

§ 11 Der Transformationssatz (Substitutionsregel)

Die Sätze in diesem Paragraphen geben wir **ohne** Beweis an. Es seien $X, Y \subseteq \mathbb{R}^d$ nichtleer und offen.

Definition

Sei $\Phi: X \rightarrow Y$ eine Abbildung. Φ heißt **Diffeomorphismus** genau dann wenn $\Phi \in C^1(X, \mathbb{R}^d)$, Φ ist bijektiv und $\Phi^{-1} \in C^1(Y, \mathbb{R}^d)$.

Es gilt

$$x = \Phi^{-1}(\Phi(x)) \text{ für jedes } x \in X$$

Kettenregel:

$$I = (\Phi^{-1})'(\Phi(x)) \cdot \Phi'(x) \text{ für jedes } x \in X$$

Das heißt $\Phi'(x)$ ist invertierbar für alle $x \in X$ und somit ist $\det(\Phi'(x)) \neq 0$ für alle $x \in X$.

Satz 11.1 (Transformationssatz (Version I))

$\Phi: X \rightarrow Y$ sei ein Diffeomorphismus.

- (1) $f: Y \rightarrow [0, +\infty]$ sei messbar und für $x \in X$ sei $g(x) := f(\Phi(x)) \cdot |\det \Phi'(x)|$.
Dann ist g messbar und es gilt:

$$\int_Y f(y) dy = \int_X g(x) dx = \int_X f(\Phi(x)) \cdot |\det \Phi'(x)| dx \quad (*)$$

- (2) $f: Y \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ sei integrierbar und g sei definiert wie in (1). Dann ist g integrierbar und es gilt die Formel (*).

Erinnerung: Sei $A \subseteq \mathbb{R}^d$ und $A^\circ := \{x \in A : \text{es existiert ein } r = r(x) > 0 \text{ mit } U_r(x) \subseteq A\}$ das **Innere** von A . A° ist offen!

Beispiel

Sei $A = \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$. Es ist $A^\circ = \emptyset$ und $A \setminus A^\circ = A$. Aus $\mathbb{R} = A \dot{\cup} \mathbb{Q}$ folgt

$$\infty = \lambda_1(\mathbb{R}) = \lambda_1(A) + \lambda_1(\mathbb{Q}) = \lambda_1(A)$$

Das heißt $A \setminus A^\circ$ ist keine Nullmenge.

Satz 11.2 (Transformationssatz (Version II))

Es sei $\emptyset \neq U \subseteq \mathbb{R}^d$ offen, $\Phi \in C^1(U, \mathbb{R}^d)$, $A \subseteq U$, $A \in \mathfrak{B}_d$, $X := A^\circ$ und $A \setminus A^\circ$ eine Nullmenge. Weiter sei Φ injektiv auf X , $\det \Phi' \neq 0$ für alle $x \in X$, $B := \Phi(A) \in \mathfrak{B}_d$ und $g(x) = f(\Phi(x)) \cdot |\det \Phi'(x)|$ für $x \in A$. Dann gilt:

(1) $Y := \Phi(X)$ ist offen und $\Phi : X \rightarrow Y$ ist ein Diffeomorphismus.

(2) Ist $f : B \rightarrow [0, \infty]$ messbar, so ist $g : A \rightarrow [0, \infty]$ messbar und

$$\int_B f(y) dy = \int_A g(x) dx = \int_A f(\Phi(x)) \cdot |\det(\Phi'(x))| dx \quad (**)$$

(3) Ist $f : B \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ messbar, so gilt:

$$f \in \mathfrak{L}^1(B) \iff g \in \mathfrak{L}^1(A)$$

Ist $f \in \mathfrak{L}^1(B)$ so gilt (**)

