Kapitel 2

Garben und Divisoren

§ 9 $\mathcal{O}_X$-Modulgarben

Definition 9.1
Sei $(X, \mathcal{O}_X)$ ein lokal geringter Raum. Eine Garbe $\mathcal{F}$ von abelschen Gruppen auf X heißt $\mathcal{O}_X$-Modulgarbe, wenn gilt:

(i) $\mathcal{F}(U)$ „ist“ $\mathcal{O}_X(U)$-Modul für jedes offene $U \subseteq X$

(ii) $\rho^U_{U'} : \mathcal{F}(U) \to \mathcal{F}(U')$ ist $\mathcal{O}_X(U)$-Modul-Homomophismus für $U' \subseteq U \subseteq X$ offen (via $\mathcal{O}_X(U) \to \mathcal{O}_X(U')$)

Bemerkung
Die $\mathcal{O}_X$-Modulgarben auf X bilden eine Kategorie. Gegenbeispiel: $\mathcal{O}_X^\times$ ist *keine* $\mathcal{O}_X$-Modulgarbe.

Beispiele (für $\mathcal{O}_X$-Modulgarben)

1) Idealgarben
2) Sei X eine nichtsinguläre Kurve (über einem algebraisch abgeschlossenen Körper k), $D := \sum\limits_{\substack{P \in X \\ \text{(abg.)}}} n_P P$ ein Divisor. $\mathcal{O}_X$ soll die Garbe der regulären Differentiale auf X sein.

   Für $U \subseteq X$ offen sein $\mathcal{L}(D)(U) := \{f \in k(X) : \operatorname{div} f|_U + D|_U \geq 0\}$, das heißt für alle $P \in U$ gilt $\operatorname{ord}_P f \geq -m_P$.

   $\mathcal{L}(D)(U)$ ist $\mathcal{O}_X(U)$-Modul: für $g \in \mathcal{O}_X(U)$, $f \in \mathcal{L}(D)(U)$ und $P \in U$ ist $\operatorname{ord}_P(fg) = \operatorname{ord}_P(f) + \underbrace{\operatorname{ord}_P(g)}_{\geq 0}$

   $\Rightarrow \mathcal{L}(D)$ ist Modulgarbe
3) Sei X weiterhin nichtsinguläre Kurve.

   Erinnerung: Sei R ein Ring, A eine R-Algebra, M ein A-Modul, $\operatorname{Der}_R(A, M) = \{\delta : A \to M, R\text{-liniear}, \delta(f \cdot g) = f \cdot \delta(g) + g \cdot \delta(f)\}$.

   $$\text{Es gibt} \left\{ \begin{array}{ll} \Omega_{A/R} & A\text{-Modul} \\ d : \begin{array}{ccc} A & \to & \Omega_{A/R} \\ a & \mapsto & da \end{array} & \text{Derivation} \end{array} \right\} \text{sodass} \quad \begin{tikzcd} A \arrow[r] \arrow[dr, "\delta"'] & \Omega_{A/R} \arrow[d, dashed, "\exists!\varphi \\ A\text{-linear}"] \\ & M \end{tikzcd}$$

   $A = k[X]$

   $\Rightarrow \boxed{\Omega_{A/k} = A \cdot dX}$

   $\Omega_{k(X)/k} = k(X) \cdot dX$

   Es gilt: Ist X irreduzible Kurve, so ist $\Omega_{k(X)/k}$ 1-dimensionaler Vektorraum über $k(X)$ (Beispiel $y^2 = x^3 + ax + b \Rightarrow 2ydy = 3x^2dx + adx$)

Für $\omega \in \Omega_{k(X)/k}$ und $P \in X$ sei $\operatorname{ord}_P \omega$ wie folgt definiert: sei t_P ein Erzeuger von m_P (= maximales Ideal in $\mathcal{O}_{X,P}$)
$\Rightarrow \exists\ f_P \in k(X)$ mit $\omega = f_P dt_P$. Setze $\operatorname{ord}_P \omega := \operatorname{ord}_P f_P$
Für $\omega \in \Omega_{k(X)/k}$ sei $\operatorname{div} \omega := \sum\limits_{P \in X} \operatorname{ord}_P \omega$ (wobei $d(t_P - c) = dt_P$).
Für $U \subseteq X$ offen: $\Omega_X(U) := \{\omega \in \Omega_{k(X)/k} : \operatorname{div} \omega|_U \geq 0\}$
$\mathcal{O}_X$ ist $\mathcal{O}_X$-Modulgarbe, da $\operatorname{div}(f \cdot \omega) = \operatorname{div} f + \operatorname{div} \omega$.

