2019 真题

1. 当 $x \to 0$ 时,$x - \tan x$ 与 x^k 是同阶无穷小, 则 k = ( )

(A) 1 (B) 2 (C) 3 (D) 4

解：当 $x \to 0$ 时,$x - \tan x \sim -\frac{1}{3}x^3$, 因此选 C.

2. 设函数 $f(x) = \begin{cases} x|x|, & x \leqslant 0 \\ x\ln x, & x > 0 \end{cases}$ 则 $x = 0$ 是 $f(x)$ 的 ( )

(A) 可导点, 极值点 (B) 不可导点, 极值点

(C) 可导点, 非极值点 (D) 不可导点, 非极值点

解：$\lim_{x\to0^-} x|x| = \lim_{x\to0^+} x\ln x = f(0) = 0,$ ，因此 $f(x)$ 在 $x=0$ 处连续. 且当 $x \in \overset{\circ}{U}(x_0)$ 时, $f(x) < 0 = f(0)$, 因此 $x=0$ 是 $f(x)$ 的极大值点. 而极限 $\lim_{x\to0^+} \frac{f(x)-f(0)}{x} = \lim_{x\to0^+} \ln x$ 不存在, 因此不可导, 选 B.

3. 设 $\mathcal{U}_n$ 是单调增加的有界数列, 则下列级数中收敛的是 ( )

(A) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{u_n}{n}$ (B) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{u_n}$

(C) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{u_n}{u_{n+1}}\right)$ (D) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(u_{n+1}^2 - u_n^2\right)$

解：正确答案选 D. 因为 $\mathcal{U}_n$ 单调递增有界, 故极限 $\lim_{n\to\infty} u_n = a$ 存在, D 选项级数的部分和数列收敛, 因此级数收敛. A 和 B 中只要 $a \neq 0$ 就发散. C 中可取反例 $u_n = -\frac{1}{n}$, 则 $1 - \frac{u_n}{u_{n+1}} = \frac{1}{n+1}$, 调和级数发散.

4. 设函数 $Q(x,y) = \frac{x}{y^2}$, 如果对上半平面 $(y > 0)$ 内的任意有向光滑闭曲线 C 都有 $\oint_C P(x,y)\mathrm{d}x + Q(x,y)\mathrm{d}y = 0$, 那么函数可取为 ( )

(A) $y - \frac{x^2}{y}$ (B) $\frac{1}{y} - \frac{x^2}{y^2}$

(C) $\frac{1}{x} - \frac{1}{y}$ (D) $x - \frac{1}{y}$

解: 由题意, 应当选择函数 $P(x,y)$ 使得在整个上半平面上均有 $\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{1}{y^2}$ 成立, 选 D(注意 C 选项在 y 轴上偏导数不存在).

5. 设 A 是 3 阶实对称矩阵,E 是 3 阶单位矩阵, 若 $A^2 + A = 2E$, 且 $|A| = 44$, 则二次型 $\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}$ 的规范形为 ( )

(A) $y_1^2 + y_2^2 + y_3^2$ (B) $y_1^2 + y_2^2 - y_3^2$

(C) $y_1^2 - y_2^2 - y_3^2$ (D) $-y_1^2 - y_2^2 - y_3^2$

解：由 $A^2+A=2E$ 可知矩阵 A 的特征值 λ 满足 $\lambda^2+\lambda=2$, 因此 $\lambda=1$ 或 $\lambda=2$. 再由 $|A|=4$ 可知 A 的特征值为 2, 2, 1. 因此二次型 $\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}$ 的正惯性指数为 1 , 负惯性指数为 2, 选 C.

