}(U_2)$ und $\psi_q\left(\frac{g_i}{h_i}\right) = \varphi(\psi_p(f_i))$. Wir haben dann

$$\mathcal{O}(U_1) \xrightarrow{\psi_p} \mathcal{O}_{W_1,p} \xrightarrow{\sim} \mathcal{O}(U_2) \subseteq \mathcal{O}_{W_2,p}.$$

Insbesondere definiert ein injektiver Homomorphismus

$$K[U_1] \cong \mathcal{O}(U_1) \hookrightarrow \mathcal{O}(U_2) \cong K[U_2]$$

einen surjektiven Morphismus $U_2 \twoheadrightarrow U_1$ von affinen Varietäten.

- (3) Wir haben jetzt $p \in U_1 \subseteq W_1$, $q \in U_2 \subseteq W_2$ und ein kommutatives Diagramm

$$\begin{array}{ccc} K[U_1] & \xrightarrow{\varphi} & K[U_2] \\ \downarrow \psi_p & & \downarrow \psi_q \\ \mathcal{O}_{W_1,p} & \xrightarrow[\varphi]{\sim} & \mathcal{O}_{W_2,q}, \end{array}$$

sodass $\varphi \circ \psi_p(K[U_1]) \subseteq K[U_2]$. Dadurch erhalten wir einen Morphismus

$$f: U_2 \longrightarrow U_1 \text{ mit } f(q) = p,$$

$f^\# = \varphi: K[U_1] \longrightarrow K[U_2]$ und $f_p^\# = \varphi: \mathcal{O}_{W_1,p} \longrightarrow \mathcal{O}_{W_2,p}$. Analog erhalten wir einen Morphismus $g: \widetilde{U}_1 \longrightarrow \widetilde{U}_2$ (es ist ohne Einschränkung $\widetilde{U}_1 \subseteq U_1$, $\widetilde{U}_2 \subseteq U_2$) mit $g(p) = q$, $g^\# = \varphi^{-1}: K[\widetilde{U}_2] \longrightarrow K[\widetilde{U}_1]$ und $g_p^\# = \varphi^{-1}: \mathcal{O}_{W_2,q} \longrightarrow \mathcal{O}_{W_1,p}$.

Wir setzen jetzt $\widehat{U}_1 = \widetilde{U}_1$ und $\widehat{U}_2 = f^{-1}(\widetilde{U}_1) \subseteq U_2$. Wir haben dann Abbildungen

$$f \circ g: \widehat{U}_1 \longrightarrow U_1, \quad g \circ f: \widehat{U}_2 \longrightarrow \widetilde{U}_2.$$

Auf den lokalen Ringen induziert $g \circ f$ die Identität, also ist $g \circ f$ die Einbettung $\widehat{U}_2 \hookrightarrow U_2$. Analog ist $f \circ g$ die Einbettung $\widehat{U}_1 \hookrightarrow U_1$. Daraus folgt

$$f \circ g(\widehat{U}_1) \subseteq \widehat{U}_1, \text{ also } g(\widehat{U}_1) \subseteq f^{-1}(\widehat{U}_1) = \widehat{U}_2,$$

und analog $f(\widehat{U}_2) \subseteq \widehat{U}_1$. Hier gilt dann $f \circ g = \text{id}_{\widehat{U}_1}$ und $g \circ f = \text{id}_{\widehat{U}_2}$.

Also sind f und g Isomorphismen. \square

BEMERKUNG 1.8: (a) Morphismen von Varietäten induzieren Homomorphismen zwischen den lokalen Ringen: Sei $\varphi: W_1 \longrightarrow W_2$ ein Morphismus von quasi-projektiven Varietäten und $x \in W_1$. Dann ist

$$\varphi_x^\sharp: \mathcal{O}_{W_2, \varphi(x)} \longrightarrow \mathcal{O}_{W_1, x}, \quad [(U, f)] \longmapsto [(\varphi^{-1}(U), f \circ \varphi)],$$

ein wohldefinierter K -Algebrenhomomorphismus mit $\varphi_x^\sharp(\mathfrak{m}_{\varphi(x)}) \subseteq \mathfrak{m}_x$.

(b) Es gilt $\text{id}_x^\sharp = \text{id}_{\mathcal{O}_{V, x}}$ und $(\varphi_2 \circ \varphi_1)_x^\sharp = \varphi_{1x}^\sharp \circ \varphi_{2x}^\sharp$. Wir erhalten also einen Funktor von der Kategorie der punktierten quasi-projektiven Varietäten in die Kategorie der lokalen Ringe.

2 Dimension von Varietäten



WÜNSCHE:

- $\dim \mathbb{A}^n = n$
- $\dim \mathfrak{V}(XZ, YZ) = 2$ im \mathbb{A}^3 („Ebene“)
- $\dim \mathfrak{V}(X^2 + Y^2 - Z^2) = 2$ im \mathbb{A}^3
- $\dim \mathfrak{V}(X^2 + Y^2 - 1) = 1$ im \mathbb{A}^2 („Kreis“)

DEFINITION 2.1: Sei X ein topologischer Raum. Dann heißt

$$\dim(X) := \sup\{d \in \mathbb{N}_0 \mid \exists \text{ Kette } \emptyset \neq X_0 \subsetneq \cdots \subsetneq X_d \text{ mit } X_i \text{ abg. und irred. in } X\}$$

die *Krulldimension* von X .



Für Mannigfaltigkeiten stimmen Krulldimension und Dimension nicht überein, da in Hausdorffräumen Punkte die einzigen irreduziblen, nichtleeren Teilmengen sind (vgl. Beispiel 2.7 in Kapitel 1).

Insbesondere ist die Krulldimension von \mathbb{C}^n mit euklidischer Topologie 0.

Ab jetzt: Mit Dimension ist stets die Krulldimension gemeint!

BEMERKUNG 2.2: (a) Ist X ein topologischer Raum, $Y \subseteq X$ mit Spurtopologie versehen, so ist $\dim(Y) \leq \dim(X)$.

(b) Ist $X = \bigcup_{i=1}^n X_i$ mit X_i abgeschlossene Teilmengen von X , so gilt:

$$\dim(X) = \sup_i \dim(X_i).$$

Beweis: (a) Sei $\emptyset \neq y_0 \subsetneq \cdots \subsetneq y_k$ eine Kette von abgeschlossenen, irreduziblen Teilmengen in Y .

Dann ist auch $\emptyset \neq \overline{y_0} \subsetneq \cdots \subsetneq \overline{y_n}$ Kette von abgeschlossenen, irreduziblen Teilmengen in X . Denn:

- $\overline{y_i}$ ist irreduzibel nach Übungsblatt 2,
- $y_i = \overline{y_i} \cap Y$, da y_i in Y abgeschlossen ist. Also $\overline{y_i} \neq \overline{y_{i+1}}$.

Damit ist $\dim Y \leq \dim X$.

(b) Nach (a) gilt „ \geq “.

Wähle Kette $\emptyset \neq A_0 \subsetneq \cdots \subsetneq A_k$ in X von irreduziblen, abgeschlossenen Teilmengen.

$A_k = \bigcup_{i=1}^n (A_k \cap X_i)$ und die Irreduzibilität von A_k impliziert nun $A_k = A_k \cap X_i$ für ein i , d.h. $A_k \subseteq X_i$.

Nach (a) folgt nun $k \leq \dim A_k \leq \dim X_i$ und damit die Behauptung. \square

ERINNERUNG 2.3: Sei R ein kommutativer Ring mit 1.

