2018 真题

1. 下列函数中, 在 x D 0 处不可导的是 ( )

   (A) $f(x) = |x| \sin |x|$

   (B) $f(x) = |x| \sin \sqrt{|x|}$

   (C) $f(x) = \cos |x|$

   (D) $f(x) = \cos \sqrt{|x|}$

> 解：A,B,C 可直接验证可导, D 根据导数的定义可得 $f'_+(0) = -\frac{1}{2}, f'_-(0) = \frac{1}{2}$.

2. 过点 $(1,0,0)$ 与 $(0,1,0)$ 且与曲面 $z = x^2 + y^2$ 相切的平面方程为 ( )

(A) z=0 与 x+y-z=1

(B) z=0 与 2x+2y-z=0

(C) y=x 与 x+y-z=1

(D) y=x 与 2x+2y-z=2

解: 过点 $(1,0,0)$ 与 $(0,1,0)$ 且与已知曲面相切的平面只有两个, 显然 $z=0$ 与曲面 $z=x^2+y^2$ 相切, 故排除 C,D. 曲面 $z=x^2+y^2$ 的法向量为 $(2x,2y,-1)$, 对于 A 选项,$x+y-z=1$ 的法向量为 $(1,1,-1)$, 可得 $x=\frac{1}{2}, y=\frac{1}{2}$ 代入 $z=x^2+y^2$ 和 $x+y-z=1$ 中 z 不相等, 排除 A, 故选 B.

3. $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{2n+3}{(2n+1)!}=$ (　　).

(A) $\sin 1+\cos 1$　　(B) $2\sin 1+\cos 1$

(C) $2\sin 1+2\cos 1$　　(D) $3\sin 1+2\cos 1$

解：

利用 *sinx* 与 *cosx* 的麦克劳林级数可得

$$\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{2n+3}{(2n+1)!}=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{(2n+1)+2}{(2n+1)!}$$

$=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{(2n)!}+\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{2}{(2n+1)!}$

$=2\sin 1+\cos 1$

因此选 B.

4. 设 $M=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{(1+x)^2}{1+x^2}\mathrm{d}x, N=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{1+x}{\mathrm{e}^x}\mathrm{d}x, K=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}(1+\sqrt{\cos x})\mathrm{d}x$, 则 ( )

(A) $M>N>K$

(B) $M>K>N$

(C) $K>M>N$

(D) $N>M>K$

解：利用对称性可以计算 $M=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{(1+x)^2}{1+x^2}\mathrm{d}x=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\left(1+\frac{2x}{1+x^2}\right)\mathrm{d}x=\pi$, 另外比较被积函数与 1 的大小关系易见 $K>\pi=M>N$

5. 下列矩阵中, 与矩阵 $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ 相似的为( )

(A) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ (B) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

(C) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ (D) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

解：易知题中矩阵均有 3 重特征值 1. 若矩阵相似, 则不同特征值对应矩阵 $\lambda\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}$ 的秩相等, 即 $E-A$ 的秩相等, 选 A.

6. 设 A,B 为 n 阶矩阵, 记 $r(X)$ 为矩阵 X 的秩, $(\boldsymbol{X}\boldsymbol{Y})$

表示分块矩阵, 则 ( )

(A) $r(\boldsymbol{AAB})=r(\boldsymbol{A})$

(B) $r(\boldsymbol{ABA})=r(\boldsymbol{A})$

(C) $r(\boldsymbol{AB})=\max\{r(\boldsymbol{A}),r(\boldsymbol{B})\}$

(D) $r(\boldsymbol{AB})=r\left(\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}\right)$

解: 对于 A, 有 $r(\boldsymbol{AAB})=r(\boldsymbol{A}(\boldsymbol{EB}))$, 且 $(\boldsymbol{EB})$ 为行满秩的矩阵, 则 $r(\boldsymbol{AAB})=r(\boldsymbol{A})$, 即选 A.B 错误, 反例举 $A=\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}1&0\\1&1\end{pmatrix}$. C 错误, $r(\boldsymbol{AB})\geqslant\max\{r(\boldsymbol{A}),r(\boldsymbol{B})\}$, 反例举 $A=\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix}$, $\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}0&0\\0&1\end{pmatrix}$. D 错误, 反例取 $A=$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \boldsymbol{B} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