Folgerungen 11.3

(1) Sei $T : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^d$ linear und $\det T \neq 0$. Weiter sei $A \in \mathfrak{B}_d$ und $v \in \mathbb{R}^d$. Dann ist $T(A) \in \mathfrak{B}_d$ und es gilt:

$$\lambda_d(T(A) + v) = |\det T| \cdot \lambda_d(A)$$

(2) $\Phi : X \rightarrow Y$ sei ein Diffeomorphismus und $A \in \mathfrak{B}(X)$. Dann ist $\Phi(A) \in \mathfrak{B}_d$ und es gilt:

$$\lambda_d(\Phi(A)) = \int_A |\det \Phi'(X)| dx$$

(3) Sei $F \in C^1(X, \mathbb{R}^d)$ und $N \subseteq X$ eine Nullmenge. Dann ist $F(N)$ enthalten in einer Nullmenge.

Beispiel

Seien $a, b > 0$ und $T := \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}$, $\det T = ab > 0$. Definiere:

$$A := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 1\}$$

Dann ist $A \in \mathfrak{B}_2$ und $\lambda_2(A) = \pi$.

$$\begin{aligned} (u, v) \in T(A) &\iff \exists (x, y) \in A : (u, v) = (ax, by) \\ &\iff \exists (x, y) \in A : (x = \frac{u}{a}) \wedge (y = \frac{v}{b}) \\ &\iff \frac{u^2}{a^2} + \frac{v^2}{b^2} \leq 1 \end{aligned}$$

Aus 11.3 folgt $T(A) \in \mathfrak{B}_2$ und $\lambda(T(A)) = ab\pi$.

11.4. Polarkoordinaten

Jeder Vektor im \mathbb{R}^2 lässt sich nicht nur durch seine Projektionen auf die Koordinatenachsen (x, y) , sondern auch eindeutig durch seine Länge r und den (kleinsten positiven) Winkel φ zur

x -Achse darstellen. Diese Darstellung (r, φ) heißen die **Polarkoordinaten** des Vektors. Dabei gilt:

$$r = \|(x, y)\| = \sqrt{x^2 + y^2}$$

und

$$\begin{cases} x = r \cos(\varphi) \\ y = r \sin(\varphi) \end{cases}$$

Definiere nun für $(r, \varphi) \in [0, \infty) \times [0, 2\pi]$:

$$\Phi(r, \varphi) := (r \cos(\varphi), r \sin(\varphi))$$

Dann ist $\Phi \in C^1(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^2)$ und es gilt:

$$\Phi'(r, \varphi) = \begin{pmatrix} \cos(\varphi) & -r \sin(\varphi) \\ \sin(\varphi) & r \cos(\varphi) \end{pmatrix}$$

d.h. falls $r > 0$ ist gilt:

$$\det \Phi'(r, \varphi) = r \cos^2(\varphi) + r \sin^2(\varphi) = r > 0$$

Bemerkung (Faustregel für Polarkoordinaten): Ist ein Integral der Form $\int_B f(x, y) d(x, y)$ zu berechnen, so lässt sich oft eine Menge A finden, sodass $\Phi(A) = B$ ist. Mit 11.2 folgt dann:

$$\int_B f(x, y) d(x, y) = \int_A f(r \cos \varphi, r \sin \varphi) \cdot r d(r, \varphi)$$

Beispiel

(1) Sei $0 \leq \rho < R$. Definiere

$$B := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \rho^2 \leq x^2 + y^2 \leq R^2\}$$

Dann gilt:

$$\begin{aligned} \lambda_2(B) &= \int_B 1 d(x, y) \\ &= \int_A 1 \cdot r d(r, \varphi) \\ &\stackrel{\S 10}{=} \int_{\rho}^R \left(\int_0^{2\pi} r d\varphi \right) dr \\ &= \left[2\pi \frac{1}{2} r^2 \right]_{\rho}^R \\ &= \pi(R^2 - \rho^2) \end{aligned}$$