(a) Für ein Primideal $\wp \subseteq R$ definiert man die *Höhe von \wp* durch

$$\text{ht } \wp = \sup\{n \in \mathbb{N}_0 \mid \exists \wp_0 \subsetneq \cdots \subsetneq \wp_n := \wp \text{ Kette von Primidealen}\}.$$

(b) Man definiert die *Krulldimension von R* durch

$$\dim R = \sup\{\text{ht } \wp \mid \wp \subseteq R \text{ ist Primideal}\}.$$

PROPOSITION 2.4: Sei V eine affine Varietät. Dann ist $\dim V = \dim K[V]$.

Beweis: Erinnerung an Erinnerung/Bemerkung 7.1 aus Kapitel 1:

$$\{\text{nichtleere irreduzible Untervarietäten von } V\} \longleftrightarrow \{\text{Primideale in } K[V]\}$$

durch $W \longmapsto \mathfrak{J}(W)$ bzw. $\wp \longmapsto \mathfrak{V}(\wp)$. Diese Zuordnungen sind inklusionsumkehrend, also entsprechen aufsteigende Primidealketten absteigenden Ketten von irreduziblen Varietäten. \square

ERINNERUNG 2.5 (aus Algebra II): Sei K ein Körper, A eine endlich erzeugte nullteilerfreie K -Algebra. Dann gilt:

- $\dim K[X_1, \dots, X_n] = n$
- Ist $\varphi: K[X_1, \dots, X_n] \longrightarrow A$ surjektiver K -Algebrenhomomorphismus, so gilt:

$$\dim A + \text{ht}(\text{Kern}(\varphi)) = n.$$

- Alle maximalen Primidealketten in A haben dieselbe Länge. Diese ist $\dim A$. Insbesondere: Alle maximalen Primideale haben die Höhe $\dim(A)$.
- Allgemein gilt: Ist R lokaler Ring mit maximalen Ideal \mathfrak{m} , so ist $\text{ht } \mathfrak{m} = \dim R$. Für einen beliebigen Ring R gilt: $\text{ht } \mathfrak{m} = \dim R_{\mathfrak{m}}$.

KOROLLAR 2.6: (a) $\dim \mathbb{A}^n = n$

(b) Ist V irreduzible affine Varietät im \mathbb{A}^n , so gilt

$$\dim V + \text{ht } \mathfrak{I}(V) = n.$$

(c) Für $x \in V$ ist

$$\dim \mathcal{O}_{V,x} = \dim K[V]_{\mathfrak{m}_x^V} = \text{ht } \mathfrak{m}_x^V = \dim K[V] = \dim V.$$

PROPOSITION 2.7: Sei W eine quasi-projektive Varietät, $x \in W$, V_0 eine affine, offene Umgebung von x . Dann nennen wir

$$\dim \mathcal{O}_{W,x} =: \dim_x W$$

lokale Dimension von x in W . Es gilt:

- (a) $\dim \mathcal{O}_{W,x} = \dim \mathcal{O}_{V_0,x} = \text{ht } \mathfrak{m}_x^{V_0}$
- (b) Ist W irreduzibel, so gilt für alle $x, y \in W$: $\dim_x W = \dim_y W = \dim W$.
Außerdem: Ist $\emptyset \neq U$ offen und affin in W , so ist $\dim U = \dim W$.
- (c) $\dim_x W = \dim \mathcal{O}_{W,x} = \max\{\dim Z \mid Z \text{ irreduzible Komponente von } W, x \in Z\}$.

Beweis: (a) folgt mit Erinnerung 2.5 direkt aus $\mathcal{O}_{W,x} \cong \mathcal{O}_{V_0,x} \cong K[V_0]_{\mathfrak{m}_x^{V_0}}$.

(b) Wir zeigen zunächst: $\dim_x W = \dim_y W \forall x, y \in W$.

Seien U_1, U_2 offene, affine Umgebungen von x bzw. y . Da W irreduzibel ist, ist $U_1 \cap U_2 \neq \emptyset$.

Sei $z \in U_1 \cap U_2$. Dann folgt mit Korollar 2.6:

$$\begin{aligned} \dim_x W &= \dim \mathcal{O}_{W,x} = \dim \mathcal{O}_{U_1,x} = \dim \mathcal{O}_{U_1,z} \\ &= \dim \mathcal{O}_{U_2,z} = \dim \mathcal{O}_{U_2,y} = \dim \mathcal{O}_{W,y} = \dim_y W \end{aligned}$$

Nun zeigen wir: $\dim W = d := \dim \mathcal{O}_{W,x} = \dim U$ für ein beliebiges, offenes, affines $U \neq \emptyset$ in W .

Wir sehen: $\dim W \geq d = \dim U$, da $U \subseteq W$.

Angenommen, es gäbe eine Kette $\{x\} = W_0 \subsetneq W_1 \subsetneq \dots \subsetneq W_k$ von irreduziblen, abgeschlossenen Teilmengen mit $k > d$. Dann wählen wir U offen und affin mit $x \in U$ und sehen, dass

$$U \cap W_0 = \{x\} \subsetneq U \cap W_1 \subsetneq \dots \subsetneq U \cap W_k \subseteq U$$

eine Kette von abgeschlossen, irreduziblen Teilmengen von U ist, denn $\overline{W_i \cap U} = W_i$, da W_i irreduzibel ist. Damit wäre $d = \dim U \geq k > d$, was einen Widerspruch ergibt.

- (c) Wir können ohne Einschränkung annehmen, dass W affin ist. Dann folgt mit Erinnerung 2.5:

$$\dim \mathcal{O}_{W,x} = \dim K[W]_{\mathfrak{m}_x^W} = \text{ht } \mathfrak{m}_x^W = \sup\{k \mid 0 \neq \wp_0 \subsetneq \dots \subsetneq \wp_k = \mathfrak{m}_x^W\}$$

Ohne Einschränkung sei \wp_0 minimales Primideal und die Kette maximal. Also entspricht \wp_0 einer irreduziblen Komponente Z mit $x \in Z$. Wieder mit Erinnerung 2.5 ist $\dim Z = k$. \square

DEFINITION 2.8: (a) Eine quasi-projektive Varietät von Dimension 1 heißt *Kurve*.

- (b) Eine quasi-projektive Varietät von Dimension 2 heißt *Fläche*.

BEISPIEL 2.9: (a) Nach Proposition 2.7 ist $\dim \mathbb{P}^n = n$.

- (b) Betrachte eine Hyperfläche $\mathfrak{V}(f) \subseteq \mathbb{A}^n(K)$ mit $f \in K[X_1, \dots, X_n]$, $\deg f \geq 1$.

$$\text{Dann gilt: } \dim \mathfrak{V}(f) = n - 1.$$

Denn: Nach Bemerkung 2.2 kann man f ohne Einschränkung als irreduzibel voraussetzen. Damit ist $\dim \mathfrak{V}(f) = \dim K[V] = n - \text{ht}(f)$.

Angenommen, es gäbe ein Primideal \wp mit $0 \subsetneq \wp \subsetneq (f)$. Wähle nun $h \in \wp$ mit minimalem Grad. Da f irreduzibel ist, folgt $h \in (f)$.

Folglich: $h = h'f$ und $h \neq f$, also $h' \in \wp$. Aber der Grad von h' ist kleiner als der von h —ein Widerspruch!

Insgesamt: $\text{ht}(f) = 1$ und die Behauptung gilt.