Definition + Bemerkung 9.2
Sei $(X, \mathcal{O}_X)$ lokal geringter Raum, $\mathcal{F}, \mathcal{G}$ $\mathcal{O}_X$-Modulgarben.

a) $\mathcal{F} \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{G}$ sei die zur Prägarbe $U \mapsto \mathcal{F}(U) \otimes_{\mathcal{O}_X(U)} \mathcal{G}(U)$ assoziierte Garbe, $\mathcal{F} \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{G}$ ist eine $\mathcal{O}_X$-Modulgarbe.
b) Für $U \subseteq X$ offen sei
$$\mathcal{H}om(\mathcal{F}, \mathcal{G})(U) := \operatorname{Hom}_{\mathcal{O}_X|_U}(\mathcal{F}|_U, \mathcal{G}|_U)$$
Das ist eine $\mathcal{O}_X$-Modulgarbe.

Beweis
b) ...

Definition + Bemerkung 9.3
Sei $f : X \to Y$ ein Morphismus lokal geringter Räume

a) Für jede $\mathcal{O}_X$-Modulgarbe $\mathcal{F}$ auf X ist $f_*\mathcal{F}$ eine $\mathcal{O}_Y$-Modulgarbe.
b) Für jede $\mathcal{O}_Y$-Modulgarbe $\mathcal{G}$ auf Y ist $f^{-1}\mathcal{G}$ eine $f^{-1}\mathcal{O}_Y$-Modulgarbe und $f^*\mathcal{G} := f^{-1}\mathcal{G} \otimes_{f^{-1}\mathcal{O}_Y} \mathcal{O}_X$ eine $\mathcal{O}_X$-Modulgarbe.

Beweis

a) Für $U \subseteq Y$ offen ist $f_*\mathcal{F}(U) = \mathcal{F}(f^{-1}(U))$ ein $\mathcal{O}_X(f^{-1}(U))$-Modul, $f^\# : \mathcal{O}_Y \to f_*\mathcal{O}_X$ induziert $f^\#_U : \mathcal{O}_Y(U) \to f_*\mathcal{O}_X(U) = \mathcal{O}_X(f^{-1}(U))$. Dadurch wird $\mathcal{F}(f^{-1}(U))$ zu einem $\mathcal{O}_Y(U)$-Modul.
b) Zu Definition von $f^*\mathcal{G}$ wird Garbenhomomorphismus $f^{-1}\mathcal{O}_Y \to \mathcal{O}_X$ benötigt. $f^\# : \mathcal{O}_Y \to f_*\mathcal{O}_X$ induziert $f^{-1}\mathcal{O}_Y \to f^{-1}f_*\mathcal{O}_X \xrightarrow{1.14} \mathcal{O}_X$ $\square$

Erinnerung
$X = \operatorname{Spec} R$ affines Schema, $I \subseteq R$ Ideal, $f \in R$, $\tilde{I}(D(f)) = I \cdot R_f = I \cdot \mathcal{O}_X(D(f))$, $\tilde{I}$ heißt quasikohärente Idealgarbe.

Definition + Bemerkung 9.4

a) Sei $X = \operatorname{Spec} R$ affines Schema, M ein R-Modul. Dann sei $\tilde{M}$ die (!) Garbe auf X mit $\tilde{M}(D(f)) := M_f$ (der von M erzeugte Modul über R_f) für jedes $f \in R$. $\tilde{M}$ ist $\mathcal{O}_X$-Modulgarbe, $(\tilde{M})_\mathfrak{p} = M_\mathfrak{p}$ für jedes Primideal $\mathfrak{p} \in \operatorname{Spec} R$.
b) Sei X ein Schema. Eine $\mathcal{O}_X$-Modulgarbe $\mathcal{F}$ heißt ***quasikohärent***, wenn für jede affine Teilmenge $U = \operatorname{Spec} R \subseteq X$ ein R-Modul M_U existiert, sodass $\mathcal{F}|_U \cong \tilde{M}_U$.
c) $\mathcal{F}$ (wie in b)) ist genau dann quasikohärent, wennn es eine offene affine Überdeckung $U_i = \operatorname{Spec} R_i$ von X gibt mit $\mathcal{F}|_{U_i} \cong \tilde{M}_i$ für geeignete R_i-Moduln M_i.
d) Ist X noethersch, so heißt $\mathcal{F}$ ***kohärent***, wenn in b) (beziehungsweise c)) alle R-Moduln M_U endllich erzeugbar sind.

Beweis

c) Wie Übung 4, Aufgabe 3 $\square$

Bemerkung 9.5

Sei $X = \operatorname{Spec} R$ ein affines Schema.

Die Zuordnung $M \mapsto \tilde{M}$ ist ein kovarianter auf Objekten injektiver Funktor von der Kategorie R-Mod in $\mathcal{O}_X$-Mod; Umkehrfunktor: $\mathcal{F} \to \mathcal{F}(X)$.

Beweis

Sei $0 \to M' \to M \to M'' \to 0$ exakt.

Zu zeigen: $0 \to \tilde{M}' \to \tilde{M} \to \tilde{M}'' \to 0$ ist exakt.