6. 如图所示, 有 3 张平面两两相交, 交线相互平行, 它们的方程

$a_{i1}x+a_{i1}y+a_{i3}z=d_i(i=1,2,3)$

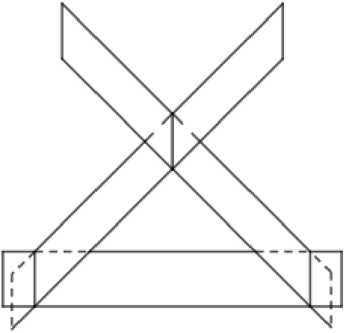
组成的线性方程组的系数矩阵和增广矩阵分别为 $\boldsymbol{A},\overline{\boldsymbol{A}}$, 则 ( )

(A) $r(\boldsymbol{A})=2, r(\overline{\boldsymbol{A}})=3$

(B) $r(\boldsymbol{A})=2, r(\overline{\boldsymbol{A}})=2$

(C) $r(\boldsymbol{A})=1, r(\overline{\boldsymbol{A}})=2$

(D) $r(\boldsymbol{A})=1, r(\overline{\boldsymbol{A}})=1$



第 6 题图

解：令 $\boldsymbol{x}=(x,y,z)^{\mathrm{T}},\boldsymbol{b}=(d_1,d_2,d_3)^{\mathrm{T}}$，由于三个平面无交点，因此方程组 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{bAx}=\boldsymbol{b}$ 无解. 即 $r(\boldsymbol{A})<r(\overline{A})\leqslant 3$. 再根据任意两个平面都不重合或平行，可知 A 的任意两行线性无关，因此 $r(\boldsymbol{A})\geqslant 2$. 因此只能是 $r(\boldsymbol{A})=2,r(\overline{A})=3$，选 A.

7. 设 A,B 为随机事件，则 $P(A)=P(B)$ 的充分必要条件是　　　(　　)

(A) $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$

(B) $P(AB) = P(A)P(B)$

(C) $P(A\overline{B}) = P(B\overline{A})$

(D) $P(AB) = P(\overline{AB})$

解: 显然 $P(A) = P(B)$ 等价于 $P(A) - P(AB) = P(B) - P(AB)$, 即 $P(A\overline{B}) = P(B\overline{A})$, 选 C. 对于选项 A 和 D, 取 $A = B = \Omega$ 可排除; 对于选项 B, 取 $B = \overline{A}$ 即可排除.

8. 设随机变量 X 与 Y 相互独立, 且都服从正态分布 $N\left(\mu, \sigma^2\right)$, 则 $P\{|X - Y| < 1\}$ ( )

(A) 与 μ 无关, 而与 σ^2 有关

(B) 与 μ 有关, 而与 σ^2 无关

(C) 与 μ,σ^2 都有关

(D) 与 μ,σ^2 都无关

解: 显然 $P(A)=P(B)$ 等价于 $P(A)-P(AB)=P(B)-P(AB)$, 即 $P(A\overline{B})=P(B\overline{A})$, 选 C, 对于选项 A 和 D, 取 $A=B=\Omega$ 可排除; 对于选项 B, 取 $B=\overline{A}$ 即可排除.

9. 由条件可知 $X-Y\sim N\left(0,2\sigma^2\right)$, 因此

$$P\{|X-Y|<1\}=P\left\{\left|\frac{X-Y}{\sqrt{2}\sigma}\right|<\frac{1}{\sqrt{2}\sigma}\right\}$$

$$=\Phi\left(\frac{1}{\sqrt{2}\sigma}\right)-\Phi\left(-\frac{1}{\sqrt{2}\sigma}\right), \text{此概率与}$$

$$=2\Phi\left(\frac{1}{\sqrt{2}\sigma}\right)-1$$

μ 无关, 与 σ^2 有关, 选 A.

10. 设函数 $f(u)$ 可导,$z = f(\sin y - \sin x) + xy$, 则 $\frac{1}{\cos x} \cdot \frac{\partial z}{\partial x} + \frac{1}{\cos y} \cdot \frac{\partial z}{\partial y} =$ ______

解: 首先 $\frac{\partial z}{\partial x} = -\cos x f'(\sin y - \sin x) + y$, $\frac{\partial z}{\partial y} = \cos y f'(\sin y - \sin x) + x$, 因此 $\frac{1}{\cos x} \cdot \frac{\partial z}{\partial x} + \frac{1}{\cos y} \cdot \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{y}{\cos x} + \frac{x}{\cos y}$.

