Kapitel 8

Zufallsvektoren

8.1 Mehrstufige Zufallsexperimente

Oft besteht ein Zufallsexperiment aus einer Reihe von Vorgängen. Sei $(\Omega_i, \mathcal{A}_i, P_i)$ ein Wahrscheinlichkeitsraum für die Vorgänge $i = 1, \dots, n$.
Für das Gesamtexperiment wählen wir dann:
$\Omega = \Omega_1 \times \cdots \times \Omega_n$
$\mathcal{A} := \mathcal{A}_1 \otimes \cdots \otimes \mathcal{A}_n$
wobei $\mathcal{A}$ die sogenannte **Produkt-σ-Algebra** ist, d.h.
$\mathcal{A} = \sigma(\{A_1 \times \cdots \times A_n | A_i \in \mathcal{A}_i, i = 1 \dots n\})$

Bemerkung 8.1

a) $A_1 \times \cdots \times A_n$ nennt man **Rechteckmengen**.

b) Ist $\mathcal{A}_1 = \cdots = \mathcal{A}_n = \mathfrak{B} = \mathfrak{B}(\mathbb{R})$, so gilt:
$\mathfrak{B}(\mathbb{R}^n) := \underbrace{\mathfrak{B} \otimes \cdots \otimes \mathfrak{B}}_{n-mal} = \sigma(\{(-\infty, x_1] \times \cdots \times (-\infty, x_n] | x_i \in \mathbb{R}, i = 1, \dots, n\})$

Sei P nun ein Wahrscheinlichkeitsmaß auf $(\Omega, \mathcal{A})$. Für $A_i \in \mathcal{A}_i$ wird durch
$Q_i(A_i) := P(\Omega_1 \times \cdots \times \Omega_{i-1} \times A_i \times \Omega_{i+1} \times \cdots \times \Omega_n)$
auf (Ω_i, A_i) wieder ein Wahrscheinlichkeitsmaß definiert, die sogenannte **Randverteilung (Marginalverteilung)**, denn:

(i) $Q_i(\Omega_i) = P(\Omega) = 1$

(ii)
$$Q_i(\sum_{j=1}^{\infty} A_i^{(j)}) = P(\Omega_1 \times \cdots \times \Omega_{i-1} \times \sum_{j=1}^{\infty} A_i^{(j)} \times \Omega_{i+1} \times \cdots \times \Omega_n) =$$
$$= P(\sum_{j=1}^{\infty} (\Omega_1 \times \cdots \times \Omega_{i-1} \times A_i^{(j)} \times \Omega_{i+1} \times \cdots \times \Omega_n) = \sum_{j=1}^{\infty} Q_i(A_i^{(j)})$$

Damit P sinnvoll ist, sollte gelten $Q_i(A_i) = P_i(A_i) \quad \forall A_i \in \mathcal{A}, i = 1 \dots n$

8.2 Zufallsvariablen

Gegeben sei ein Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathcal{A}, P)$. Wir betrachten jetzt mehrere Zufallsvariablen.

Beispiel 8.1 n-mal würfeln $\Omega = \{1, \ldots, 6\}^n \quad \mathcal{A} = P(\Omega) \quad P(A) = \frac{|A|}{|\Omega|}$

$$X(\omega) = X((\omega_1, \ldots, \omega_n)) = \max_{i=1,\ldots,n} \omega_i$$

$$Y(\omega) = Y((\omega_1, \ldots, \omega_n)) = \min_{i=1,\ldots,n} \omega_i$$

$P(X = 3, Y = 3) = P(\{3, \ldots, 3\}) = \frac{1}{6^n}$

Definition 8.1 *Sei $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ ein Wahrscheinlichkeitsraum und $X_1, \ldots, X_n : \Omega \to \mathbb{R}$ Zufallsvariablen.*

*a) $X = (X_1, \ldots, X_n) : \Omega \to \mathbb{R}^n$ heißt **Zufallsvektor***

*b) Die **(gemeinsame) Verteilung** von X ist gegeben durch:*

$$P_X : \mathfrak{B}(\mathbb{R}^n) \to [0, 1) \quad P_X(B) := P(\{\omega \in \Omega | X(\omega) \in B\}), B \in \mathfrak{B}(\mathbb{R}^n)$$

*c) Die (gemeinsame) **Verteilungsfunktion** $F_X : \mathbb{R}^n \to [0, 1]$ ist definiert durch: $F_X(x_1, \ldots, x_n) = P(X_1 \leq x_1, \ldots, X_n \leq x_n)$*

Bemerkung 8.2 Wie im Fall $n = 1$ ist P_X durch F_X bestimmt.

Definition 8.2 *Sei $X = (X_1, \ldots, X_n) : \Omega \to \mathbb{R}^n$ ein Zufallsvektor.*

*a) X heißt **diskret**, falls es eine endliche oder abzählbare Menge $C = \{x_1, x_2, \ldots\} \subset \mathbb{R}^n$ gibt, so dass $P(X \in C) = 1$. Die Folge $\{p_X(k)\}_{k \in \mathbb{N}}$ mit $p_X(k) = P(X = x_k)$ heißt **(gemeinsame) Zähldichte**.*

*b) X heißt **absolutstetig**, falls es eine integrierbare Funktion $f_X : \mathbb{R}^n \to [0, \infty)$ (die gemeinsame Dichte) gibt mit:*

$$F_X(x_1, \ldots, x_n) = \int_{-\infty}^{x_n} \ldots \int_{-\infty}^{x_1} f_X(y_1, \ldots, y_n) dy_1 \ldots dy_n$$