7. 设随机变量 X 的概率密度 $f(x)$ 满足 $f(1+x) = f(1-x)$, 且 $\int_0^2 f(x)\mathrm{d}x = 0.6$, 则 $P(X < 0) =$(   )

(A) 0.2 (B) 0.3 (C) 0.4 (D) 0.6

解：由 $f(1+x) = f(1-x)$ 知 $f(x)$ 关于 $x = 1$ 对称, 则
$\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x = \int_1^2 f(x)\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\int_0^2 f(x)\mathrm{d}x = 0.3.$
于是 $P\{X < 0\} = \int_{-\infty}^0 f(x)\mathrm{d}x = \int_{-\infty}^1 f(x)\mathrm{d}x - \int_0^1 f(x)\mathrm{d}x = 0.5 - 0.3 = 0.2$. 选 A.

8. 给定总体 $X \sim N\left(\mu, \sigma^2\right)$, σ^2 已知, 给定样本 $X_1, X_2, \cdot\cdot$
对总体均值 μ 进行检验, 令 $H_0 : \mu = \mu_0, H_1 : \mu \neq \mu_0$

, 则 (　　)

(A) 若显著性水平 $\alpha = 0.05$ 时拒绝 H_0 , 则 $\alpha = 0.01$ 时必拒绝 H_0

(B) 若显著性水平 $\alpha = 0.05$ 时接受 H_0 , 则 $\alpha = 0.01$ 时必拒绝 H_0

(C) 若显著性水平 $\alpha = 0.05$ 时拒绝 H_0 , 则 $\alpha = 0.01$ 时必接受 H_0

(D) 若显著性水平 $\alpha = 0.05$ 时接受 H_0 , 则 $\alpha = 0.01$ 时必接受 H_0

解: 显著性水平为 α 的假设检验的接受域就是置信水平为 $1-\alpha$ 的置信区间, 当 α 变小时, 置信区间会变大, 也就是接受域变大, 因此选 D.

9. $\lim_{x\to 0}\left(\frac{1-\tan x}{1+\tan x}\right)^{\frac{1}{\sin(kx)}} = \mathrm{e}$, 则 k=______

解：原极限为 1^{∞} 型, 故恒等变形为
$\lim_{x\to 0}\left(1+\frac{-2\tan x}{1+\tan x}\right)^{\frac{1+\tan x}{2\tan x}\,\frac{-2\tan x}{(1+\tan x)\sin(kx)}}$
$=\exp\left(\lim_{x\to 0}\frac{-2\tan x}{(1+\tan x)\sin(kx)}\right)=\mathrm{e}^{-\frac{2}{k}}$.
所以 $-\frac{2}{k}=1, k=-2$.

10. 设函数 $f(x)$ 具有 2 阶连续导数, 若曲线 $y=f(x)$ 的过点 $(0,0)$, 且与曲线 $y=2^{x}$ 在点 $(1,2)$ 处相切, 则 $\int_0^1 xf''(x)\mathrm{d}x=$ ( )

解：由题意知 $f(0)=0, f(1)=2, f'(1)=2^{x}\ln 2|_{x=1}=2\ln 2$. 由分部积分公式, 原积分等于 $xf'(x)\Big|_0^1-\int_0^1 f'(x)\mathrm{d}x$
$=2\ln 2-2$.

11. 设 $\boldsymbol{F}(x,y,z)=xy\boldsymbol{i}-yz\boldsymbol{j}+xz\boldsymbol{k}$，求 $\operatorname{rot}\boldsymbol{F}(1,1,0)=$ ( )

解: 由旋度定义 $\operatorname{rot}\boldsymbol{F}=\begin{vmatrix}\boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k}\\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z}\\ xy & -yz & xz\end{vmatrix}=y\boldsymbol{i}-$
$z\boldsymbol{j}-x\boldsymbol{k}$
, 可知 $\operatorname{rot}\boldsymbol{F}(1,1,0)=\boldsymbol{i}-\boldsymbol{k}$.