11. 微分方程 $2yy' - y^2 - 2 = 0$ 满足条件 $y(0) = 1$ 的特解 $y =$______

解: 方程变量分离可得 $\frac{2y}{y^2+2}\mathrm{d}y = \mathrm{d}x$, 两边积分得 $y^2 + 2 = C\mathrm{e}^x$, 由 $y(0) = 1$ 可知 $C = 3$, 方程的解为 $y = \sqrt{3\mathrm{e}^x - 2}$ (注意初值条件, 要舍去负的解).

12. 幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n)!}x^n$ 在 $(0,+\infty)$ 内的和函数 $S(x)=$ ______.

解: $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n)!}x^n=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n)!}(\sqrt{x})^{2n}=\cos(\sqrt{x})$

13. 设 Σ 为曲面 $x^2+y^2+4z^2=4(z\geqslant 0)$ 的上侧, 则 $\iint_{\Sigma}\sqrt{4-x^2-4z^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y=$ ______.

解: Σ 在 xOy 面的投影区域为 $D=(x,y)|x^2+y^2\leqslant 4$, 因此

$$\iint_{\Sigma}\sqrt{4-x^2-4z^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$=\iint_{D}\sqrt{4-x^2-(4-x^2-y^2)}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$=\iint_{D}|y|\mathrm{d}x\mathrm{d}y=4\int_0^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{d}\theta\int_0^2 r^2\sin\theta\mathrm{d}r=\frac{32}{3}$$

14. 设 $A=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)$ 为 3 阶矩阵, 若 α_1,α_2 线性无关, 且 $\alpha_3=-\alpha_1+2\alpha_2$, 则线性程组 $Ax=0$ 的通解

为______

解: 由条件可知 A 有且只有两个线性无关的列向量, 因此 $r(A)=2$. 因为 $\alpha_3=-\alpha_1+2\alpha_2$, 所以 $A\begin{pmatrix}1\\-2\\1\end{pmatrix}=\alpha_1-2\alpha_2+\alpha_3=0,$, 因此 $Ax=0$ 的通解为 $\boldsymbol{x}=k(1,-2,1)^{\mathrm{T}},k\in\mathbb{R}$.

15. 设随机变量 X 的概率密度为 $f(x)=\begin{cases}\frac{x}{2}, & 0<x<2\\ 0, & others\end{cases}$ $F(x)$ 为 X 的分布函数,$E(X)$ 为 X 的数学期望, 则 $P(F(X)>E(X)-1)=$______.

解: 首先 $E(X)=\int_0^2 x\frac{x}{2}\mathrm{d}x=\frac{4}{3}$. 再令 $Y=F(X)$. 则当 $y\leqslant 0$ 时 $P(Y\leqslant y)=0$; 当 $y\geqslant 1$

时,$P(Y \leqslant y) = 1$(注意分布函数 $F(X)$ 的取值范围). 当 $0 < y < 1$ 时,$P(Y \leqslant y) = P(F(X) \leqslant y) = P\left(X \leqslant F^{-1}(y)\right) = F\left(F^{-1}(y)\right) = y$. 因此 $Y = F(X) \sim U(0,1)$, $P(F(X) > E(X) - 1) = P\left(Y > \frac{1}{3}\right) = \frac{2}{3}$.

注: 事实上我们在这里证明了一个很重要的结论: 如果 X 是一个连续型随机变量, $F(X)$ 是它的分布函数, 则随机变量 $Y = F(X) \sim U(0,1)$

16. 设函数 $y(x)$ 是微分方程 $y' + xy = e^{-\frac{x^2}{2}}$ 满足条件 $y(0) = 0$ 的特解

(1) 求 $y(x)$.

