0.0 Übung 0, 01.11.2004

0.0.1 Aufgabe 2

a) Über allen Gipfeln ist Ruh
   Über einem Gifpel ist keine Ruh

b) Es gibt einen Hund der Möhren frißt
   Alle Hunde fressen keine Möhren

c) Es gibt einen Topf auf den alle Deckel passen
   Für alle Töpfe gibt es einen Deckel der nicht passt

d) $\forall x \in \mathbb{R} \exists y \in \mathbb{Z} : [y \leq x \wedge (\forall z \in \mathbb{Z} : z \leq y)] \Leftrightarrow \exists x \in \mathbb{R} \forall y \in \mathbb{Z} : \neg[y \leq x \wedge (\forall z \in \mathbb{Z} : z \leq y)]$

   Es gilt: $\neg[A \wedge B] \Leftrightarrow \neg A \vee \neg B$
   $\Rightarrow \quad \exists x \in \mathbb{R} \forall y \in \mathbb{Z} : [y > x \vee (\exists z \in \mathbb{Z} : z > y)]$

0.0.2 Aufgabe 3

$a, b \in \mathbb{N}$
$a \mid b \in \mathbb{N} :\Leftrightarrow \exists c \in \mathbb{N} : a \cdot c = b$
$p \in \mathbb{N} \setminus \{1\} :\Leftrightarrow 1$ und p sind die einzigen Teiler von p

Satz: Zu jeder natürlichen Zahl $n \neq 1$ gibt es eindeutig bestimmte Primzahlen $p_1, ..., p_k$ und $l_1, ..., l_k \in \mathbb{N}$, so dass $n = {p_1}^{l_1} \cdot ... \cdot {p_k}^{l_k}$.

a) Die Anzahl aller Primzahlen ist unendlich
   Widerspruchsbew.: Ann.: Es gibt nur endl. viele Primzahlen

$$\left.\begin{array}{r} n := p_1 \cdot ... \cdot p_k + 1 \\ Satz \Rightarrow P_l \cdot m = n \end{array}\right\} p_l * m = p_1 \cdot ... \cdot p_k 1 + 1 \Rightarrow p_L \cdot (m - p_1 \cdot ... \cdot p_l \cdot ... \cdot p_k) = 1 \grave{}$$

   Es gibt also doch unendlich viele Primzahlen

b) Widerspruchsbew.: Ann.: $\sqrt{2} \in \mathbb{Q}$, d.h. $\sqrt{2} = \frac{m}{n}$ mit $m, n \in \mathbb{N}$. Wir dürfen annehmen, das es keine Primzahl gibt, die sowohl m als auch n teil.

$$\sqrt{2} = \frac{m}{n} \Rightarrow 2 = \frac{m^2}{n^2} \Rightarrow 2n^2 = m^2$$

$$\Rightarrow 2\tilde{m} = m \Rightarrow 2n^2 = 4\tilde{m}^2 \Rightarrow n^2 = 2 \cdot \tilde{m}^2 \Rightarrow 2 \mid n \grave{}$$

   Also $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$

0.0.3 Aufgabe 5

z.Z.: $A \setminus (B \setminus C) = (A \setminus B) \cup (A \cap C)$
Beweis: