

## § 18.

# Differentialgleichungen: Grundbegriffe

In diesem Paragraphen seien  $I, J, \dots$  immer Intervalle in  $\mathbb{R}$ .

**Erinnerung:** Seien  $p, k \in \mathbb{N}$ . Eine Funktion  $y = (y_1, \dots, y_p) : I \rightarrow \mathbb{R}^p$  heißt  $k$ -mal (stetig) db, genau dann wenn  $y_1, \dots, y_p$   $k$ -mal auf  $I$  (stetig) db sind.

In diesem Fall ist  $y^{(j)} = (y_1^{(j)}, \dots, y_p^{(j)})$  ( $j = 1, \dots, k$ ).

### Definition

Seien  $n, p \in \mathbb{N}$ , sei weiter  $D \subseteq \mathbb{R} \times \underbrace{\mathbb{R}^p \times \dots \times \mathbb{R}^p}_{n+1 \text{ Faktoren}}$  und  $F : D \rightarrow \mathbb{R}^p$  eine Funktion.

Eine Gleichung der Form:

$$F(x, y, \dots, y^{(n)}) = 0 \quad (\text{i})$$

heißt eine **(gewöhnliche) Differentialgleichung (Dgl)  $n$ -ter Ordnung**.

Eine Funktion  $y : I \rightarrow \mathbb{R}^p$  heißt eine **Lösung (Lsg)** von (i), genau dann wenn  $y$  auf  $I$   $n$ -mal db, für alle  $x \in I$ ,  $(x, y(x), \dots, y^{(n)}(x)) \in D$  ist und gilt:

$$\forall x \in I : F(x, y(x), \dots, y^{(n)}(x)) = 0$$

### Beispiele:

- (1) Sei  $n = p = 1$ ,  $F(x, y, z) = z + \frac{y}{x}$  und  $D = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x \neq 0\}$ , dann ist die zugehörige Dgl:

$$y' + \frac{y}{x} = 0$$

Z.B. ist  $y : (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}, y(x) = \frac{1}{x}$  eine Lösung der Dgl.

Weitere Lösungen sind:

$$y : (0, 1) \rightarrow \mathbb{R}, y(x) := 0$$

$$y : (-\infty, 0) \rightarrow \mathbb{R}, y(x) := \frac{3}{x}$$

- (2) Sei  $n = 1, p = 2$  und folgende Dgl gegeben:

$$y' = \begin{pmatrix} y_1' \\ y_2' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -y_2 \\ y_1 \end{pmatrix}$$

Dann ist  $y : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2, y(x) := (\cos x, \sin x)$  eine Lösung der Dgl.

### Definition

Seien  $n, p \in \mathbb{N}$ ,  $D \subseteq \mathbb{R} \times \underbrace{\mathbb{R}^p \times \dots \times \mathbb{R}^p}_{n \text{ Faktoren}}$  und  $f : D \rightarrow \mathbb{R}^p$ .

Eine Gleichung der Form:

$$y^{(n)} = f(x, y, \dots, y^{(n-1)}) \quad (\text{ii})$$

heißt **explizite Differentialgleichung  $n$ -ter Ordnung**.

(hier gilt:  $F(x, y, \dots, y^{(n)}) = y^{(n)} - f(x, y, \dots, y^{(n-1)})$ )

**Definition**

Seien  $p, n, D$  und  $f$  wie oben. Weiter sei  $(x_0, y_0, \dots, y_{n-1}) \in D$  fest.

Dann heißt:

$$\begin{cases} y^{(n)} = f(x, y, \dots, y^{(n-1)}) \\ y(x_0) = y_0, \dots, y^{(n-1)}(x_0) = y_{n-1} \end{cases} \quad (\text{iii})$$

ein **Anfangswertproblem (AwP)**.

Eine Funktion  $y : I \rightarrow \mathbb{R}^p$  heißt eine **Lösung** des AwP (iii), genau dann wenn  $y$  eine Lösung von (ii) ist und gilt:

$$y(x_0) = y_0, \dots, y^{(n-1)}(x_0) = y_{n-1}$$

Das AwP heißt **eindeutig lösbar**, genau dann wenn (iii) eine Lösung hat und für je zwei Lösungen  $y : I \rightarrow \mathbb{R}^p, \tilde{y} : J \rightarrow \mathbb{R}^p$  von (iii) gilt:

$$\forall x \in I \cap J : y(x) = \tilde{y}(x)$$

(Beachte:  $x_0 \in I \cap J$ )

**Beispiele:**

(1) Sei  $n = p = 1$  und das folgende AwP gegeben:

$$\begin{cases} y' = 2\sqrt{|y|} \\ y(0) = 0 \end{cases}$$

Dann sind:

$$\begin{aligned} y : \mathbb{R} &\rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto x^2 \\ y : \mathbb{R} &\rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto 0 \end{aligned}$$

Lösungen des AwP.

(2) Sei  $n = p = 1$  und das folgende AwP gegeben:

$$\begin{cases} y' = y \\ y(0) = 1 \end{cases}$$

Dann ist:

$$y : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto e^x$$

eine Lösung des AwP. In §19 werden wir sehen, dass dieses AwP eindeutig lösbar ist.