

§ 3 Messbare Funktionen

In diesem Paragraphen seien $\emptyset \neq X, Y, Z$ Mengen.

Definition

Ist \mathfrak{A} eine σ -Algebra auf X , so heißt (X, \mathfrak{A}) ein **messbarer Raum**.

Definition

Sei \mathfrak{A} eine σ -Algebra auf X , \mathfrak{B} eine σ -Algebra auf Y und $f : X \rightarrow Y$ eine Funktion. f heißt genau dann **\mathfrak{A} - \mathfrak{B} -messbar**, wenn gilt:

$$\forall B \in \mathfrak{B} : f^{-1}(B) \in \mathfrak{A}$$

Bemerkung: Seien die Bezeichnungen wie in obiger Definition, dann gilt:

- (1) f sei \mathfrak{A} - \mathfrak{B} -messbar, \mathfrak{A}' eine weitere σ -Algebra auf X mit $\mathfrak{A} \subseteq \mathfrak{A}'$ und \mathfrak{B}' sei eine σ -Algebra auf Y mit $\mathfrak{B}' \subseteq \mathfrak{B}$.
Dann ist f \mathfrak{A}' - \mathfrak{B}' -messbar.
- (2) Sei $X_0 \in \mathfrak{A}$, dann gilt $\mathfrak{A}_{X_0} \subseteq \mathfrak{A}$ nach 1.5. Nun sei $f : X \rightarrow Y$ \mathfrak{A} - \mathfrak{B} -messbar, dann ist $f|_{X_0} : X_0 \rightarrow Y$ \mathfrak{A}_{X_0} - \mathfrak{B} -messbar.

Beispiel

- (1) Sei \mathfrak{A} eine σ -Algebra auf X und $A \subseteq X$. $\mathbb{1}_A : X \rightarrow \mathbb{R}$ ist genau dann \mathfrak{A} - \mathfrak{B}_1 -messbar, wenn $A \in \mathfrak{A}$ ist.
- (2) Sei $X = \mathbb{R}^d$. Ist $A \in \mathfrak{B}_d$, so ist $\mathbb{1}_A$ \mathfrak{B}_d - \mathfrak{B}_1 -messbar.
- (3) Ist C wie in 2.11, so ist $\mathbb{1}_C$ nicht \mathfrak{B}_d - \mathfrak{B}_1 -messbar.
- (4) Es sei $f : X \rightarrow Y$ eine Funktion und \mathfrak{B} (\mathfrak{A}) eine σ -Algebra auf Y (X), dann ist f $\mathcal{P}(X)$ - \mathfrak{B} -messbar (\mathfrak{A} - $\{Y, \emptyset\}$ -messbar).

Satz 3.1

Seien $\mathfrak{A}, \mathfrak{B}, \mathfrak{C}$ σ -Algebren auf X, Y bzw. Z . Weiter seien $f : X \rightarrow Y$ und $g : Y \rightarrow Z$ Funktionen.

- (1) Ist f \mathfrak{A} - \mathfrak{B} -messbar und ist g \mathfrak{B} - \mathfrak{C} -messbar, so ist $g \circ f : X \rightarrow Z$ \mathfrak{A} - \mathfrak{C} -messbar.
- (2) Sei $\emptyset \neq \mathcal{E} \subseteq \mathcal{P}(Y)$ und $\sigma(\mathcal{E}) = \mathfrak{B}$. Dann:

$$f \text{ ist } \mathfrak{A} - \mathfrak{B} \text{-messbar, genau dann, wenn gilt: } \forall E \in \mathcal{E} : f^{-1}(E) \in \mathfrak{A}$$

Beweis

- (1) Sei $C \in \mathfrak{C}$; g ist messbar, daraus folgt $g^{-1}(C) \in \mathfrak{B}$; f ist messbar, daraus folgt $f^{-1}(g^{-1}(C)) = (g \circ f)^{-1}(C) \in \mathfrak{A}$

(2) $\Rightarrow \checkmark$

$\Leftarrow \mathfrak{D} := \{B \subseteq Y \mid f^{-1}(B) \in \mathfrak{A}\}$ Übung: \mathfrak{D} ist eine σ -Algebra auf Y .

