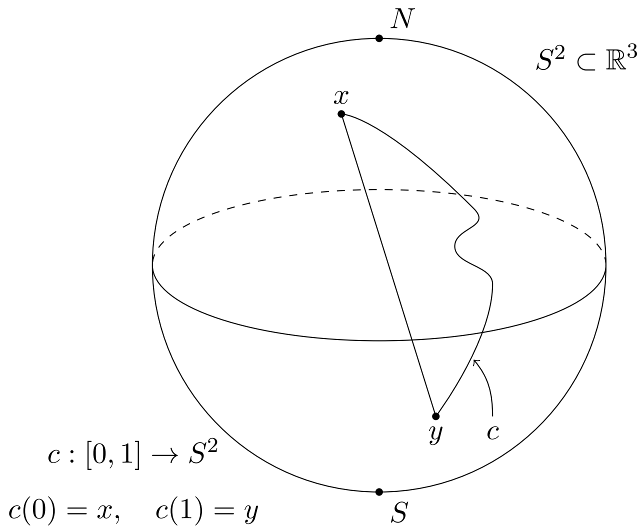
Kapitel 6.

Riemannsche Metriken

Was ist Geometrie? Vereinfacht ausgedrückt suchen wir eine Möglichkeit um Distanzen und Winkel auszudrücken. Betrachte im Folgenden die Einheitssphäre, auf der wir den eine Reise von x nach y unternehmen möchten.



Wir definieren mit $\mathcal{L}(c) = \int_0^1 \|\dot{c}\| \mathrm{d}t$ die **Riemann-Metrik**, also das Skalarprodukt mit allen $\mathrm{T}_p\, M$. Damit folgt dass wenn $c : [0,1] \to M$ glatt ist, dass $\mathcal{L}(c) = \int_0^1 \sqrt{\langle \dot{c}, \dot{c} \rangle}$ und der Abstand auf M kann ausgedrückt werden durch $d_M(x,y) = \inf\{\mathcal{L}(c) \mid c \text{ von } x \text{ nach } y\}$.
Das wirft Fragen auf nach der Existenz kürzester Abstände, Unterschieden zwischen lokal Kürzestem und global Kürzesten und der Eindeutigkeit.

Definition 6.1 *Es sei M eine glatte Mannigfaltigkeit. Eine **Riemannsche Metrik** g auf M ist gegeben durch ein Skalarprodukt auf jedem $\mathrm{T}_p\, M$, welches glatt von p abhängt, das heißt $g \in \mathcal{T}^0_2(M)$, so dass $g_p = \langle \cdot, \cdot \rangle_p : \mathrm{T}_p\, M \times \mathrm{T}_p\, M \to \mathbb{R}$ symmetrisch und positiv definit ist. Ist g eine Riemann-Metrik auf M, so heißt (M, g) eine **Riemannsche Mannigfaltigkeit**.*

Ist (M, g) eine Riemannsche Mannigfaltigkeit, $X, Y \in \mathcal{V}(M)$, $X = \sum \xi^i \frac{\partial}{\partial x^i}$, $Y =$

$\sum \eta^j \frac{\partial}{\partial y^j}$, dann ist

$$\begin{aligned} g(X,Y) &= g\left(\sum \xi^i \frac{\partial}{\partial x^i}, \sum \eta^j \frac{\partial}{\partial y^j}\right) \\ &= \sum_{i,j} \xi^i \eta^j g\left(\frac{\partial}{\partial x^i}, \frac{\partial}{\partial y^j}\right) \\ &= \sum_{i,j} \xi^i \eta^j g_{ij} \qquad (g_{ij} \text{ glatt, } g_{ij} = g_{ji}) \end{aligned}$$

Beispiel (1) $\mathbb{R}^m$ trägt eine natürliche Riemannsche Metrik: Für $x \in \mathbb{R}^m$ ist $\mathcal{I}_x : \mathrm{T}_x \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ ein (natürlicher) Isomorphismus. Damit definiert

$$g_x(\cdot,\cdot) = \langle \mathcal{I}_x(\cdot,\cdot), \mathcal{I}_x(\cdot,\cdot)\rangle$$

eine Riemannsche Metrik auf $\mathbb{R}^m$. Bezüglich der Karte $(\mathrm{id}, \mathbb{R}^m)$ gilt

