

2 Eigenschaften des Maß-Integrals

2.1 Konvergenzsätze

Im Folgenden sei $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ ein Maßraum und $f, f_1, f_2, \dots : \Omega \rightarrow \bar{\mathbb{R}}$ messbare Funktionen.

Satz 2.1 (Satz von Beppo Levi, Satz von der monotonen Konvergenz)

Sind $f, f_1, f_2, \dots \geq 0$ mit $f_n \uparrow f$, so gilt

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int f_n d\mu = \int f d\mu.$$

Beweis $\forall f_n \exists (u_{nm})_{m \in \mathbb{N}} \subset \mathcal{E}$ mit $u_{nm} \uparrow f_n$ für $m \rightarrow \infty$. Sei $h_m := \max\{u_{1m}, \dots, u_{mm}\} \implies h_m \uparrow$ und $(h_m) \subset \mathcal{E}$. Außerdem: $u_{nm} \leq h_m$ für $n \leq m$.

Also: $f_n = \sup_{m \in \mathbb{N}} u_{nm} = \sup_{m \geq n} u_{nm} \leq \sup_{m \in \mathbb{N}} h_m$ und $h_m \leq f_m \leq f$. Insgesamt: $h_m \uparrow f$ und $\lim_{m \rightarrow \infty} \int h_m d\mu = \int f d\mu$. Mit $\int h_m d\mu \leq \int f_m d\mu \leq \int f d\mu$ folgt die Behauptung. ■

Im Folgenden sei $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ ein Maßraum und $f_1, f_2, f_3, \dots : \Omega \rightarrow \bar{\mathbb{R}}$ messbare Funktionen.

Satz 2.2 (Lemma von Fatou)

Gilt $f_n \geq 0, n \in \mathbb{N}$, so folgt

$$\int \liminf_{n \rightarrow \infty} f_n d\mu \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} \int f_n d\mu$$

Beweis Sei $g_n := \inf_{m \geq n} f_m, f := \liminf_{n \rightarrow \infty} f_n$, so gilt $g_n \uparrow f$ und mit Satz 2.1 $\int \liminf_{n \rightarrow \infty} f_n d\mu = \lim_{n \rightarrow \infty} \int g_n d\mu = \liminf_{n \rightarrow \infty} \int g_n d\mu \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} \int f_n d\mu$ ■

Satz 2.3 (Satz von Lebesgue oder Satz von der majorisierten Konvergenz)

Es gelte $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(\omega) = f(\omega) \forall \omega \in \Omega$. Existiert eine μ -integrierbare Funktion $g : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ mit der Eigenschaft $|f_n(\omega)| \leq g(\omega) \forall \omega \in \Omega, \forall n \in \mathbb{N}$, so folgt:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int f_n d\mu = \int f d\mu$$

Beweis Sei $g_n := |f_n - f|, h := |f| + g$. Wegen $|h| \leq 2g$ ist h μ -integrierbar. Außerdem gilt

$$\begin{aligned} h - g_n &= |f| + g - |f_n - f| \geq |f| + g - |f_n| - |f| \\ &= g - |f_n| \geq 0 \end{aligned}$$

wegen $g_n \rightarrow 0$ gilt $h - g_n \rightarrow h$, also folgt mit Satz 2.2

$$\begin{aligned} \int h d\mu &= \int \liminf_{n \rightarrow \infty} (h - g_n) d\mu \\ &\leq \liminf_{n \rightarrow \infty} \int (h - g_n) d\mu \\ &= \underbrace{\int h d\mu}_{< \infty} - \limsup_{n \rightarrow \infty} \int g_n d\mu \end{aligned} \quad \blacksquare$$

$\Rightarrow \limsup_{n \rightarrow \infty} \int g_n d\mu \leq 0$ Wegen $g_n \geq 0$ bedeutet dies:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int |f_n - f| d\mu = \lim_{n \rightarrow \infty} \int g_n d\mu = 0$$

und damit

$$\left| \int f_n d\mu - \int f d\mu \right| = \left| \int (f_n - f) d\mu \right| \leq \int |f_n - f| d\mu \rightarrow 0$$

Bemerkung 2.1 Für Wahrscheinlichkeitsmaße lautet Satz 2.3:

Ist $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Folge von Zufallsvariablen, so dass $X_n \xrightarrow{f.s.} X$ (X ist dann automatisch wieder eine Zufallsvariable) und es gibt eine Zufallsvariable Y mit $|X_n| \leq Y \forall n \in \mathbb{N}$ und $EY < \infty$, so gilt $\lim_{n \rightarrow \infty} EX_n = EX$.

Oft kommt man mit einer Majorante der Form $Y \equiv c, c \in \mathbb{R}$ zum Ziel.

2.2 Verhalten bei Transformationen

Es sei $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ ein Maßraum und (Ω', \mathcal{A}') ein messbarer Raum und $T : \Omega \rightarrow \Omega'$ eine $(\mathcal{A}, \mathcal{A}')$ -messbare Abbildung. Aus Stochastik 1 ist bekannt (vgl. §5.2, Verteilung), dass durch

$$\mu^T : \mathcal{A}' \rightarrow [0, \infty], \mu^T(A') := \mu(\underbrace{T^{-1}(A')}_{\in \mathcal{A}}) = \mu(\{\omega \in \Omega \mid T(\omega) \in A'\})$$

ein Maß auf (Ω', \mathcal{A}') definiert wird (Maßtransport). μ^T heißt **Bildmaß** von μ unter der Transformation T .

Ist $X = T$ eine Zufallsgröße auf einem Wahrscheinlichkeitsraum (Ω, \mathcal{A}, P) mit Werten in (Ω', \mathcal{A}') , so nennt man $\mu^T = P^X$ die Verteilung von X . Sei nun weiter $f : \Omega' \rightarrow \mathbb{R}$ messbar.

$$\begin{array}{ccc} \text{Skizze: } (\Omega, \mathcal{A}) & \xrightarrow{T} & (\Omega', \mathcal{A}') \\ & \searrow f \circ T & \downarrow f \\ & & (\mathbb{R}, \mathfrak{B}) \end{array}$$

Satz 2.4 (Integration bezüglich des Bildmaßes, Transformationssatz)

Mit den obigen Bezeichnungen und Voraussetzungen gilt: f ist genau dann μ^T -integrierbar, wenn $f \circ T$ μ -integrierbar ist.

Dann gilt:

$$\int f d\mu^T = \int (f \circ T) d\mu$$

Beweis

(i) Falls $f = \mathbf{1}_A$, ($A \in \mathcal{A}$) gilt

$$\begin{aligned} \int f d\mu^T &= \mu^T(A) \\ &= \mu(T^{-1}(A)) \\ &= \int \mathbf{1}_{T^{-1}(A)} d\mu \\ &= \int \mathbf{1}_A \circ T d\mu \\ &= \int f \circ T d\mu \end{aligned}$$

wegen Satz 1.2(a) folgt damit die Aussage für $f \in \mathcal{E}$

(ii) Sei jetzt $f \geq 0 \implies \exists (u_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathcal{E}$ mit $u_n \uparrow f$ und $\int f d\mu^T = \lim_{n \rightarrow \infty} \int u_n d\mu^T$.
Offenbar gilt $u_n \circ T \in \mathcal{E}$, $(u_n \circ T) \uparrow (f \circ T)$

Also folgt:

$$\begin{aligned} \int f d\mu^T &= \lim_{n \rightarrow \infty} \int u_n d\mu^T \\ &\stackrel{(i)}{=} \lim_{n \rightarrow \infty} \int (u_n \circ T) d\mu \\ &= \int (f \circ T) d\mu \end{aligned}$$

(iii) Ist $f : \Omega' \rightarrow \mathbb{R}$ eine beliebige $(\mathcal{A}', \mathfrak{B})$ -messbare Abbildung so gilt

$$\begin{aligned} \int f^+ d\mu^T < \infty &\iff \int f^+ \circ T d\mu < \infty \\ \int f^- d\mu^T < \infty &\iff \int f^- \circ T d\mu < \infty \end{aligned}$$

