

## 20. Lineare Differentialgleichungen $m$ -ter Ordnung mit konstanten Koeffizienten

Wir gehen wie in §17 den Weg über das Komplexe:

$I \subseteq \mathbb{R}$  sei ein Intervall,  $a_0, a_1, \dots, a_{m-1} \in \mathbb{C}$ ,  $b: I \rightarrow \mathbb{C}$  sei stetig;  $x_0 \in I, y_0, \dots, y_{m-1} \in \mathbb{C}$

Wir betrachten die DGL:

$$Ly := y^{(m)} + a_{m-1}y^{(m-1)} + \dots + a_1y' + a_0y = b(x)$$

§18/19 obiger Gleichung entspricht das folgende System

$$z' = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & 1 \\ -a_0 & -a_1 & \cdots & \cdots & -a_{m-1} \end{pmatrix} z + \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ \vdots \\ 0 \\ b(x) \end{pmatrix}$$

Aus §17 folgt:

### Satz 20.1

(1)

$$\text{das AWP } \begin{cases} Ly = b(x) \\ y(x_0) = y_0, y'(x_0) = y_1, \dots, y^{(m-1)}(x_0) = y_{m-1} \end{cases}$$

hat auf  $I$  genau eine Lösung.

(2) Die Definitionen und Sätze des §en 19 gelten auch im Komplexen.  $\mathbb{L}$  ist ein komplexer VR,  $\dim \mathbb{L} = m$ .

Wir betrachten zunächst die homogene Gleichung (H)  $Ly = 0$

$p(\lambda) := \lambda^m + a_{m-1}\lambda^{m-1} + \dots + a_1\lambda + a_0$  heißt das charakteristische Polynom von (H).

Beachte:  $p(\lambda) = \det(\lambda E - A)$ .

### Satz 20.2 (ohne Beweis)

Sie  $p$  das char. Polynom von (H)

(1)  $\lambda_0$  sei eine  $q$ -fache Nullstelle von  $p$ . Dann sind  $e^{\lambda_0 x}, xe^{\lambda_0 x}, \dots, x^{q-1}e^{\lambda_0 x}$  linear unabhängige Lösungen von (H).

- (2) Führt man (1) für jede Nullstelle von  $p$  durch, so erhält man ein (komplexes) FS von (H).
- (3) Es seien  $a_0, a_1, \dots, a_{m-1} \in \mathbb{R}$ . Dann erhält man ein reelles FS von (H) wie folgt:  
Sei  $\lambda$  eine Nullstelle von  $p$ .
- (i) Ist  $\lambda_0 \in \mathbb{R}$ , so übernehme die Lösungen aus (1).
- (ii) Ist  $\lambda_0 \notin \mathbb{R}$ , und  $y$  eine Lösung aus (1), so bilde die reellen Lösungen  $\operatorname{Re} y$  und  $\operatorname{Im} y$  und streiche die zu  $\overline{\lambda_0}$  gehörenden Lösungen.

**Beispiele:**

(1)  $y^{(6)} - 6y^{(5)} + 9y^{(4)} = 0$   
 $p(\lambda) = \lambda^6 - 6\lambda^5 + 9\lambda^4 = \lambda^4(\lambda^2 - 6\lambda + 9) = \lambda^4(\lambda - 3)^2$

$$\left. \begin{array}{l} \lambda_1 = 0 : 1, x, x^2, x^3 \\ \lambda_2 = 3 : e^{3x}, xe^{3x} \end{array} \right\} \text{FS obiger Gleichung}$$

Allgemeine Lösung:  $y(x) = c_1 + c_2x + c_3x^2 + c_4x^3 + c_5e^{3x} + c_6xe^{3x}$

(2)  $y''' - 2y'' + y' - 2y = 0$   
 $p(\lambda) = \lambda^3 - 2\lambda^2 + \lambda - 2 = (\lambda - 2)(\lambda^2 + 1) = (\lambda - 2)(\lambda - i)(\lambda + i)$   
 $\lambda_1 = i$  : komplexe Lösung  $e^{ix} = \cos x + i \sin x$   
 $\lambda_2 = 2$  :  $e^{2x}$   
 FS :  $e^{2x}, \cos x, \sin x$   
 Allgemeine Lösung :  $y(x) = c_1e^{2x} + c_2 \cos x + c_3 \sin x$  ( $c_1, c_2, c_3 \in \mathbb{R}$ )

(3) Löse das AWP:

$$\begin{cases} y''' - 2y'' + y' - 2y = 0 \\ y(0) = 0, y'(0) = 1, y''(0) = 0 \end{cases}$$

Allgemeine Lösung der DGL:  $y(x) = c_1e^{2x} + c_2 \cos x + c_3 \sin x$   
 $0 = y(0) = c_1 + c_2 \quad c_1 = -c_2$   
 $1 = y'(0) = 2c_1e^{2 \cdot 0} - c_2 \sin 0 + c_3 \cos 0 = 2c_1 + c_3$   
 $y''(x) = 4c_1e^{2x} - c_2 \cos x - c_3 \sin x \implies 0 = 4c_1 - c_2$   
 $\implies c_1 = c_2 = 0, c_3 = 1 \quad \text{Lösung des AWP: } y(x) = \sin x$