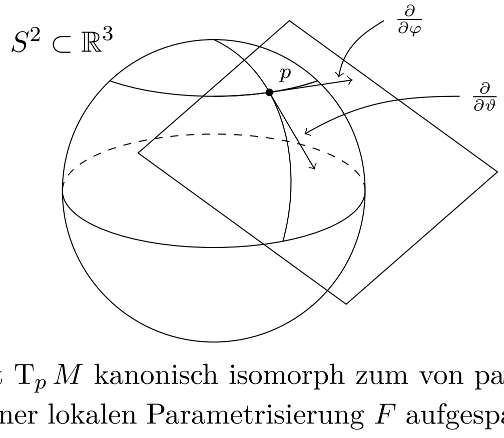
$$g_{ij} = \sum_{ij} \delta_{ij} \mathrm{d}x^i \otimes \mathrm{d}x^j = \sum_i \mathrm{d}x^i \otimes \mathrm{d}x^j$$

(2) Betrachtet man Polarkoordinaten auf $\mathbb{R}^2(r,\vartheta)$:

$$\begin{aligned} \left.\frac{\partial}{\partial r}\right|_{(r,\vartheta)} &= (\cos\vartheta, \sin\vartheta) \\ \left.\frac{\partial}{\partial \vartheta}\right|_{(r,\vartheta)} &= r(-\sin\vartheta, \cos\vartheta) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} g_{rr} &= g\left(\frac{\partial}{\partial r}, \frac{\partial}{\partial r}\right) = 1 \\ g_{\vartheta\vartheta} &= g\left(\frac{\partial}{\partial \vartheta}, \frac{\partial}{\partial \vartheta}\right) = r^2 \\ g_{r\vartheta} &= g_{\vartheta r} = 0 \end{aligned}$$

(3) Sei $M \subseteq \mathbb{R}^n$ m-dimensionale glatte Untermannigfaltigkeit. M trägt eine natürliche Riemann-Metrik:



Für jedes $p \in M$ ist $\mathrm{T}_p M$ kanonisch isomorph zum von partiellen Ableitungen $\partial_1 F|_p, \dots, \partial_m F|_p$ einer lokalen Parametrisierung F aufgespannten Untervektorraum $\mathbb{R}^m$. Mit diesem (lokalen) isomorphismus definiert

$$g_{ij} = \langle \partial_i F, \partial_j F\rangle$$

eine Riemann-Metrik auf M.

Bemerkung Sind φ und ψ Karten einer Riemannschen Mannigfaltigkeit (M, g) um p und sind $g = \sum g_{ij} \mathrm{d}x^i \otimes \mathrm{d}x^j$ und $h = \sum h_{ij} \mathrm{d}y^i \otimes \mathrm{d}y^j$ die lokalen Darstellungen bezüglich φ beziehungsweise ψ, so gilt

$$h_{kl} = g\left(\frac{\partial}{\partial y^k}, \frac{\partial}{\partial y^l}\right) = \sum_{i,j} \frac{\partial x^i}{\partial y^k} \underbrace{\frac{\partial x^j}{\partial y^l}}_{\partial_l(\varphi^i \circ \psi^{-1})} g_{ij}$$

Eine Riemannsche Metrik induziert eine Metrik auf dem Kotangentialbündel: Die Isomorphismen $\mathrm{T}_p M \to \mathrm{T}_p^* M$, $X \mapsto \langle X, \cdot \rangle_p$ einen Isomorphismus von $\mathrm{T} M$ nach $\mathrm{T}^* M$. Für $\omega \in \mathrm{T}_p^* M$ sei $X(\omega) \in \mathrm{T}_p M$ mit $\omega = \langle X(\omega), \cdot \rangle_p$. Man definiert nun durch

$$\langle \omega, \tilde{\omega} \rangle = \langle X(\omega), X(\tilde{\omega}) \rangle$$

ein Skalarprodukt auf $\mathrm{T}_p^* M$. Für $\omega = \sum \omega_i \mathrm{d}x^i$, $X(\omega) = \xi^i \frac{\partial}{\partial x^i}$ gilt

$$\omega_i = \omega\left(\frac{\partial}{\partial x^i}\right) = \left\langle X(\omega), \frac{\partial}{\partial x^i} \right\rangle = \sum_j \xi^i g_{ij}$$

