§ 2.

Konvergenz im $\mathbb{R}^n$

Sei $(a^{(k)})$ eine Folge in $\mathbb{R}^n$, also $(a^{(k)}) = (a^{(1)}, a^{(2)}, \dots)$ mit $a^{(k)} = (a_1^{(k)}, \dots a_n^{(k)}) \in \mathbb{R}^n$. Die Begriffe **Teilfolge** und **Umordnung** definiert man wie in Analysis I. $(a^{(k)})$ heißt beschränkt $:\iff \exists c \geq 0 : \|a^{(k)}\| \leq c \ \forall k \in \mathbb{N}$.

Definition (Grenzwert und Beschränktheit)
$(a^{(k)})$ heißt **konvergent** $:\iff \exists a \in \mathbb{R}^n : \|a^{(k)} - a\| \to 0 \ (k \to \infty)$ ($\iff \exists a \in \mathbb{R}^n : \forall \varepsilon > 0 \exists k_0 \in \mathbb{N} : \|a^{(k)} - a\| < \varepsilon \ \forall k \geq k_0$). In diesem Fall heißt a der **Grenzwert** (GW) oder **Limes** von $(a^{(k)})$ und man schreibt: $a = \lim_{k\to\infty} a^{(k)}$ oder $a^{(k)} \to a \ (k \to \infty)$

Beispiel
($n = 2$): $a^{(k)} = (\frac{1}{k}, 1 + \frac{1}{k^2})$ (Erinnerung: $\frac{1}{n}$ konvergiert gegen 0); $a := (0,1)$; $\|a^{(k)} - a\| = \|(\frac{1}{k}, \frac{1}{k^2})\| = (\frac{1}{k^2} + \frac{1}{k^4})^{\frac{1}{2}} \to 0 \implies a^{(k)} \to (0,1)$

Satz 2.1 (Konvergenz)
Sei $(a^{(k)})$ eine Folge in $\mathbb{R}^n$.

(1) Sei $a^{(k)} = (a_1^{(k)}, \dots, a_n^{(k)})$ und $a = (a_1, \dots, a_n) \in \mathbb{R}^n$. Dann:

$$a^{(k)} \to a \ (k \to \infty) \iff a_1^{(k)} \to a_1, \dots, a_n^{(k)} \to a_n \ (k \to \infty)$$

(2) Der Grenzwert einer konvergenten Folge ist eindeutig bestimmt.

(3) Ist $(a^{(k)})$ konvergent $\implies$ $a^{(k)}$ ist beschränkt und jede Teilfolge und jede Umordnung von $(a^{(k)})$ konvergiert gegen $\lim a^{(k)}$.

(4) Sei $(b^{(k)})$ eine weitere Folge, $a, b \in \mathbb{R}^n$ und $\alpha \in \mathbb{R}$. Es gelte $a^{(k)} \to a$, $b^{(k)} \to b$ Dann:

$$\|a^{(k)}\| \to \|a\|$$
$$a^{(k)} + b^{(k)} \to a + b$$
$$\alpha a^{(k)} \to \alpha a$$
$$a^{(k)} \cdot b^{(k)} \to a \cdot b$$

(5) **Bolzano-Weierstraß**: Ist $(a^{(k)})$ beschränkt, so enthält $(a^{(k)})$ eine konvergente Teilfolge.

(6) **Cauchy-Kriterium**: $(a^{(k)})$ konvergent $\iff \forall \varepsilon > 0 \ \exists k_0 \in \mathbb{N} : \|a^{(k)} - a^{(l)}\| < \varepsilon \ \forall k, l \geq k_0$

Beweis

(1) 1.1(7) $\implies |a_j^{(k)} - a_j| \leq \|a^{(k)} - a\| \leq \sum_{i=1}^n |a_i^{(k)} - a_i| \implies$ Behauptung.

(2) und

(3) wie in Analysis I.

