§ 2 Das Lebesguemaß

In diesem Kapitel sei X eine Menge, $X \neq \varnothing$.

Definition
Sei $\varnothing \neq \mathfrak{R} \subseteq \mathcal{P}(X)$. $\mathfrak{R}$ heißt ein **Ring** (auf X), genau dann wenn gilt:

(1) $\varnothing \in \mathfrak{R}$

(2) $A, B \in \mathfrak{R} \implies A \cup B,\, B \setminus A \in \mathfrak{R}$

Definition
Sei $d \in \mathbb{N}$.

(1) $\mathcal{I}_d := \{(a,b] \mid a,b \in \mathbb{R}^d,\, a \leq b\}$. Seien $a = (a_1, \ldots, a_d)$, $b = (b_1, \ldots, b_d) \in \mathbb{R}^d$ und $I := (a,b] \in \mathcal{I}_d$

$$\lambda_d(I) = \begin{cases} 0 & \text{falls } I = \varnothing \\ (b_1 - a_1)(b_2 - a_2) \cdots (b_d - a_d) & \text{falls } I \neq \varnothing \end{cases} \quad (\textbf{Elementarvolumen})$$

(2) $\mathcal{F}_d := \left\{ \bigcup_{j=1}^n I_j \mid n \in \mathbb{N},\, I_1, \ldots, I_n \in \mathcal{I}_d \right\}$ (**Menge der Figuren**)

Ziel dieses Kapitels: Fortsetzung von λ_d auf $\mathcal{F}_d$ und dann auf $\mathfrak{B}_d$ ($\rightsquigarrow$ Lebesguemaß)

Beachte: $\mathcal{I}_d \subseteq \mathcal{F}_d \subseteq \mathfrak{B}_d \overset{1.4}{\implies} \mathfrak{B}_d = \sigma(\mathcal{I}_d) = \sigma(\mathcal{F}_d)$

Lemma 2.1
Seien $I, I' \in \mathcal{I}_d$ und $A \in \mathcal{F}_d$. Dann:

(1) $I \cap I' \in \mathcal{I}_d$

(2) $I \setminus I' \in \mathcal{F}_d$. Genauer: $\exists \{I_1', \ldots, I_l'\} \subseteq \mathcal{I}_d$ disjunkt: $I \setminus I' = \bigcup_{j=1}^l I_j'$

(3) $\exists \{I_1', \ldots, I_l'\} \subseteq \mathcal{I}_d$ disjunkt: $A = \bigcup_{j=1}^l I_j'$

(4) $\mathcal{F}_d$ ist ein Ring.

Beweis

(1) Sei $I = \prod_{k=1}^d (a_k, b_k]$, $I' = \prod_{k=1}^d (\alpha_k, \beta_k]$; $\alpha_k' := \max\{\alpha_k, a_k\}$, $\beta_k' := \min\{\beta_k, b_k\}$

Ist $\alpha_k' \geq \beta_k'$ für ein $k \in \{1, \ldots, d\}$, so ist $I \cap I' = \varnothing \in \mathcal{I}_d$. Sei $\alpha_k' < \beta_k' \forall k \in \{1, \ldots, d\}$, so ist $I \cap I' = \prod_{k=1}^d (\alpha_k', \beta_k'] \in \mathcal{I}_d$

(2) Induktion nach d:

I.A. Klar ✓

I.V. Die Behauptung gelte für ein $d \geq 1$

I.S. Seien $I, I' \in \mathcal{I}_{d+1}$. Es existieren $I_1, I_1' \in \mathcal{I}_1$ und $I_2, I_2' \in \mathcal{I}_d$ mit: $I = I_1 \times I_2,\ I' = I_1' \times I_2'$

Nachrechnen:

$$I \setminus I' = (I_1 \setminus I_1') \times I_2 \dot\cup (I_1 \cap I_1') \times (I_2 \setminus I_2')$$

I.A. $\implies$ $I_1 \setminus I_1'$ = endliche disjunkte Vereinigung von Elementen aus $\mathcal{I}_1$
I.V. $\implies$ $I_2 \setminus I_2'$ = endliche disjunkte Vereinigung von Elementen aus $\mathcal{I}_d$
Daraus folgt die Behauptung für $d+1$

