22. Höhere Ableitungen

Stets in diesem Paragraphen: $I \subseteq \mathbb{R}$ sei ein Intervall und $f : I \to \mathbb{R}$ eine Funktion.

Definition

(1) f sei auf I differenzierbar und $x_0 \in I$. f heißt in x_0 zweimal differenzierbar genau dann, wenn f' in x_0 differenzierbar ist. In diesem Fall heißt $f''(x_0) = (f')'(x_0)$ die zweite Ableitung von f in x_0.

(2) f heißt auf I zweimal differenzierbar genau dann, wenn f in jedem $x \in I$ zweimal differenzierbar ist. In diesem Fall heißt $f'' = (f')'$ die zweite Ableitung von f auf I.

(3) Entsprechend definiert man (falls vorhanden): $f'''(x_0), f^{(4)}(x_0), \dots$ bzw. $f''', f^{(4)}, \dots$.

(4) Sei $n \in \mathbb{N}$. f heißt auf I **n-mal stetig differenzierbar** genau dann, wenn f auf I n-mal differenzierbar ist und $f, f', \dots, f^{(n)} \in C(I)$.

(5) Sei $n \in \mathbb{N}$. $C^n(I) := \{g : I \to \mathbb{R} : g$ ist auf I n-mal stetig differenzierbar$\}$, $C^0(I) := C(I)$, $f^{(0)} := f$, $C^\infty(I) := \bigcap_{n\in\mathbb{N}} C^n(I)$.

Beispiele:

(1) $(\sin x)' = \cos x$, $(\sin x)'' = -\sin x$, $\dots$

(2) $(e^x)^{(n)} = e^x$ auf $\mathbb{R}$ $\forall n \in \mathbb{N}_0$

(3) $f(x) := \begin{cases} x^2 & ; x \geq 0 \\ -x^2 & ; x < 0 \end{cases}$. Für $x > 0$: $f'(x) = 2x$, für $x < 0$: $f'(x) = -2x$.
Für $x = 0$: $\frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \frac{\pm x^2}{x} = \pm x \xrightarrow{x\to 0} 0 \implies f$ ist in $x = 0$ differenzierbar und $f'(0) = 0$. Also: $f'(x) = 2|x|$ $\forall x \in \mathbb{R}$. Also ist f in $x = 0$ nicht zweimal differenzierbar.

(4) $f(x) := \begin{cases} x^{\frac{3}{2}} \sin(\frac{1}{x}) & ; x \neq 0 \\ 0 & ; x = 0 \end{cases}$.
Für $x \in (0,1]$: $f'(x) = \frac{3}{2}\sqrt{x} \sin \frac{1}{x} + x^{\frac{3}{2}} \cos \frac{1}{x}(-\frac{1}{x^2}) = \frac{3}{2}\sqrt{x} \sin \frac{1}{x} - \frac{1}{\sqrt{x}} \cos \frac{1}{x}$.
Für $x = 0$: $\frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \sqrt{x} \sin \frac{1}{x} \xrightarrow{x\to 0} 0$. f ist also auf $[0,1]$ differenzierbar.
$x_n := \frac{1}{n\pi}$ $(n \in \mathbb{N})$. Dann $x_n \to 0$ $(n \to \infty)$. $f'(x_n) = (-1)^{n+1}\sqrt{n\pi} \not\to 0$ $(n \to \infty)$ $\implies f'$ ist nicht stetig in $x = 0$. Also $f \notin C^1([0,1])$. Für später: f' ist auf $[0,1]$ nicht beschränkt.

Satz 22.1 (Differenzierbarkeit von Potenzreihen)
Sei $\sum_{n=0}^\infty a_n(x - x_0)^n$ eine Potenzreihe mit Konvergenzradius $r > 0$, $I := (x_0 - r, x_0 + r)$ ($I = \mathbb{R}$ falls $r = \infty$) und $f(x) = \sum_{n=0}^\infty a_n(x - x_0)^n$ $(x \in I)$.

(1) $f \in C^\infty(I)$

(2) $\forall x \in I$ $\forall k \in \mathbb{N} : f^{(k)}(x) = \sum_{n=k}^\infty n(n-1)\dots(n-k+1) \cdot a_n(x - x_0)^{n-k}$.

(3) $a_k = \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}\ \forall k \in \mathbb{N}_0$

Beweis

(1) und

(2) folgen induktiv aus 21.9.

