

# Kapitel 3.

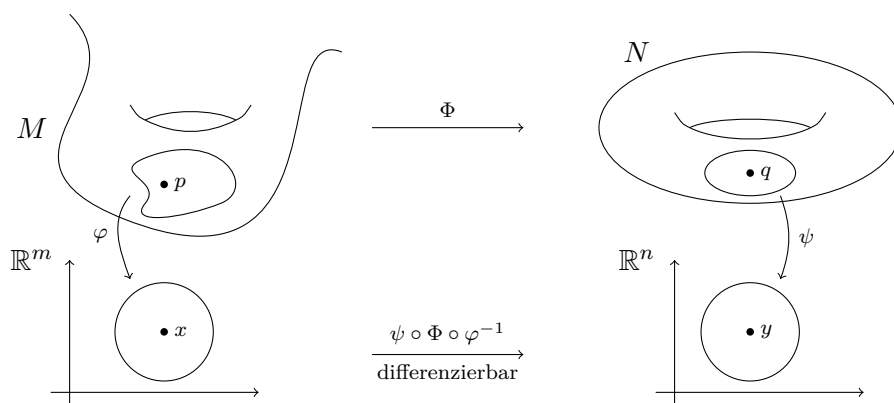
## Differentiale

Es seien  $M$  und  $N$  glatte Mannigfaltigkeiten und  $\Phi: M \rightarrow N$  eine glatte Abbildung. Sind  $p \in M$  und  $X_p \in T_p M$ , so ist

$$\Phi_{*p} X_p: C^\infty(N) \rightarrow \mathbb{R} \quad f \mapsto X_p(\underbrace{f \circ \Phi}_{\in C^\infty(N)}).$$

ein Tangentialvektor an  $N$  in  $\Phi(p)$ :

$$\begin{aligned} \Phi_{*p} X_p(fg) &= X_p((f \circ \Phi)(g \circ \Phi)) = X_p(f \circ \Phi)(g \circ \Phi)(p) + (f \circ \Phi)(p) X_p(g \circ \Phi) \\ &= \Phi_{*p} X_p(f)g(\Phi(p)) + f(\Phi(p)) \Phi_{*p} X_p(g). \end{aligned}$$



**Definition 3.1** Die lineare Abbildung  $\Phi_{*p}: T_p M \rightarrow T_{\Phi(p)} N$  heißt das **Differential** von  $\Phi$  in  $p$ . Der Rang von  $\Phi_{*p}$  bezeichnet man als den Rang von  $\Phi$  in  $p$ .

**Lemma 3.2 (Differentiale in lokalen Koordinaten)** Sind  $\varphi$  und  $\psi$  Karten von  $M$  und  $N$  um  $p$  und  $\Phi(p) = q$ , sowie  $\frac{\partial}{\partial x^i} \Big|_p$  und  $\frac{\partial}{\partial y^j} \Big|_q$  die Standardbasen von  $T_p M$  und  $T_q N$  bezüglich der Karten  $\varphi$  und  $\psi$ , so gilt:

$$\Phi_{*p} \frac{\partial}{\partial x^i} \Big|_p = \sum \partial_i (\psi^j \circ \Phi \circ \varphi^{-1})(\varphi(p)) \frac{\partial}{\partial y^j} \Big|_q.$$

Die partielle Ableitung  $\partial_i (\psi^j \circ \Phi \circ \varphi^{-1})(\varphi(p))$  bezeichnet man auch kurz  $\frac{\partial \Phi^j}{\partial x^i}(p)$ .

**Bemerkung** Aus der Linearität von  $\Phi_{*p}$  folgt, dass für  $X_p = \sum \xi^i \frac{\partial}{\partial x^i} \Big|_p \in T_p M$  und  $\Phi_{*p} X_p = \sum \eta^j \frac{\partial}{\partial y^j} \Big|_q$  gilt:

$$\eta^j = \sum \frac{\partial \Phi^j}{\partial x^i} \xi^i, \text{ beziehungsweise } \eta = D(\psi \circ \Phi \circ \varphi^{-1}) \xi.$$

**Beweis**

$$\underbrace{\left( \Phi_{*p} \frac{\partial}{\partial x^i} \Big|_p \right)}_{\in T_q N} (\psi^j) = \frac{\partial}{\partial x^i} \Big|_p (\psi^j \circ \Phi) = \partial_i (\psi^j \circ \Phi \circ \varphi^{-1})(\varphi(p)) = \frac{\partial \Phi^j}{\partial y^i}(p). \quad \square$$

**Bemerkung (Charakterisierung durch Kurven)** Ist  $[c] \in T_p M$ , so gilt für  $f \in C^\infty(N)$ :

$$\Phi_{*p}[c](f) = [c](f \circ \Phi) = \frac{d}{dt} \Big|_{t=0} \underbrace{(f \circ \Phi \circ c)}_{\text{glatte Kurve auf } N} = [\Phi \circ c](f)$$

also  $\Phi_{*p}[c] = [\Phi \circ c]$ .

