Tarefa Matemática

Método gráfico

Feito por: Iúri Novas e Pedro Moretti
Turma: 12º GPSI
Professora: Sandra Bernardes
Disciplina: Matemática

Índice

Índice 1
O que é o Método Gráfico?
Procedimento da Solução Gráfica 3
Exemplo Referencial Usando O Método Gráfico 4
Explicação do Referencial 5
Explicação da orientação das retas 7
Resumo sobre Problemas de Programação Linear (PL) 8
Principais conceitos: 8
Solução Gráfica 9
Resolução de Problemas usando o método analítico 10

O que é o Método Gráfico?

O método gráfico é uma abordagem utilizada para determinar a solução ótima de problemas de Programação Linear (PL) com até três variáveis de decisão. Apesar desta limitação, este método fornece uma ilustração clara das regiões viáveis e não viáveis, bem como dos vértices. A representação visual do problema facilita a compreensão do processo de otimização e contribui para o desenvolvimento de um pensamento lógico mais estruturado, essencial para métodos mais avançados, como o algoritmo simplex.

No caso de um PL com uma solução ótima limitada, esta estará sempre num dos vértices da região admissível (um ponto extremo). No entanto, em alguns casos, pode haver múltiplas soluções ótimas ao longo de um segmento de reta entre vértices. Para determinar a solução ótima, é necessário identificar todos os pontos de interseção (vértices) e verificar qual deles, dentro da região admissíveliável, corresponde à solução ótima. Para tal, recorremos a conceitos de geometria analítica e cálculo, nomeadamente gradientes e curvas de nível, para identificar e analisar esses pontos.

Procedimento da Solução Gráfica

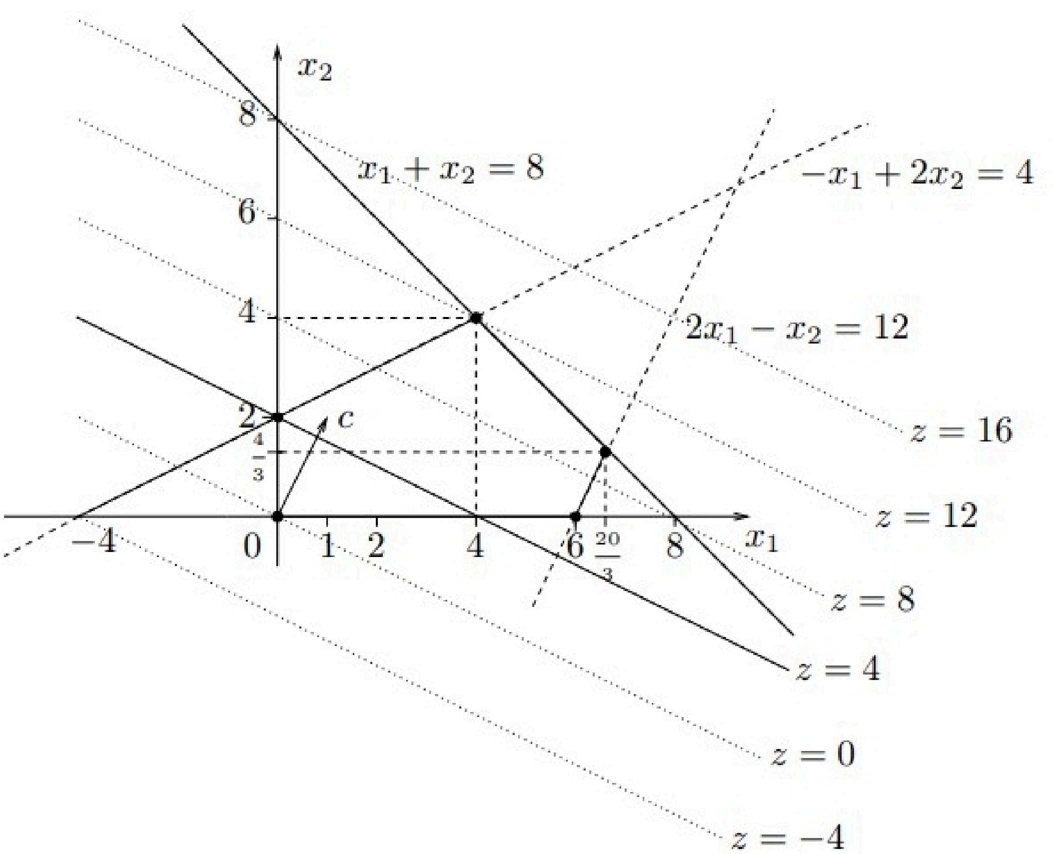
Para um problema de Programação Linear (PL) de maximização, segue-se o seguinte procedimento:

1. **Desenhar as restrições** – Traçar no gráfico a reta correspondente a cada restrição e identificar a região que cada uma define.

