

# 17. Lineare Systeme mit konstanten Koeffizienten

Wir betrachten Systeme der Form:

$$(S) \quad y' = Ay + b(x)$$

wobei  $A = (a_{jk}) \in \mathbb{M}_m$  und die  $a_{jk}$  **konstant** sind. Die Lösung solcher Systeme lässt sich auf Eigenwerte von  $A$  zurückführen. Ist  $A$  reell, so kann  $A$  **komplexe** Eigenwerte haben.

Also stets in diesem Paragraphen:  $m \in \mathbb{N}, A = (a_{jk}) \in \mathbb{M}_m, a_{jk} \in \mathbb{C}, I \subseteq \mathbb{R}$  ein Intervall,  $x_0 \in I, y_0 \in \mathbb{C}^m$  und  $b : I \rightarrow \mathbb{C}^m$  stetig.

Erweiterter Lösungsbegriff: Sei  $y : I \rightarrow \mathbb{C}^m$  differenzierbar.  $y$  heißt eine Lösung von (S) auf  $I : \iff y'(x) = Ay + b(x) \quad \forall x \in I$ .

$y$  heißt eine Lösung des AWP's (A)  $\begin{cases} y' = Ay + b(x) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$  auf  $I : \iff y$  ist eine Lösung von (S) auf  $I$  und  $y(x_0) = y_0$

## Satz 17.1

(A) hat auf  $I$  genau eine Lösung.

## Beweis

$U := \operatorname{Re} A, V := \operatorname{Im} A, g := \operatorname{Re} b, h := \operatorname{Im} b, \gamma_0 := \operatorname{Re} y_0, \delta := \operatorname{Im} y_0,$

$\tilde{b} := (g, h) : I \rightarrow \mathbb{R}^{2m}, \tilde{y}_0 := (\gamma_0, \delta_0) \in \mathbb{R}^{2m}$

$B := \begin{pmatrix} U & -V \\ V & U \end{pmatrix} \in \mathbb{M}_{2m} \quad (B = \overline{B})$

Betrachte das AWP  $(\tilde{A}) \begin{cases} z' = Bz + \tilde{b}(x) \\ z(y_0) = \tilde{y}_0 \end{cases}$

Sei  $y : I \rightarrow \mathbb{C}^m$  eine Funktion,  $z := (\operatorname{Re} y, \operatorname{Im} y) : I \rightarrow \mathbb{R}^{2m}$  Dann:  $y$  ist eine Lösung von (A) auf  $I \iff z$  ist eine Lösung von  $(\tilde{A})$  auf  $I$ . 16.1  $\implies$  Beh. ■

Wir betrachten das homogene System

$$(H) \quad y' = Ay$$

## Folgerung 17.2

Alle Definitionen und die Sätze 16.3, 16.4 und 16.5 des §16 bleiben im komplexen Fall gültig. Der Raum  $\mathbb{L}$  ist ein komplexer VR,  $\dim \mathbb{L} = m$ . In 16.4 schreibe  $c \in \mathbb{C}^m$  und  $C \in \mathbb{M}_m$  komplex.

Ist  $y \in \mathbb{L}$  und  $A$  reell  $\xrightarrow{\text{Bew. ü. 17.1}} \operatorname{Re} y, \operatorname{Im} y \in \mathbb{L}$

**Satz 17.3**

$e^{xA}$  ist eine Fundamentalmatrix von (H).

**Beweis**

$Y(x) := e^{xA}$ ; 14.5  $\implies e^{xA}$  ist invertierbar.  $\implies \det Y(x) \neq 0$

$Y'(x) \stackrel{14.5}{=} Ae^{xA} = AY(x) \implies Y$  ist eine LM von (H) ■

**Beispiel (m=2)**

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}, \text{ induktiv: } A^n = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ n & 1 \end{pmatrix} \quad \forall n \in \mathbb{N}_0$$

$$\implies e^{xA} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} A^n = \begin{pmatrix} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} & 0 \\ \sum_{n=0}^{\infty} \frac{nx^n}{n!} & \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} \end{pmatrix}$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{nx^n}{n!} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{(n-1)!} = x \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{n-1}}{(n-1)!} = xe^x$$

$$\implies e^{xA} = \begin{pmatrix} e^x & 0 \\ xe^x & e^x \end{pmatrix}$$

Fundamentalsystem von  $y' = Ay$ :

$$\begin{aligned} y^{(1)}(x) &= e^x \begin{pmatrix} 1 \\ x \end{pmatrix} \\ y^{(2)}(x) &= e^x \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

**Motivation:** Sei  $\lambda$  ein Eigenwert von  $A$ ,  $c \in \mathbb{C}^m \setminus \{0\}$  und  $Ac = \lambda c$

$$y(x) := e^{\lambda x} c$$

$$y'(x) = \lambda e^{\lambda x} c = e^{\lambda x} (\lambda c) = e^{\lambda x} (Ac) = A(e^{\lambda x} c) = Ay(x)$$

**Satz 17.4**

Die Eigenwerte von  $A$  seien **alle einfach**, d.h.  $A$  habe die Eigenwerte  $\lambda_1, \dots, \lambda_m$  ( $\lambda_j \neq \lambda_k$  für  $j \neq k$ ).  $c^{(j)}$  sei ein Eigenvektor zu  $\lambda_j$  ( $j = 1, \dots, m$ ). Es sei  $y^{(j)}(x) := e^{\lambda_j x} c^{(j)}$ .