- (c) Betrachte die Varietät $V = \mathfrak{V}(XZ, YZ) = \mathfrak{V}(Z) \cup \mathfrak{V}(X, Y)$ (Ebene mit senkrechter Gerade durch den 0-Punkt).

Es ist $\mathfrak{V}(Z) \cong \mathbb{A}^2$, d.h. $\dim \mathfrak{V}(Z) = 2$, und $\mathfrak{V}(X, Y) \cong \mathbb{A}^1$, d.h. $\dim \mathfrak{V}(X, Y) = 1$.

Nach Bemerkung 2.2 ist also $\dim V = 2$.

- (d) Es ist $\dim \mathfrak{V}(X^2 + Y^2 - Z^2) = 2$, da Hyperfläche.

- (e) Genauso ist $\dim \mathfrak{V}(X^2 + Y^2 - 1) = 1$, da Hyperfläche.

Die Wünsche, die zu Beginn des Abschnitts geäußert wurden, sind also erfüllt.

3 Der Tangentialraum



- BEISPIEL: (a) Wir betrachten die elliptische Kurve $V = \mathfrak{V}(Y^2 - X^3 + X)$ und $P = (0, 0)$. Die Tangente an V in P ist die Y -Achse, also $\mathfrak{V}(X)$.
- (b) Nun betrachten wir den Newton-Knoten $V = \mathfrak{V}(Y^2 - X^3 + X^2)$. Dann gibt es in $P = (0, 0)$ zwei „Tangenten“. Aber wie könnte der Tangentialraum aussehen?
- (c) Jetzt die Neilsche Parabel: $V = \mathfrak{V}(Y^2 - X^3)$. Dann ist die X -Achse „doppelte Tangente“ in $P = (0, 0)$, aber auch hier ist der Tangentialraum nicht intuitiv klar.

ERINNERUNG 3.1: Sei $f \in K[X_1, \dots, X_n]$ und $p = (p_1, \dots, p_n) \in K^n$. Dann haben wir die *Taylor-Entwicklung*

$$f = \sum_{\substack{\alpha = (k_1, \dots, k_n) \\ k_i \geq 0}} \frac{1}{(k_1 + \dots + k_n)!} \frac{\partial^{k_1}}{\partial X_1} \cdots \frac{\partial^{k_n}}{\partial X_n} f(p) (X_1 - p_1)^{k_1} \cdots (X_n - p_n)^{k_n}.$$

Insbesondere gilt dann:

$$f = f(p) + \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial X_i}(p) \cdot (X_i - p_i) + \text{Restterme},$$

wobei die Restterme vom Grad mindestens 2 sind, also in \mathfrak{m}_p^2 , wobei

$$\mathfrak{m}_p := (X_1 - p_1, \dots, X_n - p_n).$$

DEFINITION 3.2: Sei $p \in K$ mit $p = (p_1, \dots, p_n)$.

(a) Für $f \in K[X_1, \dots, X_n]$ sei

$$f_p^{(1)} := f^{(1)} := \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial X_i}(p) \cdot X_i =: \mathcal{D}_p(f).$$

(b) Sei $V \subseteq \mathbb{A}^n(K)$ eine affine Varietät, $p \in V$ und $I := \mathfrak{I}(V)$. Seien zusätzlich

$$\mathcal{I}_p := \langle f_p^{(1)} \mid f \in I \rangle \text{ und } \mathcal{T}_p := \mathcal{T}_{V,p} := \mathfrak{V}(\mathcal{I}_p) \subseteq \mathbb{A}^n(K).$$

Dann heißt \mathcal{T}_p *Tangentialraum an V in p* .

BEISPIEL 3.3: Seien $f = X^2 + Y^2 - 1$, $V = \mathfrak{V}(f)$, $I = (f)$ und $p = (a, b) \in V$. Dann ist

$$f_p^{(1)} = \frac{\partial f}{\partial X}(p) \cdot X + \frac{\partial f}{\partial Y}(p) \cdot Y = 2aX + 2bY,$$

also $\mathcal{I}_p = \langle 2aX + 2bY \rangle$ und $\mathcal{T}_{V,p} = \mathfrak{V}(\mathcal{I}_p) = \{(x, y) \in K^2 \mid bY = -aX\}$, denn es gilt

$$(h \cdot f)_p^{(1)} = \sum_{i=1}^n \frac{\partial(h \cdot f)}{\partial X_i}(p) \cdot X_i = \sum_{i=1}^n \frac{\partial h}{\partial X_i}(p) \cdot f(p) \cdot X_i + \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial X_i}(p) \cdot h(p) \cdot X_i = h(p) \cdot f_p^{(1)},$$

denn $f(p) = 0$, da $p \in V$, und damit ist \mathcal{I}_p auch nicht größer.

BEMERKUNG 3.4: (a) Die Taylor-Entwicklung liefert

$$f = f(p) + f_p^{(1)} - f_p^{(1)}(p) + \text{Restterme},$$

wobei die Restterme in \mathfrak{m}_p^2 liegen.

- (b) $\mathcal{D}_p(f + g) = (f + g)_p^{(1)} = f_p^{(1)} + g_p^{(1)} = \mathcal{D}_p(f) + \mathcal{D}_p(g)$
 $\mathcal{D}_p(f \cdot g) = (f \cdot g)_p^{(1)} = f(p) \cdot g_p^{(1)} + g(p) \cdot f_p^{(1)} = f(p) \cdot \mathcal{D}_p(g) + g(p) \cdot \mathcal{D}_p(f)$,
 vgl. auch Beispiel 3.3.
- (c) Sei $V \subseteq \mathbb{A}^n(K)$ eine affine Varietät, $I = \mathfrak{I}(V) = \langle f_1, \dots, f_r \rangle$ und $p \in V$. Dann ist
- $\mathcal{I}_p = \langle f_1^{(1)}, \dots, f_r^{(1)} \rangle$ analog zu Beispiel 3.3,
 - $\mathcal{T}_{V,p} = \mathfrak{V}(\mathcal{I}_p)$ ein linearer Unterraum von $\mathbb{A}^n(K) = K^n$:

$$\begin{aligned} \mathcal{T}_{V,p} &= \{x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{A}^n(K) \mid \forall f \in I : \sum_{j=1}^n \frac{\partial f}{\partial X_j}(p) \cdot x_j = 0\} \\ &= \text{Kern} \left(\left(\frac{\partial f_i}{\partial X_j}(p) \right)_{\substack{i=1, \dots, r \\ j=1, \dots, n}} \right), \end{aligned}$$

also der Kern der Jacobi-Matrix.

BEISPIEL 3.5: Damit können wir jetzt ganz viele Tangentialräume bestimmen. Sei $p = (0, 0)$.

- (a) Sei $V = \mathfrak{V}(Y^2 - X^3 + X)$, dann ist $\mathcal{T}_{V,p} = \mathfrak{V}(2 \cdot 0 \cdot Y - 3 \cdot 0^2 \cdot X + 1 \cdot X) = \mathfrak{V}(X)$.
 (b) Sei $V = \mathfrak{V}(Y^2 - X^3 + X^2)$, dann ist $\mathcal{T}_{V,p} = \mathfrak{V}(0) = \mathbb{A}^2(K)$.
 (c) Sei $V = \mathfrak{V}(Y^2 - X^3)$. Dann ist $\mathcal{T}_{V,p} = \mathfrak{V}(0) = \mathbb{A}^2(K)$.
 (d) Sei $V = \mathfrak{V}(X^2 + Y^2 - Z^2)$, dann ist

$$\mathcal{T}_{V,p} = \mathfrak{V}(0) = \mathbb{A}^3(K) \text{ und } \mathcal{T}_{V,(0,1,1)} = \mathfrak{V}(2Y - 2Z).$$



Bisher hängt unsere Definition von $\mathcal{T}_{V,p}$ von der Einbettung von V in den $\mathbb{A}^n(K)$ ab.

