

11. Weitere Eigenschaften holomorpher Funktionen

In diesem Paragraphen sei $G \subseteq \mathbb{C}$ stets ein **Gebiet**. Fast wörtlich wie in Analysis I zeigt man:

Satz 11.1 (Identitätssatz für Potenzreihen)

$\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z - z_0)^n$ sei eine Potenzreihe mit Konvergenzradius $r > 0$,

es sei $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(z - z_0)^n$ für $z \in U_r(z_0)$, es sei (z_k) eine

Folge in $\dot{U}_r(z_0)$ mit $z_k \rightarrow z_0$ und es gelte $f(z_k) = 0 \forall k \in \mathbb{N}$.

Dann: $a_n = 0 \forall n \in \mathbb{N}_0$.

Satz 11.2 (Identitätssatz für holomorphe Funktionen)

Es sei $f \in H(G)$, $z_0 \in G$, (z_k) eine Folge in $G \setminus \{z_0\}$ mit $f(z_k) = 0 \forall k \in \mathbb{N}$ und $z_k \rightarrow z_0$.

Dann: $f = 0$ auf G .

Beweis

$\exists r > 0: U_r(z_0) \subseteq G$. 10.4 $\Rightarrow f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!} (z - z_0)^n \forall z \in U_r(z_0)$

$\exists k_0 \in \mathbb{N}: z_k \in U_r(z_0) \forall k \geq k_0$. 11.1 $\Rightarrow f^{(n)}(z_0) = 0 \forall n \in \mathbb{N}_0$

$\Rightarrow z_0 \in A := \{z \in G : f^{(n)}(z) = 0 \forall n \in \mathbb{N}_0\}$. $B := G \setminus A$, $A \cap B = \emptyset$

Sei $a \in A$. $\exists \delta > 0: U_\delta(a) \subseteq G$. 10.4 $\Rightarrow f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(a)}{n!} (z - a)^n \forall z \in U_\delta(a)$

$a \in A \Rightarrow f^{(n)}(a) = 0 \forall n \in \mathbb{N}_0 \Rightarrow f \equiv 0$ auf $U_\delta(a)$

$\Rightarrow f^{(n)} \equiv 0$ auf $U_\delta(a) \forall n \in \mathbb{N}_0$

$\Rightarrow U_{(\delta)}(a) \subseteq A$. A ist also offen. Sei $b \in B$. $\exists k \in \mathbb{N}_0: f^{(k)}(b) \neq 0$;

$f^{(k)}$ stetig $\Rightarrow \exists \epsilon > 0: U_\epsilon(b) \subseteq G$ und $f^{(k)}(z) \neq 0 \forall z \in U_\epsilon(b)$

$\Rightarrow U_\epsilon(b) \subseteq B$; d.h. B ist offen. G ist ein Gebiet $\Rightarrow B = \emptyset \Rightarrow G = A \Rightarrow$ Beh. ■

Bezeichnung

für $f \in H(G)$: $Z(f) := \{z \in G : f(z) = 0\}$.

Folgerung 11.3

(1) Ist $f \in H(G)$, $f \not\equiv 0$ auf G und $z_0 \in Z(f)$, so existiert ein $\epsilon > 0$:

$U_\epsilon(z_0) \subseteq G$, $f(z) \neq 0 \forall z \in \dot{U}_\epsilon(z_0)$

(2) Ist $f \in H(G)$, $z_0 \in G$ und gilt: $f^{(n)}(z_0) = 0 \forall n \in \mathbb{N}_0$, so ist $f = 0$ auf G .

Beweis

(1) folgt aus 11.2

(2) Verfahre wie im Beweis von 11.2 ■

Satz 11.4

Sei G ein EG und $f \in H(G)$ mit $Z(f) = \emptyset$

(1) $\exists h \in H(G): e^h = f$ auf G

(2) Ist $n \in \mathbb{N}$, so existiert ein $g \in H(G): g^n = f$ auf G

Beweis

(1) Es ist $\frac{f'}{f} \in H(G)$. G ist ein EG $\Rightarrow \exists F \in H(G): F' = \frac{f'}{f}$ auf G . $\phi := \frac{e^F}{f}$.