**Bemerkung (Tangentialräume an Untermannigfaltigkeiten des  $\mathbb{R}^n$ )** Ist  $U$  eine Untermannigfaltigkeit in  $\mathbb{R}^n$  mit den Eigenschaften

- (i)  $F: U \rightarrow M \cap F(U)$  ist ein Homöomorphismus,
- (ii)  $DF|_x: \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^{m+k}$  ist injektiv für alle  $x \in U$ .

Dann ist  $\psi = F^{-1}$  eine Karte von  $M$ . Es bezeichnen  $\frac{\partial}{\partial y^i} \Big|_p$  die Standardbasis bezüglich  $\psi$  und  $\frac{\partial}{\partial x^i} \Big|_x$  die Standardbasis bezüglich der kanonischen Karte  $\text{id}_{\mathbb{R}^m}$  des  $\mathbb{R}^m$ .

Dann gilt für  $g \in C^\infty(M)$  beliebig:

$$\frac{\partial}{\partial y^i} \Big|_p (g) = \partial_i (g \circ \psi^{-1}) \underbrace{(\psi(p))}_{=x} = \partial_i (g \circ F)(x) = F_{*x} \left( \frac{\partial}{\partial x^i} \Big|_p \right) (f)$$

$$\begin{aligned} F_{*x} \left( \frac{\partial}{\partial x^i} \Big|_p \right) &= F_{*x}[t \mapsto x + te_i] = [t \mapsto F(x + te_i)] \\ &\sim \frac{d}{dt} \Big|_{t=0} F(x + te_i) = DF|_x(e_i) = \partial_i F|_x \end{aligned}$$

$$T_p M = \langle \partial_1 F|_x, \dots, \partial_m F|_x \rangle$$

**Eigenschaften des Differentials**

- (i) (*Kettenregel*) Sind  $\Phi: M \rightarrow N$  und  $\Psi: N \rightarrow P$  glatt, so gilt:

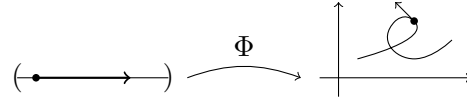
$$(\Psi \circ \Phi)_{*p} = \Psi_{*\Phi(p)} \circ \Phi_{*p}.$$

- (ii) Ist  $\Phi: M \rightarrow N$  ein Diffeomorphismus, so ist  $\Phi_{*p}$  ein Vektorraumisomorphismus.
- (iii) (*Satz von der Umkehrabbildung*) Ist  $\Phi: M \rightarrow N$  glatt und  $\Phi_{*p}$  bijektiv, so existieren Umgebungen  $U$  von  $p$  und  $V$  von  $\Phi(p)$ , so dass  $\Phi|_U: U \rightarrow V$  ein Diffeomorphismus ist.

**Definition 3.3 (Reguläre Punkte, Submersion, Immersion)** Es sei  $\Phi: M \rightarrow N$  glatt.

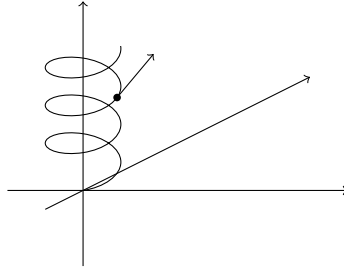
- (i) Es Punkt  $p \in M$  heißt **regulärer Punkt** von  $\Phi$ , wenn  $\Phi_{*p}$  surjektiv ist. Ein Punkt  $q \in N$  heißt **regulärer Wert**, wenn jeder Punkt  $p \in \Phi^{-1}(q)$  regulär ist.
- (ii) Die Abbildung  $\Phi$  heißt **Submersion**, wenn  $\Phi$  surjektiv ist und alle  $p \in M$  reguläre Punkte sind.
- (iii) Die Abbildung  $\Phi$  heißt **Immersion**, wenn für alle  $p \in M$   $\Phi_{*p}$  injektiv ist.
- (iv) Die Abbildung  $\Phi$  heißt **Einbettung**, wenn  $\Phi$  Immersion und Homöomorphismus auf sein Bild ist.

