16. Lineare Systeme

Vereinbarung: $I \subseteq \mathbb{R}$ sei ein Intervall, $m \in \mathbb{N},\ x_0 \in I,\ y_0 \in \mathbb{R}^m$. $D := I \times \mathbb{R}^m,\ a_{jk}, b_j : I \to \mathbb{R}$ seien auf I stetig.

Das Dgl.-System

$$\begin{aligned} y_1' &= a_{11}(x)y_1 + \ldots + a_{1m}(x)y_m + b_1(x) \\ &\vdots \\ y_m' &= a_{m1}(x)y_1 + \ldots + a_{mm}(x)y_m + b_m(x) \end{aligned}$$

heißt ein **lineares System**. Mit $A(x) := (a_{jk}(x)),\ b(x) := (b_1(x), \ldots, b_m(x))$ und $y := (y_1, \ldots, y_m)$ schreibt sich obiges System in der Form

$$(S) \quad y' = A(x)y + b(x)$$

Ist $b \equiv 0$, so heißt (S) **homogen**, anderenfalls **inhomogen**. (Der Fall $m = 1$: §7). Wir betrachten noch das AWP

$$(A) \quad \begin{cases} y' = A(x)y + b(x) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$$

und die zu (S) gehörende homogene Gleichung

$$(H) \quad y' = A(x)y$$

Satz 16.1 (Lösungen linearer Systeme)

(1) (A) hat auf I genau eine Lösung.

(2) (S) hat eine Lösung auf I.

(3) Ist $J \subseteq I$ ein Intervall und $\widehat{y} : J \to \mathbb{R}^m$ eine Lösung von (S) auf J, dann existiert eine Lösung $y : I \to \mathbb{R}^m$ von (S) auf I mit: $\widehat{y} = y_{|J}$

(4) Sei y_s eine spezielle Lösung von (S) auf I und ist $y : I \to \mathbb{R}^m$ eine Funktion, so gilt: y ist eine Lösung von (S) auf $I \iff \exists y_h : I \to \mathbb{R}^m$ mit: y_h löst (H) auf I und $y = y_h + y_s$.

Bemerkung 16.2
Wegen 16.1(3) können wir immer annehmen, daß Lösungen von (S) auf ganz I definiert sind.

Beweis (von 16.1)

(2) folgt aus (1)

(4) wie in §7

(1) Fall 1: $I = [a, b]$. $f(x, y) := A(x)y + b(x)$, $\gamma := \max\{\|A(x)\| \ : \ x \in I\}$.
Für $(x, y), \ (x, \tilde{y}) \in D : \ \|f(x, y) - f(x, \tilde{y})\| = \|A(x)(y - \tilde{y})\| \leq \|A(x)\|\|y - \tilde{y}\| \leq \gamma\|y - \tilde{y}\|$.
15.2 $\implies$ Beh.

Fall 2: I beliebig.

$$\mathcal{M} := \{K : \ K \text{ ist ein kompaktes Intervall, } K \subseteq I, x_0 \in K\}$$

$$\implies I = \bigcup_{K \in \mathcal{M}} K.$$

Fall 1 $\implies$ $\forall \ K \in \mathcal{M}$ existiert genau eine Lösung $y_K : K \to \mathbb{R}^m$ von (A) auf K. Def: $y : I \to \mathbb{R}^m$ durch $y(x) := y_k(x)$, falls $x \in K \in \mathcal{M}$.
y ist wohldefiniert. Sei $x \in K_1 \cap K_2$ $(K_1, K_2 \in \mathcal{M})$. z.z: $y_{K_1}(x) = y_{K_2}(x)$.

O.B.d.A: $x \neq x_0$, etwa $x > x_0$, $K_3 := [x_0, x] \subseteq K_1 \cap K_2$. $K_3 \in \mathcal{M}$.