Also $\xi^i = \sum g^{ij} \omega_i$, wobei (g^{ij}) die zu (g_{ij}) inverse Matrix ist. Damit gilt:

$$\begin{aligned}
\langle \omega, \tilde{\omega} \rangle &= \langle X(\omega), X(\tilde{\omega}) \rangle \\
&= \sum g_{kl} \xi^k \xi^l \\
&= \sum g_{kl} g^{ki} \omega_i g^{lj} \tilde{\omega}_j \\
&= \sum \delta_l^i g^{lj} \omega_i \tilde{\omega}_j \\
&= \sum g^{ij} \omega_i \tilde{\omega}_j
\end{aligned}$$

Für beliebige Tensoren $S, S' \in T_q^p(\mathrm{T} M)$ und $T, T' \in T_l^k(\mathrm{T} M)$ definiert man induktiv durch lineare Fortsetzung Skalarprodukte wie folgt:

$$\langle S \otimes T, S' \otimes T' \rangle = \langle S, S' \rangle \otimes \langle T, T' \rangle .$$

Auf $\mathrm{T} M \otimes \mathrm{T} M$ hat die Metrik die folgende Gestalt:

$$\left\langle X \otimes Y, \tilde{X} \otimes \tilde{Y} \right\rangle = \sum g_{ij} g_{kl} \xi^i \tilde{\xi}^j \eta^k \tilde{\eta}^l .$$

Definition 6.2 *Es seien (M, g) und (N, h) Riemannsche Mannigfaltigkeiten. Ein Diffeomorphismus $\Phi\colon M \to N$ heißt* ***Isometrie****, falls $\Phi^* h = g$, das heißt für alle $p \in M$ und $X, Y \in \mathrm{T}_p M$ gilt:*

$$g_p(X, Y) = \underbrace{h_{\Phi(p)}(\Phi_{*p} X, \Phi_{*p} Y)}_{= \Phi^* h(X,Y) \rightsquigarrow \textit{Pullback Metrik}}$$

Ist umgekehrt $\Phi\colon M \to N$ ein Diffeomorphismus und h eine Riemannsche Metrik auf N, so ist $\Phi^* h$ eine Riemannsche Metrik auf M.

Satz 6.3 *Jede glatte Mannigfaltigkeit trägt eine Riemannsche Metrik.*

Um Metriken in den Überlappungsgebieten von Karten „verkleben“ zu können, benötigt man das folgende Hilfsmittel.

Satz (Zerlegung der Eins) Es sei M eine glatte Mannigfaltigkeit und $\{U_i\}_{i\in\mathcal{I}}$ eine offene Überdeckung von M. Dann existiert eine **Zerlegung der Eins** auf einer abzählbaren, lokal endlichen Verfeinerung von $\{U_i\}_{i\in\mathcal{I}}$, das heißt es existiert eine abzählbare offene Überdeckung $\{V_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ von M und glatte Funktionen mit kompaktem Träger $\alpha_k\colon M \to \mathbb{R}$, so dass gilt:

(i) $\forall k \in \mathbb{N}\ \exists i(k) \in \mathcal{I} : V_k \subseteq U_{i(k)}$ (Verfeinerung),
(ii) $\forall p \in M\ \exists U \ni p : \#\{k \mid V_k \cap U \neq \emptyset\} < \infty$ (lokal endlich),
(iii) $\forall k \in \mathbb{N} : \operatorname{supp}(\alpha_k) \subseteq V_k$,
(iv) $\forall k \in \mathbb{N}\ \forall p \in M : 0 \leq \alpha(p) \leq 1$,
(v) $\forall p \in M : \sum_{k\in\mathbb{N}} \alpha_k(p) = 1$.

(Wegen (ii) und (iii) ist die Summe in (v) endlich).

An dieser Stelle geht maßgeblich ein, dass die Topologie von M eine abzählbare Basis besitzt. Beweis siehe Boothby, Kapitel V.4 [1].

