

# 19. Isometrien

**Aufgabe:** Studiere alle linearen Abbildungen, die **Abstände** von Punkten nicht ändern. Z.B. Drehungen um einen Punkt im  $\mathbb{R}^2$ .

## 19.1. Charakterisierung und orthogonale Gruppe

**Definition:** Seien  $V_1, V_2$   $\mathbb{K}$ -VRme mit Sesquilinearformen  $s_1, s_2$ .

- (a) Ein **Morphismus von  $\mathbb{K}$ -VRmen mit Sesquilinearform** ist  $\Phi \in \text{Hom}(V_1, V_2)$  mit:

$$\forall x, y \in V_1 : s_2(\Phi(x), \Phi(y)) = s_1(x, y)$$

Schreibe:  $\Phi : (V_1, s_1) \rightarrow (V_2, s_2)$ .

- (b) Ist  $\Phi$  zusätzlich bijektiv, so heißt  $\Phi$  eine **(lineare) Isometrie**.  
(c) Eine Isometrie  $\Phi : (V, s) \rightarrow (V, s)$  heißt **Automorphismus** von  $s$ .  
Die Gruppe  $\text{Aut}(s) \leq \text{Aut}(V)$  heißt die **Automorphismengruppe** von  $s$ .

**Beispiel:** In der Relativitätstheorie wichtig ist die **Lorenzgruppe**  $\text{Aut}(s)$  zu

$$s : \mathbb{R}^4 \times \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}, (x, y) \mapsto x^T \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & 1 & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & -c \end{pmatrix} y$$

für  $c := \text{Lichtgeschwindigkeit}$ .

**Definition:** Im Folgenden sei  $s$  stets SKP.

**Fall  $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ :**

$O(V, s) := \text{Aut}(s)$  heißt **orthogonale Gruppe**. Die Elemente der Gruppe heißen **orthogonale Abb. bzgl.  $s$** .

**Fall  $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ :**

$U(V, s) := \text{Aut}(s)$  heißt **unitäre Gruppe**. Die Elemente der Gruppe heißen **unitäre Abb. bzgl.  $s$** .

**Bemerkung:** Eine wichtige Isometrie ist: abstrakter VRm  $\cong$  Standardraum

**Satz 21:**

Sei  $V$  VRm mit SKP  $s$ ,  $\dim(V) = n$  und ONB  $B$ . Dann ist die Koordinatendarstellung:

$$D_B : (V, s) \rightarrow (\mathbb{K}^n, \langle \cdot, \cdot \rangle)$$

eine Isometrie.

**Beweis:** Sei  $B = \{b_1, \dots, b_n\}$ ,  $x, y \in V$  mit  $x = \sum_{i=1}^n \alpha_i b_i$ ,  $y = \sum_{i=1}^n \beta_i b_i$ . Dann gilt:

$$\begin{aligned} s(x, y) &= \sum_{i,j} \alpha_i \overline{\beta_j} \cdot s(b_i, b_j) \\ &= \sum_{i=1}^n \alpha_i \overline{\beta_i} \\ &= \left\langle \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \vdots \\ \beta_n \end{pmatrix} \right\rangle \\ &= \langle D_B(x), D_B(y) \rangle \end{aligned}$$

■

**Bemerkung:** (1) Sei  $\Phi : V_1 \rightarrow V_2$  Morphismus von SKP-Räumen, dann ist  $\Phi$  **längentreu**.

$$\iff \|x\|_1 = \|\Phi(x)\|_2$$

**Winkeltreue** für  $K = \mathbb{R}$  bedeutet:

$$\frac{\langle x, y \rangle_1}{\|x\|_1 \|y\|_1} = \frac{\langle \Phi(x), \Phi(y) \rangle_2}{\|\Phi(x)\|_2 \|\Phi(y)\|_2}$$

(2)  $\Phi : (V, s) \rightarrow (V, s)$  Endomorphismus von SKP-Räumen und  $\dim(V) < \infty \implies \Phi$  ist Isomorphismus und Automorphismus, also orthogonal und unitär.