Da $(f \circ T)^+ = f^+ \circ T$, $(f \circ T)^- = f^- \circ T$, folgt f μ^T -integrierbar $\iff f \circ T$

μ -integrierbar

$$\begin{aligned}
 \int f d\mu^T &= \int f^+ d\mu^T - \int f^- d\mu^T \\
 &\stackrel{(ii)}{=} \int f^+ \circ T d\mu - \int f^- \circ T d\mu \\
 &= \int (f \circ T)^+ d\mu - \int (f \circ T)^- d\mu \\
 &= \int f \circ T d\mu. \quad \blacksquare
 \end{aligned}$$

Bemerkung 2.2 Das Beweisverfahren (zuerst für $f \in \mathcal{E}$ (bzw. $f = \mathbf{1}_A$), dann für $f \in \mathcal{E}^+$, dann für f beliebig) heißt **algebraische Induktion** und wird häufig verwendet.

2.3 Nullmengen und Maße mit Dichten

Im Folgenden sei $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ ein Maßraum.

Definition 2.1 $N \in \mathcal{A}$ heißt μ -Nullmenge, falls $\mu(N) = 0$.

Definition 2.2 Ist (A) eine Aussage, die von $\omega \in \Omega$ abhängt, so sagen wir, dass (A) μ -**fast überall** (μ -f.ü.) gilt, wenn (A) wahr ist $\forall \omega$ außerhalb einer μ -Nullmenge. Ist $\mu = P$ ein Wahrscheinlichkeitsmaß, so sagt man P -fast-überall oder P -fast sicher (P -f.s.)

Satz 2.5

$f, g : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ seien $(\mathcal{A}, \mathfrak{B})$ messbar.

- a) Sei $f \geq 0$. Dann gilt: $\int f d\mu = 0 \iff f = 0, \mu$ -f.ü.
- b) Ist f μ -integrierbar und gilt $f = g$ μ -f.ü., so ist auch g μ -integrierbar mit $\int f d\mu = \int g d\mu$.

Beweis

- a) Sei $N := \{\omega \in \Omega \mid f(\omega) \neq 0\}$. $N \in \mathcal{A}$, da f messbar.
 - (i) Annahme: $\int f d\mu = 0$.
 Sei $A_n := \{\omega \in \Omega \mid f(\omega) \geq \frac{1}{n}\} \implies A_n \uparrow N$ und $\mu(N) = \lim_{n \rightarrow \infty} (\mu(A_n))$.
 Außerdem gilt $0 = \int f d\mu \geq \int \frac{1}{n} \cdot \mathbf{1}_{A_n} d\mu = \frac{1}{n} \cdot \mu(A_n) \geq 0$
 $\implies \mu(A_n) = 0 \forall n \in \mathbb{N} \implies \mu(N) = 0$, also $f = 0$ μ -f.ü.
 - (ii) Annahme: N ist μ -Nullmenge.
 Sei $g \in \mathcal{E}$, $g(\Omega) = \{\alpha_1, \dots, \alpha_n\}$, $g \leq f$.
 $\implies g = \sum_{j=1}^n \alpha_j \circ \mathbf{1}_{A_j}$.
 Falls $\alpha_j > 0 \implies A_j \subset N \implies \int g d\mu = 0 \xrightarrow{\text{L.1.3}} \int f d\mu = 0$.

b) Seien zunächst $f, g \geq 0$, $N := \{f \neq g\} \xrightarrow{a)}$

$$\begin{aligned} \int f d\mu &= \int_N f d\mu + \int_{N^c} f d\mu \\ &= 0 + \int_{N^c} g d\mu \\ &= \int_N g d\mu + \int_{N^c} g d\mu \\ &= \int g d\mu \end{aligned}$$

Insbesondere: $\int f d\mu < \infty \iff \int g d\mu < \infty$.