(3) Wir zeigen mit Induktion nach n: ist $A = \bigcup_{j=1}^n I_j$ mit $I_1, \dots, I_d \in \mathcal{I}_d$, so existiert $\{I_1', \dots, I_l'\} \subseteq \mathcal{I}_d$ disjunkt: $A = \bigcup_{j=1}^l I_j'$

I.A. $n = 1 :\ A = I_1$✓

I.V. Die Behauptung gelte für ein $n \geq 1$

I.S. Sei $A = \bigcup_{j=1}^{n+1} I_j \quad (I_1, \dots, I_{n+1} \in \mathcal{I}_d)$

IV $\implies$ $\exists \{I_1', \dots, I_l'\} \subseteq \mathcal{I}_d$ disjunkt: $\bigcup_{j=1}^n I_j = \bigcup_{j=1}^l I_j'$

Dann: $A = I_{n+1} \cup \bigcup_{j=1}^l I_j' = I_{n+1} \cup \bigcup_{j=1}^l (I_j' \setminus I_{n+1})$

Wende (2) auf jedes $I_j' \setminus I_{n+1}$ an $(j = 1, \dots, l)$: $I_j' \setminus I_{n+1} = \bigcup_{j=1}^{l_j} I_j'' \quad (I_j'' \in \mathcal{I}_d)$

Damit folgt:

$$A = I_{n+1} \cup \bigcup_{j=1}^{l} \left(\bigcup_{j=1}^{l_j} I_j'' \right)$$

Daraus folgt die Behauptung für $n+1$.

(4) $(a, a] = \varnothing \implies \varnothing \in \mathcal{F}_d$

Seien $A, B \in \mathcal{F}_d$. Klar: $A \cup B \in \mathcal{F}_d$

Sei $A = \bigcup_{j=1}^n I_j,\ B = \bigcup_{j=1}^n I_j' \quad (I_j, I_j' \in \mathcal{I}_d)$. Zu zeigen: $B \setminus A \in \mathcal{F}_d$

I.A. $n = 1 :\ A = I_1 \implies B \setminus A = \bigcup_{j=1}^n \underbrace{(I_j' \setminus I_j)}_{\in \mathcal{F}_d}$. Wende (2) auf jedes $I_j' \setminus I_1$ an. Aus (2) folgt dann $B \setminus A \in \mathcal{F}_d$.

I.V. Die Behauptung gelte für ein $n \in \mathbb{N}$

I.S. Sei $A' = A \cup I_{n+1} \quad (I_{n+1} \in \mathcal{I}_d)$. Dann:

$$B \setminus A' = \underbrace{(B \setminus A)}_{\in \mathcal{F}_d} \setminus \underbrace{I_{n+1}}_{\in \mathcal{F}_d} \in \mathcal{F}_d$$

■

Lemma 2.2
Sei $A \in \mathcal{F}_d$ und $\{I_1, \dots, I_n\} \subseteq \mathcal{I}_d$ disjunkt und $\{I'_1, \dots, I'_m\} \subseteq \mathcal{I}_d$ disjunkt mit $\bigcup_{j=1}^n I_j = A = \bigcup_{j=1}^m I'_j$. Dann:

$$\sum_{j=1}^n \lambda_d(I_j) = \sum_{j=1}^m \lambda_d(I'_j)$$

Definition
Sei $A \in \mathcal{F}_d$ und $A = \bigcup_{j=1}^n I_j$ mit $\{I_1, \dots, I_n\} \subseteq \mathcal{I}_d$ disjunkt (beachte Lemma 2.1, Punkt 3).

$$\lambda_d(A) := \sum_{j=1}^n \lambda_d(I_j)$$

Wegen Lemma 2.2 ist $\lambda_d : \mathcal{F}_d \to [0, \infty)$ wohldefiniert.

Satz 2.3
Seien $A, B \in \mathcal{F}_d$ und (B_n) sei eine Folge in $\mathcal{F}_d$.

(1) $A \cap B = \varnothing \implies \lambda_d(A \cup B) = \lambda_d(A) + \lambda_d(B)$

(2) $A \subseteq B \implies \lambda_d(A) \leq \lambda_d(B)$

(3) $\lambda_d(A \cup B) \leq \lambda_d(A) + \lambda_d(B)$

(4) Sei $\delta > 0$. Es existiert $C \in \mathcal{F}_d : \overline{C} \subseteq B$ und $\lambda_d(B \setminus C) \leq \delta$.