12. 设 L 为球面 $x^2+y^2+z^2=1$ 与平面 $x+y+z=0$ 的交线, 则 $\oint_L xyds=$______

解: 由对称性得

$$\begin{aligned}\oint_L xy\mathrm{d}s &= \frac{1}{3}\oint_L(xy+yz+xz)\mathrm{d}s\\ &= \frac{1}{6}\oint_L\left[(x+y+z)^2-\left(x^2+y^2+z^2\right)\right]\mathrm{d}s\\ &= \frac{1}{6}\oint_L(-1)\mathrm{d}s=-\frac{\pi}{3}\end{aligned}$$

13. 设 2 阶矩阵 A 有两个不同的特征值, □α_1,α_2 是 A

的线性无关的特征向量, $\mathbf{A}^2(\alpha_1+\boldsymbol{\alpha}_2)=\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2$,
则 $|A|=$______

解：由 α_1,α_2 是 A 的线性无关的特征向量,则 α_1,α_2 是 A^2 的线性无关的特征向量. 又 $A^2(\alpha_1+\alpha_2)=\alpha_1+\alpha_2,\alpha_1+\alpha_2$ 也是 A^2 的特征向量, 则 A^2 有二重特征值 1. 又 A 有两个不同的特征值, 则其特征值为 $-1,1$, 故 $|A|=-1$.

14. . 设随机事件 A 与 B 相互独立, A 与 C 相互独立, $BC=\varnothing$. 若
$P(A)=P(B)=\frac{1}{2}P(AC|AB\cup C)=\frac{1}{4}$, 则 $P(C)=$______

解：因为 $BC=\varnothing, P(BC)=0$, 故 $P(ABC)=0$

$$P(AC|AB\cup C)=\frac{P[(ABC)\cup(AC)]}{P(AB\cup C)}$$
$$=\frac{P(AC)}{P(AB)+P(C)-P(ABC)}$$ 解得
$$=\frac{P(A)P(C)}{P(A)P(B)+P(C)}=\frac{1}{4}$$

$P(C) = \frac{1}{4}$

15. 求不定积分 $\int \mathrm{e}^{2x} \arctan \sqrt{\mathrm{e}^x - 1} \mathrm{d}x$

解：利用分部积分法

$\int \mathrm{e}^{2x} \arctan \sqrt{\mathrm{e}^x - 1} \mathrm{d}x$

$= \frac{1}{2} \int \arctan \sqrt{\mathrm{e}^x - 1} \mathrm{d}\left(\mathrm{e}^{2x}\right)$

$= \frac{1}{2} \mathrm{e}^{2x} \arctan \sqrt{\mathrm{e}^x - 1} - \frac{1}{4} \int \frac{\mathrm{e}^{2x}}{1+\mathrm{e}^x - 1} \frac{\mathrm{e}^x}{2\sqrt{\mathrm{e}^x - 1}} \mathrm{d}x$

$= \frac{1}{2} \mathrm{e}^{2x} \arctan \sqrt{\mathrm{e}^x - 1} - \frac{1}{4} \int \frac{\mathrm{e}^x}{\sqrt{\mathrm{e}^x - 1}} \mathrm{d}\left(\mathrm{e}^x\right)$

$= \frac{1}{2} \mathrm{e}^{2x} \arctan \sqrt{\mathrm{e}^x - 1} - \frac{1}{4} \int \frac{\mathrm{e}^x}{\sqrt{\mathrm{e}^x - 1}} \mathrm{d}\left(\mathrm{e}^x\right)$

其中

$$\begin{aligned}
\int \frac{\mathrm{e}^x}{\sqrt{\mathrm{e}^x - 1}} \mathrm{d}\left(\mathrm{e}^x\right) &= \int \frac{t}{\sqrt{t-1}} \mathrm{d}t = \int \frac{t-1+1}{\sqrt{t-1}} \mathrm{d}t \\
&= \int \sqrt{t-1} \mathrm{d}t + \int \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{t-1}} \\
&= \frac{2}{3}(t-1)^{\frac{3}{2}} + 2\sqrt{t-1} + C \\
&= \frac{2}{3}\left(\mathrm{e}^x - 1\right)^{\frac{3}{2}} + 2\sqrt{\mathrm{e}^x - 1} + C
\end{aligned}$$