Seien nun f, g beliebig. Wegen $\{f^+ = g^+\} \supset \{f = g\} \subset \{f^- = g^-\}$ gilt auch $f^+ = g^+$ und $f^- = g^-$ μ -f.ü. und mit dem vorigen Teil folgt die Behauptung. ■

Bemerkung 2.3 Im Folgenden sei $L^1(\Omega, \mathcal{A}, \mu) := \{f : \Omega \rightarrow \mathbb{R} \mid f \text{ ist messbar und } \mu\text{-integrierbar}\}$ (ist ein Vektorraum) und wir definieren

$f \sim_\mu g : \iff f = g$ μ -f.ü. und \sim_μ ist Äquivalenzrelation auf $\{f : \Omega \rightarrow \mathbb{R} \mid f \text{ ist messbar}\}$. Sei $f^{[\mu]}$ die Äquivalenzklasse zu f .

Mit Satz 2.5: Entweder alle oder keines der Elemente in $f^{[\mu]}$ ist μ -integrierbar und die Integrale sind ggfs. gleich. Außerdem gilt:

$$f_1 \in f^{[\mu]}, g_1 \in g^{[\mu]} \implies f_1 + g_1 \in (f + g)^{[\mu]}.$$

\implies Man kann zum Raum der Äquivalenzklassen übergehen: $L^1(\Omega, \mathcal{A}, \mu) / \sim_\mu$

Mit $\|f^{[\mu]}\|_1 := \int |f| d\mu$ ist eine Norm definiert; sie ist wohldefiniert, da $\int f_1 d\mu = \int f_2 d\mu \forall f_1, f_2 \in f^{[\mu]}$.

Wichtig: $f \mapsto \int |f| d\mu =: \|f\|$ ist auf $L^1(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ keine Norm, da $\|f\| = 0 \implies f \equiv 0$ im Allgemeinen falsch ist!

Satz 2.6 $(L^1(\Omega, \mathcal{A}, \mu) / \sim_\mu, \|\cdot\|_1)$ ist ein Banachraum.

Definition 2.3 Es seien μ, ν Maße auf dem messbaren Raum (Ω, \mathcal{A}) . Gilt dann $\mu(A) = 0 \implies \nu(A) = 0 \forall A \in \mathcal{A}$, so heißt ν μ -**stetig**, in Zeichen $\nu \ll \mu$. Man sagt auch, dass μ das Maß ν dominiert.

Satz 2.7 und Definition

Sei $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ ein Maßraum und $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}_+$ $(\mathcal{A}, \mathfrak{B})$ -messbar. Dann wird durch $\nu : \mathcal{A} \rightarrow \mathbb{R}_+ \cup \{\infty\}$, $\nu(A) := \int_A f d\mu$ ein Maß auf (Ω, \mathcal{A}) definiert. Man nennt ν das **Maß mit der Dichte** f bzgl. μ und f eine μ -**Dichte** von ν . Schreibweise: $f = \frac{d\nu}{d\mu}$

Beweis Wir weisen nach, dass ν ein Maß ist:

$\nu \geq 0$ ist klar, da f nach \mathbb{R}_+ abbildet;

$$(i) \quad \nu(\emptyset) = \int f \cdot \mathbf{1}_\emptyset d\mu = 0.$$

- (ii) Seien A_1, A_2, \dots paarweise disjunkt und $A = \sum_{n=1}^{\infty} A_n$.
 Wegen $f \cdot \mathbf{1}_{\sum_{k=1}^n A_k} \uparrow f \cdot \mathbf{1}_A$ folgt mit Satz 2.1:

$$\begin{aligned}
 \nu\left(\sum_{n=1}^{\infty} A_n\right) &= \int f \cdot \mathbf{1}_A d\mu \\
 &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\int f \cdot \underbrace{\mathbf{1}_{\sum_{k=1}^n A_k}}_{=\sum_{k=1}^n \mathbf{1}_{A_k}} d\mu \right) \\
 &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\int \sum_{k=1}^n f \cdot \mathbf{1}_{A_k} d\mu \right) \\
 &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\sum_{k=1}^n \underbrace{\left(\int f \cdot \mathbf{1}_{A_k} d\mu \right)}_{=\nu(A_k)} \right) \\
 &= \sum_{k=1}^{\infty} \nu(A_k)
 \end{aligned}$$

Satz 2.8 (Satz von Radon-Nikodym)

Seien μ, ν Maße auf dem messbaren Raum (Ω, \mathcal{A}) , μ sei σ -endlich. Dann gilt:
 ν ist genau dann μ -stetig, wenn ν eine Dichte bzgl. μ hat.

