Grundlagen

σ-Algebren
$\mathfrak{A}$ ist σ-Algebra, gdw.:
$\Omega \in \mathfrak{A}$, $A^c \in \mathfrak{A}$, $\cup_{i=1}^\infty A_i \in \mathfrak{A}$

Mengengrenzwerte
unendlich viele:
$$\limsup A_n = \bigcap_{k=1}^\infty \bigcup_{n=k}^\infty A_n$$
alle bis auf endlich viele:
$$\liminf A_n = \bigcup_{k=1}^\infty \bigcap_{n=k}^\infty A_n$$

Wahrscheinlichkeitsmaß
$0 \le P(\omega) \le 1$
$\sum_{\omega\in\Omega} P(\omega)=1$
$P(\sum A_i) = \sum P(A_i)$
$P(A^c) = 1-P(A)$
$A\subset B \Rightarrow P(A)\le P(B)$
$P(\bigcup_{i=1}^\infty A_i) \le \sum_{i=1}^\infty P(A_i)$

Siebformel
$$P(\bigcup_{k=1}^n A_k) = \sum_{k=1}^n (-1)^{k-1} \cdot \sum_{1\le i_1<i_2\cdots<i_k\le n} P(A_{i1}\cap\cdots\cap A_{ik})$$
Also:
$P(A\cup B) = P(A)+P(B)-P(A\cap B)$

Bedingte Wahrscheinlichkeiten
$P(A|B) := \frac{P(A\cap B)}{P(B)}$
B_i seien eine Partition:
$P(A) = \sum_{i=1}^n P(B_i)P(A|B_i)$
Satz v. Bayes:
$P(B_k|A) = \frac{P(A|B_k)\cdot P(B_k)}{\sum_{i=1}^\infty P(A|B_i)\cdot P(B_i)}$

Diskrete Verteilungen

Gleichverteilung
$P(X=x_i) = p_X(x_i) = \frac1n$ $(i=1,\dots,n)$ $EX = \frac1n\sum_{i=1}^n x_i$
$\mathrm{Var}(X) = \frac1n(\sum_{i=1}^n x_i^2 - \frac1n(\sum_{i=1}^n x_i)^2)$

Binomialverteilung
$X\sim B(n,p)$
$p_X(k) = \binom nk p^k(1-p)^{n-k}$
$F_X(x) = \sum_{k\le x}\binom nk p^k (1-p)^{n-k}$
$EX=np$, $\mathrm{Var}(X) = np(1-p)$
$g_X(s) = (1-p+sp)^n$

neg. Binomialverteilung
$X\sim NegB(n,p)$
$p_X(k) = \binom{n-1}{k-1}p^k(1-p)^{n-k}$
$F_X(x) = \sum_{k\le x}\binom nk p^k(1-p)^{n-k}$
$EX = \frac np$, $\mathrm{Var}(X) = n\frac{(1-p)}{p^2}$

Hypergeometrische Verteilung
W'keit, bei m Versuchen ohne Zurücklegen von n s/w-Kugeln k der r weißen zu ziehen.
$X\sim \mathrm{Hypergeom}(n,r,m)$
$p_X(k) = \frac{\binom rk\binom{n-r}{m-k}}{\binom nm}$
$EX = \frac{rm}{n}$
$\mathrm{Var}(X) = \frac{rm}{n}(1-\frac rn)(\frac{n-m}{n-1})$

Geometrische Verteilung
W'keit beim k-ten Versuch den 1. Treffer zu bekommen, p Trefferw'keit. $p_X(k) = (1-p)^{k-1}p$
$EX = \frac1p$, $\mathrm{Var}(X) = \frac{1-p}{p^2}$