(4) folgt aus (1)

(5) Sei $(a^{(k)})$ beschränkt. O.B.d.A: $n = 2$. Also $a^{(k)} = (a_1^{(k)}, a_2^{(k)})$ 1.1(7) $\implies |a_1^{(k)}|, |a_2^{(k)}| \leq \|a^{(k)}\|\ \forall k \in \mathbb{N} \implies (a_1^{(k)}), (a_2^{(k)})$ sind beschränkte Folgen in $\mathbb{R}$. Analysis 1 $\implies (a_1^{(k)})$ enthält eine konvergente Teilfolge $(a_1^{(k_j)})$. $(a_2^{(k_j)})$ enthält eine konvergente Teilfolge$(a_2^{(k_{j_l})})$. Analysis 1 $\implies (a_1^{(k_{j_l})})$ ist konvergent $\overset{(1)}{\implies} (a^{(k_{j_l})})$ konvergiert.

(6) „$\implies$“: wie in Analysis 1. „$\impliedby$“: 1.1(7) $\implies |a_j^{(k)} - a_j^{(l)}| \leq \|a^{(k)} - a^{(l)}\|\ (j = 1, \ldots, n) \implies$ jede Folge $(a_j^{(k)})$ ist eine Cauchyfolge in $\mathbb{R}$, also konvergent $\overset{(1)}{\implies} (a^{(k)})$ konvergiert. ∎

Satz 2.2 (Häufungswerte und konvergente Folgen)
Sei $A \subseteq \mathbb{R}^n$

(1) $x_0 \in \mathscr{H}(A) \iff \exists$ Folge $(x^{(k)})$ in $A \setminus \{x_0\}$ mit $x^{(k)} \to x_0$.

(2) $x_0 \in \bar{A} \iff \exists$ Folge $(x^{(k)})$ in A mit $x^{(k)} \to x_0$.

(3) A ist abgeschlossen $\iff$ der Grenzwert jeder konvergenten Folge in A gehört zu A.

(4) Die folgenden Aussagen sind äquivalent:

   (i) A ist beschränkt und abgeschlossen

   (ii) Jede Folge in A enthält eine konvergente Teilfolge, deren Grenzwert zu A gehört.

   (iii) A ist kompakt

Beweis

(1) Wie in Analysis 1

(2) Fast wörtlich wie bei (1)

(4) Wörtlich wie in Analysis 1

(3) „$\implies$“: Sei $(a^{(k)})$ eine konvergente Folge in A und $x_0 := \lim a^{(k)} \overset{(2)}{\implies} x_0 \in \bar{A} \overset{\text{Vor.}}{=} A$.
„$\impliedby$“: z.z: $\bar{A} \subseteq A$. Sei $x_0 \in \bar{A} \overset{(2)}{\implies} x_0 \in A$. Also: $A = \bar{A}$. ∎

Satz 2.3 (Überdeckungen)
$A \subseteq \mathbb{R}^n$ sei abgeschlossen und beschränkt

(1) Ist $\varepsilon > 0 \implies \exists a^{(1)}, \ldots, a^{(m)} \in A : A \subseteq \bigcup_{j=1}^{m} U_\varepsilon(a^{(j)})$

(2) $\exists$ abzählbare Teilmenge B von $A : \bar{B} = A$.

(3) **Überdeckungssatz von Heine-Borel**: Ist $(G_\lambda)_{\lambda \in M}$ eine Familie offener Mengen mit $A \subseteq \bigcup_{\lambda \in M} G_\lambda$, dann existieren $\lambda_1, \ldots, \lambda_m \in M : A \subseteq \bigcup_{j=1}^{m} G_{\lambda_j}$.

Beweis

(1) Sei $\varepsilon > 0$. Annahme: Die Behauptung ist falsch. Sei $a^{(1)} \in A$. Dann: $A \nsubseteq U_\varepsilon(a^{(1)}) \implies \exists a^{(2)} \in A : a^{(2)} \notin U_\varepsilon(a^{(1)}) \implies \|a^{(2)} - a^{(1)}\| \geq \varepsilon$. $A \nsubseteq U_\varepsilon(a^{(1)}) \cup U_\varepsilon(a^{(2)}) \implies \exists a^{(3)} \in A : \|a^{(3)} - a^{(2)}\| \geq \varepsilon,\ \|a^{(3)} - a^{(1)}\| \geq \varepsilon$ etc.. Wir erhalten so eine Folge $(a^{(k)})$ in A: $\|a^{(k)} - a^{(l)}\| \geq \varepsilon$ für $k \neq l$. 2.2(4) $\implies$ $(a^{(k)})$ enthält eine konvergente Teilfolge $\overset{2.1(6)}{\implies} \exists j_0 \in \mathbb{N} : \|a^{(k_j)} - a^{(k_l)}\| < \varepsilon \ \forall j, l \geq j_0$, Widerspruch!

(2) Sei $j \in \mathbb{N}$. $\varepsilon := \frac{1}{j}$. (1) $\implies$ $\exists$ endl. Teilmenge B_j von A mit $(*)$ $A \subseteq \bigcup_{x \in B_j} U_{\frac{1}{j}}(x)$. $B := \bigcup_{j \in \mathbb{N}} B_j \implies B \subseteq A$ und B ist abzählbar. Dann: $\bar{B} \subseteq \bar{A} \overset{\text{Vor.}}{=} A$. Noch zu zeigen: $A \subseteq \bar{B}$. Sei $x_0 \in A$ und $\delta > 0$: zu zeigen: $U_\delta(x_0) \cap B \neq \emptyset$. Wähle $j \in \mathbb{N}$ so, daß $\frac{1}{j} < \delta$ $(*) \implies \exists x \in B_j \subseteq B :\ x_0 \in U_{\frac{1}{j}}(x) \implies \|x_0 - x\| < \frac{1}{j} < \delta \implies x \in U_\delta(x_0) \implies x \in U_\delta(x_0) \cap B$.

(3) Teil 1: Behauptung: $\exists \varepsilon > 0 :\ \forall a \in A\ \exists \lambda \in M : U_\varepsilon(a) \subseteq G_\lambda$. Beweis: Annahme: Die Behauptung ist falsch. $\forall k \in \mathbb{N}\ \exists a^{(k)} \in A :\ (**) U_{\frac{1}{k}}(a^{(k)}) \nsubseteq G_\lambda\ \forall \lambda \in M$. 2.2(4) $\implies$ $(a^{(k)})$ enthält eine konvergente Teilfolge $(a^{(k_j)})$ und $x_0 := \lim_{j \to \infty} a^{k_j} \in A \implies \exists \lambda_0 \in M : x_0 \in G_{\lambda_0}$; G_{λ_0} offen $\implies \exists \delta > 0 : U_\delta(x_0) \subseteq G_{\lambda_0}$. $a^{(k_j)} \to x_0\ (j \to \infty) \implies \exists m_0 \in \mathbb{N} : a^{(m_0)} \in U_{\frac{\delta}{2}}(x_0)$ und $m_0 \geq \frac{2}{\delta}$. Sei $x \in U_{\frac{1}{m_0}}(a^{(m_0)}) \implies \|x - x_0\| = \|x - a^{(m_0)} + a^{(m_0)} - x_0\| \leq \|x - a^{(m_0)}\| + \|a^{(m_0)} - x_0\| \leq \frac{1}{m_0} + \frac{\delta}{2} \leq \frac{\delta}{2} + \frac{\delta}{2} = \delta \implies x \in U_\delta(x_0) \implies x \in G_{\lambda_0}$. Also: $U_{\frac{1}{m_0}}(a^{(m_0)}) \subseteq G_{\lambda_0}$, Widerspruch zu $(**)$!

Teil 2: Sei $\varepsilon > 0$ wie in Teil 1. (1) $\implies \exists a^{(1)}, \ldots, a^{(m)} \in A : A \subseteq \bigcup_{j=1}^{m} U_\varepsilon(a^{(j)})$. Teil 1 $\implies \exists \lambda_j \in M : U_\varepsilon(a^{(j)}) \subseteq G_{\lambda_j}\ (j = 1, \ldots, m) \implies A \subseteq \bigcup_{j=1}^{m} G_{\lambda_j}$ ∎