Dann: $\phi \in H(G)$ und $\phi' = 0$ auf G . (nachrechnen!)

$\exists c \in \mathbb{C}: e^F = c \cdot f$ auf G .

Klar: $c \neq 0$. 7.1 $\Rightarrow \exists a \in \mathbb{C}: c = e^a \Rightarrow f = e^{F-a}$ auf G .

(2) Sei h wie in (1), $g := e^{\frac{1}{n}h}$. Dann: $g^n = e^h = f$ auf G . ■

Satz 11.5

Sei $D \subseteq \mathbb{C}$ offen.

(1) Ist $F \in H(D)$, $0 \in D$, $F(0) = 0$ und $F'(0) \neq 0$, so gilt: $0 \in (F(D))^o$

(2) Ist $f \in H(G)$ **nicht** konstant, so ist $f(G)$ offen.

(3) **Satz von der Gebietstreue:**

Ist $f \in H(G)$ **nicht** konstant, so ist $f(G)$ ein Gebiet.

Beweis

(1) $u := \operatorname{Re} F$, $v := \operatorname{Im} F$. 4.1 $\Rightarrow u_x(0) = v_y(0)$, $u_y(0) = -v_x(0)$

und $F'(0) = u_x(0) + iv_x(0)$

$\Rightarrow \det \begin{pmatrix} u_x(0) & u_y(0) \\ v_x(0) & v_y(0) \end{pmatrix} = u_x(0)^2 + v_x(0)^2 = |F'(0)|^2 \neq 0$

Umkehrsatz (Analysis II) $\Rightarrow \exists U \subseteq D: 0 \in U$, U ist offen und $F(U)$ ist offen. $F(0) = 0 \Rightarrow 0 \in F(U) \Rightarrow \exists \delta > 0: U_\delta(0) \subseteq F(U) \subseteq F(D)$.

(2) Sei $w_0 \in f(D)$. z.z. $\exists \delta > 0: U_\delta(w_0) \subseteq f(D)$.

O.B.d.A. $w_0 = 0$. $\exists z_0 \in D: f(z_0) = w_0 = 0$. O.B.d.A. $z_0 = 0$.

Also: $f(0) = 0$. $\exists \varepsilon > 0: U_\varepsilon(z_0) \subseteq D$.

10.4 $\Rightarrow f(z) = a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \dots \quad \forall z \in U_\varepsilon(0)$;

$f(0) = 0 \Rightarrow a_0 = 0$. 11.3 $\Rightarrow \exists n \in \mathbb{N}: a_n \neq 0$

$m := \min\{n \in \mathbb{N}: a_n \neq 0\} (\geq 1)$

Dann: $f(z) = z^m(a_m + a_{m+1}z + a_{m+2}z^2 + \dots) = z^m \cdot g(z) \quad \forall z \in U_\varepsilon(0)$,

wobei $g \in H(U_\varepsilon(0))$ und $g(0) = a_m \neq 0$.

g stetig $\Rightarrow \exists r \in (0, \varepsilon): g(z) \neq 0 \quad \forall z \in U_r(0)$

$U_r(0)$ ist ein EG $\stackrel{11.4}{\Rightarrow} \exists h \in H(U_r(0))$: $h^m = g$ auf $U_r(0)$
 Def. $F \in H(U_r(0))$ durch $F(z) := zh(z)$.
 Dann: $F(0) = 0$, $F'(z) = h(z) + zh'(z)$
 also $F'(0)^m = h(0)^m = g(0) \neq 0$, also $F'(0) \neq 0$.
 Weiter: $F^m = f$ auf $U_r(0)$. (1) $\Rightarrow \exists R > 0$: $U_R(0) \subseteq F(U_r(0))$.
 $\delta := R^m$. Sei $w \in U_\delta(0)$. 1.5 $\Rightarrow \exists v \in \mathbb{C}$: $v^m = w$
 Dann: $|v|^m = |w| < \delta = R^m \Rightarrow |v| < R \Rightarrow v \in U_R(0) \subseteq F(U_r(0))$
 $\Rightarrow \exists z \in U_r(0) \subseteq D$ mit: $F(z) = v$.
 $\Rightarrow w = v^m = F(z)^m = f(z) \in f(D)$
 Also: $U_\delta(0) \subseteq f(D)$

(3) 3.6 $\Rightarrow f(G)$ ist zusammenhängend $\stackrel{(2)}{\Rightarrow} f(G)$ ist ein Gebiet.