Genügt zu zeigen:
$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \to & \tilde{M}'_\mathfrak{p} & \to & \tilde{M}_\mathfrak{p} & \to & \tilde{M}''_\mathfrak{p} & \to & 0 \\ & & \| & & \| & & \| & & \\ 0 & \to & M'_\mathfrak{p} & \to & M_\mathfrak{p} & \to & M''_\mathfrak{p} & \to & 0 \end{array}$$
exakt für jedes Primideal $\mathfrak{p}$ in $\operatorname{Spec} R$

Das stimmt! $\square$

Bemerkung 9.6

Sei $X = \operatorname{Spec} R$ affines Schema.

a) Für R-Moduln M und N gilt:

$$\tilde{M} \otimes_{\mathcal{O}_X} \tilde{N} \cong \widetilde{M \otimes_R N}$$

b) Für R-Moduln M_i, $i \in I$ gilt:

$$\bigotimes_{i \in I} \tilde{M}_i \cong \widetilde{\bigotimes_{i \in I} M_i}$$

Beweis

a) $(\widetilde{M \otimes_R N})_\mathfrak{p} = (M \otimes_R N)_\mathfrak{p} \cong M_\mathfrak{p} \otimes_{R_\mathfrak{p}} N_\mathfrak{p} = \tilde{M}_\mathfrak{p} \otimes_{R_\mathfrak{p}} \tilde{N}_\mathfrak{p} \cong (\tilde{M} \otimes_R \tilde{N})_\mathfrak{p}$

b) genauso $\square$

Bemerkung 9.7

Seien $X = \operatorname{Spec} R$, $Y = \operatorname{Spec} R'$ affine Schemata, $f : X \to Y$ Morphismen, $\alpha = f^\#_X : R' \to R$.

a) Für jeden R-Modul gilt:

$$f_* \tilde{M} =_\alpha \tilde{M} (= \text{der via } \alpha \text{ als } R'\text{-Modul aufgefasste } R\text{-Modul } M)$$

b) Für jeden R'-Modul N gilt:

$$f^* \tilde{N} \cong (\widetilde{N \otimes_{R'} R})$$

Beweis

a) Für $U \subseteq Y$ offen ist $f_* \tilde{M}(U) = \tilde{M}(f^{-1}(U))$; das wird durch $f^\#_U : \mathcal{O}_Y(U) \to \mathcal{O}_X(f^{-1}(U))$ zum $\mathcal{O}_Y(U)$-Modul (vergleiche 9.3 a)).

b) $f^* \tilde{N}(X) = f^{-1} \tilde{N}(X) \otimes_{f^{-1}\mathcal{O}_Y(X)} \mathcal{O}_X(X) = N \otimes_R R$; Entsprechendes gilt für jedes $U \subseteq X$ offen. $\square$

Proposition 9.8

Sei $f : X \to Y$ Morphismus von Schemata.

a) Ist $\mathcal{G}$ quasikohärent auf Y, so ist $f^* \mathcal{G}$ quasikohärent auf X.

b) Sind X und Y noethersch und ist $\mathcal{G}$ kohärent, so ist $f^*\mathcal{G}$ kohärent.

c) Ist X noethersch und $\mathcal{F}$ quasikohärent auf X, so ist $f_*\mathcal{F}$ quasikohärent auf Y.

Beweis

a) Œ $Y = \operatorname{Spec} R'$ affin, $\mathcal{G} = \tilde{N}$ für einen R'-Modul N. Œ $X = \operatorname{Spec} R$ affin. Damit folgt die Behauptung aus 9.7 b).

$x_1, \dots, x_n$ seien Erzeuger von N also R'-Modul $\Rightarrow x \in N$ hat Darstellung $\sum\limits_{i=1}^{n} a_i x_i$

Behauptung: $x_1 \otimes 1, \dots, x_n \otimes 1$ erzeugen $N \otimes_{R'} R$ als R-Modul

Sei $x \otimes a \in N \otimes_{R'} R, x = \sum a_i x_i \; (a_i \in R') \Rightarrow x \otimes a = a \cdot \sum a_i (x_i \otimes 1)$

b) Ist N endlich erzeugt als R'-Modul, so ist $N \otimes_{R'} R$ endlich erzeugt als R'-Modul.

c) Œ Y affin. Sei $U_1, \dots, U_r$ offene affine Überdeckung von X. Œ $U_i \cap U_j$ affin(!)? (Übung)

$$
\begin{array}{ccccccc}
0 & \to & f_*\mathcal{F} & \to & \bigoplus\limits_{i=1}^{r} f_*\mathcal{F}|_{U_i} & \to & \bigoplus\limits_{i<j} f_*\mathcal{F}|_{U_i \cap U_j} \\
 & & m & \mapsto & (m|_{u_i})_{i=1,\dots,r} & & \\
 & & & & (m)_{i=1,\dots,r} & \mapsto & (m_i|_{u_i \cap u_j} - m_j|_{u_i \cap u_j})_{i<j}
\end{array}
$$

ist exakt (weil $\mathcal{F}$ Garbe ist, weil f_* linksexakt ist) $\Rightarrow f_*\mathcal{F}$ ist als Kern einer Morphismus von quasikohärenten Garben selbst quasikohärent. □

