19. Lineare Differentialgleichungen m-ter Ordnung

In diesem Paragraphen: $I \subseteq \mathbb{R}$ ein Intervall, $a_0, a_1, \ldots, a_{m-1}, b \in C(I, \mathbb{R}), x_0, y_0, \ldots, y_{m-1} \in \mathbb{R}$. Die Differentialgleichung $y^{(m)} + a_{m-1}(x)y^{(m-1)} + \ldots + a_1(x)y' + a_0(x)y = b(x)$ heißt eine **lineare Differentialgleichung m-ter Ordnung**.

Setze $Ly := y^{(m)} + a_{m-1}(x)y^{(m-1)} + \ldots + a_1(x)y' + a_0(x)y$. Dann schreibt sich obige Gleichung in der Form

$$Ly = b(x)$$

.

Diese Gleichung heißt **homogen**, falls $b \equiv 0$, anderenfalls **inhomogen**. Das zur Gleichung $Ly = b$ gehörende System (S) aus § 18 lautet

$$z' = A(x)z + b_0(x)$$

mit $b_0(x) = (0, \ldots 0, b(x))$ und $A(x) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & & 0 \\ \vdots & \vdots & & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & & 1 \\ -a_0(x) & \ldots & \ldots & \ldots & -a_{m-1}(x) \end{pmatrix}$

Die Beweise der folgenden Sätze 19.1 bis 19.4 folgen aus den Paragraphen 16 und 18.

Satz 19.1
Das Anfangswertproblem $\begin{cases} Ly = b(x) \\ y(x_0) = y_0, y'(x_0) = y_1, \ldots, y^{(m-1)}(x_0) = y_{m-1} \end{cases}$ hat auf I genau eine Lösung.

Wie in § 16: Ist $J \subseteq I$ ein Intervall und $\hat{y} : J \to \mathbb{R}$ eine Lösung von $Ly = b$ auf J, so existiert eine Lösung $y : I \to \mathbb{R}$ der Gleichung $Ly = b$ auf I mit $\hat{y} = y|_J$.

Daher betrachten wir immer Lösungen $y : I \to \mathbb{R}$.

Die zu $Ly = b$ gehörende *homogene* Gleichung lautet: (H) $\quad Ly = 0$.

Satz 19.2
Sei y_s eine spezielle Lösung der Gleichung $Ly = b$ und $y : I \to \mathbb{R}$ eine Funktion.

Dann: y ist eine Lösung von $Ly = b \iff \exists\, y_0 : I \to \mathbb{R} : y_0$ ist eine Lösung von (H) und $y = y_0 + y_s$.

$\mathbb{L} := \{y : I \to \mathbb{R} : y$ löst (H) auf $I\}$.

Satz 19.3

(1) $\mathbb{L}$ ist ein reeller Vektorraum, $\dim \mathbb{L} = m$.

(2) Für $y_1, \dots, y_k \in \mathbb{L}$ sind äquivalent:

(i) $y_1, \dots, y_k$ sind linear unabhängig in $\mathbb{L}$;

(ii) $\forall x \in I$ sind $(y_j(x), y_j'(x), \dots, y_j^{(m-1)}(x)) \quad (j = 1, \dots k)$ linear unabhängig in $\mathbb{R}^m$;

(iii) $\exists x \in I : (y_j(x), y_j'(x), \dots, y_j^{(m-1)}(x)) \quad (j = 1, \dots, k)$ sind linear unabhängig in $\mathbb{R}^m$.

Definition
Seien $y_1, \dots, y_m \in \mathbb{L}$. $y_1, \dots, y_m$ heißt ein **Lösungssystem** (LS) von (H) und

$$W(x) := \begin{vmatrix} y_1(x) & \dots & y_m(x) \\ y_1'(x) & \dots & y_m'(x) \\ \vdots & & \vdots \\ y_1^{(m-1)}(x) & \dots & y_m^{(m-1)}(x) \end{vmatrix}$$

heißt **Wronskideterminante**.

Sind $y_1, \dots, y_m$ linear unabhängig in $\mathbb{L}$, so heißt $y_1, \dots, y_m$ ein **Fundamentalsystem** (FS) von (H).

Satz 19.4
Sei $y_1, \dots y_m$ ein Lösungssystem von (H).

