

# $L^2$ -Theorie

Christian Schulz

18. Oktober 2016

In diesem Papier, wird die Fortsetzung der Fouriertransformation auf  $L^2$  erarbeitet.

**Motivation:** Für Funktionen  $f \in L^2(\mathbb{R}^n)$  muss das Fouriertransformationsintegral

$$\int_{\mathbb{R}^n} f(t) e^{-iw \cdot t} dt$$

nicht existieren. Um eine Fouriertransformation für Funktionen  $f \in L^2(\mathbb{R}^n)$  zu definieren müssen wir anders vorgehen. Die Idee ist klassische Analysis. Wir nehmen zunächst eine dichte Menge  $X$  ( $\emptyset \neq X \subset L^2(\mathbb{R}^n)$ ) auf der die Fouriertransformation definiert ist. Dann folgt mit dem Fortsetzungssatz für stetige Abbildungen die eindeutige Existenz auf  $L^2(\mathbb{R}^n)$ .

## Definition

- (1) Das  $n$ -Tupel  $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$  wird im folgenden als *Multi-Index* bezeichnet.
- (2)  $|\alpha| = \sum \alpha_i$  wird als *Ordnung* bezeichnet.
- (3) Für  $t \in \mathbb{R}^n$  sei  $t^\alpha := \prod t_i^{\alpha_i}$ .
- (4)  $D^\alpha = \prod (\frac{\partial}{\partial x_i})^{\alpha_i}$
- (5)  $D_\alpha = i^{-|\alpha|} D^\alpha = \prod (\frac{1}{i} \frac{\partial}{\partial x_i})^{\alpha_i}$
- (6)  $P(\xi) := \sum c_\alpha \xi^\alpha = \sum c_\alpha \xi_1^{\alpha_1} \dots \xi_n^{\alpha_n}$
- (7)  $P(D) := \sum c_\alpha D_\alpha$ ,  $P(-D) := \sum (-1)^{|\alpha|} c_\alpha D_\alpha$
- (8)  $e_t(x) := e^{it \cdot x} = e^{i(t_1 x_1 + \dots + t_n x_n)} \quad \forall t, x \in \mathbb{R}^n$
- (9)  $dm_n(x) := (2\pi)^{-\frac{n}{2}} dx$
- (10)  $(\tau_x f)(y) := f(y - x) \quad (x, y \in \mathbb{R}^n)$

### Beispiel

In obiger Definition folgt:  $\forall t, x \in \mathbb{R}^n : P(D)e_t = P(t)e_t$

### Beweis

$$\begin{aligned} \text{Seien } t, x \in \mathbb{R}^n \text{ bel. } &\Rightarrow P(D)e_t = \sum c_\alpha D_\alpha e_t(x) \\ &= \sum c_\alpha \left(\frac{1}{i}\right)^{|\alpha|} D^\alpha e^{i(t_1 x_1 + \dots + t_n x_n)} \\ &= \sum c_\alpha \left(\frac{1}{i}\right)^{|\alpha|} i^{|\alpha|} t_1^{\alpha_1} \dots t_n^{\alpha_n} e_t(x) = \sum c_\alpha t^\alpha e_t(x) = P(t)e_t \end{aligned} \quad \blacksquare$$

### Beispiel

Der Ausdruck Fouriertransformation wird für die Abbildung benutzt, die  $f$  auf  $\hat{f}$  abbildet. Dabei sei angemerkt, dass gilt

$$\hat{f}(t) = \int_{\mathbb{R}^n} f e_{-t} dm_n = (f * e_t)(0)$$

### Definition (Schnell fallende Funktionen)

Sei  $\mathcal{S} := \{f \in C^\infty(\mathbb{R}^n) \mid \sup_{|\alpha| \leq N} \sup_{x \in \mathbb{R}^n} (1 + |x|^2)^N |(D_\alpha f)(x)| < \infty, N \in \mathbb{N}_0\}$   
der Raum der schnell fallenden Funktionen ( $|x|^2 = \sum x_i^2$ ).

**Bemerkung:** Mit anderen Worten gilt für alle  $f \in \mathcal{S}$ , dass  $PD_\alpha f$  eine beschränkte Funktion auf  $\mathbb{R}^n$  ist und zwar für jedes Polynom  $P$  und jeden Multi-Index  $\alpha$ .

### Folgerung 0.1

$\mathcal{S}$  ist ein Vektorraum.

### Beweis

$$\begin{aligned} \text{Sei } \psi, \phi \in \mathcal{S} \text{ und } \delta &:= \sup_{|\alpha| \leq N} \sup_{x \in \mathbb{R}^n} (1 + |x|^2)^N |(D_\alpha \psi)(x)|, \tilde{\delta} := \sup_{|\alpha| \leq N} \sup_{x \in \mathbb{R}^n} (1 + |x|^2)^N |(D_\alpha \phi)(x)| \\ &\Rightarrow \forall \alpha \in \mathbb{R} : \sup_{|\tilde{\alpha}| \leq N} \sup_{x \in \mathbb{R}^n} (1 + |x|^2)^N |(D_{\tilde{\alpha}}(\alpha\psi + \phi))(x)| \leq \\ &\alpha\delta + \tilde{\delta} \leq \max\{|\alpha|, 1\} \max\{\delta, \tilde{\delta}\} =: \gamma \end{aligned} \quad \blacksquare$$

### Beispiel

$$\phi(x) := e^{-x^2}, \phi \in \mathcal{S}.$$

### Beweis

Es gilt  $\phi'(x) = -2xe^{-x^2}$ ,  $\phi''(x) = 2xe^{-x^2}(2x^2 - 1)$ , ... es folgt per Induktion, dass  $\phi^{(n)}(x) = p(x) * e^{-x^2}$  (p Polynom)  $\forall n \in \mathbb{N}_0$ . Da  $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \phi^{(n)}(x) = 0$  gilt folgt, dass  $\tilde{p}\phi^{(n)}$  beschränkt ist, wobei  $\tilde{p}$  ein bel. Polynom ist.  $\blacksquare$

### Satz 0.2

(1)  $\mathcal{S}$  ist ein Fréchet Raum.

(2) Sei  $P$  ein Polynom,  $g \in \mathcal{S}$ , und  $\alpha$  ein Multi-Index. Dann sind folgende Abbildungen stetig und linear:

$$T_1 : \mathcal{S} \rightarrow \mathcal{S}, f \mapsto Pf$$

$$T_2 : \mathcal{S} \rightarrow \mathcal{S}, f \mapsto gf$$

$$T_3 : \mathcal{S} \rightarrow \mathcal{S}, f \mapsto D_\alpha f$$

(3) Sei  $f \in \mathcal{S}$  und  $P$  ein Polynom, dann gilt

$$(P(D)f)^\wedge = P\hat{f} \text{ und } (Pf)^\wedge = P(-D)\hat{f}.$$

(4) Die Fouriertransformation ist eine stetige Abbildung von  $\mathcal{S}$  in  $\mathcal{S}$ .

### Beweis

- (1) Sei  $(f_i)_{i \in \mathbb{N}}$  eine Cauchyfolge in  $\mathcal{S}$ . D.h.  $\forall \epsilon > 0 \exists n_0 \in \mathbb{N} : \|f_m - f_n\| < \epsilon \forall n > m \geq n_0$ . Für jedes Paar von Multi-Indizes  $\alpha, \beta$  konvergiert die Funktion  $x^\beta D^\alpha f_i(x)$  (gleichmäßig auf  $\mathbb{R}^n$ ) gegen die beschränkte Funktion  $g_{\alpha\beta}$  (für  $i \rightarrow \infty$ )  $\Rightarrow$

$$g_{\alpha\beta} = x^\beta D^\alpha g_{00}(x)$$

und damit folgt  $f_i \rightarrow g_{00} \Rightarrow \mathcal{S}$  ist vollständig.

- (2) Sei  $f \in \mathcal{S}$ . Dann ist offensichtlich  $D_\alpha f \in \mathcal{S}$ ,  $Pf \in \mathcal{S}$  und  $gf \in \mathcal{S}$ . Die Stetigkeit der drei Abbildungen folgt aus dem *closed graph theorem*.
- (3) Sei  $f \in \mathcal{S} \Rightarrow P(D)f \in \mathcal{S}$  und

$$(P(D)f) * e_t = f * P(D)e_t = f * P(t)e_t = P(t)[f * e_t]$$

Wenn man diese Funktionen nun im Ursprung des  $\mathbb{R}^n$  auswertet, liefert uns das den ersten Teil von (3). Nämlich:

$$(P(D)f)^\wedge(t) = P(t)\hat{f}(t)$$

$$\begin{aligned} \text{Sei } \tilde{t} &:= (t_1 + \epsilon, \dots, t_n), t := (t_1, \dots, t_n), x \in \mathbb{R}^n \\ h(x) &:= e_{-\tilde{t}}(x) - e_{-t}(x) = e^{-i((t_1 + \epsilon)x_1 + \dots + t_n x_n)} - e^{-i(t_1 x_1 + \dots + t_n x_n)} \\ &= (e^{-i\epsilon x_1} - 1)e_{-t}(x) \end{aligned}$$

$$\text{Sei weiterhin } \gamma(x_1, \epsilon) := \frac{e^{-i\epsilon x_1} - 1}{i\epsilon x_1} = \frac{h(x)}{i\epsilon x_1 e_{-t}(x)}.$$