2. **Determinar a região admissível**– Identificar a área do gráfico que satisfaz simultaneamente todas as restrições.

3. **Encontrar a solução ótima** através do seguinte método:
   a) Traçar uma ou mais curvas de nível da função objetivo.
   b) Representar o gradiente de Z.
   c) Desenhar curvas de nível paralelas na direção indicada pelo gradiente de Z até que a curva toque a região admissível num único ponto (ou segmento). Este ponto extremo corresponde à solução ótima.

Exemplo Referencial Usando O Método Gráfico



Explicação do Referencial

1 - Eixos e Variáveis:

- O eixo horizontal representa x_1 e o eixo vertical representa x_2. .
- A região admissível é definida pelo conjunto de restrições dadas no problema.

2 - Restrições:
As linhas representam equações lineares que delimitam a região admissível. Algumas equações visíveis são:

- $x_1 + x_2 = 8$ (linha inclinada descendente da esquerda para a direita)
- $-x_1 + 2x_2 = 4$
- $2x_1 - x_2 = 12$

3 - Região Admissível:

- O polígono formado pela interseção das restrições representa a área viável onde as soluções são possíveis.
- Os pontos de interseção das restrições são os **vértices da região admissível**, onde a solução ótima pode estar.

4 - Linhas de Nível da Função Objetivo:

- As linhas pontilhadas representam diferentes valores da função objetivo z..
- Valores como $z = 16, 12, 8, 4, 0, -4$ indicam diferentes níveis da função a ser maximizada ou minimizada.

5 - Solução Ótima:

- A solução ótima ocorre geralmente num dos vértices da região admissível
- A linha de nível mais alta que ainda toca a região admissível indica o valor máximo de z..

Explicação da orientação das retas

1. Inclinação das Retas

Cada restrição é uma equação linear da forma geral:

$$ax_1 + bx_2 = c$$

Esta equação pode ser reescrita na forma explícita $x_2 = f(x_1)$, revelando a inclinação $-\frac{a}{b}$.

Exemplo 1: $x_1 + x_2 = 8$

$$x_2 = 8 - x_1$$

- Quando x_1 aumenta, x_2 diminui, resultando numa reta **decrescente**.
- A inclinação é -1, o que significa que a reta desce com um ângulo de 45°.

Exemplo 2: $-x_1 + 2x_2 = 4$

$$2x_2 = x_1 + 4 \Rightarrow x_2 = \frac{1}{2}x_1 + 2$$

- Aqui, a inclinação é **positiva** ($\frac{1}{2}$), então a reta sobe à medida que x_1 cresce.

Exemplo 3: $2x_1 - x_2 = 12$

$$x_2 = 2x_1 - 12$$

- A inclinação é 2, indicando uma reta bastante inclinada para cima.

2. Direção da Região Admissível (Sentido das Restrições)

As desigualdades determinam **de que lado da reta** está a região viável. Para isso, escolhemos um ponto de teste (normalmente $(0,0)$):

- Se $(0,0)$ **satisfaz a desigualdade**, a região viável está no lado do ponto.
- **Caso contrário, está no lado oposto da reta.**

Exemplo: $x_1 + x_2 \leq 8$

- O ponto $(0,0)$ dá $0 + 0 = 0 \leq 8$ → Então a solução viável está **abaixo da reta**.

Exemplo: $-x_1 + 2x_2 \geq 4$

- $(0,0)$ dá $-0 + 2(0) = 0 \not\geq 4$, então a região viável está **acima da reta**.

3. Interseção entre Retas

A interseção das restrições forma o polígono viável. A solução ótima está num dos seus vértices, pois a função objetivo cresce ou diminui linearmente e at[illegible]e o extremo numa dessas interseções.

Resumo sobre Problemas de Programação Linear (PL)

Na Programação Linear, buscamos atribuir valores a um conjunto de variáveis para satisfazer um sistema de (des)igualdades lineares e maximizar ou minimizar uma função objetivo.