§ 10 Lokal Freie Garben

Definition + Bemerkung 10.1
Sei $(X, \mathcal{O}_X)$ lokal geringter Raum, $\mathcal{F}$ eine $\mathcal{O}_X$-Modulgarbe.

a) $\mathcal{F}$ heißt ***frei*** vom Rang $n \geq 1$, wenn $\mathcal{F} \cong \mathcal{O}_X^n = \bigoplus\limits_{i=1}^{n} \mathcal{O}_X$.

b) $\mathcal{F}$ heißt ***lokal frei*** vom Rang n, wenn es eine offene Überdeckung $(U_i)_{i \in I}$ von X gibt, sodass $\mathcal{F}|_{U_i} \cong (\mathcal{O}_X|_{U_i})^n$ für jedes $i \in I$.

c) Ist X Schema, so sind lokal freie Garben quasikohärent (und sogar kohärent wenn X noethersch ist)

Beweis
c) Ist $U = \operatorname{Spec} R$, so ist $\mathcal{F}|_U$ frei vom Rang $n \Leftrightarrow \mathcal{F} \cong \tilde{R}^n$. □

Beispiel 10.2
Sei X nichtsinguläre Kurve (über $k\ldots$) und D ein Divisor auf X. Dann ist $\mathcal{L}(D)$ lokal frei vom Rang 1: Übung 9, Aufgabe 3b)
$\mathcal{L}(D)(U) = \{f \in k(X) : \operatorname{div}(f|_U) + D|_U \geq 0\}$

Beispiel
Sei X nichtsinguläre Kurve$/k$, k algebraisch abgeschlossen, $\mathcal{L}$ lokal freie Garbe vom Rang 1 auf X, $\mathcal{L} \subseteq k(X)$ (konstante Garbe) $\Rightarrow \exists$ Divisor auf X mit $\mathcal{L} \cong \mathcal{L}(D)$

Denn: Sei $(U_i)_{i=1,\ldots,r}$ offene Überdeckung von X mit $\mathcal{L}|_{U_i} \cong \mathcal{O}_X|_{U_i}$, $i = 1, \ldots, r$
Nach Voraussetzung ist dann $\mathcal{L}(U_i) = f_i \cdot \mathcal{O}_X(U_i)$ für ein $f_i \in k(X)$. Setze $D|_{U_i} := \operatorname{div}(\frac{1}{f_i})$
Behauptung: Auf $U_i \cap U_j$ ist $\operatorname{div}(\frac{1}{f_i}) = \operatorname{div}(\frac{1}{f_j})$
Äquivalent: $\frac{f_i}{f_j} \in \mathcal{O}_X(U_i \cap U_j)^*$
denn: $\mathcal{L}(U_i \cap U_j) = f_i \mathcal{O}_X(U_i \cap U_j) = f_i \mathcal{O}_X(U_i \cap U_j)$

Beispiel 10.3
Sei X eine Mannigfaltigkeit (reelle, differenzierbare, komplexe) und $\mathcal{O}_X$ die Garbe der stetigen (differenzierbaren, holomorphen) Funktionen auf X. Sei E eine weitere Mannigfaltigkeit, $p : E \to X$ eine stetige (differenzierbare, holomorphe) Abbildung.

(E, p) heißt ***Vektorbündel*** vom Rang n über X, wenn es eine offene Überdeckung (U_i) von X gibt und Isomorphismen $\varphi_i : p^{-1}(U_i) \to U_i \times \mathbb{R}^n$ sodass

$$\begin{tikzcd}
p^{-1}(U_i) \arrow[rr, "\varphi_i"] \arrow[dr, "p"'] & \arrow[d, phantom, "///"] & U_i \times \mathbb{R}^n \arrow[dl, "\mathrm{pr}_{U_i}"] \\
& U_i &
\end{tikzcd}$$

mit $p = \mathrm{pr}_{U_i} \circ \varphi_i$, sodass für alle i, j gilt: $\varphi_i \circ \varphi_j^{-1} : (U_i \cap U_j) \times \mathbb{R}^n \to (U_i \cap U_j) \times \mathbb{R}^n$ induziert für jedes $x \in U_i \cap U_j$ eine lineare Abbildung $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, die stetig (differenzierbar, holomorph) von x abhängt, das heißt $\varphi_i \circ \varphi_j^{-1} \in \mathrm{GL}_n(\mathcal{O}_X(U_i \cap U_j))$.

Sei $\mathcal{E}$ die Garbe der Schnitte in E, das heißt $\mathcal{E}(U) = \{s : U \to E$ stetig (differenzierbar, holomorph) $: p \circ s = \mathrm{id}_U\}$. $\mathcal{E}$ ist lokal frei vom Rang n.

