25. Stetige Abhängigkeit

In diesem Paragraphen: $I = [a,b] \subseteq \mathbb{R}$, $D := I \times \mathbb{R}$, $f \in C(D, \mathbb{R})$.

Satz 25.1
Sei (f_n) eine Folge in $C(D,\mathbb{R})$, (x_n) eine Folge in I, (η_n) eine Folge in $\mathbb{R}$ und $M \geq 0$. Es gelte:

(a) $|f_n(x,y)| \leq M$, $|\eta_n| \leq M \ \forall n \in \mathbb{N} \ \forall (x,y) \in D$

(b) (f_n) konvergiere auf $R := I \times [-(b-a+1)M, (b-a+1)M]$ gleichmäßig gegen f.

(c) Zu jedem $n \in \mathbb{N}$ sei $y_n : I \to \mathbb{R}$ eine Lösung des Anfangswertproblems:

$$\begin{cases} y' = f_n(x,y) \\ y(x_n) = \eta_n \end{cases}$$

auf I.

Dann gilt:

(1) (y_n) enthält eine auf I gleichmäßig konvergente Teilfolge (y_{n_k}) und $y(x) := \lim_{k\to\infty} y_{n_k}(x)$ $(x \in I)$ so gilt: $y'(x) = f(x, y(x)) \ \forall x \in I$

(2) Gilt $x_n \to x_0$ $(\in I)$ und $\eta_n \to y_0$ und hat das Anfangswertproblem

$$\begin{cases} y' = f(x,y) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$$

auf I genau eine Lösung $y : I \to \mathbb{R}$, so konvergiert (y_n) auf I gleichmäßig gegen y.

Beweis

(1) 12.1 $\implies y_n(x) = \eta_n + \int_{x_n}^x f_n(t, y_n(t))dt \ \forall x \in I \ \forall n \in \mathbb{N}$ $(*)$.

Für $x, \tilde{x} \in I, n \in \mathbb{N}$: $|y_n(x)| \leq |\eta_n| + |\int_{x_n}^x |f_n(t, y_n(t))|dt| \leq M + M|x - x_n| \leq M + (b-a)M = (b-a+1)M \implies (x, y_n(x)) \in R \ \forall n \in \mathbb{N} \ \forall x \in I$ $(**)$

$|y_n(x) - y_n(\tilde{x})| \overset{\text{MWS}}{=} |y_n'(\xi_n)||x - \tilde{x}| = |f_n(\xi_n, y_n(\xi_n))||x - \tilde{x}| \leq M|x - \tilde{x}|$

§1 $\implies (y_n)$ enthält eine auf I gleichmäßig konvergente Teilfolge. o.B.d.A.: (y_n) konvergiert auf I gleichmäßig.

$y(x) := \lim_{n\to\infty} y_n(x)$ $(x \in I)$; Analysis I $\implies y \in C(I, \mathbb{R})$. $(**) \implies (x, y(x)) \in R \ \forall x \in I$. $g(t); = f(t, y(t))$, $g_n(t); = f_n(t, y_n(t))$ $(t \in I)$. Übung: (g_n) konvergiert auf I

gleichmäßig gegen g. o.B.d.A: (x_n) konvergent, (η_n) konvergent, etwa $x_n \to x_0$, $\eta_n \to y_0$. (Bolzano-Weierstraß!).

$$\begin{aligned}
(*) \implies & y_n(x) = \eta_n + \int_{x_n}^{x} g_n(t)dt \ \forall n \in \mathbb{N}\ \forall x \in I \\
\overset{n\to\infty}{\implies} & y(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} g(t)dt \ \forall x \in I \\
\implies & y(x_0) = y_0 \text{ und } y'(x) = g(x) = f(x, y(x)) \ \forall x \in I
\end{aligned}$$

(2) $a_n; = \|y - y_n\|_\infty$. Zu zeigen ist: $a_n \to 0$.

Annahme: $a_n \not\to 0 \implies \exists \varepsilon_0 > 0$ und eine Teilfolge $(a_{n_k}) : a_{n_k} \geq \varepsilon_0\ \forall k \in \mathbb{N}$.

(1) $\implies$ (y_{n_k}) enhält eine auf I gleichmäßig konvergente Teilfolge $y_{n_{k_l}}$; $z(x) := \lim_{l\to\infty} y_{n_{k_l}}$ $(x \in I)$

(1) + Beweis von (1) $\implies$ z löst das Anfangswertproblem $y' = f(x, y);\ y(x_0) = y_0$. Die eindeutige Lösbarkeit liefert $z = y$ auf I $\implies$ $a_{n_{k_l}} = \|y - y_{n_{k_l}}\|_\infty = \|z - y_{n_{k_l}}\|_\infty \to 0$ $(l \to \infty)$, Widerspruch denn $a_{n_{k_l}} \geq \varepsilon_0\ \forall l \in \mathbb{N}$. ■

Satz 25.2
Es sei $x_0 \in I$, $\eta_1, \eta_2 \in \mathbb{R}$, $L \geq 0$ und es gelte:

$$|f(x, y) - f(x, \tilde{y})| \leq L(y - \tilde{y})\ \forall (x, y), (x, \tilde{y}) \in D\,.$$

Für $i = 1, 2$ sei $y_i : I \to \mathbb{R}$ die (nach 13.1) eindeutig bestimmte Lösung des Anfangswertproblems:

$$\begin{cases} y' = f(x, y) \\ y(x_0) = \eta_i \end{cases}$$

Dann gilt:

$$|y_1(x) - y_2(x)| \leq e^{L(b-a)} |\eta_1 - \eta_2|\ \forall x \in I\,.$$

Beweis
$\alpha := \|y_1 - y_2\|_\infty = \max\{|y_1(x) - y_2(x)| : x \in I\}$. Für $x \in I$:

$$\begin{aligned}
|y_1(x) - y_2(x)| &= \left| \eta_1 + \int_{x_0}^{x} f(t, y_1(t))dt - (\eta_2 + \int_{x_0}^{x} f(t, y_2(t))dt) \right| \\
&\leq |\eta_1 - \eta_2| + \left| \int_{x_0}^{x} \underbrace{|f(t, y_1(t)) - f(t, y_2(t))|}_{L|y_1(t) - y_2(t)| \leq L\alpha} dt \right| \\
&\leq |\eta_1 - \eta_2| + L\alpha |x - x_0| \\
\text{Allgemein gilt: } &\leq \underbrace{\frac{L^{n+1}}{(n+1)!}\alpha |x - x_0|^{n+1}}_{=:\alpha_n(x)} + \underbrace{|\eta_1 - \eta_2| \sum_{k=0}^{n} \frac{L^k |x - x_0|^k}{k!}}_{=:\beta_n(x)}
\end{aligned}$$

$\beta_n(x) \to e^{L|x-x_0|}$ $(n \to \infty)$, $\alpha_n(x) \to 0$ $(n \to \infty)$ $\implies$ $|y_1(x) - y_2(x)| \leq e^{L|x-x_0|}|\eta_1 - \eta_2| \leq e^{L(b-a)}|\eta_1 - \eta_2|$

■