(3) folgt aus (2) und $x = x_0$ ■

Motivation: Ist also f wie in 22.1, so gilt: $f \in C^\infty(I)$ und $f(x) = \sum_{n=0}^\infty \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n\ \forall x \in I$.

Definition
Sei $f \in C^\infty(I)$ und $x_0 \in I$. Die Potenzreihe $\sum_{k=0}^\infty \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k$ heißt die zu f (und x_0) gehörende **Taylorreihe**.

Motivation: *Frage:* Wird f in einer Umgebung von x_0 durch seine Taylorreihe dargestellt? *Antwort:* Manchmal!

Beispiele:

(1) Ist f wie in 22.1, so lautet die Antwort: ja!

(2) $f(x) := \begin{cases} e^{-\frac{1}{x^2}} & , x \neq 0 \\ 0 & , x = 0 \end{cases}.$
Übungsblatt: $f \in C^\infty(\mathbb{R})$ und $f^{(n)}(0) = 0\ \forall n \in \mathbb{N}_0$.
Dann: $\sum_{k=0}^\infty \frac{f^{(k)}(0)}{k!}x^k = 0 \neq f(x)\ \forall x \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$

Definition
Sei $n \in \mathbb{N}_0$, $f \in C^n(I)$ und $x_0 \in I$. $T_n(x; x_0) := \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k$ heißt das **Taylorpolynom** von f.

Satz 22.2 (Satz von Taylor)
Voraussetzungen wie in obiger Definition. Weiter sei f $n+1$-mal differenzierbar auf I und $x \in I$. Dann existiert ein ξ zwischen x und x_0 mit:

$$f(x) = T_n(x; x_0) + \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}$$

Beweis
Ohne Beschränkung der Allgemeinheit sei $x_0 = 0$ und $x > x_0$.
$\rho := (f(x) - T_n(x; 0))\frac{(n+1)!}{x^{n+1}} \implies f(x) - T_n(x; 0) = \frac{\rho}{(n+1)!}x^{n+1}$
Zu zeigen ist: $\exists \xi \in [0, x] : \rho = f^{(n+1)}(\xi)$.
Definiere $h : [0, x] \to \mathbb{R}$ durch $f(x) = f(x) - \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(t)}{k!}(x-t)^k - \rho\frac{(x-t)^{n+1}}{(n+1)!}$. Nachrechnen: $h(0) = h(x)$ und $h'(t) = \rho\frac{(x-t)^n}{n!} - \frac{f^{(n+1)}(t)}{n!}(x-t)^n$.
$0 = \frac{h(x)-h(0)}{x-0} \overset{\text{MWS}}{=} h'(\xi)\ \xi \in (0, x) \implies \rho\frac{(x-\xi)^n}{n!} = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{n!}(x-\xi)^n \implies \rho = f^{(n+1)}(\xi)$. ■

Beispiele:

(1) Behauptung: $e \notin \mathbb{Q}$

Beweis: Bekannt: $2 < e < 3$.

Annahme: $\exists m, n \in \mathbb{N} : e = \frac{m}{n}$. Dann: $n \geq 2$ (Sonst: $e = m \in \mathbb{N}$, Wid!) $f(x) := e^x, x_0 = 0, x = 1$

$22.2 \implies \exists \xi \in (0,1)$ mit $\frac{m}{n} = e = f(1) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} + \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}$

$\frac{m}{n} = 1 + 1 + \frac{1}{2!} + \ldots + \frac{1}{n!} + \frac{e^\xi}{(n+1)!} \mid \cdot n!$.

$\underbrace{m(n-1)!}_{\in \mathbb{N}} = \underbrace{n! + n! + \frac{n!}{2!} + \cdots + \frac{n!}{n!}}_{\in \mathbb{N}} + \underbrace{\frac{e^\xi}{n+1}}_{>0} \implies \frac{e^\xi}{n+1} \in \mathbb{N} \implies 1 \leq \frac{e^\xi}{n+1} < \frac{e}{n+1} < \frac{3}{n+1} \overset{n \geq 2}{\leq} 1$. Wid!