BEMERKUNG 3.6: Sei $\varphi: \mathbb{A}^n \supseteq V \longrightarrow W \subseteq \mathbb{A}^m$ ein Morphismus zwischen affinen Varietäten. Dann induziert φ in natürlicher Weise eine K -lineare Abbildung

$$d_p \varphi: \mathfrak{V}(\mathcal{I}_p) = \mathcal{T}_{V,p} \longrightarrow \mathcal{T}_{W,\varphi(p)} = \mathfrak{V}(\mathcal{I}_{\varphi(p)}).$$

Beweis: Gegeben seien also $\varphi: V \longrightarrow W$, $I := \mathfrak{I}(V)$ und $J := \mathfrak{I}(W)$.

Dann wählen wir eine Fortsetzung $\widehat{\varphi}: \mathbb{A}^n \longrightarrow \mathbb{A}^m$ und

$$\widehat{\varphi} = (\widehat{\varphi}_1, \dots, \widehat{\varphi}_m) \text{ mit } \widehat{\varphi}_i \in K[X_1, \dots, X_n].$$

So erhalten wir

$$\widehat{\varphi}^\sharp: K[Y_1, \dots, Y_m] \longrightarrow K[X_1, \dots, X_n]$$

mit $\widehat{\varphi}^\sharp(Y_i) = \widehat{\varphi}_i$ und $\widehat{\varphi}^\sharp(J) \subseteq I$. Wir definieren den K -Algebrenhomomorphismus

$$\alpha: K[Y_1, \dots, Y_m] \longrightarrow K[X_1, \dots, X_n] \text{ durch } \alpha(Y_i) = \mathcal{D}_p(\widehat{\varphi}^\sharp(Y_i)) = \mathcal{D}_p(\widehat{\varphi}_i) = \widehat{\varphi}_{i_p}^{(1)}.$$

Nun genügt es $\alpha(\mathcal{I}_{\varphi(p)}) \subseteq \mathcal{I}_p$ zu zeigen, denn dann induziert α das gewünschte $d_p \varphi$.

Seien also $g \in J$ und $\bar{g} := \mathcal{D}_p(g) \in \mathcal{I}_{\varphi(p)}$. Dann gilt:

$$\begin{aligned} \alpha(\bar{g}) &= \sum_{j=1}^m \frac{\partial g}{\partial \varphi_j}(\varphi(p)) \cdot \mathcal{D}_p(\widehat{\varphi}_j) = \sum_{i=1}^n X_i \left(\sum_{j=1}^m \frac{\partial g}{\partial \varphi_j}(\varphi(p)) \cdot \frac{\partial \widehat{\varphi}_j}{\partial X_i}(p) \right) \\ &= \sum_{i=1}^n X_i \frac{\partial (g \circ \widehat{\varphi})}{\partial X_i}(p) = \mathcal{D}_p(g \circ \widehat{\varphi}) \in \mathcal{I}_p, \end{aligned}$$

denn $g \circ \widehat{\varphi}$ liegt in I . □

DEFINITION/BEMERKUNG 3.7: (a) Wir nennen $\mathcal{D}: \mathcal{O}_{V,p} \longrightarrow K$ eine *Derivation an p* , wenn \mathcal{D} K -linear ist und

$$\mathcal{D}(f \cdot g) = g(p) \cdot \mathcal{D}(f) + f(p) \cdot \mathcal{D}(g).$$

- (b) \mathcal{D} ist bereits durch $\mathcal{D}|_{\mathfrak{m}_p}$ für das maximale Ideal $\mathfrak{m}_p = \{f \mid f(p) = 0\}$ festgelegt, denn für c konstant ist $\mathcal{D}(c) = 0$, also gilt, für beliebiges $f \in \mathcal{O}_{V,p}$, $\tilde{f} := f - f(p)$ ist in \mathfrak{m}_p und $\mathcal{D}(\tilde{f}) = \mathcal{D}(f)$.
- (c) Sei $f \in \mathfrak{m}_p^2$. Dann ist $\mathcal{D}(f) = 0$, denn wir können, ohne Einschränkung, $f = g \cdot h$ mit $g, h \in \mathfrak{m}_p$ wählen und sehen

$$\mathcal{D}(f) = \mathcal{D}(gh) = g(p)\mathcal{D}(h) + h(p)\mathcal{D}(g) = 0,$$

da $g(p) = h(p) = 0$. \mathcal{D} definiert also eine lineare Abbildung

$$\mathfrak{l}: \mathfrak{m}_p / \mathfrak{m}_p^2 \longrightarrow K.$$

- (d) Jedes solche \mathfrak{l} kommt von einer Derivation her. Dazu definieren wir

$$\mathcal{D}(f_p) := \mathfrak{l}(f_p - f_p(p)).$$

Wir müssen also zeigen, dass \mathcal{D} eine Derivation an p ist, also dass:

$$\mathcal{D}(f_p \cdot g_p) = f_p(p)\mathcal{D}(g_p) + g_p(p)\mathcal{D}(f_p)$$

gilt. Dazu verwenden wir, dass $(f_p - f_p(p)) \cdot (g_p - g_p(p)) \in \mathfrak{m}_p^2$, also

$$\begin{aligned} 0 &= \mathfrak{l}((f_p - f_p(p))(g_p - g_p(p))) \\ &= \mathfrak{l}(f_p g_p - f_p(p)g_p(p) - f_p(p)g_p - g_p(p)f_p + 2f_p(p)g_p(p)) \end{aligned}$$

und sehen damit:

$$\begin{aligned} \mathfrak{l}(f_p g_p - f_p(p)g_p(p)) &= \mathfrak{l}(f_p(p)g_p - f_p(p)g_p(p)) + \mathfrak{l}(g_p(p)f_p - f_p(p)g_p(p)) \\ &= f_p(p)\mathcal{D}(g_p) + g_p(p)\mathcal{D}(f_p). \end{aligned}$$

Die Derivationen an p auf $\mathcal{O}_{V,p}$ können demnach mit dem Dualraum $(\mathfrak{m}_p/\mathfrak{m}_p^2)^\vee$ identifiziert werden. Wir erhalten so einen Isomorphismus von K -Vektorräumen. Genauer:

PROPOSITION 3.8: (a) Jedes $a = (a_1, \dots, a_n) \in \mathbb{A}^n(K)$ definiert eine Derivation

$$\begin{aligned} \mathcal{D}_a: \mathcal{O}_{\mathbb{A}^n,p} &\cong K[X_1, \dots, X_n]_{\mathfrak{m}_p} \longrightarrow K, \\ f &\longmapsto \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial X_i}(p) \cdot a_i = f_p^1(a) = \mathcal{D}_p(f)(a), \end{aligned}$$

dabei war $\mathfrak{m}_p = (X_1 - p_1, \dots, X_n - p_n)$ für $p = (p_1, \dots, p_n)$.

- (b) Falls $a \in \mathcal{T}_{V,p} = \mathfrak{B}(\mathcal{I}_p)$, steigt \mathcal{D}_a zu einer Derivation $\tau_a: \mathcal{O}_{V,p} \longrightarrow K$ ab, via des von der Einbettung $i: V \hookrightarrow \mathbb{A}^n$ induzierten Morphismus $i^\sharp: \mathcal{O}_{\mathbb{A}^n,p} \longrightarrow \mathcal{O}_{V,p}$.