Beweis ν hat Dichte bzgl. $\mu \implies \nu(A) = \int_A f d\mu = \int f \cdot \mathbf{1}_A d\mu \xrightarrow{\text{S.2.5a}} \nu \ll \mu$.
 Die andere Richtung siehe z.B. Henze, Stochastik II. ■

Satz 2.9 Seien μ und ν Maße auf (Ω, \mathcal{A}) , ν habe μ -Dichte f . Dann gilt für alle $(\mathcal{A}, \mathfrak{B})$ -messbaren Abbildungen $g : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$:

g ist genau dann ν -integrierbar, wenn $g \cdot f$ μ -integrierbar ist und in diesem Fall ist $\int g d\nu = \int g \cdot f d\mu$.

Beweis Übung. ■

Bemerkung 2.4 Merkgel: $\int g d\nu = \int g \cdot \frac{d\nu}{d\mu} d\mu$.

Beispiel 2.1 Sei $\mu = \lambda$ das Lebesgue-Maß und $\nu = P^X$ die Verteilung einer Zufallsvariablen X . Ist X absolutstetig, so gilt (Stochastik I):

$$P^X(B) = \int_B f_X(x) dx$$

mit $f_X : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_+ \cup \{\infty\}$ und

$$EX = \int_{\Omega} X dP = \int_{\mathbb{R}} x P^X(dx) = \int_{\mathbb{R}} x \cdot f_X(x) dx.$$

mit den Sätzen 2.4 und 2.9.

2.4 Ungleichungen und Räume integrierbarer Funktionen

Hier stellen wir einige Hilfsmittel für später zusammen. Der folgende Satz behandelt den Spezialfall von Wahrscheinlichkeitsmaßen.

Satz 2.10 *Es sei (Ω, \mathcal{A}, P) ein Wahrscheinlichkeitsraum, $X : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ eine Zufallsvariable und $\gamma > 0$. Dann gilt:*

$$P(|X| \geq a) \leq \frac{1}{a^\gamma} \cdot E|X|^\gamma \quad \forall a > 0.$$

Existiert die Varianz von X , so gilt:

$$P(|X - EX| \geq a) \leq \frac{1}{a^2} \cdot \text{Var}(X) \quad \forall a > 0.$$

(Ungleichung von Tschebyschef, siehe Abschnitt 7.6, Stochastik I)

Beweis

Sei $Y : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ definiert durch:

$$Y(\omega) = \begin{cases} a, & \text{falls } |X(\omega)| \geq a \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}$$

$$\implies |Y| \leq |X|$$

$$\implies |Y|^\gamma \leq |X|^\gamma \quad \forall \gamma > 0$$

$$\implies a^\gamma P(|X| \geq a) = a^\gamma P(|Y| \geq a) = E|Y|^\gamma \leq E|X|^\gamma$$

Für Teil 2 setze $\tilde{X} := X - EX$ und $\gamma = 2$. ■

Sei $I \subset \mathbb{R}$ ein offenes Intervall und $\Phi : I \rightarrow \mathbb{R}$ eine konvexe Funktion, d.h.

$$\Phi(\alpha x + (1 - \alpha)y) \leq \alpha\Phi(x) + (1 - \alpha)\Phi(y) \quad \forall x, y \in I, \forall \alpha \in [0, 1]$$

Außerdem gilt $\forall y \in I, \exists m \in \mathbb{R}$, mit

$$\Phi(x) \geq \Phi(y) + m(x - y)$$

Satz 2.11 (Jensensche Ungleichung)

Es seien $I \subset \mathbb{R}$ ein offenes Intervall, $\Phi : I \rightarrow \mathbb{R}$ konvex und X eine Zufallsvariable mit $E|X| < \infty, E|\Phi(X)| < \infty$ und $P(X \in I) = 1$. Dann gilt:

$$EX \in I \text{ und } \Phi(EX) \leq E\Phi(X)$$

Beweis

Falls $I = (-\infty, \infty)$ ist automatisch $EX \in I$. Ist $X < a$ P-f.s. so gilt: $EX \leq Ea = a$.

