1 Übung vom 28.04.

n=2

Gegeben ist ein (LP) der Form:

$$\begin{aligned} f(x) = \langle x, p \rangle &= \max \\ A \cdot x &\leq b \\ x &\geq 0 \end{aligned}$$

Jede der Ungleichungen $a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 \leq b_i,\ i \in \{1, \ldots, m\}$ beschreibt eine Halbebene im $\mathbb{R}^2$.
Der zulässige Bereich M ist Schnitt von m Halbebenen.

Ist $f(x) = \langle p, x \rangle$ die Zielfunktion (wir nehmen o.B.d.A. an, dass $f \not\equiv 0$, also $p \neq 0$), dann ist die Menge

$$\{f = \alpha\},\ \alpha \in \mathbb{R} \text{ fest}$$

(also die Menge aller Punkte $x \in \mathbb{R}^2$ mit $f(x) = \alpha$) eine Gerade mit Normalenvektor $\frac{p}{\|p\|}$.

Beispiel:

$$\begin{aligned} f(x_1, x_2) = -4x_1 - 6x_2 &= \max \\ -3x_1 - x_2 &\leq -3 \\ -2x_1 - 2x_2 &\leq -4 \\ -x_1 - 2x_2 &\leq -3 \\ x_1, x_2 &\geq 0 \end{aligned}$$

Um den zulässigen Bereich skizzieren zu können, stellen wir zunächst die Gleichungen der 3 Geraden auf, die ihn begrenzen:

$$-3x_1 - x_2 = -3 \quad \Leftrightarrow \quad x_2 = 3 - 3x_1 \tag{1}$$

$$-2x_1 - 2x_2 = -4 \quad \Leftrightarrow \quad x_2 = 2 - x_1 \tag{2}$$

$$-x_1 - 2x_2 = -3 \quad \Leftrightarrow \quad x_2 = \frac{3}{2} - \frac{1}{2}x_1 \tag{3}$$

Hinzu kommen noch die Vorzeichenbedingungen $x_1 = 0$, $x_2 = 0$.

Der Punkt (0,0) erfüllt keine der Bedingungen (1),(2),(3) (mit „$\leq$“), d.h. der zulässige Bereich ist Schnitt der Halbebenen, in denen (0,0) nicht liegt.

Die Ecken des zulässigen Bereichs sind (0,3), $(\frac{1}{2},\frac{3}{2})$, (1,1) und (3,0).
Verschieben der Geraden $\{\langle p, \cdot \rangle = \alpha\}$ mit $p = \begin{pmatrix} -4 \\ -6 \end{pmatrix}$ zeigt, dass (1,1) Lösung des LP mit $f(1,1) = -10$ ist.

`Anmerkung:`
$-4x_1 - 6x_2 = \alpha \quad \Leftrightarrow \quad x_2 = -\frac{2}{3}x_1 - \frac{\alpha}{6}$
Gerade in Richtung des Normalenvektors (hier nach links unten) verschieben.

Hier ohne Schaubilder!