故 $\int \mathrm{e}^{2x}\arctan\sqrt{\mathrm{e}^x-1}\,\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\mathrm{e}^{2x}\arctan\sqrt{\mathrm{e}^x-1}-\frac{1}{6}\left(\mathrm{e}^x-1\right)^{\frac{3}{2}}-\frac{1}{2}\sqrt{\mathrm{e}^x-1}+C_1$.

16. 将长为 2 m 的铁丝分成三段, 依次围成圆、正方形与正三角形, 三个图形的面积之和是否存在最小值? 若存在, 求出最小值.

解: 设分成的三段依次为 x, y,z, 则 $x+y+z=2$, 依次围成的圆的半径、正方形的边长与正三角形的边长分别为 $\frac{x}{2\pi},\frac{y}{4},\frac{z}{3}$, 因此三个面积的和为 $S=\pi\left(\frac{x}{2\pi}\right)^2+\left(\frac{y}{4}\right)^2+\frac{\sqrt{3}}{4}\left(\frac{z}{3}\right)^2=\frac{x^2}{4\pi}+\frac{1}{16}y^2+\frac{\sqrt{3}}{36}z^2$

解: 令 $f(x,y,z,\lambda)=\frac{x^2}{4\pi}+\frac{1}{16}y^2+\frac{\sqrt{3}}{36}z^2+\lambda(x+y+z-2)$, 首先求驻点. 由方程
$$\begin{cases} f'_x=\frac{x}{2\pi}+\lambda=0 \\ f'_y=\frac{y}{8}+\lambda=0 \\ f'_z=\frac{\sqrt{3}}{18}z+\lambda=0 \end{cases}$$

可得$\begin{cases} x=\frac{2\pi}{\pi+4+3\sqrt{3}} \\ y=\frac{8}{\pi+4+3\sqrt{3}} \\ z=\frac{6\sqrt{3}}{\pi+4+3\sqrt{3}} \end{cases}$,并且$Hf=\operatorname{diag}\left\{\frac{1}{2\pi},\frac{1}{8},\frac{\sqrt{3}}{18}\right\}$正定,这就是面积和的最小值点,此时最小面积为$S_{\min}=\frac{1}{\pi+4+3\sqrt{3}}\mathrm{m}^2$

解：由柯西不等式$\left(\frac{x^2}{4\pi}+\frac{1}{16}y^2+\frac{\sqrt{3}}{36}z^2\right)\left(4\pi+16+\frac{36}{\sqrt{3}}\right)\geqslant(x+y+z)^2=4$

,因此当$\frac{x}{2\pi}=\frac{y}{16}=\frac{z}{12\sqrt{3}}$即$\begin{cases} x=\dfrac{2\pi}{\pi+4+3\sqrt{3}} \\ y=\dfrac{8}{\pi+4+3\sqrt{3}} \\ z=\dfrac{6\sqrt{3}}{\pi+4+3\sqrt{3}} \end{cases}$

时,$S_{\min}=\frac{1}{\pi+4+3\sqrt{3}}\mathrm{m}^2$.

17. 设 Σ 是曲面 $x=\sqrt{1-3y^2-3z^2}$ 的前侧, 计算曲面积分

$\iint_{\Sigma} x\mathrm{d}y\mathrm{d}z+\left(y^3+z\right)\mathrm{d}z\mathrm{d}x+z^3\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$

解: 取曲面 $\Sigma_1: x=0, 3y^2+3z^2\leqslant 1$, 法向量方向指向 x 轴负向. 记 Ω 为 Σ 和 Σ_1 所围成的区域, 则

$$\iint_{\Sigma} x\mathrm{d}y\mathrm{d}z+\left(y^3+z\right)\mathrm{d}z\mathrm{d}x+z^3\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$=\iint_{\Sigma+\Sigma_1} x\mathrm{d}y\mathrm{d}z+\left(y^3+z\right)\mathrm{d}z\mathrm{d}x+z^3\mathrm{d}x\mathrm{d}y-\iint_{\Sigma_1} x$$

