

## 10 Übung vom 30.06.

### 33. Aufgabe

a) Aus Vorlesung wissen wir:

- Wert des Spiels ist 0.
- Optimale Strategien sind für beide Spieler gleich.

$D := \{x \in \mathbb{R}^n \mid \sum_{i=1}^n x_i = 1, x \geq 0\}$  sei die Strategiemenge beider Spieler.

**z.z.:** Für  $x^0 \in D$  gilt:  $x^0$  ist optimal für  $P_1 \Leftrightarrow Cx^0 \leq 0$

**Beweis:**

$$\begin{aligned}
 x^0 \text{ ist optimal für } P_1 &\Leftrightarrow x^0 \text{ ist optimal für } P_1 \text{ und } P_2 \\
 &\Leftrightarrow (x^0, x^0) \text{ ist Sattelpunkt} \\
 &\stackrel{(\text{Def.!!})}{\Leftrightarrow} y^T C x^0 \leq x^{0T} C x^0 \leq x^{0T} C x \text{ für } x, y \in D \\
 &\Leftrightarrow x^T C x^0 \leq 0, 0 \leq (x^{0T} C x)^T \text{ für alle } x \in D \\
 &\Leftrightarrow x^T C x^0 \leq 0 \text{ für alle } x \in D \\
 &\Leftrightarrow C \cdot x^0 \leq 0
 \end{aligned}$$

b)

		$P_1$ zeigt $P_1$ sagt	1 gerade	2 gerade	3 gerade	1 ungerade	2 ungerade	3 ungerade
$P_2$ zeigt	$P_2$ sagt							
1	gerade		0	3	0	-2	0	-4
2	gerade		-3	0	-5	0	4	0
3	gerade		0	5	0	-4	0	-6
1	ungerade		2	0	4	0	-3	0
2	ungerade		0	-4	0	3	0	5
3	ungerade		4	0	6	0	-5	0

Wir suchen nun  $x \in \mathbb{R}^n$  mit  $x \geq 0$ ,  $\sum_{i=1}^n x_i = 1$ ,  $Cx \leq 0$ . Dies liefert:

$$\begin{array}{ll} (1) & 3x_2 - 2x_4 - 4x_6 \leq 0 \\ (2) & 5x_2 - 4x_4 - 6x_6 \leq 0 \\ (3) & -4x_2 + 3x_4 + 5x_6 \leq 0 \\ (4) & -3x_1 - 5x_3 + 4x_5 \leq 0 \\ (5) & 2x_1 + 4x_3 - 3x_5 \leq 0 \\ (6) & 4x_1 + 6x_3 - 5x_5 \leq 0 \end{array}$$

**Lösung:**

„  $\frac{1}{2}((1) + (2))$  “:  $4x_2 - 3x_4 - 5x_6 \leq 0 \xrightarrow{(3)} 4x_2 - 3x_4 - 5x_6 = 0$ .

„  $(2) + 2 \cdot (3)$  “:  $-3x_2 + 2x_4 + 4x_6 \leq 0 \xrightarrow{(1)} -3x_2 + 2x_4 + 4x_6 = 0$

Gauß liefert.  $(x_2, x_4, x_6) = \alpha(2, 1, 1)$  mit  $\alpha \geq 0$

Analog zeigt man für (4),(5),(6)

$$(x_1, x_3, x_5) = \beta(1, 1, 2) \text{ mit } \beta \geq 0$$

Mit  $\sum_{i=1}^6 x_i = 1 = 4(\alpha + \beta)$ , d.h.  $\beta = \frac{1}{4} - \alpha$  und  $\alpha \in (0, \frac{1}{4})$ .

Insgesamt: Die optimale Strategie für jeden Spieler ist von der Form:

$$x^0 = \alpha \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \left(\frac{1}{4} - \alpha\right) \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ mit } 0 \leq \alpha \leq \frac{1}{4}$$

### 34. Aufgabe

1) Auszahlungsmatrix modifizieren um echt positive Einträge zu erhalten.  
Dies liefert:

$$\tilde{C} = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 1 \\ 2 & 4 & 4 \\ 5 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

2) Aus der Vorlesung wissen wir, dass

$$(\overline{P_1}) \quad \boxed{\begin{array}{rcl} f(x) = x_1 + x_2 + x_3 & = & \max \\ \tilde{C}x & \leq & \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \\ x & \geq & 0 \end{array}}$$

$$\Leftrightarrow$$

$$(P_1) \quad \boxed{\begin{array}{rcl} \tilde{f}(x) = -x_1 - x_2 - x_3 & = & \min \\ \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \end{pmatrix} + C \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} & = & \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \\ z_1, z_2, z_3, x_1, x_2, x_3 & \geq & 0 \end{array}}$$

Das Simplex-Verfahren liefert eine Lösung von  $(P_1)$  und damit auch von  $(\overline{P_1})$ , nämlich:

$$x' = \left(\frac{1}{6}, 0, \frac{1}{6}\right) \text{ mit } f(x') = \frac{1}{3}$$

Der Wert des Spiels mit Auszahlungsmatrix  $\tilde{C}$  ist damit 3. Damit ist der Wert des ursprünglichen Spiels 0.

Eine optimale Strategie für Spieler  $P_1$  ist nach Vorlesung dann

$$x = \frac{1}{f(x')}x' = \left(\frac{1}{2}, 0, \frac{1}{2}\right)$$

Das Dualprogramm liefert eine optimale Strategie für  $P_2$ , z.B.

$$y = \left(0, \frac{2}{3}, \frac{1}{3}\right)$$

### 35. Aufgabe

a) O.E.: i=m.