Poisson-Verteilung
$X\sim\mathrm{Po}(\lambda)$ Approximation der Binomialvert. mit $\lambda=np$
$p_X(k) = e^{-\lambda}\frac{\lambda^k}{k!}$ $(k=0,\dots)$
$EX = \mathrm{Var}(X) = \lambda$
$g_X(s) = e^{\lambda(s-1)}$ $X\sim\mathrm{Po}(\lambda_0), Y\sim\mathrm{Po}(\lambda_1)\Rightarrow X+Y\sim\mathrm{Po}(\lambda_0+\lambda_1)$

Stetige Verteilungen

Gleichverteilung
$X\sim U(a,b)$
$f_X(x) = \begin{cases}\frac{1}{b-a}, & a<x<b\\ 0, & \text{sonst}\end{cases}$
$F_X(x) = \frac{x-a}{b-a}$ auf (a,b)
$EX = \frac{a+b}{2}$, $\mathrm{Var}(X) = \frac1{12}(b-a)^2$

Exponentialverteilung
$X\sim\mathrm{Exp}(\lambda),\lambda>0$
$f_X(x) = \begin{cases}\lambda e^{-\lambda x}, & x\ge0\\0,&x<0\end{cases}$
$F_X(x) = 1-e^{-\lambda x}$
$EX=\frac1\lambda$, $\mathrm{Var}(X) = \frac1{\lambda^2}$
Gedächtnislosigkeit: $P(X\ge t|X\ge s) = P(X\ge t-s)$ $(0<s<t)$

Normalverteilung
$X\sim N(\mu,\sigma^2)$
$$f_X(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\exp\left(-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right)$$
$EX=\mu$, $\mathrm{Var}(X)=\sigma^2$
$$\Phi(x) = \int_{-\infty}^x \frac1{\sqrt{2\pi}}\exp\left(-\frac{y^2}{2}\right)dy$$
$\Phi(x) = 1-\Phi(-x)$
$\Phi^{-1}(x) = -\Phi^{-1}(1-x)$
$EX=\mu$, $\mathrm{Var}(X)=\sigma^2$
Sei $X\sim N(\mu,\sigma^2)$.
$\Rightarrow Z := \frac{X-\mu}{\sigma}\sim N(0,1)$
Standardnormalverteilung:
$\mu=0$, $\sigma^2=1$
Faltungsstabil:
$X_1+X_2\sim N(\mu_1+\mu_2,\sigma_1^2+\sigma_2^2)$
$X\sim N(0,1)$:
$\varphi_X(t) = \int_{-\infty}^\infty \cos(tx)\frac1{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}}dx$
$\varphi_X'(t) = -t\varphi_X(t)$

Gammaverteilung
$X\sim G(\alpha,\lambda)$
$f_X(x) = \begin{cases}\frac{\lambda^\alpha}{\Gamma(\alpha)}x^{\alpha-1}e^{-\lambda x}, & x\ge 0\\0,&x<0\end{cases},$
wobei $\Gamma(\alpha) := \int_o^\infty t^{\alpha-1}e^{-t}dt$
$EX=\frac\alpha\lambda$, $\mathrm{Var}(X) = \frac\alpha{\lambda^2}$
$X\sim G(\alpha,\lambda_1), Y\sim G(\alpha,\lambda_2)\Rightarrow X+Y\sim G(\alpha,\lambda_1+\lambda_2)$
für $\alpha=1$ erhält man die Exponentialverteilung.

Formeln

Erwartungswert
(Existenz falls mit $|\cdot|$ noch $<\infty$)
diskret: $EX = \sum_{k=1}^\infty x_kP_X(k)$
$Eg(X) = \sum_{k=1}^\infty g(x_k)P_X(k)$
stetig: $EX = \int_{-\infty}^\infty xf_X(x)dx$
$Eg(X) = \int_{-\infty}^\infty g(x)f_X(x)dx$
$E(aX+bY) = aEX+bEY$
Falls X_i unkorreliert:
$E(\prod_{i=1}^n X_i) = \prod_{i=1}^n E(X_i)$
Erwartungsvektor:
$X = (X_1,\dots,X_n)$ ZV, $EX_i^2<\infty$:
$EX := (EX_1,\dots,EX_n)$
Cauchy-Schwarze Ungleichung:
$\mathrm{Var}(X),\mathrm{Var}(Y) ex.$
$\Rightarrow (EXY)^2\le EX^2EY^2$