由高斯公式得

$\iint_{\Sigma+\Sigma_1} x\mathrm{d}y\mathrm{d}z+\left(y^3+z\right)\mathrm{d}z\mathrm{d}x+z^3\mathrm{d}x\mathrm{d}y$

$=\iiint_{\Omega}\left(1+3y^2+3z^2\right)\mathrm{d}V$

$=\iiint_{\Omega}\mathrm{d}V+3\iint_{3y^2+3z^2<1}\left(y^2+z^2\right)\sqrt{1-3y^2-3z^2}$ dydz

$=\frac{1}{2}\cdot\frac{4\pi}{3}\cdot\frac{\sqrt{3}}{3}\cdot\frac{\sqrt{3}}{3}+3\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^{\frac{1}{\sqrt{3}}} r^2\sqrt{1-3r^2}r\mathrm{d}r=\frac{14\pi}{45}$

而 $\iint_{\Sigma_1} x\mathrm{d}y\mathrm{d}z+\left(y^3+z\right)\mathrm{d}z\mathrm{d}x+z^3\mathrm{d}x\mathrm{d}y=0$, 所

以 $\iint_\Sigma x\mathrm{d}y\mathrm{d}z+\left(y^3+z\right)\mathrm{d}z\mathrm{d}x+z^3\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\frac{14\pi}{45}$.

18. 已知微分方程 $y'+y=f(x)$, 其中 $f(x)$ 是 $\mathbb{R}$ 上的连续函数.

(1) 当 $f(x)=x$ 时, 求微分方程的通解.

(2) 若 $f(x)$ 是周期为 T 的函数, 证明: 方程存在唯一的以 T 为周期解.

解：等式两边乘以 e^x 可得 $(\mathrm{e}^x y)'=\mathrm{e}^x f(x)$, 通解可表示为 $y(x)=\mathrm{e}^{-x}\left(\int_0^x f(t)\mathrm{e}^t\mathrm{d}t+C\right)$.
现在 $f(x+T)=f(x)$, 则
$y(x+T)$

$$= e^{-x-T}\left(\int_0^{x+T} f(t)e^t dt + C\right)$$

$$= e^{-x-T}\left(\int_0^T f(t)e^t dt + \int_T^{T+x} f(t)e^t dt + C\right)$$

$$= e^{-x-T}\left(\int_0^T f(t)e^t dt + \int_T^x f(u+T)e^{u+T} du + C\right)$$

$$= e^{-x-T}\left(\left(\int_0^T f(t)e^t dt + C_0^x f(u)e^{u+T} du + C\right)\right.$$

$$= e^{-x}\left(\left(\int_0^T f(t)e^t dt + C\right)e^{-T} + \int_0^x f(u)e^u du\right)$$

要使得这个解是周期函数, 则 $y(x+T) = y(x)$, 即满足 $\left(\int_0^T f(t)e^t dt + C\right)e^{-T} = C$, 由此解得 $C = \frac{\int_0^T f(t)e^t dt}{e^T - 1}$, 因此 $y = e^{-x}\left(\int_0^x f(t)e^t dt + \frac{\int_0^T f(t)e^t dt}{e^T-1}\right)$ 就是唯一的周期函数解.

19. 设数列 $\{x_n\}$ 满足 $x_1 > 0, x_n e^{x_{n+1}} = e^{x_n} - 1 (n = 1, 2, \cdots)$, 证明 $\{x_n\}$ 收敛并求 $\lim_{n\to\infty} x_n$.

