

# 7. Topologie Übung

Ferdinand Szekeresch

18. Oktober 2016

## Aufgabe 1

$p$  Primzahl,  $\forall n \in \mathbb{N}$  setze  $c_n := \mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z}$  mit diskret. Topologie.

Betrachte Teilmenge  $\mathbb{Z}_p := \prod_{n \in \mathbb{N}} c_n$  der Tupel  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  mit der Eigenschaft

$$\forall m \geq n : x_m \equiv x_n \pmod{p^n}$$

- (a) Beh:  $\mathbb{Z}_p$  ist Ring. zeige:  $\mathbb{Z}_p$  ist Teilring von  $\prod_{n \in \mathbb{N}} c_n$ .

Nachrechnen: z. B.  $(x_n), (y_n) \in \mathbb{Z}_p$

$$\Rightarrow \forall m \geq n : x_m + y_m \equiv x_n + y_n \pmod{p^n} \Rightarrow (x_n) + (y_n) \in \mathbb{Z}_p$$

- (b)  $\mathbb{Z}_p$  ist kompakt. Denn: klar:  $\mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z}$  ist kompakt (da endlich)

$\xrightarrow{\text{Tichonoff}} \prod_{n \in \mathbb{N}} (\mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z})$  ist kompakt.

Zeige:  $\mathbb{Z}_p$  ist abgeschlossen in  $\prod_{n \in \mathbb{N}} c_n$ .

Beh:  $\prod_{n \in \mathbb{N}} c_n \setminus \mathbb{Z}_p$  ist offen.

Bew: Sei  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \prod_{n \in \mathbb{N}} c_n \setminus \mathbb{Z}_p$

$$\Rightarrow \exists n, m \in \mathbb{N} : n \leq m \text{ und } x_m \not\equiv x_n \pmod{p^n}$$

Setze  $U := \pi_n^{-1}(\{x_n\})$  ist offen in  $\prod_{n \in \mathbb{N}} c_n$  und es ist  $U \cap \mathbb{Z}_p = \emptyset$

$\Rightarrow$  Beh.

- (c)  $\mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}_p, a \mapsto ((a + p^n\mathbb{Z}))_{n \in \mathbb{N}}$ . Nachrechnen: Das ist ein Ringhomomorphismus. Sein Kern ist  $\bigcap_{n=1}^{\infty} p^n\mathbb{Z} = \{0\} \Rightarrow$  der Homomorphismus ist injektiv.

- (d) Vergleiche Blatt 2, Aufgabe 4. Sei hier  $p = 5$ .

Beh:  $\exists w = (x_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \mathbb{Z}_5$ , sodass gilt:  $w^5 = -1$ , d.h.  $x_n^2 \equiv -1 \pmod{p^n}$ .

Setze  $x_1 := 2$  (denn  $2^2 = 4 \equiv -1 \pmod{5}$ )

Weitere Folgenglieder werden induktiv definiert:

Sei  $x_n$  gefunden mit  $x_n^2 \equiv -1 \pmod{p^n}$

Zu zeigen: Es gibt ein  $k \in \mathbb{Z}$ , sodass  $(x_n + kp^n)^2 \equiv -1 \pmod{p^{n+1}}$

$$\begin{aligned} \leadsto a_p &\stackrel{!}{=} (x_n + kp^n)^2 + 1 = x_n^2 + 2kx_np^n + k^2p^{2n} + 1 = (x_n^2 + 1) + 2kx_np^n + k^2p^{2n} \\ &= bp^n + 2kp^n x_n + k^2p^{2n} = p^n(2kx_n + b) + p^{2n}k^2 \end{aligned}$$

mit  $a, b \in \mathbb{Z}$

Es muss gelten:  $2kx_n + b \equiv 0 \pmod{p}$ . Das geht, denn  $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$  ist Körper,  $x_n$  kann nicht kongruent  $0 \pmod{p}$  sein, da  $x_n^2 \equiv -1 \pmod{p}$  wäre.

(e) Beh:  $\mathbb{Z}_p$  ist überabzählbar.

Bew: z. B. Finde Bijektion von  $\mathbb{Z}_p$  nach  $[0, 1)$ ,  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \mapsto 0, x_1 x_2 \dots$  Oder:

Fasse  $\mathbb{Z}_p$  auf als „Potenzreihen“ der form  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n p^n \quad a_i \in \mathbb{N}$

### Aufgabe 3

Sei  $\mathcal{A}$  eine kommutative Banachalgebra,  $\varphi : \mathcal{A} \rightarrow \mathbb{C}$  ein  $\mathbb{C}$  linearer Ringhomomorphismus.

Beh:  $\varphi$  ist stetige Linearform, d.h.  $\exists \delta > 0 \forall f \in \mathcal{A} : |\varphi(f)| \leq \delta \|f\|$

Bew: Es gilt:  $f - c = -c \left(1 - \frac{f}{c}\right)$ . Es ist  $\left\|\frac{f}{c}\right\| = \frac{1}{\|c\|} \cdot \|f\| < \frac{1}{|c|} \cdot |c| = 1$

$\Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{f}{c}\right)^n$  konvergiert gegen  $\frac{1}{1-\frac{f}{c}} \Rightarrow (-c)^{-1} \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{f}{c}\right)^n$  ist invers zu  $f - c$ .

Beh: Es gilt  $|\varphi(f)| \leq \|f\|$  für alle  $f \in \mathcal{A}$ .

Bew: Es gilt:  $f - \varphi(f) \in \text{Kern}(\varphi)$  (Klar, da  $\varphi$  Ringhomomorphismus ist  $\varphi(f - \varphi(f) \cdot 1_A) = \varphi(f) - \varphi(f)\varphi(1_A) = 0$

$\Rightarrow f - \varphi$  ist nicht invertierbar (da  $\text{Kern}(\varphi)$  ein Ideal in  $\mathcal{A}$ , d.h. wäre  $f - \varphi(f)$  invertierbar, wäre  $\text{Kern}(\varphi) = \mathcal{A} \Rightarrow \varphi = 0$ ).

$\xRightarrow{\text{Beh. 1}} \text{Beh.}$

### Aufgabe 2

Sei  $X$  norm. Raum,  $X$  seine Stone-Cech-Kompaktifizierung,  $K$  ein kompakter, normierter Raum,  $\varphi : X \rightarrow K$  eine stetige Abbildung. Beh:  $\varphi$  kann eindeutig fortgesetzt werden zu einer stetigen Abbildung  $\bar{X} \rightarrow K$ .

Bew:  $X$  normal  $\Rightarrow \bar{X}$  ex. und ist Teilmenge von  $C_0(X, \mathbb{C})'$

$K$  normal und kompakt  $\Rightarrow \bar{K}$  ex. ist  $\subseteq C_0(K, \mathbb{C})'$  und ist gleich  $K$ .

... Rest wird ins Netz gestellt