Falls $E(a - X) = 0$ folgt, da $a - X \geq 0 \xrightarrow{\text{Satz 2.5}} X = a$ P-f.s. Widerspruch!

D.h., falls $I = (\cdot, a) \subset (-\infty, a) \implies EX < a$. Analog untere Schranke $\implies EX \in I$.

Mit der Vorüberlegung folgt ($y = EX, x = X(\omega)$)

$$\Phi(X) \geq \Phi(EX) + m(X - EX) \quad \text{P-f.s.}$$

für ein $m \in \mathbb{R}$. Erwartungswert auf beiden Seiten führt zur Behauptung (Nullmengen können wir vernachlässigen). ■

Beispiel 2.2

Für $\Phi(x) = |x|$, $\Phi(x) = x^2$ folgt: $|EX| \leq E|X|$, $(EX)^2 \leq EX^2$. ($\implies EX^2 - (EX)^2 = \text{Var } X \geq 0$)

Im Folgenden sei $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ wieder ein Maßraum.

Definition

Eine messbare Funktion $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ heißt **p -fach μ -integrierbar**, wenn $\int |f|^p d\mu < \infty$ mit $p > 0$.

$$L^p(\Omega, \mathcal{A}, \mu) := \{f : \Omega \rightarrow \mathbb{R} \mid \int |f|^p d\mu < \infty\}$$

$$\|f\|_p = \left(\int |f|^p d\mu \right)^{\frac{1}{p}}$$

Wie im vorigen Abschnitt ist L^p bzw. $L^p(\Omega, \mathcal{A}, \mu) / \sim_\mu$ ein Vektorraum über \mathbb{R} und $\|f\|_p$ auf den Äquivalenzklassen eine Norm.

Satz 2.12

- a) (Höldersche Ungleichung) Es seien $p > 1$, $f \in L^p(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$, $g \in L^q(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$, wobei $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Dann folgt: $f \cdot g \in L^1(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ und es gilt:

$$\|f \cdot g\|_1 \leq \|f\|_p \cdot \|g\|_q$$

- b) (Minkowskische Ungleichung) Es seien $p \geq 1$ und $f, g \in L^p(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$. Dann folgt $f + g \in L^p(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ und es gilt:

$$\|f + g\|_p \leq \|f\|_p + \|g\|_p$$

Beweis

- a) Falls $\int |f|^p d\mu = 0 \xrightarrow{\text{Satz 2.5}} f = 0 \text{ } \mu\text{-f.s.}$ und die Ungleichung ist richtig. Sei also $\|f\|_p > 0$ und $\|g\|_q > 0$ (gleiches Argument). $x \mapsto \log x$ ist konkav, d.h. es gilt: $\alpha \log(a) + (1 - \alpha) \log(b) \leq \log(\alpha a + (1 - \alpha)b) \quad \forall a, b > 0, 0 < \alpha < 1$. $\exp(\cdot)$ auf beiden Seiten:

$$a^\alpha b^{1-\alpha} \leq \alpha a + (1 - \alpha)b \quad \forall a, b \geq 0, 0 < \alpha < 1$$

Setze $a := \frac{|f(\omega)|^p}{\|f\|_p^p}$, $b := \frac{|g(\omega)|^q}{\|g\|_q^q}$, $\alpha = \frac{1}{p}$ (ω beliebig)

$$\implies \frac{|f(\omega)| \cdot |g(\omega)|}{\|f\|_p \cdot \|g\|_q} \leq \frac{1}{p} \frac{|f(\omega)|^p}{\|f\|_p^p} + \frac{1}{q} \frac{|g(\omega)|^q}{\|g\|_q^q}$$

$$\implies |f(\omega)| \cdot |g(\omega)| \leq \frac{1}{p} |f(\omega)|^p \|f\|_p^{1-p} \|g\|_q + \frac{1}{q} |g(\omega)|^q \|g\|_q^{1-q} \|f\|_p$$

$$\begin{aligned} \xrightarrow{\text{Int. über } \omega} \|f \cdot g\|_1 &\leq \frac{1}{p} \|f\|_p^p \|f\|_p^{1-p} \|g\|_q + \frac{1}{q} \|g\|_q^q \|g\|_q^{1-q} \|f\|_p \\ &= \frac{1}{p} \|f\|_p \|g\|_q + \frac{1}{q} \|g\|_q \|f\|_p \end{aligned}$$