Principais conceitos:

- **Solução admissível:** Qualquer conjunto de valores que satisfaça todas as restrições do problema.
- **PL inviável:** Quando não existe nenhuma solução que satisfaça todas as restrições.
- **PL ilimitado:**
  - Em problemas de maximização, ocorre quando o valor da função objetivo pode crescer indefinidamente.
  - Em problemas de minimização, ocorre quando o custo pode ser reduzido infinitamente.
- **PL viável e limitado:** Ocorre quando existe uma solução ótima finita dentro da região admissível.

Solução Gráfica

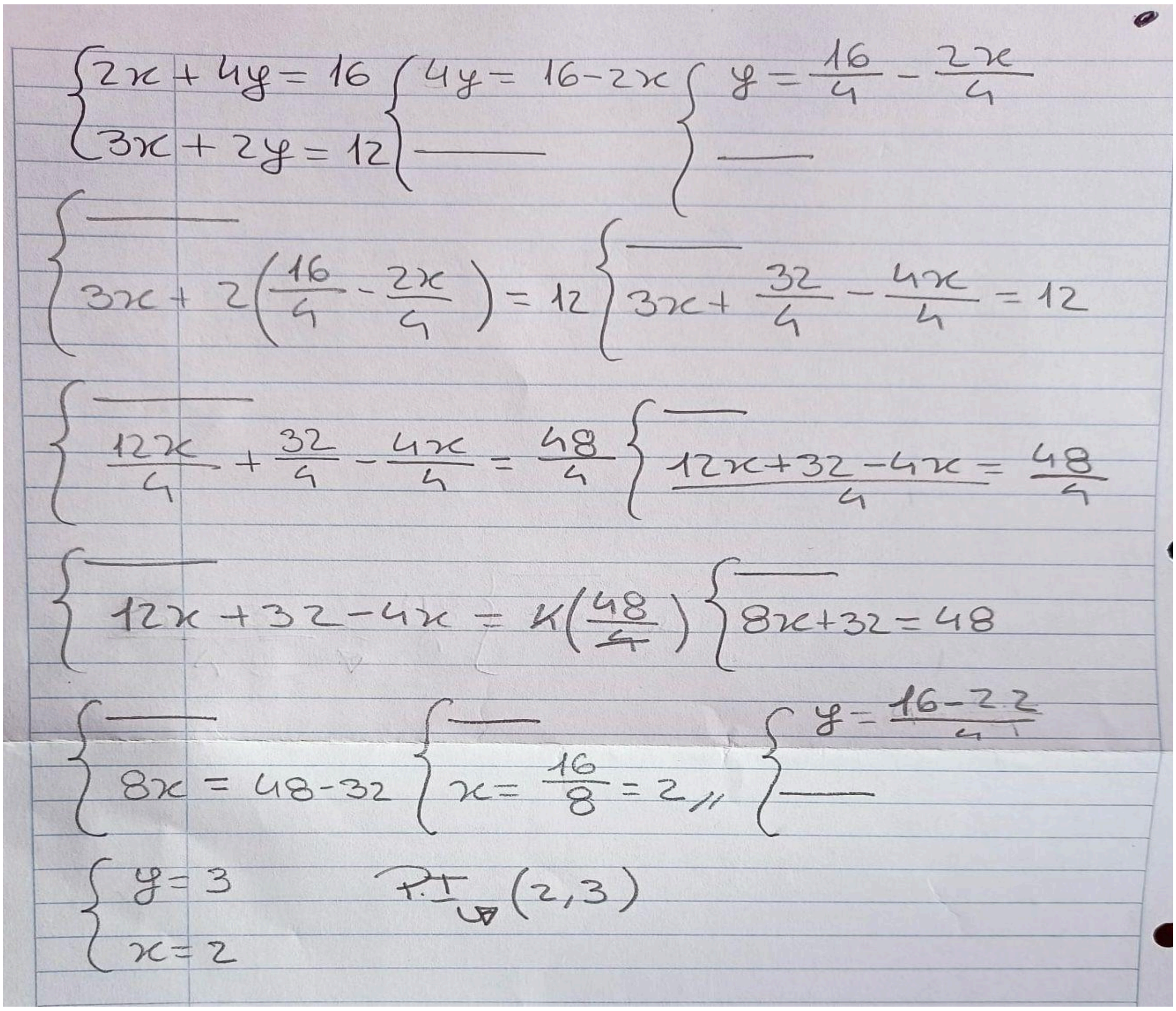
Graficamente, a solução ótima de um PL, quando existe, está localizada na fronteira da região admissível. Em particular, essa solução ocorre na interseção das restrições, ou seja, nos vértices da região admissível.