解: 首先由 $x_1 > 0, x_n e^{x_{n+1}} = e^{x_n} - 1 (n = 1, 2, \cdots)$ 归纳可知所有 $x_n > 0$. 考虑函数 $f(x) = e^x$, 由拉格朗日中值定理有

$e^{x_{n+1}} = \frac{e^{x_n}-1}{x_n} = \frac{f(x_n)-f(0)}{x_n-0} = e^{\xi_n} < e^{x_n}, \xi_n \in (0, x_n)$. 这就说明 $x_n > x_{n+1} > 0$, 因此 $\{x_n\}$ 单调递减有下界, 故收敛. 设 $\lim_{n\to\infty} x_n = x \geqslant 0$, 在等式 $x_n e^{x_{n+1}} = e^{x_n} - 1$ 两边取极限得 $xe^x = e^x - 1$. 如果 $x > 0$, 则 $e^x = \frac{e^x-1}{x} < e^x$, 矛盾, 因此 $\lim_{n\to\infty} x_n = x = 0$.

20. 设实二次型 $f(x_1, x_2, x_3) = (x_1 - x_2 + x_3)^2 + (x_2 + x_3$
$(x_1 + ax_3)^2$, 其中 a 是参数.

(1) 求 $f(x_1, x_2, x_3) = 0$ 的解;

(2) 求 $f(x_1, x_2, x_3)$ 的规范形.

解:

(1) 由 $f(x_1, x_2, x_3) = 0$ 可得方程组

$$\begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 = 0 \\ x_2 + x_3 = 0 \\ x_1 + a x_3 = 0 \end{cases}$$

. 对其系数矩阵进行初等行变换得

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & a \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & a-2 \end{pmatrix}$$

如果 $a = 2$, 则方程组的通解为 $(x_1, x_2, x_3)^{\mathrm{T}} = c(-2, -1, 1)^{\mathrm{T}}$. 如果 $a = 2$, 则方程组只有零解 $(x_1, x_2, x_3)^{\mathrm{T}} = (0, 0, 0)^{\mathrm{T}}$.

(2) 如果 $a \neq 2$, 令

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = Qx$$

其中 Q 是可逆矩阵, 所以此时的规范形为 $f(y_1,y_2,y_3)=y_1^2+y_2^2+y_3^2$. 如果 $a=2$, 配方得 $f(x_1,x_2,x_3)$

$$=(x_1-x_2+x_3)^2+(x_2+x_3)^2+(x_1+2x_3)^2$$

$$=2x_1^2+2x_2^2+6x_3^2-2x_1x_2+6x_1x_3$$

$$=2\left(x_1-\frac{1}{2}x_2+\frac{3}{2}x_3\right)^2+\frac{3}{2}(x_2+x_3)^2$$

此时的规范形为 $f(y_1,y_2,y_3)=y_1^2+y_2^2$.

21. 已知 a 是常数, 且矩阵 $A=\begin{pmatrix}1&2&a\\1&3&0\\2&7&-a\end{pmatrix}$ 可经初等列变换化为矩阵 $\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}1&a&2\\0&1&1\\-1&1&1\end{pmatrix}$.

(1) 求 a;

(2) 求满足 $\boldsymbol{AP}=\boldsymbol{B}$ 的可逆矩阵 P.

解:

(1) 由于矩阵 A 可经过初等列变换化为矩阵 B, 因此 A 和 B 的列向量组等价. 则对增广矩阵做初等行变换得

$$(AB) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & a & 1 & a & 2 \\ 1 & 3 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 2 & 7 & -a & -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & a & 1 & a & 2 \\ 0 & 1 & -a & -1 & 1-a & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & a-2 & 0 \end{pmatrix}$$

因此 a = 2.

(2) 问题等价于解矩阵方程 $AX = B$, 也就是解三个非齐次线性方程组. 由 (1) 可得

$$\begin{pmatrix} A & B \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 6 & 3 & 4 & 4 \\ 0 & 1 & -2 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

解得 $P = \begin{pmatrix} -6k_1+3 & -6k_2+4 & -6k_3+4 \\ 2k_1-1 & 2k_2-1 & 2k_3-1 \\ k_1 & k_2 & k_3 \end{pmatrix}$

$,k_1, k_2, k_3$ 为任意常数. 注意到 P 是可逆矩阵, 因此 $|\boldsymbol{P}| \neq 0$, 这要求 $k_2 \neq k_3$.