Betrachte

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \gamma(x_1, \epsilon) = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{e^{-i\epsilon x_1} - 1}{i\epsilon x_1} = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} -e^{-i\epsilon x_1} = -1$$

Nun gilt:

$$\frac{\hat{f}(\tilde{t}) - \hat{f}(t)}{i\epsilon} = \int_{\mathbb{R}^n} f(x) \frac{h(x)}{i\epsilon} dm_n = \int_{\mathbb{R}^n} x_1 f(x) \frac{h(x)}{i\epsilon x_1 e_{-t}(x)} e_{-t}(x) dm_n = \int_{\mathbb{R}^n} x_1 f(x) \gamma(x_1, \epsilon) e_{-t}(x) dm_n$$

Da  $x_1 f \in L^1$  folgt für  $\epsilon \rightarrow 0$  mit dem Satz von der dominierenden Konvergenz

$$-\frac{1}{i} \frac{\partial}{\partial t_1} \hat{f} = \int_{\mathbb{R}^n} x_1 f(x) e_{-t}(x) dm_n$$

und damit der zweite Teil der Behauptung für den Fall  $P(x) = x_1$ . Der allgemeine Fall folgt durch Iteration.

- (4) Sei  $f \in \mathcal{S}$  und  $g(x) = \underbrace{(-1)^{|\alpha|} x^\alpha}_{:= \tilde{P}(x)} f(x) \Rightarrow g \in \mathcal{S}$ . Nun folgt mit (3), dass

$$\widehat{g} = D_\alpha \widehat{f}, \text{ denn}$$

$$\widehat{g} = \widehat{\tilde{P}f} = \tilde{P}(-D)\widehat{f} = D_\alpha \widehat{f}$$

und  $P\widehat{g} = (P(D)g)\widehat{\phantom{x}}$ , welche eine beschränkte Funktion ist, da  $P(D)g \in L^1(\mathbb{R}^n)$ . Das beweist, dass  $\widehat{f} \in \mathcal{S}$ . Wenn  $f_i \rightarrow f$  in  $\mathcal{S}$  dann folgt  $f_i \rightarrow f$  in  $L^1(\mathbb{R}^n)$ . Schließlich folgt nun direkt  $\widehat{f_i} \rightarrow \widehat{f} \forall t \in \mathbb{R}^n$ . Die Stetigkeit der Abbildung  $f \rightarrow \widehat{f}$  von  $\mathcal{S}$  nach  $\mathcal{S}$ , folgt wieder aus dem closed graph theorem.

### Satz 0.3

$$(1) (\tau_x f)\widehat{\phantom{x}} = e_{-x} \widehat{f}$$

$$(2) \text{ Sei } \lambda > 0 \text{ und } h(x) = f(x/\lambda) \Rightarrow \widehat{h}(t) = \lambda^n \widehat{f}(\lambda t)$$

### Satz 0.4 (Das Inversionstheorem)

$$(1) g \in \mathcal{S} \Rightarrow g(x) = \int_{\mathbb{R}^n} \widehat{g} e_x dm_n \quad (x \in \mathbb{R}^n)$$

(2) Die Fouriertransformation ist eine stetige, lineare, 1-zu-1 Abbildung von  $\mathcal{S}$  auf  $\mathcal{S}$ , dessen Inverse ebenfalls stetig ist.

$$(3) f \in L^1(\mathbb{R}^n), \widehat{f} \in L^1(\mathbb{R}^n), f_0(x) = \int_{\mathbb{R}^n} \widehat{f} e_x dm_n \quad (x \in \mathbb{R}^n) \Rightarrow f(x) = f_0(x) \text{ fast überall } (x \in \mathbb{R}^n)$$

### Beweis

(1) Zunächst gilt die Identität

$$\int_{\mathbb{R}^n} \widehat{f} g dm_n = \int_{\mathbb{R}^n} f \widehat{g} dm_n$$