**Beispiel 1)** Betrachte eine Abbildung  $\Phi$



Immersion:  $\frac{d}{dt}$  Basis von  $T_x \mathbb{R}$ ,  $\Phi_{*x} \left( \frac{d}{dt} \right) = \frac{d}{dt} \Phi$

- 2)  $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2 \cong \mathbb{C}, t \mapsto e^{it}$  ist eine Immersion aber ebenfalls nicht injektiv.
- 3)  $\mathbb{R} \rightarrow S^1 \subset \mathbb{C}, t \mapsto e^{it}$  ist Immersion und Submersion.
- 4)  $\mathbb{R} \rightarrow S^1 \times \mathbb{R}, t \mapsto (e^{it}, t)$  ist eine Einbettung.



- 5) Ist  $M \subset N$  Untermannigfaltigkeit, so ist  $\iota: M \hookrightarrow N$  eine Einbettung.

**Satz 3.4** Es seien  $M$  und  $N$  glatte Mannigfaltigkeiten,  $\Phi: M \rightarrow N$  eine glatte Abbildung und  $p \in M$ , sowie  $q = \Phi(p)$ . Es bezeichnen  $m$  und  $n$  die Dimensionen von  $M$  und  $N$  und  $r$  den Rang von  $\Phi$  in  $p$ . Dann gelten folgende Aussagen:

- (i) Zu jeder Karte  $\psi$  von  $N$  um  $q$  mit  $\psi(q) = 0$  existiert eine Karte  $\alpha$  von  $M$  um  $p$  mit  $\alpha(p) = 0$  und glatte Funktionen  $f^{r+1}, \dots, f^n$  mit

$$(\psi \circ \Phi \circ \alpha^{-1})(x^1, \dots, x^m) = (x^1, \dots, x^r, f^{r+1}(x), \dots, f^n(x)).$$

- (ii) Falls der Rang von  $\Phi$  auf einer Umgebung von  $p$  konstant  $r$  ist, so existieren Karten  $\alpha$  um  $p$  mit  $\alpha(p) = 0$  und  $\beta$  um  $q$  mit  $\beta(q) = 0$ , so dass

$$(\beta \circ \Phi \circ \alpha^{-1})(x^1, \dots, x^m) = (x^1, \dots, x^r, 0, \dots, 0).$$

**Korollar 3.5** (i) Falls  $\Phi$  auf einer offenen Umgebung von  $P = \Phi^{-1}(q)$  konstanten Rang  $r$  hat, so ist  $P$  eine Untermannigfaltigkeit der Kodimension  $r$ .

- (ii) Ist  $q$  ein regulärer Wert von  $\Phi$ , so ist  $P = \Phi^{-1}(q)$  eine Untermannigfaltigkeit von  $M$  der Kodimension  $n$ .

Beispiel:  $\|\cdot\|^{-1}(1) = S^n \subset \mathbb{R}^{n+1} \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto \|x\|$ .

- (iii) Ist  $\Phi_{*p}$  injektiv, so existiert eine Umgebung  $U$  von  $p$ , so dass  $\Phi(U) = Q \subset N$  eine Untermannigfaltigkeit von  $N$  ist.
- (iv) Ist  $\Phi$  eine Einbettung, so ist  $Q = \Phi(M)$  eine  $m$ -dimensionale Untermannigfaltigkeit von  $N$  und  $\Phi: M \rightarrow Q$  ist ein Diffeomorphismus.

**Beweis** (i) Sei  $p \in P = \Phi^{-1}(q)$ . Nach Satz 3.4 (ii) existieren Karten  $(\alpha, U), (\beta, V)$  mit

$$(\beta \circ \Phi \circ \alpha^{-1})(x^1, \dots, x^m) = (x^1, \dots, x^r, 0, \dots, 0)$$

und es gilt:

$$\begin{aligned} \alpha(P \cap U) &= (\alpha \circ \Phi^{-1} \circ \beta^{-1})(0) \\ &= \{x \in \alpha(U) \mid x^1 = \dots = x^r = 0\} = \alpha(U) \cap \{0\} \times \mathbb{R}^{m-r}. \end{aligned}$$

