

## § 4 Konstruktion des Lebesgueintegrals

In diesem Paragraphen sei  $\emptyset \neq X \in \mathfrak{B}_d$ . Wir schreiben außerdem  $\lambda$  statt  $\lambda_d$ .

### Definition

Sei  $f : X \rightarrow [0, \infty)$  eine einfache Funktion mit der Normalform  $f = \sum_{j=1}^m y_j \mathbb{1}_{A_j}$ . Das **Lebesgueintegral** von  $f$  ist definiert durch:

$$\int_X f(x) \, dx := \sum_{j=1}^m y_j \lambda(A_j)$$

### Satz 4.1

Sei  $f : X \rightarrow [0, \infty)$  einfach,  $z_1, \dots, z_k \in [0, \infty)$  und  $B_1, \dots, B_k \in \mathfrak{B}(X)$  mit  $\bigcup B_j = X$  und  $f = \sum_{j=1}^k z_j \mathbb{1}_{B_j}$ . Dann gilt:

$$\int_X f(x) \, dx = \sum_{j=1}^k z_j \lambda(B_j)$$

### Beweis

In der großen Übung. ■

### Satz 4.2

Seien  $f, g : X \rightarrow [0, \infty)$  einfach,  $\alpha, \beta \in [0, \infty)$  und  $A \in \mathfrak{B}(X)$ .

- (1)  $\int_X \mathbb{1}_A(x) \, dx = \lambda(A)$
- (2)  $\int_X (\alpha f + \beta g)(x) \, dx = \alpha \int_X f(x) \, dx + \beta \int_X g(x) \, dx$
- (3) Ist  $f \leq g$  auf  $X$ , so ist  $\int_X f(x) \, dx \leq \int_X g(x) \, dx$ .

### Beweis

- (1) Folgt aus der Definition und 4.1.
- (2) Es seien  $f = \sum_{j=1}^m y_j \mathbb{1}_{A_j}$  und  $g = \sum_{j=1}^k z_j \mathbb{1}_{B_j}$  die Normalformen von  $f$  und  $g$ . Dann gilt:

$$\alpha f + \beta g = \sum_{j=1}^m \alpha y_j \mathbb{1}_{A_j} + \sum_{j=1}^k \beta z_j \mathbb{1}_{B_j}$$

#### 4. Konstruktion des Lebesgueintegrals

Dann gilt:

$$\begin{aligned} \int_X (\alpha f + \beta g) &\stackrel{4.1}{=} \sum_{j=1}^m \alpha y_j \lambda(A_j) + \sum_{j=1}^k \beta z_j \lambda(B_j) \\ &= \alpha \sum_{j=1}^m y_j \lambda(A_j) + \beta \sum_{j=1}^k z_j \lambda(B_j) \\ &= \alpha \int_X f(x) \, dx + \beta \int_X g(x) \, dx \end{aligned}$$

- (3) Definiere  $h := g - f$ . Dann ist  $h \geq 0$  und einfach. Sei  $h = \sum_{j=1}^m x_j \mathbb{1}_{C_j}$  die Normalform von  $h$ , d.h.  $x_1, \dots, x_m \geq 0$ . Dann gilt:

$$\int_X h(x) \, dx = \sum_{j=1}^m x_j \lambda(C_j) \geq 0$$

Also folgt aus  $g = f + h$  und (2):

$$\int_X g(x) \, dx = \int_X f(x) \, dx + \int_X h(x) \, dx \geq \int_X f(x) \, dx \quad \blacksquare$$

#### Definition

Sei  $f : X \rightarrow [0, \infty]$  messbar.  $(f_n)$  sei eine für  $f$  zulässige Folge. Das **Lebesgueintegral** von  $f$  ist definiert als:

$$\int_X f(x) \, dx := \lim_{n \rightarrow \infty} \int_X f_n(x) \, dx \quad (*)$$

#### Bemerkung:

- (1) In 4.3 werden wir sehen, dass  $(*)$  unabhängig ist von der Wahl der für  $f$  zulässigen Folge  $(f_n)$ .
- (2)  $(f_n(x))$  ist wachsend für alle  $x \in X$ , d.h.:

$$f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = (\sup_{n \in \mathbb{N}} f_n)(x)$$