Aus der Voraussetzung folgt: $\mathcal{E} \subseteq \mathfrak{D}$. Dann: $\mathfrak{B} = \sigma(\mathcal{E}) \subseteq \mathfrak{D}$. Ist $B \in \mathfrak{B}$, so ist $B \in \mathfrak{D}$, also $f^{-1}(B) \in \mathfrak{A}$. ■

Definition

Sei $X \in \mathfrak{B}_d$. Ist $f : X \rightarrow \mathbb{R}^k$ $\mathfrak{B}(X) - \mathfrak{B}_k$ -messbar, so heißt f **(Borel-)messbar**.

Ab jetzt sei stets $X \in \mathfrak{B}_d$. (Erinnerung: $\mathfrak{B}(X) = \{A \in \mathfrak{B}_d \mid A \subseteq X\}$)

Satz 3.2

Seien $f, g : X \rightarrow \mathbb{R}^k$ und $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

- (1) Ist f auf X stetig, so ist f messbar.
- (2) Ist $f = (f_1, \dots, f_k)$, so gilt: f ist messbar \Leftrightarrow alle f_j sind messbar.
- (3) Sind f und g messbar, so ist $\alpha f + \beta g$ messbar.
- (4) Sei $k = 1$ und f und g seien messbar. Dann:
 - (i) fg ist messbar
 - (ii) Ist $f(x) \neq 0 \forall x \in X$, so ist $\frac{1}{f}$ messbar
 - (iii) $\{x \in X \mid f(x) \geq g(x)\} \in \mathfrak{B}(X)$

Beweis

(1) Sei $G \in \mathcal{O}(\mathbb{R}^k)$. Mit f stetig folgt: $f^{-1}(G) \in \mathcal{O}(X) \in \mathfrak{B}(X)$

$\sigma(\mathcal{O}(\mathbb{R}^k)) = \mathfrak{B}_k$. Die Behauptung folgt aus 3.1.(2).

(2) \Leftarrow : Sei $I = (a, b] = \prod_{j=1}^k (a_j, b_j] \in I_k$ ($a = (a_1, \dots, a_k)$, $b = (b_1, \dots, b_k)$, $a \leq b$)

$$\text{Dann: } f^{-1}(I) = \bigcap_{j=1}^k f_j^{-1}(\underbrace{(a_j, b_j]}_{\substack{\in \mathfrak{B}_1 \\ \in \mathfrak{B}(X)}}) \in \mathfrak{B}(X)$$

Aus $\sigma(I_k) = \mathfrak{B}_k$ folgt mit 3.1.(2): f ist messbar.

\Rightarrow : Für $j = 1, \dots, k$ sei $p_j : \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}$ definiert durch $p_j(x_1, \dots, x_k) := x_j$

p_j ist stetig, also messbar (nach (1)). Es ist $f_j = p_j \circ f$. Mit 3.1.(1) folgt: f_j ist messbar.

(3) $h := (f, g) : X \rightarrow \mathbb{R}^{2k}$; aus (2): h ist messbar.

$$\varphi(x, y) := \alpha x + \beta y \quad (x, y \in \mathbb{R}^k)$$

φ ist stetig, also messbar (nach (1)). Es ist $\alpha f + \beta g = \varphi \circ h$. Mit 3.1.(1) folgt: $\alpha f + \beta g$ ist messbar.

- (4) (i) $h := (f, g) : X \rightarrow \mathbb{R}^{2k}$ ist messbar (nach (2)); $\varphi(x, y) := xy$, φ ist stetig, also messbar.

Es ist $fg = \varphi \circ h$. Mit 3.1.(1) folgt: fg ist messbar.

- (ii) $\varphi(x) := \frac{1}{x}$, φ ist stetig auf $\mathbb{R} \setminus \{0\}$, also messbar.

$\frac{1}{f} = \varphi \circ f$. Mit 3.1.(1) folgt: $\frac{1}{f}$ ist messbar.