Fall 1 $\implies$ (A) hat auf K_3 genau eine Lösung. y_{K1} und y_{K2} sind Lösungen von (A) auf K_3 $\implies$ $y_{K1} = y_{K2}$ auf K_3 $\implies$ $y_{K1}(x) = y_{K2}(x)$. Klar: y löst (A) auf I. Sei $\tilde{y}$ eine weitere Lösung von (A) auf $I \overset{\text{Fall 1}}{\implies} y = \tilde{y}$ auf $K \ \forall \ K \in \mathcal{M}$. $\implies$ $y = \widehat{y}$ auf I.

(3) Sei $\xi \in J$, $\eta := \widehat{y}(\xi)$. (1) $\implies$ das AWP

$$(+) \qquad \begin{cases} y' = A(x)y + b(x) \\ y(\xi) = \eta \end{cases}$$

hat auf I genau eine Lösung y. Sei $x \in J$. Z.z: $\widehat{y}(x) = y(x)$. O.B.d.A: $x \neq \xi$, etwa $x > \xi$. (+) hat auf $[\xi, x]$ genau eine Lösung (wegen (1)), $\widehat{y}$, y sind Lösungen von (+) auf $[\xi, x]$ $\implies$ $y(x) = \widehat{y}(x)$ ■

Wir betrachten jetzt die homogene Gleichung (H) $y' = A(x)y$.

$$\mathbb{L} := \{y : I \to \mathbb{R}^m : \ y \text{ löst } (H) \text{ auf } I\}$$

Satz 16.3 (Vektorraum der Lösungen)

(1) $\mathbb{L}$ ist ein reeller Vektorraum.

(2) Seien $y^{(1)}, \ldots, y^{(k)} \in \mathbb{L}$. Dann sind äquivalent:

   (i) $y^{(1)}, \ldots, y^{(k)}$ sind linear unabhänging in $\mathbb{L}$.

   (ii) $\forall x \in I$: $y^{(1)}(x), \ldots, y^{(k)}(x)$ sind linear unabhänging im $\mathbb{R}^m$.

   (iii) $\exists \xi \in I : y^{(1)}(\xi), \ldots, y^{(k)}(\xi)$ sind linear unabhängig im $\mathbb{R}^m$.

(3) $\dim \mathbb{L} = m$.

Beweis

(1) Nachrechnen!

(2) (i) $\implies$ (ii): Sei $x_1 \in I$, $\alpha_1, \dots, \alpha_k \in \mathbb{R}$ und $0 = \alpha_1 y^{(1)}(x_1) + \dots + \alpha_k y^{(k)}(x_1)$. $y := \alpha_1 y^{(1)} + \dots + \alpha_k y^{(k)} \implies y \in \mathbb{L}$ und y löst das AWP

$$\begin{cases} y' = A(x)y \\ y(x_1) = 0 \end{cases}$$

Die Funktion 0 löst dieses AWP ebenfalls $\overset{16.1}{\implies} y \equiv 0 \overset{\text{Vor.}}{\implies} \alpha_1 = \ldots = \alpha_k = 0$.

(ii) $\implies$ (iii): Klar

(iii) $\implies$ (i): Seien $\alpha_1, \dots, \alpha_k \in \mathbb{R}$ und $0 = \alpha_1 y^{(1)} + \dots + \alpha_k y^{(k)} \implies 0 = \alpha_1 y^{(1)}(\xi) + \dots + \alpha_k y^{(k)}(\xi) \overset{\text{Vor.}}{\implies} \alpha_1 = \ldots = \alpha_k = 0$.

(3) Aus (2): $\dim \mathbb{L} \leq m$. Für $j = 1, \dots, m$ sei $y^{(j)}$ <u>die</u> Lösung des AWPs

$$\begin{cases} y' = A(x)y \\ y(x_0) = e_j \end{cases}$$

(2) $\implies y^{(1)}, \dots, y^{(m)}$ sind linear unabhängig in $\mathbb{L} \implies \dim \mathbb{L} \geq m$. ■

Ist also $y^{(1)}, \dots, y^{(m)}$ eine Basis von $\mathbb{L}$, so lautet die allgemeine Lösung von (H): $y = c_1 y^{(1)} + \dots + c_m y^{(m)}$ $(c_1, c_2, \dots, c_m \in \mathbb{R})$.

