

Aus der NF lesen wir ab:

$$\left\{ \begin{pmatrix} 3 \\ -4 \\ -5 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ -4 \\ 0 \\ -5 \\ 0 \end{pmatrix} \right\} \text{ ist Basis von } \text{Kern}\phi \Rightarrow \dim \text{Kern}\phi = 2$$

$$\text{Teil a)} \Rightarrow \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 5 \\ 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -3 \\ 7 \\ 5 \end{pmatrix} \right\} \text{ ist Basis von } \text{Bild } \phi \Rightarrow \dim \text{Bild } \phi = 3$$

### 0.11.2 Aufgabe 2

- a) Nach Tutorium: Die Spalten von  $A \cdot B$  sind genau  $[a_1, \dots, a_n] \Rightarrow \text{Rg}(AB) \leq \text{Rg}(A)$ .  
 Andererseits:  $B \cdot x = 0 \Rightarrow A \cdot B \cdot x = 0 \Rightarrow p - \text{Rg}(A \cdot B) \geq p - \text{Rg}B \Leftrightarrow \text{Rg}A \cdot \text{Rg}B \leq \text{Rg}B$ .
- b) Sei  $B = (b_1 | \dots | b_n)$  und  $U$  der Lösungsraum von  $A \cdot x = 0$ .  
 $A \cdot B = 0 \Rightarrow b_1, \dots, b_n$  sind Lösungen von  $A \cdot x = 0 \Rightarrow b_1, \dots, b_n \in U \Rightarrow \dim [b_1, \dots, b_n] = \text{Rg}B \leq \dim U$ .  
 Die Dimension des Lösungsraums erfüllt  $\dim U = n - \text{Rg}(A) \Rightarrow \text{Rg}(B) \leq n - \text{Rg}(A) \Rightarrow \text{Beh.}$

## 0.12 Übung 11, 17.01.2005

### 0.12.1 Aufgabe 1

a) Seien

$\{x_1, \dots, x_r\}$  eine Basis von  $U_1 \cap U_2$

$\{x_1, \dots, x_r, x_{r+1}, \dots, x_k\}$  eine Basis von  $u_2$

$\{x_1, \dots, x_r, x'_{r+1}, \dots, x'_k\}$  eine Basis von  $U_2$

also  $\{x_1, \dots, x_r, x_{r+1}, \dots, x_k, x'_{r+1}, \dots, x'_k\}$  eine Basis von  $U_1 + U_2$

Dann ist durch

$$\{x_1, \dots, x_r, x_{r+1}, \dots, x_k, x'_{r+1} + x_{r+1}, \dots, x'_k + x_k\}$$

und

$$\{x_1, \dots, x_r, x'_{r+1}, \dots, x'_k, x_{r+1} + x'_{r+1}, \dots, x_k + x'_k\}$$

eine Basis von  $U_1 + U_2$  gegeben.

Dann gilt:  $U_1 \oplus \tilde{W} = U_1 + U_2 = U_2 \oplus \tilde{W}$ .

Nun ergänzen wir eine der Basen von  $U_1 + U_2$  durch Hinzufügen von  $y_1, \dots, y_2$  zu einer Basis von  $V$  und setzen

$$W := [x_{r+1} + x'_{r+1}, \dots, x_k + x'_k]$$

Dann erfüllt  $W$  die Behauptung.

- b) Gilt  $\dim U_1 \leq \dim U_2$ , so ex. ein Vektorraum  $U$  mit der Eigenschaft  $\dim(U_1 \oplus U) = \dim U_2$ .  
 Nach a) ex. nun ein UVR  $W_2$  mit  $V = (U_1 \oplus U) \oplus W_2 = U_2 \oplus W_2$ .  
 Setzen wir nun  $W_1 := U \oplus W_2$  so folgt die Beh.

### 0.12.2 Aufgabe 2

Zunächst bestimmen wir vereinfachte Basen von  $U_1$  und  $U_2$

$$\begin{pmatrix} 3 & 1 & 4 & 0 \\ 2 & 2 & 4 & 0 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 4 & 3 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 1 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Also ist  $\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$  eine Basis von  $U_1$  und  $\left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$  eine Basis von  $U_2$ .

Schreiben wir die Basisvektoren in die Spalten einer Matrix und wenden den Gauß-Algorithmus an, so erhalten wir:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Die ersten drei Spalten sind l.u., d.h.

$$\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

ist eine Basis von  $U_1 + U_2$  und  $\dim(U_1 + U_2) = 3$ .

Aus der dritten Zeile lesen wir ab:

$$a_1 \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} + a_2 \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \in U_1 \Leftrightarrow a_1 - a_2 = 0 \Leftrightarrow a_1 = a_2$$

Also ist  $\left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\} = \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$  eine Basis von  $U_1 \cap U_2$  und  $\dim(U_1 \cap U_2) = 1$ .

### 0.12.3 Aufgabe 3

a) Ist  $\dim U_i = \infty$  für ein  $i = \{1, \dots, k\}$ , so steht auf der rechten Seite unendlich und die Gleichung gilt..

Andernfalls betrachten wir Basen  $B_i$  von  $U_i$  für  $i = 1, \dots, k$ . Der Vektor  $x \in U_1 + \dots + U_k$  lässt sich als Linearkombination von Vektoren aus  $B_1 \cup \dots \cup B_k$  schreiben, also ist  $B_1 \cup \dots \cup B_k$  ein Erzeugendensystem.

$$\Rightarrow \dim(U_1 + \dots + U_k) \leq |B_1 \cup \dots \cup B_k| \leq |B_1| + \dots + |B_k| = \dim U_1 + \dots + \dim U_k.$$

Für  $i = 1, \dots, k$  sein  $B_i$  eine Basis von  $U_i$ .