- (3) Aus 4.2(3) folgt dass  $(\int_X f_n(x) \, dx)$  wachsend ist, d.h.:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_X f_n(x) \, dx = \sup \left\{ \int_X f_n(x) \, dx \mid n \in \mathbb{N} \right\} = \int_X f(x) \, dx$$

#### Bezeichnung:

Für messbare Funktionen  $f : X \rightarrow [0, \infty]$  definiere

$$M(f) := \left\{ \int_X g \, dx \mid g : X \rightarrow [0, \infty) \text{ einfach und } g \leq f \text{ auf } X \right\}$$

**Satz 4.3**

Ist  $f : X \rightarrow [0, \infty]$  messbar und  $(f_n)$  zulässig für  $f$ , so gilt:

$$L := \lim_{n \rightarrow \infty} \int_X f_n \, dx = \sup M(f)$$

Insbesondere ist  $\int_X f(x) \, dx$  wohldefiniert.

**Folgerungen 4.4**

Ist  $f : X \rightarrow [0, \infty]$  messbar, so ist  $\int_X f(x) \, dx = \sup M(f)$ .

**Beweis**

Sei  $\int_X f_n \, dx \in M(f) \forall n \in \mathbb{N}$ . Dann ist

$$L = \sup \left\{ \int_X f_n \, dx \mid n \in \mathbb{N} \right\} \leq \sup M(f)$$

Sei nun  $g$  einfach und  $0 \leq g \leq f$ . Sei weiter

$$g = \sum_{j=1}^m y_j \mathbb{1}_{A_j}$$

die Normalform von  $g$ .

Sei  $\alpha > 1$  und  $B_n := \{\alpha f_n \geq g\}$ . Dann ist

$$B_n \in \mathfrak{B}(X) \text{ und } (B_n \subseteq B_{n+1}, \text{ sowie } \mathbb{1}_{B_n} g \leq \alpha f_n).$$

Sei  $x \in X$ .

**Fall 1:** Ist  $f(x) = 0$ , so ist wegen  $0 \leq g \leq f$  auch  $g(x) = 0$ . Somit ist  $x \in B_n$  für jedes  $n \in \mathbb{N}$ .

**Fall 2:** Ist  $f(x) > 0$ , so ist

$$\frac{1}{\alpha} g(x) < f(x)$$

(Dies ist klar für  $g(x) = 0$  und falls gilt:  $g(x) > 0$ , so ist  $\frac{1}{\alpha} g(x) < g(x) \leq f(x)$ .)

Da  $f_n$  zulässig für  $f$  ist, gilt:  $f_n(x) \rightarrow f(x)$  ( $n \rightarrow \infty$ ), weshalb ein  $n(x) \in \mathbb{N}$  existiert mit:

$$\frac{1}{\alpha} g(x) < f(x) \text{ für jedes } n \geq n(x)$$

Es folgt  $x \in B_n$  für jedes  $n \geq n(x)$ .

**Fazit:**  $X = \bigcup B_n$ .

$$A_j = A_j \cap X = A_j \cap \left( \bigcup B_n \right) = \bigcup (A_j \cap B_n) \text{ und } A_j \cap B_n \subseteq A_j \cap B_{n+1}$$

Aus 1.7 folgt  $\lambda(A_j) = \lim_{n \rightarrow \infty} \lambda(A_j \cap B_n)$ . Das liefert:

$$\begin{aligned} \int_X g \, dx &= \sum_{j=1}^m y_j \lambda(A_j) = \sum_{j=1}^m y_j \lim_{n \rightarrow \infty} \lambda(A_j \cap B_n) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{j=1}^m y_j \lambda(A_j \cap B_n) \stackrel{4.1}{=} \lim_{n \rightarrow \infty} \int_X \mathbb{1}_{B_n} g \, dx \\ &\leq \lim_{n \rightarrow \infty} \int_X \alpha f_n \, dx = \alpha L \end{aligned}$$

#### 4. Konstruktion des Lebesgueintegrals

$g$  war einfach und  $0 \leq g \leq f$  beliebig, sodass

$$\sup M(f) \leq \alpha L \xrightarrow{\alpha \rightarrow 1} \sup M(f) \leq L \quad \blacksquare$$

##### Satz 4.5

Seien  $f, g : X \rightarrow [0, \infty]$  messbar und  $\alpha, \beta \geq 0$ .