(2) 求曲线 $y = y(x)$ 的凹凸区间及拐点.

解:

(1) 由条件可得 $\left(y\mathrm{e}^{\frac{1}{2}x^2}\right)' = \mathrm{e}^{\frac{1}{2}x^2}(y' + xy) = 1$,于是 $ye^{\frac{1}{2}x^2} = x + C$. 由 $y(0) = 0$ 可知

$C=0, y=x\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}x^2}$.

(2) 计算可得 $y'=\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}x^2}\left(1-x^2\right)$, $y''=\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}x^2}\left(x^3-3x\right)$, 令 $y''=0$ 得 $x=0,\pm\sqrt{3}$. 再根据二阶导数的符号可得凹区间为 $(-\sqrt{3},0)$ 和 $(\sqrt{3},+\infty)$, 凸区间为 $(-\infty,-\sqrt{3})$ 和 $(0,\sqrt{3})$.

拐点为 $(0,0),\left(-\sqrt{3},-\sqrt{3}\mathrm{e}^{-\frac{3}{2}}\right),\left(\sqrt{3},\sqrt{3}\mathrm{e}^{-\frac{3}{2}}\right)$

17. 设 a,b 为实数, 函数 $z=2+ax^2+by^2$ 在点 $(3,4)$ 处的方向导数中, 沿方向 $l=-3i-4j$ 的方向导数最大, 最大值为 10.

(1) 求 a,b;

(2) 求曲面 $z=2+ax^2+by^2(z\geqslant 0)$ 的面积.

解:

(1) 多元函数在一点处方向导数的最大值是

沿着梯度方向的方向导数, 且最大值等于梯度的模. 由条件可得 $\mathrm{grad}\, z = (2ax, 2by)$, 于是 $\mathrm{grad}\, z|_{(3,4)} = (6a, 8b)$, 因此 $\frac{6a}{-3} = \frac{8b}{-4}$ 且 $a, b < 0$, 解得 $a = b$. 再由 $10 = \sqrt{(6a)^2 + (8b)^2}$ 可得 $a = b = -1$

(2) 记曲面 $z = 2 - x^2 - y^2$ 在 xOy 面的投影区域为 $D : x^2 + y^2 \leqslant 2$, 则曲面的面积为

$$S = \iint_D \sqrt{1 + (-2x)^2 + (-2y)^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$= \iint_D \sqrt{1 + 4x^2 + 4y^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$= \int_0^{2\pi} \mathrm{d}\theta \int_0^{\sqrt{2}} \sqrt{1 + 4r^2} r\mathrm{d}r = \frac{13}{3}\pi$$

18. 求曲线 $y = \mathrm{e}^{-x} \sin x (x \geqslant 0)$ 与 x 轴之间图形的面积.

解: 利用直角坐标系下的面积公式可得所求面积为

$$
\begin{aligned}
S &= \int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-x}|\sin x|\mathrm{d}x = \sum_{n=0}^{\infty} \int_{n\pi}^{(n+1)\pi} \mathrm{e}^{-x}|\sin x|\mathrm{d}x \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \int_0^{\pi} \mathrm{e}^{-(n\pi+t)}|\sin(n\pi+t)|\mathrm{d}t \\
&= \int_0^{\pi} \mathrm{e}^{-t}\sin t\mathrm{d}t \sum_{n=0}^{\infty} \mathrm{e}^{-n\pi} \\
&= \frac{1+\mathrm{e}^{-\pi}}{2} \cdot \frac{1}{1-\mathrm{e}^{-\pi}} = \frac{\mathrm{e}^{\pi}+1}{2\left(\mathrm{e}^{\pi}-1\right)}
\end{aligned}
$$

其中利用两次分部积分可得 $\int_0^{\pi} \mathrm{e}^{-t}\sin x\mathrm{d}t = \frac{1+\mathrm{e}^{-\pi}}{2}$.