Beweis: (a) Die Derivationseigenschaft kommt von der entsprechenden Eigenschaft der $\frac{\partial}{\partial X_i}$.

- (b) Ohne Einschränkung nehmen wir V als affin an. Zunächst gilt für alle $f \in \mathfrak{J}(V)$, dass $\mathcal{D}_a(f) = \mathcal{D}_p(f)(a) = 0$, da $f_p^{(1)} \in \mathcal{I}_p$ und $a \in \mathcal{T}_{V,p}$.

Sei nun $(\frac{f}{g})_p \in \mathcal{O}_{\mathbb{A}^n,p}$ mit $i^\sharp((\frac{f}{g})_p) = 0$, das heißt $g(p) \neq 0$ und $\frac{f}{g}$ ist 0 in $\mathcal{O}_{V,p}$, also gibt es ein h mit $h(p) \neq 0$, so dass $h \cdot f \in \mathfrak{J}(V)$. Insbesondere ist $\mathcal{D}_a(hf) = 0$ und $f(p) = 0$, da $0 = (hf)(p) = h(p)f(p)$. Damit gilt:

$$0 = \mathcal{D}_a(hf) = \mathcal{D}_a(h)f(p) + \mathcal{D}_a(f)h(p)$$

und da $h(p) \neq 0$, muss schon $\mathcal{D}_a(f) = 0$ gelten. Damit ist auch

$$\mathcal{D}_a\left(\frac{f}{g}\right) = \frac{g(p) \cdot \mathcal{D}_a(f) - f(p) \cdot \mathcal{D}_a(g)}{g(p)^2} = 0$$

und damit ist τ_a wohldefiniert. □

DEFINITION/PROPOSITION 3.9: Sei V eine affine Varietät und $p = (p_1, \dots, p_n) \in V$.

(a) $\mathcal{D}_a: \mathcal{O}_{V,p} \longrightarrow K$ induziert einen Vektorraumhomomorphismus

$$\tau_a: \mathfrak{m}_p / \mathfrak{m}_p^2 \longrightarrow K,$$

also ein Element $\tau_a \in (\mathfrak{m}_p / \mathfrak{m}_p^2)^\vee$.

(b) Die Abbildung

$$\alpha_p: \mathcal{T}_{V,p} \longrightarrow (\mathfrak{m}_p / \mathfrak{m}_p^2)^\vee, \quad a \longmapsto \tau_a$$

ist ein Isomorphismus von Vektorräumen.

Beweis: (a) folgt sofort aus Definition/Bemerkung 3.7 (c) mit Proposition 3.8 (b).

(b) Wir definieren die Umkehrabbildung durch

$$\beta_p: (\mathfrak{m}_p / \mathfrak{m}_p^2)^\vee \longrightarrow \mathcal{T}_{V,p}, \quad \mathfrak{l} \longmapsto (\mathfrak{l}(\overline{X_1 - p_1}), \dots, \mathfrak{l}(\overline{X_n - p_n})).$$

Wir zeigen zuerst, dass β wohldefiniert ist, also $\beta_p(\mathfrak{l}) =: a \in \mathcal{T}_{V,p} = \mathfrak{V}(\mathcal{I}_p)$.

Sei dazu $f \in \mathfrak{J}(V)$, also $f_p^{(1)} \in \mathcal{I}_p$. Dann gilt nach Definition

$$\begin{aligned} f_p^{(1)}(a) &= \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial X_i}(p) \cdot \mathfrak{l}(\overline{X_i - p_i}) \\ &= \mathfrak{l}\left(\sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial X_i}(p) \cdot (X_i - p_i)\right) = \mathfrak{l}(\overline{f_p^{(1)} - f_p^{(1)}(p)}). \end{aligned}$$

In Bemerkung 3.4 (a) hatten wir gesehen, dass

$$f - f(p) - (f_p^{(1)} - f_p^{(1)}(p)) \in \mathfrak{m}_p^2$$

liegt, wobei hier natürlich $f(p) = 0$ ist. In $K[V]$ ist damit sogar $f_p^{(1)} - f_p^{(1)}(p) \in \mathfrak{m}_p^2$, also gilt

$$\text{in } \mathfrak{m}_p / \mathfrak{m}_p^2 \text{ ist } \overline{f_p^{(1)} - f_p^{(1)}(p)} = 0,$$

also ist $f_p^{(1)}(a) = 0$ und damit ist $a \in \mathfrak{V}(\mathcal{I}_p) = \mathcal{T}_{V,p}$.

Um einzusehen, dass es sich wirklich um die Umkehrabbildung handelt, erinnern wir uns daran, dass, für $a = (a_1, \dots, a_n)$,

$$\tau_a: \mathfrak{m}_p / \mathfrak{m}_p^2 \ni f \longmapsto \mathcal{D}_p(f)(a) = \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial X_i}(p) \cdot a_i \in K$$

gilt. Damit erhalten wir für $\beta_p(\alpha_p(a))$:

$$\beta_p(\tau_a) = \left(\sum_{i=1}^n \frac{\partial(\overline{X_1 - p_1})}{\partial X_i}(p) \cdot a_1, \dots, \sum_{i=1}^n \frac{\partial(\overline{X_n - p_n})}{\partial X_i}(p) \cdot a_n \right)$$

und da $\frac{\partial(X_j - p_j)}{\partial X_i}$ genau dann 1, wenn $i = j$ und ansonsten 0 ist, ergibt das gerade wieder a .

Nun überlegen wir uns noch, dass \mathfrak{l} durch

$$\alpha_p(\beta_p(\mathfrak{l})) = \alpha_p(\mathfrak{l}(\overline{X_1 - p_1}), \dots, \mathfrak{l}(\overline{X_n - p_n})),$$

nach gleicher Argumentation wie oben, gerade auf die Abbildung

$$\begin{aligned} f \longmapsto \mathcal{D}_p(f)(\mathfrak{l}(\overline{X_1 - p_1}), \dots, \mathfrak{l}(\overline{X_n - p_n})) &= \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial X_i}(p) \cdot \mathfrak{l}(\overline{X_i - p_i}) \\ &= \overline{\mathfrak{l}(f_p^{(1)} - f_p^{(1)}(p))}, \end{aligned}$$

geschickt wird. In $\mathfrak{m}_p/\mathfrak{m}_p^2$ ist aber, wie oben gesehen,

$$\overline{f} = \overline{f_p^{(1)} - f_p^{(1)}(p)}$$

und damit gilt tatsächlich

$$\alpha_p(\beta_p(\mathfrak{l})) = (f \longmapsto \mathfrak{l}(f)) = \mathfrak{l},$$

β_p ist also, wie behauptet, die Umkehrabbildung.

Somit sind die Vektorräume isomorph. □

DEFINITION/BEMERKUNG 3.10: Sei V eine quasi-projektive Varietät, $p \in V$.

- (a) $(\mathfrak{m}_p/\mathfrak{m}_p^2)^\vee$ heißt *(Zariski-)Tangentialraum*.
- (b) Der Punkt p heißt *regulär* (bzw. *nicht-singulär*), wenn $\dim \mathcal{T}_{V,p} = \dim_p V$ ist. Andernfalls heißt p *singulär*.
- (c) Sei $U \subseteq \mathbb{A}^n$ eine offene und affine Umgebung von p in V und $\mathfrak{I}(U) = \langle f_1, \dots, f_n \rangle$. Dann gilt

$$p \text{ ist regulär} \iff \text{Rang} \left(\frac{\partial f_i}{\partial X_j}(X) \right)_{\substack{i=1, \dots, r \\ j=1, \dots, n}} = n - \dim_p V,$$

denn nach Bemerkung 3.4 (c) ist $\mathcal{T}_{V,p}$ gerade der Kern dieser Matrix.