**Satz 22 (Isometriekriterium):**

Sei  $V$  VRm mit SKP  $s = \langle \cdot, \cdot \rangle$  und sei  $\Phi \in \text{Aut}(V)$ .

Folgende Aussagen sind äquivalent:

- (1)  $\Phi$  ist Isometrie (d.h.  $\Phi \in \text{Aut}(s)$ ).
- (2)  $\Phi \in \text{End}^a(V)$  und  $\Phi^* = \Phi^{-1}$ .
- (3)  $\forall x \in V : \|x\| = \|\Phi(x)\|$
- (4)  $\forall y \in V : (\|y\| = 1) \implies (\|\Phi(y)\| = 1)$  (Einheitssphärenabbildung).

**Beweis:** Die Äquivalenz ergibt sich aus folgendem Ringschluss:

(1)  $\implies$  (2) Es gilt  $\forall x, y \in V, z := \Phi(y)$ :

$\Phi$  Isometrie

$$\iff \forall x, y \in V : \langle \Phi(x), \Phi(y) \rangle = \langle x, y \rangle$$

$$\stackrel{\Phi^{-1} \text{ ex.}}{\iff} \forall x, z \in V : \langle \Phi(x), z \rangle = \langle x, \Phi^{-1}(z) \rangle$$

Nach Definition der Adjungierten folgt daraus  $\Phi^{-1} = \Phi^*$ .

(2)  $\implies$  (3) Es gilt für alle  $x \in V$ :

$$\|\Phi(x)\|^2 = \langle \Phi(x), \Phi(x) \rangle \stackrel{(2)}{=} \langle x, \Phi^* \Phi(x) \rangle = \langle x, x \rangle$$

(3)  $\iff$  (4)  $\checkmark$

(3)  $\implies$  (1) Es gilt für alle  $x, y, \alpha \in K$ :

$$\begin{aligned} \langle \alpha x + y, \alpha x + y \rangle &= \langle \Phi(\alpha x + y), \Phi(\alpha x + y) \rangle \\ \iff \langle \alpha x, y \rangle + \langle y, \alpha x \rangle &= \langle \Phi(\alpha x), \Phi(y) \rangle + \langle \Phi(y), \Phi(\alpha x) \rangle \\ \iff \alpha \langle x, y \rangle + \overline{\alpha} \overline{\langle x, y \rangle} &= \alpha \langle \Phi(x), \Phi(y) \rangle + \overline{\alpha} \overline{\langle \Phi(x), \Phi(y) \rangle} \end{aligned}$$

**Fall  $K = \mathbb{R}$ :**

Mit  $\alpha := \frac{1}{2} : \langle x, y \rangle = \langle \Phi(x), \Phi(y) \rangle$

**Fall  $K = \mathbb{C}$ :**

Mit  $\alpha := \frac{1}{2} : \operatorname{Re} \langle x, y \rangle = \operatorname{Re} \langle \Phi(x), \Phi(y) \rangle$

Mit  $\alpha := \frac{i}{2} : \operatorname{Im} \langle x, y \rangle = \operatorname{Im} \langle \Phi(x), \Phi(y) \rangle$  ■

**Korollar:**

Sei  $\dim(V) = n < \infty$ ,  $B$  ONB von  $V$  und  $\Phi \in \operatorname{End}(V)$ .

Folgende Aussagen sind äquivalent:

- (1)  $\Phi$  ist Isometrie.
- (2) Es gilt für alle  $x \in V : \|\Phi(x)\| = \|x\|$
- (3)  $\Phi(B)$  ist ONB.
- (4) Es gilt  $D_{BB}(\Phi)^{-1} = D_{BB}(\Phi^*)$ , d.h.  $D_{BB}(\Phi)$  ist unitär bzw. orthogonal.
- (5) Die Spalten (bzw. Zeilen) von  $D_{BB}(\Phi)$  bilden eine ONB von  $\mathbb{K}^n$  bzgl. dem Standard-SKP.
- (6) Es existiert eine ONB  $C$  von  $V$  mit  $D_{BC}(\Phi) = I_n$ .

