§ 21.

Systeme von Differentialgleichungen 1. Ordnung

In diesem Paragraphen sei $D \subseteq \mathbb{R}^{n+1}$ und $f = (f_1, \dots, f_n) : D \to \mathbb{R}^n$. Für Punkte im $\mathbb{R}^{n+1}$ schreiben wir (x, y), wobei $x \in \mathbb{R}$ und $y = (y_1, ..., y_n) \in \mathbb{R}^n$.

Definition
Ein **System von Differentialgleichungen 1. Ordnung** hat die Form:

$$\begin{cases} y_1' = f_1(x, y_1, \dots, y_n) \\ y_2' = f_2(x, y_1, \dots, y_n) \\ \quad\vdots \\ y_n' = f_n(x, y_1, \dots, y_n) \end{cases} \qquad \text{oder kurz: } y' = f(x, y) \tag{i}$$

Wir betrachten auch noch das AwP

$$\begin{cases} y' = f(x, y) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases} \qquad (\text{wobei } (x_0, y_0) \in D) \tag{ii}$$

Satz 21.1 (Integralgleichung zur Lösbarkeit eines Anfangswertproblems)
Sei $I \subseteq \mathbb{R}$ ein Intervall, $D := I \times \mathbb{R}^n, x_o \in I, y_0 \in \mathbb{R}^n$ und $f : D \to \mathbb{R}^n$ sei stetig. Für $y \in C(I, \mathbb{R}^n)$ gilt:

$$y \text{ ist eine Lösung des AwP (ii)} \iff \forall x \in I : y(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(t, y(t))\mathrm{d}t$$

In diesem Fall ist $y \in C^1(I, \mathbb{R}^n)$.

Beweis
„$\Longrightarrow$" Es gilt: $y'(x) = f(x, y(x)) \forall x \in I$; da y und f stetig sind, folgt: $y' \in C(I, \mathbb{R})$. Weiter:

$$\int_{x_0}^{x} f(t, y(t))\mathrm{d}t = \int_{x_0}^{x} y'(t)\mathrm{d}t = y(x) - y(x_0) = y(x) - y_0 \quad \forall x \in I.$$

Bringt man y_0 auf die linke Seite, ergibt sich die Behauptung.

„$\Longleftarrow$" Es gelte für alle $x \in I$:

$$y(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(t, y(t))\mathrm{d}t$$

Aus dem zweiten Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung folgt: y ist auf I differenzierbar und

$$y'(x) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} \int_{x_0}^{x} f(t, y(t))\mathrm{d}t = f(x, y(x)) \quad \forall x \in I.$$

Also erfüllt y die Differentialgleichung. Klar: $y(x_0) = y_0$. Also löst y das AwP. ■

Definition
Sei $g : D \to \mathbb{R}^n$ eine Funktion.

(1) g genügt auf D einer **Lipschitz-Bedingung (LB) bezüglich** y, genau dann wenn gilt:

$$\exists L \geq 0 : \forall (x, y), (x, \bar{y}) \in D : \|g(x, y) - g(x, \bar{y})\| \leq L\|y - \bar{y}\|$$

(2) g genügt auf D einer **lokalen Lipschitz-Bedingung bezüglich** y, genau dann wenn für alle $a \in D$ eine Umgebung U von a existiert, sodass $g_{|D \cap U}$ auf $D \cap U$ einer LB bezüglich y genügt.

Satz 21.2 (Satz über die α-Norm)
Sei $I = [a, b] \subseteq \mathbb{R}, x_o \in I$ und für $y \in C(I, \mathbb{R}^n)$ sei $\|y\|_\infty := \max\{\|y(x)\| : x \in I\}$ wie in §17 (also ist $(C(I, \mathbb{R}^n), \|\cdot\|_\infty)$ ein Banachraum).

Sei $\alpha > 0$ mit $\varphi_\alpha(x) := e^{-\alpha|x - x_0|}$ $(x \in I)$.