\implies Behauptung

- b) Wegen $|f + g| \leq |f| + |g|$ gilt $\|f + g\|_p \leq \|f\|_p + \|g\|_p$. Also genügt es die Ungleichung für $f + g \geq 0$ zu beweisen. Falls $p = 1$ folgt $\|f + g\|_1 = \int (f + g) d\mu = \int f d\mu + \int g d\mu = \|f\|_1 + \|g\|_1$. Sei also $p > 1$. Mit $(f + g)^p \leq (2 \cdot \max\{f, g\})^p \leq 2^p(|f|^p + |g|^p) \implies (f + g) \in L^p$, also $\|f + g\|_p < \infty$. Sei $q := \frac{1}{1-\frac{1}{p}}$. Anwendung von Teil a) liefert:

$$\begin{aligned} \|f + g\|_p^p &= \int f(f + g)^{p-1} d\mu + \int g(f + g)^{p-1} d\mu \\ &\stackrel{\text{a)}}{\leq} (\|f\|_p + \|g\|_p) \|(f + g)^{p-1}\|_q \quad (*) \end{aligned}$$

Wegen $(p - 1)q = p$ gilt:

$$\|(f + g)^{p-1}\|_q = \left(\int (f + g)^{(p-1)q} d\mu \right)^{\frac{1}{q}} = \|f + g\|_p^{\frac{p}{q}} = \|f + g\|_p^{p-1}$$

Falls $\|f + g\|_p = 0$ ist die Ungleichung richtig. Sei also $\|f + g\|_p > 0$. Nehme (*) und teile durch $\|f + g\|_p^{p-1}$ auf beiden Seiten \implies Behauptung. ■

Bemerkung

Falls $p = q = 2, \Omega = \{1, \dots, n\}, \mathcal{A} = \mathcal{P}(\Omega), \mu = \sum_{k=1}^n \delta_k, f(i) = a_i, g(i) = b_i$, bekommt man:

$$\sum_{i=1}^n a_i b_i \leq \left(\sum_{i=1}^n a_i^2 \right)^{\frac{1}{2}} \cdot \left(\sum_{i=1}^n b_i^2 \right)^{\frac{1}{2}}$$

In diesem Fall ist Satz 2.12 a) die Cauchy-Schwarz-Ungleichung.

Lineare Algebra: $|\langle a, b \rangle| \leq \|a\| \cdot \|b\| \quad \forall a, b \in \mathbb{R}^n$. Das motiviert

Satz 2.13

Es sei $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ ein Maßraum und $L^2(\Omega, \mathcal{A}, \mu) / \sim_\mu$ der Raum der \sim_μ -Äquivalenzklassen quadratisch μ -integrierbarer Funktion $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$.

Dann ist $\langle f, g \rangle := \int f \cdot g d\mu$ hierauf ein Skalarprodukt, durch den $L^2(\Omega, \mathcal{A}, \mu) / \sim_\mu$ zu einem Hilbertraum wird.

Beweis siehe Henze, Stochastik II ■

Bemerkung

- a) $(L^p(\Omega, \mathcal{A}, \mu) / \sim_\mu, \|\cdot\|_p)$ ist ein Banachraum für $p \geq 1$.
- b) Ist $\Phi : L^p(\Omega, \mathcal{A}, \mu) \rightarrow \mathbb{R}$ stetig und linear, so existiert ein $g \in L^q(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ mit $\Phi(f) = \int f \cdot g d\mu \quad \forall f \in L^p(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$.

