Differentialgleichungen mit getrennten Veränderlichen

Stets in diesem Paragraphen: I, J seien Intervalle in $\mathbb{R}, f: I \to \mathbb{R}, g: J \to \mathbb{R}$ stetig, $x_0 \in I, y_0 \in J$.

Wir betrachten: (i) y' = g(y)f(x), Differentialgleichung mit getrennten Veränderlichen und das zugehörige AWP (ii) $\begin{cases} y' = g(y)f(x) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$

Satz 8.1 (AWP mit getrennten Veränderlichen)

Sei $y_0 \in J^0$ und $g(y) \neq 0 \ \forall y \in J$. Dann esistiert ein Intervall $I_{x_0} \in I$ und $x_0 \in I_{x_0}$ und es gilt:

- (1) Das AWP (ii) hat eine Lösung $y: I_{x_0} \to \mathbb{R}$
- (2) Die Lösung aus (1) erhält man durch Auflösen der Gl

$$\int_{y_0}^{y(x)} \frac{\mathrm{d}t}{g(t)} = \int_{x_0}^{x} f(t) \mathrm{d}t \quad \text{nach } y(x)$$

- (3) Ist $U \subseteq I$ ein Intervall und $u: U \to \mathbb{R}$ eine Lösung des AWPs, $x_0 \in U, \implies U \subseteq I_{x_0}$ und u = y auf U.
- (4) Das AWP (ii) ist eindeutig lösbar.

Beweis

- (4) folgt aus (3)
 - Definiere $G: J \to \mathbb{R}$ durch $G(y) := \int_{y_0}^y \frac{dt}{g(t)}$, G ist stetig db, $G' = \frac{1}{g}$ auf J und $G(y_0) = 0$. g stetig, $g(y) \neq 0 \ \forall y \in J \implies G' > 0$ auf J oder G' < 0 auf $J \implies \exists G^{-1}: G(J) \to J$, K := G(J), K ist ein Intervall, $0 \in K$, $y_0 \in J^0 \implies 0 \in K^0 \implies \exists \varepsilon > 0 : (-\varepsilon, \varepsilon) \subseteq K$ Definiere $F: I \to \mathbb{R}$ durch $F(x) := \int_{x_0}^x f(t) dt$; F ist stetig db, F' = f, $F(x_0) = 0$. F stetig in $x_0 \implies \exists \delta > 0 : |F(x) F(x_0)| = |F(x)| < \varepsilon \ \forall x \in U_{\delta}(x_0) \cap I$

 M_0 ist ein Intervall, $x_0 \in M_0$, $M_0 \subseteq I$, $F(M_0) \subseteq K$ $\mathfrak{M} := \{M \subseteq I : M \text{ ist ein Intervall, } x_0 \in M, F(M) \subseteq K\}, M_0 \in \mathfrak{M} \neq \emptyset; I_{x_0} := \bigcup_{M \in \mathfrak{M}} M \implies I_{x_0} \in \mathfrak{M}$ Definiere $y : I_{x_0} \to \mathbb{R}$ durch $y(x) := G^{-1}(F(x))$. y ist stetig db auf I_{x_0} , $y(x_0) = G^{-1}(F(x_0)) = G^{-1}(0) = y_0; \forall x \in I_{x_0} : G(y(x)) = F(x) \implies (2) \text{ und (Diff)} : G'(y(x)) y'(x) = G'(y(x)) = G'(y(x))$

$$F'(x) = f(x) \implies y'(x) = g(y(x))f(x) \ \forall x \in I_{x_0} \implies (1)$$

(3) Sei $u: U \to \mathbb{R}$ eine Lösung des AWPs, $U \subseteq I$. $u(x_0) = y_0$ und $u'(t) = g(u(t))f(t) \ \forall t \in U \implies f(t) = \frac{u'(t)}{g(u(t))} \ \forall t \in U, \ u(U) \subseteq J$

Subst:
$$\forall x \in U : F(X) = \int_{x_0}^x f(t) dt = \int_{x_0}^x \frac{u'(t)}{g(u(t))} dt = \begin{cases} s = u(t) \\ s = u'(t) dt \end{cases} = \int_{y_0}^{u(x)} \frac{ds}{g(s)} = G(u(x)) \text{ Also:}$$
$$ds = u'(t) dt$$
$$F(x) = G(u(x)) \ \forall x \in U). \ x \in U \implies u(x) \in J \implies G(u(x)) \in G(J) = K \implies F(x) \in K \implies F(U) \subseteq K \implies U \in \mathfrak{M} \implies U \subseteq I_{x_0}.$$
$$F(x) = G(u(x)) \ \forall x \in U \implies u(x) = G^{-1}(F(x)) = y(x) \ \forall x \in U$$

Der Fall $G(y_0) = 0$. $y(x) = y_0$ ist eine Lösung des AWPs.

