§ 16.

Folgen, Reihen und Potenzreihen in $\mathbb{C}$

$\mathbb{C}$ und $\mathbb{R}^2$ sind Vektorräume **über** $\mathbb{R}$ der Dimension zwei. Sie unterscheiden sich als Vektorräume über $\mathbb{R}$ nur dadurch, dass ihre Elemente mit:

$$z = x + \mathrm{i}y \in \mathbb{C} \quad \text{bzw.} \quad (x, y) \in \mathbb{R}^2 \quad (x, y \in \mathbb{R})$$

bezeichnet werden. Mit dem **komplexen Betrag** $|z| := \sqrt{x^2 + y^2}$ gilt:

$$|z| = \|(x, y)\|$$

Man sieht, dass alle aus der Addition, der Skalarmultiplikation und der Norm entwickelten Begriffe und Sätze aus §1 und §2 auch in $\mathbb{C}$ gelten.

Beispiel (Konvergente Folgen)
Sei (z_n) eine Folge in $\mathbb{C}$ und $z_0 \in \mathbb{C}$. (z_n) konvergiert genau dann gegen z_0, wenn gilt:

$$\begin{aligned} &|z_n - z_0| \overset{n\to\infty}{\to} 0 \\ \overset{2.1}{\iff}\ &\mathrm{Re}(z_n) \overset{n\to\infty}{\to} \mathrm{Re}(z_0) \land \mathrm{Im}(z_n) \overset{n\to\infty}{\to} \mathrm{Im}(z_0) \end{aligned}$$

Außerdem ist (z_n) genau dann eine Cauchyfolge, wenn gilt:

$$\forall \varepsilon > 0 \exists n_0 \in \mathbb{N} \forall n, m \geq n_0 : |z_n - z_m| < \varepsilon$$

Also nach Cauchykriterium genau dann, wenn (z_n) konvergent ist.

Satz 16.1 (Produkte und Quotienten von Folgen)
Seien $(z_n), (w_n)$ Folgen in $\mathbb{C}$ mit $z_n \overset{n\to\infty}{\to} z_0, w_n \overset{n\to\infty}{\to} w_0$.

(1) Es gilt:
$$z_n w_n \overset{n\to\infty}{\to} z_0 w_0$$

(2) Ist $z_0 \neq 0$, so existiert ein $m \in \mathbb{N} : \forall n \geq m : z_n \neq 0$ und:
$$\frac{1}{z_n} \overset{n\to\infty}{\to} \frac{1}{z_0}$$

Beweis
Wie in Ana I. ∎

Definition
Sei (z_n) eine Folge in $\mathbb{C}$, $s_n := z_1 + \cdots + z_n (n \in \mathbb{N})$. (s_n) heißt **unendliche Reihe** und wird mit $\sum_{n=1}^{\infty} z_n$ bezeichnet.
$\sum_{n=1}^{\infty} z_n$ heißt genau dann **konvergent** (**divergent**), wenn (s_n) konvergent (bzw. divergent) ist. Im Konvergenzfall gilt:

$$\sum_{n=1}^{\infty} z_n := \limsup_{n \to \infty} s_n$$

Die Definitionen und Sätze der Paragraphen 11, 12, 13 aus Ana I gelten wörtlich auch in $\mathbb{C}$, bis auf diejenigen Definitionen und Sätze, in denen die Anordnung auf $\mathbb{R}$ eine Rolle spielt (z.B. das Leibniz- und das Monotoniekriterium).

Beispiele:

(1) Sei $z \in \mathbb{C}$. $\sum_{n=0}^{\infty} z^n$ heißt **geometrische Reihe**.
Fall 1: Ist $|z| < 1$, dann gilt:

$$\begin{aligned} & \sum_{n=0}^{\infty} |z|^n \text{ konvergiert} \\ \Longrightarrow & \sum_{n=0}^{\infty} z^n \text{ konvergiert absolut} \\ \Longrightarrow & \sum_{n=0}^{\infty} z^n \text{ konvergiert} \end{aligned}$$

Fall 2: Ist $|z| \geq 1$, dann gilt:

$$\begin{aligned} & |z|^n = |z^n| \overset{n \to \infty}{\not\to} 0 \\ \Longrightarrow & z^n \overset{n \to \infty}{\not\to} 0 \\ \Longrightarrow & \sum_{n=0}^{\infty} z^n \text{ divergiert} \end{aligned}$$

Ist $|z| < 1$, so zeigt man wie in $\mathbb{R}$:

$$\sum_{n=0}^{\infty} z^n = \frac{1}{1-z}$$

(2) Betrachte $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}$. Für alle $z \in \mathbb{C}$ gilt:

$$\begin{aligned} & \sum_{n=0}^{\infty} \frac{|z|^n}{n!} \text{ konvergiert} \\ \Longrightarrow & \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!} \text{ konvergiert absolut} \end{aligned}$$

Für alle $z \in \mathbb{C}$ definiere die (komplexe) **Exponentialfunktion** wie folgt:

$$e^z := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}$$

(3) Wie in Beispiel (2) sieht man, dass $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{z^{2n}}{(2n)!}$ und $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!}$ für alle $z \in \mathbb{C}$ absolut konvergieren.
Dadurch lassen sich auch **Cosinus** und **Sinus** auf ganz $\mathbb{C}$ definieren:

$$\cos z := \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{z^{2n}}{(2n)!}$$

$$\sin z := \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

Satz 16.2 (Eigenschaften von Exponentialfunktion, Cosinus und Sinus)
Seien $z, w \in \mathbb{C}, z = x + iy$ mit $x, y \in \mathbb{R}$. Es gilt:

(1) $e^{z+w} = e^z e^w$

(2) $e^{iy} = \cos y + i \sin y$, insbesondere ist: $|e^{iy}| = 1$

(3) $e^z = e^x e^{iy} = e^x(\cos y + i \sin y)$

(4) $\cos(z) = \frac{e^{iz}+e^{-iz}}{2}, \sin(z) = \frac{e^{iz}-e^{-iz}}{2i}$
Insbesondere ist für alle $t \in \mathbb{R} : \cos(it) = \frac{e^{-t}+e^t}{2}, \sin(it) = \frac{e^{-t}-e^t}{2i}$
Also sind Cosinus und Sinus auf $\mathbb{C}$ **nicht** beschränkt.

(5) $\forall k \in \mathbb{Z} : e^{z+2\pi ik} = e^z$

(6) $e^z = 1 \iff \exists k \in \mathbb{Z} : z = 2k\pi i$

(7) $e^{i\pi} + 1 = 0$

Beweis

(1) Wie in Ana I.

(2) Nachrechnen!

(3) Folgt aus (1) und (2).

(4) Nachrechnen!

(5) Es gilt:

$$\begin{aligned} e^{z+2k\pi i} &\overset{(1)}{=} e^z e^{2k\pi i} \\ &\overset{(2)}{=} e^z(\cos(2k\pi) + i \sin(2k\pi)) \\ &= e^z \end{aligned}$$

(6) Die Äquivalenz folgt aus Implikation in beiden Richtungen:

„$\Longleftarrow$“ Folgt aus (5) mit $z = 0$.

„$\Longrightarrow$“ Sei $z = x + iy$ mit $x, y \in \mathbb{R}$. Es gilt:

$$1 = e^z = e^x(\cos(y) + i \sin(y)) = e^x \cos(y) + ie^x \sin(y)$$

Daraus folgt:

$$\sin(y) = 0 \implies \exists j \in \mathbb{Z} : y = j\pi$$

Und damit:

$$\begin{aligned} 1 &= e^x \cos(j\pi) = e^x(-1)^j \\ \implies x &= 0 \wedge \exists k \in \mathbb{N} : j = 2k \end{aligned}$$

Also ist $z = i2k\pi$.

(7) Es gilt:

$$e^{i\pi} \overset{(2)}{=} \cos(\pi) + i\sin(\pi) = -1$$

■

Beispiel
Im Folgenden wollen wir alle $z \in \mathbb{C}$ bestimmen, für die $\sin(z) = 0$ ist. Es gilt:

$$\begin{aligned} \sin(z) = 0 &\overset{16.2(4)}{\iff} e^{iz} = e^{-iz} \\ &\overset{16.2(1)}{\iff} e^{2iz} = e^{-iz}e^{iz} = e^0 = 1 \\ &\overset{16.2(6)}{\iff} \exists k \in \mathbb{Z} : 2iz = i2k\pi \\ &\iff z = k\pi \end{aligned}$$

Der Sinus hat also nur reelle Nullstellen.

Definition
Sei (a_n) ein Folge in $\mathbb{C}$ und $z_0 \in \mathbb{C}$. $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z - z_0)^n$ heißt eine **Potenzreihe** (PR). Sei nun:

$$\rho := \limsup \sqrt[n]{|a_n|}$$

Dabei ist $\rho = \infty$, falls $\sqrt[n]{|a_n|}$ unbeschränkt ist. Dann heißt

$$r := \begin{cases} 0 & \text{, falls } \rho = \infty \\ \infty & \text{, falls } \rho = 0 \\ \frac{1}{\rho} & \text{, falls } 0 < \rho < \infty \end{cases}$$

der **Konvergenzradius** (KR) der PR.

Satz 16.3 (Konvergenz von Potenzreihen)
$\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z - z_0)^n$ und r seien wie oben.

(1) Ist $r = 0$, so konvergiert die PR **nur** für $z = z_0$.

(2) Ist $r = \infty$, so konvergiert die PR absolut für alle $z \in \mathbb{C}$.

(3) Sei $0 < r < \infty$. Es gilt:

(i) Ist $z \in \mathbb{C}$ und $|z - z_0| < r$, so konvergiert die PR absolut in z.

(ii) Ist $z \in \mathbb{C}$ und $|z - z_0| > r$, so divergiert die PR in z.

(iii) Ist $z \in \mathbb{C}$ und $|z - z_0| = r$, so ist keine allgemeine Aussage möglich.

Beweis
Wie in Ana I. ∎

Beispiele:

(1) Die PR $\sum_{n=0}^{\infty} z^n$ hat den KR $r = 1$ und es gilt:

$$\sum_{n=0}^{\infty} z^n \text{ konvergiert} \iff |z| < 1$$

(2) Die PR $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n^2}$ hat den KR $r = 1$. Für $|z| = 1$ gilt:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{|z|^n}{n^2} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n^2}$$

Also konvergiert $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n^2}$ absolut. Insgesamt gilt also:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n^2} \text{ konvergiert} \iff |z| \leq 1$$

(3) Die PR $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n}$ hat KR $r = 1$, divergiert in $z = 1$ und konvergiert in $z = -1$.

(4) Die PRen

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!} \qquad \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{2n}}{(2n)!} \qquad \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

haben jeweils KR $r = \infty$ (siehe 16.3).