(ii) Ist  $q$  ein regulärer Wert von  $\Phi$ , so existieren nach Satz 3.4 (i) Karten  $\psi, \alpha$  mit

$$(\psi \circ \Phi \circ \alpha^{-1})(x^1, \dots, x^m) = (x^1, \dots, x^n) \quad (m \geq n = r)$$

für alle  $x \in \alpha(U)$ . Es gilt also für alle  $u \in U$ :

$$\text{Rang } \Phi_{*u} = \text{Rang } D(\psi \circ \Phi \circ \alpha^{-1})|_x = \text{Rang} \left( \begin{array}{ccc|c} 1 & & 0 & \\ & \ddots & & \\ 0 & & 1 & \\ \hline & & & 0 \end{array} \right) = n$$

Damit folgt die Behauptung aus (i).

(iii)  $\Phi_{*p}$  ist injektiv  $\Rightarrow r = m \leq n$ . Nach Wahl von Karten wie in (ii):

$$(\psi \circ \Phi \circ \alpha^{-1})(x^1, \dots, x^m) = (x^1, \dots, x^m, f^{m+1}(x), \dots, f^n(x))$$

$$\text{Rang } \Phi_{*u} = \text{Rang} \left( \begin{array}{ccc} 1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & 1 \\ \hline & & 0 \end{array} \right) = m$$

Nach der ersten Aussage des letzten Satzes erhalten wir spezielle Karten:

$$(\beta \circ \Phi \circ \alpha^{-1})(x^1, \dots, x^m) = (x^1, \dots, x^m, 0, \dots, 0) \in \mathbb{R}^m \times \{0\},$$

wobei  $\beta$  eine adaptierte Karte für  $\Phi(U) = Q$  ist.

(iv) folgt aus (iii). □

**Beweis (von Satz 3.4)** (i) Es sei  $(\psi, V)$  eine Karte von  $N$  um  $q$  mit  $\psi(q) = 0$ . Ist dann  $(\varphi, U)$  eine Karte von  $M$  um  $p$  mit  $\varphi(p) = 0$ , so kann man ohne Einschränkung annehmen, dass

$$\partial_i(\psi^j \circ \Phi \circ \varphi^{-1}) = \left( \frac{\partial \Phi^j}{\partial x^i} \right)_{i,j \leq r}$$

invertierbar ist. Es sei  $\alpha: U \rightarrow \mathbb{R}^m$  gegeben durch

$$\alpha^j = \begin{cases} \psi^j \circ \Phi & \text{für } j \leq r \\ \varphi^j & \text{sonst} \end{cases}$$

Betrachte nun den Kartenwechsel

$$\left(\frac{\partial \alpha^j}{\partial x^i}\right)_{i,j} = \left(\partial_i(\alpha^j \circ \varphi^{-1})(0)\right)_{i,j} = \left( \begin{array}{c|cc} \left(\frac{\partial \Phi^j}{\partial x^i}\right)_{i,j \leq r} & & * \\ \hline 0 & 1 & 0 \\ & \ddots & \\ & 0 & 1 \end{array} \right)$$

Der Rang von  $\alpha$  in  $p$  ist damit gleich  $m$ . Nach dem Umkehrsatz ist  $\alpha$  ein lokaler Diffeomorphismus, also eine Karte von  $M$ . Ferner gilt für  $j \leq r$ :

$$\left((\psi \circ \Phi \circ \alpha^{-1})(x^1, \dots, x^m)\right)^j = (\psi^j \circ \Phi \circ \alpha^{-1})(\alpha(U)) = (\psi^j \circ \Phi)(U) = \alpha^j(U) = x^j.$$

Damit hat  $\psi \circ \Phi \circ \alpha^{-1}$  die gesuchte Darstellung.

(ii) Der Rang von  $\Phi$  sei auf  $U$  konstant gleich  $r$ . Dann gilt für alle  $x \in \alpha(U)$ .

$$r = \text{Rang } D(\psi \circ \Phi \circ \alpha^{-1})|_x = \left( \begin{array}{ccc|c} 1 & & 0 & \\ & \ddots & & 0 \\ & & 1 & \\ \hline & * & & \underbrace{\left(\frac{\partial f^{r+j}}{\partial x^{r+i}}\right)}_{\rightsquigarrow \text{Rang } 0} \end{array} \right)$$

Somit gilt auf einer Umgebung der 0 für alle  $i, j > r$ :  $\frac{\partial f^j}{\partial x^i} \equiv 0$ . Es gibt also glatte Funktionen  $g^{r+1}, \dots, g^n$  mit  $g^{r+j}(x^1, \dots, x^r) = f^{r+j}(x^1, \dots, x^n)$ .