- (iii) $A := \{x \in X \mid f(x) \geq g(x)\} = \{x \in X \mid f(x) - g(x) \in [0, \infty)\} = \underbrace{(f - g)^{-1}}_{\text{messbar nach (3)}} \left(\overbrace{[0, \infty)}^{\in \mathfrak{B}_1} \right) \in \mathfrak{B}(X)$ ■

Folgerungen 3.3

- (1) Seien $A, B \in \mathfrak{B}(X)$, $A \cap B = \emptyset$ und $X = A \cup B$. Weiter seien $f : A \rightarrow \mathbb{R}^k$ und $g : B \rightarrow \mathbb{R}^k$ messbar. Dann ist $h : X \rightarrow \mathbb{R}^k$, definiert durch

$$h(x) := \begin{cases} f(x) & x \in A \\ g(x) & x \in B \end{cases},$$

messbar.

- (2) Ist $f : X \rightarrow \mathbb{R}^k$ messbar und $g(x) := \|f(x)\|$ ($x \in X$), so ist g messbar.

Beweis

- (1) Sei $C \in \mathfrak{B}_k$. Dann:

$$h^{-1}(C) = \underbrace{f^{-1}(C)}_{\in \mathfrak{B}(A) \subseteq \mathfrak{B}(X)} \cup \underbrace{g^{-1}(C)}_{\in \mathfrak{B}(B) \subseteq \mathfrak{B}(X)} \in \mathfrak{B}(X)$$

- (2) Definiere $\varphi(z) = \|z\|$ ($z \in \mathbb{R}^k$); φ ist stetig, also messbar.

Es ist $g = \varphi \circ f$. Mit 3.1 folgt: g ist messbar. ■

Beispiel

$$X = \mathbb{R}^2, f(x, y) := \begin{cases} \frac{\sin(y)}{x} & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$$

für $x \neq 0$: $f(x, x) = \frac{\sin(x)}{x} \xrightarrow{x \rightarrow 0} 1 \neq 0 = f(0, 0)$, daraus folgt: f ist nicht stetig.

$A := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x = 0\}$, $B := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \neq 0\}$, $X = A \cup B$, $A \cap B = \emptyset$. A ist abgeschlossen, das heißt: $A \in \mathfrak{B}_2$, $B = A^C \in \mathfrak{B}_2$

$$f_1(x, y) := 0 \quad ((x, y) \in A)$$

$$f_2(x, y) := \frac{\sin(y)}{x} \quad ((x, y) \in B)$$

f_1 ist stetig auf A , f_2 ist stetig auf B . Also: f_1, f_2 ist messbar; mit 3.3.(1) folgt: f ist messbar.

Ein neues Symbol kommt hinzu: $-\infty$

$$\overline{\mathbb{R}} := [-\infty, +\infty] := \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$$

In $\overline{\mathbb{R}}$ gelten folgende Regeln, wobei $a \in \mathbb{R}$:

$$(1) \quad -\infty < a < +\infty$$

$$(2) \quad \pm\infty + (\pm\infty) = \pm\infty$$

$$(3) \quad \pm\infty + a := a + (\pm\infty) := \pm\infty$$

$$(4) \quad a \cdot (\pm\infty) := (\pm\infty) \cdot a = \begin{cases} \pm\infty & a > 0 \\ 0 & a = 0 \\ \mp\infty & a < 0 \end{cases}$$

$$(5) \quad \frac{a}{\pm\infty} := 0$$

Definition

(1) Sei (x_n) eine Folge in $\overline{\mathbb{R}}$. $x_n \rightarrow +\infty : \Leftrightarrow \forall c \in \mathbb{R} \exists n_c \in \mathbb{N} : x_n \geq c \forall n \geq n_c$
Analog für $-\infty$.