Satz 11.6 (Maximum-, Minimumsprinzip (I))

$f \in H(G)$ sei nicht konstant.

- (1) $|f|$ hat auf G kein lokales Maximum
- (2) Ist $Z(f) = \emptyset$, so hat $|f|$ auf G kein lokales Minimum.

Beweis

- (1) Sei $z_0 \in G$ und $\epsilon > 0$ so, dass $U_\epsilon(z_0) \subseteq G$. $w_0 := f(z_0)$. 11.5 $\Rightarrow f(U_\epsilon(z_0))$ ist offen.
 $w_0 \in f(U_\epsilon(z_0)) \Rightarrow \exists \delta > 0$: $U_\delta(w_0) \subseteq f(U_\epsilon(z_0))$.
 $\exists w \in U_\delta(w_0)$: $|w| > |w_0|$. $\exists z \in U_\epsilon(z_0)$: $w = f(z)$.
 Dann: $|f(z)| = |w| > |w_0| = |f(z_0)|$
- (2) Wende (1) auf $\frac{1}{f}$ an. ■

Satz 11.7 (Maximum-, Minimumsprinzip (II))

G sei beschränkt, $f \in C(\overline{G})$ und es sei $f \in H(G)$.

- (1) $|f(z)| \leq \max_{w \in \partial G} |f(w)| \quad \forall z \in \overline{G}$
- (2) Ist $f(z) \neq 0 \quad \forall z \in G$, so gilt $|f(z)| \geq \min_{w \in \partial G} |f(w)| \quad \forall z \in \overline{G}$

Beweis

- (1) \overline{G} ist kompakt, 3.3 $\Rightarrow \exists w_0 \in \overline{G}$: $|f(z)| \leq |f(w_0)| \quad \forall z \in \overline{G}$
 Fall 1: $w_0 \in \partial G$: fertig
 Fall 2: $w_0 \in G$. Dann: $|f(z)| \leq |f(w_0)| \quad \forall z \in G$. 11.6 $\Rightarrow f$ ist konstant auf G . f stetig $\Rightarrow f$ konstant auf $\overline{G} \Rightarrow$ Beh.
- (2) Fall 1: $f(z) \neq 0 \quad \forall z \in \overline{G}$. Wende (1) auf $\frac{1}{f}$ an.
 Fall 2: $\exists z_0 \in \overline{G}$: $f(z_0) = 0$ Vor. $\Rightarrow z_0 \in \partial G \Rightarrow \min_{w \in \partial G} |f(w)| = 0 \Rightarrow$ Behauptung. ■

Definition

Sei $A \subseteq G$. A heißt **diskret in G** : $\iff A$ hat in G keinen Häufungspunkt. ($\iff \forall z_0 \in G \exists r = r(z_0) > 0 : A \cap \dot{U}_r(z_0) = \emptyset$)

Aufgabe: Ist A diskret in G , so ist A höchstens abzählbar.

Satz 11.8

Sei $f \in H(G)$ und f nicht identisch 0 auf G .

Dann ist $Z(f)$ diskret in G .

Ist $z_0 \in Z(f)$, so existiert ein $m \in \mathbb{N}$ und ein $g \in H(G)$:

$$f(z) = (z - z_0)^m g(z) \quad \forall z \in G \quad \text{und} \quad g(z_0) \neq 0$$

m und g sind eindeutig bestimmt. m heißt **Ordnung** (oder **Vielfachheit**) der Nullstelle z_0 von f . (" f hat eine m -fache Nullstelle")

Beweis

11.3 $\Rightarrow Z(f)$ ist diskret in G . O.B.d.A: $z_0 = 0$. $\exists r > 0 : U_r(0) \subseteq G$.