Varianz
$\mathrm{Var}(X) := E((X-EX)^2) = EX^2-(EX)^2\ge0$
Daher auch:
$EX^2 = \mathrm{Var}(X)+(EX)^2$
$\mathrm{Var}(aX+b) = a^2\mathrm{Var}(X)$
Falls X_i nicht unkorreliert:
$\mathrm{Var}(\sum_{i=1}^n X_i) = \sum_{i=1}^n\mathrm{Var}(X_i) + 2\cdot\sum_{1\le i<j\le n}\mathrm{Cov}(X_i,X_j)$
Falls X_i unkorreliert:
$\mathrm{Var}(\sum_{i=1}^n X_i) = \sum_{i=1}^n \mathrm{Var}(X_i)$
Standardabweichung:
$\sigma(X) := \sqrt{\mathrm{Var}(X)}$

Urnenmodell
Mit Zurückl., mit Reihenflg. (k unterscheidbare Objekte mit Mehrfachbel. auf n Fächer): n^k
Mit Zurückl., ohne Reihenflg. (nicht untersch. O., mit Mehrfachbel.) : $\binom{n+k-1}{k}$
Ohne Zurückl., mit Reihenflg. (untersch. O., ohne Mehfachbel.): $\frac{n!}{(n-k)!}$
Ohne Zurückl., ohne Reihenflg. (nicht untersch. O., ohne Mehrfachbel.): $\binom nk$

Tschebyscheff Ungleichung
$P(|X-EX|\ge\varepsilon)\le\frac1{\varepsilon^2}\mathrm{Var}(X)$

Faltungsformel
(X,Y) abs stetige ZV, mit gem Dichte $f_{XY}\Rightarrow Z:=X+Y$ ist abs stetige ZV mit Dichte:
$f_Z(x) = \int_{-\infty}^\infty f_{X,Y}(t,x-t)dt$
X,Y unabh $\Rightarrow$ Faltungsformel:
$f_Z(x) = \int_{-\infty}^\infty f_X(t)f_Y(x-t)dt$

Unabhängingkeit von ZV
Def.:
$F_{X_1,\dots,X_n}(x_1,\dots,x_n) = \prod F_{X_i}(x_i)$
gdw. bis auf eine Nullmenge:
$f_{X_1,\dots,X_n}(x_1,\dots,x_n) = \prod f_{X_i}(x_i)$
Sätze:
X,Y unabh. $\Rightarrow EXY = EXEY$
$X_1,\dots,X_n$ unabh
$\Rightarrow \mathrm{Var}(X_1+\cdots+X_n) = \sum_{i=1}^n\mathrm{Var}(X_i)$

Kovarianz
$\mathrm{Cov}(X,Y) = E(X-EX)(Y-EY) = EXY-EXEY$
$\mathrm{Cov}(X,X) = \mathrm{Var}(X)$
$\mathrm{Cov}(aX+bY,Z)$
$= a\,\mathrm{Cov}(X,Z)+b\,\mathrm{Cov}(Y,Z)$
$= \mathrm{Cov}(Z,aX+bY)$
X,Y *unkorreliert:* gdw.
$\mathrm{Cov}(X,Y)=0$
X,Y unabh. $\Rightarrow X,Y$ unkorr.
Kovarianzmatrix:
$X = (X_1,\dots,X_n)\Rightarrow \mathrm{Cov}(X) := (\mathrm{Cov}(X_i,X_j))_{i,j=1,\dots,n}$
Korrelationskoeffizient: Ist $\mathrm{Var}(X)\cdot\mathrm{Var}(Y)>0$ so gilt:
$\left|\rho(X,Y) := \frac{\mathrm{Cov}(X,Y)}{\sqrt{\mathrm{Var}(X)\mathrm{Var}(Y)}}\right|\le 1$