(2) Seien $f, g : X \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$. Dann:

$$\{f \leq g\} := \{x \in X \mid f(x) \leq g(x)\}$$

$$\{f \geq g\} := \{x \in X \mid f(x) \geq g(x)\}$$

$$\{f \neq g\} := \{x \in X \mid f(x) \neq g(x)\}$$

$$\{f < g\} := \{x \in X \mid f(x) < g(x)\}$$

$$\{f > g\} := \{x \in X \mid f(x) > g(x)\}$$

(3) Sei $a \in \overline{\mathbb{R}}$ und $f : X \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$. Dann:

$$\{f \leq a\} := \{x \in X \mid f(x) \leq a\}$$

$$\{f \geq a\} := \{x \in X \mid f(x) \geq a\}$$

$$\{f \neq a\} := \{x \in X \mid f(x) \neq a\}$$

$$\{f < a\} := \{x \in X \mid f(x) < a\}$$

$$\{f > a\} := \{x \in X \mid f(x) > a\}$$

Definition

$\overline{\mathfrak{B}}_1 := \{B \cup E \mid B \in \mathfrak{B}_1, E \subseteq \{-\infty, +\infty\}\}$. Dann: $\mathfrak{B}_1 \subseteq \overline{\mathfrak{B}}_1$

Übung: $\overline{\mathfrak{B}}_1$ ist eine σ -Algebra auf $\overline{\mathbb{R}}$.

$\overline{\mathfrak{B}}_1$ heißt **Borelsche σ -Algebra** auf $\overline{\mathbb{R}}$. Sei $f : X \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$. f heißt **(Borel-)messbar** (mb) : $\Leftrightarrow f$ ist $\mathfrak{B}(X) - \overline{\mathfrak{B}}_1$ -messbar.

Beispiel

$f(x) := +\infty \quad (x \in X)$, also: $f : X \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$

Sei $B \in \overline{\mathfrak{B}}_1$, $A := f^{-1}(B) = \{x \in X \mid f(x) \in B\}$

Fall 1: $+\infty \notin B$, dann: $A = \emptyset \in \mathfrak{B}(X)$

Fall 2: $+\infty \in B$, dann: $A = X \in \mathfrak{B}(X)$

f ist messbar.

Satz 3.4

(1) Definiere die Mengen:

$$\begin{aligned}\mathcal{E}_1 &:= \{[-\infty, a] \mid a \in \mathbb{Q}\} & \mathcal{E}_2 &:= \{[-\infty, a) \mid a \in \mathbb{Q}\} \\ \mathcal{E}_3 &:= \{(a, \infty] \mid a \in \mathbb{Q}\} & \mathcal{E}_4 &:= \{[a, \infty) \mid a \in \mathbb{Q}\}\end{aligned}$$

Dann gilt:

$$\overline{\mathfrak{B}_1} = \sigma(\mathcal{E}_j) \quad \text{für } j \in \{1, 2, 3, 4\}$$

(2) Für $f : X \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ sind die folgenden Aussagen äquivalent:

- (i) f ist messbar.
- (ii) $\forall a \in \mathbb{Q} : \{f \leq a\} \in \mathfrak{B}(X)$.
- (iii) $\forall a \in \mathbb{Q} : \{f \geq a\} \in \mathfrak{B}(X)$.
- (iv) $\forall a \in \mathbb{Q} : \{f < a\} \in \mathfrak{B}(X)$.
- (v) $\forall a \in \mathbb{Q} : \{f > a\} \in \mathfrak{B}(X)$.

(3) Die Äquivalenzen in (2) gelten auch für Funktionen $f : X \rightarrow \mathbb{R}$.

Beweis

Die folgenden Beweise erfolgen exemplarisch für einen der Unterpunkte und funktionieren fast analog für die anderen.

(1) Für $a \in \mathbb{Q}$ gilt:

$$[-\infty, a]^c = (a, \infty] \in \sigma(\mathcal{E}_1)$$

D.h. es gilt $\mathcal{E}_3 \subseteq \sigma(\mathcal{E}_1)$ und damit auch $\sigma(\mathcal{E}_3) \subseteq \sigma(\mathcal{E}_1)$.