Sei nun  $g \in \mathcal{S}, \phi \in \mathcal{S}, \lambda > 0$  und  $f(x) = \phi(x/\lambda)$ . Dann gilt

$$\Gamma(\lambda) := \int_{\mathbb{R}^n} g(\frac{t}{\lambda}) \widehat{\phi}(t) dm_n(t) = \int_{\mathbb{R}^n} \widehat{g}(\frac{t}{\lambda}) \phi(t) dm_n(t) = \int_{\mathbb{R}^n} \lambda^n \widehat{g}(\lambda t) \phi(t) dm_n(t)$$

Nun führt man eine Substitution durch mit  $\gamma(t) = \frac{t}{\lambda}$ . Es gilt  $\gamma(\mathbb{R}^n) = \mathbb{R}^n$  und  $\det(\gamma'(t)) = \frac{1}{\lambda^n}$

$$\Rightarrow \Gamma(\lambda) = \int_{\mathbb{R}^n} \widehat{g}(y) \phi\left(\frac{y}{\lambda}\right) dm_n(y)$$

$$\Rightarrow \int_{\mathbb{R}^n} g\left(\frac{t}{\lambda}\right) \widehat{\phi}(t) dm_n(t) = \int_{\mathbb{R}^n} \widehat{g}(y) \phi\left(\frac{y}{\lambda}\right) dm_n(y)$$

Nun konvergiert für  $\lambda \rightarrow \infty$ ,  $g\left(\frac{t}{\lambda}\right) \rightarrow g(0)$  und  $\phi\left(\frac{y}{\lambda}\right) \rightarrow \phi(0)$  beschränkt.  
Satz von der dominierenden Konvergenz  $\Rightarrow$

$$g(0) \int_{\mathbb{R}^n} \widehat{\phi}(t) dm_n(t) = \phi(0) \int_{\mathbb{R}^n} \widehat{g}(y) dm_n(y)$$

Sei nun  $\phi(x) = e^{-\frac{1}{2}|x|^2}$ . Dann gilt die Behauptung für den Fall  $x = 0$ ,  
denn

$$g(0) = g(0) \underbrace{\int_{\mathbb{R}^n} \widehat{\phi}(t) dm_n(t)}_{=1} = \underbrace{\phi(0)}_{=1} \int_{\mathbb{R}^n} \widehat{g}(y) dm_n(y) = \int_{\mathbb{R}^n} \widehat{g}(y) \underbrace{e_0}_{=1} dm_n(y).$$

Der allgemeine Fall folgt direkt, denn

$$g(x) = (\tau_{-x}g)(0) = \int_{\mathbb{R}^n} \widehat{\tau_{-x}g} dm_n = \int_{\mathbb{R}^n} \widehat{g} e_x dm_n$$

- (2) Sei vorübergehend  $\phi g = \widehat{g}$ . Die Inversionsformel (1) liefert uns schon, dass  $\phi$  eine 1-zu-1 Abbildung ist, da offensichtlich  $\widehat{g} = 0 \Rightarrow g = 0$ . Es zeigt sich weiterhin, dass  $\phi^2 g = \check{g}$ , wobei  $\check{g} = g(-x)$ . Denn

$$\phi^2 g = \phi \widehat{g} = \int_{\mathbb{R}^n} \widehat{g} e_{-t} dm_n = g(-t)$$

Nun folgt  $\phi^4 g = g$  und damit, dass  $\phi$   $\mathcal{S}$  komplett auf  $\mathcal{S}$  abbildet. Die Stetigkeit von  $\phi$  wurde schon in Satz 1.2.4 bewiesen. Da  $\phi^{-1} = \phi^3$  gilt, folgt auch die Stetigkeit von  $\phi^{-1}$ .

- (3) Es gilt zunächst für  $g \in \mathcal{S}$

$$\int_{\mathbb{R}^n} f_0 \widehat{g} dm_n = \int_{\mathbb{R}^n} \int_{\mathbb{R}^n} \widehat{f} e_x dm_n \widehat{g} dm_n = \int_{\mathbb{R}^n} \widehat{f} \int_{\mathbb{R}^n} \widehat{g} e_x dm_n dm_n = \int_{\mathbb{R}^n} \widehat{f} g dm_n = \int_{\mathbb{R}^n} f \widehat{g} dm_n$$

Also:

$$\int_{\mathbb{R}^n} f_0 \widehat{g} dm_n = \int_{\mathbb{R}^n} f \widehat{g} dm_n$$

Aus (2) folgt, dass mit  $\widehat{g}$  alle schnell fallenden Funktionen abgedeckt werden. Da  $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n) \subset \mathcal{S}$  folgt

$$\int_{\mathbb{R}^n} (f_0 - f) \phi dm_n = 0 \quad \forall \phi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$$

und (durch eine Approximation (Übung)) damit gilt diese Identität für jede stetige Funktion  $\phi$  mit kompakten Träger. Es folgt fast überall  $f_0 - f = 0$ .

