

## 20. Affine Räume

Man möchte vom Anschauungsraum  $\mathbb{R}^3$  abstrahieren:

- statt  $\mathbb{R}$  **beliebige** Körper  $K$
- statt Dimension 3 **beliebige** Dimensionen  $< \infty$

**Aufgabe:** Finde die „richtige“ Verallgemeinerung der vertrauten **geometrischen** Begriffe, so dass bekannte geometrische Sätze richtig bleiben.

Im Folgenden sei  $K$  stets ein beliebiger Körper.

### 20.1. Grundbegriffe

**Definition:** Sei  $V$   $K$ -VRm mit  $\dim(V) = n < \infty$ .

- (a) Eine Menge  $A \neq \emptyset$  heißt **affiner Raum mit Richtungsvektorraum**  $V$ , falls  $(V, +)$  auf  $A$  operiert, d.h. es existiert eine Paarung „+“ genannt **Translation**  $V \times A \rightarrow A$ ,  $(x, P) \mapsto x + P$ , mit der Eigenschaft:

$$\forall P, Q \in A \exists_1 x \in V : Q = x + P$$

- (b) Elemente von  $A$  heißen **Punkte**.

Der zu gegebenen Punkten  $P, Q$  eindeutig bestimmte Vektor  $x$  mit  $Q = x + P$  heißt der **Translationsvektor von  $P$  nach  $Q$** .

Schreibe:  $x := \overrightarrow{PQ}$

- (c)  $\dim(A) := \dim(V)$  heißt **Dimension von  $A$** .

**Bemerkung:** (1) Vorsicht in (1) wird das Zeichen „+“ für verschiedene Verknüpfungen benutzt.

- (2) Es gilt für  $P, Q, R \in A$ :

$$\begin{aligned}\overrightarrow{PP} &= 0 \\ \overrightarrow{PQ} + \overrightarrow{QR} &= \overrightarrow{PR} \\ \overrightarrow{QP} &= -\overrightarrow{PQ}\end{aligned}$$

(3)  $A$  besteht aus genau einer Bahn:

$$\forall P \in A : A = V + P := \{x + P \mid x \in V\}$$

**Beispiel:** Der **affine Standardraum**  $\mathbb{A}_n(K)$  ist definiert als Punktmenge  $\mathbb{A} := K^n$  und  $V := K^n$ , mit Translation  $:=$  Addition in  $K^n$ , d.h. für  $P, Q \in K^n$  gilt:

$$\overrightarrow{PQ} = Q - P$$

**Definition:** Eine Teilmenge  $B \neq \emptyset$  eines affinen Raumes  $A$  heißt **(affiner) Teilraum** oder **lineare Varietät** von  $A$ , falls ein VRm  $U_B \leq V$  existiert, sodass  $B$  affiner Raum ist, mit Richtungsvektorraum  $U_B$  (unter der in  $A$  gegebenen Operation).

Auch  $B = \emptyset$  werde affiner Teilraum genannt.

Spezielle affine Teilräume  $B$  sind:

(a) **Gerade**  $\iff \dim(B) = 1$

(b) **Ebene**  $\iff \dim(B) = 2$

(c) **Hyperebene**  $\iff \dim(B) = \dim(A) - 1$

**Lemma:**

(1) Ist  $B \neq \emptyset$  affiner Teilraum, dann gilt:

$$U_B = \{\overrightarrow{PQ} \mid P, Q \in B\}$$

(2) Sind  $\emptyset \neq B \subseteq C$  affine Teilräume und  $\dim(B) = \dim(C)$ , dann ist  $B = C$ .

(3) Durch zwei Punkte  $P \neq Q$  in  $A$  geht genau eine Gerade.

$$PQ := K \cdot \overrightarrow{PQ} + P = \{\lambda \cdot \overrightarrow{PQ} + P \mid \lambda \in K\} \leq A$$

Diese wird die **Verbindungsgerade** von  $P$  und  $Q$  genannt.

(4) Drei Punkte  $P, Q, R \in A$  liegen genau dann auf **einer** Geraden, wenn gilt, dass  $\overrightarrow{PQ}$  und  $\overrightarrow{QR}$  linear abhängig sind.