Beweis (von Satz 6.3) Es sei M eine glatte, m-dimensionale Mannigfaltigkeit. $\{(\varphi_i, U_i)\}_{i\in\mathcal{I}}$ ein Atlas von M und $\{(V_k, \alpha_k)\}_{k\in\mathbb{N}}$ eine Zerlegung der Eins auf einer abzählbaren, lokal endlichen Verfeinerung von $\{U_i\}_{i\in\mathcal{I}}$. Es sei β ein Skalarprodukt auf $\mathbb{R}^m$. Für jedes $k \in \mathbb{N}$ ist dann

$$g_k = \varphi_{i(k)}\Big|_{V_k}^{*} \beta$$

eine Riemannsche Metrik auf V_k. Damit ist $g = \sum g_k \alpha_k$ eine Riemannsche Metrik auf M. Die Summe ist punktweise endlich und g ist als Komposition glatter Abbildungen selbst glatt. Symmetrie und Bilinearität folgen sofort. Für jedes $p \in M$ gilt $\sum_{k\in\mathbb{N}} \alpha_k(p) = 1$, das heißt es existiert ein $l \in \mathbb{N}$ mit $\alpha_l(p) > 0$ und für $X \in \mathrm{T}_p M$ mit $X \neq 0$ folgt:

$$\begin{aligned} g_p(X,X) &= \sum \underbrace{g_k(p)(X,X)}_{>0} \alpha_k(p) \\ &\geq g_l(p)(X,X)\alpha_l(p) > 0. \end{aligned}$$

Damit ist g positiv definit. □

Für eine glatte Kurve $\gamma\colon [a,b] \to M$ heißt

$$\mathcal{L}(\gamma) = \int_a^b \|\dot\gamma\| = \int_a^b \sqrt{g_{\gamma(t)}(\dot\gamma(t), \dot\gamma(t))}\mathrm{d}t$$

die **(Kurven-)Länge** von γ. Ist $\tau\colon [\alpha,\beta] \to [a,b]$ glatt und monoton, so gilt

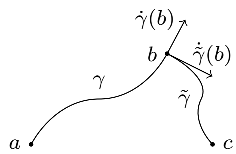
τ' ist die Ableitung von τ, der Strich wurde aus ästhetischen Gründen statt dem Punkt gewählt

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(\gamma\circ\tau) &= \int_\alpha^\beta \|\dot\gamma(\tau(s))\||\tau'(s)|\mathrm{d}s \\ &= \int_a^b \|\dot\gamma\| = \mathcal{L}(\gamma). \end{aligned}$$

Damit ist die Kurvenlänge invariant unter Reparametrisierungen. Ist γ **regulär**, das heißt $\dot{\gamma}(t) \neq 0$ für alle $t \in [a,b]$, so ist ihre sogenannte **Bogenlänge**

$$\sigma\colon [a,b] \to [0, \mathcal{L}(\gamma)], t \mapsto \mathcal{L}(\gamma|_{[a,t]}) = \int_a^t \|\dot{\gamma}\|.$$

streng monoton steigend, also $\sigma'(s) = \|\dot{\gamma}(s)\| > 0$. Für $\tilde{\gamma} = \gamma \circ \sigma^{-1}\colon [0, \mathcal{L}(\gamma)] \to M$ gilt $\|\dot{\tilde{\gamma}}\| \equiv 1$. Die Kurve $\tilde{\gamma}$ heißt **Bogenlängenparametrisierung** von γ. Gilt für $\gamma\colon [a,b] \to M$ dass $\|\dot{\gamma}\| \equiv \lambda$, so heißt γ **proportional zur Bogenlänge** parametrisiert.
Sind $\gamma\colon [a,b] \to M, \tilde{\gamma}\colon [b,c] \to M$ glatte Kurven mit $\gamma(b) = \tilde{\gamma}(b)$, so sei



$$\mathcal{L}(\gamma \cup \tilde{\gamma}) = \mathcal{L}(\gamma) + \mathcal{L}(\tilde{\gamma}).$$

Eine Kurve $\gamma\colon [a,b] \to M$ heißt **stückweise glatt**, wenn $t_0, \dots, t_k$ mit $a = t_0 < t_1 < \dots < t_k = b$ existieren, so dass $\gamma|_{[t_{i-1}, t_i]}$ für alle $i \leq k$ glatt ist.

Definition 6.4 *Für Punkte $p, q \in M$ ist der **Abstand** definiert durch:*

$$\mathrm{d}(p,q) = \inf\{\mathcal{L}(\gamma) \mid \gamma\colon [0,1] \to M \textit{ stückweise glatt mit } \gamma(0) = p, \gamma(1) = q\}.$$

Satz 6.5 *Es sei (M,g) eine zusammenhängende Riemannsche Mannigfaltigkeit. Die Abstandsfunktionen bilden eine Metrik auf M, welche die ursprüngliche Topologie induziert.*

Der Beweis sei zur Übung überlassen.