(4)  $y'' - 2y' + 5y = 0$   
 $p(\lambda) = \lambda^2 - 2\lambda + 5 = (\lambda - (1 + 2i))(\lambda - (1 - 2i))$   
 $\lambda = 1 + 2i$  : komplexe Lösung  $e^{(1+2i)x} = e^x e^{2ix} = e^x (\cos 2x + i \sin 2x)$   
 FS:  $e^x \cos(2x), e^x \sin(2x)$

(5) Löse das **Randwertproblem** (RWP):  
 $y'' + y = 0, y(0) = 1, y(\frac{\pi}{2}) = 1$   
 $p(\lambda) = \lambda^2 + 1 = (\lambda - i)(\lambda + i)$ . FS:  $\cos x, \sin x$   
 Allgemeine Lösung der DGL:  $y(x) = c_1 \cos x + c_2 \sin x$   
 $1 = y(0) = c_1, 1 = y(\frac{\pi}{2}) = c_2$  Lösung des RWP:  $y(x) = \cos x + \sin x$

(6) Löse das RWP:  $y'' + \pi^2 y = 0, y(0) = y(1) = 0$   
 $p(\lambda) = \lambda^2 + \pi^2 = (\lambda - i\pi)(\lambda + i\pi)$

Allgemeine Lösung der DGL  $y(x) = c_1 \cos(\pi x) + c_2 \sin(\pi x)$   
 $0 = y(0) = c_1, 0 = y(1) = c_2 \sin \pi$   
 Lösungen des RWP:  $y(x) = c \cdot \sin(\pi x) \quad c \in \mathbb{R}$

Wir betrachten nun den inhomogenen Fall:

$$(IH) Ly = b(x)$$

Um eine spezielle Lösung des inhomogenen Problems zu finden, kann man 19.6 anwenden (Lösung eines inhomogenen Systems).

Sei dazu  $p$  das charakteristische Polynom von  $(H)$ .

**Definition (0-fache Nullstelle)**

$\mu \in \mathbb{C}$  ist eine **0-fache Nullstelle** von  $p : \Leftrightarrow p(\mu) \neq 0$

**Satz 20.3 (Regel - ohne Beweis)**

Seien  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}, n, q \in \mathbb{N}_0$  und  $b$  sei von der Form:

$$b(x) = (b_0 + b_1 x + \dots + b_n x^n) \cdot e^{\alpha x} \cdot \cos \beta x \text{ bzw.}$$

$$b(x) = (b_0 + b_1 x + \dots + b_n x^n) \cdot e^{\alpha x} \cdot \sin \beta x$$

Ist  $\alpha + i\beta$  eine  $q$ -fache Nullstelle von  $p$ , so gibt es eine spezielle Lösung  $y_s$  von  $(IH)$  der Form

$$y_s(x) = x^q \cdot e^{\alpha x} ((A_0 + A_1 x + \dots + A_n x^n) \cos \beta x + (B_0 + B_1 x + \dots + B_n x^n) \sin \beta x)$$

**Beispiel**

$$(1) y''' - y' = x - 1$$

Erster Schritt: Lösung der homogenen Gleichung  $y''' - y' = 0$ . Charakteristisches Polynom:

$$p(\lambda) = \lambda^3 - \lambda = \lambda(\lambda^2 - 1) = \lambda(\lambda + 1)(\lambda - 1)$$

Fundamentalsystem:  $1, e^x, e^{-x}$

Zweiter Schritt: Spezielle Lösung der inhomogenen Gleichung. System ist von obiger Form mit  $\alpha = \beta = 0$ ;  $\alpha + i\beta = 0$  ist 1-fache Nullstelle von  $p$ . Ansatz: Für eine spezielle Lösung der inhomogenen Gleichung:

$$y_s(x) = x(A_0 + A_1 x) = A_0 x + A_1 x^2$$

$$y'_s(x) = A_0 + 2x A_1$$

$$y'''_s(x) = 0$$

$$x - 1 \stackrel{!}{=} y'''_s - y'_s = -A_0 - 2x A_1 \Rightarrow A_0 = 1; A_1 = -\frac{1}{2}$$

Allgemeine Lösung der Differentialgleichung:

$$y(x) = c_1 + c_2 e^x + c_3 e^{-x} + x - \frac{1}{2} x^2 \quad (c_1, c_2, c_3 \in \mathbb{R})$$

(2)  $y'' - y = xe^x$

1. Schritt: Lösung der homogenen Gleichung  $y'' - y = 0$ . Charakteristisches Polynom  $p(\lambda) = \lambda^2 - 1 = (\lambda - 1)(\lambda + 1)$

Fundamentalsystem:  $e^x, e^{-x}$

2. Schritt: Spezielle Lösung der inhomogenen Gleichung. System ist von obiger Form mit  $\alpha = 1, \beta = 0$ ;  $\alpha + i\beta = 1$  ist einfach Nullstelle von  $p$ . Ansatz für eine spezielle Lösung:

$$y_s(x) = x(A_0 + A_1x)e^x$$

Nachrechnen:  $y_s''(x) - y_s(x) = (2A_0 + 2A_1 + 4A_1x)e^x \stackrel{!}{=} xe^x \Leftrightarrow 2A_0 + 2A_1 + 4A_1x = x \Rightarrow A_1 = \frac{1}{4}, A_0 = -\frac{1}{4}$

$$y_s(x) = \frac{1}{4}x(x - 1)e^x$$

Allgemeine Lösung der Differentialgleichung:

$$y(x) = c_1e^x + c_2e^{-x} + \frac{1}{4}x(x - 1)e^x \quad (c_1, c_2 \in \mathbb{R})$$