**Beweis:** (1) „ $\supseteq$ “ ✓

„ $\subseteq$ “ Da  $B$  affiner Teilraum mit Richtung  $U_B$  ist, gilt für alle  $P, Q \in B$ :

$$\exists_1 x \in B : x = \overrightarrow{PQ} \iff x + P = Q$$

(2) Aus (1) folgt mit  $B \subseteq C$ , dass  $U_B \subseteq U_C$  gilt. Da diese die gleiche Dimension haben muss dann schon  $U_B = U_C$  gelten. Für  $P \in B \cap C$  gilt dann:

$$B = U_B + P = U_C + P = C$$

- (3) Es ist klar, dass  $P$  und  $Q$  auf der Geraden  $PQ$  liegen, daher muss lediglich die Eindeutigkeit gezeigt werden.

Sei  $B$  eine Gerade mit  $P, Q \in B$  und  $U := U_B$ . Da  $P \neq Q$  ist, ist  $\overrightarrow{PQ} \in U$  nicht der Nullvektor. Da außerdem  $\dim U = 1$  ist, gilt:

$$U = K \cdot \overrightarrow{PQ}$$

Daraus folgt:

$$B = U + P = PQ$$

- (4) Sei  $x := \overrightarrow{PQ}$  und  $y := \overrightarrow{QR}$ . Es existiert genau dann eine Gerade  $B$  mit  $P, Q, R \in B$ , wenn gilt:

$$\exists \text{ VRm } U : \dim U = 1, x, y \in U$$

Also genau dann, wenn  $x$  und  $y$  linear abhängig sind. ■

**Satz 25 (Teilraumkriterium):**

Sei  $A$  affiner Raum mit Richtung  $V$  und sei  $\emptyset \neq B \subseteq A$ . Dann sind äquivalent:

- (1)  $B$  ist affiner Teilraum.  
 (2) Es existieren  $P \in A$  und  $U \leq V$ , sodass gilt:

$$B = U + P$$

- (3) Falls  $|K| > 2$ , so ist auch äquivalent:

$$\forall P, Q \in B : P \neq Q \implies PQ \subseteq B$$

- (4) Falls  $A = \mathbb{A}_n(K)$ , so ist auch äquivalent, dass  $B$  Lösungsmenge eines LGS ist.

**Beweis:** Die Äquivalenz ergibt sich aus folgendem Ringschluss:

- (1)  $\implies$  (2) Ist  $B$  affiner Teilraum, so gilt:

$$\exists U \leq V : \forall P \in U : B = U + P$$

- (2)  $\implies$  (1)  $B = U + P$  ist affiner Teilraum, denn  $U$  operiert auf  $B$  und für  $Q, R \in B$  gilt:

$$\exists x, y \in U : Q = x + P, R = y + P \text{ und}$$

$$\exists_1 \text{ Translation } \overrightarrow{QR} = y - x \in U$$

Daraus folgt, dass  $U$  affiner Teilraum ist.

(1)  $\implies$  (3) Sei  $B$  affiner Teilraum mit  $P, Q \in B, P \neq Q$ . Dann gilt:

$$\begin{aligned}\overrightarrow{PQ} &\in U_B \\ \implies \forall \lambda \in K : \lambda \cdot \overrightarrow{PQ} + P &\in B \\ \implies PQ &\subseteq B\end{aligned}$$

(3)  $\implies$  (2) Setze  $U := \{\overrightarrow{PQ} \mid P, Q \in B\} \subseteq V$ .

**Zeige zunächst:** Für alle  $P \in B$  gilt:

$$U + P \subseteq B$$

D.h. für alle  $y \in U$  gilt:

$$y + P \in B$$

„ $\subseteq$ “ Sei also  $0 \neq y \in U$ , dann existiert ein  $Q \neq R \in B$ , sodass gilt:

$$y = \overrightarrow{QR}$$

Setze  $z := \overrightarrow{PQ}$ .

**Fall  $y, z$  linear abhängig:**

Aus dem Lemma folgt, dass  $P, Q, R$  auf der Geraden  $QR = \{\lambda \cdot y + P \mid \lambda \in K\} \stackrel{(3)}{\subseteq} B$  liegen. Insbesondere gilt:

$$y + P \in B$$

**Fall  $y, z$  linear unabhängig:**

Wähle  $\lambda \in K \setminus \{0, 1\}$ . Betrachte  $S := \frac{\lambda}{\lambda-1}y + P$ ,  $N := \lambda z + P$ .