Ein Spezialfall: Es sei $m = 2$ und $A(x)$ habe die Gestalt

$$A(x) = \begin{pmatrix} a_1(x) & -a_2(x) \\ a_2(x) & a_1(x) \end{pmatrix}$$

$a_1, a_2 : I \to \mathbb{R}$ stetig. Sei $y = (y_1, y_2)$ eine Lösung von

$$(\mathbb{R})\ y' = A(x)y$$

$z := y_1 + iy_2$, $a := a_1 + ia_2$; $\int a(x)\mathrm{d}x := \int a_1(x)\mathrm{d}x + i \int a_2(x)\mathrm{d}x$. Nachrechnen: z ist eine Lösung der <u>komplexen</u> linearen Differentialgleichung 1. Ordnung

$$(\mathbb{C})\ z' = a(x)z$$

Ist umgekehrt z eine Lösung von $(\mathbb{C})$, so setze $y_1 := \operatorname{Re} z$, $y_2 := \operatorname{Im} z$, $y := (y_1, y_2)$. Nachrechnen: y löst $(\mathbb{R})$. Wie in §7: die allgemeine Lösung von $(\mathbb{C})$ lautet:

$$z(x) = ce^{\int a(x)\mathrm{d}x}\ (c \in \mathbb{C})$$

$z_0 := e^{\int a(x)\mathrm{d}x}$; $y_1 := \operatorname{Re} z_0$, $y_2 := \operatorname{Im} z_0$, $y^{(1)} := (y_1, y_2)$. $y^{(1)}$ ist eine Lösung von $(\mathbb{R})$.

$z_1(x) = ie^{\int a(x)\mathrm{d}x} = iz_0(x) = i(y_1 + iy_2) = -y_2 + iy_1 \implies y^{(2)} := (-y2, y1)$ ist eine Lösung von $(\mathbb{R})$.

$$\begin{aligned} \det \begin{pmatrix} y_1(x) & -y_2(x) \\ y_2(x) & y-1(x) \end{pmatrix} &= y_1(x)^2 + y_2(x)^2 \\ &= |z_0(x)|^2 = |e^{\int a(x)\mathrm{d}x}|^2 \\ &= \left(e^{\int a_1(x)\mathrm{d}x}\right)^2 \neq 0\ \forall x \in I \end{aligned}$$

$\overset{16.3}{\Longrightarrow}$ $y^{(1)}, y^{(2)}$ sind in $\mathbb{L}$ linear unabhängig ($\dim \mathbb{L} = 2$).

Beispiele:

(1) Beh.: $\exists$ genau ein Paar von Funktionen (y_1, y_2) mit: $y_1, y_2 \in C^1(\mathbb{R}, \mathbb{R}), y_1' = y_2,\ y_2' = -y_1,\ y_1(0) = 0,\ y_2(0) = 1$ nämlich $y_1(x) = \sin x,\ y_2(x) = \cos x$

Beweis: $I = \mathbb{R}; A := \left(\begin{smallmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{smallmatrix}\right)$, mit $y = (y_1, y_2)$:

$$y' = Ay \iff y_1' = y_2,\ y_2' = -y_1$$

$$\text{AWP:} \quad \begin{cases} y' = Ay \\ y(0) = (0, 1) \end{cases}$$

16.1 $\Longrightarrow$ Beh.

$a_1(x) \equiv 0,\ a_2(x) \equiv -1,\ a(x) = -i,\ z_0(x) = e^{-ix} = (\cos x, -\sin x)$,

$y^{(1)}(x) = (\cos x, -\sin x),\ y^{(2)}(x) = (\sin x, \cos x)$. Die allgemeine Lösung von $y' = \left(\begin{smallmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{smallmatrix}\right) y$:

$$y(x) = c_1 \begin{pmatrix} \cos x \\ -\sin x \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} \sin x \\ \cos x \end{pmatrix} \qquad (c_1, c_2 \in \mathbb{R})$$