Resolução de Problemas usando o método analítico

Exemplo 1: Com região Admissível ilimitada

Um fabricante de móveis produz cadeiras e mesas. Para fabricar cada cadeira, são necessários 2 metros de madeira e 3 horas de trabalho. Para fabricar cada mesa, são necessários 4 metros de madeira e 2 horas de trabalho. O fabricante tem 16 metros de madeira e 12 horas de trabalho disponíveis. O lucro por cadeira é de 5 euros, e o lucro por mesa é de 8 euros.

1.º Passo: Calcular o ponto de interseção



$$\begin{cases} 2x+4y=16 \\ 3x+2y=12 \end{cases} \begin{cases} 4y=16-2x \\ \text{——} \end{cases} \begin{cases} y=\frac{16}{4}-\frac{2x}{4} \\ \text{——} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \text{——} \\ 3x+2\left(\frac{16}{4}-\frac{2x}{4}\right)=12 \end{cases} \begin{cases} \text{——} \\ 3x+\frac{32}{4}-\frac{4x}{4}=12 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \text{——} \\ \frac{12x}{4}+\frac{32}{4}-\frac{4x}{4}=\frac{48}{4} \end{cases} \begin{cases} \text{——} \\ \frac{12x+32-4x}{4}=\frac{48}{4} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \text{——} \\ 12x+32-4x=4\left(\frac{48}{4}\right) \end{cases} \begin{cases} \text{——} \\ 8x+32=48 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \text{——} \\ 8x=48-32 \end{cases} \begin{cases} \text{——} \\ x=\frac{16}{8}=2 \end{cases} \begin{cases} y=\frac{16-2\cdot 2}{4} \\ \text{——} \end{cases}$$

$$\begin{cases} y=3 \\ x=2 \end{cases} \qquad P.I.\ (2,3)$$

2.º Passo: Calcular 2 pontos para cada reta

$2x + 4y \leq 16$

- Para $x = 0$:

$$2(0) + 4y = 16 \Rightarrow 4y = 16 \Rightarrow y = 4$$

Ponto (0,4)

- Para $y = 0$:

$$2x + 4(0) = 16 \Rightarrow 2x = 16 \Rightarrow x = 8$$

Ponto (8,0)

$3x + 2y \leq 12$

Para $x = 0$:

$$3(0) + 2y = 12 \Rightarrow 2y = 12 \Rightarrow y = 6$$

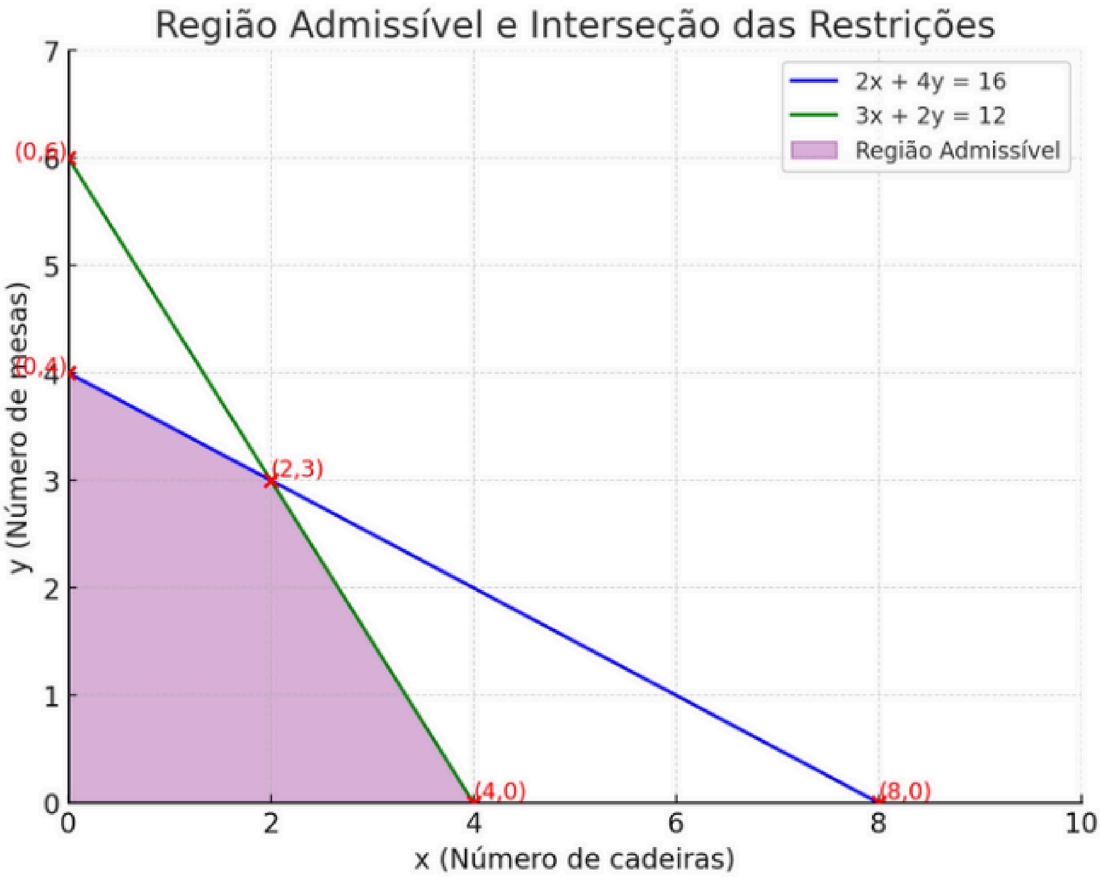
Ponto (0,6)

