§ 25.

Lineare Differentialgleichungen n-ter Ordnung mit konstanten Koeffizienten

In diesem Paragraphen sei $n \in \mathbb{N}, a_0, \ldots, a_{n-1} \in \mathbb{R}, I \subseteq \mathbb{R}$ ein Intervall und $b : I \to \mathbb{R}$ stetig.

Wir betrachten zunächst die **homogene Gleichung**

$$y^{(n)} + a_{n-1}y^{(n-1)} + \cdots + a_0 y = 0 \tag{H}$$

und geben **ohne** Beweis ein „Kochrezept" an, wie man zu einem FS von (H) kommt.

$$p(\lambda) := \lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + \cdots + a_1\lambda + a_0$$

heißt das **charakteristische Polynom** von (H).

Übung:
Ist

$$A := \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & 1 \\ -a_0 & \cdots & \cdots & \cdots & -a_{n-1} \end{pmatrix}$$

so ist $\det(\lambda I - A) = p(\lambda)$.

Kochrezept:

(1) Bestimme die verschiedenen Nullstellen $\lambda_1, \ldots, \lambda_r (r \leq n)$ von p und deren Vielfachheiten $k_1, \ldots, k_r$, also:

$$p(\lambda) = (\lambda - \lambda_1)^{k_1} \cdots (\lambda - \lambda_r)^{k_r}$$

Es seien $\lambda_1, \ldots, \lambda_m \in \mathbb{R}$ und $\lambda_{m+1}, \ldots, \lambda_r \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$.

$$M := \{\lambda_1, \ldots, \lambda_m\} \cup \{\lambda_j \mid m+1 \leq j \leq r, \operatorname{Im}(\lambda_j) > 0\}$$

(2) Sei $\lambda_j \in M$.
Fall 1: $\lambda_j \in \mathbb{R}$
Dann sind

$$e^{\lambda_j x}, xe^{\lambda_j x}, \ldots, x^{k_j - 1}e^{\lambda_j x}$$

k_j linear unabhängige Lösungen von (H).
Fall 2: $\lambda_j \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$, etwa $\lambda_j = \alpha + i\beta$ $(\alpha, \beta \in \mathbb{R}, \beta > 0)$

Dann sind

$$e^{\alpha x}\cos(\beta x), xe^{\alpha x}\cos(\beta x), \dots, x^{k_j-1}e^{\alpha x}\cos(\beta x)$$
$$e^{\alpha x}\sin(\beta x), xe^{\alpha x}\sin(\beta x), \dots, x^{k_j-1}e^{\alpha x}\sin(\beta x)$$

$2k_j$ linear unabhängige Lösungen von (H).

(3) Führt man (2) für jedes $\lambda_j \in M$ durch, so erhält man ein FS von (H).

Beispiele:

(1) Bestimme die allg. Lösung der Gleichung

$$y^{(6)} - 6y^{(5)} + 9y^{(4)} = 0 \qquad (*)$$

Es gilt:

$$p(\lambda) = \lambda^6 - 6\lambda^5 + 9\lambda^4 = \lambda^4(\lambda^2 - 6\lambda + 9) = \lambda^4(\lambda - 3)^2$$

Sei also:

$$\lambda_1 := 0 \qquad \lambda_2 := 3$$
$$k_1 := 4 \qquad k_2 := 2$$

Ein FS von $(*)$ lautet: $1, x, x^2, x^3, e^{3x}, xe^{3x}$. Das bedeutet für die allgemeine Lösung von $(*)$:

$$y(x) = c_1 + c_2x + c_3x^2 + c_4x^3 + c_5e^{3x} + c_6xe^{3x} \quad (c_1, \dots, c_6 \in \mathbb{R})$$

(2) Bestimme die allgemeine Lösung der Gleichung:

$$y''' - 2y'' + y' - 2y = 0 \qquad (*)$$

Es gilt:

$$p(\lambda) = \lambda^3 - 2\lambda^2 + \lambda - 2 = (\lambda^2 + 1)(\lambda - 2) = (\lambda - 2)(\lambda + i)(\lambda - i)$$

Sei also:

$$\lambda_1 := 2 \qquad \lambda_2 := i \qquad \lambda_3 := -i$$
$$k_1 := 1 \qquad k_2 := 1 \qquad k_3 := 1$$