(2) $I = (0, \infty),\ A(x) = \begin{pmatrix} \frac{1}{x} & -2x \\ 2x & \frac{1}{x} \end{pmatrix}$. $a_1(x) = \frac{1}{x},\ a_2(x) = 2x$

$\Longrightarrow a(x) = \frac{1}{x} + i2x \Longrightarrow \int a(x)\mathrm{d}x = \log x + ix^2 \Longrightarrow z_0(x) = e^{\log x + ix^2} = e^{\log x} e^{ix^2} = x(\cos x^2 + i \sin x^2)$. $\Longrightarrow$

$$\begin{aligned} y^{(1)}(x) &= (x \cos x^2, x \sin x^2) \\ y^{(2)}(x) &= (-x \sin x^2, x \cos x^2) \end{aligned}$$

Die allgemeine Lösung von $y' = A(x)y$:

$$y(x) = c_1 \begin{pmatrix} x \cos x^2 \\ x \sin x^2 \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} -x \sin x^2 \\ +x \cos x^2 \end{pmatrix}$$

Definition

(1) Seien $y^{(1)}, \dots, y^{(m)} \in \mathbb{L}$. Dann heißt $y^{(1)}, \dots, y^{(m)}$ ein **Lösungssystem**

(2) $Y(x) := \big(y^{(1)}(x), \dots, y^{(m)}(x)\big)$ ($\in \mathbb{M}_m$) heißt dann eine **Lösungsmatrix** (LM) von (H)

(3) $W(x) := \det Y(x)$ ($x \in I$) heißt **Wronskideterminante**.

(4) Sind $y^{(1)}, \dots, y^{(m)}$ linear unabhängig in $\mathbb{L}$, so heißt $y^{(1)}, \dots, y^{(m)}$ ein **Fundamentalsystem** (FS) von (H) und Y heißt eine **Fundamentalmatrix** (FM) von (H).

Satz 16.4 (Lösungssyteme und -matrizen)
Seien $y^{(1)}, \dots, y^{(m)}, Y$ und W wie oben.

(1) $Y'(x) = A(x)Y(x)\, \forall x \in I$.

(2) $\{Yc : c \in \mathbb{R}^m\} \subseteq \mathbb{L}$

(3) $y^{(1)}, \dots, y^{(m)}$ ist eine FS von (H) $\iff$ $Y(x)$ ist invertierbar $\forall x \in I \Leftrightarrow W(x) \neq 0 \, \forall x \in I \Leftrightarrow W(\xi) \neq 0$ für ein $\xi \in I$.

(4) Sei Y eine FM von (H) und $Z : I \to \mathbb{M}_m$ eine Funktion. Z eine FM von (H) $\iff$ $\exists C \in \mathbb{M}_m : C$ ist invertierbar, $C = \overline{C}$ und $Z(x) = Y(x)C \ \forall x \in I$.

(5) Für $\xi \in I : W(x) = W(\xi) e^{\int_\xi^x \mathrm{Spur}\, A(t)dt} \ \forall x \in I$.

Beweis

(1) klar.

(2) Sei $c = (c_1, \dots, c_m) \in \mathbb{R}^m : Yc = c_1 y^{(1)} + \cdots + c_m y^{(m)}$

(3) folgt aus 16.3

(4) „ $\Longrightarrow$ ": Sei $Z(x) = (z^{(1)}(x), \dots, z^{(1)}(x))$ (2) $\Rightarrow \forall j \in \{1, \dots, m\} \exists c^{(j)} \in \mathbb{R}^m : z^{(j)} = Yc^{(j)} C := (c^{(1)}, \dots, c^{(m)}) \in \mathbb{M}_m \Rightarrow C = \overline{C}$ und $Z = YC$, $0 \neq \det Z(x) = \det Y(x) \det C \Rightarrow \det C \neq 0$.
„$\Leftarrow$": $Z'(x) = Y'(x)C \stackrel{1}{=} A(x)Y(x)C = A(x)Z(x) \Rightarrow Z$ ist eine LM von (H). $\det Z(x) = \det Y(x) \det C \neq 0 \Rightarrow Z$ ist eine FM von (H).