10.4 $\Rightarrow f(z) = a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \dots \quad \forall z \in U_r(0)$. $f(0) = 0 \Rightarrow a_0 = 0$

11.2 $\Rightarrow \exists n \in \mathbb{N} : a_n \neq 0$, $m := \min\{n \in \mathbb{N} : a_n \neq 0\}$

Dann: $f(z) = z^m \underbrace{(a_m + a_{m+1}z + \dots)}_{:=\varphi(z)} = z^m \varphi(z) \quad \forall z \in U_r(0)$

Es ist $\varphi \in H(U_r(0))$ und $\varphi(0) = a_m \neq 0$

Definiere $g : G \rightarrow \mathbb{C}$ durch

$$g(z) := \begin{cases} \frac{f(z)}{z^m} & , z \neq 0 \\ a_m & , z = 0 \end{cases}$$

Dann: $f(z) = z^m g(z) \quad \forall z \in G$, $g(0) = a_m \neq 0$, $g = \varphi$ auf $U_r(0)$, also $g \in H(G)$ ■

Aufgabe: Sei f wie in 11.8, $z_0 \in G$ und $m \in \mathbb{N}$. Dann:

f hat in z_0 eine m -fache Nullstelle $\iff f(z_0) = f'(z_0) = \dots = f^{(m-1)}(z_0) = 0$ und $f^{(m)}(z_0) \neq 0$

Satz 11.9

Sei $f \in H(G)$.

(1) Sei $g : G \times G \rightarrow \mathbb{C}$ definiert durch

$$g(z, w) := \begin{cases} \frac{f(z) - f(w)}{z - w} & , z \neq w \\ f'(z) & , z = w \end{cases}$$

Dann ist g stetig.

(2) Ist $z_0 \in G$, so existiert ein $\epsilon > 0$:

$U_\epsilon(z_0) \subseteq G$ und (*) $|f(z) - f(w)| \geq \frac{1}{2} |f'(z_0)| |z - w| \quad \forall z, w \in U_\epsilon(z_0)$

Ist $f'(z_0) \neq 0$, so ist f auf $U_\epsilon(z_0)$ injektiv und f^{-1} ist auf $f(U_\epsilon(z_0))$ stetig.

Beweis

- (1) Es genügt zu zeigen: ist $z_0 \in G$, so ist g stetig in $(z_0, z_0) \in G \times G, \epsilon > 0: |g(z, w) - f'(z_0)| < \epsilon$
 Sei $\epsilon > 0$. $\exists \delta > 0 : U_\delta(z_0) \subseteq G$ und $|f'(w) - f'(z_0)| \leq \epsilon \forall w \in U_\delta(z_0)$
 Seien $z, w \in U_\delta(z_0)$. $\gamma(t) := z + t(w - z)$ ($t \in [0, 1]$), dann :
 $Tr(\gamma) \subseteq U_\delta(z_0)$.

$U_\delta(z_0)$ ist ein Sterngebiet und f' hat auf $U_\delta(z_0)$ die Stammfunktion f .

$$9.2 \Rightarrow \int_{\gamma} f'(\xi) d\xi = f(w) - f(z) \Rightarrow f(w) - f(z) = \int_0^1 f'(\gamma(t))(w - z) dt$$

$$\text{Ist } z \neq w \Rightarrow g(z, w) = \int_0^1 f'(\gamma(t)) dt$$

$$\text{Ist } z = w \Rightarrow \gamma(t) = z \forall t \in [0, 1]$$

$$\Rightarrow \int_0^1 f'(\gamma(t)) dt = \int_0^1 f'(z) dt = f'(z) = g(z, z)$$

$$\text{Also: } g(z, w) = \int_0^1 f'(\gamma(t)) dt$$

Dann:

$$|g(z, w) - f'(z_0)| = \left| \int_0^1 f'(\gamma(t)) - f'(z_0) dt \right| \leq \int_0^1 \underbrace{|f'(\gamma(t)) - f'(z_0)|}_{\leq \epsilon} dt \leq \epsilon$$

- (2) Aus (1): $|g(z, w)| \rightarrow |f'(z_0)|$ ($(z, w) \rightarrow (z_0, z_0)$) $\Rightarrow \exists \epsilon > 0 : U_\epsilon(z_0) \subseteq G$ und $|g(z, w)| \geq \frac{1}{2}|f'(z_0)| \forall z, w \in U_\epsilon(z_0) \Rightarrow (*)$
 Sei $f'(z_0) \neq 0$. $(*) \Rightarrow f$ ist injektiv auf $U_\epsilon(z_0)$
 Seien $\lambda, \mu \in f(U_\epsilon(z_0)); z := f^{-1}(\lambda), w := f^{-1}(\mu)$
 $|f^{-1}(\lambda) - f^{-1}(\mu)| = |z - w| \leq \frac{2}{|f'(z_0)|} |\lambda - \mu|$ ■

