4. Wie Sie Wollen

Definition (Potenz, Fakultät, Binominalkoeffizienten)

(1) Für $a \in \mathbb{R}$ und $n \in \mathbb{N}$ gilt $a^n := a \cdot a \cdot a \cdot a \cdot \ldots \cdot a$ (n Faktoren) und heißt die *n-te Potenz* von a
$a^0 := 1$
Für $a \neq 0$ gilt: $a^{-n} = \frac{1}{a^n}$

(2) Für $n \in \mathbb{N}$ gilt $n! := 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot n$ und heißt die **Fakultät** von n, $0! := 1$.

(3) Für $n \in \mathbb{N}$, $k \in \mathbb{N}_0$ und $k \leq n$ gilt $\binom{n}{k} := \frac{n!}{k!(n-k)!}$ („n über k“)

Satz 4.1 (Eigenschaften von Binomialkoeffizienten)

(1) $\binom{n}{0} = \binom{n}{n} = 1 \; \forall n \in \mathbb{N}$

(2) Für $n, k \in \mathbb{N}, k \leq n$ gilt $\binom{n}{k} + \binom{n}{k-1} = \binom{n+1}{k}$

(3) Für $a, b \in \mathbb{R}, n \in \mathbb{N}$ gilt $a^{n+1} - b^{n+1} = (a-b)(a^n + a^{n-1}b + a^{n-2}b^2 + \ldots + b^n) = (a-b)\sum_{k=0}^{n} a^{n-k}b^k$

Satz 4.2 (Folgerung)
Für $b = 1$ und $x = a$ liefert 4.1 (3):

Für $x \in \mathbb{R}$ und $n \in \mathbb{N}$ gilt:

$$\sum_{k=0}^{n} x^k = 1 + x + x^2 + \ldots + x^n = \begin{cases} n+1 & \text{falls } x = 1 \\ \frac{1-x^{n+1}}{1-x} & \text{falls } x \neq 1 \end{cases}.$$

Satz 4.3 (Bernoullische Ungleichung (BU))
Ist $x \geq -1$, so gilt: $(1+x)^n \geq 1 + nx \; \forall n \in \mathbb{N}$.

Beweis
$n = 1$: $1 + x \geq 1 + x \quad \checkmark$

$n \Rightarrow n+1$:

$$\begin{aligned} (1+x)^n &\geq 1+nx \qquad \text{(IV)} \\ (1+x)(1+x)^n &\geq (1+nx)(1+x) \\ (1+x)^{n+1} &\geq 1+nx+x+\underbrace{nx^2}_{\geq 0} \geq 1+nx+x = 1+(n+1)x \\ \Longrightarrow\ (1+x)^{n+1} &\geq 1+(n+1)x. \end{aligned}$$

■

Satz 4.4 (Der binomische Satz)
Seien $a, b \in \mathbb{R}$. Dann gilt:

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k} b^k \ \forall n \in \mathbb{N}$$

Beispiel

$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

Beweis
$n=1$: $\binom{1}{0}a + \binom{1}{1}b = a+b \quad \surd$

$n \longrightarrow n+1$:

$$\begin{aligned} &(a+b)^{n+1} \\ =&(a+b)(a+b)^n \\ =&(a+b)\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}a^{n-k}b^k && \text{(IV)} \\ =&\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}a^{n+1-k}b^k + \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}a^{n-k}b^{k+1} \\ =&\binom{n}{0}a^{n+1} + \sum_{k=1}^{n}\binom{n}{k}a^{n+1-k}b^k + \sum_{k=0}^{n-1}\binom{n}{k}a^{n-k}b^{k+1} + \binom{n}{n}b^{n+1} \\ =&\binom{n+1}{0}a^{n+1} + \sum_{k=1}^{n}\binom{n}{k}a^{n+1-k}b^k + \sum_{k=1}^{n}\binom{n}{k-1}a^{n-(k-1)}b^k + \binom{n+1}{n+1}b^{n+1} \\ =&\binom{n+1}{0}a^{n+1} + \sum_{k=1}^{n}\binom{n+1}{k}a^{n+1-k}b^k + \binom{n+1}{n+1}b^{n+1} && \text{(4.1 (2))} \\ =&\sum_{k=0}^{n+1}\binom{n+1}{k}a^{n+1-k}b^k. \end{aligned}$$

■