**Beweis:** Jede der Aussagen impliziert  $\Phi \in \operatorname{Aut}(V)$ .

Sei  $B := \{b_1, \dots, b_n\}$ .

(1)  $\iff$  (2)  $\iff$  (4) Klar nach Isometriekriterium.

(4)  $\iff$  (5) Es gilt:

$$\begin{aligned}
 D_{BB}(\Phi)^{-1} &= D_{BB}(\Phi^*) \\
 \implies D_{BB}(\Phi) \cdot D_{BB}(\Phi^*) &= I_n \\
 \iff \{\text{Zeilen von } \Phi\} &\text{ sind ONB bezgl. Standardform} \\
 \implies D_{BB}(\Phi^*) \cdot D_{BB}(\Phi) &= I_n \\
 \iff \{\text{Spalten von } \Phi\} &\text{ sind ONB bezgl. Standardform}
 \end{aligned}$$

(3)  $\implies$  (2) Da für alle  $b_i, b_j \in B$  gilt:

$$\langle \Phi(b_i), \Phi(b_j) \rangle = \delta_{ij} = \langle b_i, b_j \rangle$$

Folgt für alle  $x = \sum_{i=1}^n \alpha_i b_i \in V$ :

$$\begin{aligned}
 \langle \Phi(x), \Phi(x) \rangle &= \sum_{i,j} \alpha_i \overline{\alpha_j} \langle \Phi(b_i), \Phi(b_j) \rangle \\
 &= \sum_{i,j} \alpha_i \overline{\alpha_j} \langle b_i, b_j \rangle \\
 &= \langle x, x \rangle
 \end{aligned}$$

Also ist  $\|\Phi(x)\| = \|x\|$  und  $\Phi$  längenerhaltend.

(1)  $\implies$  (3) Da  $\Phi$  Isometrie ist, gilt:

$$\implies \langle \Phi(b_i), \Phi(b_j) \rangle = \langle b_i, b_j \rangle = \delta_{ij}$$

D.h.  $\Phi(B)$  ist ONB.

(3)  $\implies$  (6) Sei  $C := \Phi(B)$ . Dann gilt:

$$D_{BC}(\Phi) = I_n$$

(6)  $\implies$  (4) Es existiert eine ONB  $C = \{c_1, \dots, c_n\}$ , sodass gilt:

$$D_{BC}(\Phi) = I_n$$

Daraus folgt:  $D_{BB}(\Phi) = D_{BC}(\Phi) \cdot M_{CB} = M_{CB} =: (\gamma_{ij})$

Also gilt für alle  $b_j \in B$ :

$$b_j = \sum_k \gamma_{kj} \cdot c_k$$

Daraus folgt:

$$\begin{aligned}
 \delta_{ij} &= \langle b_j, b_i \rangle \\
 &= \left\langle \sum_k \gamma_{kj} \cdot c_k, \sum_l \gamma_{li} \cdot c_l \right\rangle \\
 &= \sum_{k,l} \gamma_{kj} \cdot \overline{\gamma_{li}} \cdot \langle c_k, c_l \rangle \\
 &= \sum_k \gamma_{kj} \cdot \overline{\gamma_{ki}} \\
 &= \sum_k \overline{\gamma_{ki}} \cdot \gamma_{kj} - (\overline{M_{CB}^T} \cdot M_{CB})_{ij}
 \end{aligned}$$

Es gilt also  $M_{CB}^* = M_{CB}^{-1}$ . ■

## 19.2. Normalformen für Isometrien und normale Endomorphismen

Sei  $V$  VRm mit SKP  $\langle \cdot, \cdot \rangle$ ,  $\dim(V) = n < \infty$ .