Für $y \in C(I, \mathbb{R}^n)$ sei $\|y\|_\alpha := \max\{\varphi_\alpha(x) \cdot \|y(x)\| : x \in I\}$.

Dann:

(1) $\|\cdot\|_\alpha$ ist eine Norm auf $C(I, \mathbb{R}^n)$.

(2) Seien $c_1 := \min\{\varphi_\alpha(x) : x \in I\}$, $c_2 := \max\{\varphi_\alpha(x) : x \in I\}$. Es gilt:

$$c_1\|y\|_\infty \leq \|y\|_\alpha \leq c_2\|y\|_\infty \quad \forall y \in C(I, \mathbb{R}^n)$$

(3) Sei (g_k) eine Folge in $C(I, \mathbb{R}^n)$ und $g \in C(I, \mathbb{R}^n)$.

(i) Es gilt:

$$\begin{aligned} \|g_k - g\|_\alpha \overset{k\to\infty}{\to} 0 &\iff \|g_k - g\|_\infty \overset{k\to\infty}{\to} 0 \\ &\iff (g_k) \text{ konvergiert auf } I \text{ gleichmäßig gegen } g \end{aligned}$$

(ii) (g_k) ist eine Cauchy-Folge in $(C(I, \mathbb{R}^n), \|\cdot\|_\alpha)$, genau dann wenn (g_k) eine Cauchy-Folge in $(C(I, \mathbb{R}^n), \|\cdot\|_\infty)$ ist.

(iii) $(C(I, \mathbb{R}^n), \|\cdot\|_\alpha)$ ist ein Banachraum.

Beweis
(1), (2) Nachrechnen.

(3) (i) und (ii) folgen aus (2); (iii) folgt aus (i) und (ii). ■

Bezeichnung: EuE = Existenz und Eindeutigkeit.

Satz 21.3 (EuE-Satz von Picard-Lindelöf (Version I))
Sei $I = [a, b], x_o \in I, y_0 \in \mathbb{R}^n, D := I \times \mathbb{R}^n, f \in C(D, \mathbb{R}^n)$ und f genüge auf D einer LB bezüglich y. Dann ist das AwP

$$\begin{cases} y' = f(x, y) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases} \tag{ii}$$

auf I eindeutig lösbar.

Ist $g_0 \in C(I, \mathbb{R}^n)$ und (g_k) definiert durch

$$g_{k+1}(x) := y_0 + \int_{x_0}^{x} f(t, g_k(t))\mathrm{d}t \quad (x \in I, k \geq 0),$$

dann konvergiert (g_k) auf I gleichmäßig gegen die Lösung des AwPs (ii).

Beweis
Da f auf D einer Lipschitz-Bedingung genügt, gilt:

$$\exists L > 0 : \|f(x, y) - f(x, \bar{y})\| \leq L\|y - \bar{y}\| \quad \forall (x, y), (x, \bar{y}) \in D.$$

Es sei $\alpha := 2L$; φ_α und $\| \cdot \|_\alpha$ seien wie in 21.2, $X := C(I, \mathbb{R}^n)$. Definiere $F : X \to X$ durch

$$(F(y))(x) := y_0 + \int_{x_0}^{x} f(t, y(t))\mathrm{d}t$$

Für $y \in X$ gilt dann:

$$\begin{aligned} F(y) = y &\iff y(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(t, y(t))\mathrm{d}t \quad \forall x \in I \\ &\overset{21.1}{\iff} y \text{ löst das AwP (ii)} \end{aligned}$$

Wir zeigen: $\|F(y) - F(z)\| \leq \frac{1}{2}\|y - z\|_\alpha \quad \forall y, z \in X$. **Alle** Behauptungen folgen dann aus 17.2.