Dann ist  $(*) y^{(1)}, \dots, y^{(m)}$  ein (komplexes) FS von (H)

Sei  $A$  reell: Wir können mit einem  $l \in \mathbb{N}$  annehmen:

$$\lambda_1, \dots, \lambda_l \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}; (\lambda_{l+1} = \overline{\lambda_1}), \dots, (\lambda_{2l} = \overline{\lambda_l}); \lambda_{2l+1}, \dots, \lambda_m \in \mathbb{R}$$

Dann ist  $(+) \operatorname{Re} y^{(1)}, \dots, \operatorname{Re} y^{(l)}, \operatorname{Im} y^{(1)}, \dots, \operatorname{Im} y^{(l)}, y^{(2l+1)}, \dots, y^{(m)}$

ein reelles FS von (H).

### Beweis

Obige Motivation  $\implies y^{(1)}, \dots, y^{(m)} \in \mathbb{L}$ .

Seien  $\alpha_1, \dots, \alpha_m \in \mathbb{C}$  und  $0 = \alpha_1 y^{(1)} + \dots + \alpha_m y^{(m)}$

$\implies 0 = \alpha_1 y^{(1)}(0) + \dots + \alpha_m y^{(m)}(0) \implies 0 = \alpha_1 c^{(1)} + \dots + \alpha_m c^{(m)}$

$\implies \alpha_1 = \dots = \alpha_m = 0 \implies y^{(1)}, \dots, y^{(m)}$  ist ein FS von (H). Sei  $A$  reell: 17.2  $\implies$  in (+) stehen Lösungen von (H).

Übung: diese Lösungen sind linear unabhängig. ■

### Beispiele:

(1) Bestimme ein komplexes FS von

$$y' = \underbrace{\begin{pmatrix} i & 0 & 2 \\ 1 & 1+i & 0 \\ 1-i & 1+i & 1+2 \end{pmatrix}}_{=A} y$$

$\det(A - \lambda E) = (\lambda - 1)(\lambda - i)(1 + i - \lambda)$ ; Eigenwerte:  $\lambda_1 = i, \lambda_2 = 1 + i, \lambda_3 = 1$

EV zu  $\lambda_1$ :  $(1, -1, i)$ , EV zu  $\lambda_2$ :  $(2, 2i, 1 + i)$ , EV zu  $\lambda_3$ :  $(0, 1, 0)$

$$\text{FS: } y^{(1)}(x) = e^{ix} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ i \end{pmatrix}, y^{(2)}(x) = e^{(1+i)x} \begin{pmatrix} 2 \\ 2i \\ 1+i \end{pmatrix}, y^{(3)}(x) = e^x \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

(2) Bestimme ein reelles FS von

$$y' = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ -3 & 1 & -1 \end{pmatrix}}_{=A} y$$

$\det(A - \lambda E) = (\lambda - i)(\lambda + i)(1 - \lambda)$

$\lambda_1 = i, \lambda_2 = \overline{\lambda_1}, \lambda_3 = 1$

EV zu  $\lambda_1$ :  $(1, 1, 1 - i)$ , EV zu  $\lambda_3$ :  $(1, 3, 0)$

$$y(x) := e^{ix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 - i \end{pmatrix} = (\cos x + i \sin x) \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 - i \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \cos x + i \sin x \\ \cos x + i \sin x \\ \cos x + \sin x + i(\sin x - \cos x) \end{pmatrix}$$

$$= \underbrace{\begin{pmatrix} \cos x \\ \cos x \\ \cos x + \sin x \end{pmatrix}}_{=: y^{(1)}(x)} + i \underbrace{\begin{pmatrix} \sin x \\ \sin x \\ \sin x - \cos x \end{pmatrix}}_{=: y^{(2)}(x)}$$

$$y^{(3)}(x) = e^x \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Fundamentalsystem:  $y^{(1)}, y^{(2)}, y^{(3)}$

### Hilfssatz (1)

Sei  $\lambda$  ein  $q$ -facher Eigenwert von  $A$  und  $c^{(1)}, \dots, c^{(\nu)}$  seien linear unabhängig in  $\text{Kern}(A - \lambda E)^q$ .