Satz 11.10

Sei $f \in H(G)$, $z_0 \in G$ und $f'(z_0) \neq 0$

Dann existiert ein $r > 0: U_r(z_0) \subseteq G$,

- (1) f ist auf $U_r(z_0)$ injektiv und $f'(z) \neq 0 \forall z \in U_r(z_0)$
- (2) $f(U_r(z_0))$ ist ein Gebiet
- (3) $f^{-1} \in H(f(U_r(z_0)))$ und $(f^{-1})'(w) = \frac{1}{f'(f^{-1}(w))} \forall w \in f(U_r(z_0))$

Beweis

- (1) Sei $\epsilon > 0$ wie in 11.9(2), f' ist stetig $\Rightarrow \exists r \in (0, \epsilon) : f'(z) \neq 0 \forall z \in U_r(z_0)$

- (2) folgt aus 11.5

- (3) Sei $w_0 \in f(U_r(z_0))$ und (w_n) eine Folge in $f(U_r(z_0)) \setminus \{w_0\}$ mit: $w_n \rightarrow w_0$.

$$z_n := f^{-1}(w_n), \tilde{z} := f^{-1}(w_0). \quad 11.4 \Rightarrow f^{-1} \text{ stetig in } w_0 \Rightarrow z_n \rightarrow \tilde{z}$$

$$\Rightarrow \frac{f^{-1}(w_n) - f^{-1}(w_0)}{w_n - w_0} = \frac{z_n - \tilde{z}}{f(z_n) - f(\tilde{z})} \rightarrow \frac{1}{f'(\tilde{z})} = \frac{1}{f'(f^{-1}(w_0))}$$

$$\text{Also ist } f^{-1} \text{ in } w_0 \text{ komplex differenzierbar und } (f^{-1})'(w_0) = \frac{1}{f'(f^{-1}(w_0))}$$
 ■

Satz 11.11

Sei $f \in H(G)$ auf G injektiv. Dann:

- (1) $Z(f') = \emptyset$
- (2) $f^{-1} \in H(f(G))$ und $(f^{-1})'(w) = \frac{1}{f'(f^{-1}(w))}$ für $\forall w \in f(G)$

Beweis

- (1) Annahme: Sei $z_0 \in G$ mit $f'(z_0) = 0$, $w_0 := f(z_0)$. O.B.d.A. $w_0 = 0 = z_0$. Also $f(0) = f'(0) = 0$
 11.8 $\Rightarrow \exists m \geq 2; \exists g \in H(G)$ mit $f(z) = z^m g(z) \forall z \in G$ und $g(0) \neq 0$.
 11.3 $\Rightarrow \exists \varepsilon > 0 : f(z) \neq 0 \forall z \in U_\varepsilon(0)$ und $U_\varepsilon(0) \subseteq G$. Also $g(z) \neq 0 \forall z \in U_\varepsilon(0)$. 11.4 $\Rightarrow \exists \psi \in H(U_\varepsilon(0))$ mit $\psi^m = g$ auf $U_\varepsilon(0)$. Def. $\varphi \in H(U_\varepsilon(0))$ durch $\varphi(z) := z\psi(z) (z \in U_\varepsilon(0))$.
 Dann: $\varphi^m = f$ auf $U_\varepsilon(0)$; $\varphi(0) = 0$, $\varphi'(z) = \psi(z) + z\psi'(z)$, $\varphi'(0)^m = \psi(0)^m = g(0) \neq 0$
 also $\varphi'(0) \neq 0$. O.B.d.A. $\varphi'(z) \neq 0 \forall z \in U_\varepsilon(0)$. Klar: φ ist auf $U_\varepsilon(0)$ injektiv.
 $0 = \varphi(0) \in \varphi(U_\varepsilon(0))$. 11.5 $\Rightarrow \exists \delta > 0 : U_\delta(0) \subseteq \varphi(U_\varepsilon(0))$ 11.10 $\Rightarrow \varphi^{-1} \in H(\varphi(U_\varepsilon(0)))$, 11.5 $\Rightarrow U := \varphi^{-1}(U_\delta(0))$ ist offen. Klar: $0 \in U$, $U \subseteq U_\varepsilon(0)$ und $(*)\varphi(U) = U_\delta(0)$.
 Sei $z_1 \in U \setminus \{0\}$; $a_1 := \varphi(z_1)$; $w_1 := f(z_1) \neq 0$. $a_1^m = \varphi(z_1)^m = f(z_1) = w_1 \Rightarrow a_1 \neq 0$. 1.5 $\Rightarrow a_1$ ist eine m -te Wurzel von w_1 ; $m \geq 2 \Rightarrow \exists a_2 : a_2^m = a_1^m = w_1$ mit $a_1 \neq a_2$.
 $a_2^m = w_1 = \varphi(z_1)^m$; $|a_2| = |\varphi(z_1)| \stackrel{(*)}{<} \delta \Rightarrow a_2 \in \varphi(U) \Rightarrow \exists z_2 \in U : a_2 = \varphi(z_2) \Rightarrow f(z_2) = \varphi(z_2)^m = a_2^m = w_1 = a_1^m = f(z_1) \Rightarrow f(z_1) = f(z_2)$ Widerspruch zu f injektiv!
- (2) folgt aus (1) und 11.10 ■