(5) Ist $B_{n+1} \subseteq B_n \forall n \in \mathbb{N}$ und $\bigcap B_n = \varnothing$, so gilt: $\lambda_d(B_n) \to 0 \, (n \to \infty)$

Beweis

(1) Aus Lemma 2.1 folgt: Es existiert $\{I_1, \dots, I_n\} \subseteq \mathcal{I}_d$ disjunkt und es existiert $\{I'_1, \dots, I'_m\} \subseteq \mathcal{I}_d$ disjunkt: $A = \bigcup_{j=1}^n I_j$, $B = \bigcup_{j=1}^m I'_j$.

$J := \{I_1, \dots, I_n, I'_1, \dots, I'_m\} \subseteq \mathcal{I}_d$. Aus $A \cap B = \varnothing$ folgt: J ist disjunkt. Dann: $A \cup B = \bigcup_{I \in J} I$

Also:

$$\begin{aligned}
\lambda_d(A \cup B) &= \sum_{I \in J} \lambda_d(I) \\
&= \sum_{j=1}^n \lambda_d(I_j) + \sum_{j=1}^m \lambda_d(I'_j) \\
&= \lambda_d(A) + \lambda_d(B)
\end{aligned}$$

(2) wie bei Satz 1.7

(3) $\lambda_d(A \cup B) = \lambda(A \cup (B \setminus A)) \overset{(1)}{=} \lambda_d(A) + \lambda_d(B \setminus A) \overset{(2)}{\leq} \lambda_d(A) + \lambda_d(B)$

(4) Übung; es genügt zu betrachten: $B \in \mathcal{I}_d$

(5) Sei $\varepsilon > 0$. Aus (4) folgt: Zu jedem B_n existiert ein $C_n \in \mathcal{F}_d : \overline{C}_n \subseteq B_n$ und

$$\lambda_d(B_n \setminus C_n) \leq \frac{\varepsilon}{2^n} \tag{2.1}$$

Dann: $\bigcap \overline{C}_n \subseteq \bigcap B_n = \varnothing \implies \bigcup \overline{C}_n^c = \mathbb{R}^d \implies \underbrace{\overline{B}_1}_{\text{kompakt}} \subseteq \bigcup \underbrace{\overline{C}_n^c}_{\text{offen}}$

Aus der Definition von Kompaktheit (Analysis II, §2) folgt: $\exists m \in \mathbb{N} : \bigcup_{j=1}^m \overline{C}_j^c \supseteq \overline{B}_1$
Dann: $\bigcap_{j=1}^m \overline{C}_j \subseteq \overline{B}_1^c$. Andererseits: $\bigcap_{j=1}^m \overline{C}_j \subseteq \bigcap_{j=1}^m B_j \subseteq B_1 \subseteq \overline{B}_1$.

Also: $\bigcap_{j=1}^m \overline{C}_j = \varnothing$. Das heißt: $\bigcap_{j=1}^n \overline{C}_j = \varnothing \, \forall n \geq m$

$D_n := \bigcap_{j=1}^n C_j$. Dann: $D_n = \varnothing \, \forall n \geq m$

Behauptung: $\lambda_d(B_n \setminus D_n) \leq \left(1 - \frac{1}{2^n}\right) \varepsilon \, \forall n \in \mathbb{N}$

Beweis
I.A. $\lambda_d(B_1 \setminus D_1) = \lambda_d(B_1 \setminus C_1) \overset{(2.1)}{\leq} \frac{\varepsilon}{2} = \left(1 - \frac{1}{2}\right) \varepsilon$ ✓

I.V. Die Behauptung gelte für ein $n \in \mathbb{N}$.

I.S.

$$\begin{aligned}
\lambda_d(B_{n+1} \setminus D_{n+1}) &= \lambda_d\left((B_{n+1} \setminus D_n) \cup (B_{n+1} \setminus C_{n+1})\right) \\
&\overset{(3)}{\leq} \lambda_d(\underbrace{B_{n+1} \setminus D_n}_{\subseteq B_n \setminus D_n}) + \underbrace{\lambda_d(B_{n+1} \setminus C_{n+1})}_{\overset{(2.1)}{\leq} \frac{\varepsilon}{2^{n+1}}} \\
&\overset{(2)}{\leq} \lambda_d(B_n \setminus D_n) + \frac{\varepsilon}{2^{n+1}} \\
&\overset{\text{I.V.}}{\leq} \left(1 - \frac{1}{2^n}\right) \varepsilon + \frac{\varepsilon}{2^{n+1}} \\
&= \left(1 - \frac{1}{2^{n+1}}\right) \varepsilon
\end{aligned}$$
■

Für $n \geq m : D_n = \varnothing \implies \lambda_d(B_n) = \lambda_d(B_n \setminus D_n) \leq \left(1 - \frac{1}{2^n}\right) \varepsilon \leq \varepsilon$ ■

Definition
Es sei $\mathfrak{R}$ ein Ring auf X. Eine Abbildung $\mu : \mathfrak{R} \to [0, \infty]$ heißt ein **Prämaß** auf $\mathfrak{R}$, wenn gilt:

(1) $\mu(\varnothing) = 0$

(2) Ist A_j eine disjunkte Folge in $\mathfrak{R}$ und $\bigcup A_j \in \mathfrak{R}$, so ist $\mu\left(\bigcup A_j\right) = \sum \mu(A_j)$.

Satz 2.4
$\lambda_d : \mathcal{F}_d \to [0, \infty]$ ist ein Prämaß.

Beweis

(1) Klar: $\lambda_d(\varnothing) = 0$

(2) Sei A_j eine disjunkte Folge in $\mathcal{F}_d$ und $A := \bigcup A_j \in \mathcal{F}_d$.

$B_n := \bigcup_{j=n}^{\infty} A_j$ $(n \in \mathbb{N})$; (B_n) hat die Eigenschaften aus 2.3, Punkt 5. Also: $\lambda_d(B_n) \to 0$.

Für $n \geq 2$:

$$\lambda_d(A) = \lambda_d(A_1 \cup \dots \cup A_{n-1} \cup B_n) \overset{2.3.(1)}{=} \sum_{j=1}^{n-1} \lambda_d(A_j) + \lambda_d(B_n)$$

Daraus folgt:

$$\sum_{j=1}^{n-1} \lambda_d(A_j) = \lambda_d(A) - \lambda_d(B_n) \quad \forall n \geq 2$$

Mit $n \to \infty$ folgt die Behauptung. ■

Satz 2.5 (Fortsetzungssatz von Carathéodory)
Sei $\mathfrak{R}$ ein Ring auf X und $\mu : \mathfrak{R} \to [0, \infty]$ ein Prämaß. Dann existiert ein Maßraum $(X, \mathfrak{A}(\mu), \overline{\mu})$ mit

(1) $\sigma(\mathfrak{R}) \subseteq \mathfrak{A}(\mu)$

(2) $\overline{\mu}(A) = \mu(A) \, \forall A \in \mathfrak{R}$

Insbesondere: $\overline{\mu}$ ist ein Maß auf $\sigma(\mathfrak{R})$.

Satz 2.6 (Eindeutigkeitssatz)
Sei $\varnothing \neq \mathcal{E} \subseteq \mathcal{P}(X)$, es seien ν, μ Maße auf $\sigma(\mathcal{E})$ und es gelte: $\mu(E) = \nu(E) \, \forall E \in \mathcal{E}$.

Weiter gelten:

(1) $E, F \in \mathcal{E} \implies E \cap F \in \mathcal{E}$ (durchschnittstabil)

(2) Es existiert eine Folge (E_n) in $\mathcal{E}$: $\bigcup E_n = X$ und $\mu(E_n) < \infty \forall n \in \mathbb{N}$.

Dann: $\mu = \nu$ auf $\sigma(\mathcal{E})$.

Satz 2.7
Es gibt genau eine Fortsetzung von $\lambda_d : \mathcal{F}_d \to [0, \infty]$ auf $\mathfrak{B}_d$ zu einem Maß. Diese Fortsetzung heißt **Lebesguemaß** (L-Maß) und wird ebenfalls mit λ_d bezeichnet.

Beweis
Aus Lemma 2.1 und Satz 2.4 folgt: λ_d ist ein Prämaß auf $\mathfrak{R} := \mathcal{F}_d$; es ist $\sigma(\mathfrak{R}) = \mathfrak{B}_d$.