Erzeugende Fkt (diskret)
$g_X: [-1,1]\to R$
$g_X(s) = \sum_{k=0}^\infty p_X(k)s^k = Es^X$
$g_X(1) = 1, p_X(k) = \frac{g_X^{(k)}(0)}{k!}$
$EX = g_X'(1^-)$, $\mathrm{Var}(X) = g_X''(1^-)+g_X'(1^-)-(g_X'(1^-))^2$
X,Y unabh, diskret
$\Rightarrow g_{X+Y}(s) = g_X(s)g_Y(s)$

Konvergenzbegriff für ZV

P-fast sicher
$X_n\xrightarrow{f.s.}X$ wenn:
$P(\{\omega\in\Omega|\lim_{n\to\infty}X_n(\omega) = X(\omega)\})=1$

in Wahrs'keit, stochastisch
$X_n\xrightarrow{P}X$ wenn, $\forall\varepsilon>0$
$\lim_{n\to\infty}P(\{\omega\in\Omega\Big||X_n(\omega)-X(\omega)|\ge\varepsilon\})=0$

in Verteilung
$X_n\xrightarrow{d}X$ wenn $\forall x$ mit F_X stetig:
$\lim_{n\to\infty}F_{X_n}(x) = F_X(x)$

Implikationen
f.s. ⇒ in Wahrs'keit
in Wahrs'keit ⇒ in Verteilung
in Verteilung gegen eine Konstante $c\in\mathbb R\Rightarrow$ in Wahrs'keit

Grenzwertsätze

Kolmogorov
(Starkes Gesetz der großen Zahlen)
X_i unabh. und identisch vert,
$E|X_1|<\infty$: $\frac1n\sum_{i=1}^n X_i\xrightarrow{f.s.}EX_1$

Zentraler Grenzwertsatz
X_i u.i.v., $E|X_1|<\infty$,
$0<\mathrm{Var}(X_1)<\infty$: für $n\to\infty$ gilt:
$\frac{\sum_{i=1}^n X_i - n\cdot EX_1}{\sqrt{n\cdot\mathrm{Var}(X_1)}}\xrightarrow{d}X\sim\mathcal N(0,1)$
also
$P\left(\frac{\sum_{i=1}^n X_i-nEX_1}{\sqrt{n\cdot\mathrm{Var}(X_1)}}\le x\right)\to\Phi(x)$

Zweiseitiger Grenzwertsatz
Gleiche Voraussetzungen wie oben:
$$P\left(a\le\frac{\sum_{i=1}^n X_i - n\cdot EX_1}{\sqrt{n\cdot\mathrm{Var}(X_1)}}\le b\right)\to\Phi(b)-\Phi(a)$$

Charkteristische Funktion

X ZV, $\varphi_X:\mathbb R\to\mathbb C$
$\varphi_X(t) := Ee^{itX} = E\cos(tX)+iE\sin(tX)$
X diskret $\Rightarrow\varphi_X(t) = g_X(e^{it})$
X abs stetig
$\Rightarrow\varphi_X(t) = \int_{-\infty}^\infty e^{itx}f_X(x)dx$
$\varphi_X(0)=1$ $|\varphi_X(t)|\le1$ $\forall t\in\mathbb R$
$a,b\in\mathbb R$:
$\varphi_{aX+b}(t) = e^{ibt}\varphi_X(at)$ $\varphi_X(t)$ ist glm stetig auf $\mathbb R$
X,Y unabh ZV
$\Rightarrow\varphi_{X+Y}(t) = \varphi_X(t)\varphi_Y(t)$
$E|X|^n<\infty$, $n\in N\Rightarrow\varphi_X$ n-mal db und: $\varphi_X^{(n)}(0) = i^nEX^n$
X,Y ZV mit gleicher char Fkt, so auch gleiche Verteilung.
(X_n) Folge von ZV mit $F_{X_n}(x)$ und $\varphi_{X_n}(t)$ so ist äquivalent:
$X_n\xrightarrow{d}X$
$\varphi_{X_n}(t)\to\varphi(t)$ $\forall t\in\mathbb R$ und φ stetig in 0