- (1)  $\int_X (\alpha f + \beta g)(x) \, dx = \alpha \int_X f(x) \, dx + \beta \int_X g(x) \, dx$
- (2) Ist  $f \leq g$  auf  $X$ , so gilt  $\int_X f(x) \, dx \leq \int_X g(x) \, dx$
- (3)  $\int_X f(x) \, dx = 0 \iff \lambda(\{f > 0\}) = 0$

##### Beweis

- (1)  $(f_n)$  und  $(g_n)$  seien zulässig für  $f$  bzw.  $g$ . Weiter sei  $(h_n) := \alpha(f_n) + \beta(g_n)$ . Dann ist wegen 3.7 und  $\alpha, \beta \geq 0$ , dass  $(h_n)$  zulässig für  $\alpha f + \beta g$  ist. Dann:

$$\begin{aligned} \int_X (\alpha f + \beta g) \, dx &= \lim_{n \rightarrow \infty} \int_X (\alpha f_n + \beta g_n) \, dx \\ &\stackrel{4.2}{=} \alpha \lim_{n \rightarrow \infty} \int_X f_n \, dx + \beta \lim_{n \rightarrow \infty} \int_X g_n \, dx \\ &= \alpha \int_X f \, dx + \beta \int_X g \, dx \end{aligned}$$

- (2) Wegen  $f \leq g$  auf  $X$  ist  $M(f) \subseteq M(g)$  und somit auch  $\sup M(f) \leq \sup M(g)$ . Aus 4.4 folgt nun die Behauptung.

- (3) Setze  $A := \{f > 0\} = \{x \in X : f(x) > 0\}$ .

“ $\implies$ “ Sei  $\int_X f \, dx = 0$  und  $A_n := \{f > \frac{1}{n}\}$ . Dann ist  $A = \bigcup A_n$  und  $f \geq \frac{1}{n} \mathbb{1}_{A_n}$ . Damit folgt:

$$0 = \int_X f \, dx \stackrel{(2)}{\geq} \int_X \frac{1}{n} \mathbb{1}_{A_n} \, dx = \frac{1}{n} \lambda(A_n)$$

Es ist also  $\lambda(A_n) = 0$  und damit gilt weiter

$$\lambda(A) = \lambda\left(\bigcup A_n\right) \stackrel{1.7}{\leq} \sum \lambda(A_n) = 0$$

Also ist auch  $\lambda(A) = 0$ .

“ $\impliedby$ “ Sei  $\lambda(A) = 0$ ,  $(f_n)$  zulässig für  $f$  und  $c_n := \max\{f_n(x) : x \in X\}$ . Dann ist  $f_n \leq c_n \mathbb{1}_A$  und es gilt:

$$0 \leq \int_X f_n \, dx \stackrel{(2)}{\leq} \int_X c_n \mathbb{1}_A \, dx = c_n \lambda(A) \stackrel{\text{Vor.}}{=} 0$$

Es ist also  $\int_X f_n \, dx = 0$  für jedes  $n \in \mathbb{N}$  und somit auch  $\int_X f \, dx = 0$  ■

**Satz 4.6 (Satz von Beppo Levi (Version I))**

Sei  $(f_n)$  eine Folge messbarer Funktionen  $f_n : X \rightarrow [0, \infty]$  und es gelte  $f_n \leq f_{n+1}$  auf  $X$  für jedes  $n \in \mathbb{N}$ .