Diese Äquivalenz nennt man das *Jacobi-Kriterium*.

BEISPIEL 3.11: (a) Sei $V = \mathfrak{V}(X^2 + Y^2 - Z^2) \subseteq \mathbb{A}^3$. Dann ist $\dim V = \dim_p V$ für alle Punkte $v \in V$. Für die Jacobi-Matrix gilt:

$$\mathcal{J} = \begin{pmatrix} 2x \\ 2y \\ -2z \end{pmatrix}$$

und nach Definition/Bemerkung 3.10 (c) ist p genau dann regulär, wenn

$$\text{Rang } \mathcal{J} = 3 - 2 = 1$$

gilt. Also ist $p = (0, 0, 0)$ der einzige singuläre Punkt.

- (b) Sei $V = \mathfrak{V}(X^2 - Y^2) = \mathfrak{V}((X - Y)(X + Y)) \subseteq \mathbb{A}^3$. Anschaulich sind das zwei Ebenen, die senkrecht aufeinander stehen. Ihr Schnitt ist die Z -Achse. Analog zu (a) finden wir

$$\mathcal{J} = \begin{pmatrix} 2x \\ -2y \\ 0 \end{pmatrix}$$

und demnach ist hier p genau dann singulär, wenn $p = (0, 0, z)$ mit $z \in K$, also ist die Menge der singulären Punkte gerade die Z -Achse.

- (c) Sei $V = \mathfrak{V}(f) \subseteq \mathbb{A}^n$ eine Hyperfläche, also $\deg f \geq 1$. Dann ist

$$\mathcal{J}_p = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial X_1}(p) \\ \vdots \\ \frac{\partial f}{\partial X_n}(p) \end{pmatrix}$$

und p ist genau dann regulär, wenn $\text{Rang } \mathcal{J} = n - (n - 1) = 1$, d.h.

$$p \text{ ist singulär} \iff \frac{\partial f}{\partial X_1}(p) = \cdots = \frac{\partial f}{\partial X_n}(p) = 0.$$

4 Der singuläre Ort einer Varietät



DEFINITION 4.1: Sei W quasi-projektive Varietät. Dann heißt

$$\text{Sing } W = \{p \in W \mid p \text{ singulär}\}$$

der *singuläre Ort*.

$$\text{Reg } W = \{p \in W \mid p \text{ regulär}\} = W \setminus \text{Sing } W$$

heißt *regulärer Ort*.

Wenn $\text{Sing } W$ leer ist, nennen wir W *regulär* oder *nicht-singulär*.

DEFINITION/BEMERKUNG 4.2: (a) Ein noetherscher, lokaler Ring R mit maximalem Ideal \mathfrak{m} heißt *regulär*, wenn $\dim_k \mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2 = \dim R$. Dabei ist $k = R/\mathfrak{m}$.

- (b) Sei W quasi-projektive Varietät, $p \in W$. Dann gilt:

$$p \text{ ist regulär} \iff \mathcal{O}_{W,p} \text{ ist regulär.}$$

LEMMA 4.3: Sei (R, \mathfrak{m}) ein lokaler, noetherscher Ring.

- (a) Ist R regulär, so ist R auch nullteilerfrei.
 (b) Es gilt: $\dim \mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2 \geq \dim R$

Beweis: siehe Lemma 5.4 und Proposition 5.5. □

Satz 6: Sei W eine quasi-projektive Varietät.

- (a) Ist $p \in W$, so ist $\dim \mathcal{T}_{W,p} \geq \dim_p W$ und $\text{Rang } \mathcal{J}_p \leq n - \dim_p W$, wobei \mathcal{J}_p die Jacobi-Matrix zu V in p ist und $V \subseteq \mathbb{A}^n$ eine offene, affine Umgebung von p ist.
- (b) Sind $W_1 \neq W_2$ irreduzible Komponenten von W , $p \in W_1 \cap W_2$, dann ist p singulär.
- (c) $\text{Sing } W$ ist abgeschlossen.
- (d) Es ist $\text{Sing } W \neq W$.

Beweis: (a) folgt aus Lemma 4.3 (b) sowie $\mathcal{T}_{W,p} \cong \text{Kern } \mathcal{J}_p$.

- (b) Da wir eine lokale Eigenschaft untersuchen, können wir ohne Einschränkung W als affin annehmen. Sei nun $p \in W_1 \cap W_2$.

Dann ist $\mathfrak{m}_p^W \supseteq \mathfrak{I}(W_1), \mathfrak{I}(W_2)$ in $K[W]$.

Sind W_1, W_2 irreduzible Komponenten, so sind $\mathfrak{I}(W_1), \mathfrak{I}(W_2)$ minimale Primideale. Folglich sind die Bilder von $\mathfrak{I}(W_1)$ und $\mathfrak{I}(W_2)$ minimale Primideale in $\mathcal{O}_{W,p}$ bzw. $K[W]_{\mathfrak{m}_p^W}$ und verschieden (vgl. Aufgabe 2, Übungsblatt 6).

Damit ist (0) kein Primideal in $\mathcal{O}_{W,p}$. Also ist $\mathcal{O}_{W,p}$ nicht nullteilerfrei und nach Lemma 4.3 (a) ist $\mathcal{O}_{W,p}$ nicht regulär.

- (c) Sei $W = W_1 \cup \dots \cup W_k$ die Zerlegung in irreduzible Komponenten.

Ist $p \in W_i$ und $p \notin W_j$ für $j \neq i$, so ist p genau dann singulär in W , wenn p singulär in $W \cap W_i$ ist.

Denn: Ist $p \in W_i \cap W_j$ ($i \neq j$), so ist $p \in \text{Sing } W$ und damit

$$\text{Sing } W = \bigcup_{i=1}^k \text{Sing } W_i \cup \bigcup_{j \neq i} (W_i \cap W_j).$$

Da $\bigcup_{j \neq i} (W_i \cap W_j)$ abgeschlossen ist, genügt es die Aussage für irreduzible Varietäten zu zeigen.

Sei also W irreduzibel und affin. Dann gilt:

$$\text{Sing } W = \{p \in W \mid \text{Rang } \mathcal{J}_p < n - \dim W\} = \{p \in W \mid \det M_p = 0 \ \forall M_p\},$$

wobei die M_p die $(n - \dim W) \times (n - \dim W)$ -Minoren von \mathcal{J}_p sind. Diese Menge ist abgeschlossen.

- (d) Ist $W = W_1 \cup \dots \cup W_k$ die Zerlegung in irreduzible Komponenten und $\text{Reg } W_i$ nicht leer, so ist $\text{Reg } W_i$ dicht in W_i .

Also gibt es $p \in W_i$, so dass $p \notin W_j$, für alle $i \neq j$. Damit ist $p \in \text{Reg } W$ und man kann ohne Einschränkung annehmen, dass W irreduzibel ist.

Sei jetzt also $V = W$ affin und irreduzibel. Betrachte zuerst den Spezialfall, dass $W = V = \mathfrak{V}(f)$ eine Hyperfläche ist, wobei $f \in K[X_1, \dots, X_n]$ quadratfrei sein soll.

