

# Numerik I Dörfler SS08 - Vorlesungsmitschrieb

## Inhaltsverzeichnis

0.1	Aufgaben . . . . .	3
0.2	Hilfsmittel . . . . .	3
<b>1</b>	<b>Anwendungsbeispiele</b>	<b>3</b>
1.1	ComputerTomographie . . . . .	3
1.1.1	Modell . . . . .	3
1.1.2	Das Tomographie-Problem . . . . .	3
1.1.3	Ein diskretes Tomographie-Problem . . . . .	5
1.2	Wärmeleitung . . . . .	6
1.2.1	Wärmeleitungsgleichung . . . . .	6
1.2.2	Diskretisierung . . . . .	7
1.3	Berechnung elektrostatischer Felder . . . . .	8
1.3.1	Elektrostatische Potenziale und Felder . . . . .	8
1.3.2	Das Prinzip der virtuellen Arbeit . . . . .	8
1.3.3	Das Poisson-Problem . . . . .	9
1.3.4	Diskretisierung des Poissonproblems . . . . .	10
1.3.5	Konvergenzbetrachtung . . . . .	11
<b>2</b>	<b>Rundungsfehler und numerische Stabilität</b>	<b>11</b>
2.1	Grenzen der Genauigkeit . . . . .	11
2.2	Zahldarstellung . . . . .	12
2.2.1	Zahlssysteme . . . . .	12
2.2.2	Maschinenzahlen . . . . .	12
2.2.3	Rundungsfehleranalyse . . . . .	13
2.3	Konditionen von Abbildungen . . . . .	15
2.3.1	Norm- und komponentenweise Kondition . . . . .	15
2.3.2	Beispiele . . . . .	15
2.4	Stabilität numerischer Algorithmen . . . . .	16
2.4.1	Vorwärtsanalyse . . . . .	17
2.4.2	Rückwärtsanalyse . . . . .	17

<b>3</b>	<b>Lineare Gleichungssysteme</b>	<b>18</b>
3.1	Direkte Verfahren: Gauß-Elimination . . . . .	18
3.1.1	Das Gaußsche Eliminationsverfahren . . . . .	18
3.1.2	Die LR-Zerlegung . . . . .	19
3.1.3	Pivotisierung . . . . .	22
3.1.4	Rechenaufwand . . . . .	23
3.1.5	Gauß-Elimination für Bandmatrizen . . . . .	23
3.1.6	Block-Gauß-Elimination . . . . .	24
3.1.7	Existenz der $LR$ -Zerlegung ohne Pivotisierung . . . . .	25
3.1.8	Numerische Stabilität . . . . .	26
3.1.9	Bemerkungen . . . . .	26
3.2	Cholesky-Zerlegung . . . . .	27
3.3	Iterative Verfahren . . . . .	28
3.3.1	Basisiteration . . . . .	28
3.3.2	Konvergenz linearer Iterationen . . . . .	28
3.3.3	Die „klassischen Iterationsverfahren“ . . . . .	30
3.3.4	Konvergenz des Jakobi- und Gauß-Seidel-Verfahrens . . . . .	32
3.3.5	Konvergenzsatz des SOR-Verfahrens . . . . .	33
3.3.6	Konvergenz des SSOR . . . . .	34
3.3.7	Beispiele . . . . .	34
3.3.8	Konsistent geordnete Matrizen . . . . .	35
3.3.9	Rechenaufwand . . . . .	36
3.3.10	Idee Des Mehrgitterverfahrens . . . . .	38
3.4	Das CG-Verfahren . . . . .	39
3.4.1	Das Gradientenverfahren . . . . .	39
3.4.2	Fehlerminimierung auf Unterräumen . . . . .	40
3.4.3	Krylovräume . . . . .	41
3.4.4	Das CG-Verfahren nach Hestenes/ Stiefel (1954) . . . . .	41
3.4.5	Konvergenz des CG-Verfahrens . . . . .	44
3.4.6	Vorkonditionierung . . . . .	47
3.5	GMRES (Generalized minimal residuals, 1986) . . . . .	48
3.5.1	Minmale Residuen . . . . .	48
3.5.2	Konstruktion des GMRES-Verfahrens . . . . .	49
<b>4</b>	<b>Nichtlineare Gleichungen</b>	<b>53</b>
4.1	Fixpunkte (Ergänzung 5) . . . . .	53
4.1.1	Fixpunkte und Nullstellen . . . . .	53
4.1.2	Banachscher Fixpunktsatz . . . . .	53
4.1.3	Beispiele . . . . .	53
4.1.4	Konvergenzordnung . . . . .	55
4.2	Berechnung von Nullstellen . . . . .	56
4.2.1	Extrema (Ergänzung 7) . . . . .	56
4.2.2	Nullstellen reeller Funktionen . . . . .	56
4.2.3	Lokale Konvergenz des Newtonverfahrens . . . . .	60