- (1) Für alle  $x \in X$  existiert  $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x)$ .
- (2) Die Funktion  $f : X \rightarrow [0, \infty]$  definiert durch:

$$f(x) := \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x)$$

ist messbar.

$$(3) \quad \int_X \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) \, dx = \int_X f(x) \, dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_X f_n(x) \, dx$$

**Beweis**

- (1) Für alle  $x \in X$  ist  $(f_n(x))$  wachsend, also konvergent in  $[0, +\infty]$ .
- (2) folgt aus 3.5.
- (3) Sei  $(u_j^{(n)})_{j \in \mathbb{N}}$  zulässig für  $f_n$  und  $v_j := \max \{u_j^{(1)}, u_j^{(2)}, \dots, u_j^{(j)}\}$ . Aus 3.7 folgt, dass  $v_j$  einfach ist und aus der Konstruktion lässt sich nachrechnen, dass gilt:

$$0 \leq v_j \leq v_{j+1} \text{ und } v_j \leq f_n \leq f \text{ und } f_n = \sup_{j \in \mathbb{N}} u_j^{(n)} \leq \sup_{j \in \mathbb{N}} v_j \text{ (auf } X)$$

Damit ist  $(v_j)$  zulässig für  $f$  und es gilt:

$$\int_X f \, dx = \lim_{j \rightarrow \infty} \int_X v_j \, dx \leq \lim_{j \rightarrow \infty} \int_X f_j \, dx \leq \int_X f \, dx \quad \blacksquare$$

**Satz 4.7 (Satz von Beppo Levi (Version II))**

Sei  $(f_n)$  eine Folge messbarer Funktionen  $f_n : X \rightarrow [0, \infty]$ .

- (1) Für alle  $x \in X$  existiert  $s(x) := \sum_{j=1}^{\infty} f_j(x)$ .
- (2)  $s : X \rightarrow [0, \infty]$  ist messbar.
- (3)  $\int_X \sum_{j=1}^{\infty} f_j(x) \, dx = \sum_{j=1}^{\infty} \int_X f_j(x) \, dx$

**Beweis**

Setze

$$s_n := \sum_{j=1}^n f_j$$

Dann erfüllt  $(s_n)$  die Voraussetzungen von 4.6. Aus 4.6 und 4.5(1) folgt die Behauptung. ■

**Satz 4.8**

Sei  $f : X \rightarrow [0, \infty]$  messbar und es sei  $\emptyset \neq Y \in \mathfrak{B}(X)$  (also  $Y \subseteq X$  und  $Y \in \mathfrak{B}_d$ ). Dann sind die Funktionen  $f|_Y : Y \rightarrow [0, \infty]$  und  $\mathbb{1}_Y \cdot f : X \rightarrow [0, \infty]$  messbar und es gilt:

$$\int_Y f(x) \, dx := \int_Y f|_Y(x) \, dx = \int_X (\mathbb{1}_Y \cdot f)(x) \, dx$$

**Beweis**

**Fall 1:** Die Behauptung ist klar, falls  $f$  einfach ist. (Übung!)

**Fall 2:** Sei  $(f_n)$  zulässig für  $f$  und  $g_n := f_n|_Y, h_n := \mathbb{1}_Y f_n$ . Dann ist  $(g_n)$  zulässig für  $f|_Y$  und  $(h_n)$  ist zulässig für  $\mathbb{1}_Y f_n$ . Insbesondere sind  $f_n|_Y$  und  $\mathbb{1}_Y f_n$  nach 3.5 messbar. Weiter gilt:

$$\int_Y f|_Y \, dx \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \int_Y g_n \, dx \stackrel{\text{Fall 1}}{=} \int_X h_n \, dx \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \int_X \mathbb{1}_Y f \, dx \quad \blacksquare$$

**Definition**

Sei  $f : X \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$  messbar.  $f$  heißt (Lebesgue-) **integrierbar** (über  $X$ ), genau dann wenn  $\int_X f_+(x) \, dx < \infty$  und  $\int_X f_-(x) \, dx < \infty$ .

In diesem Fall heißt:

$$\int_X f(x) \, dx := \int_X f_+(x) \, dx - \int_X f_-(x) \, dx$$

das (Lebesgue-) **Integral** von  $f$  (über  $X$ ).