Satz 6.6 *Es seien (M,g) und (N,h) zusammenhängende Riemannsche Mannigfaltigkeiten und $\Phi\colon M \to N$ ein Diffeomorphismus. Dann ist Φ genau dann eine Isometrie, wenn $\mathcal{L}(\Phi \circ \gamma) = \mathcal{L}(\gamma)$ für alle glatten $\gamma\colon [0,1] \to M$ gilt.*

Beweis Dass eine Isometrie die Kurvenlängen erhält gilt offensichtlich. Erhält Φ die Kurvenlängen, so erhält Φ auch die Norm von Tangentialvektoren, den andernfalls gäbe es $X_p \in \mathrm{T}_p M$ mit (ohne Einschränkung)

$$h_{\Phi(p)}(\Phi_{*p}X, \Phi_{*p}X) > g_p(X,X)$$

und eine Kurve $\gamma\colon [0,1] \to M$ mit $\gamma(0) = X$ und es gälte (für hinreichend kleines ε):

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}(\gamma|_{[0,\varepsilon]}) &= \int_0^\varepsilon \sqrt{g_{\gamma(t)}\left(\dot{\gamma}(t), \dot{\gamma}(t)\right)}\mathrm{d}t \\
&< \int_0^\varepsilon \sqrt{h_{\Phi(\gamma(t))}\left(\Phi_{*\gamma(t)}\dot{\gamma}(t), \Phi_{*\gamma(t)}\dot{\gamma}(t)\right)}\mathrm{d}t \\
&= \int_0^\varepsilon \sqrt{h_{\Phi(\gamma(t))}\left((\Phi \dot{\circ} \gamma)(t), (\Phi \dot{\circ} \gamma)(t)\right)}\mathrm{d}t \\
&= \mathcal{L}\left((\Phi \circ \gamma)|_{[0,\varepsilon]}\right).
\end{aligned}$$

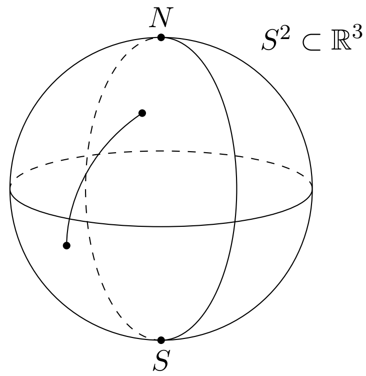
Mit der Polarisationsformel $\langle x, y\rangle = -\frac{1}{2}(\|x-y\|^2 - \|x\|^2 - \|y\|^2)$ folgt dann, dass Φ auch die Skalarprodukte erhält. $\square$

Definition 6.7 *Eine Kurve $\gamma\colon [a,b] \to M$ heißt **minimale Geodätische** von $\gamma(a)$ nach $\gamma(b)$, falls ein $\lambda \geq 0$ existiert, so dass für alle $a \leq s < t \leq b$ gilt:*

$$\mathcal{L}(\gamma|_{[s,t]}) = \lambda(t-s) = \mathrm{d}(\gamma(s), \gamma(t)).$$

*Eine Kurve γ heißt **Geodätische**, falls sie lokal minimierende Geodätische ist, das heißt für alle $t \in [a,b]$ existiert ein $\varepsilon > 0$, so dass $\gamma|_{[t-\varepsilon,t+\varepsilon]}$ minimierende Geodätische ist.*

Eine bessere Vorstellung erhält man durch Betrachtung von Geodätischen als Isometrien von Intervallen in den euklidischen Raum, denn $\mathrm{d}(\gamma(s), \gamma(t)) = t-s = \mathrm{d}_{\mathbb{R}}(t,s)$.



Geodätische = Großkreissegmente

Bemerkung (1) Die Geodätischen von $\mathbb{R}^n$ mit Standardmetrik sind genau die Geradensegmente.

(2) Ist γ eine minimale Geodätische, so gilt $\|\dot\gamma\| = \lambda$, falls $\lambda > 0$, existiert eine Bogenlängenparametrisierung $\tilde\gamma$ von γ auf $[0,l]$ mit $l = \mathcal{L}(\gamma) = \mathcal{L}(\tilde\gamma)$ und $\mathrm{d}(\tilde\gamma(0), \tilde\gamma(t)) = t$. Damit ist $\tilde\gamma$ eine isometrische Einbettung von $[0,l]$ in M.

