2. Natürliche Zahlen

Definition (Induktionsmengen)
Sei $M \subseteq \mathbb{R}$. M heißt eine **Induktionsmenge** $(IM) :\iff$

(1) $1 \in M$

(2) Aus $x \in M$ folgt stets $x + 1 \in M$

Beispiel
$\mathbb{R}$, $[1, \infty)$, und $\{1\} \cup [2, \infty)$ sind Induktionsmengen.

$J := \{A \subseteq \mathbb{R} : A \text{ ist eine IM }\}$; $\mathbb{N} := \bigcap\limits_{A \in J} A$ heißt die Menge der **natürlichen Zahlen**.

Satz 2.1 (Induktionsmengen)

(1) $\mathbb{N} \in J$

(2) $\mathbb{N} \subseteq A \ \forall A \in J$

(3) $\mathbb{N}$ ist *nicht* nach oben beschränkt.

(4) $\forall x \in \mathbb{R} \ \exists n \in \mathbb{N} : n > x$

(5) *Prinzip der vollständigen Induktion:* Ist $A \subseteq \mathbb{N}$ und $A \in J \implies A = \mathbb{N}$

Beweis

(1) $1 \in A \ \forall A \in J \implies x + 1 \in A \ \forall xinA \ \forall A \in J \implies x + 1 \in \mathbb{N} \ \forall xin\mathbb{N}$

(2) folgt aus der Definition von $\mathbb{N}$

(3) Annahme: $\mathbb{N}$ ist nach oben beschränkt. **(A15)**: $s := \sup \mathbb{N}$. 1.3 $\implies \exists n \in \mathbb{N} : n > s - 1$; **(1)** $\implies n + 1 \in \mathbb{N} \implies n + 1 > s$; Widerspruch

(4) folgt aus (3)

(5) $A \overset{\text{Vor.}}{\subseteq} \mathbb{N} \overset{(2)}{\subseteq} A \implies A = \mathbb{N}$ ■

Satz 2.2 (Beweisverfahren durch vollständige Induktion)
Für jedes $n \in \mathbb{N}$ sei eine Aussage $A(n)$ gemacht. Es gelte: (I) $A(1)$ ist wahr und (II) aus $n \in \mathbb{N}$ und $A(n)$ wahr folgt stets $A(n + 1)$ ist wahr.

Behauptung: $A(n)$ ist wahr für **jedes** $n \in \mathbb{N}$.

Beweis
$A := \{n \in \mathbb{N} : A(n) \text{ ist wahr}\}$. Dann: $A \subseteq \mathbb{N}$, aus (I) und (II) folgt $A \in J$. ∎

Beispiele:

(1) $A(n) := n \geq 1$. $A(n)\ \forall n \in \mathbb{N}$. Beweis (induktiv):
Induktionsanfang (IA): $1 \geq 1$, also ist $A(1)$ wahr.
Induktionsvorausseztung (IV): Sei $n \in \mathbb{N}$ und $A(n)$ wahr (also $n \geq 1$)
Induktionsschritt (IS, $n \curvearrowright n+1$): $n + 1 \overset{(IV)}{\geq} 1 + 1 \geq 1$, also $A(n+1)$ wahr.

(2) Für $n \in \mathbb{N}$ sei $A_n := (\mathbb{N}\ \cap\ [1, n])\ \cup\ [n + 1, \infty)$.
Behauptung: $\underbrace{A_n \text{ ist eine Induktionsmenge}}_{A(n)}\ \forall n \in \mathbb{N}$

(3) Sei $n \in \mathbb{N}, x \in \mathbb{R}$ und $n < x < n + 1$. Behauptung: $x \notin \mathbb{N}$. Beweis: Annahme: $x \in \mathbb{N}$. Sei A_m wie im oberen Beispiel (2) $\implies A_m \in J \implies \mathbb{N} \subseteq A_m \implies x \in A_m \implies x \leq m$ oder $x \geq m + 1$, Widerspruch!

(4) Behauptung: $\underbrace{1 + 2 + \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2}}_{A(n)}\ \forall n \in \mathbb{N}$
Beweis: (induktiv)
IA: $\frac{1+1}{2} = 1 \implies A(1)$ ist wahr.
IV: Sei $n \in \mathbb{N}$ und $1 + 2 + \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2}$.
IS: $(n \curvearrowright n + 1)$

$1 + 2 + \cdots + n + (n + 1) \overset{(IV)}{=} \frac{n(n+1)}{2} + (n + 1)(IV) = (n + 1)(\frac{n}{2} + 1) = \frac{(n+1)(n+2)}{2} \implies$
A(n+1) ist wahr

Definition (Summen- und Produktzeichen)

(1) Seien $a_1, a_2, \ldots, a_n \in \mathbb{R}, n \in \mathbb{N}$.

$$\sum_{k=1}^{n} a_k := a_1 + a_2 + \ldots + a_n$$

$$\prod_{k=1}^{n} a_k := a_1 \cdot a_2 \cdot \ldots \cdot a_n$$

(2) $\mathbb{N}_0 := \mathbb{N} \cup \{0\}$,
$\mathbb{Z} := \mathbb{N}_0 \cup \{-n : n \in \mathbb{N}\}$ (*ganze Zahlen*),
$\mathbb{Q} = \{\frac{p}{q} : p \in \mathbb{Z}, q \in \mathbb{N}\}$ (*rationale Zahlen*).

Satz 2.3 (Ganze Zahlen)
Sei $\emptyset \neq M \subseteq \mathbb{R}$.

(1) Ist $M \subseteq \mathbb{N}$, so existiert $\min M$

(2) Ist $M \subseteq \mathbb{Z}$ nach oben beschränkt, so existiert $\max M$; ist $M \subseteq \mathbb{Z}$ nach unten beschränkt, so existiert $\min M$.

(3) Ist $a \in \mathbb{R}$, so existiert genau ein $k \in \mathbb{Z} : k \leq a\ < k + 1$. Bezeichnung: $[a] := k$.

Beweis

(1) $1 \leq n \ \forall n \in M \implies M$ ist nach unten beschränkt. 1.2 $\implies \exists \alpha = \inf M$ mit $\alpha + 1$ ist keine untere Schranke von M. $\implies \exists m \in M : m < \alpha + 1$. Sei $n \in M$. Annahme: $n < m \implies n < m < \alpha + 1 \leq n + 1 \implies n < m < n + 1$. Da $n \in \mathbb{N}$: Widerspruch.

(2) *Zur Übung*

(3) $M := \{z \in \mathbb{Z} : z \leq a\}$. Annahme: $M = \emptyset \implies z > a \ \forall z \in \mathbb{Z} \implies -n > a \ \forall n \in \mathbb{N} \implies n < -a \ \forall n \in \mathbb{N}$. Widerspruch zu 2.1(3); also: $M \neq \emptyset$. (2) $\implies \exists k := \max M$. ■

Satz 2.4 (Zwischen zwei reellen Zahlen liegt stets eine rationale)
Sind $x, y \in \mathbb{R}$ und $x < y$, so existiert ein $r \in \mathbb{Q} : x < r < y$.

Beweis

$$y - x > 0 \text{ 2.1(4)} \implies \exists n \in \mathbb{N} : n > \frac{1}{y-x} \implies \frac{1}{n} < y - x \implies x + \frac{1}{n} < y$$

$$m := [nx] \in \mathbb{Z} \implies m < nx < m+1 \implies \frac{m}{n} \leq x < \frac{m+1}{n} = \frac{m}{n} + \frac{1}{n} \leq x + \frac{1}{n} \implies x < \overbrace{\frac{m+1}{n}}^{:=r} < y$$