Parameterschätzung

Defnitionen
Stichprobenmittel: $\bar x = \frac1n\sum_{i=1}^n x_i$
Stichprobenvarianz:
$S^2(x) = \frac1{n-1}\sum_{i=1}^n(x_i-\bar x)^2$

Maximum-Likelihood-Methode
Likelihood-Funktion:
$L_x(\theta) = f_\theta(x_1)\cdot\dots\cdot f_\theta(x_n)$bzw.
$L_x(\theta) = p_\theta(x_1)\cdot\dots\cdot p_\theta(x_n)$
Maximum-Likelihood-Schätzer
MLS: bei welchen θ ist L_x maximal.
Oft einfacher: $\ln L_x(\theta)$ maximieren.
$(\ln a\cdot b = \ln a+\ln b$, $\ln\prod = \sum\ln)$

Momentenmethode
Pro zu schätzenden Parameter ein empirisches Moment mit dem der Verteilung gleichsetzen. Also:
$\mu_k(\theta) = \mathrm E_\theta X^k \overset{!}{=} \overline{x}_k := \frac1n\sum_{i=1}^n x_i^k$

Eigenschaften
Erwartungstreu: $E_\theta T(X) = \theta$
ET hat i.A. nix mit EX zu tun!
Bias: $b_T(\theta) := E_\theta T(X)-\theta$
Mittlerer Quadratischer Fehler:
$\mathrm{MSE}(T) := E_\theta(T(x)-\theta)^2$
unbiasd: $\mathrm{MSE}(T) = \mathrm{Var}_\theta(T)$

Fisher-Info.
$I(\theta) := E_\theta\left((\frac{\partial}{\partial\theta}\log L_X(\theta))^2\right)$

Ungleichung von Cramér-Rao
$\mathrm{Var}_\theta(T(X))\ge\frac{(1+\frac{\partial}{\partial\theta}b_T(\theta))^2}{I(\theta)}$

Konfidenzintervalle

Gesucht sind ZV L und U mit $L(x)\le U(x)$ und
$P_\theta(L(x)\le\theta\le U(x)) = 1-\alpha$

Testtheorie

Überprüfen, ob ein Parameter θ einer Verteilung in Θ_0 oder Θ_1 $(\Theta_0+\Theta_1=\Theta)$ ist.
Einseitiger Test:
$H_0:\theta\le\theta_0$ vs. $H_1:\theta>\theta_0$
Zweiseitiger Test:
$H_0:\theta=\theta_0$ vs. $H_1:\theta\ne\theta_0$

Test, Fehler und Güte
Sei $x\in\chi^n$ eine Stichprobe.
$\varphi:\chi^n\to\{1,0\}$ heißt *Test:*
Mit $\varphi(x)=1$ lehnen wir H_0 für x ab
Gütefkt: β gibt W'keit an, mit der H_0 wir ablehnen
$\beta(\theta) = P_\theta(\varphi(x)=1)$
F. 1. Art: Test: „H_1“ aber H_0 wahr.
F. 2. Art: Test: „H_0“ aber H_1 wahr.
Niveau: $\alpha\hat=$ W'keit für Fehler 1. Art $\le\alpha$. Also: $\beta(\theta)\le\alpha$
Man legt α fest. Also muss der Fehler 1. Art der schlimmere sein (z.B. unwirksames Medikament als wirksam bedacht oder Ham als Spam eingeordnet). Danach erst minimiert man den Fehler 2. Art.
Eselsbrücke: **H**ypothese $H_0\hat=$ **H**am.