Definition 6.8 *Es sei $\gamma\colon [a,b] \to M$ eine (stückweise) glatte Kurve auf M. Das Integral*

$$E(\gamma) = \frac{1}{2}\int_a^b \|\dot\gamma\|^2$$

*heißt **Energie** von γ.*

Lemma 6.9 *Für eine (stückweise) glatte Kurve $\gamma\colon [0,1] \to M$. Dann gilt:*

$$\frac{1}{2}\mathcal{L}(\gamma)^2 \leq E(\gamma),$$

wobei Gleichheit genau dann gilt, wenn γ proportional zur Bogenlänge parametrisiert ist.

Beweis Es gilt die Cauchy-Schwarzsche Ungleichung für das Skalarprodukt $(f,g) \mapsto \int_0^1 fg$ mit $f, g \in \mathbb{C}^\infty([0,1], \mathbb{R})$.
Nun sei $f \equiv 1$ und $g = \|\dot\gamma\|$, so folgt:

$$\mathcal{L}(\gamma) = \int_0^1 \|\dot\gamma\| \leq \left| \left(\int_0^1 f^2\right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_0^1 g^2\right)^{\frac{1}{2}} \right| = \sqrt{2E(\gamma)}$$

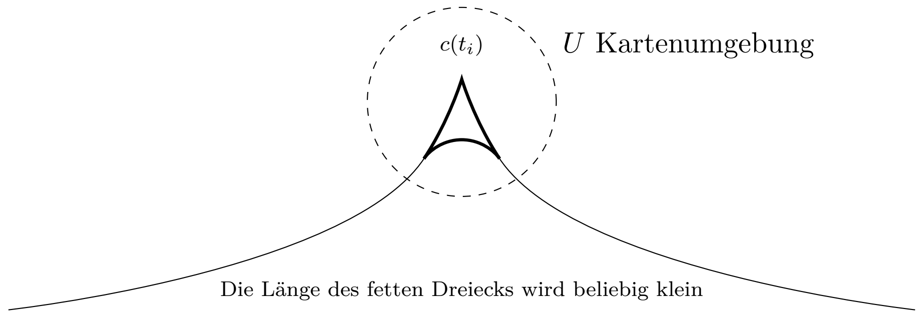
Gleichheit gilt genau dann, wenn 1 und $\|\dot\gamma\|$ $\mathbb{R}$-linear abhängig sind, das heißt wenn $\|\dot\gamma\| \equiv \lambda$ gilt. $\square$

Satz 6.10 *Eine (stückweise) glatte Kurve ist genau dann minimale Geodätische, wenn ihre Energie minimal ist.*

Beweis „$\Rightarrow$“: Es sei γ minimale Geodätische, das heißt $\mathcal{L}(\gamma|_{[0,t]}) = \lambda t = \mathrm{d}(\gamma(0), \gamma(t))$. Also gilt $E(\gamma) = \frac{1}{2}\mathcal{L}(\gamma)^2 \leq \frac{1}{2}\mathcal{L}(c)^2 \leq E(c)$, wobei c eine Kurve zwischen den Endpunkten von γ ist und die letzte Ungleichung aus Lemma 6.9 folgt.

„$\Leftarrow$“: Sei γ energieminimierend.

$$\frac{1}{2}\mathrm{d}(\gamma(0), \gamma(1))^2 \leq \frac{1}{2}\mathcal{L}(\gamma)^2 \leq E(\gamma) \leq E(\underbrace{c_n}_{\text{reguläre Kurven}}) = \frac{1}{2}\mathcal{L}(c_n)^2 \xrightarrow{n\to\infty} \frac{1}{2}\mathrm{d}(\gamma(0), \gamma(1))^2$$



Damit gilt: $\mathcal{L}(\gamma) = \mathrm{d}(\gamma(0), \gamma(1))$ und wegen Cauchy-Schwarz ist γ proportional zur Bogenlänge parametrisiert. Wendet man dieses Argument auf beliebige Teilstücke an, erhält man:

$$\mathcal{L}(\gamma|_{[s,t]}) = \mathrm{d}(\gamma(s), \gamma(t)) = \lambda(s - t).$$

□