Aus Satz 2.5 folgt: λ_d kann zu einem Maß auf $\mathfrak{B}_d$ fortgesetzt werden.

Sei ν ein weiteres Maß auf $\mathfrak{B}_d$ mit: $\nu(A) = \lambda_d(A)\,\forall A \in \mathcal{F}_d$. $\mathcal{E} := \mathcal{I}_d$. Dann: $\sigma(\mathcal{E}) \overset{1.4}{=} \mathfrak{B}_d$.

(1) $E, F \in \mathcal{E} \overset{2.1}{\Longrightarrow} E \cap F \in \mathcal{E}$

(2) $E_n := (-n, n]^d$

Klar:

$$\bigcup E_n = \mathbb{R}^d$$
$$\lambda_d(E_n) = (2n)^d < \infty$$

Klar: $\nu(E) = \lambda_d(E)\,\forall E \in \mathcal{E}$. Mit Satz 2.6 folgt dann: $\nu = \lambda_d$ auf $\mathfrak{B}_d$. ■

Bemerkung: Sei $X \in \mathfrak{B}_d$. Aus 1.6 folgt: $\mathfrak{B}(X) = \{A \in \mathfrak{B}_d \mid A \subseteq X\}$. Die Einschränkung von λ_d auf $\mathfrak{B}(X)$ heißt ebenfalls L-Maß und wird mit λ_d bezeichnet.

Beispiele:

(1) Seien $a = (a_1, \dots, a_d)$, $b = (b_1, \dots, b_d) \in \mathbb{R}^d$, $a \leq b$ und $I = [a, b]$.

Behauptung

$\lambda_d([a, b]) = (b_1 - a_1) \cdots (b_d - a_d)$ (Entsprechendes gilt für (a, b) und $[a, b)$)

Beweis

$I_n := (a_1 - \frac{1}{n}, b_1] \times \cdots \times (a_d - \frac{1}{n}, b_d]$; $I_1 \supset I_2 \supset \cdots$; $\bigcap I_n = I$, $\lambda_d(I_1) < \infty$

Aus Satz 1.7, Punkt 5, folgt:

$$\begin{aligned}
\lambda_d(I) &= \lim_{n\to\infty} \lambda_d(I_n) \\
&= \lim_{n\to\infty} (b_1 - a_1 + \frac{1}{n}) \cdots (b_d - a_d + \frac{1}{n}) \\
&= (b_1 - a_1) \cdots (b_d - a_d)
\end{aligned}$$ ■

(2) Sei $a \in \mathbb{R}^d$, $\{a\} = [a, a] \in \mathfrak{B}_d$. Aus obigem Beispiel (1) folgt: $\lambda_d(\{a\}) = 0$.

(3) $\mathbb{Q}^d$ ist abzählbar, also: $\mathbb{Q}^d = \{a_1, a_2, \dots\}$ mit $a_j \neq a_i$ $(i \neq j)$. Dann: $\mathbb{Q}^d = \bigcup \{a_j\}$

Dann gilt: $\mathbb{Q}^d \in \mathfrak{B}_d$ und $\lambda_d(\mathbb{Q}^d) = \sum \lambda_d(\{a_j\}) = 0$.

(4) Wie in Beispiel (3): Ist $A \subseteq \mathbb{R}^d$ abzählbar, so ist $A \in \mathfrak{B}_d$ und $\lambda_d(A) = 0$.

(5) Sei $j \in \{1, \dots, d\}$ und $H_j := \{(x_1, \dots, x_d) \in \mathbb{R}^d \mid x_j = 0\}$. H_j ist abgeschlossen, damit folgt: $H_j \in \mathfrak{B}_d$.

Ohne Beschränkung der Allgemeinheit sei $j = d$. Dann: $I_n := \underbrace{[-n, n] \times \cdots \times [-n, n]}_{(d-1)-\text{mal}} \times \{0\}$.

Aus Beispiel (1) folgt: $\lambda_d(I_n) = 0$.

Aus $H_d = \bigcup I_n$ folgt: $\lambda_d(H_d) \leq \sum \lambda_d(I_n) = 0$. Also: $\lambda_d(H_j) = 0$.