Setzt man nun

$$\beta^j = \begin{cases} \psi^j & j \leq r \\ \psi^j - g^j \circ (\psi^1, \dots, \psi^r) & \text{sonst} \end{cases},$$

so gilt:

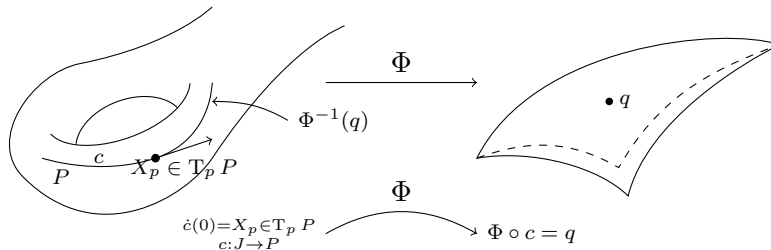
$$\left(\frac{\partial \beta^j}{\partial y^i}(q)\right)_{i,j} = \left( \begin{array}{c|c} \left(\frac{\partial \psi^j}{\partial y^i}\right)_{i,j \leq r} = \delta_i^j & 0 \\ \hline * & \underbrace{\left(\frac{\partial \psi^j}{\partial y^i}\right)}_{=\delta_i^j} - \underbrace{\left(\frac{\partial g^j}{\partial x^i}\right)}_{=0} \end{array} \right).$$

Damit gilt  $\left(\frac{\partial \beta^j}{\partial y^i}\right)_{i,j} = \delta_i^j$  und nach dem Umkehrsatz definiert  $\beta$  in einer Umgebung von  $q$  eine Karte von  $N$ . Wie oben rechnet man nach:

$$(\beta \circ \Phi \circ \alpha^{-1})(x^1, \dots, x^n) = (x^1, \dots, x^r, 0, \dots, 0). \quad \square$$

**Bemerkung** Ist  $\Phi: M \rightarrow N$  glatt mit konstantem Rang  $r$  auf einer Umgebung von  $P = \Phi^{-1}(q)$ , so ist  $P$  eine  $(m-r)$ -dimensionale Untermannigfaltigkeit von  $M$ .

Der Tangentialraum  $T_p P$  in  $p$  an  $P$  ist ein Untervektorraum von  $T_p M$  und es gilt:



Ist  $X_p = \dot{c}(0) \in T_p P$ , so ist  $c$  glatt als Abbildung  $\mathcal{I} \rightarrow M$  und ebenso  $\Phi \circ c \equiv q$ .  
Damit gilt:

$$\Phi_{*p}(\dot{c}(0)) = \underbrace{\overline{\Phi \circ c}}_{\equiv q}(0) = 0,$$

also  $T_p P \subseteq \text{Kern } \Phi_{*p}$ . Es gilt:

$$\dim T_p P = \dim P = m - r = \dim T_p M - \text{Rang } \Phi_{*p} = \dim \text{Kern } \Phi_{*p}.$$

**Beispiel 3.6** Die  $n$ -dimensionale Sphäre  $S^n \subset \mathbb{R}^{n+1}$  ist das reguläre Urbild der glatten Abbildung  $\Phi: \mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R}_{>0}, x \mapsto \|x\|^2$ ;  $S^n = \Phi^{-1}(1)$ . Der Tangentialraum  $T_x \mathbb{R}^{n+1}$  ist vermöge der Abbildung

$$\mathbb{R}^{n+1} \ni V \mapsto [t \mapsto x + tv] \in T_x \mathbb{R}^{n+1}.$$

gegeben. Damit gilt genau dann  $v \in T_x S^n$ , wenn  $[x + tv] \in \text{Kern } \Phi_{*x}$ .

$$0 = \Phi_{*x}[x + tv] = \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} \Phi(x + tv) = \partial_v \Phi(x) = D\Phi|_x(v) = \langle \text{grad } \Phi(x), v \rangle.$$

Es gilt  $\text{grad } \Phi(x) = (2x^1, \dots, 2x^{n+1}) = 2x$ , also gilt  $v \in T_x S^n$ , genau dann, wenn  $v \perp x$ .