**Beachte:**

Ist  $f : X \rightarrow [0, \infty]$  messbar, so ist  $f$  genau dann integrierbar, wenn gilt:

$$\int_X f(x) \, dx < \infty$$

**Beispiel**

Sei  $X \in \mathfrak{B}_1$ ,  $f(x) := \begin{cases} 1 & , x \in X \cap \mathbb{Q} \\ 0 & , x \in X \setminus \mathbb{Q} \end{cases} = \mathbb{1}_{X \cap \mathbb{Q}}$ .  $X, \mathbb{Q} \in \mathfrak{B}_1 \implies X \cap \mathbb{Q} \in \mathfrak{B}_1 \implies f$  ist messbar.

$$0 \leq \int_X f(x) \, dx = \int_X \mathbb{1}_{X \cap \mathbb{Q}} \, dx = \lambda(X \cap \mathbb{Q}) \leq \lambda(\mathbb{Q}) = 0$$

**Das heißt:**  $f \in \mathfrak{L}^1(X)$ ,  $\int_X f \, dx = 0$ . Ist speziell  $X = [a, b]$  ( $a < b$ ), so gilt:  $f \in \mathfrak{L}^1([a, b])$ , aber  $f \notin R([a, b])$ .

**Satz 4.9 (Charakterisierung der Integrierbarkeit)**

Sei  $f : X \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$  messbar. Die folgenden Aussagen sind äquivalent:

- (1)  $f$  ist integrierbar.
- (2) Es existieren integrierbare Funktionen  $u, v : X \rightarrow [0, +\infty]$  mit  $u(x) = v(x) = \infty$  für kein  $x \in X$  und  $f = u - v$  auf  $X$ .
- (3) Es existiert eine integrierbare Funktion  $g : X \rightarrow [0, +\infty]$  mit  $|f| \leq g$  auf  $X$ .
- (4)  $|f|$  ist integrierbar.

**Zusatz:**

(1)  $\mathfrak{L}^1(X) = \{f : X \rightarrow \mathbb{R} \mid f \text{ ist messbar und } \int_X |f| \, dx < \infty\}$  (folgt aus (1)-(4)).

(2) Sind  $u, v$  wie in (2), so gilt:  $\int_X f \, dx = \int_X u \, dx - \int_X v \, dx$ .

**Beweis (des Satzes)**

(1)  $\Rightarrow$  (2)  $u := f_+, v := f_-$ .

(2)  $\Rightarrow$  (3)  $g := u + v$ , dann ist  $u, v \geq 0, g \geq 0, \int_X g \, dx \stackrel{4.5}{=} \int_X u \, dx + \int_X v \, dx < \infty. \Rightarrow g$  ist integrierbar und:  $|f| = |u - v| \leq |u| + |v| = u + v = g$  auf  $X$ .

(3)  $\Rightarrow$  (4) **4.5**  $\Rightarrow \int_X |f| \, dx \leq \int_X g \, dx < \infty \Rightarrow f$  ist integrierbar.

(4)  $\Rightarrow$  (1)  $f_+, f_- \leq |f|$  auf  $X. \Rightarrow 0 \leq \int_X f_{\pm} \, dx \leq \int_X |f| \, dx < \infty \stackrel{Def.}{\Rightarrow} f$  ist integrierbar. ■

**Beweis (des Zusatzes)**

(1) ✓

(2) Es ist  $f = u - v = f_+ - f_- \Rightarrow u + f_- = f_+ + v$ .

$$\begin{aligned} \Rightarrow \int_X u \, dx + \int_X f_- \, dx &\stackrel{4.5}{=} \int_X (u + f_-) \, dx = \int_X (f_+ + v) \, dx \stackrel{4.5}{=} \int_X f_+ \, dx + \int_X v \, dx \\ &\Rightarrow \int_X u \, dx - \int_X v \, dx = \int_X f_+ \, dx - \int_X f_- \, dx \stackrel{Def.}{=} \int_X f \, dx. \end{aligned} \quad \blacksquare$$

**Folgerungen 4.10**

Sei  $f : X \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$  integrierbar und  $N := \{|f| = +\infty\} = \{x \in X : |f(x)| = +\infty\}$ . Dann ist  $N \in \mathfrak{B}(X)$  und  $\lambda(N) = 0$ .

