

2. Topologie Übung

Ferdinand Szekeresch

31. Oktober 2007

Nachtrag

F heißt Faserprodukt von A und B über S , $:\Leftrightarrow$ wenn für jede Menge M und jedes Paar von Abb. g_A, g_B nach A bzw. B mit $f_A \circ g_A = f_B \circ g_B$ genau eine Abb. $h : M \rightarrow F$ ex. mit $g_A = \pi_a \circ h, g_B = \pi_B \circ h$.

Aufgabe 1

$(X, d), (Y, d)$ metr. Räume, $f_2 : X \times Y \rightarrow \mathbb{R}_{\geq}$ gegeben durch ÜB
Behauptung: F_2 ist Metrik.

- Symmetrie: klar
- Definitheit: klar, da d, e Metriken.
- Dreiecksungleichung: Sei $(x_1, y_1), (x_2, y_2), (x_3, y_3) \in X \times Y$
$$\Rightarrow f_2((x_1, y_1), (x_3, y_3)) = (d(x_1, x_3)^2 + e(y_1, y_3)^2)^{\frac{1}{2}}$$
$$\leq \left((d(x_1, x_2) + d(x_2, x_3))^2 + (e(y_1, y_2) + e(y_2, y_3))^2 \right)^{\frac{1}{2}}$$
$$\leq (d(x_1, x_2)^2 + e(y_1, y_2)^2)^{\frac{1}{2}} + (d(x_2, x_3)^2 + e(y_2, y_3)^2)^{\frac{1}{2}}$$

$\Rightarrow f_2$ ist Metrik.

2te Metrik

- Symmetrie: klar
- Definitheit: klar
- Dreiecksungl. Sei $(x_1, y_1), (x_2, y_2), (x_3, y_3) \in X \times Y$
$$\Rightarrow f_{\infty}((x_1, y_1), (x_3, y_3)) = \max(d(x_1, x_3), e(y_1, y_3))$$
$$\leq \max(d(x_1, x_2) + d(x_2, x_3), e(y_1, y_2) + e(y_2, y_3))$$
$$\leq \max(d(x_1, x_2), e(y_1, y_2)) + \max(d(x_2, x_3), e(y_2, y_3))$$

$\Rightarrow f_{\infty}$ ist Metrik.

Gesucht: $c > 0$ mit: $\forall (x_1, y_1), (x_2, y_2) \in X \times Y : \frac{1}{c} f_2(\dots) \leq f_{\infty}(\dots) \leq c f_2(\dots)$.

z.B. $\sqrt{2}$ erfüllt das, denn: Seien $x, y \in \mathbb{R}_{\geq 0}$, dann gilt

- $(x^2+y^2)^{\frac{1}{2}} \leq (\max(x,y)^2 + \max(x,y)^2)^{\frac{1}{2}} = (2\max(x,y)^2)^{\frac{1}{2}} = \sqrt{2}\max(x,y)$
 $\Rightarrow (1)$
- $\max(x,y) = \sqrt{\max(x,y)^2} \leq \sqrt{x^2+y^2} \leq \sqrt{2}\sqrt{x^2+y^2} \Rightarrow (2)$

Aufgabe 2

Definiere $D := X \uplus Y := (X \times \{0\}) \cup (Y \times \{1\})$

Disjunkte Vereinigung von X und Y .

$f : X \rightarrow D, x \mapsto (x, 0)$

$g : Y \rightarrow D, y \mapsto (y, 1)$.

Definiere $c : D \rightarrow Z$ durch $m \mapsto \begin{cases} k(x) & , \text{ falls } m = (x, 0) \\ l(y) & , \text{ falls } m = (y, 1) \end{cases}$

c erfüllt das Gewünschte. Soll gelten:

$\forall x \in X : c(f(x)) = k(x)$

$\forall y \in Y : c(g(y)) = l(y)$, dann muss nach Def. von f, g gelten:

$c((x, 0)) = k(x)$

$c((y, 1)) = l(y)$.

Seien D_1, D_2 Mengen mit obiger Eigenschaft

$\exists! c_1 : D_1 \rightarrow D_2 : f_2 = c_1 \circ f_1$

$\Rightarrow \begin{matrix} g_2 = c_1 \circ g_1 \\ \exists! c_2 : D_2 \rightarrow D_1 : f_1 = c_2 \circ f_2 \\ g_2 = c_1 \circ g_1 \end{matrix}$

$\Rightarrow c_2 \circ c_1$ ist Abb. mit $c_2 \circ c_1 \circ f_1 = f_1, c_2 \circ c_1 \circ g_1 = g_1$

$\Rightarrow c_2 \circ c_1 = \text{id}_{D_1}$ genauso $c_1 \circ c_2 = \text{id}_{D_2}$

c_1 ist Bijektion zw. D_1 und D_2 , und zwar die einzig sinnvolle.

Aufgabe 3

Beweis:

Nachrechnen: $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \bullet z = z$

$\left(\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \tilde{a} & \tilde{b} \\ \tilde{c} & \tilde{d} \end{pmatrix} \right) \bullet z = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \left(\begin{pmatrix} \tilde{a} & \tilde{b} \\ \tilde{c} & \tilde{d} \end{pmatrix} \bullet z \right)$

Noch zu zeigen:

$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \bullet z \in L \setminus K$ für alle $z \in L \setminus K$.

Wäre $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \bullet z = \frac{az+b}{cz+d} = k \in K$ dann wäre das äquivalent zu

$(a - ck)z = dk - b \Leftrightarrow a - ck = 0 = dk - b \Rightarrow \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = k \begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix}$

lin. abh. über $K \rightarrow \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \notin \text{GL}_2(K)$

Sei $K = \mathbb{R}, L = \mathbb{C}$, dann ist die Operation transitiv, denn:

Alle $z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$ liegen in der Bahn von i .

Sei $z = x + iy \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$, dann ist $\begin{pmatrix} y & x \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \frac{yi+x}{1} = x + iy = z$.

Welche Elemente aus $\text{GL}_2(\mathbb{R})$ haben Fixpunkte in $\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$?

Sei $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$

1. Fall $c \neq 0$. Dann gilt $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \bullet z = z \Leftrightarrow \frac{az+b}{cz+d} = z$
 $\Leftrightarrow cz^2 + (d-a)z - b = 0$

Mitternachtsformel: Diese Gleichung hat

- (i) 1 reelle Lösung, falls $(a-d)^2 + 4bc = 0$
- (ii) 2, reelle Lösungen, falls $(a-d)^2 + 4bc > 0$
- (iii) 2 echt komplexe Lösungen, falls $(a-d)^2 + 4bc < 0$
- (iii) $\Leftrightarrow \text{Spur}(A)^2 < 4 \det(A)$

2. Fall $c = 0$

- (i) $a = d : \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & a \end{pmatrix} \bullet z = z \Leftrightarrow az + b = az \Leftrightarrow b = 0$

Daraus folgt $\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix}$ fixiert alle Elemente aus $\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$

- (ii) $a \neq d : \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & d \end{pmatrix} \bullet z = z \Leftrightarrow \frac{az+b}{d} = \frac{b}{d-a} \in \mathbb{R} \Rightarrow A$ hat keine Fixpunkte in $\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$

Insgesamt: Fixpunkte in $\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$ haben Matrizen der Form $\begin{pmatrix} r & 0 \\ 0 & r \end{pmatrix}$ und Matrizen mit $\text{Spur} A^2 < 4 \det A$