(1) $W(x) = W(\xi) e^{-\int_\xi^x a_{m-1}(t)dt} \; (x, \xi \in I)$

(2) $y_1, \dots y_m$ ist ein Fundamentalsystem von (H) $\iff W(x) \neq 0 \,\forall x \in I \iff \exists \xi \in I : W(\xi) \neq 0$

Satz 19.5 (Reduktionsverfahren von d'Alembert ($m = 2$))
Sei y_1 eine Lösung von $(*) \quad y'' + a_1(x)y' + a_0(x)y = 0$ und $y_1(x) \neq 0 \,\forall x \in I$. Sei z eine Lösung von $z' = -(a_1(x) + \frac{2y_1'(x)}{y_1(x)})z$, $z \neq 0$ und $y_2(x) := y_1(x) \int z(x)dx$.

Dann ist y_1, y_2 ein Fundamentalsystem von (*).

Beweis
Nachrechnen: y_2 löst (*). $W(x) = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} y_1 & y_1 \int z dx \\ y_1' & y_1' \int z dx + y_1 z \end{vmatrix} =$
$y_1 y_1' \int z dx + y_1^2 z - y_1 y_1' \int z dx = \underbrace{y_1^2}_{>0} z \overset{19.4}{\Longrightarrow} y_1, y_2$ sind linear unabhängig in $\mathbb{L}$.

Beispiel
$(**) \quad y'' + \frac{2x}{1-x^2} y' - \frac{2}{1-x^2} y = 0 \quad (I = (1, \infty))$; $y_1(x) = x$

$z' = -(\frac{2x}{1-x^2} + \frac{2}{x}) z = -\frac{2x^2 + 2(1-x^2)}{x(1-x^2)} z = \frac{2}{x(x^2-1)} z \quad (***)$

$\int \frac{2}{x(x^2-1)} dx = \log(1 - \frac{1}{x^2})$

§ 7 $\Longrightarrow$ allgemeine Lösung von (***): $z(x) = ce^{\log(1-\frac{1}{x^2})} = c(1 - \frac{1}{x^2}) \quad (c \in \mathbb{R})$

$z(x) = 1 - \frac{1}{x^2} \Longrightarrow \int z(x) dx = x + \frac{1}{x} \Longrightarrow y_2(x) = x(x + \frac{1}{x}) = 1 + x^2$

Fundamentalsystem: y_1, y_2. Allgemeine Lösung von (**): $y(x) = c_1 x + c_2(1 + x^2) \quad (c_1, c_2 \in \mathbb{R})$

Satz 19.6
Sei $y_1, \ldots, y_m$ ein FS von (H). W sei die Wronskideterminante von $y_1, \ldots, y_m$ und für $k = 1, \ldots, m$ sei $W_k(x)$ die Determinante, die aus $W(x)$ entsteht, indem man in $W(x)$ die k-te Spalte ersetzt durch $(0, \ldots, 0, b(x))^T$. Dann ist

$$y_s := \sum_{k=1}^{m} y_k \int \frac{W_k}{W} dx$$

eine spezielle Lösung von $L_y = b(x)$.

Beweis
§16, §18 ∎

Beispiel
$y'' + \frac{2x}{1-x^2} y' - \frac{2}{1-x^2} y = x^2 - 1$

FS der homogenen Gleichung: $x, x^2 + 1$
$W(x) = \begin{vmatrix} x & x^2+1 \\ 1 & 2x \end{vmatrix} = 2x^2 - (x^2 + 1) = x^2 - 1$
$W_1(x) = \begin{vmatrix} 0 & x^2+1 \\ x^2-1 & 2x \end{vmatrix} = -(x^2 + 1)(x^2 - 1) \Longrightarrow \frac{W_1(x)}{W(x)} = -(x^2 + 1)$
$\Longrightarrow \int \frac{W_1}{W} dx = -\frac{1}{3} x^3 - x$
$W_2(x) = \begin{vmatrix} x & 0 \\ 1 & x^2-1 \end{vmatrix} = x(x^2 - 1) \Longrightarrow \frac{W_2(x)}{W(x)} = x \Longrightarrow \int \frac{W_2}{W} dx = \frac{1}{2} x^2$
$\Longrightarrow y_s(x) = -\frac{1}{3} x^4 - x^2 + (x^2 + 1) \frac{1}{2} x^2 = \frac{1}{6} x^4 - \frac{1}{2} x^2.$

Allgemeine Lösung der inhomogenen Gleichung:
$y(x) = c_1 x + c_2(x^2 + 1) + \frac{1}{6} x^4 + \frac{1}{2} x^2 (c_1, c_2 \in \mathbb{R})$