Dann ist $M := \{2, i\}$ und ein FS von $(*)$ lautet: $e^{2x}, \cos(x), \sin(x)$. Das bedeutet für die allgemeine Lösung von $(*)$:

$$y(x) = c_1e^{2x} + c_2\cos(x) + c_3\sin(x) \quad (c_1, c_2, c_3 \in \mathbb{R})$$

(3) Löse das AwP:

$$\begin{cases} y''' - 2y'' + y' - 2y = 0 \\ y(0) = 0, y'(0) = 1, y''(0) = 0 \end{cases}$$

Die allgemeine Lösung der Dgl lautet:

$$y(x) = c_1e^{2x} + c_2\cos(x) + c_3\sin(x)$$

Es ist:

$$y'(x) = 2c_1 e^{2x} - c_2 \sin(x) + c_3 \cos(x)$$
$$y''(x) = 4c_1 e^{2x} - c_2 \cos(x) - c_3 \sin(x)$$

Außerdem gilt:

$$0 \stackrel{!}{=} y(0) = c_1 + c_2 \qquad 1 \stackrel{!}{=} y'(0) = 2c_1 + c_3 \qquad 0 \stackrel{!}{=} 4c_1 - c_2$$

Daraus folgt:

$$c_1 = 0 \qquad c_2 = 0 \qquad c_3 = 1$$

Also lautet die Lösung des AwPs:

$$y(x) = \sin(x)$$

Wir betrachten auch noch die **inhomogene Gleichung**

$$y^{(n)} + a_{n-1}y^{(n-1)} + \cdots + a_0 y = b(x) \tag{IH}$$

Definition
$\mu \in \mathbb{C}$ heißt eine **nullfache Nullstelle** von p, genau dann wenn $p(\mu) \neq 0$ ist.

Regel (ohne Beweis):
Seien $\alpha, \beta \in \mathbb{R}, m, q \in \mathbb{N}_0$ und b von der Form:

$$b(x) = (b_0 + b_1 x + \cdots + b_m x^m)e^{\alpha x}\cos(\beta x) \quad \text{, oder}$$
$$b(x) = (b_0 + b_1 x + \cdots + b_m x^m)e^{\alpha x}\sin(\beta x)$$

Ist $\alpha + \beta i$ eine q-fache Nullstelle von p, so gibt es eine spezielle Lösung y_s von (IH) der Form:

$$y_s(x) = x^q e^{\alpha x}\left[(A_0 + A_1 x + \cdots + A_m x^m)\cos(\beta x) + (B_0 + B_1 x + \cdots + B_m x^m)\sin(\beta x)\right]$$

Beispiel
Bestimme die allgemeine Lösung der Gleichung

$$y''' - y' = x + 1 \tag{$*$}$$

(1) Bestimme die allgemeine Lösung der homogenen Gleichung

$$y''' - y' = 0 \tag{$**$}$$

Es gilt:

$$p(\lambda) = \lambda^3 - \lambda = \lambda(\lambda^2 - 1) = \lambda(\lambda + 1)(\lambda - 1)$$

Also ist ein FS von $(**)$: $1, e^x, e^{-x}$. Damit lautet die allgemeine Lösung der homogenen Gleichung:

$$y_h(x) = c_1 + c_2 e^x + c_3 e^{-x} \quad (c_1, c_2, c_3 \in \mathbb{R})$$

(2) Bestimme eine allgemeine Lösung der inhomogenen Gleichung $(*)$.
Es ist $m = 1, \alpha = \beta = 0, q = 1$. Ansatz:

$$\begin{aligned}
y_s(x) &= x(A_0 + A_1 x) = A_0 x + A_1 x^2 \\
y_s'(x) &= A_0 + 2A_1 x \\
y_s''(x) &= 2A_1 \\
y_s'''(x) &= 0
\end{aligned}$$

Mit Einsetzen in $(*)$ folgt:

$$0 - (A_1 + 2A_1 x) = x + 1$$

Also ist:

$$A_0 = -1 \qquad\qquad A_1 = -\frac{1}{2}$$

D.h. eine spezielle Lösung von (IH) lautet:

$$y_s(x) = -x - \frac{1}{2}x^2$$

Damit lautet die allgemeine Lösung von (IH):

$$y(x) = c_1 + c_2 e^x + c_3 e^{-x} - x - \frac{1}{2}x^2 \quad (c_1, c_2, c_3 \in \mathbb{R})$$