Definition

Sei $z_0 \in G$; $a > 0$; $\gamma_1, \gamma_2 : [0, a] \rightarrow \mathbb{C}$ seien glatte Wege und

$\gamma_j'(t) \neq 0 \forall t \in [0, a], j = 1, 2$ und $\gamma_1(0) = z_0 = \gamma_2(0)$. $\angle(\gamma_1, \gamma_2, z_0) := \arg \gamma_2'(0) - \arg \gamma_1'(0) = \arg \frac{\gamma_2'(0)}{\gamma_1'(0)}$ Orientierter Winkel von γ_1 nach γ_2 in z_0 .

Satz 11.12 (Winkeltreue)

Sei $f \in H(G)$, $z_0 \in G$ und $f'(z_0) \neq 0$. Dann:

$$\angle(f \circ \gamma_1, f \circ \gamma_2, f(z_0)) = \angle(\gamma_1, \gamma_2, z_0)$$

Beweis

$\Gamma_j := f \circ \gamma_j (j = 1, 2)$. $\Gamma_j'(t) = f'(\gamma_j(t))\gamma_j'(t)$ $\Gamma_j'(0) = f'(z_0)\gamma_j'(0) \neq 0$.

$\exists b \in (0, a)$ mit $\Gamma_j'(t) \neq 0 \forall t \in [0, b]$.

$$\angle(\Gamma_1, \Gamma_2, f(z_0)) = \arg \frac{\Gamma_2'(0)}{\Gamma_1'(0)} = \arg \frac{\gamma_2'(0)}{\gamma_1'(0)} = \angle(\gamma_1, \gamma_2, z_0) \quad \blacksquare$$

Definition

- (1) G_1 und G_2 seien Gebiete in \mathbb{C} . Ist $f \in H(G_1)$ injektiv auf G_1 und gilt $f(G_1) = G_2$, so heißt f eine **konforme Abbildung** von G_1 auf G_2 .
- (2) Ist $f : G \rightarrow G$ eine konforme Abbildung von G auf G , so heißt f ein **Automorphismus** von G :
 $f \in \text{Aut}(G)$.

Satz 11.13

G_1, G_2 seien Gebiete, $f : G_1 \rightarrow G_2$ sei eine konforme Abbildung von G_1 auf G_2 und G_1 sei ein Elementargebiet. Dann ist G_2 ebenfalls ein Elementargebiet.

Beweis

Sei $g \in H(G_2)$, $h := (g \circ f)f'$. Dann $h \in H(G_1)$, G_1 EG $\Rightarrow \exists$ eine Stammfunktion Φ von h , $F := \Phi \circ f^{-1}$ ist dann SF von g , g war beliebig $\Rightarrow G_2$ ebenfalls EG. ■