Denn: Für jedes $i \in I$ ist $\mathcal{E}(U_i) = \{s : U_i \to \mathbb{R}^n \text{ stetig (differenzierbar, holomorph)}\} = (\mathcal{O}_X(U_i))^n \Rightarrow \mathcal{E}|_{U_i} \cong (\mathcal{O}_X|_{U_i})^n$

Umgekehrt: Sei $\mathcal{E}$ lokal frei vom Rang n auf X. Sei $U_i \subset X$ offen, $\varphi_i : \mathcal{E}|_{U_i} \to (\mathcal{O}_X|_{U_i})^n$ Isomorphismus ($i \in I$, (U_i) Überdeckung).

Für $i, j \in I$ und $x \in U_i \cap U_j$ ist die induzierte Abbildung $(\varphi_i \circ \varphi_j^{-1})_x : \kappa_x^n \to \kappa_x^n$ ein Isomorphismus von $\kappa(x)$-Vektorraum ($\kappa(x) = \mathbb{R}$ beziehungsweise $\mathbb{C}$).

$\Rightarrow (\varphi_i \circ \varphi_j^{-1})_x \in \mathrm{GL}_n(\overset{\mathbb{C}}{\mathbb{R}})$ und $\varphi_i \circ \varphi_j^{-1} \in \mathrm{GL}_n(\mathcal{O}_X(U_i \cap U_j))$

Sei $E_i := U_i \times \mathbb{R}^n$. Verklebe E_i und E_j über $(U_i \cap U_j) \times \mathbb{R}^n$ via $\varphi_i \circ \varphi_j^{-1}$. Erhalte E!

Definition 10.4
Sei $(X, \mathcal{O}_X)$ ein Schema, $p : E \to X$ ein Morphismus von Schemata.

(E, p) heißt (geometrisches) ***Vektorbündel*** über X, wenn es eine offene Überdeckung $(U_i)_{i \in I}$ von X gibt und Isomorphismen $\varphi_i : p^{-1}(U_i) \to \mathbb{A}_{\mathbb{Z}}^n \times_{\operatorname{Spec} \mathbb{Z}} U_i$, sodass für alle i, j und für alle offenen affinen Teilmengen $\underset{= \operatorname{Spec} R}{U} \subseteq U_i \cap U_j$ gilt:

$\varphi_i \circ \varphi_j^{-1}|_{\mathbb{A}_U^n}$ wird vone einem linearen Automorphismus α_{ij} von $R[X_1, \ldots, X_n]$, das heißt $\alpha_{ij}(a) = a$ für alle $a \in R$ und $\alpha_{ij}(x) = \sum_{j=1}^n a_{ij} X_j$ für gewisse $a_{ij} \in R$ ($\Leftrightarrow \alpha_{ij}$ ist R-Algebra-Homomorphismus), induziert.

Anmerkung: $\mathbb{A}_U^n = \operatorname{Spec} R[X_1, \ldots, X_n]$

Proposition 10.5
Sei X ein Schema. Die Isomorphieklassen von lokal freien Garben vom Rang n auf X ensprechen bijektiv den Isomorphieklassen von Vektorbündeln vom Rang n über X.

Beweis
Analog Beispiel 10.3; Übung? □

Definition + Proposition 10.6
Sei $(X, \mathcal{O}_X)$ lokal geringter Raum, $\mathcal{E}$ lokal freie Garbe vom Rang n auf X.

a) $\mathcal{E}^* = \mathcal{H}om_{\mathcal{O}_X}(\mathcal{E}, \mathcal{O}_X)$ ist lokal freie Garbe vom Rang n, sie heißt zu $\mathcal{E}$ ***duale*** Garbe.
b) $(\mathcal{E}^*)^* \cong \mathcal{E}$
c) Für jede $\mathcal{O}_X$-Modulgarbe $\mathcal{F}$ ist $\mathcal{H}om_{\mathcal{O}_X}(\mathcal{E}, \mathcal{F}) \cong \mathcal{E}^* \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{F}$.
d) Ist $\mathcal{E}'$ eine weitere lokal freie Garbe vom Rang m, so ist $\mathcal{E} \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{E}'$ lokal frei vom Rang $n \cdot m$.
e) Ist $f : Y \to X$ Morphismus lokal geringter Räume, so ist $f^*\mathcal{E}$ lokal frei vom Rang n auf Y.

Beweis
a) Lokal ist $\mathcal{E} \cong \mathcal{O}_X^n$ und $\mathcal{H}om(\mathcal{O}_X^n, \mathcal{O}_X) \cong \mathcal{O}_X^n$.
b) Wie in Lineare Algebra I
c) Für $U \subseteq X$ offen ist

$$\begin{array}{rcl} (\mathcal{E}^* \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{F})(U) = \mathrm{Hom}(\mathcal{E}|_U, \mathcal{O}_X|_U) \otimes_{\mathcal{O}_X(U)} \mathcal{F}(U) & \cong & \mathrm{Hom}(\mathcal{E}|_U, \mathcal{F}|_U) = \mathcal{H}om_{\mathcal{O}_X}(\mathcal{E}, \mathcal{F})(U) \\ l \otimes v & \mapsto & v \mapsto (x \mapsto l(x)v) \end{array}$$

d) $\mathcal{O}_X^n \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{O}_X^m \cong \mathcal{O}_X^{n \cdot m}$
e) Ist $U \subseteq X$ offen mit $\mathcal{E}|_U = (\mathcal{O}_X|_U)^n$, so ist $f^*\mathcal{E}(f^{-1}(U)) = (f^{-1}\mathcal{O}_X|_U \otimes_{f^{-1}\mathcal{O}_X|_U} \mathcal{O}_Y)(f^{-1}(U)) = (\mathcal{O}_Y(f^{-1}(U)))^n$ □