Nach Beispiel 3.11 gilt:

$$\text{Sing } V = \left\{ p \in V \mid \frac{\partial f}{\partial X_i}(p) = \cdots = \frac{\partial f}{\partial X_n}(p) = 0 \right\}$$

Wäre $\text{Sing } V = V$, dann wäre $\frac{\partial f}{\partial X_i} \in \mathfrak{I}(V) = \langle f \rangle$ für $i = 1, \dots, n$.

Hat K Charakteristik 0, so muss f bereits konstant sein.

Hat K Charakteristik p , so muss jeder Exponent, der auftritt, bereits durch p teilbar sein. Also ist $f = g^p$ für ein $g \in K[X_1, \dots, X_n]$, was im Widerspruch zur Quadratfreiheit von f steht.

Nun der allgemeine Fall:

Nach Lemma 4.4 gibt es eine offene, dichte Teilmenge $U \subseteq V$, die via φ isomorph zu einer offenen, dichten Teilmenge U' in einer Hyperfläche $\mathfrak{V}(f)$ ist.

Nach dem Spezialfall ist $\text{Reg } \mathfrak{V}(f) \neq \emptyset$. Damit ist $U' \cap \text{Reg } \mathfrak{V}(f) \neq \emptyset$, da U' dicht ist und $\text{Reg } \mathfrak{V}(f)$ offen ist. Sei $p' \in U' \cap \text{Reg } \mathfrak{V}(f)$.

Dann ist p' regulär, d.h. $\mathcal{O}_{U', p'}$ ist regulär. Also ist auch $\varphi(p') \in U$ regulär, da $\mathcal{O}_{U, p}$ regulär ist. \square

LEMMA 4.4: Jede irreduzible quasi-projektive Varietät W von Dimension d ist birational äquivalent zu einer Hyperfläche im $\mathbb{A}^{d+1}(K)$.

ERINNERUNG: (a) Sei A eine nullteilerfreie, endlich erzeugte K -Algebra.

- Die Noethernormalisierung impliziert, dass A ganz über dem Polynomring $K[X_1, \dots, X_d]$ ist.
- Die Dimension bleibt unter ganzen Ringerweiterungen erhalten. Also gilt $d = \dim A$ und der Transzendenzgrad von $\text{Quot } A/K = d = \dim A$. Damit gilt für eine irreduzible Varietät V die Formel $\text{trdeg } K(V) = \dim V$.

(b) Sei $L/K(X_1, \dots, X_d)$ endliche Körpererweiterung, $E := K(X_1, \dots, X_d)$.

Hat K Charakteristik 0, so ist L/K separabel, d.h. $L = E(\alpha)$ für ein $\alpha \in L$ nach dem Satz vom primitiven Element.

Hat K Charakteristik p , so impliziert die algebraische Abgeschlossenheit von K , dass L/K separabel erzeugt ist, d.h. es gibt eine Transzendenzbasis $\{\widetilde{X}_1, \dots, \widetilde{X}_d\}$, so dass $L/K(\widetilde{X}_1, \dots, \widetilde{X}_d)$ separabel ist (siehe Bosch, Abschnitt 7.3, Satz 7).

Im Folgenden sei eine Transzendenzbasis mit dieser Eigenschaft gewählt.

Beweis von Lemma 4.4: Seien $L = K(W)$ und $\{X_1, \dots, X_d\}$ eine Transzendenzbasis wie in (b). Also gibt es ein primitives Element $y \in L = K(W)$ von $L/K(X_1, \dots, X_d)$, d.h.

$$L = K(X_1, \dots, X_d, y) = K(X_1, \dots, X_d)[y].$$

Sei $p(Y) = Y^n + a_{n-1}Y^{n-1} + \dots + a_0$ das Minimalpolynom von y über $K(X_1, \dots, X_d)$ und $a_0 =: \frac{f_i}{g_i}$ mit $f_i, g_i \in K[X_1, \dots, X_d]$.

Dann setzen wir $g := \text{kgV}(g_0, \dots, g_{n-1})$ und damit

$$h := gY^n + ga_{n-1}Y^{n-1} + \dots + ga_0 \in K[X_1, \dots, X_d, Y],$$

denn die ga_i sind bereits in $K[X_1, \dots, X_d]$.

Nun definieren wir $H := \mathfrak{V}(h) \subseteq \mathbb{A}^{d+1}$ und sehen, dass

$$K(H) = \text{Quot} \left(K[X_1, \dots, X_d, Y] / (h) \right) = L = K(W).$$

Also gibt es, nach Satz 4 und Definition/Bemerkung 5.6 (c), eine birationale Abbildung $H \dashrightarrow W$. \square

5 Reguläre Ringe und Krullscher Höstensatz



Ziel: Sei $I = (f_1, \dots, f_k)$, $\text{ht } I := \{\inf \text{ht } \wp \mid \wp \supseteq I, \wp \text{ ist Primideal}\}$.

Was kann man über $\text{ht } I$ sagen?

BEMERKUNG: Ein Primideal \wp heißt *minimales Primoberideal* von einem Ideal I , wenn $\wp \supseteq I$ und \wp minimal mit dieser Eigenschaft ist.

Zorns Lemma zeigt, dass es zu jedem $x \in R \setminus R^\times$ ein minimales Primoberideal von (x) gibt.

(a) (Krullsches Hauptideallemma, vgl. Brodmann III.10.15)

Ist R ein noetherscher Ring, $x \in R \setminus R^\times$ und \wp ein minimales Primoberideal von (x) , dann gilt $\text{ht } \wp \leq 1$.

(b) Jeder noetherscher Ring hat nur endlich viele minimale Primideale (vgl. auch Satz 1, Brodmann II, 9.17 (iii)).

(c) (Primidealvermeidungslemma, vgl. Brodmann III.11.10)

Sind \wp_1, \dots, \wp_n Primideale in R und I, J Ideale, mit $I \not\subseteq \wp_i$ und $I \not\subseteq J$, dann gilt auch $I \not\subseteq J \cup \wp_1 \cdots \cup \wp_n$.

LEMMA 5.1: Sei R noethersch, $q \in \text{Spec } R$, $x \in q$, $\text{ht } q \geq l \geq 1$. Dann existiert eine Primidealkette

$$x \in \wp'_0 \subsetneq \cdots \subsetneq \wp'_{l-1} = q.$$

Beweis: Wir machen vollständige Induktion über l :

Für $l = 1$ wählen wir $\wp'_0 = q$.

Sei nun $l \geq 2$. Da $\text{ht } q \geq l$ gilt, gibt es eine Primidealkette $\wp_0 \subsetneq \cdots \subsetneq \wp_l := q$. Ist $x \in \wp_{l-1}$, so kann man die Induktionsvoraussetzung anwenden und erhält die Behauptung.

Ab jetzt sei also $x \notin \wp_{l-1}$. Dann ist $I := (x) + \wp_{l-2} \subseteq q$. Sei s ein minimales Primoberideal von I mit $I \subseteq s \subseteq q$.

Es gilt $\wp_{l-2} \subsetneq \wp_{l-1} \subsetneq q$, also $\bar{0} \subsetneq \overline{\wp_{l-1}} \subsetneq \bar{q}$ in R/\wp_{l-2} und damit ist $\text{ht } \bar{q} \geq 2$, und somit ist, nach dem Krullschen Hauptideallemma, \bar{q} kein minimales Oberprimideal von (\bar{x}) . Damit ist aber auch q kein minimales Primoberideal von $(x) + \wp_{l-2} = I$, also ist $s \neq q$.