(2) Es gilt:

$$\{f \leq a\} = \{x \in X \mid f(x) \leq a\} = f^{-1}([-\infty, a])$$

Die Äquivalenz folgt dann aus (1) und 3.1.

(3) Die Funktion $f : X \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ kann aufgefasst werden als Funktion $\bar{f} : X \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$. Es ist f genau dann $\mathfrak{B}(X)$ - \mathfrak{B}_1 -messbar wenn \bar{f} $\mathfrak{B}(X)$ - $\overline{\mathfrak{B}_1}$ -messbar ist. ■

Definition

Sei $M \subseteq \overline{\mathbb{R}}$.

(1) Ist $M = \emptyset$ oder $M = \{-\infty\}$, so sei

$$\sup M := -\infty$$

(2) Ist $M \setminus \{-\infty\} \neq \emptyset$ und nach oben beschränkt (also insbesondere $\infty \notin M$), so sei

$$\sup M := \sup(M \setminus \{-\infty\})$$

3. Messbare Funktionen

(3) Ist $M \setminus \{-\infty\}$ nicht nach oben beschränkt oder $\infty \in M$, so sei

$$\sup M := \infty$$

(4) Es sei $\inf M := -\sup(-M)$, wobei $-M := \{-m \mid m \in M\}$.

Definition

Sei (f_n) eine Folge von Funktionen $f_n : X \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$.

(1) Die Funktion $\sup_{n \in \mathbb{N}}(f_n) : X \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ ($\inf_{n \in \mathbb{N}}(f_n) : X \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$) ist definiert durch:

$$\begin{aligned} (\sup_{n \in \mathbb{N}} f_n)(x) &:= \sup\{f_n(x) \mid n \in \mathbb{N}\} \quad x \in X \\ \left((\inf_{n \in \mathbb{N}} f_n)(x) &:= \inf\{f_n(x) \mid n \in \mathbb{N}\} \quad x \in X \right) \end{aligned}$$

(2) Die Funktion $\limsup_{n \rightarrow \infty} f_n : X \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ ($\liminf_{n \rightarrow \infty} f_n : X \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$) ist definiert durch:

$$\begin{aligned} \limsup_{n \rightarrow \infty} f_n &:= \inf_{j \in \mathbb{N}} (\sup_{n \geq j} f_n) \\ \liminf_{n \rightarrow \infty} f_n &:= \sup_{j \in \mathbb{N}} (\inf_{n \geq j} f_n) \end{aligned} \quad (*)$$

Erinnerung: Für eine beschränkte Folge (a_n) in \mathbb{R} war

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} a_n := \inf\{\sup\{a_n \mid n \geq j\} \mid j \in \mathbb{N}\}$$

(3) Sei $N \in \mathbb{N}$ und $g_j := f_j$ (für $j = 1, \dots, N$), $g_j := f_N$ (für $j > N$). Definiere:

$$\begin{aligned} \max_{1 \leq n \leq N} f_n &:= \sup_{j \in \mathbb{N}} g_j \\ \min_{1 \leq n \leq N} f_n &:= \inf_{j \in \mathbb{N}} g_j \end{aligned}$$

(4) Ist $f_n(x)$ für jedes $x \in \overline{\mathbb{R}}$ konvergent, so ist $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n : X \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ definiert durch:

$$(\lim_{n \rightarrow \infty} f_n)(x) := \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x)$$

(In diesem Fall gilt $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n = \limsup_{n \rightarrow \infty} f_n = \liminf_{n \rightarrow \infty} f_n$.)

Satz 3.5

Sei (f_n) eine Folge von Funktionen $f_n : X \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ und jedes f_n messbar.

(1) Dann sind ebenfalls messbar:

$$\sup_{n \in \mathbb{N}} f_n \quad \inf_{n \in \mathbb{N}} f_n \quad \limsup_{n \in \mathbb{N}} f_n \quad \liminf_{n \in \mathbb{N}} f_n$$

(2) Ist $(f_n(x))$ für jedes $x \in X$ in $\overline{\mathbb{R}}$ konvergent, so ist $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n$ messbar.