Bemerkung + Definition 10.7
Sei $(X, \mathcal{O}_X)$ lokal geringter Raum.

a) Für jede lokal freie Garbe $\mathcal{L}$ auf X von Rang 1 gilt:

$$\mathcal{L} \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{L}^* \cong \mathcal{O}_X$$

b) Die Isomorphieklassen von lokal freien Garben vom Rang 1 auf X bilden eine Gruppe $\mathrm{Pic}(X)$ (***Picard-Gruppe*** von X).

c) Eine $\mathcal{O}_X$-Modulgarbe $\mathcal{L}$ auf X heißt ***invertierbar***, wenn sie lokal frei vom Rang 1 ist.

Beweis

a) Nach 10.6 c) ist $\mathcal{L} \otimes \mathcal{L}^* \cong \mathrm{Hom}_{\mathcal{O}_X}(\mathcal{L}, \mathcal{L})$. Sei $\varphi : \mathcal{O}_X \to \mathrm{Hom}_X(\mathcal{L}, \mathcal{L})$ gegeben durch $1 \mapsto \mathrm{id}$. φ ist injektiver Morphismus von Garben.

   φ ist surjektiv, da φ_X surjektiv ist für jedes $x \in X$: sei dazu $\alpha \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{O}_X}(\mathcal{L}_X, \mathcal{L}_X)$ und $(U, \tilde{\alpha})$ Vertreter von α, sodass $\mathcal{L}|_U = \mathcal{O}_X|_U$. Dann ist $\tilde{\alpha}$ durch $\tilde{\alpha}(1) \in \mathcal{L}(U) = \mathcal{O}_X(U)$ bestimmt $\Rightarrow \tilde{\alpha} = \tilde{\alpha}(1) \cdot \mathrm{id} \in \mathrm{Bild}\,\varphi_U$. □

§ 11 Divisoren

Sei X ein noethersches, $\underbrace{\text{irreduzibles, reduziertes}}_{=:\ \text{integer (engl. integral)}}$ Schema.

Definition + Bemerkung 11.1

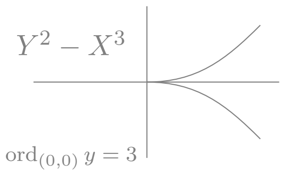
a) Ein ***Primdivisor*** auf X ist ein integres abgeschlossenes Unterschema der Kodimension 1.

b) Die freie abelsche Gruppe $\operatorname{Div}(X)$, die von den Primdivisoren erzeugt wird, heißt die gruppe der ***Weil-Divisoren***.

c) Ist X eine Kurve über einem algebraisch abgeschlossenen Körper, so sind die Primdivisoren die abgeschlossenen Punkte auf X.

d) Sei W ein Primdivisor auf X, η_W der generische Punkt von W, $\mathcal{O}_{X,W} = \mathcal{O}_{X,\eta_W}$ ($\dim \mathcal{O}_{X,W} = 1$). Für $f \in \mathcal{O}_{X,W} \setminus \{0\}$ sei $\operatorname{ord}_W(f) := \dim_{\kappa(W)} \mathcal{O}_{X,W}/(f)$. Für $f = \frac{g}{h} \in K = k(X) = \operatorname{Quot}(\mathcal{O}_{X,W})$ sei $\operatorname{ord}_W(f) = \operatorname{ord}_W(g) - \operatorname{ord}_W(h)$ (wohldefiniert).

Es gilt: $\operatorname{ord}_W(f \cdot g) = \operatorname{ord}_W(f) + \operatorname{ord}_W(g)$.



$$k[X,Y]/(y^2 - x^3)_{(x,y)}/(y) = k \cdot \overline{1} + k \cdot \overline{x} + k \cdot \overline{x}^2 \rightsquigarrow \operatorname{ord}_{(0,0)} x = 2$$

e) Für $f \in k^\times$ sei $\operatorname{div}(f) := \sum_{W \text{Primdiv.}} \operatorname{ord}_W(f) \cdot W$; $\operatorname{div}(f)$ ist Divisor.

f) $\operatorname{Cl}(X) := \operatorname{Div}(X) / \underbrace{\operatorname{Div}_H(X)}_{\text{Hauptdivisoren}}$ heißt ***Weil-Divisorengruppe*** von X.

Beispiel 11.2

$X = \mathbb{P}^n_{\mathbb{Z}} = \operatorname{Proj} \mathbb{Z}[X_0, \dots, X_n]$

Jeder Primdivisor W auf $\mathbb{P}^n$ ist von der Form $W = V(F)$ für ein irreduzibles homogenes Polynom $F \in \mathbb{Z}[X_0, \dots, X_n]$. Sei $d := \deg F$.