**Beweis**

**3.4**  $\Rightarrow N \in \mathfrak{B}(X). n\mathbb{1}_N \leq |f|$  für alle  $n \in \mathbb{N}$ . Dann:

$$n \cdot \lambda(N) = \int_X n\mathbb{1}_N \, dx \stackrel{4.5}{\leq} \int_X |f| \, dx \stackrel{4.9}{<} \infty \text{ für alle } n \in \mathbb{N}$$

Also:  $0 \leq n\lambda(N) \leq \int_X |f| \, dx \quad \forall n \in \mathbb{N} \Rightarrow \lambda(N) = 0$  ■

**Satz 4.11**

$f, g : X \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$  seien integrierbar und es sei  $\alpha \in \mathbb{R}$ .

(1)  $\alpha f$  ist integrierbar und  $\int_X (\alpha f) \, dx = \alpha \int_X f \, dx$ .

(2) Ist  $f + g : X \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$  auf  $X$  definiert, so ist  $f + g$  integrierbar und es gilt:

$$\int_X (f + g) \, dx = \int_X f \, dx + \int_X g \, dx$$

(Für  $f = +\infty$  und  $g = -\infty$  ist  $f + g$  beispielsweise nicht definiert.)

(3)  $\mathfrak{L}^1(X)$  ist ein reeller Vektorraum und die Abbildung  $f \mapsto \int_X f \, dx$  ist linear auf  $\mathfrak{L}^1(X)$ .

- (4)  $\max\{f, g\}$  und  $\min\{f, g\}$  sind integrierbar.
- (5) Ist  $f \leq g$  auf  $X$ , so ist  $\int_X f \, dx \leq \int_X g \, dx$ .
- (6)  $|\int_X f \, dx| \leq \int_X |f| \, dx$ . (Dreiecksungleichung für Integrale)
- (7) Sei  $\emptyset \neq Y \in \mathfrak{B}(X)$ . Dann sind die Funktionen  $f|_Y : Y \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$  und  $\mathbf{1}_Y \cdot f : X \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$  integrierbar und

$$\int_Y f(x) \, dx := \int_Y f|_Y(x) \, dx = \int_X (\mathbf{1}_Y \cdot f)(x) \, dx$$

- (8) Sei  $\lambda(X) < \infty$  und  $h : X \rightarrow \mathbb{R}$  sei messbar und beschränkt. Dann:  $h \in \mathfrak{L}^1(X)$  und  $|\int_X h \, dx| \leq \|h\|_\infty \lambda(X)$  (mit  $\|h\|_\infty := \sup\{|h(x)| : x \in X\}$ )

### Beweis

- (1) folgt aus  $\alpha f)_\pm = \alpha f_\pm$ , falls  $\alpha \geq 0$  und  $\alpha f)_\pm = -\alpha f_\mp$ , falls  $\alpha < 0$ .

- (2) Es gilt  $f + g = \underbrace{f_+ + g_+}_{=:u} - \underbrace{(f_- + g_-)}_{=:v}$ . Dann:

$$\int_X u \, dx = \int_X f_+ + g_+ \, dx \stackrel{4.5}{=} \int_X f_+ \, dx + \int_X g_+ \, dx < \infty$$

Genauso:  $\int_X v \, dx < \infty$

Mit Satz 4.9 folgt:  $f + g$  ist integrierbar. Weiter:

$$\begin{aligned} \int_X (f + g) \, dx &\stackrel{4.9}{=} \int_X u \, dx - \int_X v \, dx \\ &= \int_X f_+ \, dx + \int_X g_+ \, dx - \left( \int_X f_- \, dx + \int_X g_- \, dx \right) \\ &= \int_X f \, dx + \int_X g \, dx \end{aligned}$$

- (3) folgt aus (1) und (2).

- (4) Mit Satz 3.5 folgt:  $\max\{f, g\}$  ist messbar. Es gilt:

$$0 \leq |\max\{f, g\}| \leq |f| + |g|$$

Mit 4.9 und Aussage (2) folgt  $|f| + |g|$  ist integrierbar. Dann folgt mit Satz 4.9:  $\max\{f, g\}$  ist integrierbar.

Analog zeigt man:  $\min\{f, g\}$  ist integrierbar.