Beweis

(1) Sei $a \in \mathbb{Q}$, dann gilt (nach 3.4(2)):

$$\{\sup_{n \in \mathbb{N}} f_n \leq a\} = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} \{f_n \leq a\} \in \mathfrak{B}(X)$$

Also ist $\sup_{n \in \mathbb{N}} f_n$ messbar. Analog lässt sich die Messbarkeit von $\inf_{n \in \mathbb{N}} f_n$ zeigen, der Rest folgt dann aus (*).

(2) Folgt aus (1) und obiger Bemerkung in der Definition. ■

Beispiel

Sei $X = I$ ein Intervall in \mathbb{R} und $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ sei auf I differenzierbar.

Für $x \in I, n \in \mathbb{N}$ sei $f_n := n(f(x - \frac{1}{n}) - f(x))$. Da f stetig ist, ist auch jedes f_n stetig, also insbesondere messbar und es gilt:

$$f_n(x) = \frac{f(x - \frac{1}{n}) - f(x)}{\frac{1}{n}} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} f'(x)$$

Aus 3.5(2) folgt, dass f' messbar ist.

Definition

Sei $f : X \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ eine Funktion.

- (1) $f_+ := \max\{f, 0\}$ heißt **Positivteil** von f .
- (2) $f_- := \max\{-f, 0\}$ heißt **Negativteil** von f .

Es gilt $f_+, f_- \geq 0$, $f = f_+ - f_-$ und $|f| = f_+ + f_-$.

Satz 3.6

Seien $f, g : X \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ und $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

- (1) Sind f, g messbar und ist $\alpha f(x) + \beta g(x)$ für jedes $x \in X$ definiert, so ist $\alpha f + \beta g$ messbar.
- (2) Sind f, g messbar und ist $f(x)g(x)$ für jedes $x \in X$ definiert, so ist fg messbar.
- (3) f ist genau dann messbar, wenn f_+ und f_- messbar sind. In diesem Fall ist auch $|f|$ messbar.

Beweis

(1)+(2) Für alle $n \in \mathbb{N}, x \in X$ seien f_n und g_n wie folgt definiert:

$$\begin{aligned} f_n(x) &:= \max\{-n, \min\{f(x), n\}\} \\ g_n(x) &:= \max\{-n, \min\{g(x), n\}\} \end{aligned}$$

Dann sind $f_n(x), g_n(x) \in [-n, n]$ für alle $n \in \mathbb{N}, x \in X$. Nach 3.2(3) sind also $\alpha f_n + \beta g_n$ und $f_n g_n$ messbar. Außerdem gilt:

$$\begin{aligned} \alpha f_n(x) + \beta g_n(x) &\xrightarrow{n \rightarrow \infty} \alpha f(x) + \beta g(x) \\ f_n(x) g_n(x) &\xrightarrow{n \rightarrow \infty} f(x) g(x) \end{aligned}$$

Die Behauptung folgt aus 3.5(2).

3. Messbare Funktionen

- (3) Nach 3.5(1) sind f_+ und f_- messbar, wenn f messbar ist. Die umgekehrte Implikation folgt aus 3.6(1). Sind f_+ und f_- messbar, so folgt ebenfalls aus 3.6(1), dass $|f| = f_+ + f_-$ messbar ist. ■

Beispiel

Sei $C \subseteq \mathbb{R}^d$ wie in 2.11, also $C \notin \mathfrak{B}_d$. Definiere $f : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$ wie folgt:

$$f(x) := \begin{cases} 1 & , x \in C \\ -1 & , x \notin C \end{cases}$$

Dann ist $\{f \geq 1\} = C$, also f **nicht** messbar. Aber für alle $x \in \mathbb{R}^d$ ist $|f(x)| = 1$, also $|f| = \mathbb{1}_{\mathbb{R}^d}$ und damit messbar.

Definition

$f : X \rightarrow \mathbb{R}$ sei messbar.