Dann ist  $N \in PQ \subseteq B$ .

Annahme:  $N = R$ . Dann gilt:

$$\begin{aligned}N &= \lambda z + P \\ &= R \\ &= y + z + P\end{aligned}$$

Daraus folgt, dass  $y$  und  $z$  linear abhängig sind.  $\nmid$  Es gilt also  $N \neq R$ . Ferner gilt, dass  $S, N, R$  auf einer Geraden liegen, denn:

$$\overrightarrow{NR} = y + z - \lambda z = y + (1 - \lambda)z \text{ und}$$

$$\overrightarrow{SN} = \lambda z - \frac{\lambda}{1-\lambda}y = \frac{\lambda}{\lambda-1}((\lambda-1)z - y)$$

sind linear abhängig.

Aus  $N, R \in B$  folgt:

$$S \in NR \stackrel{(3)}{\subseteq} B$$

Außerdem gilt:  $S \neq P$ , also  $SP \in B$  und damit  $y + P \in B$

Es gilt sogar:  $B = U + P$ , da für alle  $Q \in B$  gilt:

$$Q = \overrightarrow{PQ} + P \in U + P$$

„ $\supseteq$ “ ✓**Es bleibt zu zeigen:**  $U \leq V$  (Untervektorraum)Seien  $x, y \in U, \alpha \in K$ . O.B.d.A lässt sich  $x \neq 0$  annehmen, etwa  $x = \overrightarrow{PQ}, P, Q \in B$ . Dann gilt:

$$\alpha x + P \in PQ \subseteq B \implies \alpha x \in U$$

Also genügt es zu zeigen, dass  $x + y$  in  $U$  liegt. Sei  $P' := x + P$ .Dann gilt mit  $x = \overrightarrow{PQ}$  und  $y + P \in U + P \subseteq B$ :

$$\begin{aligned} (x + y) + P &= x + (y + P) \in U + P' \subseteq B \\ \implies x + y &\in U \end{aligned}$$

■

## 20.2. Eigenschaften affiner Teilräume

### Lemma:

Sei  $I \neq \emptyset$  Indexmenge und  $(B_i)_{i \in I}$  eine Familie affiner Teilräume von  $A$ .Dann ist  $B := \bigcap_{i \in I} B_i$  affiner Teilraum von  $A$  mit Richtung  $U_B = \bigcap_{i \in I} U_{B_i}$ , falls  $B \neq \emptyset$ .**Beweis:** Sei  $B \neq \emptyset$ , dann existiert ein  $P \in \bigcap_{i \in I} B_i$ . Setze  $U := \bigcap_{i \in I} U_{B_i} \leq V$ .Dann gilt für ein  $Q \in A$ :

$$\begin{aligned} Q \in U + P &\iff \forall i \in I : Q \in U_{B_i} + P \\ &\iff Q \in \bigcap_{i \in I} B_i \\ &\iff Q \in B \end{aligned}$$

Daraus folgt:  $B = U + P$ 

■

**Definition:** Sei  $M$  Teilmenge von  $A$ ,  $C$  die Menge aller affinen Teilräume von  $A$ , die  $M$  enthalten.

Dann heißt:

$$[M] := \bigcap_{B \in C} B$$

die **affine Hülle** von  $M$ .Für  $M = \{P_1, \dots, P_m\}$  schreibe:  $[P_1, \dots, P_m] := [M]$ .**Beispiel:** Sei  $P \neq Q$ , dann ist  $[P, Q] = PQ$  die Gerade durch  $P$  und  $Q$ .

**Lemma:**

Seien  $P_0, \dots, P_m \in A$  und sei  $x_i := \overrightarrow{P_0 P_i} \in V$  für alle  $i \in \{1, \dots, m\}$ .

Dann gilt:

$$[P_0, \dots, P_m] = \langle x_1, \dots, x_m \rangle + P_0$$

Insbesondere ist  $\dim [P_0, \dots, P_m] \leq m$ .

Falls gilt:  $\dim [P_0, \dots, P_m] = m$  sagt man,  $P_0, \dots, P_m$  sind in **allgemeiner Lage**.