Definition

Sei $x \in \mathbb{R}^d, B \subseteq \mathbb{R}^d$. Definiere:

$$x + B := \{x + b \mid b \in B\}$$

Beispiel
Ist $I \in \mathcal{I}_d$, so gilt $x + I \in \mathcal{I}_d$ und $\lambda_d(x + I) = \lambda_d(I)$.

Satz 2.8
Sei $x \in \mathbb{R}^d, \mathfrak{A} := \{B \in \mathfrak{B}_d : x + B \in \mathfrak{B}_d\}$ und $\mu : \mathfrak{A} \to [0, \infty]$ sei definiert durch $\mu(A) := \lambda_d(x + A)$. Dann gilt:

(1) $(\mathbb{R}^d, \mathfrak{A}, \mu)$ ist ein Maßraum.

(2) Es ist $\mathfrak{A} = \mathfrak{B}_d$ und $\mu = \lambda_d$ auf $\mathfrak{B}_d$. D.h. für alle $A \in \mathfrak{B}_d$ ist $x + A \in \mathfrak{B}_d$ und $\lambda_d(x + A) = \lambda_d(A)$ (Translationsinvarianz des Lebesgue-Maßes).

Beweis

(1) Leichte Übung!

(2) Es ist klar, dass $\mathfrak{B}_d \supseteq \mathfrak{A}$. Nach dem Beispiel von oben gilt:

$$\mathcal{I}_d \subseteq \mathfrak{A} \subseteq \mathfrak{B}_d = \sigma(\mathcal{I}_d) \subseteq \sigma(\mathfrak{A}) = \mathfrak{A}$$

Setze $\mathcal{E} := \mathcal{I}_d$, dann ist $\sigma(\mathcal{E}) = \mathfrak{B}_d$ und es gilt nach dem Beispiel von oben:

$$\forall E \in \mathcal{E} : \mu(E) = \lambda_d(E)$$

$\mathcal{E}$ hat die Eigenschaften (1) und (2) aus Satz 2.6, daraus folgt dann, dass $\mu = \lambda_d$ auf $\mathfrak{B}_d$ ist.
■

Satz 2.9
Sei μ ein Maß auf $\mathfrak{B}_d$ mit der Eigenschaft:

$$\forall x \in \mathbb{R}^d, A \in \mathfrak{B}_d : \mu(A) = \mu(x + A)$$

Weiter sei $c := \mu((0, 1]^d) < \infty$. Dann gilt:

$$\mu = c \cdot \lambda_d$$

Satz 2.10 (Regularität des Lebesgue-Maßes)
Sei $A \in \mathfrak{B}_d$, dann gilt:

(1) $\lambda_d(A) = \inf \left\{\lambda_d(G) \mid G \subseteq \mathbb{R}^d \text{ offen und } A \subseteq G\right\}$
$= \inf \left\{\lambda_d(V) \mid V = \bigcup_{j=1}^{\infty} I_j, I_j \subseteq \mathbb{R}^d \text{ offenes Intervall }, A \subseteq V\right\}$

(2) $\lambda_d(A) = \sup\{\lambda_d(K) \mid K \subseteq \mathbb{R}^d \text{ kompakt }, K \subseteq A\}$

Beweis

(1) Ohne Beweis.

(2) Setze $\beta := \sup\{\lambda_d(K) \mid K \subseteq \mathbb{R}^d \text{ kompakt }, K \subseteq A\}$. Sei K kompakt und $K \subseteq A$, dann gilt $\lambda_d(K) \leq \lambda_d(A)$, also ist auch $\beta \leq \lambda_d(A)$.

Fall 1: Sei A zusätzlich beschränkt.
Sei $\varepsilon > 0$. Es existiert ein $r > 0$, sodass $A \subseteq B := \overline{U_r(0)} \subseteq [-r, r]^d$ ist, dann gilt:

$$\lambda_d(A) \leq \lambda_d([-r,r]^d) = (2r)^d < \infty$$

Aus (1) folgt, dass eine offene Menge $G \supseteq B \setminus A$ existiert mit $\lambda_d(G) \leq \lambda_d(B \setminus A) + \varepsilon$. Dann gilt nach 1.7:

$$\lambda_d(B \setminus A) = \lambda_d(B) - \lambda_d(A)$$

Setze nun $K := B \setminus G = B \cap G^c$, dann ist K kompakt und $K \subseteq B \setminus (B \setminus A) = A$. Da $B \subseteq G \cup K$ ist, gilt:

$$\lambda_d(B) \leq \lambda_d(G \cup K) \leq \lambda_d(B) - \lambda_d(A) + \varepsilon + \lambda_d(K)$$