- (5) Nach Voraussetzung ist  $f \leq g$  auf  $X$ . Dann gilt:  $f_+ \leq g_+$  auf  $X$  und  $f_- \geq g_-$  auf  $X$ . Es folgt:

$$\int_X f \, dx = \int_X f_+ \, dx - \int_X f_- \, dx \stackrel{4.5}{\leq} \int_X g_+ \, dx - \int_X g_- \, dx = \int_X g \, dx$$

- (6) Es ist  $\pm f \leq |f|$ . Mit Aussage (1) und (5) folgt:  $\pm \int_X f \, dx = \int_X (\pm f) \, dx \leq \int_X |f| \, dx$ .  
Es ist  $\int_X f \, dx = |\int_X f \, dx|$  oder  $-\int_X f \, dx = |\int_X f \, dx|$



- (7) Mit Bemerkung (2) vor 3.1 und Satz 3.6.(2) folgt:  $f|_Y$  und  $\mathbb{1}_Y \cdot f$  sind messbar. Es gilt:  $(f|_Y)_\pm = (f_\pm)|_Y$  und  $(\mathbb{1}_Y \cdot f)_\pm = \mathbb{1} \cdot f_\pm$ . Weiterhin gilt  $0 \leq \mathbb{1}_Y f_\pm \leq f_\pm$ . Mit 4.9 folgt dann, daß  $\mathbb{1}_Y f_\pm$  integrierbar ist. Dann:

$$\begin{aligned} \int_X (\mathbb{1}_Y f) dx &= \int_X \mathbb{1} f_+ dx - \int_X \mathbb{1}_Y f dx \\ &= \underbrace{\int_Y (f_+)|_Y dx}_{<\infty} - \underbrace{\int_Y (f_-)|_Y dx}_{<\infty} \end{aligned}$$

Es folgt:  $f|_Y$  ist integrierbar und  $\int_Y f|_Y dx = \int_Y (f_+)|_Y dx - \int_Y (f_-)|_Y dx = \int_X (\mathbb{1}_Y f) dx$ .

- (8) Es ist  $|h| \leq \|h\|_\infty \cdot \mathbb{1}_X$ . Dann folgt:

$$\int_X |h| dx \leq \int_X \|h\|_\infty \mathbb{1}_X dx = \|h\|_\infty \lambda(X) < \infty$$

Damit:  $|h|$  ist integrierbar und mit 4.9 auch  $h$ . Da  $h$  beschränkt ist, folgt:  $h \in \mathfrak{L}^1(X)$ . Schließlich:

$$\left| \int_X h dx \right| \leq \int_X |h| dx \leq \|h\|_\infty \lambda(X) \quad \blacksquare$$

#### Satz 4.12

- (1) Sind  $\emptyset \neq A, B \in \mathfrak{B}(X)$  disjunkt,  $X = A \cup B$  und ist  $f : X \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$  integrierbar (über  $X$ ), so ist  $f$  integrierbar über  $A$  und integrierbar über  $B$  und es gilt:

$$\int_X f dx = \int_A f dx + \int_B f dx$$

- (2) Ist  $\emptyset \neq K \subseteq \mathbb{R}^d$  kompakt und  $f : K \rightarrow \mathbb{R}$  stetig, so ist  $f \in \mathfrak{L}^1(K)$ .

#### Beweis

- (1) Aus 4.11(7) folgt:  $f$  ist integrierbar über  $A$  und integrierbar über  $B$ . Es ist

$$\begin{aligned} \int_X f(x) dx &= \int_X (\mathbb{1}_{A \cup B} \cdot f)(x) dx = \int_X ((\mathbb{1}_A + \mathbb{1}_B) f)(x) dx \\ &= \int_X (\mathbb{1}_A f + \mathbb{1}_B f)(x) dx \stackrel{4.11(2)}{=} \int_X \mathbb{1}_A f dx + \int_X \mathbb{1}_B f dx \stackrel{4.11(7)}{=} \int_A f dx + \int_B f dx. \end{aligned}$$

- (2)  $K$  ist kompakt, also gilt:  $\lambda(K) < \infty$ . Aus 3.2(1) folgt, dass  $f$  messbar ist. Analysis II („stetige Funktionen auf kompakten Mengen nehmen Minimum und Maximum an“) liefert:  $f$  ist beschränkt. Insgesamt folgt mit 4.11(8) schließlich:  $f \in \mathfrak{L}^1(K)$ .  $\blacksquare$