### 19.2.1. Fall $\mathbb{K} = \mathbb{C}$

**Lemma:**

Ein Endomorphismus  $\Phi$  ist genau dann unitär, wenn er normal ist und alle Eigenwerte Betrag 1 haben.

**Beweis:** Da  $\Phi$  unitär ist, also  $\Phi^* = \Phi^{-1}$  gilt, ist  $\Phi$  normal. Nach Spektralsatz existiert dann eine ONB  $B = \{b_1, \dots, b_n\}$  aus Eigenvektoren von  $\Phi$ . Also gilt:

$$\Phi(b_i) = \lambda_i b_i \text{ mit } \lambda_i \in \mathbb{C}$$

Mit dem Korollar folgt:

$$\begin{aligned} \Phi &\text{ unitär} \\ \iff \Phi(B) &\text{ ONB} \\ \iff \delta_{ij} = \langle \Phi(b_i), \Phi(b_j) \rangle &= \langle \lambda_i b_i, \lambda_j b_j \rangle = |\lambda_i|^2 \cdot \delta_{ij} \\ \iff |\lambda_i|^2 &= 1 \\ \iff |\lambda_i| &= 1 \end{aligned} \quad \blacksquare$$

**Folgerung:**  $D_{BB}(\Phi) = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$  mit  $|\lambda_i| = 1$  heißt **Normalform** der unitären Abb.  $\Phi$  und ist bis auf die Reihenfolge der Eigenwerte eindeutig bestimmt.

**Korollar:**

Ist  $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$  normal, so existieren  $M \in U_n$  und  $\lambda_i \in \mathbb{C}$ , sodass gilt:

$$M^{-1} \cdot A \cdot M = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$$

D.h. jedes normale  $A$  erlangt durch **unitären Basiswechsel** Normalform.

Falls  $A$  unitär ist, so existiert  $\Phi_j \in \mathbb{R}$ , sodass gilt:

$$\lambda_j = e^{i\Phi_j} = \cos \Phi_j + i \sin \Phi_j$$

**Beweis:** Sei  $V = \mathbb{C}^n$  mit dem Standardskalarprodukt,  $\varphi = \Lambda_A : x \mapsto Ax$

Aus dem Basiswechsel zwischen einer Orthonormalbasis  $S$  (der Standardbasis) und einer Orthonormalbasis  $B$  aus Eigenvektoren von  $\phi$  folgt:  $M := M_{SB}$  ist unitär.

Das heißt:

$$M^{-1}D_{SS}(\Lambda_A)M = M^{-1}AM = D_{BB}(\Lambda_A) = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n) \quad \blacksquare$$

### 19.2.2. Fall $\mathbb{K} = \mathbb{R}$

Sei  $\Psi \in \text{End}(V)$  normal; das char. Polynom  $f = f_\Psi \in \mathbb{R}[X]$ .

Beachte: Falls  $\lambda \in \mathbb{C}$  Nullstelle ist, so ist auch  $\bar{\lambda}$  eine Nullstelle.

$$\begin{aligned} 0 &= f(\lambda) = \sum_{i=0}^n a_i \lambda^i \\ 0 &= \sum_{i=0}^n \bar{a}_i \bar{\lambda}^i = \sum_{i=0}^n a_i \bar{\lambda}^i \quad \text{da } a_i \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

Das heißt: Nullstellen  $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$  treten stets als Paare  $(\lambda, \bar{\lambda})$  auf.