(2) Behauptung: $\log 2 = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k}$

Beweis: $I = (-1, \infty)$, $f(x) = \log(1+x)$, $x_0 = 0$, $x = 1$. Durch vollständige Induktion lässt sich zeigen:

$$f^{(k)}(x) = \frac{(-1)^{k+1}(k-1)!}{(1+x)^k} \quad (k \in \mathbb{N})$$

Also gilt:

$$\frac{f^{(k)}(0)}{k!} = \begin{cases} 0, & k = 0 \\ \frac{(-1)^{k+1}}{k}, & k \in \mathbb{N} \end{cases}$$

Wegen dem Satz von Taylor folgt:

$$\forall n \in \mathbb{N}\ \exists \xi_n \in (0,1) : \log 2 = f(1) = T_n(1;0) + \frac{f^{(n+1)}(\xi_n)}{(n+1)!}$$

$$= \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} + \frac{f^{(n+1)}(\xi_n)}{(n+1)!} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k} + \underbrace{\frac{f^{(n+1)}(\xi_n)}{(n+1)!}}_{=:c_n}$$

zu zeigen: $c_n \to 0$ $(n \to \infty)$.

$$|c_n| = \left|\frac{(-1)^{n+2} n!}{(n+1)!(1+\xi_n)^{n+1}}\right| = \frac{1}{n+1} \cdot \underbrace{\frac{1}{(1+\xi_n)^{n+1}}}_{\leq 1} \implies c_n \to 0 \ (n \to \infty).$$

Satz 22.3 (Bestimmung von Extrema durch höhere Ableitungen)
Sei $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$, $f \in C^n(I)$, $x_0 \in I$ und x_0 sei ein innerer Punkt von I. Weiter gelte: $f'(x_0) = f''(x_0) = \ldots = f^{(n-1)}(x_0) = 0$ und $f^{(n)}(x_0) \neq 0$.

(1) Ist n gerade und $f^{(n)}(x_0) > 0 \implies f$ hat in x_0 ein relatives Minimum.
Ist n gerade und $f^{(n)}(x_0) < 0 \implies f$ hat in x_0 ein relatives Maximum.

(2) Ist n ungerade $\implies f$ hat in x_0 kein relatives Extremum.

Beweis
$f \in C^n(I) \implies f^{(n)} \in C(I),\ f^{(n)}(x_0) \neq 0$. Damit folgt nach §18:

$$\exists \delta > 0 : U_\delta(x_0) \subseteq I \text{ und } f^{(n)}(x_0) f^{(n)}(\xi) > 0 \ \forall \xi \in U_\delta(x_0). \quad (*)$$

Sei $x \in U_\delta(x_0) \setminus \{x_0\}$. Nach dem Satz von Taylor existiert ein ξ zwischen x und x_0 mit:

$$f(x) = \underbrace{T_{n-1}(x; x_0)}_{\overset{\text{Vor.}}{=} f(x_0)} + \frac{f^{(n)}(\xi)}{n!}(x - x_0)^n = f(x_0) + \frac{f^{(n)}(\xi)}{n!}(x - x_0)^n.$$

Zu (1): Sei n gerade, $x \neq x_0 \implies (x - x_0)^n > 0$. Aus $f^{(n)}(x_0) > 0$ folgt wegen $(*)$:

$$f^{(n)}(\xi) > 0 \implies \frac{f^{(n)}(\xi)}{n!}(x - x_0)^n > 0 \implies f(x) > f(x_0)$$

$\implies$ f hat in x_0 ein relatives Minimum. Analog: Aus $f^{(n)}(x_0) < 0$ folgt: f hat in x_0 ein relatives Maximum.

Zu (2): Sei n ungerade. Sei $f^{(n)}(x_0) > 0$. Aus $x > x_0$ folgt:

$$(x - x_0)^n > 0,\ f^{(n)}(\xi) > 0 \implies f(x) > f(x_0).$$

Analog: Aus $x > x_0$ folgt: $f(x) < f(x_0) \implies f$ hat in x_0 kein Extremum.

Analog: Ist $f^{(n)}(x_0) < 0 \implies f(x) < f(x_0)$ für $x > x_0$ und $f(x) > f(x_0)$ für $x < x_0$. ■

Beispiel
Bemerkung: Dieses Beispiel zeigt, wann man den Satz *nicht* anwenden sollte.

$$f(x) = \begin{cases} e^{-1/x^2}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$$

Bekannt: $f \in C^\infty(\mathbb{R}),\ f^{(n)}(0) = 0 \ \forall n \in \mathbb{N}_0$. $f(x) \geq 0 \ \forall x \in \mathbb{R},\ f(0) = 0 \implies f$ hat in $x_0 = 0$ ein absolutes Minimum.