#### Satz 4.13

Seien  $a, b \in \mathbb{R}$ ,  $a < b$ ,  $X := [a, b]$  und  $f \in C(X)$ . Dann ist  $f \in \mathfrak{L}^1(X)$  und es gilt:

$$L - \int_X f(x) dx = R - \int_a^b f(x) dx$$

#### 4. Konstruktion des Lebesgueintegrals

##### Beweis

Sei  $n \in \mathbb{N}$ ,  $t_j^{(n)} := a + j \frac{b-a}{n}$  ( $j = 0, \dots, n$ ) und  $I_j^{(n)} := [t_{j-1}^{(n)}, t_j^{(n)}]$  ( $j = 1, \dots, n$ ).

$$S_n := \sum_{j=1}^n f(t_j^{(n)}) \underbrace{\frac{b-a}{n}}_{=\lambda_1(I_j^{(n)})} \text{ ist Riemannsche Zwischensumme für } \mathcal{R}\text{-}\int_a^b f(x) dx.$$

Aus Analysis I folgt  $S_n \rightarrow \mathcal{R}\text{-}\int_a^b f(x) dx$  ( $n \rightarrow \infty$ ). Definiere  $f_n := \sum_{j=1}^n f(t_j^{(n)}) \mathbb{1}_{I_j^{(n)}}$ . Dann ist  $f_n$  einfach und

$$\int_X f_n(x) dx = \sum_{j=1}^n f(t_j^{(n)}) \lambda_1(I_j^{(n)}) = S_n$$

$f$  ist auf  $X$  gleichmäßig stetig also konvergiert  $f_n$  auf  $X$  gleichmäßig gegen  $f$  (Übung!), also gilt:

$$\|f_n - f\|_\infty = \sup \{|f_n(x) - f(x)| : x \in X\} \rightarrow 0 \quad (n \rightarrow \infty)$$

Aus 4.12(2) folgt  $f \in \mathfrak{L}^1(X)$

$$\left| \mathcal{L}\text{-}\int_X f(x) dx - S_n \right| = \left| \mathcal{L}\text{-}\int_X (f - f_n) dx \right| \stackrel{4.11}{\leq} \int_X (f - f_n) dx \stackrel{4.11}{\leq} \|f - f_n\|_\infty \underbrace{\lambda(X)}_{=b-a} \rightarrow 0$$

Daraus folgt  $S_n \rightarrow \mathcal{L}\text{-}\int_X f dx$  ■

##### Satz 4.14

Sei  $a \in \mathbb{R}$ ,  $X := [a, \infty)$  und  $f \in C(X)$ . Dann gilt:

- (1)  $f$  ist messbar.
- (2)  $f \in \mathfrak{L}^1(X)$  genau dann wenn das uneigentliche Riemann-Integral  $\int_a^\infty f(x) dx$  **absolut** konvergent ist. In diesem Fall gilt:

$$L - \int_X f(x) dx = R - \int_a^\infty f(x) dx$$

Entsprechendes gilt für die anderen Typen uneigentlicher Riemann-Integrale.

##### Beweis

Eine Hälfte des Beweises folgt in Kapitel 6. ■

##### Beispiel

- (1) Sei  $X = (0, 1]$ ,  $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$ . Aus Analysis I wissen wir, dass  $\mathcal{R}\text{-}\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}} dx$  (absolut) konvergent ist. Also ist  $f \in \mathfrak{L}^1(X)$ .  
Außerdem wissen wir aus Analysis I, dass  $\mathcal{R}\text{-}\int_0^1 \frac{1}{x}$  divergent ist. Also ist  $f^2 \notin \mathfrak{L}^1(X)$ .
- (2) Sei  $X = [0, \infty)$ ,  $f(x) = \frac{\sin(x)}{x}$ . Aus Analysis I wissen wir, dass  $\mathcal{R}\text{-}\int_1^\infty f(x) dx$  konvergent, aber nicht absolut konvergent ist. Also ist  $f \notin \mathfrak{L}^1(X)$ .