19. 设 $a_n = \int_0^1 x^n \sqrt{1-x^2}\mathrm{d}x (n = 0, 1, 2, \cdots)$.

(1) 证明: 数列 a_n 单调减少, 且 $a_n = \frac{n-1}{n+2} a_{n-2} (n = 2, 3, \cdots)$;

(2) 求 $\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{a_{n-1}}$.

解:

(1) 当 $0<x<1$ 时,$x^n\sqrt{1-x^2}>x^{n+1}\sqrt{1-x^2}$,因此由 a_n 的定义可知 $a_n>a_{n+1}$，即数列 a_n 单调减少. 利用分部积分可得

$$
\begin{aligned}
&a_n\\
&=\int_0^1 x^n\sqrt{1-x^2}\mathrm{d}x\\
&=\frac{1}{n+1}x^{n+1}\ \sqrt{1-x^2}\Big|_0^1+\frac{1}{n+1}\int_0^1\frac{x^{n+2}}{\sqrt{1-x^2}}\\
&=-\frac{1}{n+1}a_n-\frac{1}{n+1}\int_0^1\mathrm{d}\sqrt{1-x^2}\\
&=-\frac{1}{n+1}a_n+\frac{n-1}{n+1}a_{n-2}
\end{aligned}
$$

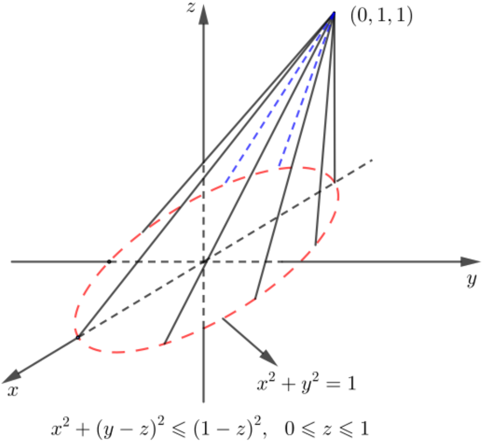
因此 $\frac{n+2}{n+1}a_n=\frac{n-1}{n+1}a_{n-2}$,即 $a_n=\frac{n-1}{n+2}a_{n-2}(n=2,3,\cdots)$.

(2) 由于 $\frac{n-1}{n+2}<\frac{a_n}{a_{n-2}}<\frac{a_n}{a_{n-1}}<\frac{a_n}{a_n}=1$, 由夹逼准则知 $\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{a_{n-1}}=1$

20. 设 Ω 是锥面 $x^2+(y-z)^2=(1-z)^2(0\leqslant z\leqslant 1)$ 与

平面 $z=0$ 围成的锥体, 求 Ω 的形心坐标.

解：这题并不是一般的圆锥面, 为此我们给出锥面的一般定义: 过定点 V 的动直线 L 沿着一条确定的曲线 Γ 移动所形成的曲面 S 叫做锥面. 直线 L 称为 S 的母线, 曲线 Γ 称为 S 的准线, 而定点 V 则是 S 的顶点. 在本题中, 锥面与 xOy 面的交线 $x^2+y^2=1, z=0$ 就是母线, 顶点则是 $(0,1,1)$, 如右图. 此锥面在 xOy 面的投影区域就是 $D=\left\{(x,y)|x^2+y^2\leqslant 1\right\}$, 因此这题我们采用切片法 (先二后一) 计算.