Woraus folgt:

$$\lambda_d(A) \leq \lambda_d(K) + \varepsilon$$

Fall 2: Sei $A \in \mathfrak{B}_d$ beliebig.
Setze $A_n := A \cap \overline{U_n(0)}$. Dann ist A_n für alle $n \in \mathbb{N}$ beschränkt, $A_n \subseteq A_{n+1}$ und $A = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n$. Nach 1.7 gilt:

$$\lambda_d(A) = \lim \lambda_d(A_n)$$

Aus Fall 1 folgt, dass für alle $n \in \mathbb{N}$ ein kompaktes $K_n \subseteq A_n$ mit $\lambda_d(A_n) \leq \lambda_d(K_n) + \frac{1}{n}$ existiert. Dann gilt:

$$\lambda_d(A_n) \leq \lambda_d(K_n) + \frac{1}{n} \leq \lambda_d(A) + \frac{1}{n}$$

Also auch:

$$\lambda_d(A) = \lim \lambda(K_n) \leq \beta$$

■

Auswahlaxiom:
Sei $\varnothing \neq \Omega$ Indexmenge, es sei $\{X_\omega \mid \omega \in \Omega\}$ ein disjunktes System von nichtleeren Mengen X_ω. Dann existiert ein $C \subseteq \bigcup_{\omega\in\Omega} X_\omega$, sodass C mit jedem X_j genau ein Element gemeinsam hat.

Satz 2.11 (Satz von Vitali)
Es existiert ein $C \subseteq \mathbb{R}^d$ sodass $C \notin \mathfrak{B}_d$.

Beweis
Wir definieren auf $[0,1]^d$ eine Äquivalenzrelation $\sim$, durch:

$$\forall x, y \in [0,1]^d : x \sim y \iff x - y \in \mathbb{Q}^d$$
$$\forall x \in [0,1]^d : [x] := \{y \in [0,1]^d \mid x \sim y\}$$

Nach dem Auswahlaxiom existiert ein $C \subseteq [0,1]^d$, sodass C mit jedem $[x]$ genau ein Element gemeinsam hat. Es ist $\mathbb{Q}^d \cap [-1,1]^d = \{q_1, q_2, \ldots\}$ mit $q_i \neq q_j$ für $(i \neq j)$. Dann gilt:

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} (q_n + C) \subseteq [-1,2]^d \tag{1}$$

$$[0,1]^d \subseteq \bigcup_{n=1}^{\infty} (q_n + C) \tag{2}$$

Beweis
Sei $x \in [0,1]^d$. Wähle $y \in C$ mit $y \in [x]$, dann ist $x \sim y$, also $x - y \in \mathbb{Q}^d \cap [-1,1]^d$. D.h.:

$$\exists n \in \mathbb{N} : x - y = q_n \implies x = q_n + y \in q_n + C \qquad \blacksquare$$

Außerdem ist $\{q_n + C \mid n \in \mathbb{N}\}$ disjunkt.

Beweis
Sei $z \in (q_n + C) \cap (q_m + C)$, dann existieren $a, b \in \mathbb{Q}^d$, sodass gilt:

$$\begin{aligned}(q_n + a = z = q_m + b) &\implies (b - a = q_m - q_n \in \mathbb{Q}^d) \\ &\implies (a \sim b) \implies ([a] = [b]) \\ &\implies (a = b) \implies (q_n = q_m)\end{aligned} \qquad \blacksquare$$

Annahme: $C \in \mathfrak{B}_d$, dann gilt nach (1):

$$\begin{aligned}3^d &= \lambda_d([-2,1]^d) \\ &\geq \lambda_d(\bigcup (q_n + C)) \\ &= \sum \lambda_d(q_n + C) \\ &= \sum \lambda_d(C)\end{aligned}$$

Also ist $\lambda_d(C) = 0$. Damit folgt aus (2):

$$\begin{aligned}1 &= \lambda_d([0,1]^d) \\ &\leq \lambda_d(\bigcup (q_n + C)) \\ &= \sum \lambda_d(C) \\ &= 0\end{aligned} \qquad \blacksquare$$