

## 18. Eigenschaften stetiger Funktionen

### Satz 18.1 (Zwischenwertsatz)

Sei  $a < b$  und  $f \in C[a, b] := C([a, b])$ , weiter sei  $y_0 \in \mathbb{R}$  und  $f(a) \leq y_0 \leq f(b)$  oder  $f(b) \leq y_0 \leq f(a)$ . Dann existiert ein  $x_0 \in [a, b]$  mit  $f(x_0) = y_0$

### Beweis

O.B.d.A:  $f(a) < y_0 < f(b)$ ,  $M := \{x \in [a, b] : f(x) \leq y_0\}$ .  $M \neq \emptyset$ , denn  $a \in M$ .  $M \subseteq [a, b] \implies M$  ist beschränkt.  $x_0 := \sup M$ .  $\forall n \in \mathbb{N}$  ist  $x_0 - \frac{1}{n}$  keine obere Schranke von  $M \implies \forall n \in \mathbb{N} \exists x_n \in M : x_0 - \frac{1}{n} < x_n \leq x_0 \implies x_n \rightarrow x_0$ .  $x_n \in [a, b] \implies x_0 \in [a, b]$ ,  $f$  stetig in  $x_0 \implies \underbrace{f(x_n)}_{\leq y_0} \rightarrow f(x_0) \implies f(x_0) \leq y_0$ . Es ist  $x_0 < b$  (anderenfalls:  $f(x_0) \leq y_0 < f(b) = f(x_0)$

Widerspruch!)  $z_n := x_0 + \frac{1}{n}; z_n \in [a, b]$  ffa  $n \in \mathbb{N}; z_n \rightarrow x_0$ ;  $f$  stetig in  $x_0 \implies f(z_n) \rightarrow f(x_0)$ .  $z_n \notin M \implies f(z_n) > y_0 \forall n \in \mathbb{N} \implies \lim f(z_n) \geq y_0 \implies f(x_0) \geq y_0$  ■

### Satz 18.2 (Nullstellensatz von Bolzano)

Sei  $f \in C[a, b]$  und  $f(a) \cdot f(b) < 0$ , dann existiert ein  $x_0 \in [a, b] : f(x_0) = 0$ . Beweis folgt aus 18.1 und  $y_0 = 0$

### Anwendung 18.3

Sei  $E(x) := e^x (x \in \mathbb{R})$ . Behauptung:  $E(\mathbb{R}) = (0, \infty)$

### Beweis

13.3  $\implies e^x > 0 \forall x \in \mathbb{R} \implies E(\mathbb{R}) \subseteq (0, \infty)$ . Sei  $y_0 \in (0, \infty)$  z.z.:  $\exists x_0 \in \mathbb{R} : e^{x_0} = y_0$ . 16.3  $\implies e^x \rightarrow \infty (x \rightarrow \infty) \implies \exists b \in \mathbb{R} : y_0 < e^b$ . 16.3  $\implies e^x \rightarrow 0 (x \rightarrow -\infty) \implies \exists a \in \mathbb{R} : e^a < y_0 \implies e^a < y_0 < e^b \xrightarrow{\text{e streng wachsend}} a < b$ . 18.1  $\implies \exists x_0 \in [a, b] : e^{x_0} = y_0$ . ■

### Definition

$A \subseteq \mathbb{R}$  heißt **abgeschlossen** :  $\iff$  für jede konvergente Folge  $(x_n)$  in  $A$  gilt:  $\lim x_n \in A$

$B \subseteq \mathbb{R}$  heißt **offen** :  $\iff \forall x \in B \exists \delta = \delta(x) > 0 : U_\delta(x) \subseteq B$ .

### Beispiele:

- (1)  $[a, b]$  ist abgeschlossen, aber nicht offen.  $(a, b)$  ist offen, aber nicht abgeschlossen.
- (2)  $(a, b]$  und  $[a, b)$  sind weder abgeschlossen, noch offen
- (3)  $\mathbb{R}$  ist offen, abgeschlossen.  $\emptyset$  ist offen, abgeschlossen

### Hilfssatz

- (1)  $A \subseteq \mathbb{R}$  ist abgeschlossen  $\iff$  jeder Häufungspunkt von  $A$  gehört zu  $A$

- (2)  $B \subseteq \mathbb{R}$  ist offen  $\iff \mathbb{R} \setminus B$  ist abgeschlossen
- (3)  $D \subseteq \mathbb{R}$  ist abgeschlossen u. beschränkt  $\iff$  jede Folge  $(x_n)$  in  $D$  enthält eine konvergente Teilfolge  $(x_{n_k})$  mit  $\lim x_{n_k} \in D$ . In diesem Fall existiert  $\max D$  und  $\min D$ .