Für  $j = 1, \dots, \nu$ :

$$y^{(j)}(x) := e^{\lambda x} \left( c^{(j)} + x(A - \lambda E)c^{(j)} + \frac{x^2}{2!}(A - \lambda E)^2 c^{(j)} + \dots + \frac{x^{(q-1)}}{(q-1)!}(A - \lambda E)^{q-1} c^{(j)} \right)$$

Dann sind  $y^{(1)}, \dots, y^{(\nu)}$  linear unabhängige Lösungen von  $(H)$ .

### Beweis

1. Schreibe  $c$  statt  $c^{(j)}$  und  $y$  statt  $y^{(j)}$ . Also:

$$\begin{aligned} y(x) &= e^{\lambda x} \sum_{k=0}^{q-1} \frac{x^k}{k!} (A - \lambda E)^k c \\ y'(x) &= \lambda y(x) + e^{\lambda x} \sum_{k=1}^{q-1} \frac{x^{k-1}}{(k-1)!} (A - \lambda E)^k c \\ &= \lambda y(x) + e^{\lambda x} \sum_{k=1}^q \frac{x^{k-1}}{(k-1)!} (A - \lambda E)^k c \\ &= \lambda y(x) + e^{\lambda x} \sum_{k=0}^{q-1} \frac{x^k}{k!} (A - \lambda E)^{k+1} c \\ &= \lambda y(x) + (A - \lambda E) \underbrace{\left( e^{\lambda x} \sum_{k=0}^{q-1} \frac{x^k}{k!} (A - \lambda E)^k c \right)}_{=y(x)} \\ &= \lambda y(x) + (A - \lambda E)y(x) = Ay(x) \end{aligned}$$

2.  $y^{(j)}(0) = c^{(j)} \xrightarrow{16.3} y^{(1)}, \dots, y^{(\nu)}$  sind linear unabhängig in  $\mathbb{L}$  ■

### Hilfssatz (2)

Seien  $\lambda_1, \dots, \lambda_k$  die paarweisen verschiedenen Eigenwerte von  $A$  und  $q_1, \dots, q_k$  deren Vielfachheiten (also:  $k \leq m, q_1 + \dots + q_k = m$ ).

$$V_j := \text{Kern}(A - \lambda_j E)^{q_j} \quad (j = 1, \dots, k).$$

Dann:

$$\mathbb{C}^m = V_1 \oplus V_2 \oplus \dots \oplus V_k$$

### Beweis

Siehe lineare Algebra ■

**Konstruktion für die Praxis:** Bezeichnungen wie im Hilfssatz 2. Sei  $j \in \{1, \dots, k\}$ . Dann:

$$\text{Kern}(A - \lambda_j E) \subseteq \text{Kern}(A - \lambda_j E)^2 \subseteq \text{Kern}(A - \lambda_j E)^3 \subseteq \dots \subseteq V_j$$

Bestimme eine Basis von  $V_j$  wie folgt:

Bestimme eine Basis von  $\text{Kern}(A - \lambda_j E)$ . Erweitere diese zu einer Basis von  $\text{Kern}(A - \lambda_j E)^2$ ,  
...

Aus den Hilfssätzen (1) und (2) und obiger Konstruktion folgt:

**Satz 17.5**

$\lambda_1, \dots, \lambda_k$  und  $q_1, \dots, q_k$  seien wie im Hilfssatz (2). Zu  $\lambda_j$  gibt es  $q_j$  linear unabhängige Lösungen von  $(H)$  der Form:

$$(**) \quad e^{\lambda_j x} p_0^{(j)}(x), e^{\lambda_j x} p_1^{(j)}(x), \dots, e^{\lambda_j x} p_{q_j-1}^{(j)}(x)$$

wobei im Vektor  $p_\nu^{(j)}(x)$  Polynome vom Grad kleiner oder gleich  $\nu$  stehen.

Führt man diese Konstruktion für jedes  $\lambda_j$  durch, so erhält man ein (komplexes) Fundamentalsystem von  $(H)$ .

Ist also  $A$  reell, so kann man mit einem  $l \in \mathbb{N}$  annehmen:

$$\lambda_1, \dots, \lambda_l \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}, \lambda_{l+1} = \overline{\lambda_1}, \dots, \lambda_{2l} = \overline{\lambda_l}, \lambda_{2l+1}, \dots, \lambda_k \in \mathbb{R}$$

und

$$p_0^{(j)}(x), \dots, p_{q_j-1}^{(j)}(x) \in \mathbb{R}^m \quad (j = 2l+1, \dots, k)$$

Ein reelles Fundamentalsystem von  $(H)$  erhält man wie folgt:

1. Für  $\lambda_1, \dots, \lambda_l$  zerlege die Lösungen in  $(**)$  in Real- und Imaginärteil (und lasse die Lösungen für  $\lambda_{k+1}, \dots, \lambda_{2l}$  unberücksichtigt).
2. Für  $\lambda_{2l+1}, \dots, \lambda_k$  übernehme die Lösungen aus  $(**)$ .