(2) Definiere

$$B := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 1, y \geq 0\}$$

11. Der Transformationssatz (Substitutionsregel)

Dann gilt:

$$\begin{aligned}
 \int_B y \sqrt{x^2 + y^2} \, d(x, y) &= \int_A r \sin(\varphi) r \cdot r \, d(r, \varphi) \\
 &= \int_A r^3 \sin \varphi \, d(r, \varphi) \\
 &\stackrel{\S 10}{=} \int_0^\pi \left(\int_0^1 r^3 \sin \varphi \, dr \right) d\varphi \\
 &= \frac{1}{4} \int_0^\pi \sin \varphi \, d\varphi \\
 &= \left[-\frac{1}{4} \cos \varphi \right]_0^\pi \\
 &= \frac{1}{4} (1 + 1) = \frac{1}{2}
 \end{aligned}$$

(3) **Behauptung:**

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} dx = \sqrt{\pi}$$

Beweis: Für $\rho > 0$ sei

$$B_\rho := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x, y \geq 0, x^2 + y^2 \leq \rho^2\}$$

Weiterhin sei $Q_\rho := [0, \rho] \times [0, \frac{\pi}{2}]$ und $f(x, y) = e^{-(x^2+y^2)}$. Dann gilt:

$$\begin{aligned}
 \int_{B_\rho} f(x, y) \, d(x, y) &= \int_{Q_\rho} e^{-r^2} r \, d(r, \varphi) \\
 &\stackrel{\S 10}{=} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\int_0^\rho r e^{-r^2} \, dr \right) d\varphi \\
 &= \frac{\pi}{2} \left[-\frac{1}{2} e^{-r^2} \right]_0^\rho \\
 &= \frac{\pi}{2} \left(-\frac{1}{2} e^{-\rho^2} + \frac{1}{2} \right) \\
 &=: h(\rho) \xrightarrow{\rho \rightarrow \infty} \frac{\pi}{4}
 \end{aligned}$$

Außerdem gilt:

$$\begin{aligned}
 \int_{Q_\rho} f(x, y) \, d(x, y) &= \int_{Q_\rho} e^{-x^2} e^{-y^2} \, d(x, y) \\
 &= \int_0^\rho \left(\int_0^\rho e^{-x^2} e^{-y^2} \, dy \right) dx \\
 &= \left(\int_0^\rho e^{-x^2} \, dx \right)^2
 \end{aligned}$$

Wegen $B_\rho \subseteq Q_\rho \subseteq B_{\sqrt{2}\rho}$ und $f \geq 0$ folgt:

$$\begin{aligned}
 \int_{B_\rho} f \, d(x, y) &\leq \int_{Q_\rho} f \, d(x, y) \leq \int_{B_{\sqrt{2}\rho}} f \, d(x, y) \\
 \Rightarrow h(\rho) &\leq \int_{Q_\rho} f \, d(x, y) \leq h(\sqrt{2}\rho) \\
 \Rightarrow h(\rho) &\leq \left(\int_0^\rho e^{-x^2} \, dx \right)^2 \leq h(\sqrt{2}\rho) \\
 \Rightarrow \sqrt{h(\rho)} &\leq \int_0^\rho e^{-x^2} \, dx \leq \sqrt{h(\sqrt{2}\rho)}
 \end{aligned}$$

Mit $\rho \rightarrow \infty$ folgt daraus

$$\int_0^\infty e^{-x^2} dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$$

und damit die Behauptung.

11.5. Zylinderkoordinaten

Definiere für $(r, \varphi, z) \in [0, \infty) \times [0, 2\pi] \times \mathbb{R}$:

$$\Phi(r, \varphi, z) := (r \cos(\varphi), r \sin(\varphi), z)$$

Dann gilt:

$$|\det \Phi'(r, \varphi, z)| = \left| \det \begin{pmatrix} \cos(\varphi) & -r \sin(\varphi) & 0 \\ \sin(\varphi) & r \cos(\varphi) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \right| = r$$