Nun können wir also die Induktionsvoraussetzung auf s anwenden, es gibt somit eine Primidealkette $x \in \wp'_0 \subsetneq \cdots \subsetneq \wp'_{l-2}$ in s . Wenn wir diese durch q um 1 verlängern, sind wir fertig. \square

KOROLLAR 5.2: Sei (R, \mathfrak{m}) ein lokaler, noetherscher Ring und $x \in \mathfrak{m}$. Dann ist

$$\dim R/(x) \geq \dim R - 1.$$

Vermeidet x die Primideale \wp_i von R , d.h. gilt $x \notin \wp_i$ für alle minimalen Primoberideale \wp_i , dann gilt $\dim R/(x) = R - 1$.

PROPOSITION 5.3: (Krullscher Höstensatz) Sei R ein noetherscher Ring, $I = \langle x_1, \dots, x_k \rangle$ ein echtes Ideal in R . Dann gilt: $\text{ht } \wp \leq k$ für jedes minimale Primoberideal von I . Insbesondere ist $\text{ht } I \leq k$.

Beweis: Wir machen Induktion über k :

Der Fall $k = 1$ folgt aus dem Krullschen Hauptideallemma.

Sei also $k \geq 2$: Sei \wp ein minimales Primoberideal von I und $\wp_0 \subsetneq \cdots \subsetneq \wp_l := \wp$ eine Primidealkette.

Nach Lemma 5.1 finden wir eine Primidealkette mit $x_k \in \wp'_0 \subsetneq \cdots \subsetneq \wp'_{l-1} := \wp$. In $R/(x_k)$ gilt nun $\overline{\wp'_0} \subsetneq \cdots \subsetneq \overline{\wp'_{l-1}} = \bar{\wp}$ und $\bar{\wp}$ ist ein minimales Primoberideal von $I = \langle \bar{x}_1, \dots, \bar{x}_{k-1} \rangle$. Mit der Induktionsvoraussetzung folgt nun:

$$l - 1 \leq \text{ht } \bar{\wp} \leq k - 1.$$

Also ist $l \leq k$ und das zeigt die Behauptung. \square

LEMMA 5.4: Sei (R, \mathfrak{m}) ein noetherscher, lokaler Ring und $k = R/\mathfrak{m}$.

(a) Für $m_1, \dots, m_n \in \mathfrak{m}$ gilt:

$$\{m_1, \dots, m_n\} \text{ ist minimales Erzeugendensystem von } \mathfrak{m} \iff \{\overline{m_1}, \dots, \overline{m_n}\} \text{ ist Basis von } \mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2.$$

(b) Alle minimalen Erzeugendensysteme von \mathfrak{m} haben dieselbe Anzahl: $\dim_k \mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2$.

(c) Es ist $\dim_k \mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2 \geq \dim R$.

Beweis: (a) Sei zuerst $\langle m_1, \dots, m_n \rangle = \mathfrak{m}$. Betrachte die Projektionen

$$\pi_1: R \longrightarrow k = R/\mathfrak{m}, \quad \pi_2: \mathfrak{m} \longrightarrow \mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2.$$

Dann ist $\overline{r m_1} := \pi_1(r) \pi_2(m_1)$ wohldefiniert und $\{\overline{m_1}, \dots, \overline{m_n}\}$ ist ein Erzeugendensystem von $\mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2$. Da $\mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2$ ein k -Vektorraum ist, ist $\{\overline{m_1}, \dots, \overline{m_n}\}$ also – wie gewünscht – eine Basis.

Sei jetzt $\langle \overline{m_1}, \dots, \overline{m_n} \rangle = \mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2$. Definiere $N = \langle m_1, \dots, m_n \rangle$. Dann ist $\mathfrak{m} = N + \mathfrak{m}^2$ und damit $N = \mathfrak{m}$ nach dem Nakayama-Lemma aus Algebra 2.

- (b) folgt aus (a).
 (c) Da R lokal ist, folgt $\dim R = \text{ht } \mathfrak{m}$. Außerdem folgt, mit Proposition 5.3 und (b),

$$\text{ht } \mathfrak{m} \leq |\{\text{minimales Erzeugendensystem von } \mathfrak{m}\}| = \dim_k \mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2. \quad \square$$

PROPOSITION 5.5: Ist (R, \mathfrak{m}) regulär, so ist R auch nullteilerfrei.

Beweis: Erinnerung aus Definition/Bemerkung 4.2:

$$\begin{aligned} (R, \mathfrak{m}) \text{ ist regulär} &\iff \dim_k \mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2 = \dim R \\ &\iff \mathfrak{m} \text{ kann durch } \dim R \text{ viele Elemente erzeugt werden.} \end{aligned}$$

Wir beweisen die Aussage nun via Induktion über $d := \dim R = \dim_k \mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2$.

Ist $d = 0$, so kann \mathfrak{m} von 0 Elementen erzeugt werden, d.h. $\mathfrak{m} = \{0\}$ und damit ist R ein Körper.

Sei nun $d \geq 1$ und \wp_1, \dots, \wp_r die minimalen Primideale von R (das sind nur endlich viele, vgl. die Bemerkung zu Beginn des Abschnitts.)

Da $\dim R = d > 0$ ist, kann \mathfrak{m} nicht minimal sein. Also ist $\mathfrak{m} \not\subseteq \wp_i$ für alle $i = 1, \dots, r$. Außerdem gilt: $\mathfrak{m} \not\subseteq \mathfrak{m}^2$, da $\dim_k \mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2 > 0$.

Mit dem Primidealvermeidungslemma ist folglich $\mathfrak{m} \not\subseteq \mathfrak{m}^2 \cup \wp_1 \cup \dots \cup \wp_r$.

Wähle nun $x \in \mathfrak{m} \setminus (\mathfrak{m}^2 \cup \wp_1 \cup \dots \cup \wp_r)$ und ergänze \bar{x} zu einer Basis $\{\bar{x}, \bar{x}_2, \dots, \bar{x}_d\}$ von $\mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2$.

$\pi: R \longrightarrow R/(x)$ bezeichne die kanonische Projektion. Nach Korollar 5.2 gilt

$$\dim R/(x) = d - 1.$$

Ferner gilt für das maximale Ideal $\pi(\mathfrak{m})$ in $R/(x)$, nach Lemma 5.4,

$$\dim_k \pi(\mathfrak{m})/\pi(\mathfrak{m})^2 \leq |\{\text{Erzeuger von } \pi(\mathfrak{m})\}| \leq d - 1.$$

Auch ist $\dim_k \pi(\mathfrak{m})/\pi(\mathfrak{m})^2 \geq \dim R/(x)$, wieder nach Lemma 5.4.

Also gilt oben Gleichheit, d.h. $R/(x)$ ist regulär. Nach Induktionsvoraussetzung ist damit $R/(x)$ nullteilerfrei, d.h. (x) ist Primideal in R .

Damit gibt es ein \wp_i mit $(x) \supsetneq \wp_i$. Sei nun $b \in \wp_i$. Also ist $b = a \cdot x$ mit $a \in R$. Da \wp_i Primideal und $x \notin \wp_i$ ist, muss $a \in \wp_i$ gelten. Also ist

$$\wp_i = \wp_i x \text{ und damit } \wp_i = \wp_i \mathfrak{m}.$$

Nun liefert das Nakayama-Lemma $\wp_i = 0$, d.h. R ist nullteilerfrei. \square