Beispiel

Untersuchung des AWPs:

$$AWP: \begin{cases} y' = \sqrt{|y|} \\ y(0) = 0 \end{cases} \quad (I = J = \mathbb{R})$$

 $y_1(x)=0$ ist eine Lösung des AWPs $y_2(x)=\frac{x^2}{4} \text{ ist eine Lösung des AWPs auf } [0,\infty)$

$$y_3(x) = \begin{cases} \frac{x^2}{4} & x > 0\\ 0 & x \le 0 \end{cases}$$

ist eine Lösung des AWPs auf \mathbb{R} . Mehrdeutige Lösbarkeit, da nicht gilt: $g(y) \neq 0$ auf J.

Verfahren für die Praxis: Trennung der Veränderlichen (TDV): Schreibe (i) in der Form: $\frac{dy}{dx} = f(x)g(y)$. TDV: $\frac{dy}{g(y)} = f(x)dx \implies (iii) \int \frac{dy}{g(y)} = \int f(x)dx + c \ (c \in \mathbb{R})$

Die allgemeine Lösung von (i) erhält man durch Auflösen von (iii) in der Form y = y(x; c). Die Lösung von (ii) erhält man, indem man c der Bedingung $y(x_0) = y_0$ anpasst.

Beispiele:

Allgemeine Lösung von (*)
$$y(x) = y^2$$
). $\frac{dy}{dx} = -2xy^2$
TDV: $\frac{dy}{y^2} = -2xdx \implies \int \frac{dy}{y^2} = \int (-2x)dx + c \implies -\frac{1}{y} = -x^2 + c \implies y = \frac{1}{-c+x^2}$. Allgemeine Lösung von (*) $y(x) = \frac{1}{x^2-c}$ $(c \in \mathbb{R})$

(1.1)

AWP:
$$\begin{cases} (*) \\ y(0) = -1 \end{cases}$$

 $-1=y(0)=-\frac{1}{c}\implies c=1\implies$ Lösung des AWPs: $y(x)=\frac{1}{x^2-1}$ auf (-1,1) $(=I_{x_0})$

(1.2)

AWP:
$$\begin{cases} (*) \\ y(0) = 1 \end{cases}$$

 $1 = y(0) = -\frac{1}{c} \implies c = -1 \implies$ Lösung des AWPs: $y(x) = \frac{1}{x^2 + 1}$ auf \mathbb{R} $(= I_{x_0})$

AWP:
$$\begin{cases} (*) \\ y(0) = 0 \end{cases}$$

 $0=y(0)=-\frac{1}{c} \implies$ AWP hat die Lösung $y\equiv 0,$ allerdings ist das Verfahren hier nicht anwendbar.

Dgl:
$$y' = \frac{x^2}{1-x} \cdot \frac{1+y}{y^2}$$

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{x^2}{1-x} \cdot \frac{1+y}{y^2} \implies \frac{y^2}{1+y} \mathrm{d}y = \frac{x^2}{1-x} \implies \int \frac{y^2}{1+y} \mathrm{d}y = \int \frac{x^2}{1-x} \mathrm{d}x + \epsilon \frac{y^2}{1+y} \mathrm{d}y = \frac{x^2}{1-x} + \epsilon \frac{y^2}{1+y} + \epsilon \frac{y^2}{1+y$$

 $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{x^2}{1-x} \cdot \frac{1+y}{y^2} \implies \frac{y^2}{1+y} \mathrm{d}y = \frac{x^2}{1-x} \implies \int \frac{y^2}{1+y} \mathrm{d}y = \int \frac{x^2}{1-x} \mathrm{d}x + c$ Nachrechnen: $\frac{y^2}{2} - y + \log(1+y) = -\frac{x^2}{2} - x - \log(1-x) + c \text{ (Lösungen in impliziter Form)}.$