Bemerkung (Faustregel für Zylinderkoordinaten): Ist ein Integral der Form $\int_B f(x, y, z) d(x, y, z)$ zu berechnen, so lässt sich eine Menge A finden, sodass $\Phi(A) = B$ ist. Mit 11.2 folgt dann:

$$\int_B f(x, y, z) d(x, y, z) = \int_A f(r \cos \varphi, r \sin \varphi, z) \cdot r d(r, \varphi, z)$$

Beispiel

Definiere

$$B := \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 \leq 1, x, y \geq 0, z \in [0, 1]\}$$

Dann gilt:

$$\begin{aligned} \int_B z + y\sqrt{x^2 + y^2} d(x, y, z) &= \int_A (z + r \sin(\varphi) \cdot r) \cdot r d(r, \varphi, z) \\ &= \int_A rz + r^3 \sin(\varphi) d(r, \varphi, z) \\ &= \int_0^1 \left(\int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\int_0^1 rz + r^3 \sin(\varphi) dr \right) d\varphi \right) dz \\ &= \left(\int_0^1 r dr \right) \cdot \left(\int_0^1 z dz \right) \cdot \left(\int_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \right) + \left(\int_0^1 r^3 dr \right) \cdot \left(\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin(\varphi) d\varphi \right) \cdot \left(\int_0^1 dz \right) \\ &= \frac{\pi}{8} + \frac{1}{4} \end{aligned}$$

11.6. Kugelkoordinaten

Definiere für $(r, \varphi, \theta) \in [0, \infty) \times [0, 2\pi] \times [0, \pi]$:

$$\Phi(r, \varphi, \theta) := (r \cos(\varphi) \sin(\theta), r \sin(\varphi) \sin(\theta), r \cos(\theta))$$

Dann gilt (nachrechnen!):

$$\det \Phi'(r, \varphi, \theta) = -r^2 \sin(\theta)$$

11. Der Transformationssatz (Substitutionsregel)

Bemerkung (Faustregel für Kugelkoordinaten): Ist ein Integral der Form $\int_B f(x, y, z) d(x, y, z)$ zu berechnen, so lässt sich eine Menge A finden, sodass $\Phi(A) = B$ ist. Mit 11.2 folgt dann:

$$\int_B f(x, y, z) d(x, y, z) = \int_A f(r \cos(\varphi) \sin(\theta), r \sin(\varphi) \sin(\theta), r \cos(\theta)) \cdot r^2 \sin(\theta) d(r, \varphi, \theta)$$

Beispiel

Definiere

$$B := \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid 1 \leq \|(x, y, z)\| \leq 2, x, y, z \geq 0\}$$

Dann gilt:

$$\begin{aligned} \int_B \frac{1}{x^2 + y^2 + z^2} d(x, y, z) &= \int_A \frac{1}{r^2} \cdot r^2 \cdot \sin(\theta) d(r, \varphi, \theta) \\ &= \int_A \sin(\theta) d(r, \varphi, \theta) \\ &= \frac{\pi}{2} \end{aligned}$$

Beispiel (Zugabe von Herrn Dr. Ullmann)

Wir wollen das Kugelvolumen $\lambda_3(K)$ mit $K := \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid \|(x, y, z)\| \leq 1\}$ berechnen. Dann ist $K = \Phi(A)$ mit $A := [0, 1] \times [0, 2\pi] \times [0, \pi]$. Und es gilt:

$$\begin{aligned} \lambda_3(K) &= \int_K 1 d(x, y, z) \\ &= \int_A r^2 \sin(\theta) d(r, \varphi, \theta) \\ &= \int_0^1 \left(\int_0^{2\pi} \left(\int_0^\pi r^2 \sin(\theta) d\theta \right) d\varphi \right) dr \\ &= \left(\int_0^1 r^2 dr \right) \cdot \left(\int_0^{2\pi} d\varphi \right) \cdot \left(\int_0^\pi \sin(\theta) d\theta \right) \\ &= \frac{4\pi}{3} \end{aligned}$$