**Beweis**

(1) Übung

- (2) „ $\implies$ “: Sei  $(x_n)$  eine konvergente Folge in  $\mathbb{R} \setminus B$  und  $x_0 := \lim x_n$ . Annahme:  $x_0 \in B$ .  $B$  offen  $\implies \exists \delta > 0 : U_\delta(x_0) \subseteq B$ .  $x_n \rightarrow x_0 \implies x_n \in U_\delta(x_0) \subseteq B$  ffa  $n \in \mathbb{N}$ , Widerspruch!  
 „ $\impliedby$ “: Sei  $x \in B$ . Annahme:  $U_\delta(x) \not\subseteq B \forall \delta > 0$ .  $\implies U_{\frac{1}{n}}(x) \not\subseteq B \forall n \in \mathbb{N} \implies \forall n \in \mathbb{N} \exists x_n \in U_{\frac{1}{n}}(x)$  mit:  $x_n \in \mathbb{R} \setminus B \implies (x_n)$  ist eine Folge in  $\mathbb{R} \setminus B : x_n \rightarrow x$ .  $\mathbb{R} \setminus B$  abgeschlossen  $\implies x \in \mathbb{R} \setminus B$ , Widerspruch!

- (3) „ $\implies$ “: Sei  $(x_n)$  Folge in  $D$ .  $D$  beschränkt  $\implies (x_n)$  beschränkt. 8.2  $\implies (x_n)$  enthält eine konvergente Teilfolge  $(x_{n_k})$ .  $D$  abgeschlossen  $\implies \lim x_{n_k} \in D$ . „ $\impliedby$ “: Übung.  
 Sei  $D$  beschränkt und abgeschlossen. Sei  $s := \sup D$ . z.z.:  $s \in D$  (analog zeigt man  $\inf D \in D$ ).  $\forall n \in \mathbb{N}$  ist  $s - \frac{1}{n}$  keine obere Schranke von  $s$ .  $\implies \forall n \in \mathbb{N} \exists x_n \in D$  mit  $s - \frac{1}{n} < x_n \leq s \implies x_n \rightarrow s$ .  $D$  abgeschlossen  $\implies s \in D$  ■

**Definition**

Sei  $\emptyset \neq D \subseteq \mathbb{R}$ . Eine Funktion  $f : D \rightarrow \mathbb{R}$  heißt **beschränkt** :  $\iff f(D)$  ist beschränkt ( $\iff \exists c \geq 0 : |f(x)| \leq c \forall x \in D$ ).

**Satz 18.4 (Eigenschaften von Bildmengen stetiger Funktionen)**

Sei  $\emptyset \neq D \subseteq \mathbb{R}$ , sei  $D$  beschränkt, abgeschlossen und  $f \in C(D)$ . Dann ist  $f(D)$  beschränkt und abgeschlossen. Insbesondere ist  $f$  beschränkt und  $\exists x_1, x_2 \in D : f(x_1) \leq f(x) \leq f(x_2) \forall x \in D$ .

**Beweis**

Annahme:  $f$  ist nicht beschränkt. Dann:  $\forall n \in \mathbb{N} \exists x_n \in D : |f(x_n)| > n$ . HS(3)  $\implies (x_n)$  enthält eine konvergente Teilfolge  $(x_{n_k})$  mit  $x_0 := \lim x_{n_k} \in D$ .  $f$  stetig  $\implies f(x_{n_k}) \rightarrow f(x_0) \implies (f(x_{n_k}))$  ist beschränkt, aber:  $|f(x_{n_k})| > n_k \forall k \in \mathbb{N}$ , Widerspruch! Sei  $(y_n)$  eine konvergente Folge in  $f(D)$  und  $y_0 := \lim y_n$ . z.z.:  $y_0 \in f(D)$ .  $\exists$  Folge  $(x_n)$  mit  $f(x_n) = y_n \forall n \in \mathbb{N}$ . HS(e)  $\implies (x_n)$  enthält eine konvergente Teilfolge  $(x_{n_k})$  mit  $x_0 := \lim x_{n_k} \in D$ .  $f$  stetig  $\implies \underbrace{f(x_{n_k})}_{=y_{n_k}} \rightarrow f(x_0)$ . Aber auch:  $y_{n_k} \rightarrow y_0 = f(x_0) \in f(D)$  ■

Sei  $I \subseteq \mathbb{R}$  ein Intervall und  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$  streng monoton wachsend (*fallend*)  $\implies f$  ist auf  $I$  injektiv.  $\implies \exists f^{-1} : f(I) \rightarrow \mathbb{R}$ .  $f^{-1}$  ist streng monoton wachsend (*fallend*). Es gilt:  $f^{-1}(f(x)) = x \forall x \in I$ ,  $f(f^{-1}(y)) = y \forall y \in f(I)$  Übung: Sei  $M \subseteq \mathbb{R}$ .  $M$  ist ein Intervall :  $\iff$  aus  $a, b \in M$  und  $a \leq b$  folgt stets  $[a, b] \subseteq M$ .

**Satz 18.5 (Bildintervalle und Umkehrbarkeit stetiger, monotoner Funktionen)**

Sei  $I \subseteq \mathbb{R}$  ein Intervall und  $f \in C(I)$ .