Para $y = 0$:

$$3x + 2(0) = 12 \Rightarrow 3x = 12 \Rightarrow x = 4$$

Ponto (4,0)

3. **Passo marcar tudo no referencial e encontrar a região admissível**



4.º Passo Calcular a função objetivo e substituir os valores ótimos pelas devidas incógnitas

A função objetivo que queremos maximizar é:

$$Z = 5x + 8y$$

Os vértices da **região admissível** (onde podem estar as soluções ótimas) são:

1. $(0, 4)$
2. $(4, 0)$
3. $(2, 3)$

Agora, vamos calcular o valor da função objetivo em cada um desses pontos.

Os valores da função objetivo nos vértices são:

- $(0, 4) \rightarrow Z = 5(0) + 8(4) = 32$
- $(4, 0) \rightarrow Z = 5(4) + 8(0) = 20$
- $(2, 3) \rightarrow Z = 5(2) + 8(3) = 34$

O lucro máximo de **34 euros** ocorre no ponto $(2, 3)$.

Portanto, o comerciante deve produzir **2 cadeiras e 3 mesas** para obter o máximo lucro!

REPÚBLICA PORTUGUESA
EDUCAÇÃO, CIÊNCIA E INOVAÇÃO

Escola Profissional BENTO DE JESUS CARAÇA
DELEGAÇÃO DO BARREIRO

Exemplo 2: Com região Admissível ilimitada

Uma empresa fabrica dois produtos, A e B, e precisa otimizar a sua produção sob as seguintes restrições: A quantidade do produto A deve ser menor ou igual ao negativo da quantidade do produto B: Além disso, a diferença entre o número de unidades do produto A e o dobro das unidades do produto B deve ser, no mínimo, 10 unidades:

1. passo calcular o Ponto de Interseção

Aqui está o conteúdo da imagem transcrito em texto:

$$\begin{cases} x \leq -y \\ x - 2y \geq 10 \end{cases}$$

Resolvendo o sistema:

$$\begin{cases} x = 2y + 10 \\ (2y + 10) = -y \end{cases}$$

$$\begin{cases} 10 = -3y \\ y = -\frac{10}{3} \end{cases}$$

Substituindo $y = -\frac{10}{3}$ em $x = 2y + 10$:

$$x = 2\left(-\frac{10}{3}\right) + 10$$

$$x = -\frac{20}{3} + \frac{30}{3}$$

$$x = \frac{10}{3}$$

Portanto, o ponto de interseção é:

$$\left(\frac{10}{3}, -\frac{10}{3}\right)$$

2.º Passo calcular os pontos de ambas as retas

1. Para a reta $x = -y$:

- Se $x = -2$, então $-2 = -y \rightarrow y = 2 \rightarrow$ Ponto $(-2, 2)$
- Se $x = -1$, então $-1 = -y \rightarrow y = 1 \rightarrow$ Ponto $(-1, 1)$
- Se $x = 0$, então $0 = -y \rightarrow y = 0 \rightarrow$ Ponto $(0, 0)$
- Se $x = 1$, então $1 = -y \rightarrow y = -1 \rightarrow$ Ponto $(1, -1)$
- Se $x = 2$, então $2 = -y \rightarrow y = -2 \rightarrow$ Ponto $(2, -2)$