Seien $y, z \in X, x \in I$. Dann ist

$$\begin{aligned} \|(F(y))(x) - (F(z))(x)\| &= \left\| \int_{x_0}^{x} (f(t, y(t)) - f(t, z(t)))\ \mathrm{d}t \right\| \\ &\overset{12.4}{\leq} \left| \int_{x_0}^{x} \|f(t, y(t)) - f(t, z(t))\|\ \mathrm{d}t \right| \\ &\leq \left| \int_{x_0}^{x} L\|y(t) - z(t)\|\ \mathrm{d}t \right| \\ &= L \left| \int_{x_0}^{x} \|y(t) - z(t)\|\ \mathrm{d}t \right| \\ &= L \left| \int_{x_0}^{x} \|y(t) - z(t)\|\varphi_\alpha(t) \cdot \frac{1}{\varphi_\alpha(t)}\ \mathrm{d}t \right| \\ &\leq L \left| \int_{x_0}^{x} \|y - z\|_\alpha \cdot \frac{1}{\varphi_\alpha(t)}\ \mathrm{d}t \right| \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&\leq L\|y-z\|_\alpha \left| \int_{x_0}^{x} \frac{1}{\varphi_\alpha(t)}\, \mathrm{d}t \right| \\
&= \frac{L}{\alpha}\|y-z\|_\alpha \left(\frac{1}{\varphi_\alpha(x)} - 1 \right) \\
&\leq \frac{1}{2}\|y-z\|_\alpha \frac{1}{\varphi_\alpha(x)}
\end{aligned}
$$

Also gilt:

$$
\begin{aligned}
\|(F(y))(x) - (F(z))(x)\| &\leq \frac{1}{2}\|y-z\|_\alpha \frac{1}{\varphi_\alpha(x)} \quad \forall x \in I \\
\Longrightarrow \varphi_\alpha(x)\|(F(y))(x) - (F(z))(x)\| &\leq \frac{1}{2}\|y-z\|_\alpha \quad \forall x \in I
\end{aligned}
$$

Fazit: $\|F(y) - F(z)\|_\alpha \leq \frac{1}{2}\|y-z\|_\alpha$. ■

Frage: Warum haben wir in obigem Beweis nicht die $\|\cdot\|_\infty$-Norm benutzt?

$$
\begin{aligned}
\|(F(y))(x) - (F(z))(x)\| &\overset{\text{wie oben}}{\leq} L \left| \int_{x_0}^{x} \|y(t)-z(t)\| dt \right| \\
&\leq L \left| \int_{x_0}^{x} \|y-z\|_\infty dt \right| \\
&\leq L\|y-z\|_\infty \left| \int_{x_0}^{x} 1 \mathrm{d}t \right| \\
&= L\|y-z\|_\infty |x-x_0| \\
&\leq L(b-a)\|y-z\|_\infty \quad \forall x \in I
\end{aligned}
$$

Dann: $\|F(y) - F(z)\|_\infty \leq L(b-a)\|y-z\|_\infty$ I.A. wird $L(b-a)$ **nicht** kleiner 1 sein!

Beispiel (zu 21.3)
Zeige, dass das AwP

$$
\begin{cases} y' = 2x(1+y) \\ y(0) = 0 \end{cases}
$$

auf $\mathbb{R}$ genau eine Lösung hat.
Sei $a > 0$ und $I := [-a, a]; f(x,y) = 2x(1+y)$. Dann gilt $\forall x \in I, \forall y, \bar{y} \in \mathbb{R}:$

$$
\begin{aligned}
|f(x,y) - f(x,\bar{y})| &= |2xy - 2x\bar{y}| \\
&= 2|x||y-\bar{y}| \\
&\leq 2a|y-\bar{y}|.
\end{aligned}
$$

Aus 21.3 folgt dann: das Anfangswertproblem hat auf I genau eine Lösung $y : [-a,a] \to \mathbb{R}$. Setze nun $g_0(x) := 0$ und (g_k) sei definiert wie in 21.3. Induktiv sieht man (Übung!):

$$
g_k(x) = x^2 + \frac{x^4}{2!} + \frac{x^6}{3!} + \cdots + \frac{x^{2k}}{k!}
$$

Aus 21.3 folgt: (g_k) konvergiert auf I gleichmäßig gegen y.
Aus Analysis I folgt: (g_k) konvergiert auf I gleichmäßig gegen $e^{x^2} - 1$.
Also: Lösung des AwPs auf $[-a,a]$: $y(x) = e^{x^2} - 1$.
Es war $a > 0$ beliebig, also ist $y(x) = e^{x^2} - 1$ **die** Lösung des AwPs **auf** $\mathbb{R}$.