22. 已知随机变量 X 与 Y 相互独立, X 的概率分布为 $P\{X=1\} = P\{X=-1\} = \frac{1}{2}, Y$ 服从参数为的泊松分布, 令 $Z = XY$.

(1) 求 $\mathrm{Cov}(X, Z)$;

(2) 求 Z 的概率分布.

解:

(1) 直接计算可知 $E(X)=0, E\left(X^2\right)=1$, 而 $Y \sim P(\lambda), E(Y)=\lambda$, 因此 $\operatorname{Cov}(X,Z)$
$=\operatorname{Cov}(X,XY)=E\left(X^2Y\right)-E(X)E(XY)=E\left(X^2\right)E(Y)-(EX)^2E(Y)=\lambda$

(2) 首先有 $P(Z=k)$
$=P(X=1)P(Z=k|X=1)+P(X=-1)P(Z=k|X=-1)$
$=P(X=1)P(Y=k)+P(X=-1)P(Y=-k)$
$=\frac{1}{2}P(Y=k)+\frac{1}{2}P(Y=-k)$
当 $k=1,2,3,\ldots$ 时,$P\{Z=k\}=\frac{1}{2}P\{Y=k\}=\frac{\lambda^k e^{-\lambda}}{2k!}$; 当 $k=0$ 时,$P(Z=0)=P(Y=0)=e^{-\lambda}$; 当 $k=-1,-2,-3,\cdots$ 时,$P\{Z=k\}=\frac{1}{2}P\{Y=-k\}=\frac{\lambda^{-k}e^{-\lambda}}{2(-k)!}$.
因此综上所述可得

$$P(Z=k)=\begin{cases}\frac{\lambda^{|k|}e^{-\lambda}}{2|k|!}, & k=\pm1,\pm2,\cdots\\ e^{-\lambda}, & k=0\end{cases}.$$

23. 设总体 X 的概率密度为

$f(x,\sigma)=\frac{1}{2\sigma}\mathrm{e}^{-\frac{|x|}{\sigma}},-\infty<x<+\infty$, 其中 $\sigma\in(0,+\infty)$ 为未知参数, $X_1,X_2,\cdots,X_n$ 为来自总体 X 的简单随机样本, 记 σ 的最大似然估计量为.

(1) 求 $\hat{\sigma}$;

(2) 求 $E(\hat{\sigma}),D(\hat{\sigma})$.

解:

(1) 设 $X_1,X_2,\cdots,X_n$ 对应的样本值为 $x_1,x_2,\cdots,x$

, 则似然函数为

$L(\sigma)=\prod_{i=1}^{n} f\left(x_i,\sigma\right)=2^{-n}\sigma^{-n}\mathrm{e}^{-\frac{\sum_{i=1}^{n}|x_i|}{\sigma}}$,

取对数得 $\ln L(\sigma)=-n\ln 2-n\ln\sigma-\frac{1}{\sigma}\sum_{i=1}^{n}|x_i|$.

令 $\frac{\mathrm{d}\ln L}{\mathrm{d}\sigma}=\frac{-n}{\sigma}+\frac{1}{\sigma^2}\sum_{i=1}^{n}|x_i|=0$, 解得 $\sigma=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}|x_i|$, 因此 σ 的最大似然估计量为 $\hat{\sigma}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}|X_i|$.

(2) 因为 $E(|X|)=\int_{-\infty}^{+\infty}|x|f(x)\mathrm{d}x=\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{|x|}{2\sigma}\mathrm{e}^{-\frac{|x|}{\sigma}}\mathrm{d}x$ σ, 所以

$$E(\hat{\sigma}) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} E\left|X_i\right| = E(|X|) = \sigma$$

$$E\left(X^2\right) = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 f(x)\mathrm{d}x = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^2}{2\sigma}\mathrm{e}^{-\frac{|x|}{\sigma}}\mathrm{d}x$$

$$= 2\sigma^2$$

$$D(\hat{\sigma}) = \frac{D(|X|)}{n} = \frac{1}{n}\left(E\left(X^2\right) - (E|X|)^2\right) = \frac{\sigma^2}{n}$$