Via Isometrie:

$$\begin{array}{ccc} D_{BB} : & V & \xrightarrow{\sim} \mathbb{R}^n \\ & \Psi \downarrow & \downarrow \Lambda_A \\ & V & \xrightarrow{\sim} \mathbb{R}^n \end{array} \quad \text{mit } A \in \mathbb{R}^{n \times n} \text{ normal}$$

Betrachte zunächst:  $\phi := \Lambda_A \in \text{End}(\mathbb{C}^n)$

**Lemma:**

Ist  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$  beliebig und  $\phi = \Lambda_A \in \text{End}(\mathbb{C}^n)$ , so gilt:

- (1) für  $\lambda \in \text{Spec}(\phi) \cap \mathbb{R}$  hat  $E_\lambda(\phi) (\subseteq \mathbb{C}^n)$  eine Basis in  $\mathbb{R}^n (\subseteq \mathbb{C}^n)$
- (2) für  $\lambda \in \text{Spec}(\phi) \setminus \mathbb{R}$  ist  $\mathbb{R}^n \cap E_\lambda(\phi) = 0$  und  $E_{\bar{\lambda}}(\phi) = E_{\bar{\lambda}}(\phi)$

Für normale  $A$  gilt:  $E_{\bar{\lambda}}(\phi) \perp E_\lambda(\phi)$

**Beweis:** (1) Vorbemerkung: Die lineare Unabhängigkeit von  $x_1, \dots, x_r \in \mathbb{R}^n$  bleibt in  $\mathbb{C}^n$  erhalten.

Für  $\lambda \in \mathbb{R}$  gilt daher:

$$\text{rg}_{\mathbb{R}}(A - \lambda I) = \text{rg}_{\mathbb{C}}(A - \lambda I) \implies \dim_{\mathbb{R}} \text{Kern}(A - \lambda I) = \dim_{\mathbb{C}} \text{Kern}(A - \lambda I)$$

Also ist jede  $\mathbb{R}$ -Basis von  $\text{Kern}_{\mathbb{R}}(A - \lambda I)$  eine  $\mathbb{C}$ -Basis von  $\text{Kern}_{\mathbb{C}}(A - \lambda I) = E_\lambda(\phi)$

(2) Sei  $\lambda \in \text{Spec}(\phi) \setminus \mathbb{R}$ .

Aus  $A \cdot b = \lambda \cdot b$  folgt  $b \notin \mathbb{R}^n$  oder  $b = 0$ , denn:

falls  $b \in \mathbb{R}^n$  folgt  $Ab \in \mathbb{R}^n \implies \lambda b \in \mathbb{R}^n \xrightarrow{\lambda \notin \mathbb{R}} b = 0$

Ferner folgt:

$$\bar{\lambda} \cdot \bar{b} = \bar{A} \cdot \bar{b} = A \cdot \bar{b}$$

d.h.  $b \in E_{\bar{\lambda}}(\phi) \implies " \subseteq " \implies " = "$

Ist  $A$  normal, dann folgt mit dem Spektralsatz:  $\lambda \neq \bar{\lambda}$ , d.h.  $E_{\lambda} \perp E_{\bar{\lambda}}$  ■

**Korollar:**

Sei  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$  normal,  $\phi := \Lambda_A \in \text{End}(\mathbb{C}^n)$ .

Ferner sei  $\text{Spec}(\phi) = \{\lambda_1, \dots, \lambda_r, \lambda_{r+1}, \bar{\lambda}_{r+1}, \dots, \lambda_{r+s}, \bar{\lambda}_{r+s}\}$  mit  $\lambda_j \in \mathbb{R} (j = 1, \dots, r)$ ,  $\lambda_{r+k} \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R} (k = 1, \dots, s)$ ,  $n = r + 2s$  (evtl. sind gleiche dabei)

- Dann existiert eine Orthonormalbasis

$$B = \{b_1, \dots, b_r, b_{r+1}, \bar{b}_{r+1}, \dots, b_{r+s}, \bar{b}_{r+s}\}$$

aus Eigenvektoren von  $\phi$ , wobei  $b_j \in \mathbb{R}^n$  für  $j = 1, \dots, r$ .