Ohne Beweis:

Satz 21.4 (EuE-Satz von Picard-Lindelöf (Version II))
Sei $I = [a, b] \subseteq \mathbb{R}, x_0 \in I, y_0 \in \mathbb{R}^n, s > 0$, es sei

$$D := \{(x, y) \in \mathbb{R}^{n+1} : x \in I, \|y - y_0\| \leq s\}$$

und $f \in C(D, \mathbb{R}^n)$. Weiter sei

$$M := \max\{\|f(x, y)\| : (x, y) \in D\} > 0$$

und f genüge auf D einer Lipschitz-Bedingung bezüglich y. Außerdem sei

$$J := I \cap [x_0 - \frac{s}{M}, x_0 + \frac{s}{M}]$$

Dann hat das AwP

$$\begin{cases} y' = f(x, y) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$$

auf J genau eine Lösung.

Ohne Beweis:

Satz 21.5 (EuE-Satz von Picard-Lindelöf (Version III))
Es sei $D \subseteq \mathbb{R}^{n+1}$ **offen**, $(x_0, y_0) \in D, f \in C(D, \mathbb{R}^n)$ und f genüge auf D einer **lokalen** LB bezüglich y.

Dann hat das AwP

$$\begin{cases} y' = f(x, y) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$$

genau eine Lösung.

(Nochmals, das heißt: Das AwP (ii) hat eine Lösung $y : J \to \mathbb{R}^n \quad (J \subseteq \mathbb{R}$ Intervall) und für je zwei Lösungen $\hat{y} : \hat{J} \to \mathbb{R}, \tilde{y} : \tilde{J} \to \mathbb{R}$ von (ii) gilt: $\hat{y} = \tilde{y}$ auf $\hat{J} \cap \tilde{J} \quad (\hat{J}, \tilde{J}$ Intervalle in $\mathbb{R}$))

Definition
Sei $y : J \to \mathbb{R}^n$ ($J \subseteq \mathbb{R}$ ein Intervall) eine Lösung des AwPs (ii).
y heißt **nicht fortsetzbar**, genau dann wenn aus $\hat{y} : \hat{J} \to \mathbb{R}^n$($\hat{J}$ ein Intervall in $\mathbb{R}$) ist Lösung von (ii) stets folgt, dass $\hat{J} \subseteq J$ und auf $\hat{J}$ $\hat{y} = y$ ist.

Satz 21.6 (Eindeutigkeit einer nicht fortsetzbaren Lösung)
Es seien $D, (x_0, y_0)$ und f wie in 21.5. Dann besitzt das AwP (ii) eine eindeutig bestimmte, nicht fortsetzbare Lösung.

Beweis
Es sei

$$\mathfrak{M} := \{(y, I_y) : I_y \subseteq \mathbb{R} \text{ Intervall}, x_0 \in I_y, y : I_y \to \mathbb{R}^n \text{ ist Lösung von (ii)}\}$$

Aus 21.5 folgt, dass $\mathfrak{M} \neq \emptyset$ ist und für $(y_1, I_{y_1}), (y_2, I_{y_2}) \in \mathfrak{M}$ gilt: $y_1 = y_2$ auf $I_{y_1} \cap I_{y_2}$.

$$I := \bigcup_{(y, I_y) \in \mathfrak{M}} I_y$$

ist ein Intervall. Definiere $y : I \to \mathbb{R}^n$ wie folgt: zu $x \in I$ existiert ein $(y_1, I_{y_1}) \in \mathfrak{M}$, sodass für $x \in I_{y_1}$ gilt: $y(x) := y_1(x)$.

Übung: $y : I \to \mathbb{R}^n$ leistet das Gewünschte. ∎