Likelihood-Quotienten Test
Likelihood-Quotient:
$q(x) := \frac{\sup_{\theta\in\Theta_0}L_x(\theta)}{\sup_{\theta\in\Theta_1}L_x(\theta)}$
Test der Form:
$\varphi(x) = \begin{cases}0 & q(x)>c_0\\\gamma, & q(x)=c_0\\1 & q(x)<c_0\end{cases}$

Spezialfall: Neyman-Pearson-T.
$\varphi^*(x) = \begin{cases}1 & L_x(\theta_1)>c^*L_x(\theta_0)\\\gamma & L_x(\theta_1)=c^*L_x(\theta_0)\\0 & L_x(\theta_1)<c^*L_x(\theta_0)\end{cases}$

Hilfreiche Rechenregeln

Diskrete

$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k} = (a+b)^n$

Integrale

$\int f \cdot g = [f \cdot G] - \int f' \cdot G$

$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} \, dx = 1$

$(1-\alpha)$-Konfidenzintervalle

Regenwurmaufgabe

Annahme: Länge d. Regenwurm auf $(0, \theta)$ gleichverteilt. Maximallänge von n Würmern liegt vor. Gebe ein $(1-\alpha)$-KonfInt für d θ an. *Lösung:* $P_\theta(\max\{X_1, \dots, X_n\} \geq x) = 1 - P_\theta(X_1 < x) \cdot \dots \cdot P_\theta(X_n < x) = 1 - \left(\frac{x}{\theta}\right)^n = 1 - \alpha \Rightarrow x = \theta \sqrt[n]{\alpha}$.
Somit: $\max\{X_1, \dots, X_n\} \geq \theta \sqrt[n]{\alpha} \Leftrightarrow \theta \leq \frac{\max\{X_1, \dots, X_n\}}{\sqrt[n]{\alpha}}$

Konfidenzintervall:
$\left[\max\{X_1, \dots, X_n\}, \frac{\max\{X_1, \dots, X_n\}}{\sqrt[n]{\alpha}}\right]$

Scriptbeispiel 15.2

Schätzung der Erfolgswahrscheinlichkeit,
$X \sim B(m, \theta), \Theta = [0,1]$ Dann gilt:

$$L(x) = \frac{1}{m + (z_{\frac{\alpha}{2}})^2} \cdot \left(x + \frac{(z_{\frac{\alpha}{2}})^2}{2} + z_{\frac{\alpha}{2}} \sqrt{\frac{x(m-x)}{m} + \frac{(z_{\frac{\alpha}{2}})^2}{4}} \right)$$

$$U(x) = \frac{1}{m + (z_{\frac{\alpha}{2}})^2} \cdot \left(x + \frac{(z_{\frac{\alpha}{2}})^2}{2} - z_{\frac{\alpha}{2}} \sqrt{\frac{x(m-x)}{m} + \frac{(z_{\frac{\alpha}{2}})^2}{4}} \right)$$

wobei x Treffer der Stichprobe, $z_{\frac{\alpha}{2}} = \Phi^{-1}(\frac{\alpha}{2})$.

Hypothesentest

Test auf Mittelw, Var bekannt

$X = (X_1, ..., X_n), X_i \sim P_\mu = N(\mu, \sigma_0^2), \sigma_0$ bekannt, $\mu \in \Theta = R$.

Einseitiger Test

$$H_0 : \mu \leq \mu_0 \quad \text{vs} \quad H_1 : \mu > \mu_0$$

mit $\mu_0 \in R$ geg.

Sinnvoller Test:

$$\varphi(x) = \begin{cases} 0 & , \quad \overline{x} \leq c \\ 1 & , \quad \overline{x} > c \end{cases}$$

$\overline{x} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} X_i$. $c \in R$ nun zu bestimmen, sodass Testnivea α eingehalten.