Es ist  $b_{r+k} \in \mathbb{C}^n \setminus \mathbb{R}^n (k = 1, \dots, s)$  und  $Ab_j = \lambda_j b_j$ ,  $A\bar{b}_j = \bar{\lambda}_j \bar{b}_j$

- Mit

$$U_j := \begin{cases} \mathbb{C} \cdot b_j & j = 1, \dots, r \\ \mathbb{C} \cdot b_j \oplus \mathbb{C} \cdot \bar{b}_j & j = r+1, \dots, r+s \end{cases}$$

geht die direkte Zerlegung:

$$\mathbb{C}^n = \bigoplus_{j=1}^{r+s} U_j$$

in  $\phi$ -invariante Teilräume, die paarweise orthogonal sind (d.h.  $U_j \perp U_k$  für  $j \neq k$ ).

**Beweis:** Lemma (1): Für  $\lambda \in \text{Spec}(\phi) \cap \mathbb{R}$ :  $E_{\lambda}(\phi)$  hat die Basis  $B_{\lambda} \subseteq \mathbb{R}^n$ .

Orthonormalisierungsalgorithmus:  $B_{\lambda} \rightsquigarrow \text{ONB} \subseteq \mathbb{R}^n$ .

Für Eigenwerte  $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$  existiert nach Spektralsatz gleichfalls eine Orthonormalbasis  $B_{\lambda}$  von  $E_{\lambda}(\phi)$ .

Lemma (2):  $\bar{B}_{\lambda} := B_{\bar{\lambda}}$  ist ONB von  $E_{\bar{\lambda}}(\phi)$ . Beachte: Für das Standardskalarprodukt gilt:  $\langle x, y \rangle = \langle \bar{x}, \bar{y} \rangle$ .

Also: Zu  $b_j \in B_{\lambda}$  gehört  $\bar{b}_j \in B_{\bar{\lambda}}$ .

Es ist klar, daß  $U_j = \langle b_j, \bar{b}_j \rangle$   $\phi$ -invariant und  $U_j \perp U_k$  ist, da alle  $b$  paarweise orthogonal sind.

Problem: Wie lässt sich die Zerlegung im Korollar auf die reelle Situation übertragen? ■

**Satz 23:**

Sei  $V$  ein  $\mathbb{R}$ -Vektorraum mit Skalarprodukt,  $\dim V = n < \infty$ ,  $\Psi \in \text{End}(V)$  normal. Dann gilt:

(1)

$$f_\Psi(X) = \prod_{j=1}^r (X - \lambda_j) \prod_{k=1}^s (X - \lambda_{r+k})(X - \bar{\lambda}_{r+k})$$

mit  $\lambda_1, \dots, \lambda_r \in \mathbb{R}$  (OBdA sei  $\lambda_1 \leq \dots \leq \lambda_n$ ),  $\lambda_{r+k} \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$ .

Beachte: Für  $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$  gilt:  $(X - \lambda)(X - \bar{\lambda}) = X^2 - 2\gamma \cos(\phi)X + \gamma^2$  mit  $\gamma := |\lambda| > 0$  und  $\phi \in (0, \pi)$ .

(2) Es existiert eine ONB  $C = \{c_1, \dots, c_r, c_{r+1}, c'_{r+1}, \dots, c_{r+s}, c'_{r+s}\}$  von  $V$  so, daß  $D_{CC}(\Psi)$  **Drehkästchennormalform** hat, d.h.

$$D_{CC}(\Psi) = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_r, \gamma_1 D_{\phi_1}, \dots, \gamma_s D_{\phi_s})$$

(eindeutig bestimmt durch  $\Psi$ ), wobei

$$\gamma D_\phi = \gamma \begin{pmatrix} \cos \phi & -\sin \phi \\ \sin \phi & \cos \phi \end{pmatrix}$$

(3)  $\Psi$  ist orthogonal genau dann, wenn alle reellen  $\lambda_j = \pm 1$  und alle  $\gamma_k = 1$  sind.