- (1) f heißt **einfach** oder **Treppenfunktion**, genau dann wenn $f(X)$ endlich ist.
- (2) f sei einfach und $f(X) = \{y_1, \dots, y_m\}$ mit $y_i \neq y_j$ für $i \neq j$. Sei weiter $A_j := f^{-1}(\{y_j\})$ für $j = 1, \dots, m$. Dann sind $A_1, \dots, A_m \in \mathfrak{B}(X)$ und $X = \bigcup_{j=1}^m A_j$ disjunkte Vereinigung.

$$f = \sum_{j=1}^m y_j \mathbb{1}_{A_j}$$

heißt **Normalform** von f .

Beispiel

Sei $A \in \mathfrak{B}(X)$. Definiere:

$$f := \mathbb{1}_A = 2 \cdot \mathbb{1}_A - \mathbb{1}_X + \mathbb{1}_{X \setminus A} = \mathbb{1}_A + 0 \cdot \mathbb{1}_{X \setminus A}$$

Wobei das letzte die Normalform von f ist. Man sieht also, dass einfache Funktionen mehrere Darstellungen haben können.

Satz 3.7

Linearkombinationen und Produkte, sowie endliche Maxima und Minima einfacher Funktionen, sind einfach.

Satz 3.8

Sei $f : X \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ messbar.

- (1) Ist $f \geq 0$ auf X , so existiert eine Folge (f_n) von einfachen Funktionen $f_n : X \rightarrow [0, \infty)$, sodass $0 \leq f_n \leq f_{n+1}$ auf X ($\forall n \in \mathbb{N}$) und $f_n(x) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} f(x)$ ($\forall x \in X$). In diesem Fall heißt (f_n) **zulässig** für f .
- (2) Es existiert eine Folge (f_n) von einfachen Funktionen $f_n : X \rightarrow \mathbb{R}$, sodass $|f_n| \leq |f|$ auf X ($\forall n \in \mathbb{N}$) und $f_n(x) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} f(x)$ ($\forall x \in X$).
- (3) Ist f beschränkt auf X (also insbesondere $\pm\infty \notin f(X)$), so kommt in (2) noch hinzu, dass (f_n) auf X gleichmäßig gegen f konvergiert.

Folgerungen 3.9 ((Beweis mit 3.8(2) und 3.5))

Sei $f : X \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ eine Funktion, dann ist f genau dann messbar, wenn eine Folge einfacher Funktionen (f_n) mit $f_n : X \rightarrow \mathbb{R}$ und $f_n(x) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} f(x)$ für alle $x \in X$ existiert.

Beweis

(1) Für $n \in \mathbb{N}$ definiere $\varphi_n : [0, \infty] \rightarrow [0, \infty)$ durch

$$\varphi_n(t) := \begin{cases} \frac{\lfloor 2^n t \rfloor}{2^n} & , 0 \leq t < n \\ n & , n \leq t \leq \infty \end{cases}$$

Dann ist $\varphi_n (\mathfrak{B}_1)_{[0, \infty]}$ - \mathfrak{B}_1 -messbar, außerdem gilt:

$$\begin{aligned} \forall t \in [0, \infty] \forall n \in \mathbb{N} : 0 \leq \varphi_1 \leq \dots \leq t \\ \forall t \in [0, n] \forall n \in \mathbb{N} : t - \frac{1}{2^n} \leq \varphi_n(t) \leq t \end{aligned}$$

und es ist $\varphi_n(t) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} t$ für alle $t \in [0, \infty]$. Setze $f_n := \varphi_n \circ f$. Dann leistet (f_n) das gewünschte.

(2) Es ist $f = f_+ - f_-$ und $f_+, f_- \geq 0$ auf X . Seien $(g_n), (h_n)$ zulässige Folgen für f_+ bzw. f_- . Definiere $f_n := g_n - h_n$. Dann ist klar, dass gilt:

$$\forall x \in X : f_n(x) = g_n(x) - h_n(x) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} f_+(x) - f_-(x) = f(x)$$

Weiter gilt:

$$|f_n| \leq g_n + h_n \leq f_+ + f_- = |f|$$

(3) Ohne Beweis. ■