Bemerkung 8.3

a) Ist $X = (X_1, \ldots, X_n)$ diskret bzw. stetig, so sind auch $X_1 \ldots X_n$ selbst diskret bzw. stetig und wir können die **Rand-(Marginal) Zähldichte (Dichte)** bestimmen:

$$P(X_i = x_i) = P(\{\omega | X(\omega) \in C, X_i(\omega_i) = x_i\}) = \sum_{\substack{y \in C \\ y_i = x_i}} P(X = y)$$

$$f_{X_i}(x_i) = \underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} \cdots \int_{-\infty}^{\infty}}_{(n-1) mal} f_X(y_1, \ldots, y_{i-1}, x_i, y_{i+1}, \ldots, y_n) dy_1 \ldots dy_{i-1} dy_{i+1} \ldots dy_n$$

$$\text{denn:} \quad F_{X_i}(x_i) = P(X_i \leq x_i) = \lim_{\substack{x_j \to \infty \\ (i \neq j)}} \underbrace{P(X_1 \leq x_1, \ldots, X_n \leq x_n)}_{= F_X(x_1, \ldots, x_n)} = \int_{-\infty}^{x_i} f_{X_i}(u) du$$

b) Ist X absolutstetig mit Dichte f_X, so ist die Verteilung von X gegeben durch:

$$P_X(B) := \int_B f_X(y) dy \qquad \forall\, B \in \mathfrak{B}(\mathbb{R}^n)$$

Beispiel 8.2 (Multinomialverteilung) Ein Experiment (z.B. Würfeln) hat r mögliche Ausgänge $E_1, \ldots, E_r$ mit jeweiliger Wahrscheinlichkeit $p_1, \ldots, p_r$, wobei $p_1 + \cdots + p_r = 1$.

$$\Omega = \{\omega = (\omega_1, \ldots, \omega_n) | w_i \in \{E_1, \ldots, E_r\}\}, \quad \mathcal{A} = \sigma(\Omega)$$

$X_i(\omega)$ sei die Anzahl der E_i-Ausgänge, $P(\{\omega_1, \ldots, \omega_n\}) := p_1^{X_1(\omega)} \cdot \cdots \cdot p_r^{X_r(\omega)}$
Sei nun $k_1, \ldots, k_n \in \mathbb{N}_0$ mit $k_1 + \cdots + k_n = n$.

$$\begin{aligned} P(X_1 = k_1, \ldots, X_n = k_n) &= p_1^{k_1} \cdots p_r^{k_r} \cdot \text{ Anzahl der } \omega_i \text{, bei denen } k_i \text{ Komponenten} \\ & \text{ den Wert } E_i \text{ haben, } i = 1 \ldots r \\ &= p_1^{k_1} \cdots p_r^{k_r} \cdot \frac{n!}{k_1! \cdots k_n!} \end{aligned}$$

Dies ist die Zähldichte der **Multinomialverteilung** $(M(n, r, p_1, \ldots, p_r)$.

Bemerkung 8.4 a) Für $r = 2$ erhalten wir die Binomialverteilung, also $M(n, 2, p, 1 - p) = B(n, p)$.

b) Die eindimensionalen Randverteilungen einer Multinomialverteilung sind binomialverteilt.

Beispiel 8.3 Der Zufallsvektor $X = (X_1, X_2)$ hat eine **bivariate Normalverteilung**, falls X absolut stetig ist mit Dichte

$$f_X(x_1, x_2) = \frac{1}{2\pi(|\Sigma|)^{\frac{1}{2}}} \exp\left(-\frac{1}{2}(\underline{x} - \underline{\mu})^\top \Sigma^{-1} (\underline{x} - \underline{\mu})\right)$$

$$\text{wobei:} \quad \underline{\mu} = (\mu_1, \mu_2)^\top \in \mathbb{R}^2,\ \Sigma = \begin{pmatrix} \sigma_1^2 & \sigma_{12} \\ \sigma_{12} & \sigma_2^2 \end{pmatrix},\ \sigma_1^2 > 0, |\sigma_{12}| < \sigma_1 \sigma_2$$

Schreibweise: $X \sim N(\underline{\mu}, \Sigma)$

Beispiel 8.4 Gegeben sei $X = (X_1, X_2)$ mit Dichte

$$f_{(X_1, X_2)}(x_1, x_2) = \begin{cases} 4x_1 x_2 & \text{für } 0 \leq x_1,\ x_2 \leq 1 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

Test: ($f_{(X_1,X_2)}$ Dichte)

$$\int_0^1 \int_0^1 4x_1x_2 \; dx_1dx_2 = \int_0^1 2x_2 \left[x_1^2\right]_0^1 \; dx_2 = x_2^2\Big|_0^1 = 1$$

Randdichte von X_1:

$$f_{X_1}(x_1) = \int_0^1 4x_1x_2 \, dx_2 = 2x_1 \left[x_2^2\right]_0^1 = 2x_1 \qquad \text{für } 0 \leq x_1 \leq 1$$

$$\begin{aligned}
P(X_1 \leq 2X_2) &= P\big((X_1, X_2) \in B\big) \\
&= \int_0^{\frac{1}{2}} \int_0^{2t_2} 4t_1t_2 \; dt_1dt_2 + \int_{\frac{1}{2}}^1 \int_0^1 4t_1t_2 \; dt_1dt_2 \\
&= \int_0^{\frac{1}{2}} 2t_2 \left[t_1^2\right]_0^{2t_2} \; dt_2 + \int_{\frac{1}{2}}^1 2t_2 \left[t_1^2\right] \; dt_2 \\
&= 2\left[t_2^4\right]_0^{\frac{1}{2}} + \left[t_2^2\right]_{\frac{1}{2}}^1 = \frac{7}{8}
\end{aligned}$$