Es gelte also für  $C = \begin{pmatrix} \frac{c^1}{c^m} \\ \vdots \\ \frac{c^m}{c^m} \end{pmatrix}$ :

$$c^m \leq \sum_{j=1}^{m-1} \alpha_j c^j \text{ mit } \alpha_j \geq 0 \text{ und } \sum_{j=1}^{m-1} \alpha_j = 1.$$

Es sei  $\tilde{\phi}$  erwarteter Gewinn des Spiels mit Auszahlungsmatrix  $\tilde{C} = C^{(m)}$ .  
 $\tilde{y}^0$  sei optimale Strategie für Spiel mit Matrix  $\tilde{C}$ .

Nach Vorlesung existiert optimale Strategie  $\widetilde{x}^0$  für Spieler  $P_1$  und es gilt:

$$\widetilde{\phi}(\widetilde{y}, \widetilde{x}^0) \leq \widetilde{\phi}(\widetilde{y}^0, \widetilde{x}^0) \leq \widetilde{\phi}(\widetilde{y}^0, \widetilde{x}) \text{ für alle Strategien } \widetilde{y}, \widetilde{x}.$$

Wir wollen zeigen:  $y^0 = (\widetilde{y}^0, 0)$  ist optimale Strategie des ursprünglichen Spiels.

**z.z.:**

$$\phi(y, \widetilde{x}^0) \stackrel{(**)}{\leq} \phi(y^0, \widetilde{x}^0) \stackrel{(*)}{\leq} \phi(y^0, x) \text{ für alle Strategien } x, y.$$

Dabei ist  $\phi$  der erwartete Gewinn bzgl. des ursprünglichen Spiels.

**Beweis:**

(\*) gilt, da wir uns nach Konstruktion von  $y^0$  in der Situation des modifizierten Spiels befinden.

zu (\*\*): Für alle Strategien  $y$  von  $P_2$  gilt:

$$\begin{aligned} \phi(y, \widetilde{x}^0) = \langle y, C\widetilde{x}^0 \rangle &= \langle C^T y, \widetilde{x}^0 \rangle \\ &= \langle y_1 c^1 + \dots + y_m c^m, \widetilde{x}^0 \rangle \\ &\stackrel{Vor.}{\leq} \langle y_1 c^1 + \dots + y_{m-1} c^{m-1} + y_m \sum_{i=1}^{m-1} \alpha_i c^i, \widetilde{x}^0 \rangle \\ &= \langle \underbrace{(y_1 + \alpha_1 y_m)}_{\widetilde{y}_1} c^1 + \dots + \underbrace{(y_{m-1} + \alpha_{m-1} y_m)}_{\widetilde{y}_{m-1}} c^{m-1}, \widetilde{x}^0 \rangle \\ &= \langle \widetilde{C}^T \widetilde{y}, \widetilde{x}^0 \rangle \\ &= \langle \widetilde{y}, \widetilde{C} \widetilde{x}^0 \rangle \\ &= \widetilde{\phi}(\widetilde{y}, \widetilde{x}^0) \\ &\leq \widetilde{\phi}(\widetilde{y}^0, \widetilde{x}^0) \\ &= \phi(y^0, \widetilde{x}^0) \end{aligned}$$

$$\widetilde{y} = (\widetilde{y}_1, \dots, \widetilde{y}_{m-1})$$

b) Es sei  $C^{(j)}$  die Matrix, die aus  $C$  entsteht, wenn man die  $j$ -te **Spalte** streicht. Dann gilt: Ist die  $j$ -te Spalte von  $C$  **größer oder gleich** einer Konvexkombination der übrigen Spalten, so ergibt jede optimale Strategie  $(x_1, \dots, x_{j-1}, x_{j+1}, \dots, x_n)$  von  $P_1$  bzgl.  $C^{(j)}$  eine optimale Strategie  $(x_1, \dots, x_{j-1}, 0, x_{j+1}, \dots, x_n)$  von  $P_1$  bzgl.  $C$ .

### 36. Aufgabe

	A	B	C
1	6	1	5
2	3	8	-2
3	9	5	1
4	5	7	-3

Nach Aufgabe 35(b) wird die 1.Spalte gestrichen. (Betrachte Spalte C!)

	B	C
1	1	5
2	8	-2
3	5	1
4	7	-3

Nach Aufgabe 35(a) wird die letzte Zeile gestrichen. (Betrachte Zeile 2!)

	B	C
1	1	5
2	8	-2
3	5	1

Und wir erhalten  $C = \begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 8 & -2 \\ 5 & 1 \end{pmatrix}$

Hier gilt: 3.Zeile =  $\frac{3}{7}(1.\text{Zeile}) + \frac{4}{7}(2.\text{Zeile})$  (Deshalb streichen wir die 3.Zeile!)  
Wir addieren noch 3 und erhalten dann

$$\tilde{C} = \begin{pmatrix} 4 & 8 \\ 11 & 1 \end{pmatrix}$$

Aus der Vorlesung wissen wir nun, dass das

$$(LP) \quad \begin{array}{rcl} -x_1 - x_2 & = & \min \\ 4x_1 + 8x_2 + z_1 & = & 1 \\ 11x_1 + x_2 + z_2 & = & 1 \\ x_1, x_2, z_1, z_2 & \geq & 0 \end{array}$$

eine optimale Strategie für Spieler 1 liefert.

Lösung von (LP) ist  $x' = (\frac{1}{12}, \frac{1}{12})$  mit  $f(x') = -\frac{1}{6}$ .

Das ursprüngliche Spiel hat den Wert 3 und eine optimale Strategie für  $P_1$  ist  $x^0 = (0, \frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ .

Das Dualprogramm von (LP) liefert für Spieler 2 die Strategie  $y^0 = (\frac{5}{7}, \frac{2}{7}, 0, 0)$