Behauptung: $W - d \cdot H$ ist hauptdivisor für $H := V(X_0)$

denn: $\frac{F}{X_0^d} \in K = k(X)$, $\operatorname{div} \frac{F}{X_0^d} = W - d \cdot H \Rightarrow \operatorname{Cl}(\mathbb{P}^n) \cong \mathbb{Z}$ (als Gruppe)

Proposition 11.3

Sei R faktorieller Ring, $X = \operatorname{Spec} R$. Dann ist $\operatorname{Cl}(X) = 0$.

Beweis

Sei W Primdivisor, also $W = V(\mathfrak{p})$ für ein Primideal $\mathfrak{p}$ der Höhe 1.

Behauptung: $\mathfrak{p}$ ist Hauptideal

Dann ist $\mathfrak{p}(f)$ für ein Primideal $f \in R \Rightarrow \operatorname{div}(f) = W$

Beweis der Behauptung: Sei $0 \neq f \in \mathfrak{p}$, $f = f_1 \cdot \ldots \cdot f_r$ die Primfaktorzerlegung $\Rightarrow$ Œ $f_1 \in \mathfrak{p} \Rightarrow (0) \subsetneq (f_1) \subseteq \mathfrak{p}$ ist Primidealkette $\xRightarrow[\operatorname{ht}(\mathfrak{p})=1]{} \mathfrak{p} = (f_1)$ □

Beispiel
Sei $R = {}^{k[X,Y]}\!/\!_{(Y^2 - X^3 + X)} = k[E]$, $E = V(Y^2 - X^3 + X) \subseteq \mathbb{A}_k^2$. Dann ist für $P \in E$ abgeschlossen $1 \cdot P$ kein Hauptdivisor!

Definition + Bemerkung 11.4
Sei X ein integres Schema, $K = k(X)$, der Funktionenkörper von X.

a) Ein ***Cartier-Divisor*** auf X ist eine Äquivalenzklasse von Familien $(U_i, f_i)_{i \in I}$, wobei $(U_i)_{i \in I}$ offene Überdeckung von X, $f_i \in K^\times$, sodass $\frac{f_i}{f_j} \in \mathcal{O}_X(U_i \cap U_j)^\times$. Dabei sei $(U_i, f_i)_{i \in I} \sim (V_j, g_j)_{j \in J} :\Leftrightarrow \frac{f_i}{g_j} \in \mathcal{O}_X(U_i \cap V_j)$.
b) Die Cartier-Divisoren auf X bilden eine Gruppe $\mathrm{CaDiv}(X)$ mit folgender Verknüpfung: Seien $D_1 = (U_i, f_i), D_2 = (V_j, g_j) \in \mathrm{CaDiv}(X)$, $(W_k)_k$ gemeinsame Verfeinerung, also $I = J$, $U_i = V_i$, $D_1 + D_2 := (U_i, f_i \cdot g_i)_{i \in I}$.
c) $\mathrm{CaDiv}(X) \cong {}^{\mathcal{K}_X^\times}\!/\!_{\mathcal{O}_X^\times}(X)$, wobei $\mathcal{K}_X^\times$ die konstante Garbe $K^\times$ sei.
d) $D \in \mathrm{CaDiv}(X)$ heißt ***Haptdivisor***, wenn es einen Vertreter von D der Form (X, f) gibt.

$$\mathrm{CaCl}(X) := {}^{\mathrm{CaDiv}}\!/\!_{\mathrm{CaDiv}_H}(X)$$

Beweis

c) Sei $D = (U_i, f_i)_i \in \mathrm{CaDiv}(X)$, U_i *klein*. Für $i \in I$ sei $\varphi_i \in {}^{K^\times}\!/\!_{\mathcal{O}_X}(U_i) = {}^{\mathcal{K}_X^\times}\!/\!_{\mathcal{O}_X^\times}(U_i)$ die Restklasse von f_i. φ_i ist durch D eindeutig bestimmt.

Auf $U_i \cap U_j$ ist $\varphi_i = \varphi_j \Rightarrow \exists \varphi \in {}^{K_X^\times}\!/\!_{\mathcal{O}_X^\times}(X)$ mit $\varphi|_{U_i} = \varphi_i$

Sei umgekehrt $\varphi \in {}^{\mathcal{K}_X^\times}\!/\!_{\mathcal{O}_X^\times}(X)$. Für $x \in X$ sei $(U_x, \varphi^{(x)})$ Vertreter von $\varphi_x \in (\mathcal{K}^\times, \mathcal{O}^\times)_x$ (U_x Umgebung von $x \in K^\times$)

$\Rightarrow (U_x, \varphi^{(x)})_{x \in X}$ ist Cartier-Divisor. □

Beispiel
Sei $X = \mathbb{P}_k^n$, k Körper, $U_i = D(X_i)$, $i = 0, \ldots, n$, $f_i := \frac{X_0}{X_i}$, $f_0 := 1$.
Behauptung: (U_i, f_i) ist Cartier-Divisor
Denn: Für $i \neq 0 \neq j$ ist $\frac{f_i}{f_j} = \frac{X_j}{X_i} \in \mathcal{O}_X(U_i \cap U_j)^\times$.