2. Para a reta $x - 2y = 10$:

- **Quando $x = 0$:**

$$0 - 2y = 10$$

$$-2y = 10$$

$$y = -5$$

$\rightarrow$ Ponto $(0, -5)$

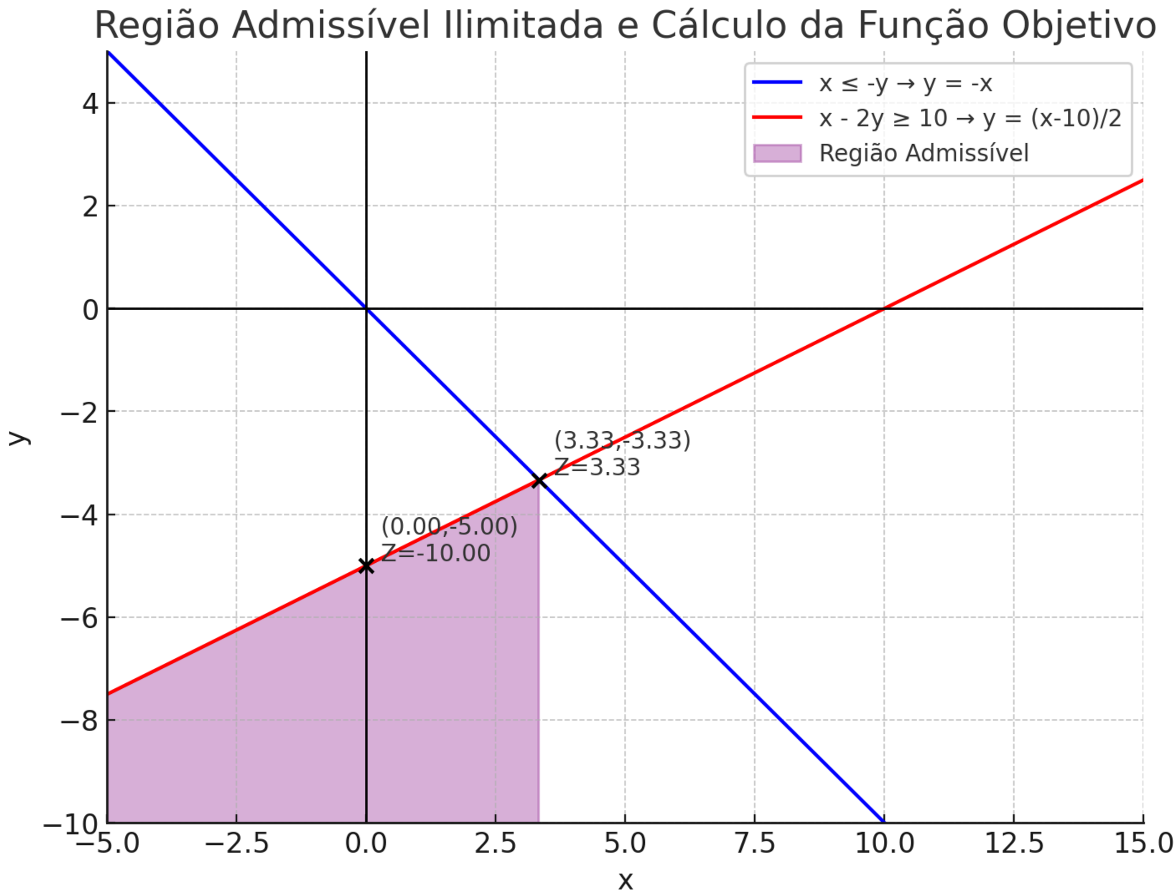
- **Quando $y = 0$:**

$$x - 2(0) = 10$$

$$x = 10$$

$\rightarrow$ Ponto $(10, 0)$

3.º Passo marcar tudo no referencial e encontrar a região admissível.



4.º Passo Calcular a função objetivo e substituir os valores ótimos pelas devidas incógnitas

- $P_I(10/3, -10/3) \rightarrow Z = 3(10/3) + 2(-10/3) = 3.33$
- $P_G(0, -5) \rightarrow Z = 3(0) + 2(-5) = -10$

O máximo valor de Z ocorre em $P_I(10/3, -10/3)$, onde $Z = 3.33$.