**Beweis:** (1) ✓

(2) Nehme aus Korollar  $c_j = b_j \in \mathbb{R}^n$  ( $j = 1, \dots, r$ ) und für  $U = \mathbb{C}b \oplus \mathbb{C}\bar{b}$  finden wir eine ONB  $\subseteq \mathbb{R}^n$  wie folgt: Behauptung:  $C := \{\sqrt{(2)}\Re(b), -\sqrt{(2)}\Im(b)\}$  ist ONB von  $U$

denn:  $M_{BC} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & i \\ 1 & -i \end{pmatrix}$  ist unitär, also  $M_{CB} = M_{BC}^{-1} = M_{BC}^*$ .

Damit folgt:

$$\begin{aligned} D_{CC}(\Psi|_U) &= M_{CB} \cdot D_{BB}(\Psi|_U) \cdot M_{BC} \\ &= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -i & i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda & \\ & \bar{\lambda} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & i \\ 1 & -i \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} \lambda + \bar{\lambda} & i(\lambda - \bar{\lambda}) \\ -i(\lambda - \bar{\lambda}) & \lambda + \bar{\lambda} \end{pmatrix} \\ &= \gamma \begin{pmatrix} \cos \phi & -\sin \phi \\ \sin \phi & \cos \phi \end{pmatrix} \end{aligned}$$



(3)  $D_{CC}(\Psi) = A$  orthogonal  $\stackrel{\text{def.}}{\Leftrightarrow} A^*A = I \Leftrightarrow$  alle Eigenwerte  $|\lambda| = 1$ . ■

**Definition:** (a)  $\Phi \in \text{End}(V)$  orthogonal heißt **Drehung um den Winkel  $\phi$** , falls eine ONB  $B = \{b_1, \dots, b_n\}$  existiert, so daß  $D_{BB}(\Phi) = \text{diag}(D_{\phi}, 1, \dots, 1)$ .

$U = \mathbb{R} \cdot b_1 + \mathbb{R} \cdot b_2$  heißt **Drehebene von  $\phi$**  und  $U^\perp = \langle b_3, \dots, b_n \rangle$  **verallgemeinerte Drehachse**.

(b)  $\Psi \in \text{End}(V)$  orthogonal heißt **Spiegelung** an einer **Hyperebene  $H$** , falls eine ONB  $B = \{b_1, \dots, b_n\}$  existiert, so daß  $D_{BB}(\Psi) = \text{diag}(-1, 1, \dots, 1)$  und  $H := \langle b_2, \dots, b_n \rangle$ .

**Bemerkung:** Falls  $\Phi \neq \text{id}$  Drehung ist, folgt  $D_\phi \neq \begin{pmatrix} 1 & \\ & 1 \end{pmatrix}$  und  $U^\perp = \text{Kern}(\phi - \text{id}_V)$ .

Insbesondere sind  $U$  und  $U^\perp$  durch  $\Phi$  eindeutig bestimmt (unabhängig von der Basis).

**Satz 24:**

Sei  $V$  ein  $\mathbb{R}$ -Vektorraum mit Skalarprodukt  $s$  und  $\dim V = n < \infty$ . Dann ist die Gruppe  $O(V, s)$  erzeugt durch Drehungen und Spiegelungen. Genauer:  $\forall \Psi \in O(V, s) \exists$  Zerlegung  $n = r + 2r'$ , so daß  $\Psi$  Produkt von höchstens  $r$  Spiegelungen und  $r'$  Drehungen ist.

**Beweis:**

$$\begin{aligned} D_{BB}(\Psi) &= \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_r, D_{\phi_1}, \dots, D_{\phi_{r'}}) \\ &= \prod_{j=1}^r \text{diag}(1, \dots, 1, \lambda_j, 1, \dots, 1) \prod_{k=1}^{r'} \text{diag}(1, \dots, 1, D_{\phi_k}, 1, \dots, 1) \end{aligned} \quad \blacksquare$$