- (1)  $f(I)$  ist ein Intervall
- (2) Ist  $f$  streng monoton wachsend (*fallend*)  $\implies f^{-1} \in C(f(I))$

### Beweis

- (1) Übung (mit obiger Übung und 18.1)

- (2) O.B.d.A:  $I = [a, b]$ .  $\alpha := f(a), \beta := f(b) \xrightarrow[\text{f wachsend}]{(1)} f(I) = [\alpha, \beta]$ . Sei  $x_0 \in [\alpha, \beta]$ . Sei  $(y_n)$  eine Folge in  $f(I)$  und  $y_n \rightarrow y_0$ . z.z.:  $f^{-1}(y_n) \rightarrow f^{-1}(y_0)$ .  $x_n := f^{-1}(y_n), x_0 := f^{-1}(y_0) \implies x_0 \in I, x_n \in I \forall n \in \mathbb{N}$ . d.h.  $(x_n)$  ist beschränkt. z.z.:  $x_n \rightarrow x_0$ . 8.2  $\implies \mathcal{H}(x_n) \neq \emptyset$ . Sei  $\alpha \in \mathcal{H}(x_n)$ .  $\exists$  eine Teilfolge  $(x_{n_k})$  von  $(x_n)$  mit  $x_{n_k} \rightarrow \alpha$ .  $I$  ist abgeschlossen  $\implies \alpha \in I$ .  $f$  stetig  $\implies \underbrace{f(x_{n_k})}_{=y_{n_k}} \rightarrow f(\alpha)$ . Aber auch:  $y_{n_k} \rightarrow y_0 = f(x_0) \implies f(\alpha) = f(x_0) \xrightarrow{\text{f injektiv}} \alpha = x_0$ . d.h.  $\mathcal{H}(x_n) = \{x_0\}$ . Aus 9.3 folgt:  $x_n \rightarrow x_0$  ■

### Satz 18.6 (Der Logarithmus)

Sei  $I = \mathbb{R}$  und  $f(x) = e^x$ . Bekannt:  $f \in C(\mathbb{R})$ ,  $f$  ist streng monoton wachsend und  $f(I) = f(\mathbb{R}) = (0, \infty)$ . Also existiert  $f^{-1} : (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ .

$$\log x := \ln x := f^{-1}(x) \quad (x \in (0, \infty)) \quad \text{Logarithmus}$$

### Eigenschaften

- (1)  $\log 1 = 0, \log e = 1$
- (2)  $\log e^x = x \quad \forall x \in \mathbb{R}, e^{\log x} = x \quad \forall x \in (0, \infty)$
- (3)  $x \mapsto \log x$  ist stetig auf  $(0, \infty)$  und streng monoton wachsend
- (4)  $\log(xy) = \log x + \log y; \log(\frac{x}{y}) = \log x - \log y \quad \forall x, y > 0$
- (5)  $\log x \rightarrow \infty \quad (x \rightarrow \infty); \log x \rightarrow -\infty \quad (x \rightarrow 0^+)$
- (6)  $\log(a^r) = r \log a \quad \forall a > 0 \quad \forall r \in \mathbb{Q}$  d.h.  
 $a^r = e^{r \log a} \quad \forall a > 0 \quad \forall r \in \mathbb{Q}$

### Beweis

- (1) klar (2) klar (3) 18.5
- (4)  $e^{\log xy} = xy = e^{\log x} e^{\log y} = e^{\log x + \log y} \implies \log(xy) = \log(x) + \log(y)$
- (5) folgt aus 16.3
- (6) Sei  $a > 0, n, m \in \mathbb{N}$ .  $\log(a^n) \stackrel{4}{=} n \log a, \log(a^{-n}) = \log(\frac{1}{a^n}) \stackrel{4}{=} \log 1 - \log a^n = -n \log a$   
 $\log a = \log((\frac{1}{a})^n) = n \log a^{\frac{1}{n}} \implies \log a^{\frac{1}{n}} = \frac{1}{n} \log a$   
 $\log(a^{\frac{m}{n}}) = \log((\frac{1}{a})^m) = m \log(a^{\frac{1}{n}}) = \frac{m}{n} \log a$  ■

**Definition (Die allgemeine Potenz)**

Sei  $a > 0$ . Motiviert durch 18.6(6):  $a^x = e^{x \log a}$  ( $x \in \mathbb{R}$ )

**Eigenschaften**

(1)  $x \rightarrow a^x$  ist auf  $\mathbb{R}$  stetig

(2)  $a^{x+y} = a^x a^y$ ;  $(a^x)^y = a^{x \cdot y}$ ,  $a^{-x} = \frac{1}{a^x} \forall x, y \in \mathbb{R}$ .

(3)  $\log(a^x) = x \cdot \log a$

**Beweis**

(1) Klar

(2)  $a^{x+y} = e^{(x+y) \log a} = e^{x \log a} \cdot e^{y \log a} = a^x a^y$

(3)  $\log(a^x) = \log(e^{x \cdot \log a}) = x \cdot \log a$  ■

In der Übung:  $\lim_{x \rightarrow x_0} (1 + \frac{1}{x})^x = \lim_{t \rightarrow 0} (1 + t)^{\frac{1}{t}} = e$