1. Algebra Übung

Ferdinand Szekeresch

18. Oktober 2016

Aufgabe 1
$(M, \cdot)$ Magma, $\mathscr{P}(M)$ Potenzmenge.
Für $A, B \subseteq M : A * B := \{a, b : a \in A, b \in B\}$, d.h. $x \in A * B \Leftrightarrow \exists a \in A, b \in B : x = ab$.
dabei auch: $x \in A * \emptyset \Leftrightarrow \exists a \in A, \underbrace{b \in \emptyset}_{\lightning} : x = ab$

$\Rightarrow x \in A * \emptyset$ existiert nicht. $\Rightarrow A * \emptyset = \emptyset$

a) Sei M kommutativ. Für alle $A, B \subseteq M : A * B = \{a \cdot b : a \in A, b \in B\} = \{b \cdot a : b \in B, a \in A\} = B * A$
$\Rightarrow \mathscr{P}(M)$ ist kommutativ.

b) Sei M eine Halbgruppe, d.h. assoziativ. Für alle $A, B, C \subseteq M$:
$(A * B) * C = \{x \cdot c : x \in A * B, c \in C\} = \{(a \cdot b) \cdot c : a \in A, b \in B, c \in C\} = \{a \cdot (b \cdot c) : a \in A, b \in B, c \in C\}$
$= \{a \cdot y : a \in A, y \in B * C\} = A * (B * C)$
$\Rightarrow \mathscr{P}(M)$ ist assoziativ (Halbgruppe).

c) Sei M ein Monoid mit neutralem Element 1.
Zeige: $\{1\}$ ist neutrales Element von $\mathscr{P}(M)$.
Für alle $A \subseteq M : A * \{1\} = \{a \cdot 1 : a \in A\} = A = \{1 \cdot a : a \in A\} = \{1\} * A$
$\Rightarrow \mathscr{P}(M)$ ist Monoid mit neutralem Element $\{1\}$ (Assoziativität nach b)).
Welche $A \subseteq M$ sind invertierbar?

1.Fall $A = \emptyset$
$\Rightarrow \forall B \subseteq M : \emptyset * B = B * \emptyset = \emptyset \neq \{1\}$
$\Rightarrow \emptyset$ ist nicht invertierbar.

2.Fall $A = \{a_0\}$ einelementig
Behauptung: $\{a_0\} \in \mathscr{P}(M)^\times \Leftrightarrow a_0 \in M^\times$

„ $\Rightarrow$ “ $\{a_0\}$ invertierbar $\Rightarrow \exists B \subseteq M, B \neq \emptyset : \{a_0\} * B = B * \{a_0\} = \{1\}$
$b \in B \Rightarrow a_0 b = 1 = b a_0 \Rightarrow a_0$ invertierbar in M und $a_0^{-1} = b \Rightarrow B = \{a_0\}^{-1} = \{a_0^{-1}\}$

„ $\Leftarrow$ “ $\quad a_0 \in M^\times$

$\Rightarrow \{a_0\} * \{a_0^{-1}\} = \{a_0 a_0^{-1}\} = \{1\} = \{a_0^{-1}\} * \{a_0\}$

$\Rightarrow \{a_0\} \in \mathscr{P}(M)^\times$ und $\{a_0\}^{-1} = \{a_0^{-1}\}$.

3.Fall $|A| \geq 2; a_1, a_2 \in A; a_1 \neq a_2$.

Annahme: $\exists B \subseteq M, B \neq \emptyset : A * B = B * A = \{1\}$

Sei $b \in B \Rightarrow a_1 b = 1 = b a_1 \Rightarrow a_1 = b^{-1}$

$a_2 b = 1 = b a_2 \Rightarrow a_2 = b^{-1} \Rightarrow a_1 = a_2 \quad \lightning$

Fazit: $A \subseteq M$ ist invertierber $\Leftrightarrow A = \{a_1\}$ für ein $a_1 \in M^\times$. In diesem Fall ist $A^{-1} = \{a_1^{-1}\}$.

d) Sei M eine Gruppe.
nach c): $\mathscr{P}(M)$ ist ein Monoid mit neutralem Element $\{1\}$.
$\mathscr{P}(M)^\times = \{\{a\} : a \in M\}$
$\Rightarrow \emptyset$ ist nicht invertierbar $\Rightarrow \mathscr{P}(M)$ ist keine Gruppe.

Aufgabe 2

$(M, \cdot)$ Monoid mit neutralem Element 1. Voraussetzung: $\forall x \in M : x^2 = 1$.

- Zeige M ist Gruppe, also jedes $x \in M$ ist invertierbar. Wähle $y = x$.
- M ist abelsch. Seien $x, y \in M \Rightarrow (xy)^2 = 1 \Rightarrow xyxy = 1 \Rightarrow xyxyyx = yx \Rightarrow xyx^2 = yx$
  $\Rightarrow xy = yx$.

Aufgabe 3

a) $f = X^3 + aX^2 + bX + c$,
$Y := X + \frac{a}{3}$ bzw. $X = Y - \frac{a}{3}$
$\Rightarrow f = (Y - \frac{a}{3})^3 + a(Y - \frac{a}{3})^2 + b(Y - \frac{a}{3}) + c$
$= (Y^3 - aY^2 + \frac{a^2}{3}Y - \frac{a^3}{27}) + a(Y^2 - \frac{2a}{3}Y + \frac{a^2}{9}) + b(Y - \frac{a}{3}) + c = Y^3 + \underbrace{(b - \frac{a^3}{3})}_{=:p} Y + \underbrace{(\frac{2a^3}{27} - \frac{ab}{3} + c)}_{=:q}$

b) $g = Y^3 + pY + q, D := -4p^3 - 27q^2, D < 0$
$\zeta := e^{\frac{2\pi i}{3}} = \cos(\frac{2\pi}{3}) + i\sin(\frac{2\pi}{3}) = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$ dritte Einheitswurzel
$\zeta^2 = e^{\frac{4\pi i}{3}} = \cos(\frac{4\pi}{3}) + i\sin(\frac{4\pi}{3}) = -\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}$
$\zeta^3 = 1$
$1 + \zeta + \zeta^2 = 1 + (-\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}) + (-\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}) = 0$.
damit:
$\big(Y - (u+v)\big)\big(Y - (\zeta u + \zeta^2 v)\big)\big(Y - (\zeta^2 u + \zeta v)\big) =$
$(Y - u - v)(Y - \zeta u - \zeta^2 v)(Y - \zeta^2 u - \zeta v) = \ldots = Y^3 + \big(-u\underbrace{(1 + \zeta + \zeta^2)}_{=0} - v\underbrace{(1 + \zeta + \zeta^2)}_{=0}\big)Y^2$

$+\big(-u^2\underbrace{(1+\zeta+\zeta^2)}_{=0}+v^2\underbrace{(1+\zeta+\zeta^2)}_{=0}+3uv\underbrace{(\zeta+\zeta^2)}_{=-1}\big)Y+\big(-u^3-v^3-uv^2\underbrace{(1+\zeta+\zeta^2)}_{=0}-u^2v\underbrace{(1+\zeta+\zeta^2)}_{=0}\big)$
$= Y^3 - 3uvY - (u^3+v^3)$

- $-3uv = -3\big(\frac{1}{2}(-q+\frac{1}{9}\sqrt{-3D})\cdot(-q-\frac{1}{9}\sqrt{-3D})\big)^{\frac{1}{3}} = -3\Big(\frac{1}{4}\big(q^2-\frac{1}{81}(-3D)\big)\Big)^{\frac{1}{3}} =$

  $-3\Big(\frac{1}{4}\big(q^2+\frac{1}{27}(-4p^3-27q^2)\big)\Big)^{\frac{1}{3}} = -3(-\frac{1}{27}p^3)^{\frac{1}{3}} = p$
- $-u^3-v^3 = -\frac{1}{2}(-q+\frac{1}{9}\sqrt{-3D}) - \frac{1}{2}(-q-\frac{1}{9}\sqrt{-3D}) = q$

$\Rightarrow \big(Y-(u+v)\big)\big(Y-(\zeta u+\zeta^2 v)\big)\big(Y-(\zeta^2 u+\zeta v)\big) = Y^3-3uvY-(u^3+v^3) =$
Y^3+pY+q
$\blacksquare$

Beispiel: $f = X^3+X^2-X-1, \quad Y = X+\frac{1}{3}$
damit: $f = Y^3\underbrace{-\frac{4}{3}}_{=:p}Y\underbrace{-\frac{16}{27}}_{=:q}, D = 0 \Rightarrow u = v = \frac{2}{3}$
$\Rightarrow f = (Y-\frac{4}{3})\big(Y-\frac{2}{3}(\zeta+\zeta^2)\big)^2 = (Y-\frac{4}{3})(Y+\frac{2}{3})^2$
$\overset{Y=X+\frac{1}{3}}{=} (X-1)(X+1)^2.$