第 19 题图

设形心坐标为 $(\overline{x}, \overline{y}, \overline{z})$, 由于 Ω 是关于 yOz 面对称的, 由对称性可知 $\overline{x} = 0$. 对固定的 z, 记 $D_z = (x, y)|x^2 + (y - z)^2 \leqslant (1 - z)^2$, 利用切片法可得

$$\iiint_\Omega \mathrm{d}V = \int_0^1 \mathrm{d}z \iint_{D_z} \mathrm{d}x\mathrm{d}y = \pi \int_0^1 (1 - z)^2 \mathrm{d}z = \frac{\pi}{3}$$

$\iiint_\Omega z\mathrm{d}V = \int_0^1 \mathrm{d}z \iint_{D_z} z\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \pi \int_0^1 z(1-z)^2\mathrm{d}z = \frac{\pi}{12}$ $\iiint_\Omega y\mathrm{d}V = \int_0^1 \mathrm{d}z \iint_{D_z} y\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \pi \int_0^1 z(1-z)^2\mathrm{d}z = \frac{\pi}{12}$

其中积分 $\iint_{D_z} y\mathrm{d}x\mathrm{d}y$ 中, 令 $y-z=u, \mathrm{d}y=\mathrm{d}u$, 则

$\iint_{D_z} y\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \iint_{x^2+u^2\leqslant(1-z)^2}(u+z)\mathrm{d}x\mathrm{u} = \pi z(1-z)^2$

因此利用形心坐标公式得 $\bar{y}=\bar{z}=\frac{\pi/12}{\pi/3}=\frac{1}{4}$, 形心坐标为 $\left(0,\frac{1}{4},\frac{1}{4}\right)$.

21. 设向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1=(1,2,1)^{\mathrm{T}}, \boldsymbol{\alpha}_2=(1,3,2)^{\mathrm{T}}, \boldsymbol{\alpha}_3=(1,a,3)^{\mathrm{T}}$ 为 $\mathbb{R}^3$ 的一组基,$\boldsymbol{\beta}=(1,1,1)^{\mathrm{T}}$ 在这组基下的坐标为 $(b,c,1)^{\mathrm{T}}$.

(1) 求 a,b,c;

(2) 证明:α_2,α_3,β 为 $\mathbb{R}^3$ 的一组基, 并求 α_2,α_3,β 到 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 的过渡矩阵.

解:

(1) 由题意可知 $b\boldsymbol{\alpha}_1 + c\boldsymbol{\alpha}_2 + \boldsymbol{\alpha}_3 = \boldsymbol{\beta}$, 即 $\begin{cases} b+c+1=1 \\ 2b+3c+a=1 \\ b+2c+3=1 \end{cases}$, 解得 $a=3, b=2, c=-2$.

(2) 由于 $\left|\alpha_2, \alpha_3, \beta\right| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 3 & 3 & 1 \\ 2 & 3 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & -1 \end{vmatrix}$ $2 \neq 0$, 因此 $r(\boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\beta}) = 3$, 这说明 $\alpha_2, \alpha_3, \beta$ 是 $\mathbb{R}^3$ 的一组基. 再由 $(\boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_3, \boldsymbol{\beta}) = (\boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_3, 2\boldsymbol{\alpha}_1 - 2\boldsymbol{\alpha}_2 + \boldsymbol{\alpha}_3) = (\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_3)\begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

可得

$$(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3)=(\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\beta})\begin{pmatrix}0&0&2\\1&0&-2\\0&1&1\end{pmatrix}^{-1}=$$

$$(\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\beta})\begin{pmatrix}1&1&0\\-1/2&0&1\\1/2&0&0\end{pmatrix},$$ 所以 α_2,α_3,β

到 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 的过渡矩阵为 $\begin{pmatrix}1&1&0\\-1/2&0&1\\1/2&0&0\end{pmatrix}$.

22. 已知矩阵 $A = \begin{pmatrix} -2 & -2 & 1 \\ 2 & x & -2 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$ 与 $\boldsymbol{B} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & y \end{pmatrix}$ 相似.

(1) 求 x,y;

(2) 求可逆矩阵 P 使得 $\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P} = \boldsymbol{B}$.

解:

(1) 由相似矩阵的性质可得

$$\begin{cases} |A| = |\boldsymbol{B}| \\ \mathrm{tr}(\boldsymbol{A}) = \mathrm{tr}(\boldsymbol{B}) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 4x - 8 = -2y \\ -2 + x - 2 = 2 - 1 + y \end{cases}$$

解得 $x = 3, y = -2$.

(2) B 是上三角矩阵, 因此 A, B 的特征值均为 2, 1, 2. 对矩阵 B, 当 $\lambda_1 = 2$ 时, 由方程 $(2\boldsymbol{E} - \boldsymbol{B})\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ 可得 λ_1 的一个特征向量

$\xi_1 = (1,0,0)^{\mathrm{T}}$; 当 $\lambda_2 = -1$ 时，由方程 $(-E-B)x = 0$ 可得 λ_2 的一个特征向量 $\xi_1 = (-1,3,0)^{\mathrm{T}}$; 当 $\lambda_3 = -2$ 时，由方程 $(-2E-B)x = 0$ 可得 λ_3 的一个特征向量 $\xi_1 = (0,0,1)^{\mathrm{T}}$.

取 $P_1 = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, 则 $\boldsymbol{P}_1^{-1}\boldsymbol{B}\boldsymbol{P}_1$ $= \mathrm{diag}\{2,-1,-2\}$.

同理对矩阵 A, 我们也可求出一组线性无关特征向量, 取 $P_2 = \begin{pmatrix} -1 & -2 & -1 \\ 2 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$, 则 $\boldsymbol{P}_2^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}_2 = \mathrm{diag}\{2,-1,-2\}$，故 $P_1^{-1}BP_1 = P_2^{-1}AP_2 \Rightarrow \left(P_2P_1^{-1}\right)^{-1} A \left(P_2P_1^{-1}\right) = B$, 因此当取 $P = P_2P_1^{-1}$

$$=\begin{pmatrix} -1 & -2 & -1 \\ 2 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix} -1 & -1 & -1 \\ 2 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$ 时, 则有 $\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P} = \boldsymbol{B}$.

23. 设随机变量 X 与 Y 相互独立, X 服从参数为 1 的指数分布, Y 的概率分布为 $P(Y=-1)=p, P(Y=1)=1-p(0<p<1)$. 令 $Z=XY$.

(1) 求 Z 的概率密度;

(2) p 为何值时, X 与 Z 不相关;

(3) X 与 Z 是否相互独立?

解:

(1) X 的分布函数为 $F_X(x) = \begin{cases} 1-\mathrm{e}^{-x}, & x>0 \\ 0, & x\leqslant 0 \end{cases}$,

由 X, Y 的独立性可得 Z 的分布函数

$$
\begin{aligned}
F_Z(z) &= P(Z\leqslant z) \\
&= P(XY\leqslant z) \\
&= P(X\geqslant -z, Y=-1) + P(X\leqslant z, Y=1) \\
&= pP(X\geqslant -z) + (1-p)P(X\leqslant z) \\
&= p\left(1-F_X(-z)\right) + (1-p)F_X(z) \\
&= \begin{cases} p\mathrm{e}^{z}, & z\leqslant 0 \\ (1-p)\left(1-\mathrm{e}^{-z}\right), & z>0 \end{cases}
\end{aligned}
$$

,

(2) 由条件可得

$\operatorname{Cov}(X,Z) = E(XZ) - EX \cdot EZ = EX^2 \cdot EY - E^2X \cdot EY = DX \cdot EY = 1-2p$, 因此当 $p = \frac{1}{2}$ 时, $\operatorname{Cov}(X,Z) = 0$, 即 $\rho_{XZ} = 0$. 因此 $= \frac{1}{2}$ 时, X 与 Z 不相关.

(3) 由 (2) 可知当 $p \neq \frac{1}{2}$ 时，X 和 Z 是相关的, 从而不独立. 而当 $p = \frac{1}{2}$ 时,

$$
\begin{aligned}
&P\left(X \leqslant \tfrac{1}{2}, Z \leqslant \tfrac{1}{2}\right) \\
&= P\left(X \leqslant \frac{1}{2}, XY \leqslant \frac{1}{2}\right) \\
&= \frac{1}{2}P\left(X \leqslant \frac{1}{2}, X \geqslant -\frac{1}{2}\right) + \frac{1}{2}P\left(X \leqslant \frac{1}{2}, X \leqslant \frac{1}{2}\right) \\
&= F\left(\frac{1}{2}\right) = 1 - \mathrm{e}^{-\frac{1}{2}}
\end{aligned}
$$

, 且 $P\left(x \leqslant \frac{1}{2}\right) = 1-\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}}$, $P\left(z \leqslant \frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2}P\left(x \leqslant \frac{1}{2}\right) \frac{1}{2}P\left(x \geqslant -\frac{1}{2}\right) = 1 - \frac{1}{2}\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}}$, 显然 $P\left(X \leqslant \frac{1}{2}, Z \leqslant \frac{1}{2}\right) \neq P\left(X \leqslant \frac{1}{2}\right)P\left(Z \leqslant \frac{1}{2}\right)$, 即 X,Z 不独立. 综上所述, X, Z 不独立.

24. 设总体 X 的概率密度为

$$f\left(x,\sigma^2\right)=\begin{cases}\frac{A}{\sigma}e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}, & x\geqslant\mu\\ 0, & x<\mu\end{cases}$$. μ 是已知参数, $\sigma>0$ 是未知参数, A 是常数. $X_1,X_2,\cdots,X_n$ 是来自总体 X 的简单随机样本.

(1) 求 A;

(2) 求 σ^2 的最大似然估计量.

解:

(1) 由概率密度的归一性可知

$\int_{-\infty}^{+\infty}f(x)\mathrm{d}x=1$, 即 $\int_{\mu}^{+\infty}\frac{A}{\sigma}e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}\mathrm{d}x$

$=\frac{A}{\sigma}\int_0^{+\infty}e^{-\frac{t^2}{2\sigma^2}}\mathrm{d}t$

$=\frac{\sqrt{2\pi}A}{2}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}e^{-\frac{t^2}{2\sigma^2}}\mathrm{d}t=A\sqrt{\frac{\pi}{2}}=1$, 得

$A=\sqrt{\frac{2}{\pi}}$.

(2) 设样本 $X_1,X_2,\cdots,X_n$ 对应的样本值为 $x_1,x_2,\cdot$

, 则似然函数

$L\left(\sigma^2\right)=\prod_{i=1}^{n}f\left(x_i;\sigma^2\right)$

$$= \begin{cases} \sqrt{\frac{2}{\pi}} \prod_{i=1}^{n} \frac{1}{\sigma} e^{-\frac{(x_i-\mu)^2}{2\sigma^2}}, & x_1, x_2 \cdots, x_n \geqslant \mu \\ 0 & \text{others} \end{cases}$$

当 $x_1, x_2, \cdots, x_n \geqslant \mu$ 时, 取对数 $\ln L(\sigma^2) = \sum_{i=1}^{n} \left[\ln \sqrt{\frac{2}{\pi}} - \frac{1}{2}\ln\sigma^2 - \frac{(x_i-\mu)^2}{2\sigma^2}\right]$, 令 $\frac{\mathrm{d}\ln L(\sigma^2)}{\mathrm{d}\sigma^2} = \sum_{i=1}^{n}\left[-\frac{1}{2\sigma^2} + \frac{(x_i-\mu)^2}{2\sigma^4}\right] = -\frac{n}{2\sigma^2} + \frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i-\mu)^2}{2\sigma^4} = 0$

解得 $\sigma^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\mu)^2$, 因此 σ^2 的最大似然估计量为 $\hat{\sigma}^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\mu)^2$.