$\frac{f_i}{f_0} = \frac{X_0}{X_i} \in \mathcal{O}_X(U_0 \cap U_i)$
$\mathrm{div}(f_i)|_{U_i} = V(X_0)$
$(U_i, f_i)_{i=0,\ldots,n}$ „induziert" also den Weil-Divisor $V(X_0)$.

Satz 3
Sei X noethersches intetegres separiertes Schema. Dann gilt:

a) $\mathrm{CaCl}(X) \cong \mathrm{Pic}(X)$
b) Es gibt natürlichen Homomophismus $\alpha : \mathrm{CaCl}(X) \to \mathrm{Cl}(X)$.
c) Ist $\mathcal{O}_{X,x}$ faktoriell für jedes $x \in X$, so ist α Isomorphismus.

Beweis

b) Sei $D = (U_i, f_i) \in \mathrm{CaDiv}(X)$, W Primdivisor auf X. Wähle i mit $U_i \cap W \neq \emptyset$. Setze $n_W := \mathrm{ord}_W(f_i)$.

n_W *ist wohldefininiert:* Sei $j \in I$ mit $U_j \cap W \neq \emptyset \xRightarrow{W \text{ irred.}} U_i \cap U_j \cap W \neq \emptyset$, $\frac{f_i}{f_j} \in \mathcal{O}_X(U_i \cap U_j)^\times \Rightarrow (f_i) = (f_j)$ in $\mathcal{O}_{X,W} \Rightarrow \mathrm{ord}_W(f_i) = \mathrm{ord}_W(f_j)$

Œ I endlich, da X noethersch $\Rightarrow D = \sum_{W \text{ Primid.}} n_W W$ ist Weil-Divisor

c) Umkehrabbildung zu α

Behauptung: Zu jedem Weil-Divisor $D = \sum n_W W$ auf X gibt es Überdeckung $(U_i)_i$ von X und $f_i \in K^\times$ mit $D|_{U_i} = \operatorname{div}(f_i)|_{U_i}$.

Dann gilt: $\beta(D) := (U_i, f_i)$ ist Cartier-Divisor.

Denn: $\operatorname{div}(f_i)|_{U_i \cap U_j} = \operatorname{div}(f_j)|_{U_i \cap U_j} = D|_{U_i \cap U_j} \Rightarrow \frac{f_i}{f_j} \in \mathcal{O}_X(U_i \cap U_j)^\times$

Beweis der Behauptung: Œ $X = \operatorname{Spec} R$. Sei $\xi \in X$ abgeschlossener Punkt.

$\Rightarrow \mathcal{O}_{X,\xi} = R_{m_\xi}$ (nach Voraussetzung faktoriell!)

Für jeden Primdivisor $W = V(\mathfrak{p})$ von X gilt: $\xi \in W \Leftrightarrow \mathfrak{p} \subseteq m_\xi$

Da $\operatorname{ht}(\mathfrak{p}) = 1$ ist nach 11.3 $\mathfrak{p} \cdot \mathcal{O}_{X,\xi} = \underset{\in K^\times}{(f_w)}$ ein Hauptideal. Sei $f_\xi := \prod_{\xi \in W} f_W^{n_W}$ und $U_\xi := X - \bigcup_{\substack{W \text{ Primid.} \\ \xi \notin W \\ n_W \neq \operatorname{ord}_W f_\xi}} W$

a) Sei $D = (U_i, f_i) \in \operatorname{CaDiv}(X)$, $\mathcal{L}(D)(U_i) := \frac{1}{f_i} \cdot \mathcal{O}_X(U_i) \subset K$ (als $\mathcal{O}_X(U_i)$-Untermodul von K). Da $\frac{f_i}{f_j} \in \mathcal{O}_X(U_i \cap U_j)^\times$ gilt $\frac{1}{f_i}\mathcal{O}_X(U_i \cap U_j) = \frac{1}{f_j}\mathcal{O}_X(U_i \cap U_j)$.

Behauptung 1: $\mathcal{L}(D)$ ist lokal freie Garbe vom Rang 1. $\mathcal{L}$ induziert Homomophismus $\operatorname{CaCl}(X) \to \operatorname{Pic} X$

Behauptung 2: Jede lokal freie $\mathcal{O}_X$-Modulgarbe von $\mathcal{K}^\times$ ist von der Form $\mathcal{L}(D)$ für ein $D \in \operatorname{CaDiv}(X)$.

Behauptung 3: Jede lokal freie Garbe vom Rang 1 auf X ist isomorph zu einer Untergarbe von $\mathcal{K}$.

Beweis 3: $\mathcal{L} \hookrightarrow \mathcal{L} \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{K} \cong \mathcal{K}$ □