(5) Wegen (3): O.B.d.A.:$W(x) \neq 0 \forall x \in I$. $\stackrel{(3)}{\Rightarrow}$ Y ist eine FM von (H). Sei $x_0 \in I, z^{(j)}$<u>die</u> Lösung des AWPs

$$\begin{cases} y' = A(x)y \\ y(x_0) = e_j \quad (j = 1, \dots, m) \end{cases}$$

16.3 $\Rightarrow Z(x) = (z^{(1)}(x), \dots, z^{(m)}(x))$ ist eine FM von (H) (4) $\Rightarrow \exists C \in M : C = \overline{C}, C$ ist invertierbar und $Y(x) = Z(x)C \Rightarrow Y(x_0) = \underbrace{Z(x_0)}_{E} C = C \Rightarrow Y(x) = Z(x)Y(x_0) \Rightarrow$

$W(x) = \underbrace{\det Z(x)}_{=:\varphi(x)} W(x_0) \Rightarrow W'(x) = \varphi'(x)W(x_0) \, \forall x \in E \ (*)$

$\varphi(x) \stackrel{14}{=} \sum_{k=1}^m \det(z^{(1)}(x), \dots, z^{(k-1)}(x), (z^{(k)}(x))', z^{(k+1)}(x), \dots, z^{(m)}(x))$ $(z^{(k)}(x))' = A(x)z^{(k)}(x) = (z^{(k)}(x))'_{|x=x_0} = A(x_0)z^{(k)}(x_0) = A(x_0)e_k =$ k-te Spalte von $A(x_0)$.

$$\varphi'(x_0) = \sum_{k=1}^m \underbrace{\begin{vmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 & a_{1k}(x_0) & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 & \vdots & \vdots & & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & 1 & \vdots & \vdots & & & \vdots \\ \vdots & & & 0 & a_{kk}(x_0) & 0 & & & \vdots \\ \vdots & & & \vdots & \vdots & 1 & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & & \vdots & \vdots & 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & 1 & 0 \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & a_{mk}(x_0) & 0 & \cdots & 0 & 1 \end{vmatrix}}_{a_{kk}(x_0)} = \mathrm{Spur}\, A(x_0)$$

$\overset{(*),x=x_0}{\Rightarrow} W'(x_0) = (\mathrm{Spur}\, A(x_0)W(x_0) \overset{x_0 \text{bel.}}{\Rightarrow} W' = (\mathrm{Spur}\, A(x))W \text{auf} I$. Sei $\xi \in I$. Dann ist $\int_\xi^x \mathrm{Spur}\, A(t)dt$ eine Stammfunktion von Spur $A \overset{7}{\Rightarrow} \exists c \in \mathbb{R} : W(x) = ce^{\int_\xi^x \mathrm{Spur}\, A(t)dt} \overset{x=\xi}{\Rightarrow}$ $c = W(\xi) \Rightarrow$ Beh. ■

Wir betrachten jetzt die inhomogene GL (IH) $y' = A(x)y + b(x)$
Motivation: Sei $m = 1$. I.d.Fall ist $y(x) = e^{\int A(x)dx}$ ein FS von (H). Für eine spezielle Lösung von (IH) machten wir den Ansatz: $y_s(x) = y(x)c(x)$ und erhielten $c(x) = \int \underbrace{e^{-\int A(x)dx}}_{\frac{1}{y(x)}} b(x)dx$

also $y_s(x) = y(x) \int \frac{1}{y(x)} b(x)dx$.