**Beweis:** „ $\subseteq$ “ Für alle  $i \in \{1, \dots, m\}$  gilt:

$$P_i = x_i + P_0 \subseteq \langle x_1, \dots, x_m \rangle + P_0$$

„ $\supseteq$ “ Sei  $\sum_{i=1}^m \alpha_i x_i + P_0 \in \langle x_1, \dots, x_m \rangle + P_0$ , und sei  $B \supseteq \{P_0, \dots, P_m\}$  beliebiger affiner Teilraum. Dann gilt:

$$\begin{aligned} \forall i \in \{1, \dots, m\} : x_i = \overrightarrow{P_0 P_i} \in U_B \\ \implies \sum_{i=1}^m \alpha_i x_i \in U_B \\ \implies \sum_{i=1}^m \alpha_i x_i + P_0 \in U_B + P_0 = B \end{aligned}$$

Da dies für einen beliebigen affinen Teilraum  $B$  gilt, der  $\{P_0, \dots, P_m\}$  enthält, gilt dies für alle solche Teilräume. Sei  $C$  die Menge aller affinen Teilräume die  $\{P_0, \dots, P_m\}$  enthalten. Dann folgt:

$$\begin{aligned} \forall B \in C : \sum_{i=1}^m \alpha_i x_i + P_0 \in B \\ \iff \sum_{i=1}^m \alpha_i x_i + P_0 \in \bigcap_{B \in C} B \\ \iff \sum_{i=1}^m \alpha_i x_i + P_0 \in [P_0, \dots, P_m] \end{aligned} \quad \blacksquare$$

**Satz 26:**

Seien  $A_1 := U_1 + P_1, A_2 := U_2 + P_2$  affine Teilräume von  $A$ . Dann gilt:

- (1)  $U_{[A_1 \cup A_2]} = U_1 + U_2 + \langle \overrightarrow{P_1 P_2} \rangle$
- (2)  $A_1 \cap A_2 \neq \emptyset \implies \dim([A_1 \cup A_2]) = \dim A_1 + \dim A_2 - \dim(A_1 \cap A_2)$   
 $A_1 \cap A_2 = \emptyset \implies \dim([A_1 \cup A_2]) = \dim A_1 + \dim A_2 - \dim(U_1 \cap U_2) + 1$

**Beweis:** (1) Sei  $y := \overrightarrow{P_1 P_2}$  und  $U := U_1 + U_2 + \langle y \rangle$ .

**Zu Zeigen:**  $U + P_1 = [A_1 \cup A_2]$ , d.h.  $U_{[A_1 \cup A_2]} = U$

„ $\subseteq$ “ Für einen beliebigen affinen Raum  $B \supseteq A_1 \cup A_2$  gilt:  $U_B \geq U_1, U_2, \langle y \rangle$ .  
Also gilt für  $x = x_1 + x_2 + \alpha y \in U$  mit  $x_1 \in U_1, x_2 \in U_2$ :

$$\begin{aligned} x &= x_1 + x_2 + \alpha y \in U_B \\ \implies x + P_1 &\in U_B + P_1 = B \\ \implies x + P_1 &\in \bigcap B = [A_1 \cup A_2] \end{aligned}$$

„ $\supseteq$ “ **Zu zeigen:**  $A_1 \cup A_2 \subseteq U + P_1$

$$\begin{aligned} A_1 &= U_1 + P_1 \subseteq U + P_1 \\ A_2 &= U_2 + P_2 = U_2 + y + P_1 \subseteq U + P_1 \end{aligned}$$

- (2) **Fall**  $A_1 \cap A_2 \neq \emptyset$ : Nach Lemma gilt  $U_{A_1 \cap A_2} = U_1 \cap U_2$ , und dass  $P_1 = P_2$  wählbar ist.

Daraus folgt  $U = U_1 + U_2$  (mit  $y = 0$ ). Also gilt:  $[A_1 \cup A_2] = U_1 + U_2 + P_1$  mit:

$$\begin{aligned} \dim [A_1 + A_2] &= \dim (U_1 + U_2) \\ &= \dim U_1 + \dim U_2 - \dim (U_1 \cap U_2) \\ &= \dim A_1 + \dim A_2 - \dim (A_1 \cap A_2) \end{aligned}$$

**Fall**  $A_1 \cap A_2 = \emptyset$ : Annahme:  $y \in U_1 + U_2$ .

Dann ist  $y = x_1 + x_2$  für ein  $x_1 \in U_1, x_2 \in U_2$ . Daraus folgt:

$$x_1 + P_1 = -x_2 + y + P_1 = -x_2 + P_2 \in A_1 \cap A_2 \not\subseteq$$

Also ist  $y \notin U_1 + U_2$ . Daraus folgt:

$$\dim U = \dim (U_1 + U_2) + 1$$

Der restliche Beweis erfolgt analog zum ersten Fall. ■

**Definition:** Affine Teilräume  $B, C$  von  $A$  heißen **parallel**, wenn gilt:

$$U_B \leq U_C \text{ oder } U_C \leq U_B$$

Schreibe:  $B \parallel C$ .

**Beispiel:** Man denke nicht nur an parallele Geraden oder Ebenen, sondern etwa auch an Gerade  $\parallel$  Ebene.

**Bemerkung:** (1) Auf den Teilräumen einer festen Dimension ist Parallelität eine Äquivalenzrelation.

(2) Aus  $B \parallel C$  folgt:  $(B \subseteq C) \vee (B \supseteq C) \vee (B \cap C = \emptyset)$

(3) Für alle  $P \in A$  und alle affinen Teilräume  $B \neq \emptyset$  existiert genau ein affiner Teilraum  $C$  mit:

(a)  $P \in C$

$$(b) \quad B \parallel C$$

$$(c) \quad \dim C = \dim B$$

**Beweis:** (1) Leichte Übung!

(2) Sei  $P \in B \cap C$  und o.B.d.A  $U_B \leq U_C$ . Dann gilt:

$$B = U_B + P \leq U_C + P = C$$

(3) Es muss  $C = U_B + P$  gelten, da aus b) und c) folgt:  $U_C = U_B$  ■

**Satz 27:**

Sei  $A$  affiner Raum mit  $\dim A = n > 1$ ,  $G \subseteq A$  Gerade und  $H$  Hyperebene in  $A$ .  
Dann gilt:

$$(1) \quad G \cap H = \emptyset \implies G \parallel H$$

$$(2) \quad G \not\parallel H \implies \exists P : G \cap H = \{P\}$$

**Bemerkung:**  $\dim G \cap H \leq \dim G = 1 \implies G \cap H = \begin{cases} \emptyset \\ \text{Punkt} \\ \text{Gerade} \end{cases}$

**Beweis:** (1) Sei  $G \cap H = \emptyset$ , dann ist  $G \cup H$  echte Obermenge von  $H$ . Es gilt also:

$$H \subsetneq G \cup H \subseteq [G \cup H]$$

Daraus folgt für die Dimensionen:

$$\begin{aligned} n - 1 &= \dim H < \dim[G \cup H] \leq n \\ &\implies \dim[G \cup H] = n \\ &\implies [G \cup H] = A \end{aligned}$$

Aus der Dimensionsformel für die affine Hülle folgt:

$$\begin{aligned} n &= \dim[G \cup H] \\ &= \dim G + \dim H - \dim(U_G \cap U_H) + 1 \\ &= n - \dim(U_G \cap U_H) + 1 \end{aligned}$$

Daraus folgt:

$$\begin{aligned} \dim(U_G \cap U_H) &= 1 = \dim U_G \\ &\implies U_G \cap U_H = U_G \\ &\implies U_G \subseteq U_H \\ &\implies G \parallel H \end{aligned}$$



- (2) Aus (1) folgt, dass  $G \cap H$  nicht die leere Menge ist, wenn  $G$  und  $H$  nicht parallel sind.

Sei nun  $G' := G \cap H$  eine Gerade. Dann gilt:

$$\begin{aligned} G' &\subseteq G \\ \implies G' &= G \\ \implies G &\subseteq H \\ \implies G &\parallel H \end{aligned}$$

Also kann  $G \cap H$  auch keine Gerade sein, wenn  $G$  und  $H$  nicht parallel sind. Mit der Vorbemerkung folgt daraus, dass  $G \cap H$  ein Punkt sein muss. ■