Betrachte $\sqrt{n} \, \frac{\overline{x} - \mu}{\sigma_0}$

$$P_\mu \left(\sqrt{n} \frac{\overline{X} - \mu}{\sigma_0} \leq x \right) = \Phi(x)$$

$\beta_c(\mu) = 1 - \Phi\left(\sqrt{n} \frac{c-\mu}{\sigma_0}\right)$ Es genügt: $\beta_c(\mu_0) \leq \alpha$

$$\beta_c(\mu_0) \leq \alpha \Leftrightarrow 1 - \Phi \underbrace{\left(\sqrt{n} \frac{c - \mu_0}{\sigma_0}\right)}_{= z_{1-\alpha}} \leq \alpha$$

$\Leftrightarrow c \geq \frac{z_{1-\alpha} \, \sigma_0}{\sqrt{n}} + \mu_0 =: c^*$

Test auf Mittelw, Var unbekannt (sog.t-Test)

$P_{\mu, \sigma^2} = N(\mu, \sigma^2)$,
$\theta = (\mu, \sigma^2) \in \Theta = R \times R_+$. σ^2 ist hier nicht bekannt!

Einseitiges Testproblem:
$H_0 : \mu \leq \mu_0$ vs $H_1 : \mu > \mu_0$ für ein festes $\mu_0 \in R$
$X = (X_1, \dots, X_n)$ Zufallsstichprobe zu P_{μ, σ^2}. Dann gilt:
$\sqrt{n} \, \frac{\overline{X} - \mu}{S(X)} \sim t_{n-1}$, wir mussten also im Gegensatz zu oben σ durch $S(X)$ ersetzen.
Folgender Test hält α:

$$\varphi(x) = \begin{cases} 0, \ \sqrt{n} \, \frac{\overline{x} - \mu_0}{S(x)} \leq t_{n-1}(1-\alpha) \\ 1, \ \sqrt{n} \, \frac{\overline{x} - \mu_0}{S(x)} > t_{n-1}(1-\alpha) \end{cases}$$

Zweiseitiger Test:

$H_0 : \mu = \mu_0 \quad$ vs $\quad H_1 : \mu \neq \mu_0$

Der zugehörige Test ist:

$$\varphi(x) = \begin{cases} 0, \ \sqrt{n} \, \left| \frac{\overline{x} - \mu_0}{S(x)} \right| \leq t_{n-1}(1 - \frac{\alpha}{2}) \\ 1, \ \sqrt{n} \, \left| \frac{\overline{x} - \mu_0}{S(x)} \right| > t_{n-1}(1 - \frac{\alpha}{2}) \end{cases}$$

Test auf die Varianz

$P_{\mu, \sigma^2} = N(\mu, \sigma^2)$,
$\theta = (\mu, \sigma^2) \in \Theta = R \times R_+$. wie gehabt.

Einseitiger Test:
$H_0 : \sigma^2 \leq \sigma_0^2$ vs. $H_1 : \sigma^2 > \sigma_0^2$

Es gilt:

$$P_{\mu, \sigma^2}\left(\frac{(n-1)S(X)^2}{\sigma_0^2} \leq x\right) = F_{\chi^2_{n-1}}(x)$$

Folgender Test tut es:

$$\varphi(x) = \begin{cases} 0, \ \frac{(n-1)S(x)^2}{\sigma_0} \leq \chi^2_{n-1}(1-\alpha) \\ 1, \ \frac{(n-1)S(x)^2}{\sigma_0} > \chi^2_{n-1}(1-\alpha) \end{cases}$$

Zweiseitiger Test
$H_0 : \sigma = \sigma_0$ vs. $H_1 : \sigma \neq \sigma_0$
Hier gewinnt:

$$\varphi(x) = \begin{cases} 0, \ \frac{(n-1)S^2(x)}{\sigma_0} > \chi^2_{n-1}(\frac{\alpha}{2}) \\ 0, \ \frac{(n-1)S^2(x)}{\sigma_0} < \chi^2_{n-1}(1 - \frac{\alpha}{2}) \\ 1, \text{ sonst} \end{cases}$$