Satz 16.5 (Spezielle Lösung per Cramerscher Regel)
Sei $Y = (y^{(1)}, \ldots, y^{(m)})$ eine FM von (H) und $y_s(x) := Y(x) \int (Y(x))^{-1} b(x)dx \quad (x \in I)$. Dann ist y_s eine spezielle Lösung des (IH). Für $k = 1, \ldots, m$ sei $W_k(x) := \det(y^{(1)}(x), \ldots, y^{(k-1)}(x), b(x), y^{(k+1)}(x), \ldots, y^{(m)}(x))$. Dann:

$$y_s(x) = \sum_{k=1}^{m} \left(\int \frac{W_k(x)}{W(x)} dx \right) \cdot y^{(k)}(x)$$

Beweis
$y_s'(x) = Y'(x) \cdot \int (Y(x))^{-1} b(x)dx + y(x)Y(x)^{-1}b(x) = A(x) \underbrace{Y(x) \int Y(x)^{-1} b(x)dx}_{y_s(x)} + b(x) =$

$A(x)y_s(x) + b(x)$
Für $x \in I$ betrachte das LGS $Y(x)v = b(x)$, dann $v = (v_1, \ldots, v_m) = Y(x)^{-1}b(x)$. Cramersche Regel $\Rightarrow v_j = \frac{W_j(x)}{W(x)} \Rightarrow Y(x)^{-1}b(x) = \left(\frac{W_1(x)}{W(x)}, \ldots, \frac{W_m(x)}{W(x)}\right) \Rightarrow$ Beh. ■

Beispiel
$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$; Bestimme die allgemeine Lösung von $y' = Ay + \begin{pmatrix} \sin x \\ \cos x \end{pmatrix} \quad (m = 2)$

Bekannt: FS von $y' = Ay : y^{(1)}(x) = (\sin x, \cos x), y^{(2)}(x) = (\cos x, -\sin x). W(x) = \begin{vmatrix} \sin x & \cos x \\ \cos x & -\sin x \end{vmatrix} =$ $-1 = W_1(x), W_2(x) = \begin{vmatrix} \sin x & \sin x \\ \cos x & \cos x \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow y_s(x) = x \cdot \begin{pmatrix} \sin x \\ \cos x \end{pmatrix}$

Allgemeine Lösung der inhomogenen Gleichung: $y(x) = c_1 \begin{pmatrix} \sin x \\ \cos x \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} \cos x \\ -\sin x \end{pmatrix} + x \begin{pmatrix} \sin x \\ \cos x \end{pmatrix}, c_1, c_2 \in \mathbb{R}, Y(x) = \begin{pmatrix} \sin x & \cos x \\ \cos x & -\sin x \end{pmatrix}$ FM von $y' = Ay$. Dann $Y(x)^T Y(x) = E$. Sei $y = (y_1, y_2)$ eine Lösung von $y' = Ay \Rightarrow y_1 = c_1 \sin x + c_2 \cos x, y_2 = c_1 \cos x - c_2 \sin x$. Nachrechnen: $y_1^2 + y_2^2 = c_1^2 + c_2^2$

Satz 16.6 (Schiefsymmetrische Systeme)
Sei $A(x)^T = -A(x)\ \forall x \in I, Y$ sei eine FM von (H) $y' = A(x)y$.

(1) $Y(x)^T Y(x)$ ist auf I konstant.

(2) Ist $y = (y_1, \ldots, y_m)$ eine Lösung von (H) $\Rightarrow y_1^2 + y_2^2 + \cdots + y_m^2$ ist konstant auf I.

Beweis

(1) $(Y^TY)' = (Y^T)'Y + Y^TY' = (Y')^TY + Y^TY' = (AY)^TY + Y^TAY = Y^T \underbrace{A^T}_{-A} Y + Y^TAY = 0$ auf $I \Rightarrow$ Beh.

(2) O.B.d.A: $y \not\equiv 0, y^{(1)} := y$. Dann ist $y^{(1)}$ l.u. in $\mathbb{L}$. Dann existieren $y^{(2)}, \dots, y^{(m)} \in \mathbb{L}$ mit: $y^{(1)}, \dots, y^{(m)}$ ist ein FS von (H). $Y := (y^{(1)}, \dots, y^{(m)}), Z(x) := Y(x)^TY(x) \overset{(1)}{\Rightarrow} Z$ ist auf I konstant. Sei $Z(x) = (z_{jk})$. Dann $y_1^2 + \dots + y_m^2 = z_{11}$ ■