**Satz 0.5 (Plancherel Theorem)**

Es existiert eine Isometrie  $\Psi : L^2(\mathbb{R}^n) \rightarrow L^2(\mathbb{R}^n)$ , welche eindeutig festgelegt ist durch

$$\Psi f = \widehat{f} \quad \forall f \in \mathcal{S}$$

**Bemerkung:** Man beachte, dass die Gleichheit  $\Psi f = \widehat{f}$  erweitert wird von  $\mathcal{S}$  zu  $L^1(\mathbb{R}^n) \cap L^2(\mathbb{R}^n)$ , da  $\mathcal{S}$  sowohl dicht in  $L^2$  als auch in  $L^1$  liegt. Das liefert uns die Übereinstimmung: das Gebiet von  $\Psi$  ist  $L^2$ .  $\widehat{f}$  wurde schon definiert für  $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$  und  $\Psi f = \widehat{f}$ , falls beide Definitionen anwendbar sind. Daher erweitert  $\Psi$  die Fouriertransformation von  $L^1(\mathbb{R}^n) \cap L^2(\mathbb{R}^n)$  zu  $L^2(\mathbb{R}^n)$ . Diese Erweiterung nennt man immer noch Fouriertransformation, und die Notation  $\widehat{f}$  wird beibehalten.

**Beweis**

Es sei  $f, g \in \mathcal{S}$ , dann liefert uns das Inversionstheorem

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^n} f \bar{g} \, dm_n &= \int_{\mathbb{R}^n} \bar{g}(x) \, dm_n(x) \int_{\mathbb{R}^n} \widehat{f}(t) e^{ix \cdot t} \, dm_n(t) \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} \widehat{f}(t) \, dm_n(t) \int_{\mathbb{R}^n} \bar{g}(x) e^{ix \cdot t} \, dm_n(x) \end{aligned}$$

Das letzte innere Integral ist das komplex Konjugierte von  $\widehat{g}(t)$ .

Das liefert uns die Parseval Formel

$$\int_{\mathbb{R}^n} f \bar{g} \, dm_n = \int_{\mathbb{R}^n} \widehat{f} \overline{\widehat{g}} \, dm_n \quad (f, g \in \mathcal{S})$$

Wir spezialisieren nun  $g = f$ , dann folgt

$$\|f\|_2 = \|\widehat{f}\|_2 \quad f \in \mathcal{S}$$

Nun folgt, da  $\mathcal{S}$  dicht in  $L^2(\mathbb{R}^n)$  liegt, dass die Abbildung  $f \rightarrow \widehat{f}$  eine Isometrie (relativ zur Metric in  $L^2$ ) von  $\mathcal{S} \rightarrow \mathcal{S}$  ist. Mit dem Satz über die eindeutige Fortsetzung folgt, dass  $\psi : L^2(\mathbb{R}^n) \rightarrow L^2(\mathbb{R}^n)$  eine lineare Isometrie von  $L^2(\mathbb{R}^n)$  nach  $L^2(\mathbb{R}^n)$  ist.

Appendix:

**Satz 0.6 (Exkurs: Closed Graph Theorem)**

Es gelte:

- (1)  $X$  und  $Y$  sind F-Räume
- (2)  $\Psi : X \rightarrow Y$  sei linear

(3)  $G = \{(x, \Psi x) | x \in X\}$  ist abgeschlossen in  $X \times Y$

Dann ist  $\Psi$  stetig.

**Satz 0.7 (Exkurs: Eindeutige stetige Fortsetzung)**

Sei  $X, Y$  metrische Räume und  $A$  sei dicht in  $X$ ,  $f : A \rightarrow Y$  sei gleichmäßig stetig. Dann gilt:

- (1)  $f$  hat eine eindeutige stetige Fortsetzung  $F : X \rightarrow Y$
- (2)  $f$  ist Isometrie  $\Rightarrow F$  ist Isometrie und  $F(X)$  ist abgeschlossen in  $Y$ .