**Bezeichnung:** Für  $a^{(1)}, \dots, a^{(\nu)} \in \mathbb{C}^m$  sei  $[a^{(1)}, \dots, a^{(\nu)}]$  die lineare Hülle von  $a^{(1)}, \dots, a^{(\nu)}$

**Beispiele:**

(1)

$$y' = \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & -2 & 0 \end{pmatrix}}_{=A} y$$

$\lambda_1 = i$  ist ein 2-facher Eigenwert von  $A$ ,  $\lambda_2 = \overline{\lambda_1} = -i$  ist ein 2-facher Eigenwert von  $A$ .

$$\text{Kern}(A - iE) = \left[ \begin{pmatrix} 1 \\ i \\ -1 \\ -i \end{pmatrix} \right] \subseteq \left[ \begin{pmatrix} 1 \\ i \\ -1 \\ -i \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2i \\ -3 \end{pmatrix} \right] = \text{Kern}(A - iE)^2$$

$$y^{(1)}(x) = e^{ix} \begin{pmatrix} 1 \\ i \\ -1 \\ -i \end{pmatrix}$$

$$y^{(2)}(x) = e^{ix} \left( \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2i \\ -3 \end{pmatrix} + x(A - iE) \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2i \\ -3 \end{pmatrix} \right) = e^{ix} \begin{pmatrix} x \\ 1 + ix \\ -x + 2i \\ 3 - ix \end{pmatrix}$$

Dann ist  $\operatorname{Re} y^{(1)}, \operatorname{Im} y^{(1)}, \operatorname{Re} y^{(2)}, \operatorname{Im} y^{(2)}$  ein reelles FS.

$$y^{(1)}(x) = \begin{pmatrix} \cos x + i \sin x \\ -\sin x + i \cos x \\ -\cos x - i \sin x \\ \sin x - i \cos x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos x \\ -\sin x \\ -\cos x \\ \sin x \end{pmatrix} + i \begin{pmatrix} \sin x \\ \cos x \\ -\sin x \\ -\cos x \end{pmatrix}$$

(2)

$$y' = \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -2 & 3 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}}_{=A} y$$

$$\det(A - \lambda E) = -(\lambda - 1)(\lambda - 1)^2; \lambda_1 = 1, q_1 = 2, \lambda_2 = 2, q_2 = 1;$$

$$\operatorname{Kern}(A - E) = \left[ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right] \subseteq \left[ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 9 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \right] = \operatorname{Kern}(A - E)^2$$

$$y^{(1)}(x) = e^x \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$y^{(2)}(x) = e^x \left( \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} + x(A - E) \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \right)$$

$$= e^x \left( \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} + x \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right)$$

$$= e^x \begin{pmatrix} x \\ x \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$\operatorname{Kern}(A - 2E) = \left[ \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right]$$

$$y^{(3)}(x) = e^{2x} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Das Fundamentalsystem ist  $y^{(1)}, y^{(2)}, y^{(3)}$ .

(3)

$$y' = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & -4 & 3 \end{pmatrix}}_{=A} y$$

$$\det(A - \lambda E) = -(\lambda - 1)^3; \lambda_1 = 1, q_1 = 3$$

$$\begin{aligned} \text{Kern}(A - E) &= \left[ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right] \\ &\subseteq \left[ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} \right] = \text{Kern}(A - E)^2 \\ &\subseteq \left[ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right] = \text{Kern}(A - E)^3 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} y^{(1)}(x) &= e^x \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\ y^{(2)}(x) &= e^x \left( \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} + x(A - E) \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} \right) \\ &= e^x \left( \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} + x \begin{pmatrix} -4 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right) \\ &= e^x \begin{pmatrix} -4x \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} \\ y^{(3)}(x) &= e^x \left( \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + x(A - E) \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \frac{x^2}{2}(A - E)^2 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right) \\ &= e^x \begin{pmatrix} x - 2x^2 \\ -x \\ 1 + 2x \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Das Fundamentalsystem ist  $y^{(1)}, y^{(2)}, y^{(3)}$ .

**Zum inhomogenen System**  $(IH) \quad Ay + b(x)$ . Sei  $y^{(1)}, \dots, y^{(m)}$  ein Fundamentalsystem von  $(H)$ . Für eine spezielle Lösung  $y_s$  von  $(IH)$  macht man den Ansatz

$$y_s(x) = c_1(x)y^{(1)} + \dots + c_m(x)y^{(m)}$$

und gehe damit in  $(IH)$  ein.

